UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

METODOS VARIACIONALES EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A N

SUSANA VICTORIA BARRERA

IGNACIO PEREZ PEREZ

México, D. F. 1985

T I T U L O

METODOS VARIACIONALES EN ECUACIONES

DIFERENCIALES PARCIALES

Alumnos :

Susana Victoria Barrera 7430690-1

Ignacio Pérez Pérez 7422080-5

Asesor :

M. en C. Jesús López Estrada

T I T U L O

METODOS VARIACIONALES EN ECUACIONES
DIFERENCIALES PARCIALES

Alumnos :

Susana Victoria Barrera 7430690-1

Ignacio Pérez Pérez 7422080-5

Asesor :

M. en C. Jesús López Estrada

I N D I C E

INTRODUCCION.

Este trabajo esta basado en unas notas de un curso impartido por L.A. Medeiros en Rio de Janeiro, Brasil [32].

El material presentado esperamos que sirva como material adicional para algunos cursos o seminarios sobre ecuaciones diferenciales parciales.

La meta principal de éste trabajo es introducir métodos variacionales que conducen al estudio de E.D.P. no-lineales , lo cual creemos es un área fértil para la investigación y que posee gran valor para las aplicaciones no triviales de la matemática.

Consideramos, que para tal objetivo, una exposición sencilla que contenga los resultados más importantes es necesaria. El trabajo trata de ser así.

Pensamos que las aplicaciones fuera de la matemática son importantes y pretendemos dar algunas de ellas.

El contenido esta dividido en tres capítulos.

En el capítulo I hacemos una breve revición de resultados sobre espacios de Sóbolev.

En el capítulo II damos resultados elementales sobre desigualdades variacionales en problemas estacionarios.

En el capítulo III se da un planteamiento variacional de ecuaciones que dependen del tiempo, demostrando existencia y unicidad de soluciones débiles que estan en ciertos - espacios.

Cabe agregar que los problemas tratados en el capítulo III también se pueden plantear en términos de desigualdades variacionales , pero no lo incluimos por considerar que la idea es suficientemente tratada para el caso estacionario.

Hacemos del conocimiento del lector que algunas demostraciones estan sólo superficialmente tratadas, esto es con el fin de no hacer demasiado complicada la exposición , pero damos la referencia en cada caso.

C A P I T U L O I.

RESULTADOS ELEMENTALES SOBRE ESPACIOS DE SOBOLEV.

1.1 Nociones sobre distribuciones.

Representaremos por $\mathbb{R}^n$ el espacio vectorial de n-adas $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de números reales. Representaremos la n-ada simplemente por x. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y Γ la frontera de Ω. Todas las funciones consideradas toman valores reales.

Representamos por $L^2(\Omega)$, el espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable en Ω con producto escalar

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Resulta que $L^2(\Omega)$, con este producto escalar, es un espacio de Hilbert. [24].

Diremos que el soporte de una función $f:\Omega \to \mathbb{R}$, es la cerradura del conjunto de puntos x para el cual $f(x)\neq 0$.

Cuando el soporte es acotado en Ω, será compacto y decimos que f tiene soporte compacto.

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ el subespacio vectorial de funciones $f:\Omega \to \mathbb{R}$, las cuales son infinitamente diferenciables y tienen soporte compacto contenido en Ω, con la noción de convergencia siguiente:

Sea (ϕ_n) una sucesión de $\mathcal{D}(\Omega)$, (ϕ_n) converge a ϕ, si se cumple que:

1. Las funciones ϕ_n tienen soporte contenido en un compacto fijo K de Ω.
2. La sucesión (ϕ_n) converge a ϕ uniformemente, y todas sus derivadas de ϕ_n convergen a la derivada correspondiente de ϕ, uniformemente en Ω.

Toda forma lineal T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, continua[1] en el sentido de la convergencia definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, es una distribución sobre Ω, denotaremos su valor en ϕ, $T(\phi)$, como $\langle T,\phi\rangle$.

Si U y V son dos espacios vectoriales, el conjunto de operadores lineales continuos de U en V, también es un espacio vectorial, denotado por $\mathcal{L}(U,V)$, en particular si $V=\mathbb{R}$ entonces $\mathcal{L}(U,\mathbb{R})$ es el espacio dual de U, denotado por U'.

Así que, $\mathcal{D}'(\Omega)=\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega),\mathbb{R})$ es el llamado espacio de distribuciones.

En $\mathcal{D}'(\Omega)$ es dada la topologia débil - estrella, como dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, y es un espacio vectorial localmente convexo con esta topología. El espacio vectorial y la convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es como sigue :

Si $S,T,T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $c\in\mathbb{R}$, entonces

$$(S+T)(\phi) = S(\phi) + T(\phi) \quad , \phi\in\mathcal{D}(\Omega)$$
$$(cT)(\phi) = cT(\phi) \quad , \phi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

$T_n \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, si y solo si $T_n(\phi)\to T(\phi)$ en $\mathbb{R}$, para cualquier $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

---

(1) $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ es continua si; dado $\phi_n\to\phi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, $T(\phi_n)$
$T(\phi_n)\to T(\phi)$ en $\mathbb{R}$.

1.1.1 La derivada de una distribución.

Sea $u \in C^1(\Omega)$ y $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, puesto que ϕ se anula idénticamente fuera de un subconjunto de Ω, obtenemos integrando por partes en la variable x_j

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) \phi(x) = - \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) dx.$$

Si $\alpha \in \mathbb{I}$, y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, integrando por partes $|\alpha|$ veces tenemos

$$\int_{\Omega} \left(D^{\alpha} u(x) \right) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \phi(x)\, dx$$

Esto motiva la siguiente definición de la derivada $D^{\alpha}T$ de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, en donde D^{α} indica

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

La derivada(1) de una distribución T se define como la única funcional $D^{\alpha}T$ que satisface

$$\langle D^{\alpha}T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\phi \rangle, \ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposición 1.2.1 $D^{\alpha}T$ es un elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Es claro que $D^{\alpha}T$ es lineal, demostraremos que es continua, esto es, si $\phi_n \longrightarrow \phi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, $T(\phi_n) \longrightarrow T(\phi)$ en $\mathbb{R}$.

---

(1) Derivada α-ésima .

<u>Demostración.</u> Sea (ϕ_i) una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_i \longrightarrow \phi$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cuando $i \to \infty$, en el sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$. Esto quiere decir que existe un compacto K tal que el soporte de ϕ_i esta contenido en K, $\forall i$, y que

$$(\phi_i^r) \longrightarrow \phi^r, \quad \forall r>0, \text{ cuando } i \to \infty \quad ,$$

y además por definición

$$\langle D^\alpha T, \phi_i \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi_i \rangle$$

por lo anterior

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi_i \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle$$

y

$$\langle D^\alpha T, \phi_i \rangle \longrightarrow \langle D^\alpha T, \phi \rangle$$

por lo tanto

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle = \langle D^\alpha T, \phi \rangle ,$$

así que esto significa que $D^\alpha T$ es continua.

Por lo tanto, si T esta en $\mathcal{D}'(\Omega)$, $D^\alpha T$ también es una distribución.

<u>Resultado 1.2.1</u> Si $u \in L^2(\Omega)$ entonces la forma lineal T_u definida en $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, dx$$

es una distribución sobre Ω .

Daremos la idea de la demostración, es claro que T_u, - así definida es una funcional lineal. Para ver que es continua, supongamos que $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces existe un subconjunto K, $K\subset\Omega$, tal que sopp$(\phi_n-\phi)\subset K$, donde sopp ϕ denota el soporte de ϕ, para $n=1,2,\ldots,$. Así

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x\in K}|\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K u(x)\, dx.$$

El lado derecho de la desigualdad tiende a cero cuando $n\to\infty$, puesto que $\phi_n\to\phi$ uniformemente sobre K.

Este resultado es fundamental para entender los espacios de Sóbolev, nos dice que toda función de $L^2(\Omega)$ define una distribución T_u sobre Ω. T_u esta unívocamente definida por u, permitiendonos identificar u de $L^2(\Omega)$ con T_u en $\mathcal{D}'(\Omega)$ la distribución que ella define. Así que u en $L^2(\Omega)$ tiene - derivadas de todos los ordenes en el sentido de las distribuciones.

1.1.2 Derivadas débiles.

Definimos el concepto de derivada débil de una función de cuadrado integrable. Sea u en $L^2(\Omega)$, diremos que u tiene derivada débil de orden α, si existe v_α en $L^2(\Omega)$ tal que ,

$$\langle D^\alpha T_u , \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_u , D^\alpha \phi\rangle=\langle v_\alpha , \phi\rangle .$$

Si tal función v_α existe, esta es única fuera de un -- conjunto de medida cero.

Si u es suficientemente suave para que tenga derivadas continua $D^{\alpha}u$ en el sentido clásico (usual), entonces $D^{\alpha}u$ es también derivada débil de u . $D^{\alpha}u$ puede existir en el sentido débil sin existir en el sentido clásico . Por ejemplo la función $|x|$ no tiene derivada en el sentido clásico pero tiene derivada débil , esto es, $|x| : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\Omega = (a,b)$, $a < 0 < b$

$$\langle |x|', \phi \rangle = -\langle |x|, \phi' \rangle = -\left[\int_a^0 x\phi' + \int_0^b x\phi' \right]$$

$$= -\int_a^0 \phi \, dx + \int_0^b \phi \, dx$$

$$= \langle \operatorname{sgn} x, \phi \rangle, \ \forall \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

en donde $\operatorname{sgn} x = 1$ si $x > 0$, $= -1$ si $x < 0$, $\operatorname{sgn} x \in L^2(\Omega)$.

Por lo tanto $\operatorname{sgn} x$ es derivada débil de $|x|$.

1.2 Los espacios de Sóbolev $W^{m,2}(\Omega)$.

De aquí en adelante $D^\alpha u$ denota la α-esima derivada débil. Consideremos el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ de funciones $u(x)$ en Ω definido por

$$W^{m,2}(\Omega) = \{u : u \in L^2(\Omega) \text{ y } D^\alpha u \in L^2(\Omega) ;\ \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

con m en $\mathbb{N}$, $m \neq 0$, Ω es un abierto acotado. Defininimos el producto interno en $W^{m,2}(\Omega)$ como

$$(u,v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

y la norma asociada es

$$\|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2} = \left[(u,u)_{W^{m,2}(\Omega)}\right]^{1/2}.$$

El espacio $W^{m,2}(\Omega)$ así definido le llamaremos espacio de Sóbolev de orden m.

Teorema 1.2.1 $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Primero demostraremos que $W^{m,2}(\Omega)$ es completo.
Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{m,2}(\Omega)$. Ya que

$$\|D^\alpha u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n\|_{W^{m,2}(\Omega)}$$

entonces $D^{\alpha}u_n$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Así que — converge a un v_α $\forall$ $|\alpha|\leq m$. Tomamos $\alpha = (0,0,\ldots,0)$, esto es — $v_{(0,0,\ldots,0)} = u$, por lo que (u_n) converge a u en el sentido de $L^2(\Omega)$, y por lo tanto en el sentido de las distribuciones, resultando que $(D^{\alpha}u_n)$ converge en el sentido de las distribuciones a $D^{\alpha}u$, así $D^{\alpha}u = v_\alpha$, resultando que $D^{\alpha}u$ esta en $L^2(\Omega)$, para toda $|\alpha|\leq m$, demostrando así que $W^{m,2}$ es completo.

<u>Proposición 1.2.1</u> El espacio $W^{1,2}(\Omega)$ es separable.

<u>Demostración:</u> sea τ la aplicación

$$\tau: W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times\ldots\times L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^{n+1}$$

definida por

$$\tau(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) .$$

es simple ver que τ es una isometría, esto es,

$$\|\tau(u)\|_{(L^2(\Omega))^{n+1}} = \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

Así que podemos identificar $W^{1,2}(\Omega)$ con un subespacio V cerrado de $(L^2(\Omega))^{n+1}$. Ya que $L^2(\Omega)$ es separable entonces $(L^2(\Omega))^{n+1}$ también lo es. Luego V es separable[1], por lo que $W^{1,2}(\Omega)$ lo es, lo mismo pasa para el espacio de Hilbert $W^{m,2}(\Omega)$, puesto que $W^{m,2}(\Omega)\subset W^{1,2}(\Omega)$ y todo subespacio de un espacio separable es separable[1].

(1) ver [36]

Proposición 1.2.2 Si Ω es acotado, entonces $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $W^{1,2}(\Omega)$.

Demostración: Para cualquier Ω, tenemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. Sea ϕ en $\mathcal{D}(\Omega)$ y sea $\tilde{\phi}$ la extensión de ϕ a $\mathbb{R}^n$, nula en el complemento de Ω. Consideramos la aplicación τ definida por $\tau(\phi) = \tilde{\phi}$

$$\tau : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

tenemos

$$\|\tau\phi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad , \forall\phi \text{ en } \mathcal{D}(\Omega).$$

La función τ es lineal continua, por lo que τ puede ser extendida por continuidad a una función $\tilde{\tau}$ de el cerrado de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$ al espacio $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, siendo $\tilde{\tau}v=\tilde{v}$, para -- toda v en este cerrado.

En donde $\tilde{v}$ representa la extensión de v nula fuera de Ω.

Entonces si este cerrado fuese $W^{1,2}(\Omega)$, concluiríamos que a toda v en $W^{1,2}(\Omega)$ estaría asociada una extensión $\tilde{v}$ en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Esta conclusión es falsa, ya que si tomamos $\Omega = (0,1)$ y $v=1$ en $(0,1)$, tenemos que v esta en $W^{1,2}(\Omega)$ pero $\tilde{v}$ no esta en $W^{1,2}(\mathbb{R})$, pues $\tilde{v}' = \delta_0 + \delta_1$, no pertenece a -- $L^2(\mathbb{R})$.

Ya que $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $W^{1,2}(\Omega)$ tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.2.1 Denotaremos por $W_0^{1,2}(\Omega)$ a la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$.

1.3 Caracterización del dual de $W_0^{1,2}(\Omega)$

Sea f una forma lineal continua sobre $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Demostraremos que existen n+1 funciones $v_0, v_1, \dots, v_n$ en $L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle f, \phi \rangle = \langle v_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \phi \rangle .$$

Sea $\mathcal{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow (L^2(\Omega))^{n+1}$ definida por

$$\mathcal{T}(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

ya vimos que $\mathcal{T}(W_0^{1,2}(\Omega))$ es un subespacio de $(L^2(\Omega))^{n+1}$, por que $\mathcal{T}$ es una isometría y $W_0^{1,2}(\Omega)$ es completo. Por hipótesis f es una forma lineal continua sobre $W_0^{1,2}(\Omega)$, por lo tanto definimos una forma lineal f_0 sobre el subespacio $\mathcal{T}(W_0^{1,2}(\Omega))$ del modo siguiente

$$\langle f_0, \mathcal{T}u \rangle = \langle f, u \rangle$$

o

$$\langle f_0, (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) \rangle = \langle f, u \rangle .$$

La forma f_0 es continua, porque para todo $v = \mathcal{T}u$, se tiene:

$$f_0(v) = \langle f_0, v \rangle = \langle f, \mathcal{T}^{-1} v \rangle = f(\mathcal{T}^{-1} v) = (f \circ \mathcal{T}^{-1})(v)$$

para toda v en el subespacio $\mathcal{T}(W_0^{1,2}(\Omega))$, por lo que $f_0 = f \circ \mathcal{T}$ es la composición de dos continuas.

A continuación, describiremos como obtener la extensión $\tilde{f}_0$ de f_0 a todo el espacio $(L^2(\Omega))^{n+1}$. Empezaremos considerando el complemento ortogonal de $\mathscr{C}(W_0^{1,2}(\Omega))$ en $(L^2(\Omega))^{n+1}$, es decir, el conjunto de elementos $u \in (L^2(\Omega))^{n+1}$ tal que para toda $w \in \mathscr{C}(W_0^{1,2}(\Omega))$ se tiene $(u,w)_{(L^2(\Omega))^{n+1}} = 0$.

Cada v en $(L^2(\Omega))^{n+1}$ se descompone unívocamente, en la suma $v=u+w$ con $u \in \mathscr{C}(W_0^{1,2}(\Omega))$ y $w \in \mathscr{C}(W_0^{1,2}(\Omega))^{\perp}$.

Definimos $\tilde{f}_0$ como cero en el complemento ortogonal y como f en $\mathscr{C}(W_0^{1,2}(\Omega))$, de esta forma $\tilde{f}_0$ extiende f_0 sobre todo $(L^2(\Omega))^{n+1}$.

Observación 1.3.1 Si H, V son dos espacios de Hilbert y f_0 esta en $(H\times V)'$, entonces existe un único $w_0 = (u_0,v_0)$ en $H\times V$ tal que

$$\langle f_0,w\rangle = (w_0,w)_{H\times V} = (u_0,u)_H + (v_0,v)_V \quad ;$$

donde $w = (u,v)$ esta en $H\times V$.

De esta observación tenemos que siendo $\tilde{f}_0$ continua en $((L^2(\Omega))^{n+1})'$, existe un único $(w_0,w_1,\ldots,w_n)$ en $(L^2(\Omega))^{n+1}$ que cumple con

$$\langle \tilde{f}_0,(u_0,u_1,\ldots,u_n)\rangle = (w_0,u_0)_{L^2(\Omega)} +\ldots+ (w_n,u_n)_{L^2(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega w_0(x)u_0(x)dx +\ldots+ \int_\Omega w_n(x)u_n(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega w_i(x)u_i(x)dx.$$

Recordemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Del hecho de que

$$\langle \tilde{f}_0, \tau\phi\rangle = \langle f_0, (\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n})\rangle = \langle f, \phi\rangle$$

tenemos

$$\langle f, \phi\rangle = \langle f_0, \tau\phi\rangle = \langle \tilde{f}_0, \tau\phi\rangle$$

o

$$\begin{aligned}\langle f, \phi\rangle &= \langle f_0, (\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n})\rangle = \\ &= \int_\Omega w_0(x)\phi(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega w_i(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx \\ &= \int_\Omega w_0(x)\phi(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_i}\phi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega (w_0(x) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i}{\partial x_i})\phi(x)\,dx\end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene integrando por partes, si tomamos en esta , $v_0 = w$, $v_i = -w_i$, se concluye que existen -- $v_0, v_1, \ldots, v_n$ funciones en $L^2(\Omega)$ tal que :

$$\langle f, \phi\rangle = \langle v_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i}{\partial x_i}, \phi\rangle \qquad \forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Reciprocamente si $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ pertenecen a $L^2(\Omega)$, entonces

$$f = v_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

es una funcional lineal continua sobre $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Para verificar esta afirmación basta notar que si $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ pertenecen a $L^2(\Omega)$, entonces cada v_i define una distribución

$$(v_i, \phi) = \int_\Omega v_i\,\phi\,dx \qquad \forall\ \phi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

cuyas derivadas esten dadas por :

$$\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \phi \rangle = -\langle v_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle = -\int_\Omega v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \quad .$$

Para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$|\langle f, \phi \rangle| \le \int_\Omega |v_0 \phi|\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} v_i \right| dx$$

$$\le \|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v_i\|_{(L^2(\Omega))^{n+1}} \quad .$$

De donde concluimos que f es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$ con norma de $W_0^{1,2}(\Omega)$ .Luego f se extiende por continuidad a una funcional continua en el cerrado $W_0^{1,2}(\Omega)$.

1.4 Inmersión de los espacios de Sóbolev.

Ahora empezamos la investigación de varias propiedades del espacio de Sóbolev $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Básicamente estas propiedades estan relacionadas con el grado de suavidad que puede tener una función que esta en cierto espacio de Sóbolev . Concretamente las relaciones a las cuales nos referimos son los teoremas de inmersión , puesto que ellos describen la forma para dar espacios de Sóbolev $W_0^{m,2}(\Omega)$ que pueden ser mapeados continuamente en otros espacios .

Consideremos dos espacios de Hilbert V,H, tal que $V \subset H$, decimos que V esta inmerso en H si existe una constante $M>0$ tal que

$$\|Ix\|_H \le M \|x\|_V \text{ ; con I el mapeo identidad de V en H.}$$

Si I transforma sucesiones de V que son débilmente convergentes en V, en sucesiones de H fuertemente convergentes en H, decimos que la inmersión es compacta.

Teorema 1.4.1 (Rellich) La inmersión del espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, es compacta, siendo Ω un abierto acotado.

Demostración. Ya que

$$\|I(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

la inmersión es continua. Queda probar que si $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y la sucesión (u_n) converge débilmente a cero en $W_0^{1,2}(\Omega)$, entonces converge fuertemente a cero en $L^2(\Omega)$.

Para lo cual tomamos $\tilde{u}_n$ la extensión de u_n a $\mathbb{R}^n$ nula fuera de Ω.

Se tiene $\tilde{u}_n \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, la sucesión $(\tilde{u}_n)$ converge débilmente a cero en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, luego débilmente convergente a cero en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\hat{\tilde{u}}_n$ la transformada de Fourier de $\tilde{u}_n$, esto es,

$$\hat{\tilde{u}}_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_n(x) \exp(2\pi i(x,\xi))dx$$

con $(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ para $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, ya que Ω es acotado resulta que $\exp(2\pi i(x,\xi))$ esta en $L^2(\Omega)$. Dado que $L^2(\Omega) \subset W^{-1,2}(\Omega)$, entonces $\exp(2\pi i(x,\xi))$ esta en $W^{-1,2}(\Omega)$(1), cualquiera que sea ξ. De igual manera si fijamos ξ, como $(\tilde{u}_n)$ converge débilmente a cero en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, en particular $\tilde{u}_n$ ---

(1) $W^{-1,2}(\Omega) = (W^{1,2}(\Omega))^*$

converge a cero débilmente en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (1). Luego

(1) $\hat{u}_n(\xi) \longrightarrow 0$, para casi toda ξ en $\mathbb{R}^n$.

Como $(\tilde{u}_n)$ converge débilmente en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, entonces es acotada en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ (ver (24)), y por lo tanto en $L^2(\mathbb{R}^n)$, esto es, existe una constante $C>0$, tal que

$$\|\tilde{u}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < C .$$

De la desigualdad de Schwartz, siendo Ω acotado, se concluye que :

$$\left|\hat{\tilde{u}}_n(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_n(x)| \left|e^{2\pi i(x,\xi)}\right| dx \leq C_0 \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

esto es,

(2) $\quad \left|\hat{\tilde{u}}_n(\xi)\right| \leq C_1, \ \forall\ v, \xi$.

<u>Observación 1.4.1</u> Se tiene que

$$\|\hat{\tilde{u}}_n(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\tilde{u}_n(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(Teorema de Plancherel).

Se puede ver que la norma en $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la que sigue

$$\|\tilde{u}_n\|_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}_n(\xi)|^2 \, d\xi \ .$$

---

(1) Esto porque $L^2(\mathbb{R}^n) \subset (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))^*$, mediante la aplicación $h \longrightarrow h + \sum D^\alpha$.

Debemos probar que (u_n) converge a cero en $L^2(\Omega)$, esto es,

$$\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ , si } n \longrightarrow \infty \text{ .}$$

Tenemos por el teorema de Plancherel

$$\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int_{|\xi|<R} |\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq R} |\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 d\xi \text{ .}$$

Es suficiente demostrar que para toda $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ suficientemente grande, de tal forma que la segunda integral sea menor que $\varepsilon/2$ y un k_0 tal que para $n > k_0$ la primera integral sea menor que $\varepsilon/2$.

Segunda integral. De acuerdo con la expresión de la norma en $H^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dada en la observación 1.4.1, tenemos

$$\int_{|\xi|\geq R} |\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi|\geq R} (1+|\xi|^2)\,|\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-1} d\xi$$

$$\leq (1+R^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)\,|\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 d\xi < C_0 (1+R^2)^{-1}$$

porque $\|\tilde{u}_n\|_{H^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$ es acotada. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $C_0(1+R^2)^{-1} < \varepsilon/2$

Primera integral. De (1), (2) y del teorema de convergencia acotada de Lebesgue, se concluye

$$\int_{|\xi|<R} |\hat{\tilde{u}}_n(\xi)|^2 d\xi \longrightarrow 0 \text{ , cuando } n \longrightarrow \infty \text{ ,}$$

mostrando que existe k_o tal que para toda $n > k_o$ la primera integral es menor que $\varepsilon/2$. De este modo queda demostrado el teorema de Rellich.

Observación 1.4.2 fue esencial en la demostración del teorema de Rellich que $\tilde{u}_n$ pertenezca a $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Dado un abierto cualquiera Ω, no es cierto que la extensión $\tilde{u}_n$ pertenezca a $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Pues ello requiere condiciones adicionales sobre la frontera de Ω, volveremos a tratar este punto en la sección 1.6 .

1.5 Normas equivalentes en $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$.

La norma en $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\|u\|^2_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ó

$$\|u\|^2_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|\widehat{D^\alpha u(x)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

siendo

$$\widehat{D^\alpha u(x)} = (i\xi)^{|\alpha|}\hat{u}(\xi),$$ se obtiene

$$\|u\|^2_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \quad .$$

Observación 1.4.3 Se cumple la siguiente desigualdad

$$(1+|\xi|^2)^m \leq C \sum_{|\alpha|\le m} |\xi|^{2|\alpha|} \leq C_o \, (1+|\xi|^2)^m$$

con C, C_o constantes positivas y ξ en $\mathbb{R}^n$.

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad de la observación 1.4.3 por $|\hat{u}(\xi)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, para u en $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ e integrando sobre $\mathbb{R}^n$, se obtiene :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq C \|u\|^2_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

de lo que resulta que la aplicación

$$u \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

define una norma en $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ equivalente a la norma originalmente definida. Se escribe

$$\|u\|^2_m = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

1.6 <u>Los abiertos bien regulares.</u>

A continuación estudiaremos, no con tanta profundidad el caso de abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$ para los cuales vale el teorema de inmersión de Rellich, si quisiéramos estudiarlo se encuentra el problema de no poder usar la transformada de Fourier en general , como mencionamos en la observación 1.4.2 , tales abiertos son llamados bien regulares , habiendo varias caracterizaciones para ellos . En esta breve introducción, haremos solo consideraciones intuitivas para ciertos tipos de abiertos bien regulares.

Representamos por $\mathbb{R}^n_+$ al siguiente conjunto

$$\mathbb{R}^n_+ = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \; ; \; x_n > 0 \right\}.$$

Para Hacer más simple la notación tomamos $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Al conjunto

$$\Gamma' = \left\{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n = 0 \right\}$$

se la llama la frontera de $\mathbb{R}^n_+$. Identificando de esta manera Γ' con $\mathbb{R}^{n-1}$.

De manera intuitiva, una clase de abiertos bien regulares esta formada por abiertos de Ω de fronteras Γ tales que Ω es localmente identificable con $\mathbb{R}^n_+$ y Γ es localmente identificable con $\Gamma' = \mathbb{R}^{n-1}$. La figura 1, nos da una idea de estas consideraciones.

Así el estudio de $W^{m,2}(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ se reduce al de $W^{m,2}(\mathbb{R}^n_+)$ y $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. A continuación estudiaremos los espacios $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$ y $W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$. Para iniciar representaremos por $C^1(\mathbb{R}^n_+)$ al espacio de restricciones a $\mathbb{R}^n_+$ de las funciones de $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. (ver (1)).

Se demuestra que $C^1(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ es denso en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$ pero $C^\infty_0(\mathbb{R}^n_+)$ no es denso en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$ [1]. Esto lo aceptamos sin demostración.

De esto tiene sentido definir $W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$ como el cerrado de $C^\infty_0(\mathbb{R}^n_+)$ en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

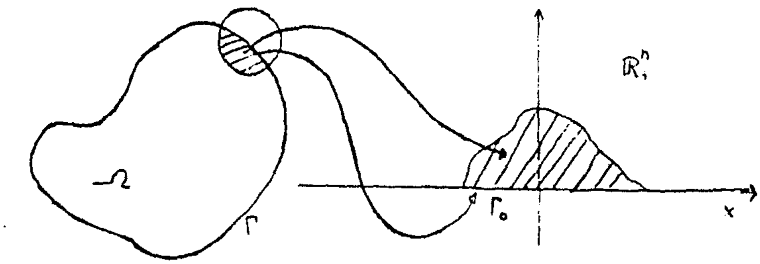


Figura 1.

1.7 Nociones elementales sobre trazas en $W^{1,2}(\Omega)$.

Dada una función v en $C^1(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ tiene sentido hablar de la restricción a la frontera Γ' de $\mathbb{R}^n_+$. Representamos por γ a la aplicación que a cada v en $C^1(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ le asocia su restricción a Γ', esto es,

(3) $$\gamma : C^1(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \longrightarrow L^2(\Gamma')$$
$$v \longrightarrow \gamma v = v(x',0).$$

Se demuestra facilmente que γv esta en $L^2(\Gamma')$, porque v esta en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Observemos que $\Gamma' = \mathbb{R}^{n-1}$. El paso siguiente consiste en extender a $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

Representaremos la extensión de γ como γ_0. La restricción γv de v a Γ' es llamada la traza de v y γ el operador-traza.

De este modo , la extensión γ_0 de γ es llamada también el operador traza. Solo falta demostrar la existencia de γ_0.

Al espacio imagen para el operador traza, se le llama - espacio traza. Uno de los problemas fundamentales consiste - en determinar el espacio traza. Para esta versión simple de γ_0 , nuestro espacio traza será $L^2(\Gamma')$. Existen otros espacios trazas. Para nuestros intereses con este será suficiente .

Siendo γ definida por (3) , una aplicación lineal, para demostrar la existencia de su extensión a $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$, basta demostrar que γ es acotada como aplicación de $C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ en --- $L^2(\Gamma')$, recordando que $\Gamma' = \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd} C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \arrow[r, hook, "I"] \arrow[dr, "\gamma"'] & W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) \arrow[d, "\gamma_0"] \\ & L^2(\Gamma') \end{tikzcd}$$

De hecho, sea v en $C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. Se tiene

$$|v(x',0)|^2 = -2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n}(x',x_n)\, v(x',x_n)\, dx_n$$

$$\leq 2\int_0^\infty |v(x',x_n)|\, \left|\frac{\partial}{\partial x_n}v(x',x_n)\right| dx_n \quad \text{(Schwartz)}$$

$$\leq 2\left(\int_0^\infty |v(x',x_n)|^2\, dx_n\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x_n}v(x',x_n)\right|^2 dx_n\right)^{1/2}$$

$$\leq \int_0^\infty |v(x',x_n)|^2\,dx_n + \int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x_n} v(x',x_n)\right|^2 dx_n .$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^{n-1}$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v^2(x',0)\,dx' \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty |v(x',x_n)|^2\,dx_n dx' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x_n} v(x',x_n)\right|^2 dx_n dx'$$

esto es

$$\int_{\Gamma'} |\gamma v|^2 d\Gamma' \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |v|^2 dx + \sum_{\nu=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial}{\partial x_\nu} v\right|^2 dx = \|v\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)}$$

obteniendose

$$\|v\|_{L^2(\Gamma')} \leq \|v\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)}$$

Hasta aquí hemos visto que γ es una aplicación lineal y continua, luego γ tiene una única extensión lineal y continua γ_0 a $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

La plicación γ_0 de $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$ en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, es denominada traza en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, así, si v esta en $W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$, $\gamma_0 v$ es una generalización de la noción de restricción de v a $\Gamma' = \mathbb{R}^{n-1}$.

Si v esta en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, entonces $\gamma_0 v = 0$ y será nula en $L^2(\Gamma')$. Se demuestra reciprocamente que, si $\gamma_0 v = 0$ entonces v esta en $W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Resumiendo obtuvimos lo siguiente :

$$\gamma_0 : W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

y además

$$W^{1,2}_0(\mathbb{R}) = \left\{ v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) : \gamma_0 v = 0 \right\} = \operatorname{Ker}(\gamma_0) .$$

Para el caso de un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ , bien regular, se obtiene :

$$\gamma_0 : W^{1,2}_0(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

y

$$W^{1,2}_0(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \right\} .$$

De este modo, los elementos de $W^{1,2}_0(\Omega)$ son los de $W^{1,2}(\Omega)$, que son nulos en Γ, en este sentido generalizado.

<u>Observación 1.4.4</u> Para finalizar este resumen sobre espacios de Sóbolev $W^{m,2}(\Omega)$, llamamos la atención de que hay otros teoremas de inmersión además del teorema de Rellich.

Para un estudio cuidadoso de esta cuestión, necesitamos introducir espacios con las derivadas en $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, estos serían los espacios $W^{m,p}(\Omega)$. Los teoremas de inmersión relacionan n, p, y m , haciendo inmersiones en ciertos espacios particulares de funciones (1).

Denotaremos a $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^{m,p}(\Omega)$.

C A P I T U L O I I

DESIGUALDADES VARIACIONALES

2.1 Introducción.

La importancia de las desigualdades variacionales ha sido demostrada en años recientes por Baiocchi, Stampacchia, Brezis y otros autores en una serie de investigaciones sobre problemas en Dinámica de fluidos y problemas de frontera libre (2, 3, 4 - 8, 10, 11,18,19).

Las desigualdades variacionales elípticas ocuparan nuestra atención en el presente capítulo , lo cual no resta importancia a las hiperbólicas o parabólicas, que también han sido extensamente tratadas por diversos autores por ejemplo, Duvaut (18,19), Brezis (12,13), y J.L.Lions (29,30).

El resultado más importante que nos ocupa es el teorema de Lions-Stampacchia, este teorema es una generalización del conocido lema de Lax-Milgram (33), demostraremos el teorema de Lions-Stampacchia y obtendremos como corolario el lema de Lax-Milgram, para lograr esto damos en 2.2 una serie de definiciones y resultados elementales los cuales se pueden consultar en (13,32,31).

En 2.4 nos referimos a problemas y aplicaciones del teorema de Lions-Stampacchia, basandonos en los trabajos (2, 3-5,10,42).

2.2 Resultados Preliminares.

Sea V un espacio de Hilbert real, por V' denotaremos al espacio dual de V, $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno en V y el mapeo

$$V' \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,x) \longrightarrow \langle f,x \rangle$$

la paridad entre V y V'.

Sea $a(u,v)$ una forma bilineal, continua y lineal en cada una de las variables u, v.

$$a(u,v) \; ; \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definición 2.2.1 Una forma bilineal $a(u,v)$ es simétrica si y solo si

$$a(u,v)=a(v,u) \quad , \forall \, u,v \text{ en } V.$$

Resultado 2.2.1 Un mapeo lineal y continuo

$$A: \quad V \longrightarrow V'$$

determina una forma bilineal via la paridad

(1) $$a(u,v) = \langle Au,v \rangle$$

con $a(u,v)$ continua.

Y viceversa , dadauna forma bilineal $a(u,v)$, el mapeo lineal

$$v \longrightarrow a(u,v) \quad \text{para } v \text{ en } V$$

determina una transformación lineal continua $A: \; V \longrightarrow V'$ la cual satisface (1) .(Lema de Riesz-Frechet [35]).

<u>Definición 2.2.2</u> La forma bilineal $a(u,v)$ es <u>definida positiva</u>[1] sobre V, si existe $C > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq C\|v\|^2 \quad , \text{ para } v \text{ en } V.$$

Consideremos la funcional J definida en V por :

$$J(v) = a(v, v) - 2 \langle f,v \rangle$$

en donde f esta en V' , $a(u,v)$ es simétrica, acotada y definida positiva . Empezaremos por estudiar el problema variacional que consiste en : minimizar J sobre K, K un subconjunto convexo cerrado de V , esto es, encontrar el $\operatorname{Inf}_{v \in K} J(v)$, este ínfimo existe y es único.

<u>Teorema 2.2.1</u> Sea $a(u,v)$ una forma bilineal sobre V, simétrica, acotada y definida positiva, Entonces para toda f en V' , existe un único u en K tal que

$$J(u) = \operatorname{Inf}_{v \in K} J(v)$$

<u>Demóstración.</u>

La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno sobre V.

Dado que $a(\cdot,\cdot)$ es definida positiva y continua tenemos

$$C\|v\|^2 \leq a(v,v) \leq C_1 \|v\|^2 \quad ,$$

esto es,

$$C\|v\| \leq \sqrt{a(v,v)} \leq C_1\|v\| \quad ,$$

por lo que, la norma asociada al producto interno es equivalente a la norma dada en V.

---

(1) También se le conoce como coercitiva.

Por lo tanto el espacio V es un espacio de Hilbert con este producto.

Por el teorema de representación de Riesz, existe un elemento $\sigma f \in V$, tal que

$$\forall v \in V, \quad \langle f,v \rangle = a(\sigma f,v),$$

por lo que reescribiendo la funcional J(v) obtenemos

$$J(v) = a(v,v) - 2a(\sigma f,v)$$
$$= 2a(v-\sigma f,v-\sigma f) - 2a(\sigma f,\sigma f).$$

Por lo que minimizar J se reduce a minimizar la distancia entre σf y el conjunto K, con respecto a la norma a(v,v)

Por lo que, la solución es la proyección de σf sobre K, con respecto al producto interno $a(\cdot,\cdot)$.

Ya que K es un subconjunto cerrado convexo de V, entonces por el teorema de la proyección [35], tal proyección existe y es única.

<u>Teorema 2.2.2</u> Sea a(u,v) una forma bilineal sobre V, simétrica, acotada y definida positiva, entonces un u en K minimiza la funcional J(v) en K <u>si y solo si</u> u satisface la siguiente desigualdad

(2) $$a(u,v-u) \geq \langle f,v-u \rangle, \ \forall \ v \text{ en } K.$$

((2) es llamada desigualdad variacional elíptica)

<u>Demostración.</u>

$\longrightarrow$] Sea u en K, tal que $J(u) = \text{Inf } J(v)$, $0 < \theta < 1$

tenemos que $(1-\theta)u + \theta v$ esta en K.

Como u es el mínimo de $J(v)$ entonces

$$J(u) \leq J(\ (1-\theta)u + \theta v)$$

por lo que

$$0 \leq J(\ (1-\theta)u + \theta v) - J(u)$$

asociando nos queda

$$0 \leq J((u + \theta\,(v-u)) - J(u)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\theta}\left[J(u + \theta\,(v-u)) - J(u)\right] \geq 0\ . \tag{3}$$

Si hacemos tender θ a cero y este límite existe sería la derivada de $J(v)$ en el vector u en la dirección v-u y se representa por $J'(u)\cdot(v-u)$.

Supongamos que el límite existe en cuyo caso tendríamos por (3), que $J'(u)\,(v-u) \geq 0\ ,\ \forall$ v en K.

Dado que $J(v) = a(v,v) - 2\langle f,v\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\left[J(u+\theta(\ v-u)) - J(u)\right] &= \frac{1}{\theta}\left[a(u + \theta\,(v-u),u+\theta(v-u))\right.\\ &\quad -a(u,u) - 2\langle f,u+\theta(v-u)\rangle +\\ &\quad \left.+2\langle f,u\rangle\right]\\ &= a(v-u,u) + a(u,v-u) +\\ &\quad +\theta\, a(v-u,v-u) - 2\langle f,v-u\rangle\end{aligned}$$

tomando el límite cuando $\theta \to 0$, obtenemos :

$$J'(u)\cdot(v-u) = a(v-u,u) + a(u,v-u) - 2\langle f,v-u\rangle$$

por ser $a(u,v)$ simétrica tenemos

$$J'(u)\cdot(v-u) = 2a(u,v-u) - 2\langle f,v-u\rangle\ .$$

Así que , $J'(u)(v-u)$ existe y por lo visto en (3) es mayor o igual que cero, esto es,

$$a(u,v-u) - \langle f,v-u\rangle \geqslant 0$$

ó

$$a(u,v-u) \geqslant \langle f,v-u\rangle \quad .$$

$\leftarrow)$

Supongamos que existe un u en K tal que

$$a(u,v-u) \geqslant \langle f,v-u\rangle , \quad \forall \text{ v en K, f en V'}.$$

De aquí tenemos que

$$J'(u)\cdot(v-u) = a(u,v-u) - \langle f,v-u\rangle \geqslant 0.$$

Primero veremos que $J(v)$ es convexa , esto es ,

$$J[(1-\theta) w + \theta v] \leqslant (1-\theta) J(w) + \theta J(v), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Equivalentemente

$$J((1-\theta)w + \theta v) - (1-\theta) J(w) - \theta J(v) \leqslant 0$$

desarrollando se obtinene

$$(1-\theta)^2 a(w,w)+ \theta^2 a(v,v)+2(1-\theta)\theta a(w,v)-$$
$$-\theta(1-\theta) a(w,w) - \theta a(v,v) =$$
$$-\theta(1-\theta) [a(w,w) - a(v,v) - 2a(w,v)] =$$
$$-\theta(1-\theta) u(w-v,w-v)$$

por ser $a(u,v)$ definida positiva se tiene

$$-\theta(1-\theta) a(w-v,w-v) \leqslant 0$$

por lo que $J(v)$ es convexa.

Por ser $J(v)$ convexa tenemos para v, w en K

$$J((1-\theta) w + \theta v) \leqslant J(w) - \theta J(w) + \theta J(v)$$

asociando tenemos

$$\frac{1}{\theta}[J((1-\theta)w +\theta v) - J(w)] \leqslant J(v) - J(w)$$

tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ obtenemos

$$J(v) - J(u) \geq J'(u)\cdot(v-u) = 2a(u,v-u) - 2\langle f, v-u\rangle \geq 0$$

tomando w=u se tiene

$$J(v) - J(u) \geq 0$$

esto es

$$J(v) \geq J(u) \quad , \forall \ v \text{ en } K.$$

Esto quiere decir que $J(u)$ es el mínimo de $J(v)$ en K.

Así queda demostrado el teorema 2.2.2 , el cual nos da herramientas para encontrar el mínimo de $J(v)$ en K, resol -- viendo la desigualdad (2).

Los dos teoremas anteriores muestran que en el caso de que $a(u,v)$ sea simétrica, el problema variacional es equivalente a resolver una desigualdad variacional elíptica.

2.3 Teorema de Lions-Stampacchia.

Este teorema muestra la existencia y unicidad de la desigualdad variacional (2) , en el caso de que la forma bilineal $a(u,v)$ no es simétrica.

Teorema 2.3.1 (Lions-Stampacchia) Sea $a(u,v)$ una forma bilineal acotada, definida positiva en V y K un convexo - cerrado de V, entonces para toda f en V' , existe una única u en K tal que

$$a(u,v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \ , \forall \ v \text{ en } K.$$

La aplicación $f \to u$ de V' en V es continua.

Demostración.

Unicidad- Consideremos dos soluciones u_1, u_2 en K y f_1, f_2 en V', tenemos

$$a(u_i, v-u_i) \geq \langle f_i, v-u_i \rangle \quad , \forall \text{ v en K, } i=1,2.$$

Hacemos $v=u_2$ cuando i=1 y obtenemos

$$a(u_1, u_2-u_1) \geq \langle f_1, u_2-u_1 \rangle$$

tomamos $v=u_1$ cuando i=2

$$a(u_2, u_1-u_2) \geq \langle f_2, u_1-u_2 \rangle$$

sumando estas dos ultimas desigualdades tenemos

$$a(u_1, u_2-u_1) + a(u_2, u_1-u_2) \geq \langle f \;, u_2-u_1 \rangle \quad + \langle f \;, u_1-u_2 \rangle$$

de donde

$$a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq \langle f_1-f_2, u_1-u_2 \rangle$$

por ser $a(u,v)$ definida positiva, existe $c > 0$, tal que

$$a(u_1-u_2, u_1-u_2) \geq c \, \|u_1-u_2\|^2$$

por lo tanto

$$c \, \|u_1-u_2\|^2 \leq \langle f_1-f_2, u_1-u_2 \rangle \leq \|f_1-f_2\|_{V'} \cdot \|u_1-u_2\|$$

entonces

$$c \, \|u_1-u_2\| \leq \|f_1-f_2\|_{V'}$$

lo que implica la unicidad y dependencia continua .

Para demostrar la existencia primero demostraremos el lema siguiente.

<u>Lema 2.3.1</u> Sean C y M tales que

$$C \|v\|^2 \leq a(v,v) \quad , \text{ y}$$

$$M = \|A\|_{\mathcal{L}(V,V')}$$

donde $A : V \longrightarrow V'$ es el mapeo inducido por $a(u,v) = \langle Au,v \rangle$, si $0 < \rho < 2C/M^2$, entonces existe θ, $0 < \theta < 1$ para la cual

$$|(u,v) - \rho a(u,v)| \leq \theta \|u\| \|v\|, \quad \forall\ u,\ v \text{ en } V.$$

<u>Demostración.</u>

Denotemos por Λ el isomorfismo canónico de V en V' definido como

$$\langle f,v \rangle = (\Lambda f, v) \quad , \forall\ v \text{ en } V ,$$

tenemos que

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(V',V)} = \|\Lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(V,V')} = 1 .$$

De hecho siendo $a(u,v) = \langle Au,v \rangle = (\Lambda Au,v)$

obtenemos

$$|(u,v) - (\rho\Lambda Au,v)| = |(u-\rho\Lambda Au,v)| = \|u-\rho\Lambda Au\| \|v\| ,$$

tenemos

$$\|u-\rho\Lambda Au\|^2 \leq \|u\|^2 + \rho^2\|\Lambda Au\|^2 - 2\rho a(u,u) \leq$$

$$\leq (1+M^2\rho^2 - 2C\rho) \|u\|^2$$

lo cual prueba el lema pues

$$0 < 1+M^2\rho^2 - 2C\rho < 1$$

$$\theta = 1 + M^2\rho^2 - 2C\rho .$$

<u>Existencia-</u>

a) primeramente tomaremos $a(u,v) = (u,v)$, el problema consiste en encontrar u en K tal que

$$(u,v-u) \geq \langle f,v-u \rangle = (\Lambda f, v-u) \; ; \; \forall \; v \text{ en } K,$$

ó

$$(u-\Lambda f, v-u) \geq 0 \; , \; \forall \; v \text{ en } K,$$

como (u,v) es definido positivo, simétrico y acotado entonces vale el teorema 2.2.2, esto es, existe un único u tal que

$$(u,v-u) \geq \langle f,v-u \rangle , \; \forall \; v \text{ en } V \text{ y } f \text{ en } V'$$

o equivalentemente u satisface

$$(u-\Lambda f, v-u) \geq 0$$

de donde

$$0 \leq (u-\Lambda f,(v-\Lambda f) + (\Lambda f-u)) = (u-\Lambda f, v-\Lambda f) + (u-\Lambda f, \Lambda f-u)$$
$$= -(u-\Lambda f, u-\Lambda f) + (u-\Lambda f, v-\Lambda f) = -\|u-\Lambda f\|^2 + (u-\Lambda f, v-\Lambda f)$$

por lo tanto

$$\|u-\Lambda f\|^2 \leq (u-\Lambda f, v-\Lambda f) \leq \|u-\Lambda f\| \cdot \|v-\Lambda f\|$$

de donde

$$\|u-\Lambda f\| \leq \|v-\Lambda f\| \; , \; \forall \; v \text{ en } K.$$

Conversamente ya que K es un convexo cerrado, esto equivale a decir que u es un elemento de K que minimiza la funcional

$$\phi(v) = \|v-\Lambda f\| \; , \; v \text{ en } K.$$

Así que $u = P_K f$ es la solución del problema con P_K la proyección de V en K .

Esto porque si K es un convexo cerrado de V entonces $\forall \; x \in V$, existe un único y en K tal que

$$\|x-y\| = \operatorname*{Inf}_{z\in K}\|x-z\|$$

la y que satisface la igualdad anterior, se llamada la proyección de x sobre K y escribimos $y = P_K x$, ver (35).

Consideramos el caso $a(u,v)$ en las condiciones del teorema, y sea ρ fija como en el lema 2.3.1. Para u en V definimos

$$\langle \Phi(u),v\rangle = (u,v)-\rho a(u,v) + \langle f,v\rangle \quad , \text{ para } v \text{ en } V,$$

entonces para u_1, u_2 en V tenemos

$$\left|\langle \Phi(u_1) - \Phi(u_2),v\rangle\right| = \left|(u_1-u_2,v) - \rho\, a(u_1-u_2,v)\right|$$

$$\leq \theta\|u_1-u_2\|\,\|v\|,\ 0< \theta <1 \text{ (por el}$$

lema 2.3.1).

Dado que $\Phi(u)$ esta en V' tenemos que existe un único w en K tal que

$$(w,v-w) \geq \langle \Phi(u),v-w\rangle \quad , \text{ para } v \text{ en } K$$

y w esta dado por

$$w = P_K\,\Phi(u) = T(u)$$

esto define un mapeo $u \to T(u)$ de V en K.

Mas aún tenemos

$$\|T(u_1) - T(u_2)\| = \|P_K\,\Phi(u_1) - P_K\,\Phi(u_2)\|$$

veremos que se cumple la siguiente desigualdad

$\|P_K x - P_K x'\| \leq \|x - x'\|$, si K es un convexo cerrado de V.

Por lo que

$$\|T(u_1)-T(u_2)\|\leq\|\Lambda\Phi(u_1)-\Lambda\Phi(u_2)\|=\|\Phi(u_1)-\Phi(u_2)\|$$

$$\leq \theta\|u_1-u_2\|,\ 0<\theta<1.$$

Resultado 2.3.1 Sea K un convexo cerrado, $K \subset V$, V un espacio de Hilbert entonces se cumple

$$\| P_K x - P_K x' \| \leq \| x - x' \| \quad \text{para } x, x' \text{ en } V.$$

Demostración: Dado x, x' en V, tomamos $y = P_K x$ y $y' = P_K x'$, entonces

$$y \in K \; ; \; (y, v-y) \geq (x, v-y) \quad \forall\, v \in K,$$

$$y' \in K \; ; \; (y', v-y') \geq (x', v-y) \quad \forall\, v \in K.$$

En la primera desigualdad tomamos $v = y'$ y $v = y$ en la segunda

$$(y, y'-y) \geq (x, y'-y)$$

$$(y', y-y') \geq (x', y-y')$$

adicionando estas dos desigualdades obtenemos

$$(y-y', y'-y) \geq (x-x', y'-y)$$

de donde

$$(y-y', y-y') \leq (x-x', y-y') \leq \| x-x' \| \, \| y-y' \|$$

y por lo tanto

$$\| y-y' \| \leq \| x-x' \| .$$

Lo cual implica que

$$\| P_K x - P_K x' \| \leq \| x-x' \|$$

Gracias al resultado anterior tenemos la siguiente - desigualdad

$$\| T(u_1) - T(u_2) \| \leq \| \Lambda\Phi(u_1) - \Lambda\Phi(u_2) \| = \| \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \|$$

$$\leq \theta \| u_1 - u_2 \| , \quad 0 < \theta < 1.$$

Por lo que tenemos que $T(u)$ es una contracción, por lo que existe una y solo una u tal que $T(u) = u$ [1], de lo que se sigue que u esta en K y además cumple

$$(u,v-u) \geq \langle \phi(u), v-u \rangle$$

de la definición de $\langle \phi(u),v\rangle$ obtenemos

$$(u,v-u) \geq [(u,v-u) - \rho(a(u,v-u) - \langle f,v-u\rangle)$$

o equivalentemente

$$0 \geq - \rho(a(u,v-u) - \langle f,v-u\rangle)$$

por lo tanto

$$a(u,v-u) \geq \langle f,v-u\rangle, \text{ para todo } v \text{ en } K.$$

<u>Corolario 2.3.1</u> <u>Lema de Lax-Milgram.</u> Supongamos -- que K=V tomando $v = u \pm \psi$ en el teorema de <u>Lions-Stampacchia</u> obtenemos $a(u,\psi) = \langle f,\psi\rangle$, $\forall \psi$ en V. Este conocido resultado asegura que cualquier función lineal (f,v) sobre V puede ser representada por $a(u,v)$ con una adecuada u en V, cuando $a(u, v)$ es una forma bilineal definida positiva sobre V.

<u>Corolario 2.3.2</u> Supongamos que K es un cono convexo acotado con vértice en el origen. Si u y v estan en K, del - hecho de que K es cono convexo resulta que u + v esta en K, por lo tanto tomando u + v en lugar de v en el teorema de -- <u>Lions -Stampacchia</u> se concluye que $a(u,v) \geq (f,v)$, $\forall$ $v \in K$.

Si K es un cono con vértice en el origen se concluye -- que $a(u,v)=\langle f,v\rangle$, haciendo $v = 2u$, y luego $v = 0$ en la desigualdad del teorema de <u>Lions-Stampacchia</u>, este caso fue de-- mostrado por Stampacchia en [44].

---

(1) Ver [35] .

2.4 – Ejemplos y Aplicaciones.

Ejemplo 1. Sea V un espacio de Hilbert, $K \subset V$ convexo.

Problema: Caracterizar la proyección de un $w \in V$ sobre el convexo K.

Sea $u = P_K w$; $P_K w$ es la proyección de w sobre K.

Por definición de proyección se tiene

$$\| u - w \| \leq \| v - w \| \quad , \quad \forall \ v \in K \quad ,$$

de donde

$$\| u - w \|^2 \leq \| v - w \|^2 \quad , \forall \ v \in K$$

y así

$$\| u - w \|^2 - \| w \|^2 \leq \| v - w \|^2 - \| w \|^2 \qquad \forall \ v \in K$$

por lo que la funcional $J(v) = \| v - w \|^2 - \| w \|^2$ tiene un mínimo en u

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall \ v \in K \ .$$

Por otro lado $J(v)$ se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J(v) &= (w-v, w-v) - (w,w) \\ &= (v,v) - 2(w,v) \end{aligned}$$

de donde

$J(v) = a(v,v) - 2 \langle f, v \rangle$ con

$a(u,v) = (u,v)$ producto escalar en V,

$\langle f, v \rangle = (w,v)$ w fija en V.

Por ser $a(u,v)$ definida positiva, simétrica y acotada, resulta por el teorema 2.2.2 que u es mínimo de $J(v)$ si y sólo si satisface

$$a(u,v-u) \geq (w,v-u) \quad \forall\, v \in K \ .$$

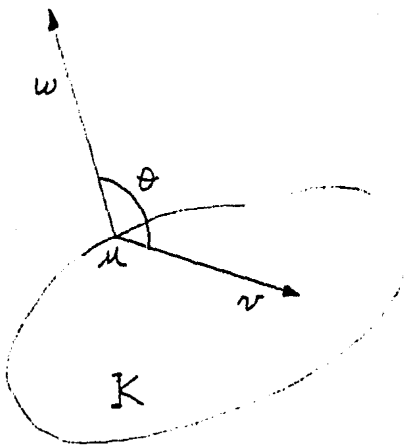
esto es,

$$(u,v-u) \geq (w,v-u) \quad \forall\, v \in K$$

por lo que tenemos

$$(w-u,v-u) \leq 0 \quad \forall\, v \in K \ ,$$

lo cual significa geométricamente que el ángulo θ formado entre v y w tiene coseno menor o igual a cero , esto es , $\theta \geq \pi/2$. (Ver figura 2).



$u = P_K w$

figura 2.

Ejemplo 2. Problema de Dirichlet.

En este ejemplo mostraremos la existencia de solución a problemas clásicos con valores en la frontera para la --- ecuación de Laplace utilizando el teorema de Lions-Stampa--cchia. Para lo cual veremos el siguiente resultado.

Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, $A : V \longrightarrow V$ un - operador que cumple

(1) $\exists\, \gamma > 0 \quad (Au,u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \quad \forall\, u \in V,$

(2) $(Au,v) = (u,Av) \quad \forall\, u,v \in V,$

y sea $J(u)$ la funcional

$$J(u) = (Au,u) - 2(u,f) \ , \ f \in V \ .$$

Si $u_0 \in V$ es solución de la ecuación

$$Au = f$$

entonces minimiza la funcional $J(u)$, esto es ,

$$\min_{u \in V} J(u) = J(u_0) \ .$$

Sea $u_0 \in V$ tal que $Au_0 = f$, entonces tenemos

$$J(u) = (Au,u) - 2(u,Au_0)$$

$$= (Au,u) - (u,Au_0) - (Au_0,u)$$

$$= (Au,u) - (Au,u_0) - (Au_0,u)$$

sumando y restando (Au_0,u_0) obtenemos :

$$= (A(u-u_0),u) - (A(u-u_0),u_0) - (Au_0,u_0)$$

$$= (A(u-u_0),u-u_0) - (Au_0,u_0)$$

de aqui se ve que u es el mínimo valor que toma $J(u)$.

Problema 1.

Dada $f \in H^{-1}(\Omega)$(1) y $g \in H^1(\Omega)$, encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para que (3) tenga sentido en el contexto débil, suponemos f,g,u suaves y multiplicamos ambos lados de la ecuación por $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Después integramos por partes y obtenemos

$$(3') \qquad \sum_i \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} = (-\Delta u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, v\rangle .$$

Un $u \in H^1(\Omega)$ es llamada solución débil de (3) si

$$\sum_i \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} \, dx = \langle f, v\rangle, \text{ para } v \in H_0^1(\Omega) ,$$

$$u-g \in H_0^1(\Omega) .$$

Así que para estudiar (3), estudiamos el siguiente --- problema variacional.

Problema débil.

Encontrar $u \in K$ tal que

$$(4) \qquad \sum_i \int_\Omega u_{x_i} (v-u)_{x_i} \, dx \geq \langle f, v-u\rangle \text{ para } v \in K,$$

(1) Por $H^{-1}(\Omega)$ se denota al dual de $H_0^1(\Omega)$.

con

$$K = K_g = \{v \in H^1(\Omega);\ v-g \in H_0^1(\Omega)\},$$

y la forma bilineal

$$(u,v) \longrightarrow \sum \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i}\, dx \ ,$$

la cual es el producto escalar en $H_0^1(\Omega)$, no es **coercitiva** en todo el espacio $H^1(\Omega)$. Argumentamos de la siguiente manera.

Puesto que

$$\sum_i \int_\Omega u_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx = \sum_i \int_\Omega (u-g)_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx \ +$$

$$\sum_i \int_\Omega g_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx \quad ,$$

u es solución del problema (4) si y solo si w = u - g es solución de la desigualdad

$$\sum_i \int_\Omega w_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx \geq \langle f, v-u \rangle - \sum_i \int_\Omega g_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx.$$

Recalcando que g_{x_i} esta en $L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$, el problema débil se vuelve equivalente a encontrar, un w en $H_0^1(\Omega)$ - tal que

(5) $$\sum_i \int_\Omega w_{x_i} (v-w)_{x_i}\, dx \geq \langle F, v-w \rangle \quad \text{para v en } H_0^1(\Omega) \quad .$$

con $F \in H^{-1}(\Omega)$ definida por

$$\langle F, v \rangle = \langle f, v \rangle - \sum_i \int_\Omega g_{x_i} v_{x_i}\, dx.$$

Por el teorema de Lións-Stampacchia el problema (3) admite una solución w. Si tomamos u = w + g es solución del problema débil.

Dado que el espacio convexo es el espacio entero $H_0^1(\Omega)$, tenemos

(6) $$\sum_i \int_{\Omega} w_{x_i} v_{x_i} \, dx = \langle F, v \rangle \quad \text{para } v \in H_0^1(\Omega),$$

se sigue que w-g = u es solución de (4).

Es directo ver que (6) es exactamente lo mismo que (3'), por otro lado el problema (6) es equivalente al problema (4) por ello (3') y (4) son problemas equivalentes. Como tenemos solución única para (6), la tenemos para (3'), que es el problema originalmente planteado.

El problema de Dirichlet más general se puede resolver de igual manera.

Problema 2.

$$-\Delta u + \lambda u = f \text{ en } \Omega, \quad \lambda > 0 \in \mathbb{R},$$
$$u = g \text{ sobre } \partial\Omega .$$

También multiplicamos ambos lados de la ecuación por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando por partes obtenemos el siguiente problema.

Encontrar $u \in K$;

$$K = \{ v \in H^1(\Omega) \ ; \ v-g \in H_0^1(\Omega) \}$$

que cumpla

$$a(u,v) = \langle f,v \rangle \text{ para } v \in H_0^1(\Omega)$$

donde

$$a(u,v) = \sum_i \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx - \lambda \int_\Omega uv dx \text{ para } u,v \in H^1(\Omega).$$

Afirmamos que $a(u,v)$ es definida positiva sobre $H_0^1(\Omega)$ con $\lambda > -1/\beta$, β la constante de la desigualdad de Poincaré[1].

De hecho para $t \in (0,1)$,

$$a(v,v) = \left[t \sum \int_\Omega v_x^2 dx + (1-t) \sum \int_\Omega v_x^2 dx \right] + \lambda \int_\Omega v^2 dx$$

$$\geq t \sum \int_\Omega v_x^2 dx + \left[(1/\beta) - (t/\beta) + \lambda \right] \int_\Omega v^2 dx .$$

Seleccionando $t \in (0,1)$ tal que $0 < t < \beta \left[(1/\beta) + \lambda \right] = 1 + \beta\lambda$. Entonces

$$a(v,v) \geq t \| v \|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

De esto se sigue como en el problema 1, que existe una única solución al problema de Dirichlet débil.

(1) Desigualdad de Poincaré: $\int \sum v_x^2 dx \leq \frac{1}{\beta} \int v^2 dx$.

Ejemplo 3. Probleme de Neumann.

Cuando $\partial\Omega$, f, g son suaves el clásico problema es - encontrar una función u tal que

$$-\Delta u + \lambda u = f \quad \text{en } \Omega,$$

$$\partial u/\partial n = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \; ,$$

donde $\partial\,\partial n$ es la derivada normal externa a $\partial\Omega$.

Multiplicando la ecuación por v en $C^1(\bar{\Omega})$ e integrando por partes obtenemos

$$\sum_i \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx + \lambda \int_\Omega uvdx = \int_\Omega fvdx + \int_\Omega gvd\sigma \quad .$$

entonces la forma bilineal asociada al problema de Neumann es

$$a(u,v) = \sum_i \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx + \lambda \int_\Omega uvdx \quad .$$

Seleccionando $\lambda > 0$ y $\alpha = \min(1,\lambda)$ tenemos

$$a(v,v) \geq \alpha^2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad .$$

Por lo que, por el teorema de Lions-Stampacchia existe una única solución del problema débil de Neumann.

Si $\lambda=0$, la forma $a(u,v)$ no es definida positiva , y en este caso el problema de Neumann no siempre tiene -- solución y cuando la tiene, no es única . (34')

Ejemplo 4. Ecuaciones con estructura de divergencia.

En este ejemplo trataremos ecuaciones conocidas como ecuaciones con estructura de divergencia

$$(1) \qquad \sum_{i,j} -(a_{ij} u_{x_i} + d_i u)_{x_j} + \sum_i (b_i u_{x_i}) + cu = f$$

y

$$\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} + cu = f \quad \text{con}$$

$$a_{ij} \xi_i \xi_j > 0, \text{ para } \xi \neq 0,$$

si los coeficientes son suficientemente regulares, estas ecuaciones son esencialmente la misma.

Pero si suponemos que los coeficientes son medibles y acotados entonces las ecuaciones anteriores son completamente diferentes.

Hablaremos de la ecuación (1), en el caso de que

$$v |\xi|^2 \leq a_{ij} \xi_i \xi_j \quad , v = \text{const.} > 0$$

las hipótesis sobre los coeficientes b_i, d_i, c son también muy generales.

El operador L definido por

$$L = \sum_{i,j} -(a_{ij} u_{x_i} + d_i u)_{x_j} + \sum_i (b_i u_{x_i} + cu)$$

generaliza el operador de Laplace.

En este ejemplo demostraremos que si L cumple

(2) a_{ij}, b_i, d_i y c son funciones reales medibles definidas sobre Ω.

L es uniformemente elíptico en Ω, esto es,

(3) $\exists \; v > 0$ tal que

$v\,|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j$ para $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $|a_{ij}|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ $(i,j=1,\ldots,n)$

(4) $b_i, d_i \in L^n(\Omega)$, $c \in L^{n/2}(\Omega)$,

entonces, existe un único u en $H_0^1(\Omega)$ del problema de Dirichlet no-homogeneo

$$Lu + \lambda u = T$$

$$u - g \in H_0^1(\Omega)$$

en donde $T \in H^{-1}(\Omega)$[1], $g \in H^1(\Omega)$, esto si es que se cumple una cierta condición sobre λ, o sobre los coeficientes b_i, d_i, c, la cual veremos oportunamente.

Empezaremos notando que la forma bilineal asociada a L esta dada por

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \{(a_{ij} u_{x_i} + d_j u) v_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu) v\} dx.$$

(Sólo demostraremos el resultado antes mencionado, los demás teoremas o corolarios, los mencionamos sin demostración, esta puede ser encontrada en (42,46].)

<u>Teorema 1.</u> Sea Ω un abierto, acotado en $\mathbb{R}^n$,

a) suponemos que a_{ij}, b_i, d_i, c satisfacen la condición (4)

<u>Entonces</u>

i) $a(u,v)$ es una forma bilineal, continua sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

(1) $H^{-1}(\Omega)$ denota el dual del espacio $H_0^1(\Omega)$.

ii) Cuando Ω satisface la condición de cono[1], $a(u,v)$ es bilineal y continua en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

b) Suponemos que las a_{ij} satisfacen (3) y b_i, d_i, c satisfacen (4) ,

Entonces

i) si las normas $\| b_i \|_{L^n(\Omega)}$, $\| d_i \|_{L^n(\Omega)}$ y $\| c \|_{L^{n/2}(\Omega)}$ son suficientemente pequeñas (en particular si la medida de Ω es suficientemente pequeña), la forma $a(u,v)$ es coercitiva sobre $H^1_0(\Omega)$;

ii) Existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que , para cada $\lambda > \bar{\lambda}$ la forma bilineal continua $a(u,v) + \lambda (u,v)_{L^2(\Omega)}$, es definida positiva sobre $H^1_0(\Omega)$.

Consecuencia de a) (i) es el corolario siguiente.

Corolario 1.

Sea $\tilde{\Omega}$ un abierto acotado de R^n tal que $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$, si $u \in H^1(\tilde{\Omega})$ entonces $v \longrightarrow a(u,v)$ es una forma lineal continua sobre $H^1_0(\Omega)$.

Definición 1. Sea $T \in H^{-1}(\Omega)$; una función $u \in H^1(\Omega)$ -

---

(1) Se dice que Ω satisface la condición de cono si existe un cono de dimensiones fijas $C_\rho(x)$ con radio ρ y vértice x, tal que cuando cualquier $x \in \Omega$ es usado como vértice del cono, el cono puede ser orientado de tal forma que todos sus puntos esten en Ω .

se dice solución de la ecuación

(5) $\quad Lu = T = -\sum_i (f_i)_{x_i}$

con la condición de Dirichlet si, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos

(6) $\quad a(u,\varphi) = \sum \int_\Omega f\, \varphi_{x_i}\, dx$.

Definición 2. Sea $g \in H^1(\tilde{\Omega})$ con $\tilde{\Omega}$ acotado, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ($\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$) . $T \in H^{-1}(\Omega)$, decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución en el sentido variacional del problema de Dirichlet con la condición de Dirichlet no-homogenea

(7) $\quad \begin{aligned} Lu &= T = -\sum_i (f_i)_{x_i} \\ u-g &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$

si tenemos para toda v en $\mathcal{D}(\Omega)$ la condición (6) .

Corolario 2.

Sea $a(u,v)$ una forma bilineal sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

i) para $g \in H^1(\Omega)$ fija , $a(g,v)$ sea continua sobre $H_0^1(\Omega)$

ii) $a(u,v)$ sea definida positiva sobre $H_0^1(\Omega)$;

sea K un convexo acotado de $H^1(\Omega)$ tal que para $u \in K$, $u-g \in H_0^1(\Omega)$, entonces

Tomando $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe un único $u \in K$ tal que

$a(u,v) = \langle f,v \rangle \quad \forall\ v \in K-u$.

Teorema 2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ suponemos que los coeficientes de L satisfacen (3),(4), suponemos que $T \in H^{-1}(\Omega)$ y $g \in H^1(\tilde{\Omega})$ con ($\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$) . Entonces existe un único $u \in H^1(\Omega)$ del problema de Dirichlet

$$Lu + \lambda u = T$$
$$u-g \in H_0^1(\Omega)$$

si se tiene una ú otra de las hipótesis siguientes

i) λ es más grande que una constante $\tilde{\lambda}$ conveniente;

ii) λ es cualquiera, pero las normas de los coefi-- cientes b_i, d_i, c son suficientemente pequeñas.

Demostración.

La forma bilineal $a(u,v) + \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)}$, asociada al - operador $(L + \lambda)$ es continua en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, y por el - corolario 1, $a(g,v) + \lambda(g,v)$ es una forma lineal continua - en $H_0^1(\Omega)$.

Por otra parte, de la hipótesis i) o bién ii) la forma bilineal $a(g,v) + \lambda(g,v)_{L^2(\Omega)}$ es definida positiva sobre $H_0^1(\Omega)$.

Sea

$$K = \{ v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ v-g \in H_0^1(\Omega) \}$$

se cumplen las condiciones del corolario 2, por lo que,-- existe un único u en K tal que

$$a(u,v) + \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)} \geq \langle T,v\rangle \text{ para } v \in K-u .$$

Dado que K es una variedad lineal afin con $H_0^1(\Omega)$ y -- $\forall$ $u \in K$, el conjunto K es el espacio lineal $H_0^1(\Omega)$. Por lo que existe una única $u \in H^1(\Omega)$ tal que (por el teorema de - Lax-Milgram)

$$a(u,v) + \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)} = \langle T,v\rangle$$
$$u-g \in H_0^1(\Omega)$$

Quedando así demostrado el teorema. Para complementar y ampliar sobre este tema ver (41,4[illegible],[illegible]).

Ejemplo 5 . Problema del obstáculo.

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, E un subconjunto cerrado de Ω sobre el cual esta dada una función continua f . Se busca una función real $v_o(x)$ en Ω , en las funciones que se anulan en $\partial\Omega$ y satisfacen $v(x) \geq f(x)$ para x en E , tal que $v_o(x)$ minimice la integral de Dirichlet. Este problema tiene una única solución, en donde por solución se entiende una función del espacio de Sóbolev $H_0^1(\Omega)$, y la desigualdad sobre E es reinterpretada en forma apropiada para tal espacio, este problema es tratado ampliamente en (2).

Este problema se puede interpretar mecánicamente pensando a v como una membrana homogenea atravesada por $\partial\Omega$, y forzada a permanecer arriba de una obstrucción concava, alcanzando a esta con un mínimo gasto de energía. (Ver figura 3.

Este ejemplo esta basado en los artículos [26,31].

Sea E un subconjunto compacto de Ω, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado, sea $\psi \in H^1(\Omega)$, sea K el conjunto

(1) $$K = \{u;\ u \in H_0^1(\Omega) \text{ y } u \geq \psi \text{ sobre } E\}$$

en donde $u \geq \psi$ sobre E es entendido en el sentido de la siguiente definición.

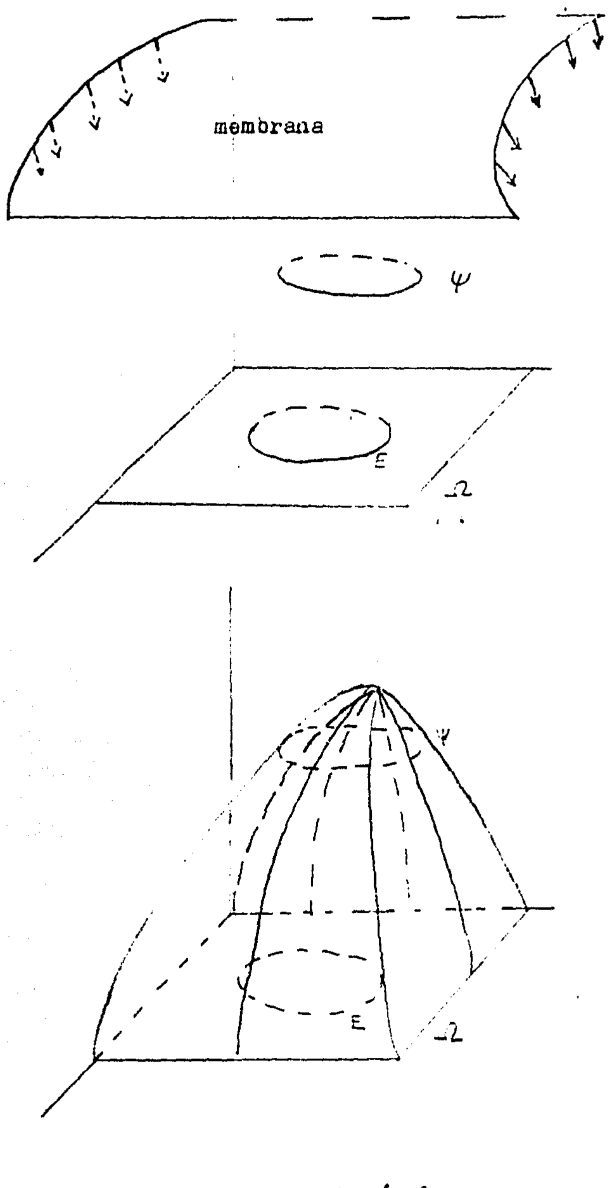


figura 3. problema del obstáculo.

Definición 1. Decimos que $u \geq \psi$ sobre E, en el sentido de $H^1(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, si

$u \geq \psi$, se cumple siempre en E excepto en un conjunto de capacidad cero.

Definición 2. La capacidad de un conjunto compacto $A \subset B$ esta dada por

$$\text{Cap } A = \text{Inf} \|\alpha_x\|^2_{\alpha\,;\,B} = \text{Inf} \int_B |\alpha_x|^2 dx$$

donde el infimo es tomado sobre las funciones no-negativas de $C_0^1(B)$ y tal que $\alpha \geq 1$ sobre A .

Definición 3. Un conjunto es de capacidad cero, si todo compacto contenido en el tiene capacidad cero .

En el caso de que el conjunto definido por (1) sea distinto del vacio, K es convexo y cerrado, la ψ representa la obstrucción (el obstáculo).

Sea

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_j} v_{x_i} dx \text{ , con } a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

sea $f \in L^2(\Omega)$, $i = 1,\ldots,n$; $|a_{ij}| \leq M$.

$a(u,v)$ es definida positiva en $H_0^1(\Omega)$ y acotada.

Afirmación 1. Por el teorema de Lions-Stampacchia podemos asegurar que existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u \geq \psi$ sobre E tal que se cumple

(2) $$\sum_{i,j}\int_{\Omega} a_{ij}\, u_{x_j}\,(v-u)_{x_i}\,dx \geq \sum_{j}\int_{\Omega} f_j\,(v-u)_{x_j}\,dx \;, \;\forall v \in K.$$

El problema es¿como interpretar esta desigualdad -variacional ?

Sea w un elemento de $H_0^1(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ sobre E, entonces dado que $v = u + \varepsilon w$ esta en K, tenemos

(3) $$\sum_{i,j}\int_{\Omega} a_{ij}\, u_{x_i} w_{x_j}\,dx - \sum_{j}\int_{\Omega} f_j\, w_{x_j}\,dx \geq 0 \;, \;\forall w \geq 0 \text{ sobre } E.$$

Dado que se cumple (3) entonces existe μ, medida positiva[1], sobre $\bar{\Omega}$ tal que ,

(3') $$\sum_{i,j}\int_{\Omega} (a_{ij}\cdot u_{x_i} - f_j\cdot)\, w_{x_j}\,dx = \int_{\Omega} w\, d\mu, \text{ para } w \in H_0^1(\Omega),$$

por lo que se tiene

$$Au + f = \mu \;, \; u \in H_0^1(\Omega)\,^{(2)},$$

con

$$Au = -\sum (a_{ij}\cdot u_{x_i})_{x_j} \quad , \; f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Para no distraer nuestra atención veremos en el -- apendice del capítulo II que el soporte de μ es el conjunto de puntos de E en donde $u = \psi$.

<u>Definición 4</u>. Decimos que $u > \psi$ en un x de E , si existe $\rho > 0$ en $\mathbb{R}$ y $\alpha(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ tal que $\alpha(x)=0$ para $|x_0-x| > 2\rho$, $\alpha(x) > 0$ para $|x-x_0| < \rho$ y $u-\alpha$ esta en K.

(1) Esto por un teorema de Riesz-Schwartz , ver [38] -- pag. 29.
(2) Si f = 0 , se esta resolviendo $Au = \mu$.

Sea I el conjunto cerrado en donde $u > \psi$ no vale, decimos que $u = \psi$ sobre I. Como μ se anula sobre $\Omega - I$ (ver apendice) tenemos :

la solución de (3) tiene las siguientes propiedades

(i) $u \geq \psi$ sobre E (por definición),

(ii) $\sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} w_{x_j} dx \geq \sum_j \int_\Omega f_j w_{x_j} dx$, para $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \geq 0$ sobre Ω. (desigualdad(3)),

(iii) $\sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} w_{x_j} dx = \sum_j \int_\Omega f_j w_{x_j} dx$, para $w \in H_0^1(\Omega)$, $w = 0$ sobre $I = \{ x \in E ; u(x) = \psi(x) \}$ (porque μ se anula sobre $\Omega - I$).

ó en el sentido de las distribucuiones

(i) $u \geq \psi$ sobre E,

(ii) $Au \geq -\sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ sobre Ω,

(iii) $Au = -\sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ en $\Omega - I$.

Afirmación 2. Si suponemos $f_j = 0$ en la desigualdad (2) y que ψ puede ser extendida de E a Ω en tal forma que esta extensión cumpla

$$
(4) \qquad \begin{aligned} A\psi &\geq 0 \quad \text{sobre } \Omega, \\ \psi &\geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}
$$

entonces, suponiendo que u es solución de (2) con $f_j = 0$, tenemos que $u \leq \psi$ en Ω y consecuentemente $u = \psi$ sobre E, en otras palabras I=E.

Demostración.

Suponemos que $u > \psi$ en algún conjunto de medida positiva S de Ω.

Sea $\xi = \min(u, \psi)$ ($= u$, cuando $u \leq \psi$, $= \psi$ cuando $u \geq \psi$), ya que $\xi = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $\xi \geq \psi$ sobre E, se sigue que ξ esta en K, y por lo tanto

(5) $$\sum_{i,j}^{n} \int_S a_{ij} u_{x_i} (\xi - u)_{x_j} dx \geq 0 \quad \text{(por (ii))}.$$

Por otro lado, ya que $\xi - u \leq 0$ ($\xi - u = 0$ cuando $u \leq \psi$ y, $\xi - u = \psi - u$ cuando $u \geq \psi$),

$$\int_S A\psi (\xi - u) \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_S a_{ij} \psi_{x_i} (\xi - u)_{x_j} \, dx$$

(6) $$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_S a_{ij} \xi_{x_i} (\xi - u) \, dx \leq 0$$

restando (5) menos (6) se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_S a_{ij} (\xi - u)_{x_i} (\xi - u)_{x_j} \, dx \leq 0$$

sabemos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_S a_{ij} (\xi - u)_{x_i} (\xi - u)_{x_j} \, dx \geq \alpha |\xi - u|^2 \quad , \alpha > 0$$

por lo tanto

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_S a_{ij} (\xi - u)_{x_i} (\xi - u)_{x_j} \, dx = 0$$

y consecuentemente $\xi - u = \text{const.} = 0$ esto prueba que $u \leq \xi$ sobre S, contradiciendo nuestra suposición.

En resumen la desigualdad (2) se puede interpretar como (i), (ii), (iii) y si $f \not\equiv 0$ se tiene que $I = E$, además se tiene $\mu u \doteq 0$ sobre Ω, $u = \psi$ en Ω, y $\mu u = 0$ en $\Omega - I$, con μ la medida definida en (3').

El conjunto en donde $u = \psi$, I es conocido como el conjunto de coincidencia.

El conjunto en donde $Au = f$ es conocido como el conjunto de equilibrio.

μ se conoce como la medida capacitaria, y $\mu(1)$ es la capacidad del conjunto E.

<u>Ejemplo 6. Problema elíptico de frontera libre interconectado con desigualdades variacionales.</u>

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, abierto;

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

veremos el clásico problema de frontera libre (FL) asociado con el Laplaciano.

<u>Problema-</u>

Dadas f, ψ funciones reales, suaves sobre $\bar{D}$, por encontrar $\{\Omega, u\}$ suaves , tales que

(1) Ω es un conjunto abierto de D ; $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$,

(2) $-\Delta u = f$ en Ω,

(3) $u = \psi$ sobre $\partial\Omega \cap D$,

(4) $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \psi$ sobre $\partial\Omega \cap D$,

(5) $u = 0$ sobre $\partial\Omega \cap \partial D$.

El conjunto $\partial\Omega \cap \partial D$ es la "frontera fija", la condición (5) sobre la "frontera fija" es del tipo usual (podría ser remplazada por una condición no-homogenea, por ejemplo la condición de Neumann).

A diferencia, sobre el conjunto $\partial\Omega \cap D$ el cual es llamado "frontera libre" (FL) le queremos imponer las condiciones (3) y (4) . A continuación vamos a ver un problema físico correspondiente al modelo antes expuesto.

<u>Problema Físico-</u>

Consideremos una membrana elástica alargada sobre un obstáculo . Fijemos la membrana elástica, la cual es isotró nica, homogenea y con coeficiente de elasticidad unitario - con altura $z = 0$ sobre la ∂D de una región plana D ; sometemos la membrana a un sistema de fuerzas verticales --- $f(x,y)$; y forzamos a la membrana a permanecer por encima - de un obstáculo $z = \psi(x,y)$, para el estado de equilibrio vemos que $z = u(x,y)$, Ω será la región de no contacto definida por (ver figura 4.)

(6) $$\Omega = \{ (x,y) \text{ en } D ; u(x,y) > \psi(x,y) \} .$$

Como Ω esta definida por (6) en Ω el obstáculo no -- puede dar reacciones [5] , escribiendo un balance entre - fuerzas externas y fuerzas elásticas interiores se obtiene lo siguiente [6]

(7) $$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= f \quad \text{sobre } \partial\Omega \cap D . \end{aligned}$$

La condición (4) establece que la membrana sale del -- obstáculo en forma suave .

La condición (5) establece que la membrana esta fija - sobre ∂D en la altura $z = 0$; así queda formulado el problema físico.

Otra formulación de este problema físico es la siguiente.

Denotamos por K, el siguiente conjunto

$$K = \{ v ; \quad v \in H_0^1(D) , \ v \geq \psi \}$$

y definimos $a(u,w)$

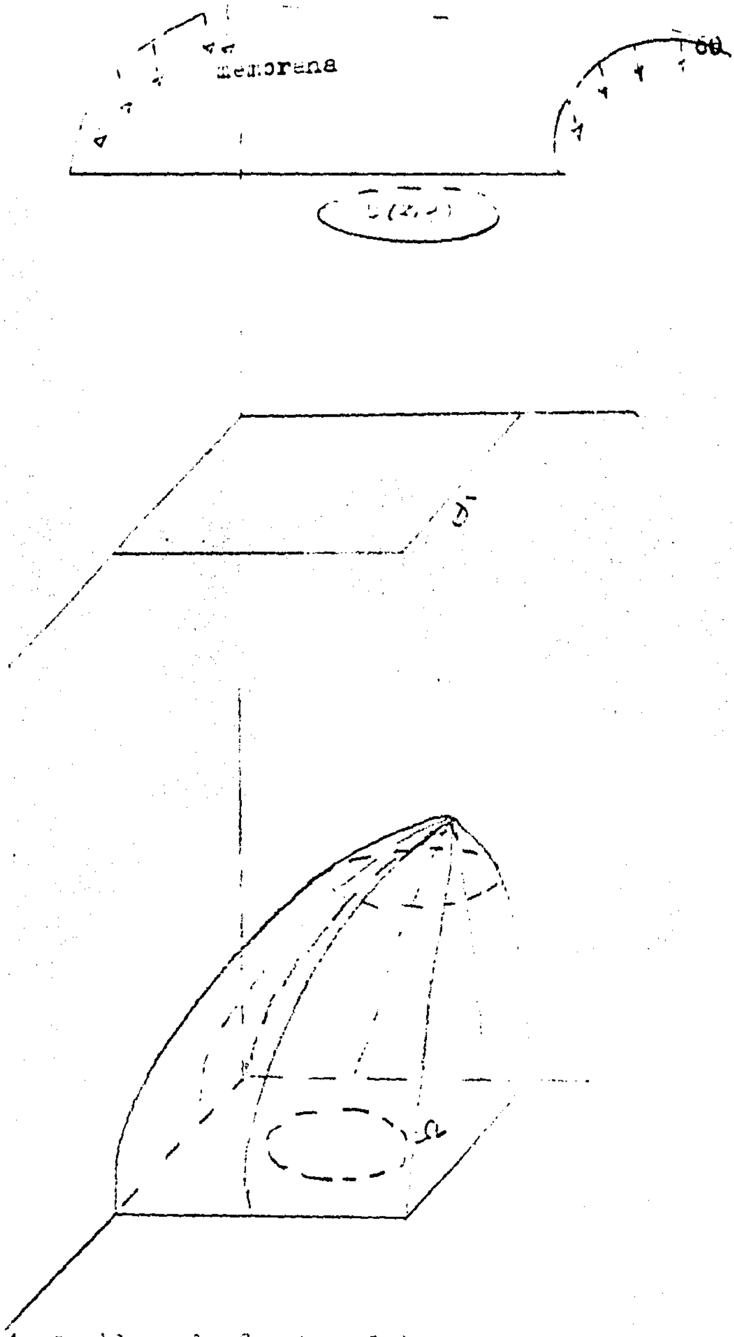


figura 4. Problema de frontera libre.

$$a(u,w) = \iint_D \text{grad } u \cdot \text{grad } w \;\; dxdy$$

$$\ell(v) = \iint_D fv \; dxdy$$

entonces por el principio del trabajo virtual[1] tenemos :

(8) $\quad u$ en K, $a(u,u-v) \leq \ell(u-v)$, $\forall\ v \in K$,

esta desigualdad es una típica desigualdad variacional, K es un subconjunto convexo de $H^1(D)$, más aún K es no vacío si suponemos lo siguiente

φ esta en $C^0(\bar{D})$ y $\quad \varphi|_{\partial D} = 0$

ó

φ esta en $H^1(D)$ y $\quad \varphi|_{\partial D} \leq 0$.

La funcional ℓ es lineal y continua sobre $L^p(D)$ p.a. $p \geq 1$.

La existencia y unicidad de la solución u de (8) se sigue del hecho de que $(u,v) \longrightarrow a(u,v)$ es un producto escalar sobre $H^1(D)$ equivalente al original, es suficiente que $a(u,v)$ es definida positiva y continua (teorema de Lions-Stampacchia).

Para demostrar que la solución u del problema (8) y definida por (6), resuelven el problema (1)-(5) son necesarias más propiedades de suavidad sobre u, para este trabajo se supone por ejemplo que f y la segunda derivada de φ esten localmente en $L^p(\Omega)$, para $p > 2$[2] , entonces la solución

(1)Principio del trabajo virtual: En un sistema en equilibrio, la suma de los trabajos virtuales hecho por las fuerzas interiores es igual al hecho por las fuerzas exteriores.
(2) ver [26] , pag 170 y 171.

u de (3) cumple :

(9) u esta en $C^1(D)$. (Ω es abierto, $\psi \in C^1(D)$ en nues -- hipótesis restringimos a sobre $\overline{\Omega}$ ...).

Entonces (1) se cumple y además $u \geq \psi$ en Ω, $u = \psi$ en $\partial\Omega \cap D$, (5) se sigue de que u esta en $H_0^1(D)$, (4) se sigue del hecho de que $u-\psi$ esta en $C^1(D)$ (u en K), así que

$$\text{grad } (u-\psi) = 0$$

por lo tanto

$$\text{grad } u = \text{grad } \psi \qquad \text{sobre } \partial\Omega \cap D$$

finalmente (7), en el sentido de las distribuciones puede ser probado seleccionando en (8) $v = u + \lambda \phi$ con ϕ en $\mathcal{D}(\Omega)$, sopp $(\phi) \subset \Omega$, y λ suficientemente pequeño para tener que $u + \lambda \phi$ este en K.

Ejemplo 7. Filtración de líquidos a través de materiales porosos.

En 1971 Baiocchi propuso un nuevo método para resolver problemas de filtración de líquidos en medios porosos, dada la importancia práctica de estos problemas se han interesado en ellos ingenieros en hidráulica. El método propuesto por Baiocchi probó efectividad para resolver estos problemas, no sólo desde el punto de vista puramente teórico (en el sentido de que fue posible probar existencia y unicidad de la solución) sino también desde el punto de vista de las soluciones numéricas.

Este nuevo método fue sistemática y extensivamente desarrollado por el Laboratorio de Análisis numérico en colaboración con el instituto de Hidráulica de la universidad de Pavía. ([illegible], 2, 3, 10, 4).

Este ejemplo pretende mostrar las ideas básicas del método para un caso típico, y también revisar los resultados más importantes, está basado en los artículos (2, 3, 4, [illegible], 9).

Problema modelo -

Suponemos que dos depósitos que contienen agua sobre una base horizontal impermeable están separadas por un dique poroso. Suponemos que el dique tiene paredes en el plano vertical y horizontal, y que el material del cual está hecho es perfectamente homogeneo e isotrópico.

En el caso estacionario, el agua se filtra de la parte superior del depósito a la parte inferior, se quiere determinar la naturaleza de la filtración y en particular la parte permeable del dique.

Podemos restringirnos a estudiar el problema en una -- cierta región Ω (fig. 1) ; la región debe ser plana, vertical, y ortogonal a las paredes. Si ignoramos los efectos de capilaridad, el problema siguiente es obtenido para una selección apropiada de las unidades de medida . [3].

Problema 1.

Encontrar $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$ tal que

(1) φ este en $C^0([0,a])$, $\varphi(0) = y_1$, $\varphi(a) \geq y_2$, decrece estrictamente sobre $(0,a)$,

(2) $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a,\ 0 < y < \varphi(x)\}$,

(3) u, v estan en $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$,

(4) $u_x - v_y = 0$, $u_y + v_x = 0$ en Ω ,

(5) $u = y_1$ sobre $\overline{AF}$, $u = y_2$ sobre $\overline{BC}$, $u = y$ sobre $\overline{CC'}$.

(6) $u(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$,

(7) $v(x, \varphi(x)) = q$, $0 \leq x \leq a$,

(8) $q \in \mathbb{R}$, $v = 0$ sobre $\overline{AB}$,

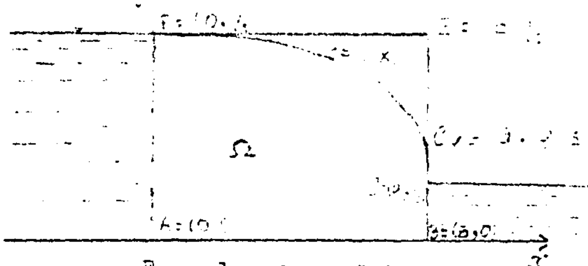


Fig. 1. $L = ABEF$.

a es el espesor del dique , y_1 , y_2 , (con $y_1 > y_2 > 0$) -- son los niveles de las dos cavidades. El dominio Ω es la - sección permeable del dique, la curva $y = \varphi(x)$ es la linea de la superficie libre , la función $u(x,y)$ es la "cabeza -- piezometrica" , esto es, el potencial de la velocidad; la -- función $v(x,y)$ es el "stream", esto es, sus lineas de nivel son lineas de corriente, y q es la razón de flujo.

El problema 1 debe ser formulado en forma diferente, - esto es, solo se busca $\{\varphi, \Omega, u\}$ que satisfagan las condiciones (1) ,(3),(5), (6) mientras que (4), (7),(8) son -- reemplazados por las condiciones

(9) $\qquad \Delta u = 0$ en $\qquad$,

(10) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sobre AB y sobre FC ,

en donde n es la normal interna a Ω y (10) se debe entender en el sentido de variación usual.

Es bien conocido el hecho de que (9) y (10) se siguen inmediatamente de (4), (7) y (8).

La idea fundamental (del método expuesto por Baiocchi) es hacer un cambio de la función desconocida, (esta idea -- fue usada en [2 , 3 , 4 , 5 ,10] que nos hace posible reducir el problema lineal original en un dominio abierto Ω , a -- uno con valores en la frontera no lineales en toda la re--- gión $D = (0,a) \times (0,y_1)$. Así para realizar tal sustitución suponemos que $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$ es una solución del pro-- blema 1 y extendemos u y v a todo D como sigue:

$$(11) \qquad \tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{en } \bar{\Omega} \\ y & \text{en } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{cases} \qquad \tilde{v}(x,y) = \begin{cases} v(x,y) & \text{en } \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en } D - \bar{\Omega} \end{cases}$$

al tomar en cuenta (6) y (7) respectivamente, entonces por (4) tenemos

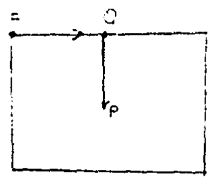
$$(12) \qquad \tilde{u}_x - \tilde{v}_y = 0 \quad , \quad \tilde{u}_y + \tilde{v}_x = \chi_{D-\Omega} \qquad \text{en } D$$

en donde $\chi_{D-\Omega}$ es la función característica de la región $D - \Omega$.

Entonces gracias a la primera formula de (12) la forma diferencial $-\tilde{v}dx + (y-\tilde{u})dy$ es exacta en D , y por lo tanto, podemos construir una nueva función w, que a cada $P \in D$ le asocia $w(P)$ como

$$(13) \qquad w(P) = \int_F^P (-\tilde{v}dx + (y-\tilde{u})dy) \quad , \; P \text{ en } \bar{D}.$$

La integral es sobre cualquier curva con finales F y P:



$$w(P) = \int_F^P -\tilde{v}dx + (y-\tilde{u})dy \qquad P \in \bar{D}$$

$$= \int_P^F \tilde{v}dx + (\tilde{u}-y)dy$$

$$= \int_P^Q \{vdx + (u-y)dy\} + \int_Q^F vdx + (u-y)dy$$

pero

$$\int_{Q}^{F} vdx + (u-y)dy = 0 \quad \text{por (11) y (12)}$$

por lo tanto

$$w(P) = \int_{P}^{Q} vdx + (u-y)dy$$

$$= \int_{P}^{Q} vdx + \int_{P}^{Q} (u-y)dy$$

pero

$$\int_{P}^{Q} vdx = 0$$

por lo que

$$w(P) = \int_{y}^{y_1} \{u(x,t) - t\}\, dt \qquad (x,y) \text{ en } \bar{D} .$$

Entonces w tiene las siguientes propiedades

(15) w esta en $C^1(\bar{D}) \cap H^2(D)$ por (3) y (14) ,

(16) $w = 0$ en $D-\Omega$ por (14),

(17) $-\Delta w = \chi_{\Omega}$ en D,

(18) $w_y = y-y_1$ sobre $\overline{AF}$, $w = y-y_2$ sobre $\overline{BC}$,

$w_y = 0$ sobre $\overline{BC}_{\varphi}$,

(19) $w_x = -g$ sobre $\overline{AB}$ (de (8),(11) y (12)).

Para ilustrar verificaremos (19) y (17) se verificará posteriormente.

$$w_x(x,y) = \int_y^{y_1} \tilde{u}_x(x,t)dt$$

$$= \int_y^{y_1} \tilde{v}_t(x,t)dt$$

$$= \tilde{v}(x,y_1) - \tilde{v}(x,y)$$

$$= \tilde{v}(x,y_1) - \tilde{v}(x,0) \quad \text{sobre } \overline{AB},$$

$$= -q \quad (\text{por } (8))$$

Es importante notar que, conociendo la función w, podemos recobrar la solución $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$ tomando por ejemplo

(20) $$\Omega = \{(x,y) \in D \ ; \ \Delta w(x,y) = 1\} ,$$

(21) $$\varphi(x) = \max \{ y \ ; \ (x,y) \in \Omega \} , \ 0 \leq x \leq a$$

(22) $$u = y - w_y \ , \ v = -w_x \text{ en } \ , \ q = v(x,0) \ .$$

Es necesario basandose en las relaciones previamente establecidas, obtener un problema " bien planteado " para el cual w pueda ser determinado, notamos primeramente que las condiciones (15), (16) y (18) fijan los valores de w sobre tres lados de D ; $\overline{AF}$, $\overline{FE}$ y $\overline{EB}$, y (15) y (19) fijan el valor de w sobre $\overline{AB}$ y el valor desconocido q , el cual es dado por

(23) $$q = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2a} \quad .$$

Finalmente, tenemos $w = g$ sobre Γ (Γ es la frontera de D), en donde g es la función

(24)
$$g = 0 \quad \text{sobre } \overline{FE} \cup \overline{EC}\text{ , por (16) ,}$$

$$g = \frac{(y_2 - y)^2}{2} \quad \text{sobre } \overline{BC}\text{ , de (18),}$$

$$g = \frac{y_1 - y}{2} \quad \text{sobre } \overline{AF}\text{ , de (18),}$$

$$g = \frac{y_2^2}{2} + q(a-x) \quad \text{sobre } \overline{AB}\text{, de (19).}$$

Así el problema (15)-(19), se transforma en el problema (15),(17) y (24). Además por el principio del máximo tenemos,

(25) $$u(x,y) > v \quad \text{en } \Omega,$$

que junto con (14) da

(26) $$w(x,y) > 0 \quad \text{en } \Omega .$$

Más aún , Ω puede ser caracterizada no solo por (20) sino también por la condición

(27) $$\Omega = \{(x,y) \in D \; ; \; w(x,y) > 0\}.$$

De (17) y (27) se tiene [1]

---

(1) Recuérdese el ejemplo 2, de esta sección.

(27') $\quad w$ en K ; $K = \{ \psi \in H^1(D)$; $\psi = g$ sobre $\Gamma \}$,

(28) $$\int_D \text{grad}w \ \text{grad}(\psi - w) \ dxdy + \int_D \chi_\Omega (\psi - w) dxdy \quad 0, \forall \psi \in K,$$

Por otro lado tenemos

$$\chi_\Omega \psi \leq \chi_\Omega \psi^+ \leq \psi^+$$

$$\chi_\Omega w = w^+ = w$$

$$\chi_\Omega (\psi - w) = \chi_\Omega \psi - \chi_\Omega w ,$$

de dondé

$$- \int_D \chi_\Omega (\psi - w) \geq - \int_D \psi^+ - w^+ ;$$

por lo tanto (28) se puede escribir como

(28') $$\int_D \text{grad } w \ \text{grad}(\psi - w) \ dxdy + \int_D (\psi^+ - w) \ dxdy \geq 0 \forall \psi \in K.$$

Notece que si tomamos en cuenta (27), w es también solución de una desigualdad variacional distinta :

(29)
$$w \in K^+, \ K^+ = \{ \psi \in K ; \ \psi \geq 0 \text{ c.d. en } D \} ,$$

$$\int_D \text{gradw grad}(\psi - w) \ dxdy + \int_D (\psi - w) \ dxdy \geq 0, \ \forall \psi \in K .$$

Esta desigualdad es equivalente al problema de minimizar la funcional $J(\psi)$

$$J(\psi) = \frac{1}{2}\int_D |\text{grad}\,\psi|^2\,dxdy + \int_D \psi\,dxdy$$

sobre el conjunto convexo K^+ .

Hasta aquí, tenemos que el problema 1 via la desigualdad variacional (28) tiene una única solución u en $H^1(\Omega)$.

Así sólo resta ver que la solución w esta en $H^2(\Omega)\cap C^1(\Omega)$ para que u este en $H^1(\Omega)\cap C(\Omega)$.

Tomando en cuenta la unicidad de la solución de la desigualdad (28) y las expresiones (27) ,(21) y (23) obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1. El problema 1 tiene una única solución en $H^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$.

A continuación se presenta un bosquejo de la demostración del teorema anterior, para los detalles consultese a Baiocchi [?].

Para la unicidad, consideramos primero la función g dada por (24) con q definida por (23) y la desigualdad (28) con la función desconocida w. Es bien conocido que esta desigualdad tiene una y sólo una solución w. Entonces la primera pregunta que surge es la regularidad de w. Apriori sabemos que w esta en $H^1(D)$, pero sabemos que si el problema 1 tiene una solución w, entonces w debe satisfacer la condición (15), pero vimos que si w es solución del problema 1 entonces w esta en $H^2(D)\cap C^1(\bar{D})$.

Necesariamente se sigue de (28) que

$$(30) \qquad w \in L^{\infty}(D)\ ,\ 0 \leq \Delta w \leq 1 \text{ c.d. en } D\ ,$$

y entonces se sigue de un resultado standard sobre el proble ma de Dirichlet en un rectángulo, que w esta en $W^{2,p}(D)$, p en $[1, \infty)$. Gracias al téorema de inmersión de Sóbolev, tenemos que la solución de (28) también satisface (15).

Para la existencia, suponemos que q es dada por (23) y que w es la solución de (28), entonces una solución del problema 1 puede ser obtenida tomando

$$\Omega = \{(x,y) \in D\ ;\ w(x,y) > 0\},$$

$$(31) \qquad \varphi(x) = \max\{y;\ (x,y) \text{ en } \Omega\ ,\ 0 \leq x \leq a\},$$

$$u(x,y) = y - D_y w(x,y)\ ,\ v(x,y) = -D_x w(x,y)\ ,\ x,\ y \in \Omega\ .$$

En efecto, primero veremos que $\Delta w = 1$ en Ω ; en particular $D_x w$ y $D_y w$ son harmónicas en Ω y continuas en $\bar{D}$, ya que $w \in C^1(\bar{D})$.

Sea $\sigma \in C^{\infty}(\bar{D})$ nula fuera de un compacto contenido en Ω. se le pude asociar un $\lambda_\sigma > 0$ tal que, para $|\lambda| < \lambda_\sigma$, $w + \lambda\sigma \in K^+$, con $\psi = w + \lambda\sigma$ la desigualdad (29) da

$$\int_D \text{grad } w \text{ grad}(\lambda v) \, dx\, dy + \int_D \lambda v dxdy \geq 0 \;\; \forall \, v \in C^{\infty}(\bar{D})$$

esto implica

$$\int_D \text{grad } w \text{ grad } \lambda v \geq -\lambda \int_D vdxdy \; .$$

$$\lambda \langle -1, v \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} -\lambda \, v \, dxdy = \int_D -\lambda \, vdxdy \; ,$$

pero

$$\int_D -\lambda \, vdxdy \leq \int_D \text{gradw grad} \lambda vdxdy = \lambda \int_D (w_x v_x + w_y v_y) dxdy$$

$$= \lambda \langle -\Delta w, v \rangle_{\Omega} \; ,$$

por lo que tenemos

$$\lambda \langle -1, v \rangle_{\Omega} = \lambda \langle -\Delta w, v \rangle$$

dado que λ puede ser tomada negativa, entonces

$$\langle \Delta w - 1, v \rangle_{\Omega} = 0 \qquad \forall \, v \in C^{\infty}(\bar{D})$$

y por lo tanto

$$\Delta w = 1$$

en el sentido distribucional.

Aproximaciones numéricas de el problema modelo.

Los resultados teóricos dados anteriormente sugirierón un nuevo metodo de solución numérica del problema.
Para este método se puede establecer rigurosamente las propiedades de estabilidad y convergencia, y también una estimativa del error.

El resultado obtenido por medio de este método concuerda con los resultados obtenidos por el método clásico y con los datos experimentales ; este método difiere ventajosamente de métodos anteriores por la simplicidad de la programación y la velocidad de los calculos. El procedimiento usado es una aproximación externa por diferencias finitas. Para simplificar la notación suponemos que los números a y y_1 son conmensurables : sea h el común divisor . Sea

(32) $$N_x = a/h \ , \ N_y = y_1/h \ .$$

Denotamos por D_h , el conjunto de puntos de la forma

$$M = (ih, jh) \ , \ (i = 0,1,\dots,N_x; \ j = 0,1,\dots,N_y)$$

y por D'_h , el conjunto de los puntos de la forma

$$M = (ih, jh) \ , \ (i = 1,2,\dots,N_x-1; \ j = 1,2,\dots,N_y-1).$$

Con cada punto M de esta malla asociamos el cuadrado $\omega_h(M)$ con centro en M y lado h: tomamos este cuadrado semiabierto por arriba.

Por $\chi_{h,M}(x,y)$ denotamos la función característica de $\Gamma_h(M)$; además tomamos

$$V_h = \{v_h \; ; \; v_h = \sum_{M \in D_h} v_h(M)\chi_{h,M}\}$$

aquí v_h (M) son constantes reales. V_h es una aproximación externa del espacio $H^1(\Omega)$; en V_h los operadores diferenciales son aproximados por diferencias centrales, esto es,

$$(\delta_1 v)(x,y) = \frac{1}{h}\left(v(x+\tfrac{h}{2},y) - v(x-\tfrac{h}{2},y)\right),$$

$$(\delta_2 v)(x,y) = \frac{1}{h}\left(v(x,y+\tfrac{h}{2}) - v(x,y-\tfrac{h}{2})\right),$$

así que el Laplaciano $\Delta h(v) = \delta_1^2 + \delta_2^2$ es dado en el esquema usual de cinco puntos.

Para obtener una aproximación discreta para el conjunto convexo K^+ introducido en (29), debemos construir una aproximación discreta de la función g. Sea

(33) $$g_h(x,y) = \sum_{M \in \bar{D}_h \cap \Gamma} g(M)\chi_{h,M}(x,y);$$

(34) $$K_h^+ = \{v_h ; v_h \in V_h,\ v_h(M) = 0\ \forall M \in \bar{D}_h ;\ v_h(M) = g_h(M) \text{ para } M \in \bar{D}_h \cap \Gamma\}.$$

Introducimos la notación adicional

(35) $$\Omega_h^+ = [\tfrac{h}{2}, a-\tfrac{h}{2}] \times [\tfrac{h}{2}, a-\tfrac{h}{2}];$$

(36) $$a_h(u,v) = \int_{D_h^-} (\delta_1 u\, \delta_1 v + \delta_2 u\, \delta_2 v)\,dxdy.$$

Estudiaremos el siguiente problema

encontrar $w_h \in K_h^-$ tal que $\forall v \in K_h^-$

(37) $$a_h(w_h, v-w_h) \geq \int_{D_h^+} (w_h - v)\,dxdy.$$

El siguiente teorema se cumple (esta demostrado en (8)).

Teorema 3. El problema (37) tiene una y sólo una solución w_h y

(38) $0 \le L_h w_h \le 1$ en D_h^+

(39) $L_h w_h = 1$ en los puntos de D_h^+ donde $w_h > 0$

además es conocido que

(40) la restricción a D de $w_h, \delta_1 w_h, \delta_2 w_h$ converge fuertemente en $L^2(D)$ cuando $h \to 0$ a w, $\partial_1 w$, $\partial_2 w$, respectivamente, y w es una solución del problema (29).

Puede también ser demostrado que

(41) $\lim_{h \to 0} w_h(x,y) = w(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$

La solución numérica del problema (37) para cualquier valor fijo h se puede obtener aplicando por ejemplo el método de relajación superior (S.O.R.) con proyección . Para -- más detalles consultese (5,7,8).

Partiendo de la función w_h , tenemos

$$u_h(x,y) = \sum_{M} u_h(M)\chi_{M}(x,y), \text{ donde}$$

(42) $$u_h(M) = jh - (\Delta_2 w_h)(M), \quad M=(ih,(j+\tfrac{1}{2})h)$$

$$(i=0,1,\ldots,N_x;\ j=0,1,\ldots,N_y-1);$$

$$v_h(x,y) = \sum_{M} v_h(M)\chi_{M}(x,y), \text{ donde}$$

(43) $$v_h(M) = -(\Delta_1 w_h)(M), \quad M=((i-\tfrac{1}{2})h,jh)$$

$$(i=0,1,\ldots,N_x-1;\ j=0,1,\ldots,N_y)$$

(44) $$\Omega_h = \{(x,y)\ ;\ (x,y)\in D,\ w_h(x,y)>0\}.$$

El cuadruplo $\{\Omega_h, u_h, v_h, q_h\}$ da una cierta aproximación de $\{\Omega,u,v,q\}$; el límite superior de Ω_h da una aproximación de Ω ; la curva equipotencial, puede ser obtenida por interpolación de los valores v_h en la malla D_h , da una aproximación de las lineas de corriente, etc.

Necesariamente de (40) se puede demostrar el siguiente teorema(demostración que se puede ver en (4)).

<u>Teorema 4.</u> El dominio Ω_h, converge cuando $h \longrightarrow 0^+$ a Ω en el siguiente sentido:

$$(48) \qquad \Omega = (\lim_{h \to 0^+}{}' \Omega_h)^0$$

en donde E^0 es el interior de E, $\lim'_{h\to 0^+} E_h$ denota $\bigcup_h \bigcap_{k<h} E_k$.

El método usado anteriormente puede ser extendido y - generalizado en distintas direcciones, mencionaremos algu-- nas , por ejemplo en el problema 1 el porcentaje de flujo q, el cual es apriori desconocido se puede determinar fácilmen te por la expresión (23) que nos da a q como una función de los datos geométricos del problema.

Una situación más complicada se presenta en el caso de que realmente q no sea un dato conocido del problema.

Consideremos el caso del problema uno suponiendo que - la pared de la izquierda es impermeable de c a y_1 . (fig.2).

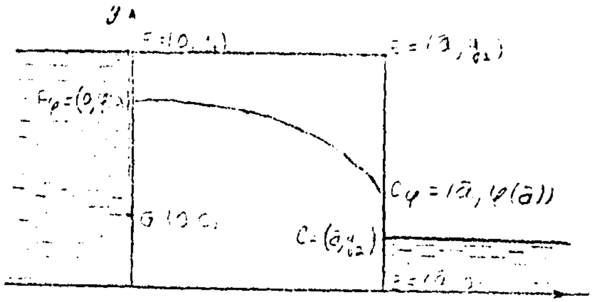


Fig.2. D es la sección ABCF.

Obtenemos el siguiente problema :

<u>Problema 2.</u>

(46) $\varphi \in C^0([0,a])$, $0 \leq \varphi(0) \leq y_1$, $\varphi(a) \geq y_2$,

φ decrece estrictamente sobre $(0,a)$,

(47) $\Omega = \{(x,y);\ 0<x<a,\ 0<y<\varphi(x)\}$,

(48) $u,v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$,

(49) $u_x - v_y = 0$, $u_y - v_x = 0$ en Ω ,

(50) $u=y_1$ sobre $\overline{AG}$ y $v = 0$ sobre $\overline{GF_1}$, $u=y_2$ sobre $\overline{BC}$,

$u=y$ sobre $\overline{CF_1}$,

(51) $v(x,\varphi(x)) = 0$, $0 \leq x \leq a$,

(52) $u(x,\varphi(x)) = \varphi(x)$,

(53) $q \in \mathbb{R}$, $v = q$ sobre $\overline{AB}$.

El método se aplica en forma análoga para este problema ver (8).

Existen muchos problemas similares al problema 2, esto es, problemas en los cuales el porcentaje de flujo es "efectivamente" desconocido. El método descrito permite estudiar una familia de desigualdades variacionales que dependen de un parametro q. En diferentes casos surgen diferentes dificultades, y para determinar el parametro q se aplican diferentes técnicas.

Los problemas 1 y 2 se pueden resolver análogamente para el caso en que el dique D tenga el lado izquierdo inclinado. El problema matemático a resolver es el siguiente.

Problema 3.

(54) $\varphi \in C^0([0,a])$, $\varphi(0) \leq y_1$, $\varphi(a) \geq y_2$,

φ decrece estrictamente sobre $[0,a]$,

(55) $\Omega = \{(x,y) \in D,\ y < \varphi(x) \ \text{ para } x > 0\}$,

(56) $u, v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$,

(57) $u_x - v_y = 0$, $u_y + v_x = 0$ en Ω,

(58) $u = y_1$ sobre $\overline{AF}$, $u = y_2$ sobre $\overline{BC}$, $u = y$ sobre $\overline{CC_1}$,

(59) $u(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$,

(60) $v(x, \varphi(x)) = 0$, $0 \leq x \leq a$.

(61) $q \in \mathbb{R}$, $v = q$ sobre $\overline{AB}$.

Se le puede aplicar el metodo análogamente[1].

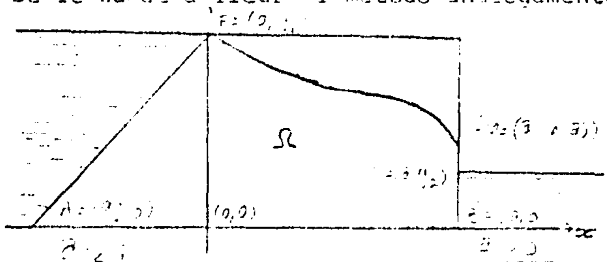


Fig.3. D es el trapecio ABEF.

(1) ver para los detalles : R Glowinsky, J.L. Lions y R. Tremolieres, Resolution numérique des inéquations de la mécanique et de la physique, Paris 1974, [3].

Este método se puede aplicar también a diques de forma más general como el de la figura 4. Para el trapecio ABEF - de la figura 4, el problema matemático es el siguiente (4) ;

<u>Problema 4.</u>

(62) $$\begin{cases} \varphi \in C^0([0,s]),\ a_1 \leq s \leq a_2, \text{ con } s \text{ desconocido;} \\ \varphi(0) = y_1,\ \varphi \text{ decrece estrictamente sobre } [0,s], \\ \varphi(s) \geq y_2; \end{cases}$$

(63) $\Omega = \{(x,y) \in D : y < \varphi(x) \text{ para } 0 < x < s\}$,

(64) $u, v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$,

(65) $u_x - v_y = 0,\ u_y + v_x = 0$ en Ω,

(66) $u = y_1$ sobre $\overline{AF}$, $u = y_2$ sobre $\overline{BC}$, $u = y$ sobre $\overline{CC_\varphi}$,

(67) $u(x,\varphi(x)) = \varphi(x)$,

(68) $v(x,\varphi(x)) = 0,\quad 0 \leq x \leq a$,

(69) $q \in R$, $v = q$ sobre $\overline{AB}$.

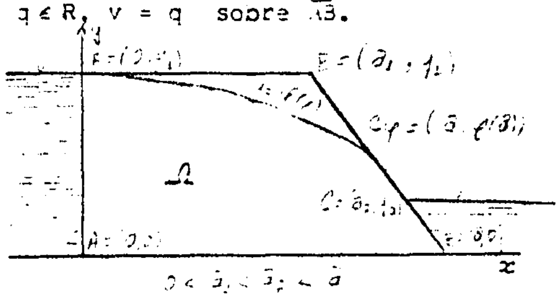


Fig.4. Ω es el trapecio ABEF.

APENDICE DEL CAPITULO II.

Sea $Au + f = \mu$, $u \in H_0^1(\Omega)$, μ medida positiva , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con

$$Au = -\sum (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} \quad , \quad f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad .$$

Sabemos que la siguiente desigualdad se cumple

(1) $$\sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} w_{x_j} \, dx - \sum_{i} \int_{\Omega} f_j w_{x_j} \, dx \geq 0 \quad , \forall \; w \in H_0^1(\Omega),$$

$w \geq 0$ sobre Ω, w se puede escribir como

$w = \varepsilon(v-u)$ con $\varepsilon \geq 0$ y $v \in K$,

definimos de esta forma al conjunto K_u, esto es,

$$K_u = \{ w \in H_0^1(\Omega) \; ; \; w = \varepsilon(v-u), \; \varepsilon > 0. \; v \in K \} .$$

$\bar{K}_u$ denota la cerradura de K_u en $H_0^1(\Omega)$, K_u es convexo.

Verémos que el soporte de μ es el conjunto de puntos de Ω en donde $u = \psi$ (el conjunto I).

Para lo cual tomamos un $x_0 \in \Omega$, tal que $u > \psi$ en x_0 y sea $S \in C_0^\infty(B(x_0,\rho))$ tal que $S \leq \alpha$, tenemos $u - S \in K$.

Consideramos cualquier función $\eta \in C_0^1(B(x_0, \rho))$; entonces se puede encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $-\varepsilon \eta \leq \alpha$ y por lo --

tanto $\varphi \in K_u$, esto implica que $C_0^1(B(x_0,\rho)) \subset K_u$. Así que, - $H_0^1(B(x_0,\rho)) \subset K_u$ siempre que $u > \psi$ en x_0, en el sentido definido anteriormente.

El conjunto $\Omega - I$ es el conjunto de puntos en donde $u > \psi$ por lo tanto $H_0^1(\Omega - I) \subset \overline{K}_u$.

El cono de todos los elementos no-negativos de $H_0^1(\Omega)$ - esta contenido en $\overline{K}_u$. Ya que K_u es un cono convexo, la suma de sus elementos con los de $H_0^1(\Omega - I)$ es un elemento de $\overline{K}_u$.

El cono convexo de todos los elementos de $H_0^1(\Omega)$ no-negativos sobre I en el sentido de $H^1(\Omega)$ está contenido en K_u.

Cualquier w que este en este cono, se puede escribir como sigue

$$w = \max(w,0) + \min(w,0)$$

donde el primer término del lado derecho es no-negativo en el sentido de $H^1(\Omega)$, mientras $\min(w,0) \in H_0^1(\Omega - I)$ (ver [26]).

Si consideramos (1) para las funciones de $H_0^1(\Omega - I)$ obtenemos

$$(2) \qquad \sum_{i,j} \int_{\Omega - I} a_{ij} u_{x_i} w_{x_j} \, dx - \sum_i \int_{\Omega - I} f_i w_{x_i} \, dx = 0 \text{ para } w \in H_0^1(\Omega - I)$$

esto gracias a que w y -w estan en $\overline{K}_u$.

La ecuación (2) se entiende como

$$Au - f = 0 \quad \text{en } \Omega - I$$

en el sentido de las distribuciones, esto es μ se anula en $\Omega - I$ por lo que el soporte de μ es el conjunto I.

C A P I T U L O III.

PROBLEMAS QUE DEPENDEN DEL TIEMPO.

3.1 Nociones sobre distribuciones vectoriales.

Sea V un espacio de Hilbert, representaremos por --- $L^2(0,T;V)$ el espacio de(clases de) funciones f que son -- medibles en $(0,T)$ con rango en V, y tal que

$$\left(\int_0^T \| f(t)\|_V^2 \, dt \right)^{1/2} = \| f \|_{L^2(0,T;V)} < \infty ,$$

donde $\| \ \|$ es la norma del espacio V.

Con esta norma el espacio $L^2(0,T;V)$ resulta ser un - espacio de Hilbert.

Recordemos que si Φ y Ψ son dos espacios vectoriales topológicos tenemos el siguiente espacio :

$L(\Phi, \Psi)$ = el espacio de mapeos lineales continuos de Φ en Ψ .

(La topologia se define en cada caso particular).

Sea u en $L^2(0,T;V)$ y ϕ en $\mathcal{D}(0,T)$, consideremos el - siguiente mapeo

$$\tilde{u}: \phi \longrightarrow \int_0^T u(t)\, \phi(t)\, dt \ , \ (\in V)$$

siendo la integral calculada en V. Resulta que el mapeo $\tilde{u}$ es continuo de $\mathcal{D}(0,T)$ en V, por lo tanto, $\tilde{u}$ es un elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),V)$, el espacio vectorial de las aplicaciones lineales, continuas de $\mathcal{D}(0,T)$ en V.

<u>Definición 1.</u> El espacio $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);V)$ es el espacio de distribuciones vectoriales sobre (0,T) con valores en V, lo denotaremos por

$$\mathcal{D}'((0,T);V) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);V).$$

Dada una distribución u de $\mathcal{D}'((0,T);V)$, su valor en ϕ, ϕ en $\mathcal{D}(0,T)$ se representa por

$$\langle u, \phi \rangle$$

de esta forma, toda u en $\mathcal{L}^2(0,T;V)$ define una distribución $\tilde{u}$ en $\mathcal{D}'(0,T;V)$ definida por

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \int_0^T u(t)\,\phi(t)\,dt \qquad (\in V)$$

puede verificarse que $u \longrightarrow \tilde{u}$ es uno a uno. Esto permite identificar u con la $\tilde{u}$ que ella define y obtenemos

$$L^2(0,T:V) \subset \mathcal{D}'((0,T);V)$$

en este sentido se dice que la función u de $L^2(0,T:V)$ es la distribución vectorial $\tilde{u}$.

Sea u una distribución vectorial sobre (0,T), su derivada es una distribución vectorial u' definida en $\mathcal{D}$ (0, T) por

$$\langle \frac{d}{ds} u, \phi \rangle = (-1) \langle u, \frac{d}{ds} \phi \rangle \qquad \forall \phi \text{ en } \mathcal{D}(0,T) \quad .$$

De manera análoga la derivada de orden n de la distribución u , se define como la distribución $d^n u$, definida por

$$\langle \frac{d^n u}{ds}, \phi \rangle = (-1)^n \langle u, \frac{d^n \phi}{ds^n} \rangle \quad \forall \phi \text{ en } \mathcal{D}(0,T) \quad .$$

Resulta de la definición de derivada, que identificando los elementos de $L^2(0,T;V)$ con las distribuciones -- que definen, podemos concluir que toda función u de $L^2(0,T;V)$ posee derivada de todos los ordenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre (0,T).

En $\mathcal{D}'((0,T);V)$ se define una noción de convergencia débil. (Se provee con la topologia uniforme sobre el conjunto acotado de $\mathcal{D}((0,T)$). De hecho, sea u_n una sucesión convergente a la distribución vectorial u, cuando, para cada ϕ en $\mathcal{D}(0,T)$

$$\langle u_n, \phi \rangle \longrightarrow \langle u, \phi \rangle \quad \text{en } V .$$

Introducimos una situación la cual será frecuentemente usada.

Sean V y H dos espacios de Hilbert, $V \subset H$, V denso en H con inmersión continua. Denotamos $(\ ,\ )_H$, $\|\cdot\|_H$, y $(\ ,\ )_V$, $\|\cdot\|_V$, producto y norma en H y en V respectivamente .

Identificaremos a H con su dual, y tenemos

$$V \subset H = H' \subset V'$$

cada espacio siendo denso en el siguiente.

Considerese el siguiente espacio

$$W(0,T) = \{ u \in L^2(0,T;V) \; ; \; u' \in L^2(0,T;V') \} \quad ,$$

donde $u' = \frac{du}{dt}$ está tomada en el sentido de las distribuciones en $(0,T)$. Este espacio resulta ser completo con la norma

$$\| u \|_{W(0,T)} = \left[\| u \|^2_{L^2(0,T;V)} + \| u' \|^2_{L^2(0,T;V')} \right]^{1/2}$$

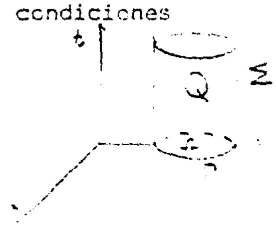
debido a la continuidad de la diferenciación en el sentido de las distribuciones.

3.2 Ecuaciones de evolución de primer orden.

En esta parte estudiamos el problema mixto para ecuaciones parabólicas, desde el punto de vista de las ecuaciones operacionales en un espacio de Hilbert, iniciamos a modo de motivación , con un simple ejemplo de la ecuación de transferencia de calor o en forma abreviada , la ecuación de calor.

Consideremos un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$, cuya frontera Γ suponemos "bien regular" . Sea $Q = \Omega \times (0,T)$ un cilindro de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Representamos por Σ la frontera lateral de Q , esto es, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, por Δ se entiende el operador de Laplace en el espacio $\mathbb{R}^n$. El problema mixto para la ecuación de calor consiste en encontrar una función real u(x, t) con (x,t) en Q que satisfaga las condiciones



$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \text{ en } Q$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Sigma$$

en este problema son conocidas las funciones $u_0(x)$ y f.

Tomando este problema como modelo , buscamos la manera adecuada para formularlo en el contexto de la teoría de las distribuciones. Empezamos adoptando una notación conveniente la cual consiste en considerar la función u(t), en lugar de u(x,t) análogamente f(t) es la función f(x,t).

Entonces el problema mixto para la ecuación de calor toma la forma :

(1) $$\frac{\partial}{\partial t} u(t) - \Delta u(t) = f(t) \text{ , en } Q$$

(2) $$u(0) = u_0 \text{ , sobre } \Omega$$

(3) $$u(t) = 0, \text{ sobre } \Sigma \text{ .}$$

En base a la experiencia en el estudio del problema de Dirichlet , escojemos un espacio en el cual la condición (3) siempre sea satisfecha.

De hecho es suficiente buscar soluciones u(t) que --

pertenescan a $H_0^1(\Omega)$. Con el objeto de encontrar una buena definición de solución, en el contexto de las distribuciones, multiplicamos ambos lados de la ecuación (1) por un elemento v en $H_0^1(\Omega)$, independiente de t e integramos en Ω.

Se obtiene, por el teorema de Green

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v\right) + a(u(t),v) = (f(t),v)$$

con

$$(5) \qquad (u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

y

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

así podemos formular el problema para la ecuación de calor del modo siguiente :

Sean dadas las funciones u_0 en $L^2(\Omega)$ y f en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ se busca una función $u(t)$, con las siguientes propiedades

$$(6) \qquad u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$(7) \qquad u \text{ continua de } [0,T] \text{ en } L^2(\Omega),$$

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

esta igualdad en el sentido de $\mathcal{D}'((0,T),H_0^1(\Omega))$,

$$(9) \qquad u(0) = u_0 .$$

Tenemos así un problema modelo, cuyo análisis de los elementos que entran en su planteamiento nos permite formular un problema abstracto, abarcando otros de naturaleza -- análoga.

Al formular el problema, usamos un par de espacios de Hilbert V y H, ($V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$) , tales que $V \subset H$, - una inyección continua y V denso en H.. También la forma -- bilineal definida sobre V.

Consideremos dos espacios de Hilbert V y H, con V denso en H e inmerso continuamente en H. Si identificamos a H con H', su dual, se demuestra lo siguiente

$$V \subset H = H' \subset V' .$$

Representaremos por $\langle , \rangle$ la dualidad entre V' y V. Sea a(u,v) una forma bilineal en VxV, continua, esto es, existe una constante $c > 0$, tal que

$$a(u,v) \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall\, u,v \in V.$$

También suponemos que esta forma bilineal es coerciti- va, esto es, existen $\lambda , \alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) + \lambda \|v\|_V \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V.$$

De la continuidad de la forma bilineal y del lema de - Riez-Frechet (35) resulta la existencia de un operador lineal acotado A de V en V' , tal que

$$a(u,v) = \langle Au,v \rangle$$

de este modo, tenemos todos los elementos necesarios para la formulación del problema mixto para las ecuaciones parabólicas, el cual llamaremos problema 1.

Problema 1. Las funciones u en H y f en $L^2(0,T;V')$ -- son dadas. Encontrar u en $L^2(0,T;V)$ que satisfaga las siguientes condiciones :

$$\left(\frac{d}{dt}u(t),v\right)_V + a(u(t),v) = \langle f(t),v\rangle, \ \forall\ v\in V$$

(10) en el sentido de las distribuciones sobre $(0,T)$,

$$u(0) = u_0$$

utilizando la igualdad $a(u,v) = \langle Au,v\rangle$, este problema puede ser planteado en la siguiente forma

$u' + Au = f$ en el sentido de las distribuciones

(11) vectoriales en $L^2(0,T;V')$,

$$u(0) = u_0 .$$

Antes de continuar hagamos la siguiente observación.

Observación 1. Supongamos que $0 < T < \infty$, $t < T$, sea - $u = e^{kt} z$ y substituyendo en la ecuación

$$u' + Au = f$$

obtenemos

$$(e^{kt}z)' + Ae^{kt} = f$$

$$e^{kt}z' + e^{kt}kz + Ae^{kt}z = f$$

por lo tanto nuestro problema queda así :

$$z' + (A + kI)z = e^{-kt}f$$

(12)

$$\text{con } z(0) = z_0$$

tenemos :

$$a_k(u,v) = \langle Au,v\rangle + k(u,v)_V = a(u,v) + k(u,v)_V$$

esto es,

$$a_k(v,v) = a(v,v) + k(v,v)_V = a(v,v) + k\|v\|^2 \geq a(v,v) + k\beta|v|^2$$

donde β es la constante de inmersión continua de V en H .

En el cambio de variable $u = e^{kt}z$, consideramos la constante k de modo que $k\beta = \lambda$.

Así que obtenemos

$$a_k(v,v) = a(v,v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2 .$$

Para $0 < T < \infty$, podemos , sin pérdida de generalidad , limitarnos a las formas coercitivas con $\lambda = 0$.

De esta observación, diremos que la forma a(u,v) es coercitiva en el sentido de existir una constante $\alpha > 0$, tal que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad , \; \forall \; v \in V.$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución -- del problema 1.

Antes diremos que es lo que entendemos porque u es solución de $u' + Au = f$, en el sentido débil , esto es, si u satisface

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = \langle f(t),v \rangle \quad \forall \; v \in V$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales en $(0,T)$ ($\mathcal{D}'(0,T;V)$) o que $u' + Au = f$ en el sentido de las distribuciones vectoriales en $L^2(0,T;V')$.

<u>Teorema 1</u>. Consideremos f en $L^2(0,T;V')$ y $u \in H$, entonces, existe una única función u que satisface las siguientes condiciones :

(13.1) $\quad u \in L^2(0,T;V)$,

(13.2) $\quad u' \in L^2(0,T;V')$,

(13.3) $\quad u' + Au = f$ en el sentido débil,

(13.4) $\quad u(0) = u_0 \in H$,

de las condiciones (13.1) y (13.2) se deduce que, u esta en $W(0,T)$, y por lo tanto $u \in C^0([0,T];H)$, con modificaciones

(1) Ver pag. 19 en [1] .

en un conjunto de medida cero , haciendo que tenga sentido - calcular $u(0)$.

Demostración del Teorema 1.

Unicidad: Supongamos que existen dos soluciones u y v en las condiciones del teorema 1, con u_0 y f fijos .

Sea $w = u - v$, resulta que w es solución de

$$w' + Aw = 0$$

$$\text{con} \quad w(0) = 0$$

para probar la unicidad, es suficiente demostrar que $w = 0$.

De hecho $w(t) \in V$, $w'(t)$ y $Aw(t) \in V'$.

Luego

$$\langle w'(t), w(t) \rangle + \langle Aw(t), w(t) \rangle = 0$$

esto es,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(w(t), w(t))_V + a(w(t), w(t)) = 0$$

esto implica

$$a(w(t), w(t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(w(t), w(t)),$$

por ser $a(u,v)$ coercitiva tenemos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(w(t), w(t))_V \geq \alpha \| w(t) \|_V ,$$

de lo que resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\| w(t) \|_V^2 + \alpha \| w(t) \|_V^2 \leq 0$$

con $w(0) = 0$.

Integrando esta igualdad de 0 a $t < T$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_V^2 + \alpha\int_0^t \|w(s)\|_V^2\, ds \leq 0$$

para toda t, tal que $0 \leq t \leq T$. Esta condición implica que $w(t) = 0$, probando así la unicidad.

Existencia: La demostración de la existencia será hecha a traves del método de Galerkin, que consiste en encontrar una solución a traves de soluciones de problemas de dimensión finita. Para eliminar dificultades de naturaleza técnica, supondremos separable el espacio de Hilbert V.

Con estas hipótesis, se deduce la existencia de una base en V, esto es, una sucesión (w_n), siendo los w_n elementos de V que satisfacen las siguientes condiciones :

(14.1) Para cada m los vectores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son linealmente independientes.

(14.2) Las combinaciones finitas lineales $\sum_{n=1}^{n} \xi_n w_n$, $\xi_n \in \mathbb{R}$, son densos en V .

Se resuelve, inicialmente, un problema aproximado en un espacio vectorial de dimensión m, generado por los vectores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ el cual se representa por V_m .

Se busca una función $t \longrightarrow u_m(t)$, que satisfaga las siguientes condiciones :

(15.1) $\quad u_m \in V_m$,

(15.2) $\quad (u_m'(t),v) + a(u_m(t),v) = \langle f(t),v\rangle \quad \forall\, v \in V_m$,

(15.3) $\quad u_m(0) = u_{o_m}$, siendo u_{o_m} en V, convergente a $u_o \in H$.

De modo explicito se considera

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\; w_j(x)$$

con $g_{jm}(t)$ determinadas por las condiciones (15.1) y (15.2).

Se substituye $u_m(t)$ en la ecuación (15.2) y obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en las incognitas $g_{jm}(t)$, $1 \le j \le m$, con condiciones iniciales dadas por

$$u_m(0) = u_{o_m} .$$

Considerando $v = w_i$ en la ecuación (15.2) obtenemos:

(16) $$\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\;(w_j,w_i) + \sum g_{jm}(t)\; a(w_j,w_i) = f_i$$

con

$$f_j = \langle f(t),w_j\rangle,\; j = 1,2,\ldots, m.$$

Las condiciones iniciales son :

$$u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)\; w_j = u_{o_m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j$$

converge a u_o en H. De aqui obtenemos las condiciones iniciales siguientes :

$$g_{jm}(0) = \alpha_j,\; j = 1,2,\ldots,m .$$

Este sistema con las condiciones iniciales dadas, posee soluciones, porque el $\det(w_j, w_i) \neq 0$ en un intervalo $(0, \tau_m)$.

A continuación se verá que se obtienen estimaciones a-priori uniformes independientes de m, permitiendo obtener la extensión de una solución del sistema (16), con sus respectivas condiciones iniciales, en el intervalo $(0,T)$.

Consideremos la ecuación aproximada

$$(u_m'(t),w_j) + a(u_m(t),w_j) = (f(t),w_j) \quad ; \; j = 1,\ldots,m.$$

<u>Observación 1.</u> Con la identificación del lema de Riez-Frechet, escribimos $(f(t),w)$ en lugar de $\langle f(t),w\rangle$.

Substituyendo $u_m(t)$ por v en (15) se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V^2 + a(u_m(t),u_m(t)) = (f(t),u_m(t))$$

despejando $a(u_m(t),u_m(t))$ se tiene

$$a(u_m(t),u_m(t)) = (f(t),u_m(t)) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V^2,$$

como $a(u,v)$ es coercitiva, tenemos

$$\alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leq (f(t),u_m(t)) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V,$$

lo que implica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leq (f(t),u_m(t)) ,$$

o

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leq \frac{\alpha}{2}\|u_m(t)\|_V^2 + c_1\cdot\|f(t)\|_{V'},$$

de lo cual resulta :

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V^2+\alpha\|u_m(t)\|^2 \leq 2c_1\|f(t)\|_{V'}$$

integrando de 0 a t, con $0< t < t_m$ se obtiene :

$$\|u_m(t)\|_V^2+\alpha\int_0^t\|u_n(s)\|_V^2 ds \leq c_1\int_0^t\|f(s)\|_{V'}^2 ds +\|u_{om}\|_V^2$$

siendo u_{om} convergente a u_o en H , concluimos que

$$\|u_m(t)\|^2+\alpha\int_0^t\|u_n(s)\|^2 ds \leq c_2$$

con c_2 independiente de m y de t . De aquí que la solución puede ser prolongada al intervalo (0,T) , se obtiene

$$\int_0^T\|u_m(s)\|^2 ds < c_2$$

independiente de m. Se concluye de esto, que u_m pertenece - a un acotado(1) de $L^2(0,T;V)$ independiente de m .

De donde se concluye la existencia de una subsucesión (u_n), de la sucesióm (u_m), que converge débilmente a u en - $L^2(0,T;V)$. Resulta que u esta en $L^2(0,T;V)$, cumpliendo la - condición (13.1).

<u>Observación 2</u>. Identificamos $L^2(0,T;V)$con $(L^2(0,T;V'))'$.

De la hipótesis sobre V, esto es $V \subset V'$, tenemos que $L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;V')$. Sea $E = L^2(0,T;V')$ y $E' = L^2(0,T;V)$.

Si (u_n) converge a u débilmente en $L^2(0,T;V)$, es equi-

(1) Recuerdese que los conjuntos acotados de un espacio de Hilbert son débilmente compactos.

valente a decir que $\langle u_n,w\rangle_{E'\times E}$ converge a $\langle u,w\rangle_{E'\times E}$ en $\mathbb{R}$, siendo $\langle\, ,\rangle_{E'\times E}$ la dualidad E',E. Escribiendo esto explicitamente, obtenemos

$$\langle u_m,w\rangle_{E'\times E} = \int_0^T \langle u_m(t),w(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \quad \text{converge a}$$

$$\int_0^T \langle u(t),w(t)\rangle_{V'\times V}\, dt\ , \quad \forall\, w \in L^2(0,T;V').$$

Estando $V \subset H = H' \subset V'$, se concluye que

$$\int_0^T (u_n(t),w(t))\, dt \qquad \text{converge a}$$

$$\int_0^T (u(t),w(t))\, dt \qquad \forall\, w \in L^2(0,T;V).$$

Tenemos que si $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, y $v \in V$, entonces $w = \phi v$ es un elemento de $L^2(0,T;V)$.

De la observación 2, se concluye que

$$\int_0^T (u_n(t),v)\phi(t)dt \text{ converge a}$$

$$\int_0^T (u(t),v)\phi(t)\,dt\ , \ \forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)\ .$$

Así una sucesión $\{(u_n(t),v)\}$ converge en el sentido de las distribuciones a $(u(t),v)$, lo cual implica que :

$$\frac{d}{dt}(u_n(t),v) \quad \text{converge a} \quad \frac{d}{dt}(u(t),v)$$

en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T;V)$.

Observación 3. Notemos que la derivada con respecto a t de $(u_n(t),v)$ es una distribución tal que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(u_n(t),v\right), \phi \right\rangle = -\langle (u(t),v), \phi' \rangle$$

$$= -\int_0^T (u(t),v)\,\phi'(t)\,dt, \ \forall \ \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Examinemos la parte correspondiente a la forma bili--- neal.

Por el lema de Riez -Frechet, escribimos $a(u,v) = (u, w_v)_V$ el producto escalar en V. Así, del hecho de que u_n - converge a u débilmente en $L^2(0,T;V)$, se concluye que

$$\int_0^T a(u_n(t),v)\,\phi(t)dt = \int_0^T (u_n(t),w_v)\,\phi(t)dt$$

converge a

$$\int_0^T a(u(t),v)\,\phi(t)dt = \int_0^T (u(t),w_v)\,\phi(t)dt, \ \forall \ v \in V \ y$$

$$\phi \ \text{en} \ \mathcal{D}(0,T).$$

Resulta de las convergencias estudiadas, que podemos - tomar el límite en la ecuación aproximada.

De hecho, fijamos j y consideramos $n > j$ en

$$(u_n'(t),w_j) + a(u_n(t),w_j) = (f(t),w_j)$$

multiplicando ambos miembros por $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, se obtiene :

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\,(u_n(t),w_j)\,\phi(t)dt + \int_0^T a(u_n(t),w_j)\,\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),w_j)\,\phi(t)dt \ ,$$

tomando el límite cuando n tiende a infinito obtenemos :

$$\frac{d}{dt}(u(t),w_j) + a(u(t),w_j) = (f(t),w_j), \quad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Como (w_n) es denso en V, tenemos que :

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad , \forall\ v \in V. ,$$

en el sentido de las distribuciones en $(0,T)$, demostrando - que el límite de las soluciones aproximadas u, es solución de $u' + Au = f$ en el sentido que se acaba de definir.

Probaremos que u támbien es solución de $u' + Au = f$ en el sentido de las distribuciones vectoriales $L^2(0,T;V)$. Para esto observemos que si $u \in L^2(0,T;V)$, entonces define -- una distribución vectorial $\tilde{u}$ definida en $\mathcal{D}(0,T)$ por

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \int_0^T u(t)\,\phi(t)dt$$

tomando la integral en V. Como vimos $\tilde{u}$ es un elemento de - $\mathcal{D}'((0,T),V)$ con $\langle \tilde{u}, \phi \rangle \in V$, $\forall\ \phi \in \mathcal{D}(0,T)$.

La derivada de $\tilde{u}$, $\tilde{u}'$ esta definida por

$$\langle \tilde{u}', \phi \rangle = - \langle \tilde{u}, \phi' \rangle \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Ahora, puesto que $\tilde{u}$ esta unívocamente definida por u, como ya lo habiamos visto antes, habiendo tambien definido la u. Mantendremos la notación $\tilde{u}$ hasta la conclución de que

$$\tilde{u}' + A\tilde{u} = f$$

de la definición de derivada de una distribución se tiene que $\langle \tilde{u}', \phi \rangle$ es un elemento de V, porque $\tilde{u}'$ es un elemento de $\mathcal{D}'(0,T;V)$. De aquí se sigue que tiene sentido tomar el producto escalar de $\langle \tilde{u}', \phi \rangle$ con un elemento de V. Así obtenemos

$$(17) \qquad (\langle \tilde{u}', \phi \rangle, v) = -(\langle \tilde{u}, \phi' \rangle, v) = $$
$$= -\left(\int_0^T u(t)\phi'(t)dt, v\right) =$$
$$= -\int_0^T (u(t),v)\phi'(t)dt =$$
$$= \int_0^T \frac{d}{dt}\{(u(t),v)\}\phi(t)dt$$

tomando $u(t) \in V$, tenemos que $Au(t) \in V'$, y si $\|Au(t)\|_* \leq C\|u(t)\|$, con $\|u(t)\| \in L^2(0,T)$, se concluye que $Au \in L^2(0,T;V')$, por lo que Au define una distribución vectorial $\tilde{A}u$, definida por :

$$\langle \tilde{A}u, \phi \rangle = \int_0^T Au(t)\phi(t)dt \qquad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Del lema de Riesz-Frechet, haciendo las identificaciones correspondientes, se puede tomar a $\langle \tilde{A}u, \phi \rangle$ como un elemento de V y no de V'.

Así es válido escribir :

$$(18) \qquad (\langle \tilde{A}u, \phi \rangle, v) = \int_0^T ((Au(t)\phi(t)), v) = \int_0^T (Au(t),v)\phi(t)$$

de modo análogo

$$(19) \qquad (\langle f(t), \phi\rangle, v) = \int_0^T (f(t),v)\phi(t)dt \quad \forall\ \phi \in D(0,T).$$

De la hipótesis de que u es solución, encontramos :

$$(20) \qquad \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v)\phi(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\phi(t)dt =$$

$$\int_0^T (f(t),v)\ \phi(t)dt\ , \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(0,T) \text{ y } v \in V.$$

Observemos que podemos escribir

$$a(u(t),v) = (Au(t),v)$$

resulta de (17)-(20) que :

$$(\langle \tilde{u}', \phi\rangle, v) = -(\langle \tilde{A}u, \phi\rangle, v) + (\langle \tilde{f}(t), \phi\rangle, v)$$

para todo $v \in V$ y $\phi \in D(0,T)$, esto es,

/

$$u' = -Au + f$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales en $L^2(0,T;V')$.

Puesto que $\tilde{A}u$ y $\bar{f}$ son definidas por funciones de $L^2(0,T;V')$ lo mismo para u'.

Identificando las distribuciones vectoriales con la función que la define en $L^2(0,T;V')$, concluimos que $u' \in L^2(0,T;V')$ y $u' = -Au + f$ en el sentido de las distribuciones --

vectoriales. Quedan de este modo, demostradas las afirmacio (13.2) y (13.3) .

Queda por demostrar que $u(0) = u_0$. Para verificar la condición inicial, volvemos a la sucesión (u_n) de aproximaciones a la solución u. Sea $\phi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ tal que $\phi(T)=0$.

Entonces, para todo $v \in V$:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u_n(t),v)\phi(t)\}dt + \int_0^T a(u_n(t),v)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\phi(t)\,dt$$

de esta última expresión integrando por partes la primera integral obtenemos :

$$\int_0^T -(u_n(t),v)\phi'(t)dt + \int_0^T a(u_n(t),v)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\phi(t)dt + (u_n(0),v)\phi(0)$$

con u solución débil de la ecuación, obtenida a traves de sucesiones (u_n), si tomamos el límite en la última igualdad, cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos :

$$\int_0^T -(u(t),v)\phi'(t) + \int_0^T a(u(t),v)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\phi(t)dt + (u_0,v)\phi(0).$$

Si u es continua en $(0,T)$ con valores en V', entonces, integrando por partes la primera integral anterior, obtenemos:

$$(u(0),v)\phi(0) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v)\phi(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),v)\phi(t)dt + (u_o,v)\ \phi(0).$$

Del hecho de que u es solución débil en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T;V)$, se concluye que

$$(u(0),v) = (u_o,v)\ ,\ \text{para todo } v \in V,$$

ya que V es denso en H, esto pasa tambien para toda $v \in H$, - así que $u(0) = u_o$.

<u>Corolario 1</u> . La sucesión (u_n) converje débilmente - estrella a la solución en $L^2(0,T;V)$.

<u>Demostración</u>. La demostración va a ser una simple consecuencia de la unicidad de la solución u. De hecho siendo u la única solución de $u' + Au = f$, u no depende de la subsucesión (u_r), extraida de (u_m), convergente a u.

Supongamos que la sucesión (u_m) no converja débilmente estrella en $L^2(0,T;V)$ a u. esto implica la existencia de w $\in L^2(0,T;V')$ tal que

$$\langle u_m, w\rangle \text{ no converja a } \langle u,w\rangle \text{ en } \mathbb{R}$$

por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos extraer una sucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que

(21) $\quad |\langle u_{n_k}, w\rangle - \langle u, w\rangle| > \varepsilon$

excepto por un número finito de subindices k.

Se sabe que (u_{n_k}) es acotada en $L^2(0,T;V)$ luego posee una subsucesión $(u_{n_{k_\mu}})$ tal que converje a u débilmente estrella en $L^2(0,T;V)$, porque la solución de la ecuación $u' + Au = f$ es única . Esto es una contradicción con la desigualdad (21), así queda probado el corolario 1.

<u>Corolario 2</u>. La convergencia de (u_m) a u es fuertemente en $L^2(0,T;V)$.

<u>Demostración</u>. De hecho, siendo $a(v,v) \geq \|v\|^2$, es suficiente demostrar que la sucesión (χ_m), con

$$\chi_m = \int_0^T a(u_m(t)-u(t),u_m(t)-u(t))dt + \frac{1}{2}\|u_m(T)-u(T)\|_V^2$$

converge a cero, realmente se tiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)-u(t)\|_V^2 + a(u_m(t)-u(t),u_m(t)-u(t)) = (f(t),u_m(t)-u(t))$$

pues $u_m \in L^2(0,T;V)$ y $u \in L^2(0,T;V)$. Integrando de 0 a T, con u continua, se obtiene :

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)-u(T)\|_V^2 + \int_0^T a(u_m(t)-u(t),u_m(t)-u(t)) =$$

$$= \int_0^T (f(t),u_m(t)-u(t))dt + \frac{1}{2}\|u_{0m}-u_0\|_V^2$$

Siendo (u_m) débilmente convergente a $u \in L^2(0,T;V)$ y (u_{0m}) convergente a $u_0 \in H$, se concluye que

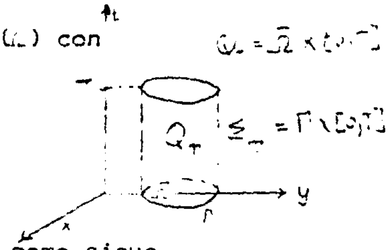
$$\lim_{m \to \infty} \chi_m = 0$$

probando que la sucesión (u_m) converge fuertemente.

3.3 <u>Ejemplos de problemas parabólicos.</u>

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$, con frontera Γ de C^1-por trozos.

Sea V un subespacio acotado de $H^1(\Omega)$ con



$$(1)\qquad \begin{cases} H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega) \\ H = L^2(\Omega) \ . \end{cases}$$

Sea $a(.,.) : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} + a_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + a_0 uv \right\} dx \ ,$$

con

$$(2)\qquad \begin{array}{l} a_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i \ , \ j \leq 2, a_{ij} \in L^\infty(\Omega), a_0 \in L^\infty(\Omega) \\ \exists \alpha > 0, \forall \xi, \ \xi \in \mathbb{R}^2, \ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ c.d.en} \Omega. \end{array}$$

Sean $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q_T)$ conocidas, entonces existe por el Teorema 1 de la sección 3.2, una función $u \in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega))$ solución única de las ecuaciones :

$$(3)\qquad \begin{cases} \forall v \in V \ , \ \dfrac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \\ u(0) = u_0 \ . \end{cases}$$

Caracterizaremos la solución del problema.

Para lo cual tomamos $v:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi:]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$, e --- introducimos la función $v \otimes \psi : (x,t) \in Q_T \longrightarrow v(x)\psi(t) \in \mathbb{R}$; entonces por un resultado clásico de teoria de distribuciones[1] que dice que el producto directo de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}(]0,T[)$, , es decir, el espacio de conbinaciones finitas - de funciones de la forma $v \otimes \psi$ con $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, es denso en $\mathcal{D}(Q_T)$.

Sea $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, de (3) multiplicando por ψ e integrando por partes obtenemos

$$-\int_0^T (u(t),v)\frac{\partial \psi}{\partial t}dt + \int_0^T a(u(t),v)\psi(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)dt$$

esto es

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} + Au, v \otimes \psi \right\rangle = \langle f, v \otimes \psi \rangle,$$

con $\langle \cdot,\cdot \rangle$ dualidad entre $\mathcal{D}'(Q_T)$ y $\mathcal{D}(Q_T)$ y A el operador di-- ferencial elíptico de segundo orden

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + a_0 u.$$

Gracias a la densidad obtenemos

(4) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = f$ en el sentido de las distribuciones sobre Q_T.

Si $v \in V$, de (3) y (4) tenemos

(4') $\qquad \dfrac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial t} + Au\right](t)v\,dx$

de donde se tiene

(1) Ver [38].

(5) $$a(u(t),v) = \int_{\Omega} Au(t)v\,dx \ .$$

Por otra parte integrando la expresión para a(u(t),v), esto es, aplicando la formula de Green obtenemos

$$a(u(t),v) = \int_{\Omega} Auv\,dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v\,d\sigma$$

con

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \nu_i \quad (1)$$

por lo que para que se de (5) se debe de dar la igualdad

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v\,d\sigma = 0$$

Resumiendo la solución de (3) se caracteriza por

(i) $u \in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T:L^2(\Omega))$,

ii) $\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f$ en Q_T ,

iii) $\forall\, v \in V$, $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(t)\,d\sigma = 0 \quad 0 < t < T$,

iv) $u(\cdot,0) = u_0$ en Ω .

La condición (iii) variará segun el espacio V que se considere. Veremos tres casos, en los cuales obtendremos problemas clásicos.

Cauchy-Dirichlet.

Sea $V = H_0^1(\Omega)$.

(iii) en este caso se reduce a pedir que u =0 sobre Σ_T, por lo que nos queda que existe una única función $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

(1) ν_i = i-ésimo cosn director de la normal ν de Γ dirigido hacia afuera de Ω.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \quad \text{en } Q_T, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Cauchy-Neumann.

Tomando $V = H^1(\Omega)$, la condición (4') nos da formalmente

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T.$$

Así que existe una única función $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \quad \text{en } Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Cauchy-Dirichlet-Neumann.

Sea Γ_0 una parte de Γ de medida mayor que cero, tomamos

$$V = \{ v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0} = 0 \},$$

entonces (iii) se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times]0,T[, \qquad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0 .$$

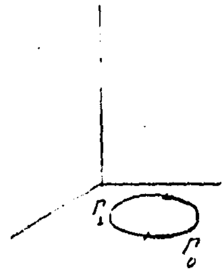
Así, existe una función única $u \in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ sobre Q_T ,

$u = 0$ sobre $\Gamma_0 \times]0,T[$,

$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0$ sobre $\Gamma_1 \times]0,T[$,

$u(\cdot ,0) = u_0$ en Ω.



3.3.1 Sistema de Stokes.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, acotado y conexo de frontera $\Gamma \in C^1$. Consideremos el siguiente problema :

sean conocidas las funciones $\vec{u}_0 = (u_{01}, u_{02})$ y $\vec{f} = (f_1, f_2)$ definidas en Ω y Q_T respectivamente, buscamos las funciones $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y p definidas en Q_T y que satisfagan las ecuaciones siguientes :

(1.a) $\quad \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1$ en Q_T ,

(1.b) $\quad \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu \Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2$ en Q_T ,

(2) $\quad \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$ en Q_T,

(3) $\quad u_1 = 0, \; u_2 = 0$ en Σ_T ,

(4.a) $\quad u_1(\cdot,0) = u_{01}$,

(4.b) $\quad u_2(\cdot,0) = u_{02}$.

Las ecuaciones (1)-(4) describen los cambios que ocu-rren, conforme pasa el tiempo, del movimiento de un fluido incomprensible viscoso confinado en Ω y sometido a una fuerza externa $\vec{f}$ que, por hipótesis su movimiento es lento. En las ecuaciones $\vec{u}$ es el campo de velocidades de un fluido, p es la presión, ρ la densidad constante y μ es la viscosidad.

Para dar una formulación apropiada de los problemas de Stokes, introducimos los espacios

$$\begin{cases} V = \{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \; : \; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \} , \\ H = \text{cerradura de } V \text{ en } (L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)), \end{cases}$$

y tomamos lo siguiente :

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega u_1 v_1 dx + \int_\Omega u_2 v_2 dx$$

$$a(u,v) = \mu \left[\int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx + \int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx + \int_\Omega \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx + \int_\Omega \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx \right].$$

De esta forma planteamos el siguiente problema : encontrar $\vec{u} \in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;H)$ que satisfaga las siguientes condiciones :

$$\rho \frac{d}{dt}(\vec{u}(t),\vec{v}) + a(\vec{u}(t),\vec{v}) = (\vec{f}(t),\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V, \tag{5.1}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0 , \tag{5.2}$$

(5.3) $\vec{f}$ y $\vec{u}_0$, conocidas en $(L^2(Q_T))^2$ y H

respectivamente.

Gracias al siguiente teorema este problema tiene una única solución.

<u>Teorema</u>: Sean $\vec{u}_0 \in H$ y $\vec{f} \in (L^2(Q_T))^2$, entonces existe una única función $\vec{u} \in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;H)$ tal que

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \rho \frac{d}{dt}(\vec{u}(t),\vec{v}) + a(\vec{u}(t),\vec{v}) = (\vec{f}(t),\vec{v}),$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0 \quad .$$

Para la demostración de este teorema ver [34'].

3.4 Ecuaciones de evolución de segundo orden.

Un ejemplo significativo de una ecuación de segundo orden que depende del tiempo, es la ecuación de onda, esto es la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

que es estudiada en un cilindro $\mathcal{Q} = \Omega \times (0,T)$. Si Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, representamos su frontera con Γ, y la supondremos regular. La frontera lateral del cilindro $\mathcal{Q}$ la representaremos por Σ.

Con esta notación, el problema mixto de la ecuación de onda, consiste, en dadas dos funciones u_0 y u_1, definidas en Ω, con valores reales, y una función real definida en en el cilindro $\mathcal{Q}$, f. Determinar una función real $u(x,t)$ definida en $\mathcal{Q}$, que satisfaga las siguientes condiciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad , \text{ en } \mathcal{Q}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x), \text{ en } \Omega \ ,$$

$$u(x,t) = 0 \quad , \text{ en } \Sigma \ .$$

Este problema vagamente formulado será el objeto de esta sección.

Procedemos, como en el caso de las ecuaciones de primer orden, analizar el caso del Laplaciano ,para dar una formulación abstracta.

Recordemos que $u(t): x \longrightarrow u(x,t)$. El problema mixto para la ecuación de onda, consiste en encontrar $u(t)$ tal que, dadas las funciones u_0, u_1 y f satisfagan :

(22.1) $$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} - \mathcal{L}\, u(t) = f(t) \ ,$$

(22.2) $$u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1 \ ,$$

(22.3) $$u(t) = 0 \text{ en } \Sigma \ (\text{donde } u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t})$$

Analizando el problema, vemos que para obtener la condición (22.3) es suficiente que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, como concluimos en el caso de la ecuación de transferencia del calor.

Podemos plantear el problema mixto para la ecuación de onda, del modo siguiente :

encontrar $u(t) : t \longrightarrow u(x,t)$ con $t \in (0,T)$ y $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, que satisfaga las condiciones :

$$\left(\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}, v\right) + a(u(t),v) = (f(t),v)$$

$$u(0) = u_0 \text{ y } u'(0) = u_1$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, y aqui nos faltaría precisar el sentido de la igualdad, lo cual daremos más adelante.

De esta manera tan vaga de formular el problema, podemos encontrar la formulación definitiva, denominada formulación variacional:

Sean las funciones $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ conocidas, encontrar $u(t)$, que satisfaga las siguientes condiciones :

$$u(t) \in H_0^1(\Omega) ,$$

u es continua de $[0,T]$ en $L^2(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v), \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

en el sentido de $\mathcal{D}'((0,T);H_0^1(\Omega))$,

$$u(0) = u_0 \quad y \quad u'(0) = u_1 .$$

Este será el problema modelo al cual daremos una formulación abstracta como se ve a continuación.

Concideremos los espacios de Hilbert V y H , como en la sección anterior . Supongamos $V \subset H$, con inyección continua y V denso en H. Además suponemos $H = H'$, su dual, de donde se obtiene :

$$V \subset H = H' \subset V' .$$

Sea $a(u,v)$ una forma bilineal, continua sobre V, la cual suponemos coercitiva, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$. Representando por A un operador de $L(V,V')$

definido por la forma bilineal $a(u,v)$, esto es,

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle \quad ,$$

podemos plantear el siguiente problema.

Problema 2. Dadas las funciones $u_0 \in H$, $u_1 \in V$ y $f \in L^2(0,T;H)$, encontrar la función $u \in L^\infty(0,T;H)$ tal que :

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) \quad + \quad a(u(t),v) \quad = (f(t),v) \ , \ \forall \ v \in V$$

en el sentido de $\mathcal{D}'((0,T),V)$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad u'(0) = u_1$$

o también

$u'' + Au = f$, en el sentido de las distribuciones vectoriales de $(0,T)$ en V' y u que satisfaga las condiciones iniciales u_0 y u_1 .

Ahora contamos con los elementos necesarios para enunciar y demostrar el teorema de unicidad y existencia de la solución de la ecuación $u'' + Au = f$, conocido como la ecuación abstracta de onda.

Teorema 2. Sean dadas $f \in L^2(0,T;H)$, $u_0 \in V$, $u_1 \in H$. Entonces, existe un único vector u que satisface las siguientes condiciones

(23.1) $u \in L^{\infty}(0,T;V)$,

(23.2) $u' \in L^{\infty}(0,T;H)$,

(23.3) $u'' \in L^{\infty}(0,T;V')$,

(23.4) $u'' + Au = f$, en el sentido débil ,

(23.5) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$.

Observación 4. De (23.1) y (23.2) se deduce que u - es continua de $[0,T]$ en H , luego tiene sentido calcular -- u(0). Análogamente , de (23.2) y (23.3), se deduce que u' - es continua de $[0,T]$ en V' , teniendo sentido evaluar u' (0).(1)

Demostración del teorema 2.

Como en el caso de las ecuaciones de primer orden, supongamos V separable y sea (w_j) una base para V. Usaremos - el método de Galerkin, buscando inicialmente , soluciones - aproximadas de la forma

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j$$

siendo las $g_{jm}(t)$ determinadas por las condiciones :

(24) $(u''_m(t),w_j) + a(u_m(t),w_j) = (f(t),w_j)$

para $j = 1,2,\ldots,m$.

---

(1) Ver pie de pag. 93.

Las ecuaciones (24), aunadas a las condiciones iniciales para $g_{im}(t)$, que serán obtenidas de las hipótesis sobre u_0, u_1. Siendo $u_0 \in V$, existe una combinación lineal de los w_i, que converge en V a u_0, esto es,

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \quad \text{converge a } u_0 \text{ en } V, \ \alpha_{im} \in \mathbb{R}.$$

La función u_1 fue tomada en H, con $V \subset H$, inyección continua, V denso en H. Concluimos que

$$u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \quad \text{converge a } u_1 \text{ en } H, \ \beta_{im} \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que basta tomar las condiciones iniciales :

$$u_m(0) = u_{0m} \qquad \text{y} \qquad u'_m(0) = u_{1m} \ .$$

Resulta que el sistema (24) con las condiciones iniciales, posee solución en $(0,t_m)$, que de las estimaciones apriori demostradas en seguida, se prolonga al intervalo $(0,T)$.

<u>Estimaciones a priori</u>.

Multiplicando la ecuación (24) por $g'_{im}(t)$, para obtener:

$$(u''_m(t),u'_m(t)) + a(u_m(t),u'_m(t)) = (f(t),u'_m(t))$$

esto es,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + a(u_m(t),u_m(t)) = (f(t),u'_m(t))$$

e integrando de 0 a t con $t < t_m$, se obtiene

$$\|u'_m(t)\|_H^2 + a(u_m(t),u_m(t)) = \int_0^t (f(s),u'_m(s))ds + \|u'_m(0)\|_H^2 +$$

$$+a(u_m(0),u_m(0)).$$

De la coercitividad de la forma a(u,v), se obtiene :

$$\|u'_m(t)\|_H^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leq 2\int_0^t (f(s),u'(s))ds + \|u'_m(0)\|_H^2 +$$

$$+ C\|u_m(0)\|_H^2$$

con C la constante de continuidad y α la de coercitividad de la forma a(u,v).

Por otra parte, se tiene

$$2\int_0^t (f(s),u'(s))ds \leq 2\int_0^t \|f(s)\|_H \|u'(s)\|_H\, ds$$

$$= \int_0^t \|f(s)\|_H^2\, ds + \int_0^t \|u'(s)\|_H^2\, ds$$

por lo que resulta , aplicando la desigualdad para los números reales $2ab \leq a^2 + b^2$, , la siguiente desigualdad :

$$\|u'_m(t)\|_H^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leq C_1 + \int_0^t \|u'_m(s)\|_H^2\, ds$$

con C_1 una constante.

De esto resulta

$$\|u'_m(t)\|_H^2 \leq C_1 + \int_0^t \|u'_m(s)\|_H^2\, ds$$

aplicando la desigualdad de Gronwall, se deduce

$$\|u'_m(t)\|_H \leq C_T \text{, para todo t en } (0,T_m)$$

de la desigualdad anterior, se deduce que [1] :

$$\| u_m(t) \|_V \leq C_T \;, \; \forall\, t \in (0, t_m).$$

Las constantes de acotación son independientes de m en $(0, t_m)$.

Se obtiene el prolongamiento de $u_m(t)$ al intervalo (0, T), y siguensiendo ciertas las acotaciones de u(t) y u'(t), en el intervalo (0,T) por constantes independientes de T.

Concluimos que

(25) u_m es acotada en $L^\infty(0,T;V)$, independiente de m

(26) u'_m es acotada en $L^\infty(0,T;H)$ independiente de m .

De (25) y (26) podemos extraer una subsucesión (u_m) y (u'_m), que satisface las condiciones siguientes :

(27) (u_m) converge a u débil estrella en $L^\infty(0,T;V)$

(28) (u'_m) converge a u' débil estrella en $L^\infty(0,T;H)$.

De la definición de convergencia débil estrella, se deduce de (27) que para todo $w \in L^1(0,T;V) \subset L^1(0,T;V')$ se tiene :

$$\int_0^T (u_m(t), w(t))_V\, dt \quad \text{converge a} \quad \int_0^T (u(t), w(t))_V\, dt\,.$$

De modo enteramente análogo, se concluye que para todo w en $L^1(0,T;H)$ resulta :

---

(1) Ver pie de pag. 93 .

$$\int_0^T (u'_m(t),w(t))_H dt \quad \text{converge a} \quad \int_0^T (u'(t),w(t))_H\, dt.$$

Exactamente igual al caso parabólico, se concluye que

$$\int_0^T a(u_m(t),w(t))\,dt \text{ converge a } \int_0^T a(u(t),w(t))dt,\ \forall w\ ,$$

$w \in L^1(0,T;V)$.

<u>Paso al límite de las soluciones aproximadas.</u>

Probaremos que el límite débil u, de la subsucesión -- (u_n) es solución de la ecuación

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v)$$

en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $v \in V$.

Sea $\phi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$, con $\phi(T) = 0$, dado j y n tal que $n \geq j$ en la ecuación (24) multiplicando por $\phi(T)$ e integrando de 0 a T. Resulta :

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}(u'_n(t),w_j)\,\phi(t)\right)dt + \int_0^T (a(u_n(t),w_j)\,\phi(t))dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),w_j)\,\phi(t))dt$$

integrando por partes la primera integral, se obtiene :

$$\int_0^T -(u'_n(t),w_j)\,\phi'(t)dt + \int_0^T a(u_n(t),w_j)\,\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),w_j)\,\phi(t)dt + (u_n(0),w_j)\,\phi(0) - (u_n(t),w_j)\,\phi(T)$$

para toda $\phi \in C^1([0,T],\mathbb{R})$, $\phi(T) = 0$. En particular tomando $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\phi(0) = 0$, también pasando al límite cuando $n \longrightarrow \infty$:

$$\int_0^T -(u'(t),w_j)\phi'(t)dt + \int_0^T a(u(t),w_j)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t),w_j)\phi(t)dt$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$. De esto se deduce que

$$\frac{d}{dt}(u'(t),w_j) + a(u(t),w_j) = (f(t),w_j)$$

en el sentido de $\mathcal{D}'((0,T);V)$ para todo j. Luego para $v \in V$, se muestra que u es solución débil en este sentido.

Veamos que u es solución en el sentido de las distribuciones vectoriales con $u'' \in L^2(0,T;V')$.

Concluimos de lo anterior que el límite u de la subsucesión (u_n) es tal que $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^\infty(0,T;H)$. Luego, u' define una distribución vectorial $\tilde{u}'$ definida por :

$$\langle \tilde{u}', \phi \rangle = \int_0^T u'(t)\phi(t)\,dt \in H \text{ , para todo } \phi \in \mathcal{D}(0,T)$$

la integral esta calculada en $H \subset V'$.

Tenemos que $\tilde{u}'$ es un elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);H)$, por lo tanto posee una derivada $(\tilde{u}')'$ en el sentido de las distribuciones, definida por :

$$\langle (\tilde{u}')', \phi \rangle = -\langle \tilde{u}', \phi' \rangle = -\int_0^T u'(t)\phi'(t)dt$$

tomamos a $\langle (u')', \phi \rangle$ como un elemento de $H \subset V'$, luego, puede ser pensado como un elemento de V', teniendo sentido tomar su producto escalar en V, con un vector de V. Resulta que - para cada $v \in V$, se tiene :

$$(\langle(\bar{u}')', \phi\rangle ,v) = - (\langle \bar{u}', \phi'\rangle ,v) = - \left(\int_0^T u'(t)\, \phi'(t)dt, v\right) =$$

$$= - \int_0^T (u'(t),v)\, \phi'(t)dt.$$

Ya que $u \in L^{\infty}(0,T;V)$, se verifica de modo natural, que $Au \in L^{\infty}(0,T;V')$.

Así define una distribución por :

$$(\langle \bar{A}u, \phi\rangle ,v) = \int_0^T (Au(t),v)\, \phi(t)dt$$

análogamente,

$$(\langle \bar{f}(t), \phi\rangle,v) = \int_0^T (f(t),v)\, \phi(t)dt$$

ya vimos que u es solución débil en el sentido siguiente :

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + (Au(t),v) = (f(t),v)$$

para toda $v \in V$, en el sentido de $\mathcal{D}'((0,T);V)$; con

$$\left\langle\frac{d}{dt}(u'(t),v), \phi\right\rangle = - \int_0^T (u'(t),v)\, \phi'(t)dt$$

se concluye que u satisface la condición

$$(\langle(\bar{u}')', \phi\rangle,v) = (-\langle \bar{A}u, \phi\rangle + \langle\bar{f}(t), \phi\rangle,v) ,$$

para todo $v \in V$. Luego

$$\langle(\bar{u}')', \phi\rangle = - \langle\bar{A}u, \phi\rangle + \langle\bar{f}(t), \phi\rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, esto es, u es solución de $u'' + Au = f$, en el sentido de las distribuciones vectoriales $L^2(0,T;V')$.

Así, $(\bar{u}')'$ es un elemento de $L^\infty(0,T;V')$, luego identificando la distribución con la función que ella define, podemos decir que $(u')'$ es la segunda derivada u''.

Se concluye de ahí y del hecho de que $u' \in L^\infty(0,T;H)$ con $H \subset V'$ que $u' \in C^0(0,T;V')$, teniendo sentido calcular $u'(0)$.

Pasamos a verificar las condiciones iniciales, esto es, $u(0) = u_0$ y $u'(0) = u_1$.

Iniciamos con $u(0) = u_0$. Observemos que $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^\infty(0,T;H)$ y $u'' \in L^\infty(0,T;V')$. De donde $u \in C^0(0,T;H)$ y - $u' \in C^0(0,T;V')$.

Del hecho de que u_n converja a u débilemnte estrella - en $L^\infty(0,T;V)$, se deduce que para toda $\phi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ ...
se obtiene

$$\int_0^T (u_n(t),v)_V\, \phi'(t) \quad \text{converge a} \quad \int_0^T (u(t),v)_V\, \phi'(t)dt$$

para toda $v \in V$.

Análogamente, de $u'_n \longrightarrow u'$ débil estrella en $L^\infty(0,T;H)$, se deduce que para ϕ seleccionada, se obtiene

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_n(t),v)\,\phi(t)dt \quad \text{converge a} \quad \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v)\,\phi(t)dt$$

para toda $v \in H$.

En ambas integrales, podemos considerar en el integrando el producto escalar en H. Adicionando las sucesiones de integrales, resulta que ;

$(u_n(0),v)$ converge a $(u(0),v)$, para todo $v \in V$, luego también para todo $v \in H$.

Siendo $u_n(0) = u_{0m}$ convergente para u_0 fuertemente en V luego fuertemente en H, resulta que $u(0) = u_0$.

Para probar que $u'(0) = u_1$, ya sabemos que para $\phi \in C^0([0,T], \mathbb{R})$, con $\phi(T) = 0$, se obtiene

$$\int_0^T -(u'_n(t),w_j)\,\phi'(t)dt + \int_0^T a(u_n(t),w_j)\,\phi(t)dt =$$

$$\int_0^T (f(t),w_j)\,\phi(t)dt + (u_n(0),w_j)\,\phi(0).$$

Dado j fijo y haciendo tender $n \longrightarrow \infty$, se obtiene :

$$\int_0^T -(u'(t),w_j)\,\phi'(t)dt + \int_0^T a(u(t),w_j)\,\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),w_j)\,\phi(t)dt + (u_1,w_j)\,\phi(0).$$

De la densidad de los w_j en V, resulta que :

$$\int_0^T -(u'(t),v)\,\phi'(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\,\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),v)\,\phi(t)dt + (u_1,v)\,\phi(0) \ , \ \forall\, v \in V.$$

Integrando por partes la primera integral, siendo u' continua, se obtiene :

$$(u'(0),v)\,\phi(0) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u'(t)\,\phi(t))dt + \int_0^T a(u(t),v)\,\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),v)\,\phi(t)dt + (u,v)\,\phi(0).$$

Siendo u solución débil de la ecuación $u'' + Au = f$, resulta que

$$u'(0) = u_1 .$$

Los corolarios uno y dos del Teorema 1, son válidos para las concluciones del Teorema 2. Así la sucesión converge a u , obteniendo el límite débil de la subsucesión (u_n).

3.5 Ejemplos de problemas hiperbólicos.

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$, con frontera $\Gamma \in C^1$, por trozos.

Sea V un subespacio acotado de $H^1(\Omega)$, de la siguiente forma:

$$H_0^1(\Omega) \subseteq V \subsetneq H^1(\Omega)$$

$$H = L^2(\Omega)$$

Sea $a(\cdot,\cdot): V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue

$$a(u,v) = \iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{n=2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv \; dx,$$

$$a_{ij} = a_{ji}\ ,\ i,j = 1,2,\ a_{ij} \in L^\infty(\Omega)\ ,\ 1 \le i, j \le n\ \ a_0 \in L^\infty(\Omega)$$

$$\exists\ \alpha > 0,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^2,\ \sum_{i,j=1}^{n=2} a_{ij}(x)\xi_j \cdot \xi_i \geq \alpha |\xi|^2 \text{ cd. en } \Omega\ .$$

Sean dadas las funciones $u_0 \in V$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q_T)$, aplicando el teorema 2, existe una función u,

$u \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T,L^2(\Omega))$ solución única de la ecuación siguiente

$$(1.1) \qquad \forall\ v \in V,\quad \frac{d^2}{dt^2}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v)$$

$$(1.2) \qquad u(0) = u_0\ ,\ \frac{du}{dt}(0) = u_1\ .$$

caracterizaremos la solución de este problema.

Sea $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[)$. Integrando por partes se obtiene

$$\int_0^T (u(t),v)\,\frac{d^2\psi}{dt^2}(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\,\psi(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)dt$$

esto es

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au, v\otimes\psi\right\rangle = \langle f, v\otimes\psi\rangle ,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la dualidad entre $\mathcal{D}'(Q_T)$ y $\mathcal{D}(Q_T)$ y

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n=2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u .$$

Puesto que el producto directo de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}(]0,T[)$ es denso en $\mathcal{D}(Q_T)$ encontramos que

(2) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f$ en el sentido de las distribuciones sobre Q_T.

Supongamos $v\in V$: de (1.1) y (2) tenemos

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t),v) + a(u(t),v) = \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au\right](t)\, v dx$$

donde "formalmente"

$$\forall\, v\in V\ ,\ a(u(t),v) = \int_\Omega Au(t)vdx$$

al tomar en cuenta el teorema de Green, y que

$$\forall\, v\in V\ ,\qquad \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(t)vd\sigma = 0.$$

Así la solución de (1.1) y (1.2) esta caracterizada por

(3) $$\begin{cases} \text{(i) } u \in C^0(0,T;V)\cap C^1(0,T;L^2(\Omega)), \\ \text{(ii) } \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \text{ en } Q_T , \\ \text{(iii) } \forall\, v\in V, \displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(t)vd\sigma = 0,\ 0 < t < T, \\ \text{(iv) } u(\cdot,0) = u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = u_1 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

La condición (3.iii) cambia según el espacio V que se considere.

Analizaremos algunos ejemplos correspondientes a diversas elecciones del espacio V.

Cauchy-Dirichlet.

Sea $V = H_0^1(\Omega)$.

Sean dadas las funciones $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q_T)$, existe una función $u \in C^0(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$ única tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \text{ en } Q_T,$$

$$u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T,$$

$$u(\cdot,0) = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = u_1 \quad \text{en } \Omega.$$

Cauchy-Neumann.

En este caso elegimos $V = H^1(\Omega)$.. La condición (3.iii) se escribe (siempre formalmente) :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T.$$

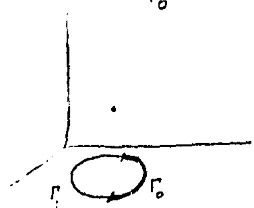
Sean dadas $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q_T)$, existe una función $u \in C^0(0,t;H^1(\Omega)) \cap C^1(0,t:L^2(\Omega))$ única, que es solución de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \quad \text{en } Q_T , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T , \\ u(\cdot,0) = u_0 , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = u_1 \text{ en } \Omega . \end{cases}$$

Cauchy-Dirichlet-Neumann.

Si Γ_0 es una parte de Γ de medida > 0 , consideramos

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) \; ; \; v|_{\Gamma_0} = 0 \} .$$



Entonces, sean $u_0 \in V$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q_T)$, existe una función $u \in C^0(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^1(0,t:L^2(\Omega))$ única que verifica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \text{ en } Q_T,$$

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times]0,T[,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times]0,T[, \; \Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0 ,$$

$$u(\cdot,0) = u_0 , \; \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = u_1 \text{ en } \Omega .$$

3.5.1 Sistema de elasticidad.

Daremos un ejemplo de un sistema de evolución de segundo orden en t , que interviene en la Mecánica de Sólidos y que es fundamental en las aplicaciones : el llamado sistema de elasticidad.

Sea Ω un conexo acotado de $\mathbb{R}^n$, n=2 en nuestro caso, de frontera $\Gamma \in C^1$ por trazos, y sea Γ_0 una parte de Γ de medida > 0, supongamos $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$.

Consideremos el problema siguiente : sean dadas las funciones $\bar{u}_0 = (u_{01}, u_{02})$, $\bar{u}_1 = (u_{11}, u_{12})$ definidas en Ω y una función $\bar{f} = (f_1, f_2)$ definida en Q_T, buscamos una función $\bar{u} = (u_1, u_2)$ definida en Q_T tal que sea solución de las ecuaciones siguientes :

e.1 $$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12} \right] = f_1 \quad en \quad \overset{\circ}{Q}_T \ ,$$

e.2 $$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{22} \right] = f_2 \quad en \quad \overset{\circ}{Q}_T \ ;$$

e.3 $$u_1 = u_2 = 0 \qquad sobre \ \Gamma_0 \times]0,T[\ ,$$

e.4 $$\sum_{j=1}^{n=2} \sigma_{ij} \nu_j = 0 \quad sobre \ \Gamma_1 \times]0,T[\ ,$$

e.5 $$u_i(\cdot, 0) = u_{0,i} \quad , \ \frac{\partial u_i}{\partial t}(\cdot, 0) = u_{1,i} \ en \ \Omega,$$
$$con \quad i = 1,2$$

e.6 $$\sigma_{ij} = \lambda \, (\operatorname{div} \bar{u}) \, \delta_{ij} + 2\mu \, \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \ , \quad i,j = 1,2, \ \lambda \geq 0, \ \mu > 0.$$

La ley de comportamiento es e.6 .

Las ecuaciones (e.1)-(e.6) describen la evolución que ocurre con el tiempo de pequeños desplazamientos a partir del estado natural de un cuerpo sólido homogeneo e isotrópico sujeto a una fuerza de densidad $\bar{f}$ y fijo rigidamente en Γ, los desplazamientos iniciales y las velocidades iniciales de los desplazamientos son $\bar{u}_0$ y $\bar{u}_1$ respectivamente.

En las ecuaciones $\rho = \rho(x)$ es la densidad del cuerpo sólido en el estado natural.

Así tomamos

e.7 $$V = \{ v \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)) \ ; \ \bar{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \}.$$

Teorema. Supongamos que la función $\rho \in L^{\infty}(\Omega)$ verifica

e.8 $$\forall\, x \in \Omega, \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0 .$$

Así, sean $\bar{u}_0 \in V$, $\bar{u}_1 \in ((L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ y $\bar{f} \in (L^2(Q_T))^n$, $n=2$, existe una función

$$\bar{u} \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;(L^2(\Omega))^n) \ , n=2,$$

única solución de las ecuaciones (e.1)-(e.6).

Demostración. Sea $H = (L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ provisto del siguiente producto escalar

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} \rho\, u_i \cdot v_i \, dx \quad , \ \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in H \ ,$$

a partir de la condición (e.8), este producto escalar es --equivalente al producto escalar habitual de $(L^2(\Omega)\times L^2(\Omega))$.

Así tenemos

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n=2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u})\, \varepsilon_{ij}(\bar{v})\,dx$$

donde σ_{ij} esta dado por (e.6) . A partir del teorema 2 existe una función $\bar{u} \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;H)$ solución única de

$$\forall\, v \in V, \qquad \frac{d^2}{dt}(\bar{u}(t),\bar{v}) + a(\bar{u}(t),\bar{v}) = \left(\frac{\bar{I}(t)}{\rho},\bar{v}\right)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0 \ , \qquad \frac{d\bar{u}}{dt}(0) = u_1 \ .$$

Un razonamiento similar al del ejemplo 1 de esta sec-- ción verifica que el problema asi resuelto no es otro que - (e.1)-(e.6), donde la condición (e.4) es como habitualmente se entiende en un sentido formal.

B I B L I O G R A F I A .

1. Adams A., Sóbolev Spaces. A. P. 1975.
2. Baiocchi, C., Su un problema di frontiera libera co-- nnesso a questioni di idraulica. Annali di Mat. Pura ed Appl. 92, 107-127 (1972) .
3. Baiocchi C., Sur quelques problemes a frontiere libre Coloque International C.N.R. Sur E.D.P. Soc. Math. de France 1973.
4. Baiocchi C. & E.Magenes., On the filtration of a fluid trough a porous medium with variable cross section . Russ. Math. Surv. 29, 51-71 (1974).
5. Baiocchi C., Free boundary problems in the theory of fluid flow trough porous media : numerical approach. Calcolo 10,1-86(1973).

6. Baiocchi C., Free boundary problems and variational inequalites , Invited talk to the SIAM 1978 Spring - Meeting in Madison. Submitted to SIAM Rev.

7. Baiocchi & Magenes E., Problemi di frontiera libera - in idraulica, Atti Conv. Internat. metodi valuativi - de lla fisica matematica , 15-20 dic (1972), Accad. - Nazionale Lincei.

8. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes and G. Pozzi, - Free boundary problems in the theory of fluid flow -- trough porous media: existence and uniqueness theo -- rems, Ann. Mat. Pura Appl. 96. 1-82 (1973) .

9. Bear J., Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, N.Y. (1972).

10. Brezis J. & G. Stampacchia., The hodograph method in fluid-dynamics in the ligh of variational inequali--- ties. Arch. Ration Mecch. Anal. 61, 1-18 (1976).

11. Bers L. , Mathematical aspects of subsonic and transo nic gas dynamics . London: Chapman and Hall 1958.

12. Brezis H., Recent contributions to non lineae partial diferential equations.

13. Brezis H. & J.L. Lions., Inequations hyperboliques, C.R. Acad. Sci. Paris (1967).

14. Brezis H. & G. Stampacchia., Sur la régularité de la solution d'inequations elliptiques. Bull Soc. Math. - France 96, 153-180 (1968).

15. Browder. Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach space . Bull. Amer. Math. soc., 71, 780-85 (1965).

16. Crank J., The mathematics of diffusion. Clarendon -- Press Oxford, 1975.

17. Comincioli V., Analisi numerica di un problema di -- frontiera libera connesso col moto di un fluido --- attraverso un mezzo poroso. Public der Labor di Anal. Numer. C.N.R. Pavia N° 17 (1971).

18. Duvaut G. & J. L. Lions., Les inequations en mecanique et en physique. Dunod. G. Villars. Paris 1974.

19. Duvaut G., Résolution d'un probléme de Stefan (fu -- sion d'un bloc de glace a zéro degré), C.R. Acad. - Sci. Paris. 276., A1461-63 (1973).

20. Ciaquinta & I.Pepe., Esistenza e regolaritá per il - problema dell'area minima con ostacoli en n variabili. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 25, 481-503(1971).

21. Giusti., Minimal surfaces with obstacles. CIME course on Geometric Measure theory and Minimal surfaces, Rome, 1973, pp.119-53.

22. Hartman P. & Stampacchia., On some non-linear elliptic differential functional equations , Acta Math., Vol 115,p.p.271- 310 (1976).

23. Hille E. & R. Phillips ., Functional analysis and semigrups . Amer. Math. Society, Coll. Publ. Vol. 31 , Providence 1975.

24. Kolmogórov A.N. & S.V. Fomín., Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. MIR. 1975.

25. Lewi H., On a variational problem with inequalities on the boundary. J. of Math. and Mech. ,17,861-884 (1968).

[illegible]. Lewy H. & G. Stampacchia., On the regularity of the solution of a variational inequality. Com. Pure & Appl Math. 22, 1[illegible]3-1[illegible] (1969).

27. Lions J.L. & E. Magenes., Non-homogeneous boundary - value problems and aplications. Springer V. N.Y. 1972. Tomo I y II.

28. Lions J.L., Equations différentielles opérationne -- lles et problemes aux limites. Grundleherren Vol.III Springer 1961.

29. Lions J.L., Sur un nouveau type de problème nonli--- néaire pour operateurs hiperboliques du 2-eme ordre, Seminaire, Collegè de France, December, 1965.

30. Lions J.L.,& G. Prodi., Un Théoreme d'existence et — unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimen sion 2, C.R. Acad. Sci. Paris, 248, 3519-3521 (1959).

31. Lions J.L. & G. Stampacchia., Variational inequali-- ties. Comm. Pure & Appl. Math. Vol. 20, 493-519 ---- (1967).

32. Medeiros L.A., Tópicos de equações diferenciais par- ciais. IM-UFRJ (197[illegible]) , Escola de Matematica Aplica- da.

33. Oden J.T. & J.N. Reddy., An introduction to the Ma- thematical theory of finite elements. Jhon Wiley, - 1976.

34. Peetre J., Introduction to Hilbert Space methods in partial differential equations . U de Brasilia Insti tuto Central de Matemática . 1965.

34'. P.A. Raviart & J.M. Thomas., Introduction al' analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson 1983.

35. Reed M. & Simon B., Methods of modern mathematical physics Vol.1 ... 1980.

36. Royden H.L, Real Analysis, Macmillan 1968.

37. Schwartz L., Equations aux dériveos parcielles, Seminare Schwartz, Paris, 1955.

38. Schwartz L., Theorie des distributions , Herman Paris 1950.

39. Schwartz L., Mathematics for the physical Sciencies. Herman Paris , 1966.

40. Shwartz L., Theórie des distributions á valeurs vectorielles I e II, Annales del'Inst. Fourier,7(1956) - 1-139 y 8(1958) 1-209.

41. Serrin J., Pathological solutions of elliptic differential equations, Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, Vol.18, 1964, p.[illegible]-387.

42. Stampacchia G., Equations elliptiques du second ordre a coefficientes discontinus . Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.

43. Stampacchia G. & H.Levy., On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 41 , 241-253 (1971).

44. Stampacchia G., Formes bilineares coercives sur les esembles convexes. C.R. Acad. Sc. Paris 25[illegible] (19[illegible]) - pp.4413-16.

45. Stampacchia G., Equations elliptiques a données discontinues, Sem. Schwartz., 1960/61.n" 4.

46. Stampacchia G., Le probléme de Dirichlet pour les -- equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol. 15, - 1965, pp. 189-258.

47. Vito C.L. de, Funtional Analisis, A.P. 1978.