29
2cj

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS ANALOGIAS Y DIFERENCIAS ENTRE CATEGORIA TOPOLOGICA Y MEDIDA

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

MATEMATICO

P r e s e n t a

CARLOS SAMPIETRO CLARACO

México, D. F. 1985

Introducción.

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar la utilidad del concepto de categoría introducido por Baire como herramienta para demostraciones de existencia. Asimismo, usaremos métodos análogos de la Teoría de la medida:

Demostraremos proposiciones (en su mayoría muy conocidas) para conjuntos medibles y después probaremos resultados análogos para conjuntos que tienen la propiedad de Baire (con los conjuntos de primera categoría jugando el papel de los conjuntos de medida cero). De este modo, al mismo tiempo examinaremos similitudes entre la clase de los conjuntos medibles y la clase de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire. Examinaremos también la analogía que hay entre la clase de las funciones medibles y las funciones que tienen la propiedad de Baire, llegando a probar el conocido Teorema de Luzin para funciones medibles y su análogo en categoría. Estudiaremos brevemente a las funciones de primera clase de Baire.

En el primera capítulo demostraremos que la recta real se puede escribir como la unión disjunta de dos conjuntos complementarios, uno de los cuales es de primera categoría y el otro es de medida cero. Pero en el capítulo 7 exhibiremos homeomorfismos del plano en sí mismo que mapean conjuntos de primera categoría en conjuntos de medida cero. Lo cual nos muestra que aunque en algunos casos los dos conceptos son completamente distintos, en otros son muy parecidos.

Se observará que en muchos resultados de Teoría de la medida (desde propiedades elementales de los conjuntos medibles hasta Teoremas tan profundos como el de Fubini y la Ley cero-uno de Kolmogorov), al sustituir las palabras "conjunto medible" y "conjunto de medida cero" por "conjunto que tiene la propiedad de Baire" y "conjunto de primera categoría", respectivamente, se obtiene una proposición igualmente válida.

En el capítulo 10 encontraremos un homeomorfismo del cuadrado unitario en sí mismo tal que la semiorbita positiva de algún punto sea densa en el cuadrado; este problema tiene la particularidad de que se resolvió por primera vez mediante el método categórico. En el capítulo 2 demostraremos el Teorema de densidad de Lebesgue, el cual usaremos al final de nuestro trabajo para construir espacios topológicos en donde los conceptos de primera categoría y medida cero coinciden.

1.

En este capítulo introduciremos los conceptos de medida y categoría en la recta: daremos las definiciones de conjunto de primera categoría y conjunto de medida cero y deduciremos algunas propiedades elementales de ambos. Veremos que tanto la clase de conjuntos de primera categoría como la clase de los conjuntos de medida cero son σ-ideales, que cada una de ellas contiene propiamente a los conjuntos numerables y que ninguna de las dos clases está contenida en la otra. Finalmente, con un argumento de categoría, probaremos la existencia de los números de Liouville, como una primera ilustración de este método.

El teorema de Cantor, que dice que ningún intervalo de números reales es numerable, es un buen punto de partida para nuestro estudio:

<u>Teorema 1.1:</u> Para cualquier sucesión $\{a_n\}$ de números reales y para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, existe un punto $p \in I$ tal que $p \neq a_n$, para toda n.

Dem: Sea I_1 un subintervalo cerrado de I tal que $a_1 \notin I_1$. Sea I_2 un subintervalo cerrado de I_1 tal que $a_2 \notin I_2$.

Procediendo inductivamente, sea I_n un subintervalo cerrado de I_{n-1} tal que $a_n \notin I_n$. La sucesión de subintervalos cerrados I_n tiene intersección no vacía.

Sea $p \in \bigcap I_n$, entonces $p \in I$ y $p \neq a_n$ para toda n. $\square$

<u>Corolario 1.2:</u> Ningún intervalo es numerable.

Dem: Supongamos que existe un intervalo I numerable. Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ todos los puntos de I. Por el teorema de Cantor, existe $p \in I$ tal que $p \neq a_n$, para toda n $\forall$. $\square$

Con un razonamiento muy parecido al de la demostración del teorema de Cantor podemos probar el Teorema de Categoría de Baire, pero primero necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.3.-

a) Un conjunto A es <u>denso en el intervalo I</u> si A tiene intersección no vacía con todo subintervalo de I.

b) Un conjunto se dice que es <u>denso</u> si es denso en $\mathbb{R}$

c) Un conjunto A es <u>denso en ninguna parte</u> si no es denso en ningún intervalo, es decir, si todo intervalo contiene un subintervalo contenido en el complemento de A.

La definición de conjunto denso en ninguna parte se puede establecer de otras maneras (tal vez mas conocidas): A es denso en ninguna parte si y solo si $\bar{A}$ tiene interior vacío; y si y solo si su complemento contiene un conjunto denso abierto. Probaremos que la clase de tales conjuntos es cerrada bajo ciertas operaciones:

<u>Teorema 1.4.-</u> Todo subconjunto de un conjunto denso en ninguna parte es denso en ninguna parte. La unión de dos conjuntos densos en ninguna parte es a su vez denso en ninguna parte. La cerradura de un conjunto denso en ninguna parte es denso en ninguna parte.

Dem.- La primera afirmación es trivial. Probemos la segunda: sean A_1 y A_2 conjuntos densos en ninguna parte, entonces para cada intervalo I existe un intervalo $I_1 \subset I - A_1$ y un intervalo $I_2 \subset I_1 - A_2 \Rightarrow I_2 \subset I - (A_1 \cup A_2) \Rightarrow$ $A_1 \cup A_2$ es denso en ninguna parte. Finalmente, cualquier intervalo abierto contenido en $\mathbb{R} - A$ está tambien contenido en $\mathbb{R} - \bar{A}$. $\square$

Es importante observar que a partir de la segunda afirmación del Teorema 1.4 es inmediato demostrar que <u>la unión de cualquier número finito de conjuntos densos en ninguna parte es denso en ninguna parte</u>; sin embargo, si la unión es numerable no es en general denso en ninguna parte, puede hasta ser denso. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$ y es la unión de sus singuletes, que son densos en ninguna parte.

La siguiente definición fué formulada por R. Baire en 1899, a quien también se le debe el teorema inmediato posterior:

<u>Definición 1.5:</u> Un conjunto se dice que es de <u>primera categoría</u> si lo podemos representar como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no se puede representar de este modo decimos que es de <u>segunda categoría</u>.

<u>Teorema 1.6.-</u> El complemento de un conjunto de primera categoría es denso en $\mathbb{R}$. Ningún intervalo en $\mathbb{R}$ es de primera categoría. La intersección de cualquier colección de conjuntos densos abiertos es nuevamente un conjunto denso.

Dem:- Sea A un conjunto de primera categoría, entonces $A = \bigcup A_n$, donde cada A_n es denso en ninguna parte. Sea I un intervalo abierto arbitrario, y sea I_1 un subintervalo cerrado y acotado de $I - A_1$. Sea I_2 un subintervalo cerrado de $I_1 - A_2$. En general, sea I_{n+1} un subintervalo cerrado de $I_n - A_{n+1}$. Entonces $\bigcap I_n \neq \emptyset$, $\bigcap I_n \subset I - A$. Para ver que el complemento de A es denso tenemos que demostrar que su intersección con cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ es no vacía. Sea

$I_0 \subset \mathbb{R}$ un intervalo, entonces $I_0 \cap (\mathbb{R}-A) = I_0 \cap (\mathbb{R} - \cup A_n) = I_0 \cap (\cap (\mathbb{R}-A_n))$ $= \cap (I_0 \cap (\mathbb{R}-A_n)) \supset \cap I_n \neq \emptyset$.

Para demostrar la segunda afirmación, supongamos que existe un intervalo I que es de primera categoría $\Rightarrow$ $\mathbb{R}-I$ es denso en $\mathbb{R}$, pero $I \cap (\mathbb{R}-I) = \emptyset$ $\underset{\circ}{\nabla}$.

La tercera afirmación se sigue de la primera por complementación. Es evidente entonces que la primera afirmación y la primera son equivalentes; si demostramos que la segunda afirmación implica la primera tendremos que las tres afirmaciones son equivalentes:

Supongamos que existe un conjunto A de primera categoría tal que su complemento no es denso, entonces existe un intervalo I tal que para todo subintervalo I_n de I, $I_n \cap (\mathbb{R}-A) = \emptyset$, $\Rightarrow A \subset I_n \; \forall n$ y por lo tanto $A \subset I$. Sea $x \in I$ $\Rightarrow x \in I_n$ para alguna n; como $I_n \cap (\mathbb{R}-A) = \emptyset \Rightarrow x \in I_n \cap A$ $\Rightarrow x \in A$ $\therefore I \subset A$. Hemos demostrado que $I = A$ $\therefore$ I es un intervalo de primera categoría $\underset{\circ}{\nabla}$. $\square$

Probaremos un teorema que es la generalización del teorema 1.4 para conjuntos de primera categoría:

<u>Teorema 1.7.-</u> Todo subconjunto de un conjunto de primera categoría es de primera categoría. La unión de una familia contable de conjuntos de primera categoría es también de primera categoría.

Dem.- Sea A un conjunto de primera categoría y sea $B \subset A$. Sea $A = \cup A_n$ una representación de A como unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Entonces $B = B \cap A = B \cap (\cup A_n) = \cup (B \cap A_n)$. Por el teorema 1.4, $B \cap A_n$ es denso en ninguna parte y por lo tanto B es de primera categoría.

La segunda afirmación es trivial. $\square$

Sin embargo, la cerradura de un conjunto de primera categoría no es, en general, de primera categoría; de hecho, tenemos el siguiente:

<u>Teorema 1.8.-</u> La cerradura de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es de primera categoría si y solo si A es denso en ninguna parte.

Dem.- Supongamos que existe $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\bar{A}$ es de primera categoría y A no es denso en ninguna parte.

Como A no es denso en ninguna parte, $\exists x \in \operatorname{int}(\bar{A})$ $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bar{A} \Rightarrow \bar{A}$ no es de primera categoría ¡!

Inversamente, supongamos que A es denso en ninguna parte $\Rightarrow \bar{A}$ es denso en ninguna parte (Teorema 1.4), en particular $\bar{A}$ es de primera categoría. □

La demostración del Teorema anterior se puede generalizar fácilmente para subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y para espacios topológicos más generales, en los que todo abierto no vacío sea de segunda categoría.

<u>Definición 1.9.-</u> Una clase de conjuntos que contiene uniones contables y subconjuntos arbitrarios de sus elementos se llama un <u>σ-ideal</u>.

La clase de los conjuntos de primera categoría y la clase de los conjuntos contables son dos ejemplos de σ-ideales en $\mathbb{R}^d$. Un tercer ejemplo es la clase de los conjuntos de medida cero, que definiremos a continuación; denotemos la longitud de un intervalo I por $|I|$:

<u>Definición 1.10.-</u> Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que tiene <u>medida cero</u> si $\forall \varepsilon > 0$ existe una colección de intervalos $\{I_n\}$ tal que $A \subset \bigcup I_n$ y $\sum |I_n| < \varepsilon$.

A los conjuntos que tienen medida cero también se les llama <u>conjuntos nulos</u>. Es evidente que los singuletes son conjuntos nulos y que la unión numerable de conjuntos de medida cero es también un conjunto nulo; por lo tanto <u>la clase de los conjuntos de medida cero es un σ-ideal</u> y, al igual que la clase de los conjuntos de primera categoría, contiene a los conjuntos contables.

<u>Teorema 1.11:</u> Si una colección finita de intervalos abiertos acotados $I_1, I_2, \dots, I_n$, con $I_i = (a_i, b_i)$, $i=1,2,\dots,n$, cubre al intervalo cerrado $I=[a,b]$, entonces

$$|I| = b-a < \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) = \sum_{i=1}^{n}|I_i|.$$

Dem:- Sea k_1 tal que $a\in I_{k_1}$. Si $b_{k_1}\leq b$, sea entonces k_2 tal que $b_{k_1}\in I_{k_2}$; si $b_{k_2}\leq b$, sea k_3 tal que $b_{k_2}\in I_{k_3}$, y así sucesivamente. El proceso termina con k_m si $b_{k_m}>b$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m=n$ y $I_{k_i}=I_i$ $\forall i=1,\dots,n$. Esto lo podemos lograr omitiendo I_i's superfluos y cambiando la notación. En otras palabras, podemos suponer que $a_1<a<b_1$; $a_n<b<b_n$; y si $n>1$: $a_{i+1}<b_i<b_{i+1}$ $\forall i=1,\dots,n-1$. tenemos entonces que

$$b-a<b_n-a_1 = (b_1-a_1)+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)\leq\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

es decir: $|I|<\sum_{i=1}^{n}|I_i|$. $\square$

El siguiente teorema, debido a E. Borel, lo probaremos como consecuencia del resultado anterior:

<u>Teorema 1.12:</u> Si una colección arbitraria de intervalos I_n cubre a un intervalo I, entonces $\sum|I_n|\geq|I|$.

Dem:- Sea $\alpha>1$ arbitraria y sea J un subintervalo cerrado de I $\ni$ $|J| = |I|/\alpha$. Sea ahora J_n un intervalo abierto que contiene a I_n, de manera que $|J_n|=\alpha|I_n|$. Entonces $\{J_n\}$ es una cubierta de $J \Rightarrow \sum|J_n|\geq J \Rightarrow$

$$\alpha\sum|I_n| = \sum|J_n|\geq J = |I|/\alpha$$

Si $\alpha\to 1$ obtenemos el resultado. $\square$

Un corolario inmediato del teorema anterior es que ningún intervalo tiene medida cero, lo que implica que ningún intervalo es numerable; es decir, tenemos otra prueba del Teorema de Cantor.

El hecho de que los conjuntos numerables estén contenidos en los σ-ideales de los conjuntos de medida cero y los de primera categoría nos sugiere que cualquier elemento de estas clases es "pequeño" en cierto sentido. Es natural preguntarnos ahora que otras relaciones podemos encontrar entre estas dos clases; por ejemplo, ¿ésta alguna contenida en la otra? La respuesta es no y esta dada por el siguiente:

Teorema 1.13: El conjunto de los números reales se puede descomponer en dos conjuntos complementarios A y B tales que A es de primera categoría y B es de medida cero.

Dem.- Sea $a_1, a_2, \ldots$ una enumeración de los números racionales. Sea I_{ij} el intervalo abierto con centro a_i y diametro $1/2^{i+j}$. Sea $G_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ij}$ $(j=1,2,\ldots)$ y sea $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$. Sabemos que $\forall\, \varepsilon > 0$ podemos escoger $j \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^j < \varepsilon$; entonces $B \subset \bigcup_i I_{ij}$ y $\sum_i |I_{ij}| = \sum_i 1/2^{i+j} = 1/2^j < \varepsilon \Rightarrow B$ tiene medida cero.

Por otro lado, G_j es unión de abiertos y contiene a todos los racionales, por lo tanto es abierto y denso en $\mathbb{R}$, por lo que $\mathbb{R} - G_j$ es denso en ninguna parte, y tenemos: $A = \mathbb{R} - B = \bigcup_j (\mathbb{R} - G_j)$ es de primera categoría. $\square$

Un resultado inmediato a partir del Teorema anterior es que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ se puede descomponer en un conjunto de primera categoría y otro de medida cero. Esto nos muestra que, en algunos casos, las nociones de primera categoría y medida cero son totalmente distintas.

Si podemos demostrar que el conjunto de los números en un intervalo que no tienen cierta propiedad es pequeño (en el sentido de medida, de categoría o de cardinalidad) se sigue que casi todos los números en el intervalo (en el sentido que estemos considerando) tienen dicha propiedad. Como una primera ilustración de este método demostraremos la existencia de los números trascendentes. Recordemos algunas definiciones:

Definición 1.14.- a) Un número complejo z se dice que es algebraico si satisface una ecuación de la forma

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=0$$

con coeficientes enteros, no todos cero.

b) El grado de un número algebraico es el menor entero positivo n tal que el número satisface una ecuación de grado n.

Teorema 1.15.- El conjunto de los números reales algebraicos es numerable.

Dem.- Definamos el peso de un polinomio $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ como el número $n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|$. Solamente hay un número finito de polinomios que tienen un peso dado, ya que $n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|$ es un entero positivo. Arreglemos éstos en orden lexicográfico (primero en orden de n, después en orden de a_0, después en orden de a_1, y así sucesivamente). Tomando ahora los polinomios de peso 2 en orden, después los de peso 3 en orden, etc., obtenemos una sucesión $f_1, f_2, f_3, \ldots$ en la que todo polinomio de grado mayor o igual a 1 aparece una sola vez. Cada polinomio tiene a lo mas un número finito de raices reales: numeremos los ceros de f_1, después los de f_2, y así sucesivamente, omitiendo cualquiera que haya.

mos enumerado antes. De esta manera obtenemos una enumeración de los números algebraicos reales. $\square$

La sucesión anterior es infinita porque contiene a todos los racionales. Esta es tal vez la demostración mas simple de la existencia de los números trascendentes, una demostración mas antigua se debe a Liouville y para la cual necesitamos el siguiente:

<u>Lema 1.16:</u> Para todo número algebraico z de grado $n>1$ existe M entero positivo tal que $|z-p/q| > 1/Mq^n$, $\forall p,q \in \mathbb{Z}$, $q>0$.

Dem: Sea $f(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes enteros para el cual $f(z)=0$. Sea $M \in \mathbb{N} \ni |f'(x)| \leq M$ siempre que $|z-x| \leq 1 \Rightarrow$ por el Teorema del valor medio: $|f(x)| = |f(z)-f(x)| \leq M|z-x|$, si $|z-x| \leq 1$.

Sean $p,q \in \mathbb{Z}$, $q>0$. Queremos demostrar que $|z-p/q| > 1/Mq^n$. Supongamos que $|z-p/q| \leq 1$ (de otro modo el resultado es inmediato), entonces $|f(p/q)| \leq M|z-p/q|$ $\therefore |q^n f(p/q)| \leq Mq^n|z-p/q|$. La ecuación $f(x)=0$ no tiene raíces racionales; mas aún, $q^n f(p/q)$ es un entero $\Rightarrow 1 \leq |q^n f(p/q)|$ $\Rightarrow |z-p/q| \geq 1/Mq^n$, y como z es irracional, $|z-p/q| > 1/Mq^n$.

El único detalle de la demostración que no es claro es que la ecuación $f(x)=0$ no tenga raíces racionales; lo que probaremos de inmediato:

Supongamos lo contrario $\Rightarrow$ existen $p,q \in \mathbb{Z} \ni f(p/q)=0$, entonces por el Teorema del residuo, existe un polinomio g con coeficientes racionales tal que $f(x) = (x-\frac{p}{q})\,g(x)$, con $gr(g) < gr(f)$.

Ahora multipliquemos a g por el máximo común divisor de los denominadores de sus coeficientes y obtenemos un polinomio $\bar{g}$, con coeficientes enteros, tal que

$$f(x) = (x-p/q)\,\bar{g}(x) \quad , \; gr(\bar{g}) = gr(g)$$

$\Rightarrow f(z) = (z - p/q)\,\bar{g}(z)$, como $z - p/q \neq 0 \Rightarrow \bar{g}(z) = 0$ ↯ ya que $gr(\bar{g}) < gr(f)$ $\therefore$ $f(x)=0$ no tiene raíces racionales. □

Daremos ahora un ejemplo especial de números trascendentes:

<u>Definición 1.17:</u> Un número real z se dice que es un <u>número de Liouville</u> si es irracional y tiene la propiedad de que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $|z - p/q| < 1/q^n$, $q > 1$.

Un ejemplo de un número de Liouville es $z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$.
En efecto, tomemos $q = 10^{n!}$ y $p = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^{n!}}{10^{k!}}$, entonces:

$$|z - p/q| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} 1/10^{k!} - \frac{\sum_{k=1}^{n} 10^{n!}/10^{k!}}{\sum_{k=1}^{n} 1/10^{n!}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} \right| < \frac{1}{10^{n \cdot n!}}$$

<u>Teorema 1.18:</u> Todo número de Liouville es trascendente.

Dem: Supongamos que existe z ∍ z es de Liouville y algebraico, de grado n ($n>1$, porque z es irracional).

Por el lema 1.16, $\exists M \in \mathbb{N}$ ∍ $|z - p/q| > 1/Mq^n$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}, q>0$.
Sea $k \in \mathbb{N}$ ∍ $2^k \geq 2^n M$. Como z es de Liouville, existen $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ ∍ $|z - p/q| < 1/q^k$. Tenemos entonces que $\frac{1}{Mq^n} < |z - p/q| < 1/q^k$, de donde $1/Mq^n < 1/q^k \Rightarrow Mq^n > q^k \Rightarrow M > q^{k-n} \geq 2^{k-n} \geq M$ ↯
Por lo tanto todo número de Liouville es trascendente. □

Llamémosle E al conjunto de los números de Liouville. Por los teoremas 1.15 y 1.18 sabemos que E no es pequeño en el sentido de cardinalidad; veamos que tan grande es en el sentido de medida y de categoría:

De la definición de E se sigue que $E = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$, donde $G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$. G_n es unión de intervalos abiertos y contiene a todo número de la forma p/q, $q \geq 2$, por lo que su complemento es denso en ninguna parte. Como $\mathbb{R} - E = \mathbb{Q} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} - G_n))$, se sigue que $\mathbb{R} - E$ es de primera categoría. El Teorema de Baire nos dice que <u>el conjunto de</u>

los números de Liouville es muy amplio en el sentido de categoría. Veamos ahora que tan grande es en el sentido de medida:

De la definición de E se sigue que $E \subset G_n$ $\forall n$. Sea $G_{n,q} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$ $q \geq 2$. Para cualesquiera dos enteros positivos m, n tenemos que $E \cap (-m,m) \subset G_n \cap (-m,m) = \bigcup_{q \geq 2} [G_{n,q} \cap (-m,m)]$.

Por otro lado $\bigcup_{q\geq 2} [G_{n,q} \cap (-m,m)] = \bigcup_{q \geq 2} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right) \cap (-m,m)\right] =$

$$= \left\{ \bigcup_{q\geq 2} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)\right\} \cup \left\{ \bigcup_{q \geq 2} \bigcup_{|p| > mq} \left[\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right) \cap (-m,m)\right]\right\}$$

Pero la segunda unión es vacía, por lo tanto $E \cap (-m,m)$ se puede cubrir con una colección de intervalos tales que la suma de sus diámetros, $\forall n > 2$ es:

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2}{q^n} = \sum_{q=2}^{\infty} (2m+1)\left(\frac{2}{q^n}\right) \leq \sum_{q=2}^{\infty} (4mq+q)\left(\frac{1}{q^n}\right)$$

$$= (4m+1) \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \leq (4m+1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n-1}} = \frac{4m+1}{n-2}$$

Por lo tanto $E \cap (-m,m)$ tiene medida cero para toda m, lo cual implica que E tiene medida cero.

Hemos probado que el conjunto E, a pesar de ser "grande" en el sentido de categoría, es "pequeño" en el sentido de medida; de hecho, E y su complemento nos dan otra descomposición de la recta real en un conjunto de primera categoría y un conjunto de medida cero. Demostraremos que es pequeño en un sentido todavía mas fuerte:

Definición 1.19.- Sea $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ y sea $A \subset \mathbb{R}$, decimos que A tiene medida s-dimensional de Hausdorff cero si $\forall \varepsilon > 0$ hay una colección de intervalos I_n tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|^s < \varepsilon$ y $|I_n| < \varepsilon$ $\forall n$.

Es inmediato comprobar que si un conjunto tiene medida s-dimensional de Hausdorff cero, cualquier subconjunto de él también; y que la unión contable de conjuntos con medida s-dimensional de Hausdorff cero tiene también medida s-dimensional de Hausdorff cero. En otras palabras, estos conjuntos forman un σ-ideal.

Si $s=1$, este σ-ideal es el de los conjuntos de medida cero; si $s>1$, contiene a los conjuntos de medida cero; en otro caso:

Lema 1.20.- Si $0<s<1$, los conjuntos con medida s-dimensional de Hausdorff cero forman una subclase de los conjuntos de medida cero.

Dem.- Sea $\varepsilon<1$ y sea A con medida s-dimensional de Hausdorff cero $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \{I_n\}$ t.q. $A\subset \bigcup I_n$, $|I_n|<\varepsilon\ \forall n$ y $\sum |I_n|^s<\varepsilon$, entonces $|I_n|<\varepsilon<1 \therefore \sum|I_n| < \sum |I_n|^s < \varepsilon$. □

De hecho, se puede llegar mas lejos y demostrar que la subclase es propia [2]. Regresemos ahora a los números de Liouville:

Teorema 1.21.- El conjunto E de los números de Liouville tiene medida s-dimensional de Hausdorff cero, $\forall s>0$.

Dem.- Queremos demostrar que dada $\varepsilon>0$, $\forall m\in\mathbb{N}$ hay una colección de intervalos I_n t.q. $E\cap(-m,m)\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|^s<\varepsilon$ y $|I_n|<\varepsilon$.

$\forall n\in\mathbb{N}$ tenemos que $E\cap(-m,m)\subset \bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p=-mq}^{mq}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$.

Sea n t.q. $1/2^{n-1}<\varepsilon$, $ns>2$ y $\frac{(2m+1)2^s}{ns-2}<\varepsilon$. Entonces cada intervalo $\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$ tiene longitud $2/q^n \leq 2/2^n = \frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon \Rightarrow$

$$\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p=-mq}^{mq}\left(\frac{2}{q^n}\right)^s = \sum_{q=2}^{\infty}\frac{(2mq+1)2^s}{q^{ns}} \leq (2m+1)2^s\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^{ns-1}}$$

$$\leq (2m+1)2^s\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{ns-1}} = \frac{(2m+1)2^s}{ns-2}<\varepsilon . \ \square$$

2

En este capítulo daremos la definición de la medida de Lebesgue y mencionaremos algunas de sus propiedades mas importantes; diremos bajo que condiciones un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es medible y que propiedades tiene. Sin hacer uso de la condición de Carathéodory ni del Teorema de extensión de Hahn [1] llegaremos a que la clase de los conjuntos Lebesgue-medibles es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos junto con los de medida cero. Para terminar con la parte de medida daremos una demostración del célebre Teorema de densidad de Lebesgue. En seguida definiremos la propiedad de Baire y veremos algunas analogías entre conjuntos medibles y conjuntos que tienen la propiedad de Baire.

En el capítulo anterior definimos los conjuntos de medida cero a partir de ciertas propiedades de cubiertas de intervalos; ahora queremos generalizar el concepto de medida a un espacio euclidiano de dimensión d y lo primero que necesitamos es la siguiente:

<u>Definición 2.1</u>:- Por un <u>intervalo</u> I en $\mathbb{R}^d$ entendemos un hiperparalelepípedo con lados paralelos a los ejes; o bien, lo que es lo mismo, el producto cartesiano de d intervalos de dimensión 1.

Nuevamente aquí denotamos por $|I|$ el volumen de I, aunque en este caso sea volumen d-dimensional. Como usualmente trabajaremos en una dimensión fija, no necesitamos especificar d en nuestra notación. Ahora si, estamos listos para empezar:

Definición 2.2: Definimos la medida exterior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ como el ínfimo de las sumas $\sum |I_n|$, sobre todas las colecciones de intervalos I_n que cubren a A, y la denotamos como $m^*(A)$. En otras palabras, si $A \subset \mathbb{R}^d$:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum |I_n| : A \subset \bigcup I_n \right\}$$

Notemos que en esta definición, las aristas de los intervalos pueden o no estar incluidas, sin que esto altere el valor de la medida exterior. Si la serie $\sum |I_n|$ diverge para toda colección $\{I_n\}$ tal que $A \subset \bigcup I_n$, escribimos $m^*(A) = \infty$; en cualquier otro caso, la medida exterior es un número real no negativo. Evidentemente, si para algún conjunto A se tiene que $m^*(A) = 0$, A es un conjunto nulo.

Podemos pedir en esta definición que todos los intervalos tengan volumen menor que un número positivo δ dado; ya que todo intervalo lo podemos dividir en subintervalos con volumen menor que δ sin afectar la suma de sus volúmenes. Podemos además pedir que todos los intervalos sean abiertos; ya que para cualquier colección de intervalos $\{I_i\}$ y $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar intervalos abiertos J_i tales que $I_i \subset J_i$ y $\sum |J_i| \leq \sum |I_i| + \varepsilon$, es decir, el ínfimo no varía si lo tomamos sobre cubiertas arbitrarias o cubiertas abiertas. Es inmediato verificar las siguientes propiedades de la medida exterior:

Teorema 2.3:

a) (Monotonía) Si $A \subset B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

b) (Subaditividad) Si $A = \bigcup A_i$, entonces $m^*(A) \leq \sum m^*(A_i)$

c) Para todo intervalo I, $m^*(I) = |I|$.

Es natural preguntarse ahora en que casos tenemos la igualdad en la parte b) del Teorema anterior; la respuesta nos la da el siguiente:

Lema 2.4.- Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son conjuntos cerrados y acotados disjuntos, entonces $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(F_i)$.

Dem.- Haremos el caso $n=2$, el resultado se seguirá fácilmente por inducción sobre n:

Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados y acotados disjuntos. Definimos la distancia entre F_1 y F_2 como $d(F_1, F_2) = \inf\{d(x,y) : x \in F_1, y \in F_2\}$; como F_1 y F_2 son compactos, el ínfimo se alcanza $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que ningún intervalo con diámetro menor que δ intersecta a ambos (por ejemplo, podemos tomar $\delta < d(F_1,F_2)/2$).

Entonces, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{I_i\}$ una colección de intervalos con diámetro menor que δ tal que $F_1 \cup F_2 \subset \bigcup I_i$ y $\sum |I_i| \leq m^*(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$. Denotemos por $\sum' |I_i|$ la suma sobre los intervalos que intersectan a F_1 y por $\sum'' |I_i|$ la suma sobre los intervalos restantes (que en particular cubren a F_2). Entonces:

$$m^*(F_1) + m^*(F_2) \leq \sum' |I_i| + \sum'' |I_i| = \sum |I_i| \leq m^*(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$$

Como es para toda $\varepsilon > 0$, tenemos que $m^*(F_1) + m^*(F_2) \leq m^*(F_1 \cup F_2)$

Por otro lado, por el teorema 2.3 (b), sabemos que $m^*(F_1 \cup F_2) \leq m^*(F_1) + m^*(F_2)$ $\therefore$ $m^*(F_1 \cup F_2) = m^*(F_1) + m^*(F_2)$. $\square$

Hasta este momento ya conocemos las propiedades de monotonía y subaditividad de la medida exterior, sabemos cual es la medida exterior de un intervalo y sabemos como se comporta la medida exterior en el caso de uniones disjuntas de conjuntos cerrados. El siguiente lema nos describe una propiedad muy importante de los conjuntos abiertos:

Lema 2.5.- Para todo conjunto G abierto y acotado, y $\forall \varepsilon > 0$, existe F cerrado tal que $F \subset G$ y $m^*(F) > m^*(G) - \varepsilon$.

Dem.- Considerando que la intersección y la diferencia de un número finito de intervalos es nuevamente una unión de intervalos y recordando que los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos, se puede ver que una unión arbitraria de intervalos se puede representar, como una unión disjunta. Entonces, podemos representar a G como la unión de una colección disjunta de intervalos $\{I_i\}$.

Por definición, $m^*(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$; entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |I_i| > m^*(G) - \frac{\varepsilon}{2}$. Sea J_i un intervalo cerrado tal que $J_i \subset I_i^\circ$. y $|J_i| > |I_i| - \varepsilon/2n$ $(i=1,2,\dots,n)$ (donde I_i° representa el interior de I_i).

Entonces $F = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ es cerrado, $F \subset G$ y como consecuencia del Teorema 2.3 b) y del lema anterior tenemos que:

$m^*(F) = \sum_{i=1}^{n} |J_i| > \sum_{i=1}^{n} |I_i| - \frac{\varepsilon}{2} > m^*(G) - \varepsilon$. $\square$

A partir de los resultados anteriores, es fácil demostrar el siguiente:

<u>Lema 2.6:</u> Sea G un conjunto abierto y acotado, entonces, si $F \subset G$ es cerrado: $m^*(G-F) = m^*(G) - m^*(F)$.

Este lema es lo último que necesitamos para formular la siguiente:

<u>Definición 2.7:</u> Un conjunto A es <u>medible</u> (o Lebesgue-medible) si $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos F y G tales que F es cerrado, G es abierto, $F \subset A \subset G$ y $m^*(G-F) < \varepsilon$.

Es inmediato probar que si un conjunto es medible, su complemento también lo es; y que la intersección de un número finito de conjunto medibles es medible. El siguiente resultado nos da otra caracterización de los conjuntos medibles:

<u>Lema 2.8:</u> Un conjunto acotado A es medible si $\forall \varepsilon > 0$ existe F cerrado contenido en A tal que $m^*(F) > m^*(A) - \varepsilon$.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria y sea $F \subset A$ cerrado $\ni$ $m^*(F) > m^*(A) - \varepsilon/2$. Como A es acotado (lo que implica que $m^*(A) < \infty$), existe una cubierta de intervalos abiertos $\{I_i\}$ $\ni$ cada I_i tiene diámetro menor que 1 y $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*(A) + \varepsilon/2$.

Sea G la unión de los I_i que intersectan a A, entonces $F \subset A \subset G$, G es abierto y acotado, y por el lema 2.6:

$m^*(G-F) = m^*(G) - m^*(F) \leq \sum |I_i| - m^*(F) < m^*(A) + \varepsilon/2 - m^*(F) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ A es medible. $\square$

En vista de los resultados anteriores, ya sabemos que los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados son medibles. Es inmediato probar también que todo intervalo es medible y que todo conjunto nulo es medible. Una proposición que se cumple para todos los puntos de un conjunto E excepto los que están en un subconjunto de medida cero, se dice que se cumple casi dondequiera, o para casi todos los puntos de E.

<u>Lema 2.9:</u> Sea $\{A_i\}$ una colección disjunta de conjuntos medibles contenidos en un intervalo I. Si $A = \cup A_i$, A es medible y $m^*(A) = \sum m^*(A_i)$

Dem: $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos cerrados F_i t.q. $F_i \subset A_i$ y $m^*(F_i) > m^*(A_i) - \varepsilon/2^{i+1}$.

Por subaditividad, $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$, entonces podemos determinar k de manera que $\sum_{i=1}^{k} m^*(A_i) > m^*(A) - \varepsilon/2$. Sea $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, entonces $m^*(F) = \sum_{i=1}^{k} m^*(F_i) > \sum_{i=1}^{k} m^*(A_i) - \varepsilon/2 > m^*(A) - \varepsilon \Rightarrow A$ es medible. Ahora bien, $\forall n$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} m^*(A_i) < \sum_{i=1}^{n} m^*(F_i) + \varepsilon/2 = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) + \varepsilon/2 .$$ Si $n \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$ se sigue que $\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) \leq m^*(A)$. $\square$

El siguiente resultado es la generalización del lema anterior y es muy fácil demostrarlo usando el mismo:

<u>Lema 2.10:</u> Sea $\{A_i\}$ una colección disjunta de conjuntos medibles, entonces $A = \cup A_i$ es medible y $m^*(A) = \sum m^*(A_i)$.

Daremos ahora algunas definiciones, que mas tarde nos servirán para resumir todos los resultados anteriores en un solo teorema:

<u>Definición 2.11:</u>

a) Una clase $S \neq \emptyset$ de subconjuntos de un conjunto X se llama un <u>anillo</u> si contiene a la unión y la diferencia de cualesquiera dos de sus elementos.

b) S se llama un <u>σ-anillo</u> si contiene además a la unión de cualquier colección de sus elementos.

c) Un anillo (σ-anillo) se dice que es un álgebra (respectivamente, σ-álgebra) de subconjuntos de X si X es un elemento del anillo.

Es importante notar (y sencillo demostrar) que una clase de subconjuntos de X es un álgebra si y solo si es cerrada bajo las operaciones de unión (o intersección) y diferencia.

Definición 2.12:- Una función conjuntista μ definida sobre un anillo S de subconjuntos de X se dice que es contable aditiva si $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ siempre que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea una colección disjunta de elementos de S tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \in S$.

Definición 2.13:- Una medida es una función real μ (que puede tomar el valor extendido ∞), no-negativa y contable aditiva definida sobre un σ-anillo S de subconjuntos de un conjunto X tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

Definición 2.14:- Un espacio de medida es una terna (X, S, μ), donde S es un σ-anillo de subconjuntos de X y μ es una medida definida sobre S. Los conjuntos que pertenecen a S se dice que son μ-medibles. Cuando todo subconjunto de un conjunto de medida cero pertenece a S (es decir, cuando los conjuntos de μ-medida cero forman un σ-ideal), se dice que el espacio de medida es completo.

El hecho de que el complemento de un conjunto medible sea medible, que la intersección de dos conjuntos medibles sea medible, que todo conjunto nulo y todo intervalo sea medible y por el lema 2.16, nos dicen que la clase S de los conjuntos medibles es una σ-álgebra y que m^* restringida a S es una medida. A esta medida se le conoce como la medida de Lebesgue y la denotaremos por m.

Ahora bien, como sabemos que S contiene a todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X, se sigue que S contiene a todos los subconjuntos de tipo F_σ y G_δ de $\mathbb{R}^d$. De hecho, podemos afirmar bastante mas:

Teorema 2.15: Un conjunto A es medible si y solo si lo podemos representar como un F_σ unión un conjunto de medida cero (o como un G_δ menos un conjunto de medida cero)

Dem: Si A es medible, $\forall n$ existen conjuntos F_n cerrado y G_n abierto tales que $F_n \subset A \subset G_n$ y $m^*(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$. Sean $E = \bigcup F_n$ y $N = A - E$. Entonces E es un F_σ y N tiene medida cero, ya que $N \subset G_n - F_n \Rightarrow m^*(N) < \frac{1}{n}$ $\forall n$. Entonces $A = E \cup N$, unión disjunta. Por complementación se sigue que A se puede representar como un G_δ menos un conjunto de medida cero.

Inversamente, por el hecho de que S es σ-álgebra y de que todo conjunto nulo es medible, todo conjunto que se puede representar así pertenece a S y por lo tanto es medible. $\square$

Definición 2.16: Se le llama la <u>σ-álgebra generada</u> por la clase A de subconjuntos de X a la intersección de todas las σ-algebras que contienen a A, y es la menor σ-algebra que contiene a A.

Definición 2.17: Los elementos de la σ-algebra de $\mathbb{R}^d$ generada por los conjuntos abiertos se llaman <u>conjuntos de Borel</u> o <u>Borelianos</u>.

Nota: en esta definición pudimos haber tomado la σ-álgebra generada por los conjuntos cerrados o por los intervalos. Sabemos entonces que <u>todo Boreliano es medible</u>, y por el teorema 2.15, los conjuntos de Borel junto con los de medida cero generan a la σ-álgebra de los conjuntos medibles. Es decir, hemos demostrado el siguiente:

Teorema 2.18: La clase S de los conjuntos medibles es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ generada por los conjuntos abiertos junto con los de medida cero. La medida de Lebesgue m es una medida en S tal que $m(I)=|I|$ para todo intervalo I. $(\mathbb{R}^d, S, m)$ es un espacio de medida completo.

El siguiente resultado expresa la propiedad de aditividad numerable de manera mas ilustrativa; para una demostración del mismo, ver [ ].

<u>Teorema 2.19:</u> Si A_i es medible y $A_i \subset A_{i+1}$ $\forall i$, entonces $A=\bigcup A_i$ es medible y $m(A)=\lim m(A_i)$.

Si A_i es medible y $A_{i+1} \subset A_i$ $\forall i$, entonces $A=\bigcap A_i$ es medible y $m(A)=\lim m(A_i)$; siempre que $m(A_i)<\infty$, para alguna i.

El teorema 2.19 lo usaremos para la demostración del siguiente resultado, al cual se conoce como <u>propiedad de regularidad:</u>

<u>Teorema 2.20:</u> La medida exterior de un conjunto A arbitrario se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$m^*(A)=\inf\{m(G) : A \subset G,\ G \text{ abierto}\}$$

Si A es medible:

$$m^*(A)=\sup\{m(F) : F \subset A,\ F \text{ cerrado y acotado}\}$$

Inversamente, si se cumple esta ecuación y $m^*(A)<\infty$, entonces A es medible.

Dem: La primera afirmación es evidente, ya que la unión de los elementos de cualquier cubierta de intervalos abiertos es un conjunto abierto que contiene a A.

Para probar la segunda parte, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < m(A)$, y sea $A_i = A \cap B_i(0)$, donde $B_i(0)$ es la bola d-dimensional con centro en el origen y radio i. Por el teorema anterior, $m(A)=\lim m(A_i)$; entonces podemos encontrar i tal que $m(A_i)>\alpha$. Como A_i es acotado y medible, contiene un conjunto cerrado F tal que $m(F)>\alpha$, y $F \subset A$.

Inversamente, si $m^*(A) < \infty$ y F es un subconjunto cerrado de A tal que $m(F) > m^*(A) - \varepsilon/2$; sea G un conjunto abierto que contiene a A y tal que $m(G) < m^*(A) + \varepsilon/2$. Entonces $F \subset A \subset G$ y $m(G-F) < \varepsilon \Rightarrow A$ es medible. $\square$

Es muy importante hacer notar que los lemas 2.4 hasta 2.10 están contenidos en los teoremas 2.18 y 2.20; y que, utilizando el hecho de que intervalos congruentes tienen el mismo volumen y las definiciones anteriores, se puede probar facilmente que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslación.

El siguiente resultado es probablemente el mas profundo de esta sección. Este teorema, debido a Lebesgue, nos dice que los conjuntos medibles tienen localmente una estructura uniforme. Para probarlo necesitamos una definición y algunos conocidos resultados debidos a Vitali:

<u>Definición 2.21</u>.- Sea $\mathcal{J}$ una colección de intervalos. Decimos que $\mathcal{J}$ cubre a un conjunto A en el sentido de Vitali si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall x \in A$ existe $I \in \mathcal{J}$ tal que $x \in I$ y $|I| < \varepsilon$. A $\mathcal{J}$ también se le llama una <u>cubierta de Vitali</u>.

La demostración del siguiente teorema (conocido como <u>Lema de Vitali</u>) se debe a S. Banach[11].

<u>Teorema 2.22</u>.- Sea E un conjunto con medida exterior finita y sea $\mathcal{J}$ una colección de intervalos que cubren a E en el sentido de Vitali; entonces, dada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita disjunta $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\} \subset \mathcal{J}$ tal que $m^*(E - \bigcup_{i=1}^{N} I_i) < \varepsilon$.

Dem:- Basta hacer la demostración en el caso en que todos los elementos de $\mathcal{J}$ son cerrados; de otro modo, reemplazamos cada intervalo por su cerradura (recordemos que la frontera de cada uno de los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_N$ tiene medida cero).

Sea A un conjunto de medida finita tal que $E \subset A$. Como $\mathcal{J}$ es una cubierta de Vitali de E, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada elemento de $\mathcal{J}$ está contenido en A. Escojamos $\{I_n\}$ una colección disjunta de elementos de $\mathcal{J}$ de la siguiente manera: sea $I_1 \in \mathcal{J}$ arbitrario y supongamos que hemos escogido $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Sea k_n el supremo de las longitudes de los intervalos de $\mathcal{J}$ que no intersectan a $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Como cada $I \in \mathcal{J}$ está contenido en A, se tiene que $k_n \leq m(A) < \infty$. A menos que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, podemos encontrar $I_{n+1} \in \mathcal{J}$ de manera que $|I_{n+1}| > k_n/2$ y $I_{n+1} \cap I_i = \phi$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Así, hemos construido una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos disjuntos contenidos en $\mathcal{J}$; como $\bigcup I_n \subset A$, tenemos que $\sum |I_n| \leq m(A) < \infty$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{N+1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon/5$

Sea $R = E - \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. Si demostramos que $m^*(R) < \varepsilon$ habremos terminado.

Sea $x \in R$ arbitrario, como $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ es un conjunto cerrado que no contiene a x, podemos encontrar $I \in \mathcal{J}$ tal que $x \in I$ y con longitud suficientemente pequeña para que no intercecte a $I_1, I_2, \ldots, I_N$. Si además tenemos que $I \cap I_i = \phi$ para $i \leq n$, entonces $|I| \leq k_n < 2|I_{n+1}|$. Como $\lim |I_n| = 0$, I debe intersectar a algún I_n. Sea n el menor entero tal que $I \cap I_n \neq \phi \Rightarrow n > N$ y $|I| \leq k_{n-1} < 2|I_n|$. Como $x \in I$ y $I \cap I_n \neq \phi$, la distancia de x al punto medio de I_n es a lo más $|I| + |I_n|/2 \leq \frac{5}{2}|I_n|$. Así, $x \in J_n$, donde J_n es el intervalo concéntrico a I_n tal que $|J_n| = 5|I_n| \Rightarrow R < \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$

$\therefore$ $m^*(R) \leq \sum_{N+1}^{\infty} |J_n| = 5 \sum_{N+1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$. $\square$

<u>Corolario 2.23:</u> Sea E un conjunto con medida exterior finita y sea $\mathcal{J}$ una cubierta de Vitali de E. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una colección $\{I_i\}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{J}$ tal que $m^*(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$.

Dem: Por el lema de Vitali, dado $\varepsilon_1 = 1$ existe $\mathcal{J}_1 = \{I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \ldots, I_{n(1)}^{(1)}\}$ disjunta tal que $m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n(1)} I_i^{(1)}) < 1$. Sea $E_1 = E - \bigcup_{i=1}^{n(1)} I_i^{(1)} \Rightarrow m^*(E_1) < 1$.

Aplicando nuevamente el lema de Vitali, dado $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ existe una colección disjunta de intervalos $\mathcal{J}_2 = \{I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \ldots, I_{n(2)}^{(2)}\}$ tal que $m^*(E_1 - \bigcup_{i=1}^{n(2)} I_i^{(2)}) < 1/2$ y $I_i^{(1)} \cap I_j^{(2)} = \emptyset \ \forall i, \forall j$. Esto lo podemos hacer mediante el siguiente procedimiento: escojamos $I_1^{(2)}$ arbitrario ajeno a todo elemento de $\mathcal{J}_1$. Supongamos que hemos escogido $I_1^{(2)}, \ldots, I_n^{(2)}$ y sea $d_1 = \sup\{|I| : I \in \mathcal{J}, I \cap I_j^{(2)} = \emptyset \text{ si } j < n. I \cap I_k^{(1)} = \emptyset \ \forall k = 1, 2, \ldots, n(1)\}$

Entonces, por ser $\mathcal{J}$ una cubierta de Vitali, a menos que $E \subset [(\bigcup_{i=1}^{n(1)} I_i^{(1)}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} I_i^{(2)})]$ (en cuyo caso habríamos terminado), siempre podemos encontrar $I_{n+1}^{(2)} \in \mathcal{J}$ tal que $|I_{n+1}^{(2)}| > d_n/2$ y $I_{n+1}^{(2)} \cap I_i^{(1)} = \emptyset$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n(1)$.

Así, definimos inductivamente las colecciones $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_k$. $\{\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{J}_i\}$ es nuevamente una colección disjunta de elementos de $\mathcal{J}$, $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{J}_i = \{I_j^{(k)}\}_{j=1,2,\ldots,n(k)}^{k=1,2,\ldots} \Rightarrow m^*(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) \leq m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n(k)} I_i^{(k)}) < 1/k$, esto es para toda k $\therefore m^*(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$. $\square$

Para facilitar la exposición, hemos demostrado el lema de Vitali (así como el corolario 2.23) para el caso unidimensional, sin embargo, se pueden reemplazar algunas cosas para hacer esta prueba válida en $\mathbb{R}^d$. [7]

Daremos una última definición antes de llegar al Teorema de Lebesgue (nuevamente nos limitaremos al caso unidimensional):

<u>Definición 2.24:</u> Un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ se dice que tiene <u>densidad d en x</u> si $\lim_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x-h, x+h])}{2h}$ existe y es igual a d.

<u>Definición 2.25:</u> $\varphi(E) = \{x \in \mathbb{R} : E \text{ tiene densidad } 1 \text{ en } x\}$.

El teorema de Lebesgue nos dice que $\varphi(E)$ es un conjunto medible y que difiere de E por un conjunto de medida cero. Esto quiere decir que si E es un conjunto medible todo punto de E tiene densidad 1 excepto un conjunto de medida cero, y en todo punto de $\mathbb{R} - E$ (excepto un conjunto de medida cero) tiene densidad cero. Haremos la demostración basandonos en el lema de Vitali.

Teorema 2.26: (Teorema de densidad de Lebesgue) Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible, entonces $m(E \triangle \varphi(E)) = 0$.

Dem: Basta probar que $E - \varphi(E)$ es nulo, ya que $\mathbb{R} - E$ es medible y $\varphi(E) - E \subset (\mathbb{R}-E) - (\mathbb{R} - \varphi(E)) \subset (\mathbb{R}-E) - \varphi(\mathbb{R}-E)$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que E es acotado. Claramente $E - \varphi(E) = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$, donde

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in E : \liminf_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1 - \varepsilon \right\}$$

Como $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ si $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, basta demostrar que A_ε tiene medida cero $\forall \varepsilon > 0$. Denotemos $A = A_\varepsilon$ y supongamos que $m^*(A) > 0$, entonces existe G abierto y acotado tal que $A \subset G$ y $m(G) < m^*(A)/_{1-\varepsilon}$.

Sea $\mathcal{E}$ la clase de los intervalos cerrados I tales que $I \subset G$ y $m(E \cap I) \leq (1-\varepsilon)|I|$. Observemos que:

1) $\mathcal{E}$ contiene intervalos arbitrariamente pequeños centrados en cada punto de A (por la definición de A).

2) Para toda colección disjunta $\{I_n\}$ de elementos de $\mathcal{E}$ tenemos que $m^*(A - \cup I_n) > 0$. Esta propiedad es consecuencia del siguiente hecho: $m^*(A \cap \cup I_n) \leq \sum m(E \cap I_n) \leq (1-\varepsilon) \sum |I_n| \leq (1-\varepsilon) m(G) < m^*(A)$

$\therefore m^*(A \cap \cup I_n) < m^*(A) \Rightarrow m^*(A - \cup I_n) > 0$.

La propiedad 1) nos dice que $\mathcal{E}$ cubre a A en el sentido de Vitali, por lo tanto debe cumplir con el corolario 2.23, pero la propiedad 2) nos dice lo contrario ¡! $\Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow m(E - \varphi(E)) = 0$. □

Es claro que modificaciones menores en la prueba demuestran la versión d-dimensional del Teorema de densidad de Lebesgue.

Para una prueba elemental del Teorema de densidad en dimensión uno sin usar argumentos con cubiertas de Vitali, ver [ ]

Es importante observar que si $E \subset \mathbb{R}$ es cerrado, entonces $\varphi(E) \subset E$.

Definamos la siguiente relación de equivalencia en S, la clase de los conjuntos medibles: diremos que $A \sim B$ si $m(A \triangle B) = 0$. El siguiente teorema nos dice que podemos ver a la función $\varphi: S \to S$ como una función de selección (es decir, que selecciona un miembro de cada clase de equivalencia); mas aún, lo hace de manera que los conjuntos seleccionados forman una clase cerrada bajo intersecciones que incluye al conjunto vacío y al total.

Teorema 2.27: Sea A un conjunto medible, entonces:

i) $\varphi(A) \sim A$

ii) $A \sim B \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$.

iii) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

iv) $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$

v) $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$

Dem: i) no es otra cosa que el teorema de Lebesgue; ii) y iii) son consecuencias inmediatas de la definición de φ.

Probaremos (v): $\forall$ intervalo I se tiene que $I-(A\cap B) = (I-U)\cup(I-B)$ $\Rightarrow m(I) - m(I\cap A\cap B) \leq m(I) - m(I\cap A) + m(I) - m(I\cap B)$ (ya que $I-A = I-(I\cap A)$) $\therefore \dfrac{m(I\cap A)}{|I|} + \dfrac{m(I\cap B)}{|I|} - \dfrac{|I|}{|I|} \leq \dfrac{m(I\cap A\cap B)}{|I|}$

Tomando $I = [x-h, x+h]$ y haciendo $h \to 0$ se sigue que $\phi(A) \cap \varphi(B) \subset \varphi(A\cap B)$; la otra inclusión es trivial.

v) $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A \Rightarrow \varphi(A)\cap\varphi(B) = \varphi(A) \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$. $\square$

Hasta aquí llegamos con la propiedades de densidad, por ahora (regresaremos a ellas en el capítulo 11). Empezaremos a estudiar la propiedad de Baire con la siguiente:

Definición 2.28: Sea (X, τ) un espacio topológico fijo. Un conjunto $A \subset X$ se dice que tiene la propiedad de Baire si lo podemos escribir de la forma $A = G \Delta P$, donde G es abierto y P es de primera categoría. A un conjunto que tiene dicha propiedad también lo llamaremos de tipo Baire.

Otra posible definición nos la da el siguiente:

Teorema 2.29: Un conjunto A tiene la propiedad de Baire si y solo si se puede representar como $A = F \Delta Q$, donde F es cerrado y Q es de primera categoría.

Dem: Supongamos que A tiene la propiedad de Baire, entonces $A = G\Delta P$, donde G es abierto y P es de primera categoría $\Rightarrow$ $N = \bar{G} - G$ es un cerrado denso en ninguna parte $\Rightarrow Q = N \Delta P$ es de primera categoría. Sea $F = \bar{G}$, entonces

$$A = G\Delta P = (\bar{G}\Delta N)\Delta P = \bar{G}\Delta(N\Delta P) = F\Delta Q$$

Inversamente, si $A = F\Delta Q$ donde F es cerrado y Q es de primera categoría, sea $G = \mathrm{Int}(F)$. Entonces $N = F - G$ es denso

Dem:- Como la cerradura de un conjunto denso en ninguna parte es nuevamente un conjunto denso en ninguna parte, se tiene que todo conjunto de primera categoría está contenido en un F_σ de primera categoría.

Si G es abierto y P es de primera categoría, sea Q un F_σ de primera categoría que contiene a P. Entonces $E=G-Q$ es un G_δ, y como $P\subset Q \Rightarrow P=P\cap Q$.

Tenemos que $G=(G-Q)\Delta(G\cap Q)$, ya que $(G-Q)\Delta(G\Delta Q)=$ $=((G-Q)\cup G\cap Q))-((G-Q)\cap(G\cap Q))$, pero $(G-Q)\cup(G\cap Q)=G$ y $(G-Q)\cap(G\cap Q)=\emptyset$.

Entonces
$$G\Delta P=[(G-Q)\Delta(G\cap Q)]\Delta(P\cap Q)$$
$$=E\Delta[(G\Delta P)\cap Q]$$

El conjunto $(G\Delta P)\cap Q$ es de primera categoría y es ajeno a E. Por lo tanto, todo conjunto que tiene la propiedad de Baire se puede representar como la unión disjunta de un G_δ y un conjunto de primera categoría.

Inversamente, todo conjunto que se puede representar de tal manera está en la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos y los de primera categoría y por lo tanto tiene la propiedad de Baire.

La afirmación del paréntesis se sigue por complementación (con ayuda del teorema 2.30): si $A=G\Delta P \Rightarrow X-A=X-(G\Delta P)=(X-G)\Delta P$ entonces $X-A$ tiene la propiedad de Baire, $X-G$ es cerrado y P es de primera categoría. □

Examinaremos brevemente otro tipo de conjuntos (de hecho solo veremos dos de sus propiedades), sin embargo, en el capítulo 11 los necesitaremos para estudiar en $\mathbb{R}$ una topología τ y una medida μ sobre $\sigma(\tau)$ en donde los conceptos de μ-medida cero y τ-primera categoría son equivalentes. Por ahora veremos como se relacionan con los conjuntos de tipo Baire, recordemos la siguiente:

<u>Definición 2.33</u>:- Un conjunto se dice que es <u>regular</u> si es igual al interior de su cerradura.

Dem: Como la cerradura de un conjunto denso en ninguna parte es nuevamente un conjunto denso en ninguna parte, se tiene que todo conjunto de primera categoría está contenido en un F_σ de primera categoría.

Si G es abierto y P es de primera categoría, sea Q un F_σ de primera categoría que contiene a P. Entonces $E = G - Q$ es un G_δ, y como $P \subset Q \Rightarrow P = P \cap Q$.

Tenemos que $G = (G-Q) \Delta (G \cap Q)$, ya que $(G-Q)\Delta(G\Delta Q) = ((G-Q)\cup G\cap Q)) - ((G-Q)\cap(G\cap Q))$, pero $(G-Q)\cup(G\cap Q) = G$ y $(G-Q)\cap(G\cap Q) = \emptyset$.

Entonces $G\Delta P = [(G-Q)\Delta(G\cap Q)]\Delta(P\cap Q)$
$$= E \Delta [(G\Delta P)\cap Q]$$
El conjunto $(G\Delta P)\cap Q$ es de primera categoría y es ajeno a E. Por lo tanto, todo conjunto que tiene la propiedad de Baire se puede representar como la unión disjunta de un G_δ y un conjunto de primera categoría.

Inversamente, todo conjunto que se puede representar de tal manera está en la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos y los de primera categoría y por lo tanto tiene la propiedad de Baire.

La afirmación del paréntesis se sigue por complementación (con ayuda del teorema 2.30): si $A = G\Delta P \Rightarrow X - A = X - (G\Delta P) = (X - G)\Delta P$ entonces $X - A$ tiene la propiedad de Baire, $X - G$ es cerrado y P es de primera categoría. □

Examinaremos brevemente otro tipo de conjuntos (de hecho solo veremos dos de sus propiedades), sin embargo, en el capítulo 11 los necesitaremos para estudiar en $\mathbb{R}$ una topología τ y una medida μ sobre $\sigma(\tau)$ en donde los conceptos de μ-medida cero y τ-primera categoría son equivalentes. Por ahora veremos como se relacionan con los conjuntos de tipo Baire, recordemos la siguiente:

<u>Definición 2.33</u>: Un conjunto se dice que es <u>regular</u> si es igual al interior de su cerradura.

en ninguna parte, $P = N \Delta Q$ es de primera categoría, y

$A = F \Delta Q = (G \Delta N) \Delta Q = G \Delta (N \Delta Q) = G \Delta P$. $\square$

El siguiente resultado es la primera de las analogías que encontraremos entre conjuntos medibles y conjuntos de tipo Baire:

Teorema 2.30: Si A es de tipo Baire, tambien lo es su complemento.

Dem: Si $A = G \Delta P$, es inmediato verificar que $X - A = (X - G) \Delta P$, evidentemente $X - G$ es cerrado y P es de primera categoría. $\square$

El siguiente teorema es análogo al teorema 2.18, con los conjuntos de primera categoría jugando el papel de los de medida cero:

Teorema 2.31: La clase de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire forma una σ-álgebra; es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos junto con los de primera categoría. (En particular contiene a la σ-álgebra de los Borelianos).

Dem: Sea $\{A_i\}$ una colección arbitraria de conjuntos con la propiedad de Baire ($A_i = G_i \Delta P_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots$ con cada G_i abierto y cada P_i de primera categoría). Sean $G = \cup G_i$, $P = \cup P_i$ y $A = \cup A_i$. Entonces G es abierto, P es de primera categoría y $G - P \subset A \subset G \cup P \Rightarrow G \Delta A \subset P \Rightarrow G \Delta A$ es de primera categoría y $A = (G \Delta A) \Delta G$ tiene la propiedad de Baire. Este resultado, junto con el teorema anterior, muestra que la clase de los conjuntos de tipo Baire es una σ-álgebra. Es evidente que es la mas pequeña que contiene a los conjuntos abiertos y a los conjuntos de primera categoría. $\square$

El siguiente resultado es muy parecido al teorema 2.17 para conjuntos medibles. Aunque no llegan a ser análogos, hay una relación muy interesante entre los conjuntos G_δ y los F_σ en ambos teoremas:

Teorema 2.32: Un conjunto tiene la propiedad de Baire si y solo si se puede representar como un G_δ unión un conjunto de primera categoría (o como un F_σ menos un conjunto de primera categoría).

La siguiente proposición es una definición alternativa:

Proposición 2.34: Un conjunto $H \subset \mathfrak{X}$ es regular si y solo si $H = H^{-c-c}$ (aquí $H^c = \mathfrak{X} - H$).

Dem: $\Rightarrow$) Si $H = \bar{H}^\circ$ entonces $H = \mathfrak{X} - (\mathfrak{X} - H) = \mathfrak{X} - (\mathfrak{X} - \bar{H}^\circ) = \mathfrak{X} - \overline{(\mathfrak{X} - \bar{H})} = H^{-c-c}$

$\Leftarrow$) Es inmediato comprobar que $H^{-c-c} = \bar{H}^\circ \therefore H = \bar{H}^\circ$. $\square$

Observación: todo conjunto de la forma H^{-c-c} es regular.

Teorema 2.35: Todo conjunto abierto H es de la forma $H = G - \bar{N}$, donde G es regular y N es denso en ninguna parte.

Dem.- Sea $G = H^{-c-c}$ y $N = G - H$, entonces G es regular, $H = G - N$ y N es denso en ninguna parte (ya que H es abierto y $N = G - H = (H^{-c-c}) - H = \bar{H}^\circ - H$), además tenemos que $\bar{N} \subset \bar{G} - H$. Entonces $G - \bar{N} \supset G - (\bar{G} - H) = G \cap H = H = G - N \supset G - \bar{N} \Rightarrow H = G - \bar{N}$. $\square$

Teorema 2.36: Todo conjunto de tipo Baire se puede representar en la forma $A = G \Delta P$, donde G es regular y P es de primera categoría. Esta representación es única en cualquier espacio en donde todo abierto no vacío es de segunda categoría. (A un espacio con tal propiedad se le llama un espacio de Baire).

Dem: La existencia de tal representación se sigue del teorema anterior; ya que siempre podemos reemplazar al conjunto abierto de la representación original por el interior de su cerradura. En efecto, supongamos que $A = G \Delta P$, con G abierto y P de primera categoría; entonces $G = H - \bar{N}$ y por lo tanto $A = G \Delta P = (H - \bar{N}) \Delta P = H \Delta (\bar{N} - P)$, donde H es regular.

Para probar la unicidad, supongamos que $A = G \Delta P = H \Delta Q$, donde G es regular, H es abierto y tanto P como Q son de primera categoría. Entonces $H - \bar{G} \subset H - G \Rightarrow H - \bar{G} \subset (H - G) \cup (G - H) = G \Delta H = P \Delta Q \Rightarrow H - \bar{G}$ es un abierto de primera categoría $\Rightarrow H - \bar{G} = \emptyset$. Tenemos además que $H \subset \bar{G} \therefore H \subset G^{-c-c} = G$. Así, en la representación regular el abierto G es maximal; si G y H son ambos regulares, cada uno contiene al otro $\Rightarrow G = H$, $P = Q$. $\square$

Los teoremas y definiciones anteriores son válidos en cualquier espacio topológico (en particular en espacios euclidianos de dimensión arbitraria). Hemos hecho notar varias analogías entre la clase de los conjuntos medibles y la clase de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire; sin embargo, es importante notar que el teorema 2.29 no tiene análogo para conjuntos medibles (lo mas que podemos decir es que un conjunto medible difiere de un abierto, o de un cerrado, por un conjunto arbitrariamente pequeño en el sentido de medida).

Los siguientes resultados son nuevamente análogos. Denotemos por $x+A$ al conjunto A trasladado por x (estamos suponiendo que estamos en un espacio de dimensión 1):

Teorema 2.37: Para todo conjunto A de tipo Baire y de segunda categoría existe $\delta>0$ tal que $(x+A)\cap A$ contiene un conjunto de segunda categoría, siempre que $|x|<\delta$.

Dem: Sea $A=G\Delta P$, con G abierto y P de primera categoría $\Rightarrow G\neq\emptyset \Rightarrow G$ contiene un intervalo I.

$\forall x$ se tiene que $(x+A)\cap A\supset[(x+I)\cap I]-[P\cup(x+P)]$, ya que $A=G\Delta P \Rightarrow x+A=(x+G)\Delta(x+P) \Rightarrow (x+A)\cap A=((x+G)\cap G)\Delta((x+P)\cap P)$

$$\begin{aligned}&\supset((x+I)\cap I)\Delta((x+P)\cap P)\\&\supset((x+I)\cap I)-((x+P)\cap P)\\&\supset((x+I)\cap I)-(P\cup(x+P))\end{aligned}$$

Si $|x|<|I|$, $[(x+I)\cap I]-[P\cup(x+P)]$ es un intervalo menos un conjunto de primera categoría (es decir, es un conjunto de segunda categoría en sí mismo) y por lo tanto es no vacío. Entonces podemos tomar $\delta=|I|$ y se obtiene el resultado. □

Teorema 2.38: (Steinhauss) Si $A\subset\mathbb{R}$ es medible, con $m(A)>0$ entonces la función $f(x)=m((x+A)\cap A)$ es continua.

Dem: 1) Sean $I=(a,b)$ y $J=(c,d)$ dos intervalos arbitrarios, entonces es claro que la función $f_{I,J}(x)=m((I+x)\cap J)$ es continua.

2) Si A es unión disjunta finita de intervalos:

$A=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$, entonces $f_A(x)=m((A+x)\cap A)$

$$=m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}(I_i+x)\right)\cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right)$$
$$=m\left(\bigcup_i\bigcup_j((I_i+x)\cap I_j)\right)$$
$$=\sum_{i,j} f_{I_i,I_j}$$

entonces f_A es una suma finita de funciones continuas (por el caso 1) y por lo tanto es continua.

3) Supongamos que A es medible, con $m(A)>0$, entonces dado $\varepsilon>0$ podemos encontrar una unión finita disjunta de intervalos abiertos $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ que depende de ε ∋· $m(A\,\Delta \bigcup_{i=1}^{n} I_i)<\varepsilon$, entonces, si $|x-y|<\delta$ se tiene que

$$|f_A(x)-f_A(y)|\leq |f_A(x)-f_{\cup I}(x)|+|f_{\cup I}(x)-f_{\cup I}(y)|+|f_{\cup I}(y)-f_A(y)|$$
$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

El primero y el tercer sumando son menores que $\varepsilon/3$ por el caso 2. El segundo sumando lo es por la continuidad de la función $f_{\cup I}$ ∴ f_A es continua. □

Corolario 2.39.- Si A es medible, con $m(A)>0 \Rightarrow (x+A)\cap A$ tiene medida positiva, si $|x|<\delta$, para alguna $\delta>0$.

Dem: Como $f(0)=m(A)>0$ y f es continua $\Rightarrow \exists\, \delta>0$ ∋· $f(x)>0$, $\forall x$ ∋· $|x|<\delta$ ∴ $(x+A)\cap A$ tiene medida positiva, si $|x|<\delta$. □

3.

En los capítulos anteriores hemos estado hablando de los conjuntos medibles y de algunas de sus propiedades, sin preguntarnos si todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son medibles; o si todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ tienen la propiedad de Baire.

Hasta ahora, sabemos que cualquier conjunto que se obtenga como resultado de aplicar las operaciones de unión, intersección y complementación un número contable de veces, partiendo de una familia de conjuntos abiertos, cerrados o de medida cero, será medible. (Lo mismo pasa para conjuntos que tienen la propiedad de Baire, al sustituir los conjuntos de medida cero por conjuntos de primera categoría).

En 1905, con ayuda del axioma de elección, G. Vitali demostró por primera vez la existencia de conjuntos no-medibles, de la siguiente manera:

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales considerados como subgrupo del grupo aditivo de los números reales. Las clases laterales de $\mathbb{Q}$ constituyen una partición de $\mathbb{R}$ en una familia no numerable de conjuntos disjuntos, cada uno congruente a $\mathbb{Q}$ bajo traslación. Por el axioma de elección, existe un conjunto V que tiene uno y solo un elemento en común con cada una de estas clases; llamémosle a V un conjunto de Vitali. La familia numerable de conjuntos de la forma $q+V$ $(q \in \mathbb{Q})$ cubre a $\mathbb{R}$, por σ-subaditividad y la invariancia de la medida bajo traslaciones, V no tiene medida cero. (De otro modo, $\mathbb{R}$ tendría medida cero). Por el corolario al Teorema de Steinhauss, si V es medible existe $\delta > 0$ tal que $(x+V) \cap V \neq \emptyset$, si $|x| < \delta$. Pero si $x \notin \mathbb{Q}$ y $x \neq 0 \Rightarrow (x+V) \cap V = \emptyset$ ∇, por lo tanto V no es medible.

Un razonamiento idéntico muestra que ningún conjunto de Vitali tiene la propiedad de Baire: V no puede ser de primera categoría, ya que los conjuntos $q+V$ cubren a $\mathbb{R}$. Entonces, igual que en el caso anterior, el corolario al teorema de Steinhauss implica que V no tiene la propiedad de Baire.

Como vimos en el primer capítulo, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ se puede representar como la unión disjunta de un conjunto de medida cero y un conjunto de primera categoría; apliquemos este resultado a un conjunto de Vitali V. Sea entonces $V = A \cup B$, donde A es de primera categoría y $m(B)=0 \Rightarrow A$ es no medible, pero tiene la propiedad de Baire; mientras que B es medible pero no es de tipo Baire. Es decir, hemos probado que <u>ninguna de estas dos clases contiene a la otra</u>; aunque, como ya sabemos, ambas σ-algebras contienen a los conjuntos de Borel.

Daremos a continuación otra construcción de un conjunto no medible, que nos facilitará el camino para llegar a un resultado muy interesante debido a H. Rademacher [ ] que dice que todo conjunto con medida exterior positiva contiene un conjunto no medible (naturalmente, daremos también el análogo para categoría, de hecho es parte del mismo teorema).

La construcción se debe a F. Bernstein (1908) y hace uso del siguiente par de lemas:

<u>Lema 3.1:</u> Todo conjunto G_δ no numerable contenido en $\mathbb{R}$ contiene un subconjunto cerrado C tal que C es denso en ninguna parte, tiene medida cero y se puede mapear continuamente sobre $[0,1]$.

Dem.: Sea $E = \cap G_n$, G_n abierto para toda n, un G_δ no numerable. Sea $F = \{x \in E : x \text{ es punto de condensación de } E\}$, entonces $F \neq \emptyset$, ya que si $F = \emptyset \Rightarrow \forall x \in E\ \exists V_x$ vecindad de x tal que $V_x \cap E$ es numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $V_x \in \mathcal{B}$.

Claramente $E = \cup\{V_x \cap E : x \in E\}$ $\therefore$ E es numerable $\Downarrow$ $\Rightarrow$ $F \neq \emptyset$.

Por otro lado, F no tiene puntos aislados: sea $C = E \cap F'$ y sean $x \in F$ y V_x vecindad de x $\therefore$ $V_x \cap E$ es no numerable y $V_x \cap C$ es numerable $\Rightarrow$ $V_x \cap F = (V_x \cap E) \cap (V_x \cap C)'$ es no numerable $\Rightarrow$ x es punto límite de F, con lo cual hemos demostrado que F no tiene puntos aislados.

En consecuencia, es posible hallar dos intervalos cerrados disjuntos $I(0), I(1)$ con longitud menor que $1/3$ y tales que sus interiores intersectan a F y su unión esta contenida en G_1.

Procediendo inductivamente, si 2^n intervalos cerrados $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ($i_k = 1$ o 0) cuyos interiores intersectan a F y su unión está contenida en G_n han sido escogidos; sean $I(i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1})$ ($i_{n+1} = 1$ o 0) intervalos cerrados ajenos con longitud menor que $1/3^{n+1}$ contenidos en $G_{n+1} \cap I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ cuyos interiores intersectan a F. (El hecho de que F no tenga puntos aislados y que $E \subset G_{n+1}$ garantiza la existencia de dichos intervalos). Así, una familia de intervalos $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ con tales propiedades puede definirse.

Sea $C = \bigcap\limits_{n} \bigcup\limits_{i_1,\ldots,i_n} I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. C es cerrado, por ser intersección de cerrados; C es denso en ninguna parte, ya que no contiene ningún intervalo de longitud mayor que $1/3^n$, $\forall n$. C tiene medida cero, porque la suma de las longitudes de los intervalos que componen a $\cup I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ es menor o igual que $(\frac{2}{3})^n$, para toda n. Entonces C es homeomorfo al conjunto de Cantor. [8]

Por otro lado, $\forall x \in C$ existe una única sucesión $\{i_n\}$ con $i_n = 0$ o 1 $\cdot\tau\cdot$ $x \in I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ $\forall n$ y para toda sucesión de este tipo corresponde un punto de C; sea $f(x)$ el número real con expresión binaria $.i_1 i_2 \ldots$, entonces $f: C \to [0,1]$ es suprayectiva $\therefore$ C tiene cardinalidad c. f es continua porque $|f(x) - f(x')| \leq 1/2^n$ si $x, x' \in C \cap I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. $\square$

Lema 3.2: La clase de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cerrados no numerables tiene cardinalidad c.

Dem: A lo mas hay c conjuntos cerrados, ya que la clase de los intervalos abiertos con extremos racionales es numerable y todo abierto se puede escribir como la unión numerable de elementos de esta clase; por lo tanto a lo mas hay c conjuntos abiertos, y por complementación se obtiene el resultado.

Por otro lado, como hay c intervalos cerrados, por lo menos hay c conjuntos cerrados no numerables. □

Ahora si estamos listos para demostrar el Teorema de Bernstein, nuevamente con ayuda del axioma de elección:

Teorema 3.3: Existe un conjunto B de números reales ∋ B y $\mathbb{R}-B$ intersectan a todo cerrado no numerable en $\mathbb{R}$.

Dem: Por el lema anterior y por el principio del buen orden, la clase $\mathcal{F}$ de los subconjuntos cerrados no numerables de $\mathbb{R}$ se puede indexar por los ordinales menores que ω_c, donde ω_c es el primer ordinal que tiene c predecesores; digamos $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha<\omega_c\}$. Podemos suponer que $\mathbb{R}$ está bien ordenado (por lo tanto también $\mathcal{F}$ está bien ordenado). Por el lema 3.1, $\mathcal{F}$ tiene cardinalidad c, ya que todo cerrado es un G_δ.

Sean p_1, q_1 los dos primeros elementos de F_1, Sean p_2, q_2 los dos primeros elementos de F_2 distintos de p_1, q_1. Procediendo inductivamente, si $1<\alpha<\omega_c$ y p_β, q_β han sido definidos $\forall \beta<\alpha$, sean p_α, q_α los dos primeros elementos de $F_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha}\{p_\beta, q_\beta\}$. Este conjunto es distinto del vacío, de hecho tiene cardinalidad c para cada α; así que p_α, q_α se pueden definir $\forall \alpha<\omega_c$.

Sea $B=\{p_\alpha : \alpha<\omega_c\}$. Como $p_\alpha \in B\cap F_\alpha$ y $q_\alpha \in (\mathbb{R}-B)\cap F_\alpha$ $\forall \alpha<\omega_c$, tanto B como $\mathbb{R}-B$ intersectan a todo cerrado no numerable. □

Definición 3.4: A un conjunto con la propiedad de que tanto él como su complemento intersectan a todo conjunto cerrado no numerable se le llama un conjunto de Bernstein.

Es natural ahora preguntarse si un conjunto de Bernstein es medible o si tiene la propiedad de Baire; la respuesta a las dos preguntas está dada por el siguiente:

<u>Teorema 3.5:</u> Sea B un conjunto de Bernstein. Todo subconjunto medible de B o de $\mathbb{R}-B$ tiene medida cero; y todo subconjunto de B o de $\mathbb{R}-B$ que tiene la propiedad de Baire es de primera categoría.

Dem:- Sea A un subconjunto medible de B. Sea $F \subset A$ cerrado, entonces F es numerable (de otro modo intersectaría a B), $\Rightarrow F$ tiene medida cero $\therefore$ por el teorema 2.20 (la propiedad de regularidad) A tiene medida cero.

Si $A \subset B$ tiene la propiedad de Baire $\Rightarrow A = E \cup P$, donde E es un G_δ y P es de primera categoría. E es numerable, ya que todo G_δ no numerable contiene un cerrado no numerable (Lema 3.1) y por lo tanto intersecta a $\mathbb{R}-B \Rightarrow A$ es de primera categoría. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior; la parte correspondiente a medida fué probada por primera vez en 1916 por H. Rademacher, aunque por un método distinto:

<u>Teorema 3.6:</u> Todo conjunto con medida exterior positiva tiene un subconjunto no medible. Todo conjunto de segunda categoría tiene un subconjunto que no tiene la propiedad de Baire.

Dem:- Si A tiene medida exterior positiva y B es un conjunto de Bernstein, por el teorema anterior, los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap (\mathbb{R}-B)$ no pueden ambos ser medibles; si A es de segunda categoría, no pueden estos dos conjuntos tener la propiedad de Baire. $\square$

Finalmente, examinemos la cardinalidad de la familia de subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$, así como la de los subconjuntos que no tienen la propiedad de Baire:

Sea $A \subset (0,1)$ un conjunto no medible (respectivamente sin la propiedad de Baire) y denotemos por $C \subset [0,1]$ el conjunto ternario clásico de Cantor. Para cada $D \subset C$ consideremos el conjunto $D \cup A$; claramente $D \cup A$ es no medible, pues si lo fuera, $A = (A \cup D) - D$ lo sería (resp. $D \cup A$ no tiene la propiedad de Baire, pues si la tuviera, dado que D sí la cumple por ser denso en ninguna parte $\Rightarrow$ $A = (A \cup D) - D$ tiene la propiedad de Baire) $\therefore$ hay 2^c subconjuntos de $\mathbb{R}$ no medibles (y hay 2^c subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no cumplen con la propiedad de Baire).

4.

A lo largo de este capítulo nos olvidaremos de los conjuntos medibles para obtener algunas propiedades de los conjuntos de primera categoría. Para hacerlo utilizaremos un juego inventado por el matemático S. Mazur en 1928; y cuyas reglas son las siguientes:

Sea I_0 un intervalo cerrado arbitrario, al jugador (A) se le asigna un subconjunto arbitrario A de I_0; el complemento $B = I_0 - A$ se le asigna al jugador (B). El juego $\langle A, B\rangle$ se juega de la siguiente manera: (A) escoge un intervalo cerrado arbitrario $I_1 \subset I_0$, despues (B) escoge un intervalo cerrado $I_2 \subset I_1$, en seguida (A) escoge un intervalo cerrado $I_3 \subset I_2$, y así sucesivamente. Juntos, los jugadores determinan una sucesión anidada de intervalos cerrados I_n, donde A ha escogido los de índice impar y B los de índice par. Si el conjunto $\bigcap I_n$ tiene al menos un punto en común con A, (A) gana; de otro modo, (B) gana.

La pregunta que ahora se plantea es cuando puede uno de los jugadores, escogiendo adecuadamente sus intervalos, asegurar su triunfo sin importar como juege su rival. Observando la prueba del Teorema de Categoría de Baire, es inmediato darse cuenta que en el caso de que A sea de primera categoría, hay una estrategia simple que asegura el triunfo de (B); pues si $A = \bigcup A_n$, A_n denso en ninguna parte, (B) solamente tiene que escoger $I_{2n} \subset I_{2n-1} - A_n$, para cada n. Entonces, no importa como juege (A), (B) ganará. Mazur conjeturó que solamente en este caso puede el segundo jugador estar seguro que ganará; Banach probó esta conjetura [3].

Para decir precisamente que significa para uno de los jugadores estar seguro de ganar, necesitamos aclarar que entendemos por una estrategia.

Una estrategia para un jugador es una regla que especifica que "jugada" hará en cada posible situación. En su n-ésima jugada, (B) sabe que intervalos $I_0, I_1, \ldots, I_{2n-1}$ han sido escogidos, y conoce los conjuntos A y B, pero eso es todo. De esta información, su estrategia le debe decir que intervalo I_{2n} escoger. Así, una estrategia para (B) es una sucesión de funciones $f_n(I_0, I_1, \ldots, I_{2n-1})$ con valores en los intervalos cerrados. Las reglas del "juego" piden que:

$$f_n(I_0, I_1, \ldots, I_{2n-1}) \subset I_{2n-1} \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (1)$$

La función f_n debe estar definida al menos para todos los intervalos que satisfacen las condiciones:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{2n-1} \qquad (2)$$

$$I_{2i} = f_i(I_0, I_1, \ldots, I_{2i-1}) \quad (i=1,2,\ldots,n-1) \qquad (3)$$

Para que esta sea una estrategia ganadora para (B) es necesario y suficiente que $\cap I_n \subset B$ para toda sucesión $\{I_n\}$ que satisfaga (2) y (3) para toda n.

El siguiente teorema nos da otra idea de que tan pequeño es un conjunto de primera categoría:

Teorema 4.1: Existe una estrategia mediante la cual (B) puede estar seguro de ganar si y solo si A es de primera categoría.

Dem: Sea $f_1, f_2, \ldots$ una estrategia ganadora para (B). Dada f_1, es posible definir una sucesión de intervalos cerrados $J_i\ (i \in \mathbb{N})$ contenidos en I_0° tales que:

i) los intervalos $K_i = f_1(I_0, J_i)$ son disjuntos

ii) la unión de sus interiores es densa en I_0.

Una manera de hacerlo es la siguiente: sea S una sucesión compuesta por todos los intervalos cerrados que tienen extremos racionales y están contenidos en I_0°. Sea J_1 el primer término de S. Sea J_2 el primer término de S contenido en $I_0 - K_1$. Habiendo definido $J_1, J_2, \ldots, J_i$, sea J_{i+1} el primer término de S contenido en $I_0 - K_1 - K_2 - \cdots - K_i$. Por la condición (1), se tiene que los intervalos K_i son disjuntos; por la construcción es fácil ver que la unión de los J_i es densa en I_0, por lo que esta construcción define inductivamente una sucesión $\{J_i\}$ con las propiedades requeridas.

De la misma manera, para cada i, sea $\{J_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}}$, una sucesión de intervalos cerrados contenidos en K_i° tal que los intervalos $K_{ij}= f_2(I_0, J_i, K_i, J_{ij})$ son disjuntos y la unión de sus interiores es densa en K_i; entonces, la unión de todos los K_{ij}° es densa en I_0.

Procediendo inductivamente, podemos definir dos familias de intervalos cerrados $J_{i_1\ldots,i_n}$, $K_{i_1,\ldots,i_n}$ donde n y todos los índices i_k corren sobre los enteros positivos, tales que satisfacen las siguientes condiciones:

$$K_{i_1,\ldots,i_n} = f_n(I_0, J_{i_1}, K_{i_1}, J_{i_1 i_2}, K_{i_1 i_2}, \ldots, J_{i_1\ldots i_n}) \qquad (4)$$

$$J_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}} \subset K^\circ_{i_1 i_2\ldots i_n} \qquad (5)$$

Para cada n, los intervalos $K_{i_1\ldots i_n}$ son disjuntos, y la unión de sus interiores es densa en I_0. (6)

Ahora consideremos una sucesión arbitraria de números naturales $\{i_n\}$, y definamos

$$I_{2n-1} = J_{i_1\ldots i_n} \qquad I_{2n} = K_{i_1\ldots i_n} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (7)$$

De (4) y (5) se sigue que las condiciones (2) y (3) se satisfacen para toda n; por lo tanto, la sucesión anidada $\{I_n\}$ es una posible manera de jugar consistente con la estrategia dada para (B). Por hipótesis, $\bigcap I_n \subset B$.

Para cada n, definamos $G_n = \bigcup_{i_1\ldots i_n} K^\circ_{i_1,\ldots,i_n}$, y sea $E = \bigcap G_n$. Entonces, $\forall x\in E$ existe una única sucesión $i_1, i_2, \ldots$ tal que $x\in K_{i_1\cdots i_n}$. Si esta sucesión se usa para definir (7), tenemos que $x\in \bigcap I_n \subset B \Rightarrow E\subset B$. En consecuencia

$$A = I_0 - B \subset I_0 - E = I_0 - \bigcap_n G_n = \bigcup_n (I_0 - G_n).$$

Como por (6) tenemos que cada uno de los conjuntos $I_0 - G_n$ es denso en ninguna parte, A es de primera categoría. $\square$

Hemos demostrado que un conjunto de primera categoría es un conjunto en el cual el jugador al que se le asignó este conjunto perderá a pesar de jugar primero; a menos que su oponente no tome ventaja de la situación.

El siguiente resultado muestra que el juego de Banach-Mazur da cierta ventaja al jugador (A).

<u>Teorema 4.2:</u> Existe una estrategia mediante la cual (A) puede estar seguro de ganar si y solo si $I_1 \cap B$ es de primera categoría para algun intervalo $I_1 \subset I_0$.

Dem: $\Leftarrow$) Si tal intervalo existe, (A) puede escogerlo como I_1. Entonces, por medio de una estrategia obvia, puede asegurar que $(\cap I_n) \cap B = \phi$. Como $\cap I_n \neq \phi$, esta es una estrategia ganadora para (A).

$\Rightarrow$) Si (A) tiene una estrategia ganadora, siempre puede modificarla para asegurar que la intercección de los I_n sea solo un punto de A. (Por ejemplo, lo puede hacer si siempre escoge I_{2n+1} como si I_{2n} midiera la mitad de lo que en realidad mide). Esto define una estrategia ganadora para el segundo jugador en el juego $\langle I_1 \cap B, I_1 \cap A \rangle$. Por el teorema anterior, dicha estrategia existe si y solo si $I_1 \cap B$ es de primera categoría. □

El siguiente teorema nos dice que en el caso de que alguno de los conjuntos tenga la propiedad de Baire; el resultado del juego lo determina el hecho de que este conjunto sea de primera o segunda categoría:

<u>Teorema 4.3:</u> Si A tiene la propiedad de Baire, entonces (B) o (A) tiene una estrategia ganadora; de acuerdo a que A sea de primera o segunda categoría.

Dem: Sea $A = G \Delta P$, donde G es abierto y P es de primera categoría. Si $G = \phi$, (B) tiene una estrategia ganadora por el teorema 4.1.

Si $G \neq \phi$, (A) solamente tiene que escoger $I_1 \subset G$ para asegurarse que puede ganar. □

La siguiente definición es análoga a la noción métrica de densidad que apareció en el capítulo 2.

<u>Definición 4.4</u>.- Un conjunto E se dice que es de primera categoría en el punto x si existe una vecindad U de x tal que $U \cap E$ es de primera categoría.

Sea G el conjunto donde A es de primera categoría, entonces G es abierto. Si A tiene la propiedad de Baire, G se puede considerar como el análogo en categoría del conjunto $\varphi(A)$ del teorema de Lebesgue; es el abierto mas grande que difiere de A por un conjunto de primera categoría. Por lo tanto G es el mismo abierto regular que aparece en el teorema 2.

Volvamos al juego de Banach-Mazur: ¿existe alguna situación en la que ninguno de los jugadores tenga el juego determinado a su favor?

Sea $A = I_0 \cap B_1$, donde B_1 es un conjunto de Bernstein. Entonces ni A ni B contiene un G_δ no numerable, por el lema 3.1. En consecuencia, $\forall I \subset I_0$, ni $A \cap I$ ni $B \cap I$ es de primera categoría: si uno de ellos lo fuera, el otro sería de segunda categoría y de tipo Baire, por el lema 2. todo conjunto de este tipo contiene un G_δ no numerable. El juego $\langle A, B \rangle$ no está entonces determinado en favor de ningún jugador. Este hecho es lo que hace al juego de Banach-Mazur interesante para la teoría de juegos.

asegurarse que puede ganar. $\square$

La siguiente definición es análoga a la noción métrica de densidad que apareció en el capítulo 2.

Definición 4.4: Un conjunto E se dice que es de primera categoría en el punto x si existe una vecindad U de x tal que $U \cap E$ es de primera categoría.

Sea G el conjunto donde A es de primera categoría, entonces G es abierto. Si A tiene la propiedad de Baire, G se puede considerar como el análogo en categoría del conjunto $\varphi(A)$ del teorema de Lebesgue; es el abierto mas grande que difiere de A por un conjunto de primera categoría. Por lo tanto G es el mismo abierto regular que aparece en el teorema 2.

Volvamos al juego de Banach-Mazur: ¿existe alguna situación en la que ninguno de los jugadores tenga el juego determinado a su favor?

Sea $A = I_0 \cap B_1$, donde B_1 es un conjunto de Bernstein. Entonces ni A ni B contiene un G_δ no numerable, por el lema 3.1. En consecuencia, $\forall I \subset I_0$, ni $A \cap I$ ni $B \cap I$ es de primera categoría: si uno de ellos lo fuera, el otro sería de segunda categoría y de tipo Baire, por el lema 2. todo conjunto de este tipo contiene un G_δ no numerable. El juego $\langle A, B \rangle$ no está entonces determinado en favor de ningún jugador. Este hecho es lo que hace al juego de Banach-Mazur interesante para la teoría de juegos.

5.

En este capítulo hablaremos un poco acerca de una clasificación de funciones debida a Baire. Este tema es de gran importancia para nosotros, pues fué en este contexto donde Baire introdujo la noción de categoría.

Empezaremos por dar la definición de oscilación de una función y la utilizaremos para demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función real es un F_σ; despues daremos condiciones bajo las cuales una función tiene como conjunto de puntos de discontinuidad a un conjunto de primera categoría, y condiciones para que una función sea Riemann-integrable. Para concluir con el tema de puntos de discontinuidad demostraremos que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona es numerable.

Inmediatamente después introduciremos los conceptos de función medible y de función que tiene la propiedad de Baire. Probaremos el muy conocido e importante teorema de N.N. Luzin (1913) que relaciona la medibilidad de una función con la continuidad; y su respectivo dual para funciones con la propiedad de Baire. Probaremos también el teorema de D.F. Egorov (1913), que es muy importante en teoría de medida; aunque, desgraciadamente, su respectivo dual sea falso, como se verá al final de este capítulo. Empecemos nuestra discusión con la siguiente:

<u>Definición 5.1:</u> Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Para todo intervalo $I\subset\mathbb{R}$, definimos <u>la oscilación de f sobre I</u>, denotada $\omega_f(I)$, como:

$$\omega_f(I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x).$$

Claramente $\omega_f(I) \geq 0$. Es fácil demostrar que esta definición es equivalente a la siguiente:

$$\omega_f(I) = \sup_{x,y \in I} \{f(x) - f(y)\}.$$

Para cualquier $x \in I^\circ$ fijo, la función $\omega_f((x-\delta, x+\delta))$ decrece y alcanza un límite

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \searrow 0} \omega((x-\delta, x+\delta))$$

al que llamamos <u>la oscilación de f en x</u>. Observemos que como el límite es decreciente, pudimos haber definido la oscilación de f en x como $\omega_f(x) = \inf_{\delta>0} \{\omega_f((x-\delta, x+\delta))\}$; y que $\omega_f(x)$ puede tomar el valor extendido $+\infty$.

<u>Proposición 5.2:</u> $\omega_f(x) = 0 \iff f$ es continua en x.

Dem: $\Leftarrow$) Supongamos que f es continua en $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\ni$ si $z_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow |f(z_1) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\sup_{z_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} \{|f(z_1) - f(x_0)|\} < \varepsilon \Rightarrow \omega_f(x_0) < \varepsilon \therefore \omega_f(x_0) = 0$

$\Rightarrow$) Inversamente, supongamos que $\omega_f(x_0) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario $\Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \omega_f((x_0-\delta, x_0+\delta)) < \varepsilon \Rightarrow \forall z \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ se tiene que $|f(z) - f(x_0)| \leq \omega_f(x_0-\delta, x_0+\delta) < \varepsilon \Rightarrow f$ es continua en x_0. $\square$

<u>Proposición 5.3:</u> Si $\omega(x_0) < \varepsilon \Rightarrow \omega(x) < \varepsilon$ para toda x en alguna vecindad de x_0.

Dem: Por definición $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \omega_f(x_0-\delta, x_0+\delta) < \varepsilon$. Sea $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ arbitraria y sea $\delta_x > 0$ tal que $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset (x_0-\delta, x_0+\delta)$, entonces

$\omega_f(x) \leq \omega_f(x-\delta_x, x+\delta_x) \leq \omega_f(x_0-\delta, x_0+\delta) < \varepsilon$. $\square$

<u>Corolario 5.4.-</u> El conjunto $\{x : \omega(x) < \varepsilon\}$ es abierto.

<u>Definición 5.5:</u> Una función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ se llama <u>semicontinua superiormente</u> si $\forall c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : h(x) < c\}$ es abierto.

<u>Corolario 5.6:</u> ω_f es una función semicontinua superiormente.

Teorema 5.7.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es un F_σ.

Dem.- Es inmediato, ya que dicho conjunto se puede representar de la siguiente manera:

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : w(x) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

el conjunto D es evidentemente un F_σ. □

Este teorema admite el siguiente converso:

Teorema 5.8.- Para todo conjunto E, donde E es un F_σ, existe una función acotada f que tiene a E como su conjunto de puntos de discontinuidad.

Dem.- Sea $E = \bigcup F_n$, donde cada F_n es un conjunto cerrado. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n$. Sea A_n el conjunto de puntos racionales en el interior de F_n.

La función $f_n = \chi_{F_n} - \chi_{A_n} = \chi_{F_n - A_n}$ tiene oscilación igual a 1 en todo punto de F_n, y oscilación cero en cualquier otro punto. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos $\ni a_n > \sum_{i>n} a_i$ $\forall n$. (Por ejemplo: $a_n = 1/n!$). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a una función acotada f, la cual es continua en todo punto donde los términos de la serie son continuos, es decir, en todo punto de $\mathbb{R} - E$. Por otro lado, la oscilación de f en todo punto de $F_n - F_{n-1}$ es al menos igual a $a_n - \sum_{i>n} a_i$ $\therefore$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f es exactamente E. □

Consideremos ahora la clase de todas las funciones continuas definidas sobre un intervalo fijo $[a,b]$ y llamémosle <u>la clase nula de funciones.</u>

Definición 5.9.- Si la función f, definida en el intervalo $[a,b]$, no es un elemento de la clase nula, pero se puede representar como el límite de una sucesión convergente de funciones continuas, se dice que f es una <u>función de primera clase.</u>

De la misma manera, una función que no es elemento de la clase nula ni es de primera clase, pero se puede representar como el límite de una sucesión de funciones de primera clase, se dice que es de <u>segunda clase</u>.

En general, funciones de clase n son funciones que no están en ninguna de las clases anteriores, pero se pueden representar como el límite de una sucesión de funciones de clase $n-1$. De esta manera, todas las clases con índices finitos quedan definidas, y las denotamos $H_0, H_1, \ldots, H_\omega, \ldots$. Esta clasificación se puede llevar aún mas lejos:

<u>Definición 5.10:</u> A dicha clasificación se le llama la <u>clasificación de Baire</u>, y las funciones de todas las clases H_α $(\alpha < \omega)$ se llaman <u>funciones de Baire.</u>

Algunos hechos acerca de las funciones de Baire que no probaremos son los siguientes[9]:

<u>Teorema 5.11:</u> Todas las funciones de Baire son medibles.

<u>Teorema 5.12:</u> El conjunto de todas las funciones de Baire tiene cardinalidad c.

<u>Teorema 5.13:</u> Toda función f de clase H_α se puede representar como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, donde las f_n son funciones acotadas de las clases H_β, para $\beta<\alpha$.

<u>Teorema 5.14:</u> La suma, diferencia y producto de dos funciones finitas de clases $\leq\alpha$, es una función de clase $\leq\alpha$. Lo mismo es válido para el cociente, siempre que la función denominador no se anule.

<u>Teorema 5.15:</u> El límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones de clases $\leq\alpha$ es una función de clase $\leq\alpha$.

<u>Teorema 5.16:</u> Sea $f(x)$ una función de clase $\leq\beta$, y sea $\varphi(t)$ una función de clase $\leq\alpha$, cuyos valores caen en el intervalo $[a,b]$ donde f está definida. Entonces la composición $(f\circ\varphi)(t)$ es una función de clase $\leq\alpha+\beta$.

Teorema 5.17: Ninguna de las clases H_α es vacía.

El siguiente resultado nos dice que una función de primera clase no puede ser discontinua en todo punto y se le conoce como el Teorema de Baire sobre funciones de primera clase:

Teorema 5.18: Si f es de primera clase, f es continua excepto en un conjunto de primera categoría.

Dem: Basta probar que $\forall \varepsilon > 0$ el conjunto $F = \{x : \omega_f(x) \geq 5\varepsilon\}$ es denso en ninguna parte. Sea $f(x) = \lim f_n(x)$, f_n continua, y definamos $E_n = \bigcap_{i,j \geq n} \{x : |f_i(x) - f_j(x)| \leq 5\varepsilon\}$

Es claro que el conjunto E_n es cerrado (por ser intersección de cerrados), $E_n \subset E_{n+1}$ y $\bigcup E_n = \mathbb{R}$ (supongamos que $\exists x \in \mathbb{R} \ni x \notin \bigcup E_n \Rightarrow x \notin E_{n_0}$, para alguna $n_0 \therefore x \notin E_n \ \forall n \geq n_0$ $\Rightarrow |f_i(x) - f_j(x)| > \varepsilon \ \forall i, j \geq n_0 \therefore$ la sucesión no converge en x ☿).

Consideremos un intervalo cerrado arbitrario I (se entiende que contiene mas de un punto). Como $I = \bigcup (E_n \cap I)$, los conjuntos $E_n \cap I$ no son densos en ninguna parte; entonces, para alguna $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap I$ contiene un intervalo abierto J ($\therefore J \subset I$). Tenemos entonces que $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in J$; $i, j \geq n$. Si hacemos $i \to \infty$ y $j = n$, tenemos que $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in J$.

$\forall x_0 \in J$ existe una vecindad $I(x_0) \subset J \ni |f_n(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in I(x_0) \Rightarrow |f(x) - f_n(x_0)| \leq 2\varepsilon \ \forall x \in I(x_0) \Rightarrow \omega(x_0) \leq 4\varepsilon$ y ningún punto de J perten a $F \therefore \forall$ intervalo $I \ \exists J$ abierto tal que $J \subset I - F \Rightarrow F$ es denso en ninguna parte. □

Es interesante comparar este resultado con el conocido teorema que dice que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es a su vez una función continua.

Hay que notar también que el inverso del teorema 5.18 es falso, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea $f(x) = 0$ en todo punto que no está en el conjunto de Cantor C, $f(x) = 1/2$ en los extremos de los intervalos que omitimos en la construcción de C y $f(x) = 1$ en los demás puntos de C. f es continua en todo punto del complemento de C ∴ es continua excepto en un conjunto de primera categoría. Pero la restricción de f a C es discontinua en todo punto de C ⇒ f no es de primera clase.

El teorema 5.18 es extremadamente útil, mencionaremos dos ejemplos donde nos resuelve nuestro problema inmediatamente:

Es bien conocido el hecho de que series trigonométricas pueden converger puntualmente a una función discontinua. ¿Qué tan discontinua puede ser esta función? ¿Puede ser discontinua en todo punto? Por 5.18, evidentemente no.

Sabemos también que la derivada de una función que es derivable en todo punto no necesariamente es continua. ¿Puede la derivada de dicha función ser discontinua en todo punto? Nuevamente el teorema 5.18 nos contesta de inmediato, ya que

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{1/n}$$

es de primera clase en todo lugar donde esté definida y sea finita.

Hemos encontrado condiciones bajo las cuales el conjunto D de puntos de discontinuidad de una función es de primera categoría; es natural ahora preguntarnos bajo que condiciones D tiene medida cero:

<u>Teorema 5.19:</u> Para que una función f sea Riemann-integrable en todo intervalo finito es necesario y suficiente que f sea acotada y que su conjunto de puntos de discontinuidad sea nulo.

Antes de proceder con la demostración daremos una definición y un lema que nos la facilitarán.

<u>Definición 5.20:</u> Sea f una función acotada sobre un intervalo I, definimos

$$F(I) = \inf\{\Sigma\, \omega(I_i)|I_i| : \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \text{ es una subdivisión de } I\}$$

Obviamente, la condición $F(I)=0$ expresa el hecho de que f sea Riemann-integrable en I. Es inmediato verificar que si $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$

es cualquier subdivisión de I, entonces $F(I)=\sum_{i=1}^{k} F(I_i)$; esta propiedad de F es todo lo que necesitamos para probar el siguiente:

<u>Lema 5.21:</u> Si $w(x)<\varepsilon$ $\forall x\in I \Rightarrow F(I)<\varepsilon|I|$.

Dem: Supongamos lo contrario, entonces $F(I)\geq \varepsilon|I| \therefore F(I_1)\geq \frac{\varepsilon|I|}{2}$ para al menos uno de los intervalos I_1 que obtenemos al bisectar I. De la misma manera $F(I_2)\geq \varepsilon|I_1|/2$ para al menos uno de los intervalos I_2 que se obtienen al bisectar I_1. Repitiendo este proceso obtenemos una sucesión de intervalos cerrados anidados $\{I_n\}$ de modo que $F(I_n)\geq \varepsilon|I|/2^n$. Estos se intersectan en algun $x\in I$. Por hipótesis $w(x)<\varepsilon \therefore w(J)<\varepsilon$ para algun abierto J que contenga a x. Sea $n\in\mathbb{N}$ $\ni$ $I_n\subset J$, entonces

$$F(I_n)\leq w(I_n)|I_n| \leq w(J)|I|/2^n < \varepsilon|I|/2^n \leq F(I_n) \; \nabla_{\!\circ}. \quad \square$$

<u>Corolario 5.22:</u> Toda función continua sobre un intervalo cerrado es Riemann-integrable.

Notemos que para la prueba de este corolario no necesitamos el concepto de continuidad uniforme.

Ahora sí, para demostrar el teorema 5.19, supongamos primero que f es Riemann-integrable en I, entonces $\forall k\in\mathbb{N}$ podemos encontrar una subdivisión $\{I_1,\dots,I_n\}$ de I $\ni$ $\sum_{i=1}^{n} w(I_i)|I_i|<1/k^2$. Denotemos por Σ' la suma sobre aquellos intervalos I_i para los cuales $w(x)\geq 1/k$ en algún punto interior. Entonces:

$$1/k^2 > \Sigma' w(I_i)|I_i| \geq 1/k\,\Sigma'|I_i| \Rightarrow \Sigma'|I_i|<1/k.$$

El conjunto $F_k=\{x\in I : w(x)\geq 1/k\}$ está cubierto por estos intervalos, excepto talvez por un número finito de puntos (extremos de los intervalos de la subdivisión). Entonces $m(F_k)<1/k$. Si D es el conjunto de puntos de discontinuidad de f, entonces $D\cap I$ es la unión creciente de los F_k, y tenemos que $m(D\cap I)=\lim_{k\to\infty} m(F_k)=0$ $\Rightarrow m(D)=0$.

Inversamente, supongamos que $m(D)=0$ y que f es acotada en I, con M y m sus cotas superior e inferior, respectivamente. $\forall \varepsilon>0$ sea k $\ni$ $(M-m)+|I|<k\varepsilon$. Como F_k es cerrado y acotado (y tiene medida cero) es posible cubrirlo con un número

finito de intervalos abiertos tal que la suma de sus longitudes sea menor que $1/k$. Los extremos de estos intervalos determinan una subdivisión de I en intervalos ajenos I_i y J_j tales que $\sum|I_i|<1/k$ y $w(x)<1/k$, $\forall x\in J_j$ en cada j $\therefore$ por el lema 5.10:

$F(I)=\sum F(I_i)+\sum F(J_j)\leq(M-m)\sum|I_i|+\sum(1/k)|J_j|\leq\frac{(M-m)}{k}+\frac{|I|}{k}<\varepsilon$.

En consecuencia, f es Riemann-integrable en I. □

Para tratar de redondear esta discusión sobre puntos de discontinuidad, nos preguntamos si existe alguna clase de funciones que se caracterice por tener solamente <u>un número numerable de discontinuidades</u>. (Recordemos que la clase de los conjuntos numerables está contenida en la de los conjuntos de primera categoría y en la de los conjuntos de medida cero). Una respuesta parcial está dada por el siguiente:

<u>Teorema 5.23:</u> El conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona es numerable. Todo conjunto numerable es el conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona.

Dem: Si f es monótona, a lo mas puede haber $\frac{|f(b)-f(a)|}{\varepsilon}$ puntos en (a,b) donde $w(x)\geq\varepsilon$ $\therefore$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f es numerable.

Por otro lado, sea $\{x_i\}$ un conjunto numerable de puntos y sea $\sum\varepsilon_i$ una serie convergente de números reales positivos. La función $f(x)=\sum_{x_i\leq x}\varepsilon_i$ es monótona y acotada. Evidentemente tiene la propiedad de que $w(x_i)=\varepsilon_i$ $\forall i$, y $w(x)=0$ $\forall x\notin\{x_i\}$. □

<u>Definición 5.24:</u> a) Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que es <u>medible</u> si $f^{-1}(U)$ es medible, $\forall U\subset\mathbb{R}$ abierto.

b) Decimos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene la <u>propiedad de Baire</u> si $f^{-1}(U)$ tiene la propiedad de Baire $\forall U\subset\mathbb{R}$ abierto.

En ambas definiciones U puede ser elemento de una base o subbase para una topología de $\mathbb{R}$ o bien ser un Boreliano.

La siguiente proposición nos da de inmediato muchos ejemplos de funciones de los dos tipos:

<u>Proposición 5.25:</u> La función característica χ_E de un con-

junto $E \subset \mathbb{R}$ es medible $\Leftrightarrow$ E es medible. χ_E tiene la propiedad de Baire $\Leftrightarrow$ E la tiene.

Dem: Es inmediata porque $\forall\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ abierto tenemos que:

$$\chi_E(\mathcal{U}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0,1 \notin \mathcal{U} \\ E & \text{si } 0 \notin \mathcal{U},\ 1 \in \mathcal{U} \\ \mathbb{R}-E & \text{si } 0 \in \mathcal{U},\ 1 \notin \mathcal{U} \\ \mathbb{R} & \text{si } 0,1 \in \mathcal{U} \end{cases}$$

y porque sabemos que el complemento de un conjunto medible es medible y el complemento de un conjunto que tiene la propiedad de Baire tambien la tiene. □

Imitando las demostraciones para funciones medibles [ ] es inmediato verificar que combinaciones algebraicas de funciones que tienen la propiedad de Baire son funciones con la propiedad de Baire; así como aquellas funciones que se obtienen como un proceso de límite de funciones que tienen la propiedad de Baire. Asimismo, puede probarse que toda función con la propiedad de Baire es el límite puntual de sucesiones de funciones simples con la propiedad de Baire.

Por otro lado, si E es un conjunto que tiene la propiedad de Baire $\Rightarrow E = G \Delta P = F \Delta Q$, donde G es abierto, F es cerrado y P y Q son de primera categoría. El conjunto $E-(P\cup Q) = G-(P\cup Q) = F-(P\cup Q)$ es abierto y cerrado relativo a $\mathbb{R}-(P\cup Q)$, entonces la restricción de χ_E al complemento de $P\cup Q$ es continua. En general, continuidad y la propiedad de Baire están relacionadas como sigue:

<u>Teorema 5.26:</u> Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Baire $\Leftrightarrow$ existe un conjunto P de primera categoría tal que $f|_{\mathbb{R}-P}$ es continua.

Dem: $\Rightarrow$) Sea $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$. Si f tiene la propiedad de Baire $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}_i) = G_i \Delta P_i$, donde cada G_i es abierto y cada P_i es de primera categoría. Sea $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, entonces P es de primera categoría. Sea $g = f|_{\mathbb{R}-P} \Rightarrow$ $g^{-1}(\mathcal{U}_i) = f^{-1}(\mathcal{U}_i) - P = (G_i \Delta P_i) - P = G_i - P$ es abierto relativo a

$\mathbb{R}-P$ $\forall i$ $\therefore$ también lo es $g^{-1}(U)$, $\forall U$ abierto.

$\Leftarrow$) Sea $g = f|_{\mathbb{R}-P}$ continua, donde P es algún conjunto de primera categoría $\Rightarrow \forall U$ abierto, $g^{-1}(U) = G - P$, para algún abierto G. Como $g^{-1}(U) \subset f^{-1}(U) \subset g^{-1}(U) \cup P$, tenemos que

$$G - P \subset f^{-1}(U) \subset G \cup P$$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = G \triangle Q$, donde $Q = f^{-1}(U) \triangle G$. $\square$

La relación entre continuidad y medibilidad no es tan simple; de hecho, <u>una función medible no necesariamente es continua en el complemento de un conjunto de medida cero</u>, como lo prueba el siguiente ejemplo: Sea $U_1, U_2, \ldots$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$. Sabemos que todo intervalo contiene un subconjunto denso en ninguna parte de medida positiva; entonces podemos definir inductivamente una colección disjunta de subconjuntos cerrados densos en ninguna parte N_n tales que $m(N_n) > 0$ y $(N_{2n} \cup N_{2n-1}) \subset U_n$. Sea $A = \bigcup_{1}^{\infty} N_{2n}$ y sea $f = \chi_A$. Como A y su complemento tienen ambos medida positiva en cada intervalo, la restricción de f al complemento de cualquier conjunto de medida cero es discontinua en todo punto. Sin embargo, tenemos el célebre teorema de N.N. Luzin (1913):

<u>Teorema 5.27:</u> Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto E tal que $m(E) < \varepsilon$ y $f|_{\mathbb{R}-E}$ es continua.

Dem: $\Rightarrow$) Sea $U_1, U_2, \ldots$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$. Si f es medible $\Rightarrow \forall i$ existen conjuntos F_i cerrado y G_i abierto $\ni$ $F_i \subset f^{-1}(U_i) \subset G_i$ y $m(G_i - F_i) < \varepsilon/2^i$.

Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i - F_i) \Rightarrow m(E) < \varepsilon$. Sea $g = f|_{\mathbb{R}-E} \Rightarrow$ $g^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_i) - E = F_i - E = G_i - E$ $\therefore$ $g^{-1}(U_i)$ es abierto y cerrado relativo a $\mathbb{R}-E \Rightarrow g$ es continua.

$\Leftarrow$) Si f tiene la propiedad de que existe una sucesión de conjuntos E_i tales que $m(E_i) < 1/i$ y $f_i = f|_{\mathbb{R}-E_i}$ es continua $\forall i \Rightarrow \forall U$ abierto existen conjuntos G_i abiertos tales que $f_i^{-1}(U) = G_i - E_i$ $\forall i$. Sea $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow m(E) = 0$ y $f^{-1}(U) - E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f^{-1}(U) - E_i) =$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(u) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i - E_i) \Rightarrow$

$$f^{-1}(u) = [f^{-1}(u) \cap E] \cup [f^{-1}(u) - E] = [f^{-1}(u) \cap E] \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i - E_i)]$$

como $m(E)=0$, todos estos conjuntos son medibles y por lo tanto f es medible. □

El siguiente resultado, debido a Egorov (1913) establece la relación entre convergencia y convergencia uniforme en términos de medida:

<u>Teorema 5.28:</u> Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles converge a f en todo punto de un conjunto E de medida finita, entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $F \subset E$ $\ni$ $m(F) < \varepsilon$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre $E - F$.

Dem: $\forall n, k \in \mathbb{N}$ definamos $E_{n,k} = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq 1/k\}$. Entonces $E_{n,k} \supset E_{n+1,k}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k} = \emptyset$, $\forall k$. Dada $\varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n(k)$ $\ni$ $m(E_{n(k),k}) < \varepsilon / 2^k$. Sea $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n(k),k}$. Entonces $m(F) < \varepsilon$ y tenemos además que $\forall k$ $E - F \subset E - E_{n(k),k} \Rightarrow |f_i(x) - f(x)| < 1/k$ $\forall i \geq n(k)$, y $\forall x \in E - F$ $\therefore$ $f_n \to f$ uniformemente sobre $E - F$. □

Es importante hacer notar que se puede establecer el Teorema de Luzin a partir del Teorema de Egorov; pero mientras que el Teorema de Luzin tiene un resultado análogo en categoría, el correspondiente análogo al Teorema de Egorov es falso. Veamos un ejemplo:

Sea $\phi(x)$ la función lineal por pedazos definida como sigue:

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x & x \in [1/2, 1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} - [0,1] \end{cases}$$

Entonces $\lim_{n \to \infty} \phi(2^n x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea $\{r_i\}$ una sucesión densa en $\mathbb{R}$ y definamos $f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \phi(2^n(x - r_i))$. f_n es la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas por lo que es continua y $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea (a,b) un intervalo abierto arbitrario, entonces para alguna i tenemos que $r_i \in (a,b)$, y que $\sup_{x \in (a,b)} f_n(x) \geq 1/2^i$ si n es suficientemente grande $\therefore$ f_n no converge uniformemente sobre (a,b).

Sea E el conjunto en donde f_n si converge uniformemente y sea $\alpha_n = \sup_{x \in E} f_n(x)$ $\therefore$ $\alpha_n \to 0$. Como f_n es continua, α_n es también el supremo de f_n en $\bar{E}$ $\Rightarrow$ $f_n \to 0$ uniformemente sobre $\bar{E}$. Hemos demostrado que $\bar{E}$ no puede contener un intervalo, es decir, todo conjunto en donde la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente es denso en ninguna parte.

6.

En este capítulo demostraremos el Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos mas generales: la utilidad de la noción de categoría se puede apreciar mejor en espacios mas generales, especialmente en espacios métricos. Daremos la definición de Espacio de Baire y después daremos algunos ejemplos de espacios métricos poco usuales pero de gran interés para nosotros.

Definición 6.1: Un espacio métrico se dice que es topologicamente completo si es homeomorfo a un espacio completo.

Observemos que si f es un homeomorfismo del espacio métrico (X,d) sobre un espacio completo (Y,δ), entonces $\delta(f(x),f(y))$ es una métrica en X topologicamente equivalente a d. Es decir, un espacio es topologicamente completo si y solo si se puede remetrizar (con una métrica topologicamente equivalente) para ser completo. Una propiedad importante de estos espacios es que se cumple el Teorema de Categoría de Baire:

Teorema 6.2: Si X es un espacio métrico topologicamente completo y si A es de primera categoría en X, entonces $X-A$ es denso en X.

Dem: Sea $A=\bigcup A_n$, donde A_n es denso en ninguna parte, sea d una métrica con respecto a la cual X es completo y sea S_0 un conjunto abierto no vacío. Escojamos una sucesión anidada de bolas S_n de radio $r_n<1/n$ tales que $\bar{S}_n\subset S_{n-1}-A_n$ $\forall n\geq 1$. Esto lo podemos hacer paso a paso, tomando como S_n una bola con centro $x_n\in S_{n-1}-\bar{A}_n$ (que es no vacío porque A_n es denso en ninguna parte) y con radio suficientemente pequeño. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, ya que $d(x_i,x_j)<d(x_i,x_n)+d(x_n,x_j)<2r_n$ $\forall i,j\geq n$. $\Rightarrow x_n\to x$ para alguna $x\in X$. Como $x_i\in\bar{S}_n$ si $i\geq n$, se sigue que $x\in\bigcap\bar{S}_n\subset S_0-A$. Esto muestra que $X-A$ es denso en X. $\square$

Definición 6.3: Un espacio topológico X se llama un espacio de Baire si todo abierto no vacío es de segunda categoría; o equivalentemente, si el complemento de todo conjunto de primera categoría es denso.

Definición 6.4: En un espacio de Baire, al complemento de un conjunto de primera categoría se le llama conjunto residual.

El siguiente resultado es una de las propiedades mas importantes de los conjuntos residuales:

<u>Teorema 6.5:</u> En un espacio de Baire X, un conjunto E es residual si y solo si E contiene un G_δ denso en X.

Dem: Supongamos que $B = \cap G_n$, G_n abierto, es un G_δ contenido en E y denso en X. Entonces todo G_n es denso en X, y $X - E \subset X - B = X - \cap G_n = \cup(X - G_n)$ es de primera categoría.

Inversamente, si $X - E = \cup A_n$, donde A_n es denso en ninguna parte, sea $B = \cap(X - \bar{A}_n) \Rightarrow B$ es un G_δ contenido en E; su complemento $X - B = \cup \bar{A}_n$ es de primera categoria y como X es de Baire B es denso en X. $\square$

Sea $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. y definamos

$$d(f,g) = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

Es inmediato verificar que d es una métrica en $C[a,b]$. Convergencia en esta métrica implica convergencia uniforme en $[a,b]$; por esta razón, a d se le llama la <u>métrica uniforme.</u> Probaremos que (C,d) es completo:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en C: $d(f_i,f_j) \le \varepsilon$ $\forall i,j \ge n(\varepsilon)$. Entonces:

$$|f_i(x) - f_j(x)| \le \varepsilon \quad \forall i,j \ge n(\varepsilon) \quad \forall x \in [a,b]$$

y tenemos que $\forall x \in [a,b]$, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto converge a un límite $f(x)$. Si hacemos $j \to \infty$, entonces $|f_i(x) - f(x)| \le \varepsilon$ $\forall i \ge n(\varepsilon)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f_i \to f$ uniformemente en $[a,b]$ $\therefore$ f es continua en $[a,b] \Rightarrow f_i \to f$ en C $\therefore$ el espacio (C,d) es completo.

Ahora consideremos el mismo espacio $C[a,b]$, pero con la métrica

$$d'(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Nuevamente es inmediato verificar que d' es una métrica en C. Tambien es inmediato verificar que esta métrica no es topologicamente equivalente a d; de hecho, (C,d') no es completo, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea $[a,b] = [0,1]$, y sea
$$f_n(x) = \begin{cases} \min(1, \tfrac{1}{2} - n(x - \tfrac{1}{2})) & x \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \max(0, \tfrac{1}{2} - n(x - \tfrac{1}{2})) & x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

De la gráfica de esta función es claro que $d'(f_n,f_m) = \frac{1}{4}|1/n - 1/m|$. Por lo tanto, $\{f_n\}$ es de Cauchy. Supongamos que $d'(f_n,f)\to 0$ cuando $n\to\infty$ para alguna $f\in C$. Entonces

$$d'(f_n,f) \geq \int_0^{1/2-1/2n} |1-f(x)|\,dx + \int_{1/2+1/2n}^{1} |f(x)|\,dx$$

Si $n\to\infty$ tenemos que $\int_0^{1/2}|1-f(x)|\,dx = \int_{1/2}^1 |f(x)|\,dx = 0$. Como f es continua, $f(x)=1$ en $[0,1/2]$ y $f(x)=0$ en $[1/2,1]$ ∇

Ahora consideremos el conjunto $R[a,b]$ de las funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ con la métrica d'. Aquí nos encontramos con una dificultad, que $d'(f,g)=0$ no necesariamente implica que $f=g$, por lo que (R,d') no es un espacio métrico. Pero, si identificamos a los elementos de (R,d') que difieren por una función f tal que $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, obtenemos un espacio métrico $(\tilde{R},d)$ al que llamamos el <u>espacio de las funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$</u>.

Sea $\tilde{f}$ la clase de equivalencia a la que pertenece f; la función que manda a f en $\tilde{f}$ preserva distancias (evidentemente es una función de (C,d') en (R,d')) y por lo tanto $(\tilde{R},d)$ contiene un subespacio isométrico a (C,d'). Es un subespacio propio, ya que si $f=\chi_{[a,(a+b)/2]}$, $\tilde{f}\in\tilde{R}$, pero ningun elemento de $\tilde{f}$ es contiuno.

Para cualquier entero positivo M definamos

$$E_M = \{\tilde{f} : f\in R[a,b] \text{ y } |f|\leq M\}.$$

Entonces $\tilde{R} = \bigcup_{M=1}^{\infty} E_M$, ya que toda función integrable es acotada. Para toda $\tilde{f}_0\in E_M$, con $|f_0|\leq M$, sea $g = f_0 + (2M+1)\chi_I$, donde I es un intervalo de longitud menor o igual a ε contenido en $[a,b]$. Entonces $d'(\tilde{f}_0,\tilde{g}) \leq (2M+1)\varepsilon$. Si $|f|\leq M$ entonces $|g-f|\geq 1$ en I, así que $d'(\tilde{f},\tilde{g}) \geq \varepsilon$. Por lo tanto, ningún elemento de la ε-vecindad de $\tilde{g}$ está en E_M. Como podemos tomar a $\tilde{g}$ tan cerca como queramos de $\tilde{f}_0$, tenemos que E_M es denso en ninguna parte en $\tilde{R} \Rightarrow \tilde{R}$ es de primera categoría en sí mismo y de aquí se sigue que $\tilde{R}$ no es un espacio completo. Mas aún, no lo podemos remetrizar para hacerlo completo, porque el ser de primera categoría es una propiedad topológica.

Consideremos ahora la clase S de los conjuntos de medida finita en un espacio de medida arbitrario, y definamos

$d(E,F) = m(E \Delta F)$

Entonces, es inmediato verificar:

1) $d(E,F) \geq 0 \quad d(E,E) = 0$

2) $d(E,F) = d(F,E)$

3) $d(E,H) \leq d(E,F) + d(F,H)$

Esta última propiedad se puede probar como sigue:

$$d(E,H) = m(E\Delta H) = m((E\Delta F)\Delta(F\Delta H)) \leq m(E\Delta F) + m(F\Delta H) = d(E,F) + d(F,H).$$

Si además identificamos los conjuntos que difieren por un conjunto de medida cero, obtenemos un espacio $(\bar{S},d)$ en donde se cumplen las tres propiedades anteriores y

4) $d(E,F) = 0 \Rightarrow E = F$

Es decir, $(\bar{S},d)$ es un espacio métrico; demostraremos que es completo:

Sea $\{\tilde{E}_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\bar{S},d)$, entonces $\forall i \in \mathbb{N}$ existe un índice n_i t.q. $d(E_n,E_m) < 1/2^i \ \forall n,m \geq n_i$. Podemos suponer que $n_i < n_{i+1}$, lo cual nos define una subsucesión.

Sea $F_i = E_{n_i}$, tenemos entonces que $d(F_i,F_j) < 1/2^i \ \forall j > i$. Definamos $H_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} F_j$, $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$; estos conjuntos pertenecen a S; de hecho $E = \limsup F_j$, que es el conjunto de puntos que pertenecen a todos excepto un número finito de los F_j.

Es fácil verificar que los conjuntos $E\Delta H_i$ y $H_i \Delta F_i$ (y por lo tanto también $E\Delta F_i$) están contenidos en el conjunto

$$(F_i \Delta F_{i+1}) \cup (F_{i+1}\Delta F_{i+2}) \cup (F_{i+2} \Delta F_{i+3}) \cup \ldots$$

En consecuencia $m(E\Delta F_i) \leq \sum_{j=i}^{\infty} m(F_j \Delta F_{j+1}) < \sum_{j=i}^{\infty} 1/2^j = 1/2^{i-1}$.

$\forall n \geq n_i$ tenemos:
$$m(E\Delta E_n) = m((E\Delta F_i)\Delta(E_{n_i}\Delta E_n)) \leq m(E\Delta F_i) + m(E_{n_i}\Delta E_n) < 1/2^{i-1} + 1/2^i$$

por lo tanto $\tilde{E}_n \to \tilde{E}$ en $(\bar{S},d)$.

Si tomamos m como la medida de Lebesgue 2 dimensional, el espacio $(\bar{S},d)$ contiene un subespacio isométrico a $(\tilde{R},d')$:

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, definamos su "conjunto ordinado":

$$\phi(F)=\{(x,y): a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x) \text{ ó } f(x)\leq y\leq 0\}.$$

Es inmediato verificar que si f y g son funciones Riemann integrables, sobre $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b |f-g| = m(\phi(f)\,\Delta\,\phi(g)).$$

Entonces ϕ manda funciones equivalentes en conjuntos equivalentes y define un encaje isométrico de $(\tilde{R},d')$ en $(\bar{S},d)$. Es posible identificar la cerradura de $\phi(\tilde{R})$ en $(\bar{S},d)$ con el espacio $L^1([a,b])$ (el espacio de las funciones Lebesgue integrables sobre $[a,b]$).

Como $(\tilde{R},d')$ es de primera categoría en sí mismo, es de primera categoría en cualquier espacio que lo contenga; en particular, $\tilde{R}$ es de primera categoría en L^1.

7.

En este capítulo estudiaremos el efecto que tienen los automorfismos de $\mathbb{R}$ sobre conjuntos "pequeños" en algun sentido. Veremos que propiedades debe tener un conjunto E para que exista un homeomorfismo $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(E)$ tiene medida cero y por último daremos una caracterización de los conjuntos de primera categoría en donde la noción de conjunto denso en ninguna parte no aparece.

Sea $F\subset I=[0,1]$ un conjunto cerrado denso en ninguna parte, es fácil encontrar un automorfismo de I tal que la imagen de F tenga medida cero: sea $G=I-F$ y definamos

$$h(x)=\frac{m([0,x]\cap G)}{m(G)}$$

Entonces h es continua y estrictamente creciente, ya que si $x_1<x_2 \Rightarrow [0,x_1]\subset[0,x_2] \Rightarrow m([0,x_1])<m([0,x_2]) \therefore h(x_1)<h(x_2)$; puesto que el intervalo (x_1,x_2) contiene un intervalo totalmente contenido en G (recordemos que G es residual) se tiene que $h(x_2)-h(x_1)=\dfrac{m([x_1,x_2]\cap G)}{m(G)}>0$

Demostraremos ahora que $h(F)$ tiene medida cero. Expresemos a G como unión numerable disjunta de intervalos abiertos: $G=\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$

$$\Rightarrow h(G)=h\Big(\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)\Big) \quad \therefore\ m(h(G))=m\Big(h\Big(\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)\Big)\Big)=m\Big(\bigcup_{i\in I}h(a_i,b_i)\Big)$$

$$=m\Big(\bigcup_{i\in I}(h(a_i),h(b_i))\Big)=\sum_{i\in I}m(h(a_i),h(b_i))$$

$$=\sum_{i\in I}h(b_i)-h(a_i)=\sum_{i\in I}\frac{m([a_i,b_i]\cap G)}{m(G)}=1$$

$$\Rightarrow m(h(F))=0,\ \text{ya que } G=I-F.$$

La generalización de este resultado para un conjunto de primera categoría no se puede probar de la misma manera; pero la conclusión se sigue cumpliendo, como veremos a continuación:

Sea H el conjunto de todos los automorfismos de I que dejan fijos a los extremos, con la métrica $d(f,g)=\max|f(x)-g(x)|$.

Evidentemente (H,d) es un subespacio (topológico) de $C([0,1])$ y de $C_1([0,1])=\{f\in C([0,1]) : f(0)=0,\ f(1)=1\}$. (C_1,d) es completo (por ser cerrado en $(C([0,1]),d)$), pero (H,d) no lo es. Esto se ve facilmente al considerar la sucesion $\{f_n\}$, donde f_n es la función seccionalmente lineal cuya gráfica consiste de los segmentos de recta que unen al punto $(1/2,1-1/n)$ con $(0,0)$ y $(1,1)$. Entonces $f_n\to f=\begin{cases}1 & x\in[1/2,1]\\ 0 & x\in[0,1/2)\end{cases}$. Evidentemente $f\notin H$.

Mostraremos ahora que H es completo con respecto a la métrica $\sigma(g,h)=d(g,h)+d(g^{-1},h^{-1})$ y que esta métrica es equivalente a d:

Consideremos $\{h_n\}\in H$ tal que $\sigma(h_n,h_m)\to 0$. Sabemos entonces que $d(h_n,h_m)\to 0$ y $d(h_n^{-1},h_m^{-1})\to 0$. Además es fácil ver que $h_n(x)=1-h_n(1-x)$ (es consecuencia del hecho de dejar los extremos fijos). Consideremos la isometría $\rho(x)=1-x$, y supongamos que $h_n\to f$ uniformemente y $h_n^{-1}\to g$ uniformemente. Observemos que $h_n^{-1}=\rho h_n\rho\to\rho f\rho=g$. Demostraremos que $f(g(x))=x$:

$$f(g(x))=f(\rho f\rho(x))=\lim h_n(\rho h_n\rho(x))=\lim h_n h_n^{-1}(x)=x$$

Por lo tanto (H,σ) es completo.

El hecho de que las dos métricas son topologicamente equivalentes se sigue de la siguiente relación:

$$d(f,g)\le\sigma(f,g)\le 2d(f,g)\quad\forall f,g\in H.$$

Teorema 7.1: Para todo conjunto A de primera categoría en $I=[0,1]$ existe $h\in H$ tal que $m(h(A))=0$; de hecho, tales automorfismos constituyen un conjunto residual en H.

Dem: Sea $A=\bigcup A_n$, donde cada A_n es denso en ninguna parte, y sea $E_{n,k}=\{h\in H: m(h(\bar{A}_n))<1/k\}$. $\forall h\in E_{n,k}$ el compacto $h(\bar{A}_n)$ se puede envolver con un abierto $G\subset\mathbb{R}$ tal que $m(G)<1/k$. Además, existe $\delta>0$ tal que G contiene a la bola de radio δ con centro en cada punto de $h(\bar{A}_n)$.

Si $d(g,h)<\delta\Rightarrow g(\bar{A}_n)\subset G\ \therefore\ g\in E_{n,k}$. Esto muestra que $E_{n,k}$ es un abierto de H.

Para toda $g\in H$ y $\forall\varepsilon>0$ dividamos I en un número finito de intervalos cerrados $I_1,I_2,\dots,I_N$ de longitud total menor que ε. En el interior I_i° de cada I_i escojamos un intervalo cerrado $J_i\subset I_i^\circ-g(\bar{A}_n)$. Sea $h_i:I_i\to I_i$ un homeomorfismo lineal por pedazos que deja los extremos fijos y manda a J_i en un intervalo de largo mayor que $|I_i|-1/kN$, (bastan tres segmentos lineales para definirlo).

Juntos, estos h_i definen un homeomorfismo $h\in H$ tal que $m(h\circ g(\bar{A}_n))<1/k$. (Como $m(h_i(J_i))<|I_i|-1/kN$ tenemos que $m(h_i(\bar{A}_n))<|I_i|-(|I_i|-1/kN)<1/kN\ \therefore\ m(h\circ g(\bar{A}_n))<1/k)\Rightarrow h\circ g\in E_{n,k}$.

Como $d(h\circ g,g)<\varepsilon\Rightarrow E_{n,k}$ es denso en $H\ \therefore\ E=\bigcap_{n,k}E_{n,k}$ es residual en H.

Si $h \in E \Rightarrow h(\bar{A}_n)$ tiene medida cero para toda n; como $h(A) \subset \bigcup h(\bar{A}_n)$ se tiene que $m(h(A))=0$. $\square$

El siguiente resultado nos da una razón suficiente para la conclusión contraria:

Teorema 7.2: Para todo conjunto cerrado no numerable $A \subset I = [0,1]$ existe un $h \in H$ tal que $h(A)$ tiene medida positiva.

Dem: Por el Lema 3.1, existe F cerrado denso en ninguna parte y de medida cero contenido en A y $f: F \to [0,1]$ continua y supravectiva. $\forall x \in I$ definamos $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{m(f[0,x] \cap F)}{2}$.

Entonces $h: I \to I$ es continua, estrictamente creciente, $h(0)=0$ y $h(1)=1$. En cada uno de los intervalos que componen a $I-F$ tenemos que $m(f[0,x] \cap F)=0 \therefore h(x)=\frac{x}{2}$ $\forall x \in I-F$.

Por lo tanto, $m(h(I-F)) = 1/2$, ya que para todo intervalo abierto $(a,b) \subset I-F$ se tiene que $\forall x,y \in (a,b)$, $|h(x)-h(y)| = \frac{1}{2}|x-y| \therefore$ $m(h(x),h(y)) = \frac{1}{2}m(x,y) \Rightarrow m(h(a,b)) = m(h(a),h(b)) = \frac{1}{2}m(a,b)$

Entonces $m(h(I-F)) = \frac{1}{2}m(I-F) = \frac{1}{2}m(I) = \frac{1}{2} \Rightarrow m(h(F)) = \frac{1}{2}$. Como $m(h(A)) \geq m(h(F)) \Rightarrow m(h(A)) \geq \frac{1}{2}$. $\square$

Estos teoremas tienen varias consecuencias de interés: sea f una función acotada sobre $[0,1]$ y sea D su conjunto de puntos de discontinuidad. Sea $h:[0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo; entonces la función $f \circ h$ es acotada y tiene al conjunto $h^{-1}(D)$ como su conjunto de puntos de discontinuidad, (esto es consecuencia de que h es continua en todo punto y f es discontinua en D). Sabemos que D siempre es un F_σ. Recordando el teorema 5.19, que dice que una función acotada es Riemann integrable si y solo si es continua casi dondequiera, tenemos el siguiente:

Teorema 7.3: Sea f una función acotada sobre $[0,1]$, y sea D su conjunto de puntos de discontinuidad. Sea h un automorfismo de $[0,1]$. Entonces $f \circ h$ es Riemann integrable

a) $\forall h \iff D$ es numerable

b) para alguna $h \iff D$ es de primera categoría.

Dem: a)

$\Rightarrow$) Supongamos que D no es numerable $\Rightarrow D$ contiene un conjunto cerrado no numerable $\Rightarrow \exists h \ni h^{-1}(D)$ tiene medida positiva ∇.

$\Leftarrow$) Si D es numerable $\Rightarrow h^{-1}(D)$ es numerable y tiene medida cero para todo h.

b) $\Rightarrow$) Supongamos que D es de segunda categoría $\Rightarrow$ D es unión de intervalos $\therefore h^{-1}(D)$ contiene un intervalo $\therefore h^{-1}(D)$ tiene medida positiva $\forall h$ ¡!.

$\Leftarrow$) Si D es de primera categoría, la conclusión es consecuencia inmediata del teorema 7.1. □

Otra consecuencia es la siguiente caracterización de los conjuntos de primera categoría:

Teorema 7.4: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es de primera categoría si y solo si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(A)$ está contenido en un F_σ de medida cero. (Este teorema caracteriza a los conjuntos de primera categoría como aquellos que son equivalentes a un tipo especial de conjuntos nulos).

Dem: $\Rightarrow$) Todo conjunto A de primera categoría está contenido en un F_σ de primera categoría B. Dividamos la recta real en intervalos disjuntos de longitud 1: $I_1, I_2, \ldots$. Sea h_i un automorfismo de I_i que deja los extremos fijos y mapea a $B \cap I_i$ sobre un conjunto de medida cero (Sabemos que existe por el teorema 7.1). Los h_i definen un automorfismo h de $\mathbb{R}$ tal que $h(B)$ tiene medida cero $\Rightarrow h(A)$ está contenido en el F_σ nulo $h(B)$

$\Leftarrow$) Sea A un subconjunto arbitrario de un F_σ nulo. Entonces $A \subset \bigcup F_n$, donde F_n es cerrado y nulo $\forall n \therefore$ cada uno de los F_n es denso en ninguna parte $\Rightarrow$ A, y su imagen bajo cualquier homeomorfismo $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es de primera categoría. □

8

Hemos visto en los capítulos anteriores que la medida de Lebesgue en la recta se define mediante cubiertas de intervalos y en el plano se define mediante cubiertas de rectángulos. En este capítulo estudiaremos como están relacionadas estas medidas.

Sabemos por cálculo elemental que el area entre dos funciones $f \leq g$ está dada por la fórmula $\int |f(x)-g(x)|dx$. Así obtenemos el area "por rebanadas". A la generalización de esta fórmula, que expresa la medida de cualquier conjunto medible en el plano como la integral de la medida lineal de sus secciones perpendiculares a los ejes, se le llama el Teorema de Fubini. Nosotros no demostraremos el Teorema en su forma general; solamente examinaremos el caso en el que el conjunto en cuestión tiene medida cero: en este caso el teorema nos dice que casi todas las secciones (verticales u horizontales) del conjunto tienen medida cero.

Después de probar algunas consecuencias del Teorema de Fubini, demostraremos su análogo en categoría: el Teorema de Kuratowski-Ulam (1932) y demostraremos que este último se puede reducir al Teorema de Fubini. Veremos también que pasa a los subconjuntos del plano que tienen la propiedad de Baire al tomar sus secciones.

<u>Definición 8.1:</u> Si $E \subset X \times Y$ y $x \in X$, al conjunto $E_x = \{y : (x,y) \in E\}$ se le llama la <u>x-sección de E</u>. (De manera análoga se define la y-sección de E)

Las siguientes propiedades son inmediatas:

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)_x = \bigcup (E_\alpha)_x \qquad (\bigcap_\alpha E_\alpha)_x = \bigcap (E_\alpha)_x \qquad (X - E)_x = X - E_x .$$

<u>Definición 8.2:</u> Un conjunto A se dice que está <u>cubierto un número infinito de veces</u> por la sucesión $\{A_n\}$ si cada punto de A pertenece a un número infinito de términos de la sucesión.

Esta definición nos sirve para dar otra caracterización de los conjuntos de medida cero:

Lema 8.3: Un conjunto A tiene medida de Lebesgue cero si y solo si se puede cubrir un número infinito de veces por una sucesión de intervalos $\{I_n\}$ ∴ $\sum |I_n|$ converge.

Dem: Si A tiene medida cero, podemos cubrirlo por una sucesión de intervalos tal que la suma de sus medidas es menor que $1/4$, por otra con suma menor que $1/8$; y así sucesivamente. Juntas, estas sucesiones constituyen una sucesión $\{I_n\}$ que cubre a A un número infinito de veces y $\sum |I_n| < 1$.

Inversamente, si A está cubierto un número infinito de veces por una sucesión $\{I_n\}$, entonces también está cubierto un número infinito de veces por la subsucesión que empieza con el k-ésimo término. Si $\sum |I_n|$ converge, la suma $\sum_k^\infty$ puede hacerse arbitrariamente pequeña escogiendo apropiadamente k ⇒ A tiene medida cero. □

Antes de proceder con la demostración del Teorema de Fubini es importante notar que estaremos trabajando con dos medidas distintas: la medida de Lebesgue en la recta real y la medida de Lebesgue en el plano; aunque usemos la misma notación para ambas (solo haremos distinción en los casos en donde pueda haber confusión).

Teorema 8.4: (Fubini) Si E es un subconjunto del plano con medida cero, entonces E_x tiene medida lineal cero para toda x excepto un conjunto A de medida lineal cero.

Dem: $\forall \varepsilon > 0$ sea $\{I_i \times J_i\}$ una sucesión de rectángulos, con I_i y J_i semi abiertos por la izquierda, tal que

1) $\{I_i \times J_i\}$ cubre un número infinito de veces a E.

2) $\sum_i |I_i||J_i| < \varepsilon$.

3) Si subdividimos cada I_i, podemos asegurar que $\forall i > 1$ I_i está contenido en un solo intervalo de la subdivisión de la recta determinada por los extremos de los intervalos $I_1, I_2, \dots, I_{i-1}$. Esto se establece de manera inductiva.

Definamos $\phi_0(x) = 0$ y $\phi_n(x) = \sum_{x \in I_i, i \le n} |J_i|$ $\quad (n = 1, 2, \dots)$

Entonces ϕ_i es una función escalonada, $\phi_{i-1} \leq \phi_i$ y

$$\phi_i(x) - \phi_{i-1}(x) = \begin{cases} |J_i| & \text{si } x \in I_i \\ 0 & \text{si } x \notin I_i \end{cases}$$

Por (2), se tiene que $\int \phi_n dx = \sum_1^n \int (\phi_i - \phi_{i-1}) dx = \sum_1^n |I_i||J_i| < \varepsilon$.

Sea $A = \{x : m(E_x) > 0\}$. Para cada $x \in A$, $(x,y) \in E$ para alguna y, por lo tanto $(x,y) \in I_i \times J_i$ para un número infinito de i's. Sea $\{i_k\}$ la sucesión de índices tal que $x \in I_{i_k}$. Si $y \in E_x \Rightarrow y \in J_{i_k}$ para un número infinito de k's, por (1). Por lo tanto, la sucesión $\{J_{i_k}\}$ cubre a E_x un número infinito de veces. Como E_x no tiene medida cero, $\sum |J_{i_k}|$ diverge (por el lema anterior) $\Rightarrow \forall x \in A$, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \infty$.

Sea $A_i = \{x : \phi_i(x) \geq 1 > \phi_{i-1}(x)\}$. Entonces A_i es vacío o es igual a I_i, y los intervalos A_i son disjuntos. Como $\phi_n(x) \geq 1$ en A_i $\forall n \geq i$, tenemos que $\sum_1^n |A_i| \leq \int \phi_n dx$ $\therefore$ $\sum_1^\infty |A_i| < \varepsilon$

El argumento anterior nos muestra que la sucesión de intervalos $\{A_i\}$ cubre al conjunto $A \Rightarrow A$ tiene medida cero. $\square$

Un resultado inmediato a partir de este teorema es el siguiente:

<u>Corolario 8.5:</u> Si E es un conjunto medible en el plano, entonces E_x es medible para toda x excepto un conjunto de medida (lineal) cero.

Dem: Representemos a E como la unión de un F_σ A y un conjunto de medida cero N. Entonces, $\forall x$ se tiene que $E_x = A_x \cup N_x$. Cualquier sección de un conjunto cerrado es a su vez un conjunto cerrado $\Rightarrow A_x$ es un F_σ para cualquier x. Por el teorema de Fubini, N_x tiene medida cero para casi toda x; y como E_x es medible para toda tal x, se obtiene la conclusión. $\square$

El inverso del Teorema de Fubini es cierto en el sentido de que si todas las secciones de un conjunto medible en el plano tienen medida cero, entonces el conjunto tiene medida cero. La prueba usual de este resultado depende de propiedades de la integral de Lebesgue que hasta ahora no habíamos encontrado en capítulos anteriores; pero que son bien conocidas [4].

Teorema 8.6: Sea $E \subset X \times Y$. Si casi toda x-sección (o y-sección) de E tiene medida cero, entonces E tiene medida cero.

Dem.: Llamémosle λ a la medida de Lebesgue en $X \times Y$, μ a la medida en X y ν a la medida en Y. Por la definición de medida producto tenemos que

$$\lambda(E) = \begin{cases} \int \nu(E_x)\,d\mu \\ \\ \int \mu(E^y)\,d\nu \end{cases}$$

Entonces, si alguno de los integrandos tiene medida cero casi dondequiera $\Rightarrow \lambda(E)=0$. $\square$

Es importante hacer notar que la conclusión no es cierta si no suponemos que E es medible. Esto nos lo muestra el siguiente teorema, debido a Sierpinski:

Teorema 8.7: Existe E un subconjunto del plano tal que

a) E intersecta a todo conjunto de medida (en el plano) positiva.

b) E no tiene tres puntos colineales.

Solamente veremos aquí una versión simplificada de este teorema, suponiendo la hipótesis del continuo.

Dem: Supongamos que hemos ordenado la clase de los conjuntos cerrados de medida positiva (en el plano) de manera que cada elemento de la clase tiene solamente un número numerable de predecesores. Esto es posible dado que estamos suponiendo la hipótesis del continuo y que la clase de los conjuntos cerrados tiene cardinalidad c.

Escojamos un punto p_1 en el primer conjunto F_1; después un punto p_2 en el segundo conjunto F_2 tal que $p_2 \neq p_1$. Después escojamos $p_3 \in F_3$ tal que p_3 no es colineal con p_1 y p_2. Suponiendo que hemos escogido puntos de cada uno de los conjuntos que preceden a F_α, escojamos $p_\alpha \in F_\alpha$ de manera que p_α no sea colineal con ningún par de puntos escogidos anteriormente. Como solamente hay un número numerable de puntos con índices menores que α, solo hay un número numerable de rectas que tenemos que evitar al escoger p_α. La unión de estas rectas tiene medida cero en el plano; F_α tiene medida positiva en el plano, por lo tanto siempre podemos encontrar dicho punto p_α.

La totalidad de los puntos p_α así seleccionados define un conjunto E con las propiedades (a) y (b). $\square$

Este conjunto E no puede ser medible, ya que si lo fuera, entonces (a) y la propiedad de regularidad de la medida implicarían que su complemento tiene medida cero, y en este caso (b) contradiría el Teorema de Fubini. Entonces E no es medible y por lo tanto no tiene medida exterior igual a cero: a pesar de que cada una de sus secciones tiene a lo mas dos puntos.

Veamos ahora cual es el análogo en categoría al Teorema de Fubini:

Teorema 8.8.- (Kuratowski - Ulam) Si E es un conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}^2$, entonces E_x es de primera categoría en $\mathbb{R}$ para toda x excepto un conjunto de primera categoría. Si E es un subconjunto denso en ninguna parte de el plano $X \times Y$, entonces E_x es un subconjunto denso en ninguna parte de Y para toda x excepto un conjunto de primera categoría en X.

Dem: Las dos afirmaciones son equivalentes: si $E = \bigcup E_i \Rightarrow E_x = \bigcup (E_i)_x$, por lo tanto la segunda afirmación implica la primera. Si E es denso en ninguna parte $\Rightarrow \bar{E}$ es denso en ninguna parte (en particular, $\bar{E}$ es de primera categoría); por la primera afirmación, $(\bar{E})_x$ es de primera categoría, y como $(\bar{E})_x \supset \overline{(E_x)} \Rightarrow E_x$ es denso en ninguna parte.

Probaremos la segunda afirmación: Sea E denso en ninguna parte en $X \times Y$ y sea $\{V_n\}$ una base numerable para Y. Sea $G = (X \times Y) - E \therefore G$ es denso abierto en $X \times Y$. $\forall n \in \mathbb{N}$, sea G_n la proyección de $G \cap (X \times V_n)$ en X, esto es,

$$G_n = \{x : (x,y) \in G \text{ para alguna } y \in V_n\}.$$

Sean $x \in G_n$, $y \in V_n$ tales que $(x,y) \in G$. Como G es abierto, existen intervalos abiertos U, V tales que $x \in U$, $y \in V \subset V_n$ y $U \times V \subset G$ $\therefore U \subset G_n \Rightarrow G_n$ es abierto en X. Sea $U \neq \emptyset$ abierto, entonces $G \cap (U \times V_n) \neq \emptyset$, ya que G es denso en el plano $\Rightarrow G_n$ contiene puntos de $U \Rightarrow G_n$ es denso en X $\forall n$. En consecuencia, $\cap G_n$ es el complemento de un conjunto de primera categoría (es decir, es residual) en X. $\forall x \in \cap G_n$ la sección G_x contiene puntos de V_n $\forall n$ $\therefore G_x$ es denso y abierto en $Y \Rightarrow E_x = Y - G_x$ es denso en ninguna parte. Esto demuestra que para toda x excepto un conjunto de primera categoría, E_x es denso en ninguna parte $\square$.

La prueba de este teorema (y de los tres siguientes) es válida para el producto Cartesiano de cualesquiera dos espacios topológicos X, Y; la única restricción es que Y sea 2º numerable. Veamos ahora que pasa con las secciones de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire:

Teorema 8.9: Si $E \subset X \times Y$ tiene la propiedad de Baire, entonces E_x tiene la propiedad de Baire para toda x excepto un conjunto de primera categoría.

Dem:- Sea $E = G \Delta P$, donde G es abierto y P es de primera categoría. Entonces $E_x = G_x \Delta P_x$ $\forall x$. Toda sección de un conjunto abierto es abierta $\therefore E_x$ tiene la propiedad de Baire siempre que P_x sea de primera categoría; por el teorema anterior, esto sucede para toda x excepto un conjunto de primera categoría. $\square$

Ahora nos podemos hacer la pregunta: ¿cuándo un subconjunto del plano de la forma $A \times B$ es de primera categoría? La respuesta es fácil de imaginar:

Teorema 8.10: Un conjunto $A \times B$ es de primera categoría en $X \times Y$ si y solo si al menos uno de los conjuntos A o B es de primera categoría.

Dem:- Si G es denso abierto en X, $G \times Y$ es denso abierto en $X \times Y$ $\therefore A \times B$ es denso en ninguna parte en $X \times Y$ siempre que A sea denso en ninguna parte en X. Como $(\cup A_i) \times B = \cup (A_i \times B) \Rightarrow$

$A\times B$ es de primera categoría siempre que A sea de primera categoría. (De la misma manera se demuestra para B).

Inversamente, si $A\times B$ es de primera categoría y A no lo es, por el teorema 8.8, existe $x\in A$ ·∋· $(A\times B)_x$ es de primera categoría. Como $(A\times B)_x = B$ $\forall x\in A \Rightarrow B$ es de primera categoría. $\square$

Teorema 8.11: Si $E\subset X\times Y$ tiene la propiedad de Baire y si E_x es de primera categoría para toda x excepto un conjunto de primera categoría, entonces E es de primera categoría.

Dem: Supongamos lo contrario, entonces $E = G\Delta P$, donde G es abierto de segunda categoría y P es de primera categoría, por lo tanto existen conjuntos abiertos $U\subset X$, $V\subset Y$ tales que $U\times V\subset G$ y $U\times V$ es de segunda categoría; por el teorema anterior, U y V son de segunda categoría. Para toda $x\in U$ tenemos que $E_x\supset V - P_x$. Como sabemos que P_x es de primera categoría para toda x excepto un conjunto de primera categoría, E_x es de segunda categoría para toda $x\in U$ excepto un conjunto de primera categoría.

Hemos demostrado que E_x es de segunda categoría para toda x en un conjunto de segunda categoría ⨳. $\square$

Teorema 8.12: Existe un subconjunto E del plano tal que E es de segunda categoría y ninguna terna de puntos de E es colineal.

Dem: La clase de los conjuntos G_δ de segunda categoría tiene cardinalidad c. Sea $\{E_\alpha : \alpha < w_c\}$ un buen orden para esta clase, donde w_c es el primer ordinal que tiene c predecesores.

Supongamos que hemos escogido puntos p_β tales que $p_\beta\in E_\beta$ $\forall \beta<\alpha$ y ninguna terna es colineal. Como el conjunto de todas las rectas que unen pares de puntos p_β, con $\beta<\alpha$, tiene cardinalidad menor que c, podemos encontrar una dirección no paralela con todas éstas. Por el teorema anterior, alguna recta en esta dirección intersecta a E_α en un conjunto de segunda categoría, y por lo tanto, en un conjunto de cardinalidad c.

Podemos entonces escoger $p_\alpha\in E_\alpha$ de manera que p_α no sea colineal con ningun par de puntos p_α, con $\beta<\alpha$. El conjunto de los puntos p_β así escogidos no contiene tres puntos colineales, y es de segunda categoría porque su complemento no contiene ningún G_δ de segunda categoría. $\square$

El teorema anterior nos dice porque es necesaria la primera hipótesis en el teorema 8.11. En el capítulo 7 demostramos que en $\mathbb{R}$ todo conjunto de primera categoría puede transformarse en uno de medida cero mediante un automorfismo de la recta. De manera similar, puede probarse que todo conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}^n$ puede ser transformado en uno de medida cero mediante un automorfismo [10]:

Consideremos el cubo unitario I^n en $\mathbb{R}^n$. Sea H el conjunto de todos los automorfismos de I^n y sea

$$d(g,h)=\max_{x\in I^n}\left(|g(x)-h(x)|,\ |g^{-1}(x)-h^{-1}(x)|\right)$$

Entonces el espacio (H,d) es completo.

<u>Teorema 8.13.-</u> Sea A un conjunto de primera categoría en I^n. Los automorfismos de I^n que mapean a A en un conjunto de medida cero forman un conjunto residual en (H,d).

Dem:- Por hipótesis $A=\bigcup F_i$, con F_i denso en ninguna parte. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que cada F_i es cerrado. Sea

$$E_{i,k}=\{h\in H: m(h(F_i))<1/k\} \quad (i,k=1,2,\dots)$$

donde m denota la medida n dimensional de Lebesgue. Entonces el conjunto E de todos los automorfismos tales que $m(h(A))=0$ está representado por $\bigcap_{i,k} E_{i,k}$. Para demostrar el teorema basta hacer ver que los $E_{i,k}$ son todos densos y abiertos.

Sea $h\in E_{i,k} \Rightarrow m(h(F_i))<1/k$. Como $h(F_i)$ es cerrado, $\exists\ \varepsilon>0$ tal que la ε-vecindad $(h(F_i))_\varepsilon$ de $h(F_i)$ tiene medida menor que $1/k$. Sea $g\in H$ tal que $d(g,h)<\varepsilon$. Se tiene que $g(F_i)\subset (h(F_i))_\varepsilon \therefore m(g(F_i))<1/k$ $\Rightarrow g\in E_{i,k} \Rightarrow E_{i,k}$ es abierto.

Para probar que $E_{i,k}$ es denso, consideremos $h\in H$ y sea $\varepsilon>0$; entonces existe $\delta>0 \ni d(g\circ h,h)<\varepsilon$ si $d(g,I)<\delta$, donde I es la colineal con ningun par de puntos p_α, con $\beta<\alpha$. El conjunto de los puntos p_β así escogidos no contiene tres puntos colineales, y es de segunda categoría porque su complemento no contiene ningún G_δ de segunda categoría. $\square$

El teorema anterior nos dice porque es necesaria la primera hipótesis en el teorema 8.11. En el capítulo 7 demostramos que en $\mathbb{R}$ todo conjunto de primera categoría puede transformarse en uno de medida cero mediante un automorfismo de la recta. De manera similar, puede probarse que todo conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}^n$ puede ser transformado en uno de medida cero mediante un automorfismo [10]:

Consideremos el cubo unitario I^n en $\mathbb{R}^n$. Sea H el conjunto de todos los automorfismos de I^n y sea

$$d(g,h)=\max_{x\in I^n}\left(|g(x)-h(x)|,\ |g^{-1}(x)-h^{-1}(x)|\right)$$

Entonces el espacio (H,d) es completo.

Teorema 8.13.- Sea A un conjunto de primera categoría en I^n. Los automorfismos de I^n que mapean a A en un conjunto de medida cero forman un conjunto residual en (H,d).

Dem: Por hipótesis $A=\bigcup F_i$, con F_i denso en ninguna parte. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que cada F_i es cerrado. Sea

$$E_{i,k}=\{h\in H: m(h(F_i))<1/k\} \qquad (i,k=1,2,\dots)$$

donde m denota la medida n dimensional de Lebesgue. Entonces el conjunto E de todos los automorfismos tales que $m(h(A))=0$ está representado por $\bigcap_{i,k} E_{i,k}$. Para demostrar el teorema basta hacer ver que los $E_{i,k}$ son todos densos y abiertos.

Sea $h\in E_{i,k} \Rightarrow m(h(F_i))<1/k$. Como $h(F_i)$ es cerrado, $\exists\ \varepsilon>0$ tal que la ε-vecindad $(h(F_i))_\varepsilon$ de $h(F_i)$ tiene medida menor que $1/k$. Sea $g\in H$ tal que $d(g,h)<\varepsilon$. Se tiene que $g(F_i)\subset(h(F_i))_\varepsilon$ $\therefore$ $m(g(F_i))<1/k$ $\Rightarrow g\in E_{i,k} \Rightarrow E_{i,k}$ es abierto.

Para probar que $E_{i,k}$ es denso, consideremos $h\in H$ y sea $\varepsilon>0$; entonces existe $\delta>0 \ni d(g\circ h,h)<\varepsilon$ si $d(g,I)<\delta$, donde I es la transformación identidad. Dividamos I^n en celdas vectangulares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots$ con diámetro menor que δ. En el interior de cada σ_i escojamos una esfera cerrada S_i que no intersecte a $h(F_i)$. (Recordemos que $h(F_i)$ es denso en ninguna parte). Ahora definamos g de manera que expanda cada S_j dentro de σ_j y que deje a la frontera de σ_j fija, de modo que $m(g\circ h(F_i)) < 1/k$. Tal automorfismo g puede ser definido conveniente mediante una expansión y una contracción lineal a lo largo de cada recta radial desde el centro de S_j hasta la frontera de σ_j. Como g mueve a cada punto a una distancia menor que δ, tenemos que $d(g, I) < \delta \Rightarrow d(g\circ h, h) < \varepsilon$ $\Rightarrow g\circ h \in E_{i,k} \Rightarrow E_{i,k}$ es denso. $\square$

Como (H, d) es completo, existe un automorfismo de I^n que mapea a A en un conjunto de medida cero. Si se desea, el automorfismo puede escogerse de manera que deje la frontera de I^n fija, ya que la prueba anterior se puede aplicar sin cambio alguno al subespacio completo de los automorfismos que dejan los puntos de la frontera fijos. Podemos ahora deducir el siguiente:

<u>Teorema 8.14</u>.- Todo conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a un conjunto de medida n dimensional cero bajo un atomorfismo de $\mathbb{R}^n$.

Dem: Basta dividir el espacio en cubos unitarios y transformar la intersección del conjunto con cada cubo en un conjunto de medida cero; si en cada cubo aplicamos un automorfismo que deje la frontera fija, éstos automorfismos nos definirán un automorfismo de todo el espacio que mapea al conjunto de primera categoría en uno de medida cero. $\square$

Los resultados anteriores fueron probados por primera vez en 1919 por L.E.J. Brower; las demostraciones se deben a John C. Oxtoby y a S.M. Ulam (1938). Desgraciadamente, este resultado es inadecuado para nuestros propósitos, ya que dicha transformación no manda secciones en secciones. Lo que necesitamos es una versión mas fuerte del Teorema de Brower, que nos diga que podemos tomar el automorfismo como un homeomorfismo producto (es decir, un homeomorfismo h de la forma $h = f \times g$). Estableceremos la existencia de tal automorfismo de manera similar. Denotaremos por $m \times m$ la medida de Lebesgue en dimensión 2.

Teorema 8.15: Si E es un subconjunto de primera categoría del plano contenido en el cuadrado unitario, existe un automorfismo h de éste tal que $m \times m(h(E)) = 0$.

Dem: Sea (H, d) el espacio de los automorfismos del intervalo unitario que dejan los extremos fijos, donde $d(g,h) = \max |g(x) - h(x)|$. Sea H^2 el conjunto de todos los automorfismos del cuadrado unitario de la forma $f \times g$, donde $f, g \in H$. (H^2 puede identificarse con el producto cartesiano $H \times H$). Si $h_1 = f_1 \times g_1$ y $h_2 = f_2 \times g_2$ definimos $\sigma(h_1, h_2) = d(f_1, f_2) + d(g_1, g_2)$.

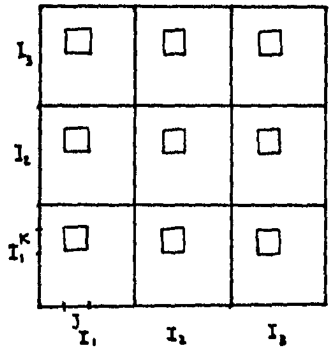
Es inmediato verificar que (H^2, σ) es un espacio métrico y que lo podemos remetrizar para que sea completo. (Toda remetrización de H induce una correspondiente remetrización de H^2).

Sea F un conjunto denso en ninguna parte contenido en el cuadrado unitario. $\forall k \in \mathbb{N}$ definamos $E_k = \{h \in H^2 : m \times m(h(F)) < 1/k\}$. Entonces $\forall h \in E_k$ el compacto $h(F)$ se puede cubrir con un abierto $G \subset \mathbb{R}^2$ tal que $m \times m(G) < 1/k$; además, $\exists \delta > 0$.∋. G contiene a la bola de radio δ con centro en cada punto de $h(F)$. Entonces, si $\sigma(g,h) < \delta \Rightarrow g(F) \subset G \Rightarrow g \in E_k \therefore E_k$ es abierto.

Para probar que E_k es denso, sea $\varepsilon > 0$ y sea $n > 2/\varepsilon$, dividamos el intervalo unitario en n subintervalos cerrados iguales:

$I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Sea $F_{ij} = F \cap (I_i \times I_j)$, y sea T_{ij} la traslación dada por $x' = x - \frac{i-1}{n}$, $y' = y - \frac{j-1}{n}$. Entonces la unión finita $\bigcup_{i,j} T_{ij}(F_{ij})$ es un conjunto denso en ninguna parte en $I_1 \times I_1$. Sean J y K intervalos cerrados contenidos en I_1° tales que $J \times K \subset (I_1 \times I_1) - \bigcup_{i,j} T_{ij}(F_{ij})$. Entonces $[(i-1) + J] \times [(i-1) + K] \subset [(I_i \times I_j) - F]$. En cada uno de los $I_i \times I_j$, el complemento de F contiene un rectángulo congruentemente situado, como lo muestra la ilustración (para $n=3$):



Sea f_1 un automorfismo de I_1 que deja los extremos fijos $\ni$ $m(f_1(J)) > \sqrt{1-1/k}\, m(I_1)$; de manera similar, sea g_1 tal que $m(g_1(K)) > \sqrt{1-1/k}\, m(I_1)$, y definamos

$f_i(x) = \frac{i-1}{n} + f_1\left(x - \frac{i-1}{n}\right)$, $x \in I_i$; $g_j(y) = \frac{j-1}{n} + g_1\left(y - \frac{j-1}{n}\right)$, $y \in I_j$

Como cada f_i deja los extremos fijos, éstas definen una transformación lineal por pedazos $f \in H$. Analogamente las g_i definen una $g \in H$. Entónces $f \times g$ mapea todo cuadrado $I_i \times I_j$ sobre sí mismo, por lo tanto su distancia de la identidad (de H^2) es menor que ε (recordemos que $\frac{2}{n} < \varepsilon$).

Como $m(g_1(K)) > \sqrt{1-1/k}\, m(I_1)$ y $m(f_1(J)) > \sqrt{1-1/k}\, m(I_1)$, se tiene que $m\times m(J \times K) > (1-1/k)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{kn^2} \Rightarrow m\times m(h(F_{ij})) < 1/kn^2 \Rightarrow$ $m\times m(h(F)) < 1/k$. Entonces para todo F denso en ninguna parte, la ε-vecindad de la identidad en H^2 contiene puntos de E_k.

Si aplicamos este resultado a $\phi(F)$, para cualquier $\phi \in H^2$ dada, obtenemos un $h \in H^2$ tal que $m\times m(h \circ \phi(F)) < 1/k$ y $\sigma(h\circ\phi, \phi) < \varepsilon$. Esto muestra que E_k es denso en H^2.

Si E es de primera categoría en $I \times I \Rightarrow E \subset \bigcup F_i$, donde F_i es cerrado denso en ninguna parte. $\forall i,k \in \mathbb{N}$ sea

$E_{ik} = \{h \in H^2 : m\times m(h(F_i)) < 1/k\}$.

Como E_{ik} es denso y abierto en H^2, existe $h \in \bigcap_{i,k} E_{ik}$, y para dicha h tenemos que $m\times m(h(E)) = 0$. $\square$

Probaremos ahora la generalización de este teorema para un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^2$; para lo cual necesitamos el siguient resultado [ ]: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ inyectiva y de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $G \subset \mathbb{R}^2$ abierto, con Jacobiano $J_{f(u,v)} \neq 0$ $\forall (u,v) \in G$, y sea $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua sobre $f(G)$, entonces $\int_{f(F)} g = \int_F (g \circ f) |J_f|$.

Tenemos ahora que si f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ con Jacobiano positivo, f manda conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero, ya que si $m\times m(E) = 0$, entonces $\int_E (1_d \circ f)|J_f| = 0 = \int_{f(E)} 1_d \Rightarrow$ $m\times m(f(E)) = 0$.

Teorema 8.16: Para todo $E \subset \mathbb{R}^2$ de primera categoria existe $h \in H^2$ tal que $m\times m(h(E)) = 0$.

Dem: Sea $f(x) = \tan \pi(x - \frac{1}{2})$, $x \in (0,1)$. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo. Sea $g = f \times f$, entonces g mapea el interior de $I \times I$ en $\mathbb{R}^2$. Como f' es continua y positiva, g y g^{-1} mandan conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero.

Si E es de primera categoría en $\mathbb{R}^2$, $g^{-1}(E)$ es de primera categoría en $I \times I$ $\therefore$ $\exists h \in H^2$ $\cdot\!\ni\!\cdot$ $h \circ g^{-1}(E)$ tiene medida cero $\Rightarrow$ $g \circ h \circ g^{-1}$ es un homeomorfismo producto que manda a E en un conjunto de medida cero. $\square$

Demostraremos ahora, para finalizar este capítulo, que el Teorema de Fubini implica el Teorema de Kuratowski - Ulam: sea $E \subset \mathbb{R}^2$ denso en ninguna parte, entonces cada sección E_x es denso en ninguna parte o contiene un intervalo. Sea $V_1, V_2, \ldots$ una enumeración de todos los intervalos abiertos con extremos racionales. Sea $F_i = \{x : E_x \supset V_i\}$. F_i es cerrado en $\mathbb{R}$, ya que $F_i = \bigcap_{y \in V_i} E^y$ y cada E^y es cerrado. El conjunto $A = \bigcup F_i$, que es el conjunto de todas las x para las cuales E_x no es de primera categoría, es un F_σ.

Sea $h = f \times g$ un homeomorfismo del plano en sí mismo tal que $m\times m(h(E)) = 0$. $\forall x \in A$, E_x contiene algún intervalo V_i. La sección $(h(E))_{f(x)}$ no tiene medida cero, ya que $(h(E))_{f(x)} \supset g(E_x) \supset g(V_i)$ *

$\Rightarrow f(A) \subset B = \{x : (h(E))_x$ tiene medida positiva$\}$. Aplicando el Teorema de Fubini, se tiene que $m(B) = 0 \Rightarrow f(A)$ es un F_σ de medida cero $\Rightarrow f(A)$ (y por lo tanto tambien A) es de primera categoría, por el Teorema 7.4.

9

En el año de 1899, Poincaré publicó un teorema que es de especial interés para nosotros, ya que en su demostración anticipó las nociones de medida y categoría; este resultado es también muy importante por haber iniciado la Teoría Ergódica. En este capítulo demostraremos este teorema (conocido como Teorema de Recurrencia) y algunas consecuencias inmediatas. Probaremos también la Ley 0-1 de Kolmogorov y su correspondiente análogo en categoría; y veremos hasta donde llega la analogía entre medida y categoría en este caso. Antes de formular el Teorema de Recurrencia necesitamos varias definiciones:

<u>Definición 9.1:</u> Sea X una región abierta acotada en $\mathbb{R}^n$ y sea $T: X \to X$ un homeomorfismo que preserva volumen (es decir, $\forall G \subset X$ abierto, G y $T(G)$ tienen el mismo volumen).

a) Bajo iteración de T, todo punto x genera una sucesión $x, Tx, T^2x, \ldots, T^ix, \ldots$ a la que llamamos la <u>semiorbita positiva de x</u>.

b) Sea G abierto, decimos que un punto $x \in G$ es <u>recurrente</u> con respecto a G si $T^ix \in G$ para un número infinito de enteros positivos i.

Poincaré enunció originalmente su teorema de la siguiente manera:

<u>Teorema 9.2:</u> Para todo conjunto abierto $G \subset X$, todos los puntos de G son recurrentes con respecto a G excepto un conjunto de primera categoría y de medida cero.

Originalmente, la afirmación categórica quedó escondida en la discusión de Poincaré: empezó demostrando que los puntos recurrentes son densos en G y su prueba involucraba la construcción de una sucesión anidada de regiones; lo cual podemos interpretar como una demostración del Teorema de Baire para este caso particular. Como es fácil probar que el conjunto de puntos recurrentes con respecto a G es un G_δ, esta afirmación (categórica) se le atribuye a Poincaré, aunque no la haya enunciado explícitamente.

La afirmación de medida fué formulada en términos de probabilidad; para su demostración, Poincaré asumió la propiedad de aditividad numerable de la probabilidad, aunque en su época todavía no se había probado. Esta parte fué reformulada en lenguaje moderno por K. Carathéodory en 1919.

Las definiciones que daremos a continuación son algunos de los conceptos básicos en Teoría Ergódica (conjunto errante, transformación disipativa, propiedad de recurrencia) y nos permitiran enunciar y demostrar nuestro siguiente resultado.

Seguidamente veremos que dicho resultado demuestra la parte de medida y la parte de categoría del Teorema de Recurrencia de Poincaré.

<u>Definiciones 9.3:</u> Sean X un conjunto, S un σ-anillo de subconjuntos de X y sea I un σ-ideal en S.

a) Una transformación $T: X \to X$ decimos que es <u>S-medible</u> si $T^{-1}E \in S$ siempre que $E \in S$.

b) Un conjunto $E \subset X$ se llama <u>errante</u> si los conjuntos $E, T^{-1}E, T^{-2}E, \ldots$ son ajenos dos a dos.

c) Se dice que T es <u>disipativa</u> (rel I) si existe un conjunto errante en $S-I$, de otro modo decimos que T es no disipativa.

d) $\forall E \subset X$, definimos $D(E) = \{x \in E : T^i x \in E$ para a lo mas un número finito de i's; $i \geq 0, i \in \mathbb{Z}\}$.

e) Se dice que T tiene la <u>propiedad de recurrencia</u> (rel I) si $D(E) \in I$, $\forall E \in S$.

<u>Teorema 9.4:</u> Una transformación S-medible $T: X \to X$ tiene la propiedad de recurrencia (rel I) si y solo si T es no disipativa (rel I).

Dem: Supongamos que T es no disipativa. Sea $E \in S$ y sea $F = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}E$. Como T es S-medible y S es un σ-anillo, $F \in S$. $\forall\, 0 \leq i < j \in \mathbb{Z}$, tenemos: $T^{-i}F \cap T^{-j}F \subset T^{-j}E - \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-j-k}E = \emptyset$. Lo que muestra que F y cada uno de los $T^{-k}F$ $(k=1,2,\dots)$ es un conjunto errante. Como T es no disipativa y cada uno de estos conjuntos está en $S \Rightarrow T^{-k}F \in I$, $\forall k \geq 0$. Como I es un σ-ideal $\Rightarrow$ $\bigcup_{0}^{\infty} T^{-k}F \in I \Rightarrow H = E \cap \bigcup_{0}^{\infty} T^{-k}F \in I$. Pero $T^{-k}F$ es el conjunto de todos los puntos x tales que $T^{k}x \in E$ y $T^{i}x \in \mathfrak{X} - E$ $\forall i > k$ $\therefore H = D(E)$. Hemos demostrado que $D(E) \in I$, $\forall E \in S$, esto es, T tiene la propiedad de recurrencia.

$\Rightarrow$) Si T es disipativa, existe un conjunto errante $E \in S - I$. Entonces $D(E) = E$ y tenemos que $E \in S$ y $D(E) \notin I \Rightarrow T$ no tiene la propiedad de recurrencia. $\square$

Mostraremos ahora que las dos partes del teorema 9.2 son implicadas por el teorema 9.4:

Supongamos primero que T es una transformación inyectiva que preserva medida de una región acotada $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^{n}$ en sí misma. Tomemos como S a la σ-álgebra de los subconjuntos borelianos de $\mathfrak{X}$ y como I el σ-ideal de los conjuntos de medida cero; entonces T resulta ser S-medible. Como estamos trabajando con la medida de Lebesgue, la medida de $\mathfrak{X}$ es finita y por lo tanto todo conjunto errante tiene medida cero; lo cual implica que T es no disipativa y por lo tanto tiene la propiedad de recurrencia. Es decir, hemos demostrado que <u>dado un conjunto boreliano E, casi todos sus puntos (en el sentido de medida) regresan un número infinito de veces a él bajo iteración de T</u>; en particular, $\forall G \subset \mathfrak{X}$ abierto, todos los puntos de G excepto un conjunto de medida cero son recurrentes bajo T. Con esto queda demostrada la parte referente a medida del Teorema de Poincaré.

Por otro lado, supongamos que T es un homeomorfismo de un espacio métrico $\mathfrak{X}$ en sí mismo, con la propiedad de que no hay ningún conjunto errante abierto distinto del vacío, y sean S la σ-álgebra de los conjuntos de tipo Baire e I el σ-ideal de los conjuntos de primera categoría; entonces T es S-medible. Aplicando el Teorema de Categoría de Banach, que dice que en cualquier espacio topológico la unión arbitraria de conjuntos abiertos de primera categoría es de primera categoría [ ], es fácil ver que existe un conjunto maximal H abierto de primera categoría. Sea $Y = X - \bar{H}$, entonces todo subconjunto abierto de Y es de segunda categoría. Evidentemente H, así como $\bar{H}$, son invariantes bajo T y por lo tanto, Y también lo es.

Sea E un conjunto errante que tiene la propiedad de Baire, digamos $E = G \Delta P$, con G abierto y P de primera categoría, podemos suponer que $G \subset Y$. Para todos $0 \leq i < j$ enteros tenemos que $T^{-i}E \cap T^{-j}E = \phi \Rightarrow T^{-i}G \cap T^{-j}G = (T^{-i}P \cap T^{-j}G) \Delta (T^{-i}G \cap T^{-j}P) \Delta (T^{-i}P \cap T^{-j}P) \subset$
$\subset (T^{-i}P \cup T^{-j}P)$, lo cual implica que $T^{-i}G \cap T^{-j}G$ es un subconjunto abierto de Y de primera categoría y por lo tanto es vacío.

En otras palabras, si G es un conjunto errante abierto $\Rightarrow$ $G = \phi$, lo cual quiere decir que todo conjunto errante que tiene la propiedad de Baire es de primera categoría; entonces T es no-disipativa y por lo tanto tiene la propiedad de recurrencia. Es decir, <u>si E es un conjunto de tipo Baire, todo punto de E excepto un conjunto de primera categoría visita a E un número infinito de veces bajo iteración de T.</u> En particular si G es abierto, todo punto de G excepto un conjunto de primera categoría es recurrente con respecto a G.

Al teorema 9.2 se le conoce usualmente como el Teorema de recurrencia de Poincaré, aunque en realidad este nombre le corresponde al siguiente teorema; para su demostración necesitamos la siguiente:

<u>Definición 9.5:</u> Un punto x se dice que es <u>recurrente bajo T</u> si es recurrente con respecto a toda vecindad de sí mismo.

<u>Teorema 9.6:</u> (Teorema de Recurrencia de Poincaré). Si T es un homeomorfismo que preserva medida de una región abierta acotada $X \subset \mathbb{R}^n$ en sí misma, todos los puntos de X excepto un conjunto de primera categoría y de medida cero son recurrentes bajo T.

Dem: Sea $U_1, U_2, \ldots$ una base numerable para la topología de X, y sea $E_k = \{x \in U_k : T^i x \in U_k$ para a lo mas un número finito de enteros positivos $i\}$.

Por el teorema 9.2, cada uno de los E_k es un conjunto nulo de primera categoría $\Rightarrow E = \bigcup E_k$ es un conjunto de primera categoría y de medida cero. Si $x \in X - E$, y si U es una vecindad de $x \Rightarrow x \in U_k \subset U$ para alguna k y $x \notin E_k \Rightarrow T^i x \in U$ para un número infinito de i's $\therefore$ todo punto de $X - E$ es recurrente bajo T. $\square$

Posteriormente se ha demostrado, dentro del estudio de las transformaciones que preservan medida, que el teorema de Poincaré puede ser considerablemente mejorado. El Teorema Ergódico de Birkhoff-Kintchine (1931) afirma que bajo una transformación preservadora de medida de un conjunto de medida finita en si mismo, no solamente tenemos que todos los puntos (excepto un conjunto de medida cero) de un conjunto medible E regresan a E un número infinito de veces bajo iteraciones positivas de T, sino que regresan con una frecuencia bien definida. Mas precisamente, la frecuencia relativa $f_E(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(T^i x)$ existe y es positiva para casi toda $x \in X$.

De hecho puede probarse que si T es ergódica (esto es, si $T^{-1}A = A \Rightarrow m(A) = 0$ ó $m(X - A) = 0$) entonces $f_E(x) = \frac{m(E)}{m(X)}$ para casi toda $x \in X$. Mas aún, podemos considerar "promedios temporales" de funciones mas complicadas que χ_E, por ejemplo $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x)$ con $g \in L_1(m)$. En este contexto el teorema ergódico individual afirma que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) = g^*(x)$ existe para casi toda $x \in X$, $g^* \in L_1(m)$ y $\int_X g\,dm = \int_X g^*\,dm$; y si T es ergódica entonces $g^*(x) = \frac{1}{m(X)} \int_X g\,dm$ para casi toda $x \in X$.

Curiosamente, este refinamiento del Teorema de Poincaré resulta ser en general falso en el sentido de categoría; el conjunto en donde $f(x)$ está definida puede ser solamente de primera categoría.

La analogía entre categoría y medida llega bastante lejos aquí, pero eventualmente se rompe. A continuación desarrollamos un ejemplo que describe esta situación.

Si $\{X_i\}$ es una sucesión de conjuntos, el producto Cartesiano $X = \prod X_i$ es el conjunto de todas las sucesiones x_i, con $x_i \in X_i$; esto es $X = \{x : \mathbb{N} \to \bigcup X_i \mid x_i \in X_i, \forall i\}$.

Si los conjuntos X_i son espacios métricos (o topológicos), determinan una métrica (o topología) correspondiente en X. Si los X_i son espacios de medida normalizados, determinan un espacio de medida normalizado. No nos extenderemos sobre estos conceptos aquí, sino que enfocaremos nuestra atención sobre un caso particular:

Sea $X_i = \{0,1\}$, entonces X es el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos. Consideramos cada X_i con la topología discreta y consideramos la topología producto en X. Asimismo, tomamos la probabilidad producto p en X, generada por $p_i(\{0\}) = \frac{1}{2} = p_i(\{1\})$, $\forall i$.

<u>Definición 9.7.</u>- Un conjunto $E \subset X$ se llama un <u>conjunto cola</u> si siempre que $x \in E$ y y difiere de x por un número finito de coordenadas, entonces $y \in E$.

El hecho de pertenecer a un conjunto cola depende solamente de la "cola" de la sucesión $\{x_i\}$. Esta idea la podemos expresar, quizá más convenientemente, de la siguiente manera: sean $X^n = \prod_{1}^{n} X_i$ $\quad Y^n = \prod_{n+1}^{\infty} X_i$. Entonces $X = X^n \times Y^n$ para cada n. Un subconjunto de X es un conjunto cola si y solo si para cada n se puede escribir de la forma $X^n \times B_n$, donde $B_n \subset Y^n$.

Un resultado muy importante de medidas producto es la llamada <u>Ley cero-uno de Kolmogorov</u>, que en el espacio que estamos considerando dice lo siguiente:

<u>Teorema 9.8:</u> Si E es un conjunto cola medible en X, entonces $m(E) = 1$ o $m(E) = 0$.

Dem: Sea $A_n \subset X^n$, y pongamos $F = A_n \times Y^n$. Sea $E = X^n \times B_n$, donde $B_n \subset Y^n$, para cada n. Entonces $E \cap F = A_n \times B_n$.

Recordemos que en nuestro caso, X^n es un conjunto finito. Si A_n tiene k puntos, $m(F) = k/n$ y $m(A_n \times B_n) = \frac{k}{n} m(X^n \times B_n)$ $\therefore$ $m(E \cap F) = m(E)\, m(F)$.

Todo conjunto medible lo podemos aproximar (en el espacio de los conjuntos medibles) por un conjunto de la forma F, ya que a $g(F)$ lo podemos escribir como una unión finita de subintervalos diádicos de $[0,1]$, donde $g: \mathbb{X} \to [0,1]$ está dada por $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/2^i$. Entonces la ecuación $m(E \cap F) = m(E)\, m(F)$ se cumple para todo conjunto medible F, en particular se cumple cuando $F = E$, por lo tanto $m(E) = 0$ o 1. $\square$

¿Cuál será el análogo en categoría de este teorema?.

<u>Teorema 9.9:</u> Si $E \subset \mathbb{X}$ es un conjunto cola que tiene la propiedad de Baire, entonces E es de primera categoría o es residual.

Dem: Supongamos que E no es residual. Entonces $\mathbb{X} - E = G \Delta P$, con $G \neq \emptyset$ abierto y P de primera categoría. G se puede escribir como unión numerable de abiertos básicos de la forma $U = A_n \times \mathbb{Y}^n$ $\therefore$ G contiene un conjunto U de esta forma, con $A_n \neq \emptyset$.

Por hipótesis, $E = \mathbb{X}^n \times B_n$ $\therefore$ $U \cap E = A_n \times B_n$. Además:
$A_n \times B_n \subset G \subset (\mathbb{X} - E) \cup P \Rightarrow A_n \times B_n \subset E \cap [(\mathbb{X} - E) \cup P] \subset P \Rightarrow A_n \times B_n$ es de primera categoría. Como $A_n \neq \emptyset$ es subconjunto del espacio discreto $\mathbb{X}^n$, es de segunda categoría; entonces, por el teorema 8.10, B_n es de primera categoría en $\mathbb{Y}^n$. $\therefore$ $E = \mathbb{X}^n \times B_n$ es de primera categoría en $\mathbb{X}$. $\square$

Para ilustrar el teorema anterior, tomemos a E_n como el conjunto de todas las sucesiones $\{x_i\}$ tales que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1/2$. Es fácil ver que este es un conjunto cola Boreliano. Se sigue entonces que $m(E) = 0$ o $m(E) = 1$, y que E es de primera categoría o $\mathbb{X} - E$ es de primera categoría. No es difícil demostrar que E es de primera categoría, (es consecuencia de que un conjunto cola depende solamente de la "cola" de la sucesión $\{x_i\}$, ya que podemos entonces escoger los primeros terminos de la sucesión como queramos)

Por otro lado, la Ley de los números grandes de Borel (la cual es un caso particular del Teorema Ergódico), implica que $m(E) = 1$; esto quiere decir que el análogo en categoría de la Ley de los números grandes es falso. Por lo tanto la analogía entre medida y categoría llega a la Ley cero-uno, pero no a la Ley de los números grandes [4]. Así pues, hemos exhibido el ejemplo buscado.

En este capítulo daremos un ejemplo mas de como el método categórico se usa como herramienta para demostraciones de existencia: encontraremos un automorfismo del cuadrado unitario tal que exista algún punto con semiorbita positiva densa. La solución de este problema se obtuvo la primera vez mediante este método.

Definición 10.1.- Sea X un espacio topológico y sea $T: X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que T es transitivo si existe $x \in X$ su órbita $\{T^n x : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es densa en X.

Proposición 10.2.- Si X es un espacio métrico separable completo y sin puntos aislados, la existencia de un punto con tal propiedad implica que los puntos que tienen semiorbita positiva densa en X constituyen un conjunto residual.

Dem.- Sea $\{U_i\}$ una base numerable para X, y sean

$$G_j = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} U_j \quad (j = 1, 2, \dots) \qquad E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$$

Entonces $x \in E$ si y solo si su semiorbita positiva es densa en X. Sean $i, j \in \mathbb{N}$ arbitrarios, entonces $T^n U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ó $U_i \cap T^n U_j \neq 0$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. En el segundo caso, tanto x como $T^m x$ pertenecen a $T^n U_i \cap U_i$ para alguna $x \in X$ y alguna $m > n$, ya que todo abierto no vacío contiene un número infinito de puntos de cualquier órbita densa. En cualquier caso, $U_i \cap G_j \neq \emptyset$. Entonces G_j es denso y abierto, lo cual implica que E es residual. □

Problema 10.3.- Encontrar un homeomorfismo T del cuadrado unitario cerrado en si mismo tal que la semiorbita positiva de algun punto sea densa en el cuadrado.

Por la proposición 10.2 basta encontrar un homeomorfismo transitivo del cuadrado unitario cerrado en simismo.

Es importante hacer notar que hay espacios que no admiten automorfismos transitivos. Por ejemplo, ningún automorfismo del intervalo unitario en si mismo es transitivo, ya que, como sabemos cualquier automorfismo h del intervalo unitario es monótono. Entonces, $\forall x \in I$, la órbita de x está contenida en $[x,1]$, si h es creciente, o bien está contenida en $[0,x]$ si h es decreciente. En cualquier caso, siempre podemos encontrar un conjunto abierto contenido en $I=[0,1]$ que no intersecta a la órbita de x. Sin embargo, la multiplicación por $e^{2\pi i \alpha}$, con α irracional, define una rotación transitiva del círculo unitario en el plano complejo.

Consideremos H el espacio de los automorfismos del cuadrado unitario $\mathbb{I}$, con la métrica uniforme $d(S,T) = \sup|Sx - Tx|$. Como en el caso unidimensional, a H lo podemos remetrizar para hacerlo completo.

Supongamos que T es una transformación transitiva y x es un punto cuya semiorbita positiva es densa en $\mathbb{I}$. Sea $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño para que la bola con centro en x y radio ε $B_\varepsilon(x)$ esté totalmente contenida en $\mathbb{I}$. Sea n el menor entero positivo tal que $|x-T^n x|<\varepsilon$. Sea U una bola <u>abierta</u> con centro x y radio menor que ε tal que $T^n x \in U$ y $Tx, T^2x, \ldots, T^{n-1}x \in \mathbb{I} - \overline{U}$. Entonces podemos encontrar una bola cerrada D con centro en x tal que $D, T^n(D) \subset U$ y $T(D), T^2(D), \ldots, T^{n-1}(D) \subset \mathbb{I} - U$.

Sea S un automorfismo de $\mathbb{I}$ definido como la identidad en el complemento de U, y en el interior de U como una contracción radial que manda a $T^n(D)$ en un subconjunto del interior de D. Entonces $S \circ T$ es un automorfismo de $\mathbb{I}$ tal que $(S\circ T)^n$ manda a D en un subconjunto de su interior. En consecuencia, $S\circ T$ no es transitivo, como tampoco lo es ningún automorfismo cercano a él en H. Pero $d(S\circ T, T) < \varepsilon$! . Esto nos muestra que los automorfismos transitivos forman un conjunto denso en ninguna parte en H. Todo parece indicar que hemos fallado al utilizar el método categórico en nuestro problema.

Pero supongamos ahora que T es una transformación preservadora de medida. Entonces es apropiado considerar el espacio M de las transformaciones que preservan medida, con la misma métrica. Para ver que a M lo podemos remetrizar para hacerlo completo, basta demostrar que M es un subespacio cerrado de H; para lo cual necesitamos el siguiente:

<u>Lema 10.4:</u> Si $\{S_n\}$ es una sucesión en H y $S_n \xrightarrow{d} S \Rightarrow \forall E$ medible $\ni$ $m(\partial(S^{-1}(E)))=0$ se tiene que $m(S_n^{-1}(E)\,\Delta\, S^{-1}(E)) \to 0$.

Dem: $m(S_n^{-1}(E)\,\Delta\, S^{-1}(E)) = \int_{\mathbb{X}} |\chi_{S_n^{-1}(E)}(x) - \chi_{S^{-1}(E)}(x)|\,dm$

$$= \int_{S^{-1}(E^\circ)} |\chi_{S_n^{-1}(E)}(x) - \chi_{S^{-1}(E)}(x)|\,dm + \int_{S^{-1}(\mathbb{X}-E^{-})} |\chi_{S_n^{-1}(E)}(x) - \chi_{S^{-1}(E)}(x)|\,dm$$

pero $\chi_{S_n^{-1}(E)}(x) \to \chi_{S^{-1}(E)}(x)$ si $x \in \mathbb{X} - \partial(S^{-1}(E))$. Se sigue del teorema de convergencia dominada que ambas integrales se van a cero, cuando $n \to \infty$. $\square$

<u>Teorema 10.5:</u> $M \subset H$ es d-cerrado.

Dem: Sea $S \in \bar{M}$, hallamos $\{S_n\}$ en M tal que $S_n \xrightarrow{d} S$.

P.D: $m(S^{-1}(E)) = m(E)$ $\forall E$ medible.

Probaremos primero que la igualdad se cumple para todo conjunto cerrado E. Sea $E \subset \mathbb{X}$ cerrado y definamos $E^\delta = \{y \in \mathbb{X} : |y-x|<\delta$ para alguna $x \in E\}$ para toda $\delta>0$. Claramente E^δ es abierto en $\mathbb{X}$, $E = \bigcap_{\delta>0} E^\delta$ y $S^{-1}(E) = \bigcap_{\delta>0} S^{-1}(E^\delta)$. Tambien es claro que $\partial(S^{-1}(E^\delta)) \subset \{x \in \mathbb{X} : d(Sx, E) = \delta\}$. Entonces $m(\partial(S^{-1}(E^\delta))) = 0$ excepto en un conjunto numerable de δ's no negativas; en consecuencia es posible hallar una sucesión (δ_r) tal que $\delta_r \searrow 0$ y $m(\partial(S^{-1}(E^{\delta_r}))) = 0$ $\forall r$. Dado $\varepsilon>0$ hallamos $r_0 = r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m(E^{\delta_r} - E) < \varepsilon/3$ y $m(S^{-1}(E^{\delta_r} - E)) < \varepsilon/3$ $\forall r \geq r_0$.

Hallamos (por el lema anterior) $N_0 = N_0(\varepsilon, r_0)$ $\ni$ si $n \geq N_0 \Rightarrow$ $m(S_n^{-1}(E^{\delta_{r_0}})\,\Delta\, S^{-1}(E^{\delta_{r_0}})) < \varepsilon/3 \Rightarrow$

$$|m(S^{-1}(E)) - m(E)| \leq |m(S^{-1}(E)) - m(S^{-1}(E^{\delta_{r_0}}))| + |m(S^{-1}(E^{\delta_{r_0}})) - m(S_n^{-1}(E^{\delta_{r_0}}))| + |m(S_n^{-1}(E^{\delta_{r_0}})) - m(E)|$$

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + |m(E^{\delta_{r_0}}) - m(E)| < \varepsilon$$

Ahora bien, si F es un medible arbitrario, se sigue de la regularidad de m y $m\circ S^{-1}$ (y del hecho de que S es un homeomorfismo) que existe (E_n) una sucesión creciente de cerrados tal que $E_n\subset F$, $m(F)=\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$ y $m(S^{-1}(F))=\lim\limits_{n\to\infty} m(S^{-1}(E_n))$ $\Rightarrow$

$$m(S^{-1}(F))=\lim_{n\to\infty} m(S^{-1}(E_n))=\lim_{n\to\infty} m(E_n)=m(F). \quad \square$$

Regresemos a nuestro problema: sea $\{U_i\}$ una ennumeración de todos los cuadrados abiertos con vértices racionales contenidos en I. Para cualesquiera $i,j\in\mathbb{N}$, sea $E_{ij}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{T\in M : U_i\cap T^{-k}U_j\neq\emptyset\}$.

No es difícil demostrar que E_{ij} es abierto en M. ¿Será denso? Consideremos los siguientes conjuntos $P_{ij}=\{T\in M : T^{j}x=x\ \forall x\in U_i\}$ y $P=\bigcup\limits_{i,j}P_{ij}$.

Evidentemente P_{ij} es cerrado en M. Si $T\in P_{ij}$, todo punto de U_i tiene como periodo un divisor de j. Entonces podemos encontrar un disco $D\subset U_i$ con radio arbitrariamente pequeño, tal que para alguna $k\in\mathbb{N}$ (k un divisor de j), los conjuntos $D, T(D),\ldots$ $\ldots, T^{k-1}(D)$ son disjuntos y T^k es igual a la identidad en D.

Sea $S\in M$ definido como la identidad en el complemento de D, y en D rota un anillo concéntrico a través de un múltiplo irracional de π. Entonces ningún punto de este anillo es periódico bajo $S\circ T$, por lo tanto $S\circ T\in M-P_{ij}$ y $d(S\circ T, T)$ es arbitrariamente pequeña. En consecuencia P_{ij} es denso en ninguna parte y P es de primera categoría en M. El conjunto $M-P$ está formado por todos los automorfismos preservadores de medida del cuadrado unitario que tienen puntos no periódicos en todo subconjunto abierto no vacío del cuadrado. Claramente ahí debemos buscar a nuestro candidato T.

Para cualesquiera $i,j\in\mathbb{N}$ y $T\in M-P$, y para toda $\varepsilon>0$, construiremos una transformación S de la siguiente manera: tracemos un segmento de recta que una un punto de U_i con un punto de U_j; escojamos puntos $p_1, p_2,\ldots, p_{N+1}$ en este segmento tales que $p_1\in U_i$, $p_{N+1}\in U_j$ y $|p_k-p_{k+1}|<\varepsilon/2$ $(k=1,2,\ldots,N)$. Sea $\delta>0$ tal que $\delta<\frac{1}{2}\min|p_k-p_{k+1}|$ y las δ-vecindades de p_1 y p_{N+1} están contenidas en U_i y U_j respectivamente. Encontremos un punto no periodico x_1 en la δ-vecindad de p_1 tal que algún punto $T^{n_1}x_1$ de su semiorbita positiva esté en la misma vecindad. (Esto lo podemos hacer por que, como demostramos en el capítulo anterior, los puntos recurrentes bajo T forman un conjunto residual en el cuadrado, al igual que los puntos no periódicos, para toda $T \in M-P$).

De la misma manera, para $k=2,3,\dots,N+1$ escojamos un punto no periódico x_k en la δ-vecindad de p_k tal que $T^{n_k}x_k$ esté en la misma vecindad, para alguna $n_k > 0$. Aun mas, escojamos x_k de tal manera que no pertenezca a la orbita de ninguno de los puntos $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Entonces todos los puntos del conjunto

$$F = \{T^n x_k : 0 \leq n \leq n_k,\ 1 \leq k \leq N+1\}$$

son disjuntos y

$$|T^{n_k}x_k - x_{k+1}| \leq |T^{n_k}x_k - p_k| + |p_k - p_{k+1}| + |p_{k+1} - x_{k-1}| < \delta + \varepsilon/2 + \delta < \varepsilon$$

$$\forall k = 1,2,\dots,N.$$

Entonces existen regiones abiertas disjuntas $R_1, R_2, \dots, R_N$ con diámetro menor que ε tales que $R_k \cap F = \{T^{n_k}x_k, x_{k+1}\}$ $(k=1,2,\dots,N)$ (Podemos tomar a R_k como la vecindad alrededor de un arco apropiado de $T^{n_k}x_k$ a x_{k+1}).

Podemos definir ahora una transformación $S \in M$ como la identidad en el complemento de las regiones $R_1, R_2, \dots, R_N$ y que nos lleve a $T^{n_k}x_k$ en x_{k+1}. Entonces el automorfismo $(S \circ T)^{n_1+n_2+\dots+n_N}$ manda a x_1 en x_{N+1}. Por lo tanto $S \circ T \in E_{ij}$ y como $d(S \circ T, T) < \varepsilon$, se sigue que E_{ij} es denso en M. Por el teorema de categoría de Baire, $\bigcap_{i,j} E_{ij}$ es un conjunto G_δ denso en M y por lo tanto es no vacío. $\forall T \in \bigcap E_{ij}$ se tiene que $U_i \cap [\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} U_j] \neq \emptyset$ $\forall i,j$.

Entonces el conjunto $G_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} U_j$ es denso y abierto en el cuadrado $\Rightarrow \bigcap G_j \neq \emptyset$. $\forall x \in \bigcap G_j$, la sucesión $x, Tx, T^2x, \dots$ es densa en el cuadrado. En consecuencia, toda T en $\bigcap E_{ij}$ es transitiva.

11.

En este capítulo estudiaremos ciertos espacios en donde la dualidad entre medida y categoría no solamente es válida, sino que son el mismo concepto; veremos que dichos espacios, a los que llamaremos espacios de medida categórica. tienen propiedades topológicas poco usuales. A lo largo de este capítulo restringiremos nuestra atención a espacios topológicos regulares, esto es, espacios Hausdorff donde toda vecindad de un punto contiene una vecindad cerrada del mismo punto. Todo espacio compacto y Hausdorff es regular y de Baire; y todo subespacio de un regular es regular.

<u>Definición 11.1</u>:- Si X es un espacio topológico de medida finita μ definida sobre la σ-álgebra S de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire; y si $\mu(E)=0 \iff E$ es de primera categoría, entonces a (X,S,μ) se le llama un <u>espacio de medida categórica</u> y a μ se le llama una <u>medida categórica en X</u>.

Es inmediato comprobar, recordando el teorema 1.13, que el conjunto de los números reales no es un espacio de medida categórica. Antes de discutir la existencia de estos espacios determinaremos algunas de sus propiedades.

Teorema 11.2:- Sea μ una medida categórica en un espacio regular de Baire X. Para cualquier conjunto G abierto y $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F tal que $F \subset G$ y $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$; para todo conjunto cerrado F existe un abierto G tal que $F \subset G$ y $\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon$.

Dem:- Sea $\mathfrak{F}$ una familia maximal de conjuntos abiertos no vacíos U tales que $\bar{U} \subset G$. Todo elemento de $\mathfrak{F}$

tiene medida positiva, por lo que $\mathcal{F}$ es numerable, digamos $\mathcal{F}=\{U_i\}$.

Sea $U=\bigcup U_i$, entonces $U\subset G$; y como $\mathcal{F}$ es maximal, $G\subset\bar{U}$. Entonces $G-U$, por estar contenido en $\bar{U}-U$, es denso en ninguna parte, lo que implica que $\mu(G)=\sum\mu(U_i)$. Sea $\varepsilon>0$ dada y sea n tal que $\sum_{i=1}^{n}\mu(U_i)>\mu(G)-\varepsilon$. Entonces $F=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{U}_i$ es un subconjunto cerrado de G tal que $\mu(F)>\mu(G)-\varepsilon$. Con esto queda demostrada la primera afirmación; la segunda se sigue por complementación. □

Teorema 11.3: Si X es un espacio regular de Baire y μ es una medida categórica en X, todo conjunto de primera categoría en X es denso en ninguna parte.

Dem: Sea P un conjunto de primera categoría, digamos $P=\bigcup N_i$, con N_i denso en ninguna parte. Como $\mu(\bar{N}_i)=0$, por el teorema anterior, tenemos que $\forall i,j\in\mathbb{N}$ existe un conjunto abierto G_{ij} tal que $\bar{N}_i\subset G_{ij}$ y $\mu(G_{ij})<1/2^{i+j}$.

Sea $H_j=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_{ij}$. Entonces H_j es abierto, $P\subset H_j$ y $\mu(\bar{H}_j)=\mu(H_j)<1/2^j$. Sea $F=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bar{H}_j$, entonces F es cerrado y $P\subset F$. Como $\mu(F)=0$, F tiene interior vacío $\therefore$ P es denso en ninguna parte. □

Teorema 11.4: Si μ es una medida categórica en un espacio regular de Baire X, para todo conjunto que tenga la propiedad de Baire se tiene que $\mu(E)=\mu(\bar{E})=\mu(E^\circ)$, y

$$\mu(E)=\begin{cases}\inf\{\mu(G): E\subset G,\ G \text{ abierto}\}\\ \sup\{\mu(F): E\supset F,\ F \text{ cerrado}\}\end{cases}$$

Dem: Sea $E=G\triangle P$, con G abierto y P de primera categoría. Entonces P es denso en ninguna parte, al igual que $\bar{P}$. Como $G-\bar{P}\subset E\subset G\cup P$ se tiene que $G-\bar{P}\subset E^\circ\subset E\subset\bar{E}\subset(\bar{G}\cup\bar{P})$.

Como $(G-\bar{P})$ y $(\bar{G}\cup\bar{P})$ difieren por un conjunto denso en ninguna parte, todos estos conjuntos tienen la misma medida, con lo que queda probada la primera parte del teorema; la segunda parte se sigue del teorema 11.2. □

El teorema 11.3 nos muestra que tan poco usuales son los espacios de medida categórica en el sentido topológico; volviendo nuevamente a $\mathbb{R}$, si éste fuera de medida categórica, los racionales serían densos en ninguna parte!. Sin embargo, el teorema 11.4 nos dice que la medida categórica se parece bastante a la topología.

Consideremos ahora el siguiente problema: dado un espacio de medida finita (X, S, μ), ¿podemos definir una topología en X con respecto a la cual μ sea una medida categórica? Claramente, es necesario suponer que μ debe ser completa, ya que la clase $\mathcal{N}$ de los conjuntos de medida cero tiene que identificarse con la clase de los conjuntos de primera categoría. Como ya vimos en el capítulo 2, todo conjunto abierto se puede escribir de la forma $H - \bar{N}$, donde H es regular y N es denso en ninguna parte. Una topología queda entonces determinada por sus conjuntos regulares y sus densos en ninguna parte.

En un espacio de Baire, cualquier conjunto $E \in S$ (la clase de los conjuntos de tipo Baire) tiene una representación única de la forma $G \Delta P$, donde G es regular y P es de primera categoría (Teorema 2.) Si escribimos $\varphi(E) = G$, entonces φ es una función que elige un representante de cada clase de equivalencia de S módulo los conjuntos de primera categoría.

El hecho de que la intersección de dos conjuntos regulares sea nuevamente un conjunto regular (que se probó en el capítulo 2) implica que φ satisface condiciones similares a las que caracterizan a la densidad de Lebesgue (Teorema 2.). Esto nos sugiere el siguiente método para hacer de un espacio de medida (X, S, μ) un espacio de medida categórica: primero encontramos una función $\varphi : S \to S$ que satisfaga las condiciones 1) — 5) del teorema 2. ; después encontrar una subclase apropiada de $\mathcal{N}$ que actúe como los conjuntos densos en ninguna parte. Nosotros demostraremos que la propia clase $\mathcal{N}$ puede tomarse para este propósito, y lo que obtendremos es una topología maximal correspondiente a φ. Lo primero que necesitamos para seguir nuestro método es el siguiente teorema, debido a Maharam y Von Neumann (1958).

Teorema II.5: Dado un espacio de medida finita completo (X,S,μ), existe una función $\varphi: S \to S$ que satisface las siguientes propiedades, donde $A \sim B$ significa que $\mu(A \Delta B)=0$.

1) $\varphi(A) \sim A$

2) $A \sim B \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$

3) $\varphi(\phi) = \phi$, $\varphi(X) = X$

4) $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$

5) $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$

A una función con tales propiedades se le llama una función de densidad. No probaremos este teorema en general, ya que, como estamos interesados en la medida de Lebesgue, basta recordar la prueba del teorema 2. , donde se vió que la densidad de Lebesgue define una función de este tipo.

Es fácil ahora introducir la correspondiente topología en el caso general; supongamos que (X,S,μ) es un espacio de medida completo y que tenemos una función $\varphi: S \to S$ que satisface las condiciones 1) – 5). Sea $\mathcal{N}$ la clase de los conjuntos de μ-medida cero y definamos

$$\tau = \{\varphi(A) - N : A \in S,\ N \in \mathcal{N}\}$$

Teorema II.6: τ es una topología en X.

Dem: $\phi \in \mathcal{N} \Rightarrow$ por la prop. 3, $X = \varphi(X) - \phi$ y $\phi = \varphi(\phi) - \phi \Rightarrow \phi \in \tau$, $X \in \tau$.

Para probar que τ es cerrada bajo intersecciones, utilicemos la propiedad 4); se tiene entonces que

$$[\varphi(A_1) - N_1] \cap [\varphi(A_2) - N_2] = \varphi(A_1 \cap A_2) - (N_1 \cup N_2).$$

Solamente queda por demostrar que τ es cerrada bajo uniones arbitrarias:

Sea $\mathcal{F} = \{\varphi(A_\alpha) - N_\alpha : \alpha \in I\}$, con $A_\alpha \in S$ y $N_\alpha \in \mathcal{N}$ una subfamilia de τ. Denotemos por b el supremo de las medidas de uniones finitas de miembros de $\mathfrak{F}$, y escojamos una sucesión $\{\alpha_n\}$ tal que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}) = b$. Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}$, entonces $A \in S$, y por la definición de b, $A_\alpha - A \in \mathcal{N}$ $\forall \alpha \in I$.

Como $A_\alpha - (A_\alpha - A) \subset A$, las propiedades 2) y 5) implican que $\varphi(A_\alpha) \subset \varphi(A)$ $\forall \alpha$. Sea $N_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [N_{\alpha_n} \cup (A_{\alpha_n} - \varphi(A_{\alpha_n}))]$, tenemos entonces que $N_0 \in \mathcal{N}$ y $A - N_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\varphi(A_{\alpha_n}) - N_{\alpha_n}] \subset \bigcup_{\alpha \in I} [\varphi(A_\alpha) - N_\alpha] \subset \varphi(A)$. Como los extremos difieren por un conjunto nulo, se tiene que

$$\bigcup_{\alpha \in I} [\varphi(A_\alpha) - N_\alpha] = \varphi(A) - N$$

para alguna $N \in \mathcal{N}$, por la completez de μ. □

Veamos algunas propiedades de esta topología:

<u>Teorema 11.7:</u> Un conjunto $N \subset X$ es denso en ninguna parte (rel. τ) si y solo si $N \in \mathcal{N}$. Todo conjunto denso en ninguna parte es cerrado.

Dem: Si $N \in \mathcal{N} \Rightarrow X - N = \varphi(X) - N \in \tau \Rightarrow$ Todo $N \in \mathcal{N}$ es cerrado. Si $N \in \mathcal{N}$ y $\varphi(A_1) - N_1 \subset N$ para algún $A_1 \in S$ y algún $N_1 \in \mathcal{N} \Rightarrow \varphi(A_1) \in \mathcal{N}$ $\therefore \varphi(A_1) = \emptyset$ (por 2) y 3)) $\Rightarrow \varphi(A_1) - N_1 = \emptyset$ $\therefore N$ es denso en ninguna parte, por tener interior vacío.

Inversamente, si F es cerrado y denso en ninguna parte, se tiene que $X - F = \varphi(A) - N$ para algún $A \in S$ y algún $N \in \mathcal{N}$ $\therefore F \in S$. Como $F \supset \phi(F) - [\phi(F) - F] \in \tau$, el hecho de que F sea denso en ninguna parte implica que $\phi(F) \subset \phi(F) - F$, lo cual a su vez implica que $\varphi(F) = \emptyset$ (por 1), 2) y 3)) $\therefore F \sim \emptyset$, esto es, $F \in \mathcal{N}$.

Así, $\mathcal{N}$ es idéntica a la clase de los conjuntos cerrados densos en ninguna parte. Como todo denso en ninguna parte está contenido en un cerrado denso en ninguna parte, y todo subconjunto de un miembro de $\mathcal{N}$ está en $\mathcal{N}$, se sigue que todo denso en ninguna parte es cerrado. □

<u>Teorema 11.8:</u> Un conjunto $A \subset X$ tiene la propiedad de Baire si y solo si $A \in S$.

Dem: Si $A \in S$, como $A = \varphi(A) \Delta (\varphi(A) \Delta A)$, $\varphi(A) \in \tau$ y $\varphi(A) \Delta A \in \mathcal{N}$, por el teorema anterior, A tiene la propiedad de Baire

Inversamente, si A tiene la propiedad de Baire, entonces $A=[\varphi(B)-N]\Delta M$ para algún $B\in S$, $N\in\mathcal{N}$ y M de primera categoría, por el teorema anterior, $M\in\mathcal{N}$ $\therefore$ $A\in S$. $\square$

Teorema 11.9: Un conjunto $G\subset X$ es regular si y solo si $G=\varphi(A)$, para algún $A\in S$.

Dem: Si $A\in S$, entonces $\varphi(A)$ es abierto, y la cerradura de $\varphi(A)$ es de la forma $\varphi(A)\cup N$ para algún $N\in\mathcal{N}$ (por 11.7). Sea $\varphi(A_1)-N_1$ un subconjunto abierto de $\varphi(A)\cup N$. Entonces

$$\varphi(A_1)-N_1\subset\varphi(A_1)=\varphi(\varphi(A_1)-N_1)\subset\varphi(\varphi(A)\cup N)=\varphi(A).$$

Así, $\varphi(A)$ es el mayor abierto contenido en $\varphi(A)\cup N$; lo cual demuestra que $\varphi(A)$ es igual al interior de su cerradura, es decir, $\varphi(A)$ es regular.

Inversamente, si G es regular, $G=\varphi(A)-N$, para algún $A\in S$ y algún $N\in\mathcal{N}$. Como $\varphi(A)\Delta[\varphi(A)-N]\subset N$, tenemos que $\varphi(A)\sim\varphi(A)-N=$ $=G$. Como G y $\varphi(A)$ difieren por un conjunto denso en ninguna parte y ambos son regulares, se sigue que $G=\varphi(A)$. $\square$

Hemos demostrado que el problema de darle una topología a un espacio de medida finita completo (X,S,μ) para hacerlo un espacio de medida categórica se reduce a encontrar una función de densidad φ. En general uno puede decir muy poco acerca de la topología τ.

Sin embargo, en el caso de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, o en cualquier intervalo abierto, podemos tomar a $\varphi(A)$ como el conjunto de puntos donde A tiene densidad 1; y a la correspondiente topología τ se le llama la topología de densidad. $\tau-\{\emptyset\}$ consiste precisamente de todos los conjuntos medibles A que tienen densidad 1 en todos sus puntos, por lo tanto contiene a todos los abiertos de la topología usual, y en consecuencia es Hausdorff. Demostraremos que es regular:

Teorema 11.10: La topología de densidad en $\mathbb{R}$ es regular.

Dem: Sea $x\in A\in\tau$. Entonces A tiene densidad 1 en x. $\forall n\geq 0\in\mathbb{Z}$, sea F_n un subconjunto cerrado (en la topología

usual) de $(x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}) \cap A$ $\therefore$ $m(F_n) > (1-\frac{1}{n})\, m[(x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}) \cap A]$.
Si $F = \{x\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces F es cerrado y $\varphi(F) \subset F \subset A$. Como A tiene densidad 1 en x, tenemos que $nm[(x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}) \cap F] \geq nm(F_n) \to 1$
$\therefore$ F tiene densidad 1 en $x \Rightarrow x \in \varphi(F)$. Entonces $\varphi(F)$ es una Z-vecindad de x cuya Z-cerradura está contenida en F y por lo tanto en A. $\square$

Así, la medida de Lebesgue es una medida categórica relativa a la topología de densidad en cualquier intervalo abierto. Sin embargo, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ no es finita, por lo tanto no es una medida categórica como la habíamos definido. De cualquier manera, no es difícil definir una medida finita equivalente, la cual es entonces una medida categórica en $\mathbb{R}$ (relativa a la topología de densidad).

Bibliografía.

1.- Bartle, Robert G.: The elements of integration. Wiley. New York, 1966.

2.- Billingsley, Patrick.: Probability & measure. Wiley. New York, 1979.

3.- Contributions to the theory of games, Vol. 3. Annals of Math. Studies, no. 39, Princeton Univ. Press, 1957.

4.- Haaser, La Salle y Sullivan.: Análisis matemático, Vol. 2. Ed. Trillas. México, 1979.

5.- Halmos, Paul R.: Measure theory. Springer-Verlag. New York, 1974.

6.- Hewitt, Edwin & Stromberg, Karl: Real & abstract analysis. Springer-Verlag. New York, 1965.

7.- Mc. Shane, Edward J.: Integration. Princeton Univ. Press, 1974.

8.- Moise, Edwin E.: Geometric topology in dimensions 2 and 3. Springer-Verlag. New York,

9.- Natanson, I.: Theory of functions of a real variable, Vol. 2. Ungar, New York, 1955.

10.- Oxtoby, J.C - Ulam S.M.: On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero. Fund. Math. 31, 201-206, 1938.

11.- Royden, H.L.: Real analysis. 2nd edition. Macmillan. New York, 1968.

12.- Zajíček, L.: An elementary proof of the one-dimensional density theorem. Amer. Math. Monthly 86, 297-298, 1979.