



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS DINAMICOS * TOPOLOGIA DE LOS FLUJOS HOLOMORFOS CON SINGULARIDAD

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

LAURA ORTIZ BOBADILLA

Cd. Universitaria, Septiembre de 1985



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- ÍNDICE -

- INTRODUCCIÓN	p. 6
- CAPÍTULO 1	p. 1
- 1.- ALGUNOS RESULTADOS BÁSICOS DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL	p. 1
- 2.- ECUACIONES	p. 8
- 3.- SISTEMAS DINÁMICOS	p. 10
- CAPÍTULO 2	p. 23
- 1.- CAMPOS VECTORIALES LÍNEALES EN \mathbb{C}^n	p. 24
- 2.- GEOMETRÍA DE LAS HOJAS EN EL DOMINIO DE POINCARÉ	p. 36
- 3.- LA FOLIACIÓN DE LAS HOJAS DE SIBGOL	p. 42
- 4.- GEOMETRÍA DE LAS HOJAS DE $\mathbb{F}(A)$	p. 45
- CAPÍTULO 3	p. 60
- 1.- EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA Y ESTABILIDAD ESTRUCTURAL EN LOS CASOS DE SIBGOL Y POINCARÉ	p. 61
- ÍNDICE ANALÍTICO	p. 95
- BIBLIOGRAFÍA	p. 96

QUIERO AGRADECER A MIS MAESTROS
Y AMIGOS QUIENES , DE UN MODO U
OTRO , ME APOYARON PARA HACER ESTE
TRABAJO . EN ESPECIAL , A JOSÉ A.
SEADE KURI y A XAVIER GÓMEZ-MONT;
AL PRIMERO POR HABER SIDO TAN PA-
CIENTE CONDUCTOR DE MI TESIS Y A
AMBOS POR EL APOYO Y LOS ÁNIMOS
QUE ME HAN BRINDADO EN EL TRANS-
CURSO DE MI CARRERA .

- INTRODUCCIÓN -

EN ESTE TRABAJO HECHO QUERIDO CON UN PRIMER ACERCAMIENTO AL TEMA QUE SE REFIERE A LOS FLUJOS HOLONOMORFOS CON SINGULARIDAD AISLADA EN EL ORIGEN. POR UN FLUJO ϕ_t , PODRÍAMOS ENTENDER INTUITIVAMENTE A UN CONJUNTO DE PUNTOS QUE VARIAN EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO Y QUE DETERMINAN UN CONJUNTO DE TRAYECTORIAS O ESPACIO DE ÓRBITAS CONTINUAS (DE HECHO DIFERENCIABLES) QUE NUNCA SE INTERSECTAN UNAS CON OTRAS (PODRÍAMOS PENSAR EN LA CORRIENTE DE UN RÍO O EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO, POR EJEMPLO).

MUCHO SE HA DICHO - AUNQUE MUCHO PATA POR DECIR - SOBRE LOS FLUJOS EN \mathbb{R}^n ASOCIADOS A UN CAMPO VECTORIAL REAL, ES DECIR, AQUELLOS FLUJOS EN LOS QUE LAS PARTÍCULAS QUE SE DESPLAZAN SE HALLAN EN UN SUBESPACIO DE \mathbb{R}^n Y DONDE EL PARÁMETRO ES EL TIEMPO, t EN \mathbb{R} ; SIN EMBARGO, CUANDO EL ESPACIO RESULTA SER \mathbb{C}^n Y EL PARÁMETRO T ES UN NÚMERO COMPLEJO NO SÓLO SE TIENEN AÚN MUCHAS PREGUNTAS SIN RESOLVER, SINO QUE OBTENER ALGÚN SIGNIFICADO FÍSICO RELEVANTE NO PARECE SER HASTA AHORA ALGO SENCILLO. CUANDO HABLAMOS DE UN FLUJO REAL TIENE SENTIDO PREGUNTARSE DE DÓNDE PROVIENE UNA PARTÍCULA DETERMINADA Y HACIA DÓNDE VA DESPUÉS DE TRANSCURRIDO UN CIERTO TIEMPO t , SIN EMBARGO, CUANDO HABLAMOS DE UN FLUJO COMPLEJO, SIENDO NUESTRO PARÁMETRO $T \in \mathbb{C}$, DEJA DE TENER SENTIDO EL PREGUNTARSE POR EL "ANTES" Y EL "DESPUÉS". ASÍ, HABREMOS DE DESARROLLAR DISTINTAS IDEAS, ALGUNAS DE ELLAS BASADAS EN LA INTUICIÓN QUE SE TIENE EN EL CASO REAL, QUE NOS PERMITAN DETERMINAR EL COMPORTAMIENTO CUALITATIVO DE LAS TRAYECTORIAS Y OBTENER UNA CLASIFICACIÓN PRECISA DE LOS DISTINTOS TIPOS DE ÓRBITAS QUE PUEDEN TENERSE. ESTE SERÁ CONCRETAMENTE EL OBJETIVO DEL SEGUNDO CAPÍTULO.

UNA VEZ HECHO LO ANTERIOR, PODRÍAMOS PREGUNTARNOS CUÁNDO DOS ESPACIOS DE ÓRBITAS TIENEN EL MISMO COMPORTAMIENTO DESDE UN PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO PARA ESTABLECER, ASÍ, UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA QUE SE CONOCE GENERALMENTE CON EL NOMBRE DE EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA. CON ESTA IDEA EN MENTE, SE OCURRE PREGUNTARSE CUÁNDO, PARA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y UN FLUJO ASOCIADO A ELLA, SE TIENE QUE AQUELLAS ECUACIONES QUE SE HALLAN "CERCANAS" A ÉSTA TIENEN FLUJOS ASOCIADOS QUE POSSEAN EL MISMO COMPORTAMIENTO CUALITATIVO QUE EL FLUJO DE LA ECUACIÓN ORIGINAL. ESTA PREGUNTA DA LUGAR AL CONCEPTO DE ESTABILIDAD ESTRUCTURAL Y UN RESULTADO IMPORTANTE EN ESTA DIRECCIÓN SE VERÁ EN EL TERCER CAPÍTULO; CON ELLO SE DARÁ FIN A ESTE TRABAJO.

EN EL PRIMER CAPÍTULO SE DAN LAS NOCIONES BÁSICAS PARA ENTENDER ESTE TRABAJO, SIN EMBARGO SE RECOMIENDA A QUIEN LEA ESTAS NOTAS, QUE INICIE POR EL CAPÍTULO 2 Y SE REFERITA POR MEDIO DEL ÍNDICE AL PRIMER CAPÍTULO SÓLO CUANDO SEA NECESARIO ACLARAR ALGÚN CONCEPTO.

- CAPÍTULO 1 -

1.- ALGUNOS RESULTADOS BÁSICOS DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL.

EN ESTA SECCIÓN ENUNCIAREMOS ALGUNOS RESULTADOS BÁSICOS SOBRE VARIETADES Y TRANSFORMACIONES DIFERENCIABLES; PARA ELLO, RECORDEMOS ALGUNOS RESULTADOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL (1):

DEFINICIÓN 1.1 - (DIFERENCIABILIDAD EN \mathbb{R}^n)

UNA TRANSFORMACIÓN $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U ABIERTO DE \mathbb{R}^m , SE DICE QUE ES DIFERENCIABLE EN UN PUNTO $x \in U$ SI EXISTE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ TAL QUE APROXIMA A f EN UNA VECINDAD DE x COMO SIGUE:

$$f(x+v) = f(x) + T \cdot v + r(v)$$

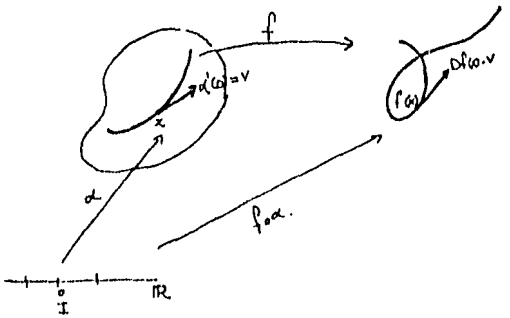
$$\text{CON } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

PARA TODO $v \in \mathbb{R}^m$ SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO.

A T LA LLAMAMOS LA DERIVADA DE f EN x Y LA DENOTAMOS $Df(x)$.

PODEMOS INTERPRETAR LA DERIVADA $Df(x)$ GEOMÉTRICAMENTE SI, DADO UN VECTOR $v \in \mathbb{R}^m$, CONSIDERAMOS UNA CURVA DIFERENCIABLE $\alpha: I \rightarrow U$ (DONDE I ES UN INTERVALO QUE CONTIENE AL ORIGEN) TAL QUE $\alpha(0) = x$ Y $\alpha'(0) = v$. Así,

$$Df(x) \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(x)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0}$$



SI AHORA TOMAMOS COMO FIJA LA BASE CANÓNICA $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ DE \mathbb{R}^m LAS DERIVADAS PARCIALES DE f EN EL PUNTO x QUEDAN DADAS POR LA EXPRESIÓN $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x) \cdot e_i$. QUE NO ES MÁS QUE LA DERIVADA DIRECCIONAL DE f EN LA DIRECCIÓN DE e_i . ASÍ, SI $v \in \mathbb{R}^m$, $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot e_i$ Y LA DERIVADA $Df(x) \cdot v$ QUEDA DADA POR LA EXPRESIÓN

$$Df(x) \cdot v = \sum_{i=1}^m \alpha_i Df(x) \cdot e_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \alpha_i$$

CUANDO TODAS LAS DERIVADAS PARCIALES $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ SON CONTINUAS COMO FUNCIONES DE $x \in U$, DECIMOS QUE f ES DE CLASE C^1 EN U . ANÁLOGAMENTE, SI TODAS LAS DERIVADAS PARCIALES DE f SON DE CLASE C^r EN U , DECIMOS QUE f ES DE CLASE C^r , Y POR ÚLTIMO, SI f ES DE CLASE C^r PARA TODO $r \in \mathbb{N}$, DECIMOS QUE f ES DE CLASE C^∞ .

SI f Y g SON DOS FUNCIONES DE CLASE C^r , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(U) \subset V$, ENTONCES $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ES DE CLASE C^r Y LA DIFERENCIAL DE LA COMPOSICIÓN $g \circ f$ ESTÁ DADA POR

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

DEFINICIÓN 1.2 - (DIFEOMORFISMO)

SEAN U, V ABIERTOS DE \mathbb{R}^m Y $f: U \rightarrow V = f(U)$ UNA TRANSFORMACIÓN DE CLASE C^r , $r \geq 1$. DECIMOS QUE f ES UN DIFEOMORFISMO DE CLASE C^r , SI f TIENE INVERSA $f^{-1}: V \rightarrow U$ Y ÉSTA ES DE CLASE C^r .

OBSERVACIÓN - SI $f: U \rightarrow V$ ES UN DIFEOMORFISMO, ENTONCES PARA TODA $x \in U$, $Df(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ES UN ISOMORFISMO Y $(Df(x))^{-1} = Df^{-1}(f(x))$.

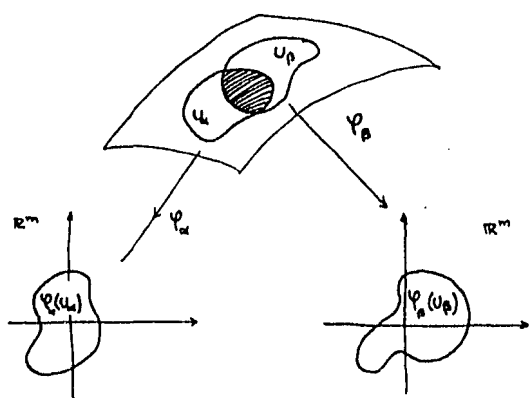
DEFINICIÓN 1.3 - (DIFEOMORFISMO LOCAL)

SEA U UN ABIERTO DE \mathbb{R}^m Y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. DECIMOS QUE f ES UN DIFEOMORFISMO LOCAL SI

(1) UNA BUENA REFERENCIA PARA CONSULTAR LO QUE SE VEERÁ EN ESTA SECCIÓN ES LA SIGUIENTE:
- MILNOR J. W., "Lectures on the Differentialiable Manifolds", UNIVERSITY PRESS OF VIRGINIA, CHARLOTTESVILLE (TAMBIÉN HAY UNA TRADUCCIÓN HECHA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNBAJ, COMUNICACIONES INTERNALES No 3), 1965.
- HUGHES M., "DIFFERENTIAL TOPOLOGY", GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS 33, SPRINGER VERLAG.

PARA TODO PUNTO p EN U EXISTE UNA VECINDAD W , $W \subset U$, DE p TAL QUE $f|_W: W \rightarrow f(W)$ ES UN DIFEOMORFISMO.

VAMOS A EXTENDER AHORA EL CONCEPTO DE DIFERENCIABILIDAD, QUE TENEMOS PARA APLICACIONES DEFINIDAS EN ABIERTOS DE ESPACIOS EUCLIDEANOS, A TRANSFORMACIONES DEFINIDAS EN CIERTO TIPO DE ESPACIOS TOPOLOGICOS LOCALMENTE HOMEOMORFOS A \mathbb{R}^m .



DEFINICIÓN 1.4 - (CARTAS LOCALES).

SEAN M UN ESPACIO TOPOLOGICO Y U UN ABIERTO DE M . DEFINIMOS UNA CARTA LOCAL O UN SISTEMA COORDENADO DEL ESPACIO M A LA PAREJA (U, φ) DONDE $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ES UN HOMEOMORFISMO DE U SOBRE EL ABIERTO $\varphi(U)$ DE \mathbb{R}^m .

CONSIDEREMOS AHORA UNA FAMILIA $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ DE CARTAS LOCALES A , CON $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$ Y TALES QUE SI $(U, \varphi), (U', \varphi') \in A$ Y $U \cap U' \neq \emptyset$, ENTONCES LA COMPOSICIÓN

$\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$ ES UN DIFEOMORFISMO DE CLASE C^r . A UNA FAMILIA A CON TALES CARACTERÍSTICAS LA DENOMINAMOS ATLAS DE DIMENSIÓN m Y CLASE C^r SOBRE M . LOS DIFEOMORFISMOS $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ SON LLAMADOS CAMBIOS DE COORDENADAS.

DECIMOS QUE UN ATLAS A DE CLASE C^r SOBRE M ES MÁXIMO SI A CONTIENE A TODAS LAS CARTAS LOCALES $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ TALES QUE LOS CAMBIOS DE COORDENADAS CON LOS ELEMENTOS (U_β, φ_β) DE A

(*) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

SON DIFEOMORFISMOS DE CLASE C^r . SI CONSIDERAMOS $\tilde{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in A \text{ y } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \text{ para algún } (U_\beta, \varphi_\beta) \in A\}$ ENTONCES LOS CAMBIOS DE COORDENADAS (*) SON DE CLASE C^r SE TIENE QUE $A \in \tilde{A}$ Y \tilde{A} ES ÚNICO ATLAS MÁXIMO QUE CONTIENE A A .

SI A ES UN ATLAS MÁXIMO DE DIMENSIÓN m Y CLASE C^r SOBRE M SE DICE QUE M ES UNA ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DE DIMENSIÓN m Y CLASE C^r SOBRE M .

DEFINICIÓN 1.5 - (VARIEDAD DIFERENCIABLE).

UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE DE CLASE C^r Y DIMENSIÓN m ES UN ESPACIO TOPOLOGICO HAUSDORFF M , CON BASE NUMERABLE, PROVISTO DE UNA ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DE DIMENSIÓN m Y CLASE C^r (OBSERVAMOS QUE ASI DEFINIMOS UNA VARIEDAD NO TIENE FRONTERA; VER NOTA DE PIE DE PÁGINA (1)).

PENSEMOS AHORA EN LAS TRANSFORMACIONES ENTRE ESPACIOS TOPOLOGICOS QUE POSEEN UN ATLAS DE CLASE C^r Y EXTENDAMOS EL CONCEPTO DE DIFERENCIABILIDAD:

SEAN M, N ESPACIOS TOPOLOGICOS Y A, B ATLAS DE CLASE C^r DE M, N RESPECTIVAMENTE. DECIMOS QUE $f: M \rightarrow N$ ES DIFERENCIABLE DE CLASE C^k , $k \leq r$, SI f ES CONTINUA Y PARA CADA $x \in M$ EXISTEN CARTAS LOCALES $(U, \varphi) \in A$ Y $(V, \psi) \in B$, CON $x \in U$, $f(x) \in V$, TALES QUE LA COMPOSICIÓN

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$

ES DE CLASE C^k .

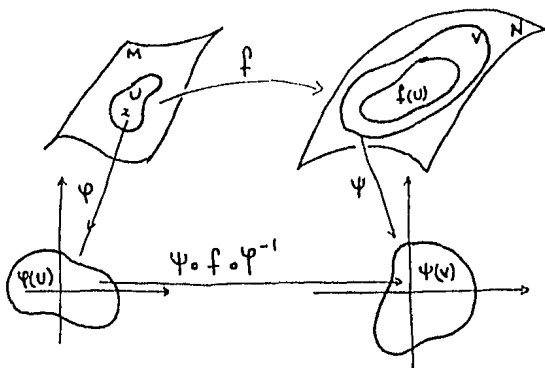
(1) UN ESPACIO n -DIMENSIONAL CON BARRA ES UN ESPACIO HAUSDORFF CON BASE NUMERABLE QUE ES LOCALMENTE HOMEOMORFO A ABIERTOS DE \mathbb{R}^n ($\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ / \mathbb{R}^n). SI M ES UNA VARIEDAD n -DIMENSIONAL CON BARRA O PRODUCTO, LA PROPIEDAD DE (1) ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS PUNTOS DE LA VENTANA DE \mathbb{R}^n BAJO EL HOMEOMORFISMO DADO SI SE HABLARA DE VARIETAD DIFERENCIABLE CON FRONTERA PERIÓDICA QUE BASTA DIFEOMORFISMOS EN LUGAR DE HOMEOMORFISMOS.

Es fácil ver que esta definición es independiente del sistema coordinado elegido.

De esta manera se tiene que una transformación continua $f: M \rightarrow N$ entre espacios topológicos M y N (ambos provistos de una estructura diferenciable de clase C^r), es una transformación de clase C^k , $k \leq r$, si y sólo si para cada $x \in M$ existen cartas (U, φ) , (V, ψ) en M y N tales que $x \in U$, $f(U) \subset V$ y la composición

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

es de clase C^k ; de hecho esta composición debe ser de clase C^k para cualesquiera dos cartas (U, φ) , (V, ψ) tales que $x \in U$, $f(U) \subset V$.



Un difeomorfismo $f: M \rightarrow N$ de una variedad M sobre una variedad N es una transformación diferenciable f cuya inversa $f^{-1}: N \rightarrow M$ existe y es diferenciable.

Decimos que dos variedades son difeomorfas si existe un difeomorfismo de una a la otra.

Un ejemplo de variedad diferenciable de clase C^∞ es la esfera S^m definida como

$$S^m = \{x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

S^m está provista de una estructura diferenciable de clase C^∞ como sigue:

Sea $U_i^m \subset S^m$, $\alpha = \pm 1$, $1 \leq i \leq m+1$ el conjunto $U_i^m = \{x \in S^m : |\alpha x_i| > 0\}$. Las cartas $(U_i^m, \varphi_i^\alpha)$, $\varphi_i^\alpha: U_i^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definidas como

$\varphi_i^\alpha(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$ cubren a S^m y con tales que el cambio de coordenadas es C^∞ .

DEFINICIÓN 1.6 - (VARIEDAD ANALÍTICO-COMPLEJA U HOLONORFA)

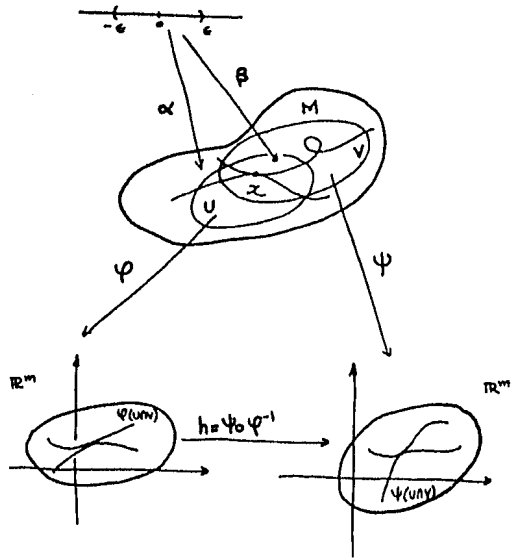
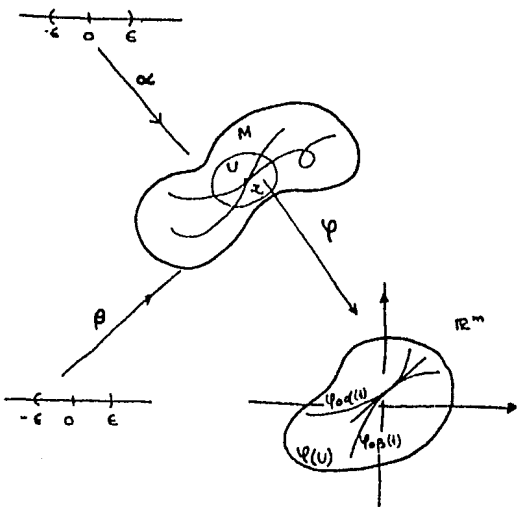
Una variedad holoomorfa de dimensión m (simpleja) es un espacio topológico Hausdorff M , con base numerable provisto de una estructura holoomorfa de dimensión m ; donde por estructura holoomorfa de dimensión m entendemos que M es localmente holoomorfa a abiertos de \mathbb{C}^m y los cambios de coordenadas son holoomorfos.

Al principio de esta sección dimos una interpretación geométrica de la derivada de una transformación diferenciable en \mathbb{R}^m , vamos a explorar esta imagen para introducir la noción de derivada de una transformación entre dos variedades.

Sea $x \in M$ fijo y sea $C_x(M)$ el conjunto de todas las curvas C^∞ , $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = x$. En $C_x(M)$ introducimos la relación de equivalencia \sim , de modo que $\alpha \sim \beta$ si para alguna carta local (U, φ) , $x \in U$, se tiene que

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \beta)(t) \right|_{t=0}$$

Es fácil ver que, así definido, \sim resulta ser de equivalencia.



OBSERVAMOS QUE SI α Y β SON DOS CURVAS EQUIVALENTES CON UNA CARTA (U, φ) Y SI (V, ψ) ES UNA CARTA TAL QUE $x \in U \cap V$, ENTONCES LAS CURVAS SON EQUIVALENTES CON LA CARTA (V, ψ) . EN EFECTO, SEAN α Y β LAS CURVAS EQUIVALENTES Y SEA $h = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ EL CAMBIO DE COORDENADAS; COMO $\psi \circ \alpha = h(\varphi \circ \alpha)$ Y $\psi \circ \beta = h(\varphi \circ \beta)$ SE TIENE QUE

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\psi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} &= dh_{\varphi(x)} \left(\left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \right) \\ &= dh_{\varphi(x)} \left(\left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \beta)(t) \right|_{t=0} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\psi \circ \beta)(t) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

LO QUE IMPLICA QUE LAS CURVAS $\psi \circ \alpha$ Y $\psi \circ \beta$ TIENEN EL MISMO VECTOR TANGENTE EN EL INSTANTE $t=0$. POR CONSIGUIENTE α Y β SON EQUIVALENTES CON LA CARTA ψ .

EL COCIENTE $C_x(M)/\sim$ ES LLAMADO EL ESPACIO TANGENTE A M EN x Y ES DENOTADO POR $T_x M$. POR UN VECTOR TANGENTE A UNA VARIEDAD M EN UN PUNTO x ENTENDEMOS UNA CLASE DE EQUIVALENCIA DE CURVAS $\gamma(t)$, CON $\gamma(0) = x$ ($[\gamma(t)] \in C_x(M)/\sim$).

VAMOS A VER QUE $T_x M$ POSEE UNA ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL REAL DE DIMENSION m :

SEA $[u]$ LA CLASE DE EQUIVALENCIA DE LA CURVA $\alpha \in C_x(M)$. SI $u = [u]$, $v = [v]$ Y $\lambda \in \mathbb{R}$ DEFINIMOS

$$\begin{aligned} u + v &= [\varphi'(\varphi \circ \alpha) + (\varphi \circ \beta)] \\ \lambda u &= [\varphi'(\lambda \cdot \varphi \circ \alpha)] \end{aligned}$$

DONDE $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ES UNA CARTA TAL QUE $\varphi(x) = 0$. PUEDE VERSE QUE ESTAS DEFINICIONES SON INDEPENDIENTES DE LA CARTA ESCOGIDA Y QUE SE SATISFACEN LOS AXIOMAS DE ESPACIO VECTORIAL.

ADEMÁS, SI $\{e_1, \dots, e_m\}$ ES BASE DE \mathbb{R}^m Y CONSIDERAMOS LAS CURVAS $\alpha_i(t) = te_i, t \in \mathbb{R}$, ENTONCES $\{[\varphi'(te_1)], \dots, [\varphi'(te_m)]\}$ ES UNA BASE PARA $T_x M$. DE AQUÍ, $T_x M$ ES UN ESPACIO VECTORIAL m -DIMENSIONAL.

OBSERVACIÓN: si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^m entonces denotamos $\frac{\partial}{\partial x_i} = [f'(te_i)]$, $i=1, \dots, m$.

- DEFINICIÓN 1.3 - (DERIVADA)

CONSIDEREMOS LA TRANSFORMACIÓN LINEAL $Df(x): T_x M \rightarrow T_x N$, INDUCIDA POR LA TRANSFORMACIÓN DIFERENCIABLE $f: M \rightarrow N$ COMO SIGUE. DADO $[u] \in T_x M$, $Df(x) \cdot u = [f \circ \alpha]$ ES LA CLASE DE EQUIVALENCIA DE LA CURVA $f \circ \alpha$ EN $T_x N$. $Df(x)$ ES LLAMADA LA DERIVADA DE f EN x .

- DEFINICIÓN 1.8 - (INMERSIÓN, ENCAJE)

- a) DECIMOS QUE UNA TRANSFORMACIÓN C^r , $f: M \rightarrow N$ ES UNA INMERSIÓN SI PARA TODO $x \in M$, $Df(x): T_x M \rightarrow T_x N$, $y = f(x)$, ES INYECTIVA.
- b) DECIMOS QUE f ES UNA SUBMERSIÓN SI $Df(x): T_x M \rightarrow T_x N$ ES SUPRAYECTIVA.
- a) DECIMOS QUE f ES UN ENCAJE SI f ES UNA INMERSIÓN Y SI $f: M \rightarrow f(M) \subset N$ ES UN HOMEOMORFISMO CUANDO SE CONSIDERA $f(M)$ CON LA TOPOLOGÍA INDUCIDA POR LA TOPOLOGÍA DE N .

- DEFINICIÓN 1.9 - (SUBVARIEDAD)

UN SUBCONJUNTO $N \subset M^m$ ES LLAMADO UNA SUBVARIEDAD DE M DE DIMENSIÓN n Y CLASE C^r SI PARA TODO $p \in N$ EXISTE UNA CARTA LOCAL $C^r(U, \varphi)$ TAL QUE $\varphi(U) = V \times W$ DONDE $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ SON BOLSAS EUCLIDEANAS TALES QUE $0 \in V \cap W$ Y $\varphi(N \cap U) = V \times \{0\}$. DE LA DEFINICIÓN ES CLARO QUE LA CODIMENSIÓN DE N ES $m-n = \dim M - \dim N$. (1)

- TEOREMA 1.10

SI $f: M \rightarrow N$ ES UN ENCAJE C^r , ENTONCES $f(M)$ ES UNA SUBVARIEDAD C^r DE N DE DIMENSIÓN IGUAL A $\dim M$.

(1) OTRA MANERA DE DEFINIR SUBVARIEDAD ES DICIENDO QUE N TIENE UNA ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DE CLASE C^r Y UNA INMERSIÓN $i: N \rightarrow M$ SEA UN ENCAJE.

EL TEOREMA ANTERIOR NOS DA UN CRITERIO PARA OBTENER SUBVARIIDADES DE UNA VARIEDAD DADA. A CONTINUACIÓN ENUNCIAREMOS OTRO TEOREMA QUE NOS DARÁ UN CRITERIO DISTINTO PARA OBTENER SUBVARIIDADES; PARA ELLO, DEFINIREMOS LOS CONCEPTOS DE VALOR CRÍTICO Y VALOR REGULAR DE UNA FUNCIÓN DE CLASE C^r ENTRE DOS VARIIDADES.

- DEFINICIÓN 1.11 - (VALOR REGULAR Y VALOR CRÍTICO)

SEA $f: M \rightarrow N$ DE CLASE C^r . SI $p \in M$ ES TAL QUE $Df(p): T_p M \rightarrow T_p N$, $q = f(p)$, ES SUPRAYECTIVA DECIMOS QUE p ES UN PUNTO REGULAR DE f . SI $q \in N$ ES TAL QUE $f^{-1}(q)$ ES VACÍO O ESTÁ CONSTITUIDO SÓLO DE PUNTOS REGULARES, DECIMOS QUE q ES UN VALOR REGULAR DE f . UN PUNTO $q \in N$ QUE NO ES VALOR REGULAR DE f ES LLAMADO VALOR CRÍTICO DE f .

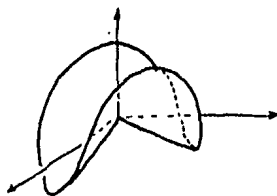
UNO CONSECUENCIA IMPORTANTE DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA ES:

- TEOREMA 1.12

SEA $f: M \rightarrow N$ UNA TRANSFORMACIÓN DE CLASE C^r . SI $q \in N$ ES UN VALOR REGULAR DE f Y $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, ENTONCES $f^{-1}(q)$ ES UNA SUBVARIEDAD DE M DE CLASE C^r Y CODIMENSIÓN IGUAL A $\dim(N)$.

UNA PREGUNTA QUE RESULTA NATURAL AL HABLAR DE VARIIDADES ES LA SIGUIENTE: ¿CUÁNDO LA INTERSECCIÓN DE DOS VARIIDADES RESULTA SER UNA VARIEDAD? PARA RESPONDERA ES NECESARIO INTRODUCIR UN CONCEPTO QUE NOS DARÁ UN CRITERIO PARA DETECTAR CUÁNDO DOS VARIIDADES SE INTERSECAN "BIEN".

UN EJEMPLO QUE NOS PERMITE VER QUE LA INTERSECCIÓN DE DOS VARIIDADES NO RESULTA SIEMPRE SER UNA VARIEDAD, ES LA INTERSECCIÓN DEL PLANO XY CON EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$

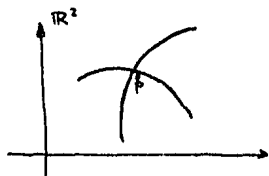


ESTA INTERSECCIÓN NOS DA UNA FIGURA DE CRUZ QUE CLARAMENTE NO ES UNA VARIEDAD.

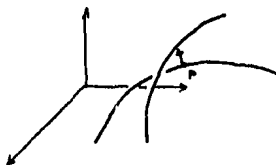
PARA NOTAR UNA "MALA" INTERSECCIÓN ENTRE DOS VARIEDADES VA A SER AQUELLO TAL QUE SI NOS DESPLAZAMOS UN POCO EN LAS DIRECCIONES DETERMINADAS POR LOS VECTORES TANGENTES A LAS VARIEDADES EL COMPORTAMIENTO CASI NO VARÍA, SIN EMBARGO PARA ESTA INTERSECCIÓN EXISTE SIEMPRE UNA DIRECCIÓN NO DETERMINADA POR UN VECTOR TANGENTE TAL QUE SI MOVEMOS EN ELLA LA INTERSECCIÓN SE MODIFICA RADICALMENTE.

POR EL CONTRARIO, SI SE INTERSECTAN DOS VARIEDADES NO PODAMOS DESPLAZARNOS MÁS QUE EN LAS DIRECCIONES DETERMINADAS POR LOS VECTORES TANGENTES, TENDREMOS UNA "BUENA" INTERSECCIÓN.

VISUALMENTE QUEDA CLARO LO ANTERIOR SI PENSAMOS EN EL EJEMPLO DE DOS CURVAS QUE SE INTERSECAN VISTAS PRIMERO EN \mathbb{R}^2 Y DESPUÉS EN \mathbb{R}^3 .



AQUÍ LAS DIRECCIONES TANGENTES GENERAN TODO \mathbb{R}^2 .



AQUÍ PODEMOS MOVERNOS EN UNA DIRECCIÓN QUE NO ESTÁ CONTENIDA EN EL PLANO GENERADO POR LOS VECTORES TANGENTES A LAS CURVAS, DESTRUYENDO LA INTERSECCIÓN.

VAMOS A FORMULIZAR ESTOS IDEAS:

- DEFINICIÓN 1.13 - (TRANSVERSALIDAD)

DECIMOS QUE DOS VARIEDADES M Y N SON TRANSVERSALES EN UN PUNTO $p \in M \cap N$ SI Y SÓLO SI $T_p M + T_p N = \mathbb{R}^k$ (SON TRANSVERSALES EN \mathbb{R}^k). EN GENERAL, DOS VARIEDADES M Y N SON TRANSVERSALES SI Y SÓLO SI SON TRANSVERSABLES PARA TODO PUNTO $p \in M \cap N$. VAMOS A DENOTAR $M \bar{\cap} N$ CUANDO LA INTERSECCIÓN DE M Y N ES TRANSVERSAL.

OBSERVACIÓN - SI $M \bar{\cap} N$ ENTONCES SI $\dim M = n$, $\dim N = m$ Y $T_p M + T_p N = \mathbb{R}^k$ SE TIENE $\dim(T_p M + T_p N) = \dim T_p M + \dim T_p N - \dim(T_p M \cap T_p N)$ Y $\dim(T_p M \cap T_p N) = n + m - k$. UNA CONSECUENCIA DE ESTE HECHO ES EL SIGUIENTE TEOREMA:

- TEOREMA 1.14

SI M Y N SON DOS VARIEDADES TRANSVERSABLES EN \mathbb{R}^k , ENTONCES $M \cap N$ ES UNA SUBVARIEDAD DIFERENCIABLE DE DIMENSIÓN $n + m - k$.

UNA NOCIÓN MÁS GENERAL DE TRANSVERSALIDAD ES LA SIGUIENTE. SEAN $f: M \rightarrow N$ UNA TRANSFORMACIÓN C^r Y $S \subset N$ UNA SUBVARIEDAD DE N . DECIMOS QUE f ES TRANSVERSAL A S EN $x \in M$ SI $y = f(x) \notin S$ O BIEN SI $y = f(x) \in S$ Y SE CUMPLE LA CONDICIÓN DE TRANSVERSALIDAD

$$T_y N = T_y S + Df_x \cdot (T_x M).$$

SI f ES TRANSVERSAL A S PARA TODO PUNTO DE M DECIMOS QUE f ES TRANSVERSAL A S .

TEOREMA 1.15

SEAN $f: M \rightarrow N$ DE CLASE C^r Y S UNA SUBVARI-
EDAD DE N DE CLASE C^r . SI f ES TRANSVERSAL A
 S Y $f^{-1}(S) \neq \emptyset$, ENTONCES $f^{-1}(S)$ ES UNA
SUBVARIEDAD DE CLASE C^r DE M , DOBLE LA CO-
DIMENSIÓN DE $f^{-1}(S)$ ES IGUAL A LA CODIMEN-
SIÓN DE S .

OBSERVACIONES:

- 1) EL TEOREMA 1.14 ES UN CASO PARTICULAR DEL
TEOREMA 1.15 DONDE f ES LA INCLUSIÓN DE M
EN N .
- 2) LA CONDICIÓN DE TRANSVERSALIDAD ES ABIERTA
Y DENSA, DE MODO QUE SI UNA FUNCIÓN
 $f: M \rightarrow N$ ES TRANSVERSAL A UNA SUBVARI-
EDAD S DE N , SIEMPRE PODEMOS ENCONTRAR
UNA FUNCIÓN $g: M \rightarrow N$ TAL QUE g ES
UNA δ -APROXIMACIÓN A f Y g ES TRANS-
VERSAL A S ; ADICIONALMENTE, SI $h: M \rightarrow N$ ES
UNA TRANSFORMACIÓN DIFERENCIABLE QUE
NO ES TRANSVERSAL A UNA SUBVARIEDAD
 S DE N , SIEMPRE EXISTE UNA TRANSFOR-
MACIÓN $f: M \rightarrow N$ TAN "CERCANA" COMO
QUERAMOS A h , TAL QUE f ES TRANS-
VERSAL A S EN N .

VAMOS INTRODUCIR AHORA, A PARTIR DE M , UNA
VARIEDAD TM QUE SE CONOCE COMO EL FIBRADO
TANGENTE O EL HAZ TANGENTE A LA VARIEDAD M .
SEA $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ LA UNIÓN DE LOS

ESPACIOS TANGENTES A UNA VARIEDAD M EN TODOS
LOS PUNTOS $x \in M$. APLICACIÓN: TM TIENE
UNA ESTRUCTURA DE VARIEDAD.

PARA COMPROBAR LA ASEVERACIÓN ANTERIOR,
CONSIDEREMOS UNA CARTA (U, φ) DE M
Y SEAN $(x_1, \dots, x_n): U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$
LAS COORDENADAS LOCALES EN UNA VECINDAD
DEL PUNTO x (AQUÍ ENTENDEMOS
 $\varphi(x) = (x_1(x), \dots, x_n(x))$). UN VECTOR
 ξ TANGENTE A M EN UN PUNTO $x \in U$

QUEDA DETERMINADO POR SUS COMPONENTES
 ξ_1, \dots, ξ_n EN EL SISTEMA DE COORDENADAS DADO.
CONCRETAMENTE, SI $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, ES
UNA CURVA TAL QUE $\alpha(0) = x$ Y $\alpha'(0) = \xi$,
ENTONCES $\xi_i = \frac{d}{dt} x_i(\alpha(t)) \Big|_{t=0}$. DE ESTA
MANERA, ξ QUEDA DETERMINADO POR x_1, \dots, x_n ,

ξ_1, \dots, ξ_n , DONDE LAS PRIMERAS n COORDENADAS
SON LAS DEL PUNTO DE TANGENCIA Y LAS n RES-
TANTES SON LAS COMPONENTES DE ξ . UNA
CARTA PARA TM QUEDA ENTONCES DEFINIDA
COMO

$$\varphi: TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \varphi(\xi) = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

ES FÁCIL VER QUE CON ESTA DEFINICIÓN DOS
CARTAS DISTINTAS DE M RESULTAN COMPATIBLES.

DEFINICIÓN 1.16 - (HAZ TANGENTE).

LA VARIEDAD TM SE LLAMA EL HAZ TANGENTE
A LA VARIEDAD M .

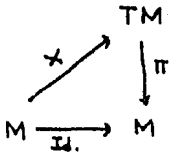
VAMOS A HACER MENCIÓN A DOS TRANSFORMACIONES
IMPORTANTES EN TM . PRIMERO LA SECCIÓN
NULA $\zeta: M \rightarrow TM$, TAL QUE $\zeta(x)$ ES
EL VECTOR NULO DE $T_x M$ Y SEGUNDO,
LA PROYECCIÓN $\pi: TM \rightarrow M$, DONDE
 $\pi(\xi) = x$ SIENDO x EL PUNTO EN EL
CUAL ξ ES TANGENTE.

A LAS PREIMÁGENES DE LOS PUNTOS $x \in M$
BAJO $\pi: TM \rightarrow M$ SE LES CONOCE COMO
LAS FIBRAS DEL FIBRADO O HAZ TANGENTE TM
($\pi^{-1}(x) = T_x M$) Y EL CONJUNTO M SE LE
LLAMA LA BASE DEL FIBRADO TM .

DEFINICIÓN 1.17 - (CAMPO VECTORIAL).

SEA M UNA VARIEDAD Y SEA TM SU
FIBRADO TANGENTE. UN CAMPO VECTORIAL
SOBRE M ES UNA TRANSFORMACIÓN CONTINUA DE
 M EN TM , $X: M \rightarrow TM$ TAL QUE
LA TRANSFORMACIÓN $\pi \circ X: M \rightarrow M$
ES LA IDENTIDAD. EN OTRAS PALABRAS
 X ES TAL QUE EL SIGUIENTE DIAGRAMA

COMMUTA :

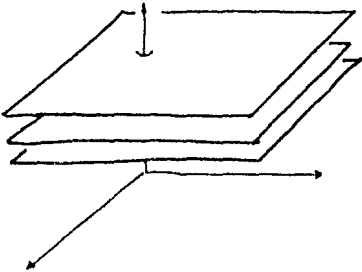


\exists : $X: M \rightarrow TM$ es diferenciable, de modo que el campo es diferenciable.

2: FOLIACIONES (DEFINICIONES BÁSICAS).

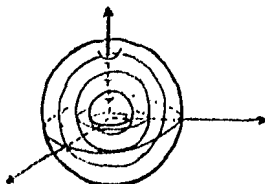
Cuando hablamos de una foliación de dimensión n de una variedad diferenciable M^m estamos pensando, intuitivamente, en una descomposición de M en subvariedades conexas de dimensión n a las que les damos el nombre de hojas. Estas hojas localmente se acuculan como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ con segundo coordenado constante. (1)

Un ejemplo que viene a la mente inmediatamente es la 2-foliación de \mathbb{R}^3 por planos de dimensión 2. En este caso las hojas están dadas por $\mathbb{R}^2 \times \{c\} = \{(x, y, c) \mid x, y \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$.



Otro ejemplo de una 2-foliación de \mathbb{R}^3 (2)

es el caso por las esferas concéntricas $S_r = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2, r \in \mathbb{R}\}$.



Pasemos ahora a la definición formal de foliación.

- DEFINICIÓN - 1.18 - (FOLIACIÓN)

Sea M una variedad de dimensión m y clase C^∞ . Una foliación de clase C^r y dimensión n de M es un atlas máximo \mathcal{F} de clase C^r en M tal que se cumplan las siguientes propiedades:

- a) Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ donde U_1 y U_2 son discos abiertos de \mathbb{R}^n y de \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.
- b) Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es de la forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (h_1(x), h_2(x))$

Decimos que \mathcal{F} es una estructura foliada de dimensión n y clase C^r sobre M .

Sea \mathcal{F} una foliación de clase C^r y dimensión n de una variedad M^m . Sea (U, φ) una carta de \mathcal{F} tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\}) = c \in U_2$, son llamados placas de U o placas de \mathcal{F} . Si fijamos $c \in U_2$ la transformación $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}}: U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ resulta ser un homeomorfismo de clase C^r , de modo que las placas son subvariedades conexas de dimensión n y clase C^r de M . Además, dadas dos placas α, β en U entonces $\alpha \cap \beta = \emptyset$ o $\alpha = \beta$.

Vamos a definir una relación de equivalencia en M . Primero consideremos una sucesión $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Ahora, puesto que M está cubierta por placas definimos en M la siguiente relación:

$p \sim q$ si existe un camino de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ en M tal que $\alpha_1 \ni p, \alpha_k \ni q$. Claramente \sim es relación de equivalencia.

(1) Una buena referencia para este tema es, especialmente, el libro de A. PROBÁ, GEOMETRÍA DE FOLIACIONES, ENMA, Rio de Janeiro, 1979.

Las hojas de \mathcal{F} a las clases de equivalencia bajo \sim .

OBSERVAMOS DOS HECHOS IMPORTANTES. PRIMERO, TODA HOJA F DE \mathcal{F} ES UN SUBCONJUNTO DE M CONEXO POR TRAYECTORIAS; SEGUNDO, TODA HOJA POSEE UNA ESTRUCTURA DE VARIEDAD C^1 DE DIMENSION n INDUCIDA POR LAS CARTAS DE LA FOLIACION (1).

EN NUESTRO CASO MUY PARTICULAR SOLO NOS INTERESARA UN CIERTO TIPO DE FOLIACIONES; ESTAS FOLIACIONES SON LAS QUE APARECEN ASOCIADAS A UN CAMPO VECTORIAL DEFINIDO EN UNA VARIEDAD. CONCRETAMENTE, CONSIDEREMOS UN CAMPO VECTORIAL X EN UNA VARIEDAD M (EN OTROS PALABRAS, CONSIDEREMOS UNA TRANSFORMACION QUE ASOCIA A CADA PUNTO $x \in M$ UN VECTOR DE $T_x M$.) Y SEA $\frac{dx}{dt} = X(x)$ LA ECUACION DIFERENCIAL ASOCIADA A DICHO CAMPO. CUANDO $X(x) \neq 0 \forall x \in M$, LA SOLUCION DE LA ECUACION, QUE NO ES SIMO UNA CURVA $\gamma: (a,b) \rightarrow M$ TAL QUE $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ QUE PASA POR x EN $t=0$, RESULTA SER UNA HOJA DE UNA FOLIACION \mathcal{F} DE DIMENSION UNO EN M . A ESTA SOLUCION QUE PASA POR x EN EL INSTANTE $t=0$ SE LE CONOCE TAMBIEN COMO ORBITA O CURVA INTEGRAL DE X POR EL PUNTO x .

DEFINICION 1.19 - (FOLIACION TRANSVERSAL)

SEA N UNA VARIEDAD Y \mathcal{F} UNA FOLIACION DE UNA VARIEDAD M . DECIMOS QUE $g: N \rightarrow M$ ES TRANSVERSAL A \mathcal{F} SI g ES TRANSVERSAL A TODAS LAS HOJAS DE LA FOLIACION, ES DECIR, SI PARA TODO PUNTO $p \in N$ SE TIENE QUE $D_g(p) \cdot T_p(N) + T_g(\mathcal{F}) = T_p M$ DONDE $g = g(p)$ Y $T_g(\mathcal{F})$ ES EL ESPACIO TANGENTE A LA HOJA DE LA FOLIACION QUE PASA POR g .

DEFINICION 1.20 - (SECCION TRANSVERSAL)

SEA Z UNA SUBVARIEDAD DE M . DECIMOS QUE Z ES TRANSVERSAL A LA FOLIACION \mathcal{F} SI Z ES TRANSVERSAL A TODAS LAS HOJAS QUE INTERSECTA. CUANDO SE CUMPLE

QUE $\dim(Z) + \dim(\mathcal{F}) = \dim M$, DECIMOS QUE Z ES UNA SECCION TRANSVERSAL DE \mathcal{F} .

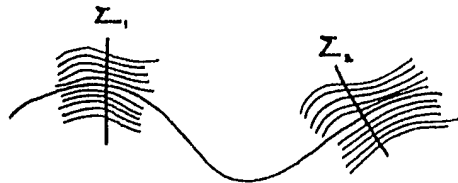
VAMOS A VER QUE DADO $p \in M$ SIEMPRE PUEDE ENCONTRARSE UNA SECCION TRANSVERSAL A \mathcal{F} BASADA EN p :

SEA (U, ψ) UNA CARTA LOCAL DE \mathcal{F} TAL QUE $p \in U$, $\psi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ Y $\psi(p) = (c_1, c_2)$. DEFINIMOS ENTONCES $Z = \psi^{-1}(\{0\} \times U_2)$ Y OBSERVAMOS QUE DADO QUE $\{0\} \times U_2$ ES TRANSVERSAL A $U_1 \times \{0\}$, $c \in U_2$, ENTONCES Z ES UNA SECCION TRANSVERSAL DE \mathcal{F} .

TEOREMA 1.1 (UNIFORMIDAD TRANSVERSAL DE \mathcal{F})

SEA F HOJA DE \mathcal{F} . DADOS $q_1, q_2 \in F$, EXISTEN SECCIONES TRANSVERSALES DE \mathcal{F} , Z_1 Y Z_2 , CON $q_1 \in Z_1$, $q_2 \in Z_2$, Y UN DIFEOMORFISMO $f: Z_1 \rightarrow Z_2$ DE CLASE C^1 TAL QUE PARA CUALQUIERA HOJA F' DE \mathcal{F} SE TIENE QUE $f(F' \cap Z_1) = F' \cap Z_2$.

ESTE TEOREMA NOS DICE ESSENCIALMENTE QUE SI SE TIENEN DOS SECCIONES TRANSVERSALES DE UNA FOLIACION \mathcal{F} QUE RESULTAN SER DIFEOMORFAS, ENTONCES LAS INTERSECCIONES CON LAS HOJAS SE CONSERVAN BASTA EL DIFEOMORFISMO QUE LLEVA UNA HOJA EN LA OTRA.



(1) ES IMPORTANTE OBSERVAR QUE SI BIEN UNA HOJA RESULTA SER UNA VARIEDAD, NO NECESARIAMENTE ES UNA SUBVARIEDAD DE M . UN EJEMPLO DE ELLO ES UNA FOLIACION POR ESFERAS; EN ESTE CASO CADA ESFERA (COMO EN EL DIBUJO) NO ES UNA VARIEDAD CON LA TOPOLOGIA INDUCIDA DE M .



3.- SISTEMAS DINÁMICOS (NOCIONES BÁSICAS Y ALGUNOS RESULTADOS IMPORTANTES).

En esta sección daremos algunas definiciones y resultados sobre Sistemas Dinámicos que nos serán útiles más adelante. Esencialmente veremos conceptos básicos como los de flujo, órbita y singularidad para referirnos después a resultados sobre estabilidad estructural de un sistema dinámico. (1)

Pensemos en un proceso que tiene la característica de que su estado pasado y su estado futuro quedan determinados en forma única por su estado en el instante de tiempo presente, a un proceso de este tipo le llamaremos proceso determinístico. Si ahora pensamos en el conjunto de todos los posibles estados de dicho proceso tenemos lo que se conoce como espacio fase.

Si un proceso determinístico requiere sólo de un número finito de parámetros para que su estado quede determinado, decimos que se tiene un proceso finito dimensional o bien decimos que el espacio fase es finito dimensional.

Pensemos ahora que tenemos un proceso determinístico finito dimensional tal que su espacio fase tiene estructura de variedad diferenciable y tal que los cambios de estado en el tiempo están dados por funciones diferenciables, a dicho proceso le daremos el nombre de diferenciable.

Para hacer una descripción intuitiva de un flujo, consideremos una variedad M tal que M es el espacio fase de un proceso y sea $x \in M$ el estado inicial de dicho proceso (es decir x es el estado del proceso cuando $t=0$). Denotemos por

$\varphi_t(x)$ al estado del proceso en el tiempo t dado que x es el estado inicial. Si ahora pensemos en $\varphi_t(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ habremos obtenido una transformación de M en sí misma

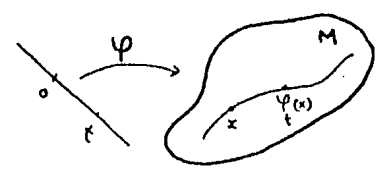
$$\varphi_t: M \rightarrow M.$$

Esta transformación nos indica el "avance" del proceso y cumple que

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x \\ \varphi_{t+s}(x) &= \varphi_t \circ \varphi_s(x). \end{aligned}$$

La segunda propiedad nos dice que si $y = \varphi_s(x)$ es el estado en el que está el proceso iniciado en x después de un tiempo s , entonces y irá a parar en $z = \varphi_t(y)$ después de un tiempo t y esto es equivalente a que x vaya a parar en $z = \varphi_{t+s}(x)$ después de un tiempo $t+s$.

Si fijamos un punto $x \in M$ entonces al dejar correr el tiempo el estado del proceso cambiará y de esta manera x describirá una curva en M $C = \{ \varphi_t(x), t \in \mathbb{R} \}$. A esta curva se le conoce como curva fase.



Si ahora consideramos a todos los puntos x en M moviéndonos a lo largo de sus respectivas curvas fase tendremos la imagen del flujo fase en M . Concretamente el flujo fase es la familia de transformaciones $\varphi_t: M \rightarrow M$.

(1) Para profundizar en los temas que trata esta sección pueden consultarse los siguientes libros:
- PAIS T., de Melo W., Introducción a los sistemas dinámicos, IMPA, Rio de Janeiro, 1977
- ARNOLD, V.I., Ordinary Differential Equations, MIT, E.U., 1970

PREMIOS AHORA A DEFINICIONES PRECISAS DE LO QUE HEMOS INTRODUCIDO EN LOS PÁRRAFOS ANTERIORES.

DEVOLVÉMOLOS AOR $\mathcal{X}^r(M)$ AL CONJUNTO DE CAMPOS VECTORIALES DE CLASE C^r EN M .

- DEFINICIÓN - 1.22 - (GRUPO A UN PARÁMETRO)

Sea M una variedad. Decimos que una familia $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de transformaciones de M en sí misma es un grupo a un parámetro de difeomorfismos si:

$$\varphi_t(x) = \varphi(t, x) \text{ con } \varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

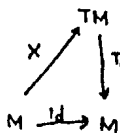
es tal que

- a) φ es una transformación diferenciable
- b) $\varphi_t: M \rightarrow M$ es un difeomorfismo para toda $t \in \mathbb{R}$
- c) la familia $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ es tal que $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ y $\varphi_0 = Id$. donde Id es la identidad en M .

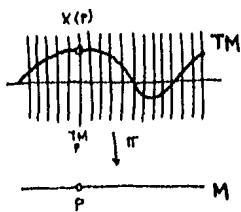
- DEFINICIÓN - 1.23 - (FLUJO FASE Y GRUPO FASE)

Sea M una variedad y $\{\varphi_t\}$ un grupo de transformaciones a un parámetro en M , a la pareja $(M, \{\varphi_t\})$ la llamamos flujo fase y a M el espacio fase del flujo.

Recordemos que dada una variedad diferenciable M^n , un campo vectorial de clase C^r en M es una transformación de clase C^r $X: M \rightarrow TM$ tal que a cada punto $p \in M$, asocia un vector $X(p)$ en $T_p M$. En otras palabras X es tal que el diagrama



conmuta.



- DEFINICIÓN - 1.24 - (CURVA INTEGRAL, ÓRBITA)

Una curva integral de un campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ que pasa por el punto $p \in M$ es una transformación de clase C^1 $\alpha: I \rightarrow M$, donde I es un intervalo que contiene al cero, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. A la imagen de una curva integral la llamamos órbita o trayectoria.

Un metro que vale la pena resaltar es que un problema importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en estudiar los grupos a un parámetro $\{\varphi_t\}$ de difeomorfismos en una variedad M , los campos vectoriales en M y la relación que guardan dichos grupos y campos entre sí.

Vamos a ver a continuación un teorema fundamental para el estudio de ecuaciones diferenciales el cual establece que si X es un campo vectorial suficientemente "bueno" existen curvas integrales o curvas solución localmente, son esencialmente únicas y, si X es suave, varían suavemente con respecto a las condiciones iniciales (por suave entendemos diferenciable).

- TEOREMA 1.25 (EXISTENCIA Y UNICIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES)

Sea U un abierto de un espacio de Banach E , y sea $f: U \rightarrow E$ una transformación $C^r, r \geq 1$. Entonces, dado un punto $p \in U$ existe $\epsilon > 0$ y $W \subset U$ vecindad de p tal que para todo $x \in W$ y cualquier $\delta, 0 < \delta \leq \epsilon$ existe una única curva integral $\alpha_x: (-\delta, \delta) \rightarrow U$, de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con $\alpha_x(0) = x$. Si además definimos una transformación $\varphi: W \times (-\delta, \delta) \rightarrow U$ de modo que $\varphi(x, t) = \alpha_x(t)$ entonces φ es una

TRANSFORMACIÓN DE CLASE C^1 Y POR CONSEQUENTE LAS SOLUCIONES VARIAN C^1 CON RESPECTO A t Y A LAS CONDICIONES INICIALES.

QUISIERAMOS AHORA EXTENDER ESTE RESULTADO LOCAL A UN RESULTADO GLOBAL EXTENDIENDO LOS SOLUCIONES LOCALES POR TODA LA VARIEDAD M , PARA ESTO ES NECESARIO EL SIGUIENTE LEMA QUE NOS ASEGURA QUE DOS CURVAS INTEGRALES BASADAS EN UN PUNTO p COINCIDEN EN CUALQUIER INTERVALO EN EL QUE ESTÉN AMBAS DEFINIDAS.

LEMA - 1.26

SEAN $\alpha_1: J_1 \rightarrow M$ Y $\alpha_2: J_2 \rightarrow M$ DOS CURVAS INTEGRALES PARA EL CAMPO X AMBAS BASADAS EN $p \in M$. ENTONCES $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ PARA TODA t EN $J_1 \cap J_2$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA I EL SUBCONJUNTO DE $J_1 \cap J_2$ EN EL CUAL LAS CURVAS α_1 Y α_2 COINCIDEN. QUISIERAMOS VER QUE $I = J_1 \cap J_2$.

PUESTO QUE $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$, $I \neq \emptyset$. DEBIDO A LA UNICIDAD LOCAL I ES ABIERTO EN $J_1 \cap J_2$.

VAAMOS A VER QUE I ES CERRADO EN $J_1 \cap J_2$.

SUPONGAMOS QUE $t \notin I$ ENTONCES $\alpha_1(t) \neq \alpha_2(t)$ Y POR SER M DE HAUSDORFF EXISTEN VECINDADES U Y V DE $\alpha_1(t)$ Y $\alpha_2(t)$ RESPECTIVAMENTE TALES QUE $U \cap V = \emptyset$.

ASÍ, POR LA CONTINUIDAD DE α_1 Y α_2 SE TIENE QUE EXISTE β TAL QUE PARA TODA $s \cdot |t-s| < \beta$, $\alpha_1(s) \neq \alpha_2(s)$ ES DECIR, I^c ES ABIERTO Y POR CONSEQUENTE I ES CERRADO.

DE ESTO LAJEREA, PUESTO QUE $J_1 \cap J_2$ ES UN INTERVALO, $J_1 \cap J_2$ ES UN CONJUNTO Y EL CONJUNTO I ES UN ABIERTO Y CERRADO EN UN CONJUNTO, ESTO IMPLICA QUE $I = J_1 \cap J_2$.

11.

CONSTRUYAMOS AHORA UNA CURVA INTEGRAL MAXIMAL $\alpha: J \rightarrow M$ BASADA EN p . ES DECIR, CONSTRUYAMOS UNA CURVA QUE NO PUEDE SER EXTENDIDA A UN INTERVALO MAYOR A J (QUE CONTIENGA A J). SEA $\{\alpha_x: J_x \rightarrow M\}$ LA FAMILIA DE TODAS LAS CURVAS INTEGRALES BASADAS EN p Y SEA $J = \bigcup_x J_x$ Y SEA $\alpha: J \rightarrow M$ DEFINIDA COMO α_x EN J_x CUALQUIERA. DE ESTE MODO J ES UN INTERVALO QUE PUEDE SER FINITO O INFINITO Y α ES UNA TRANSFORMACIÓN BIEN DEFINIDA DEBIDO AL LEMA ANTERIOR. LA CURVA INTEGRAL $\alpha: J \rightarrow M$ ES ASÍ UNA ÚNICA CURVA INTEGRAL MAXIMAL DE X BASADA EN p . A DICHA CURVA INTEGRAL LA LLAMAREMOS CURVA INTEGRAL GLOBAL O CURVA SOLUCIÓN GLOBAL PARA p .

OBSERVAREMOS POR MEDIO DE DOS EJEMPLOS QUE UNA CURVA INTEGRAL GLOBAL NO SE HALLA NECESARIAMENTE DEFINIDA PARA TODO TIEMPO t .

a) LA ECUACIÓN $\frac{dx}{dt} = x$ TIENE UNA SOLUCIÓN GLOBAL BASADA EN p DADA POR $\alpha(t) = t \cdot p$. SI $\frac{dx}{dt} = 1$ ESTÁ DEFINIDA EN $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ ENTONCES CADA CURVA INTEGRAL ESTÁ DEFINIDA SÓLO PARA UN TIEMPO FINITO.

b) SEA $M = \mathbb{R}^2$ Y CONSIDEREMOS $\frac{dx}{dt} = x^2$. LA SOLUCIÓN GLOBAL EN p ESTÁ DADA POR $\alpha(t) = \frac{1}{p^{-1}-t}$ PERO PARA $p > 0$ ESTA SOLUCIÓN SÓLO ESTÁ DEFINIDA PARA $-\infty < t < p^{-1}$.

EN (a) EL PROBLEMA ESTÁ EN QUE PUEDE ALCANZARSE EN UN TIEMPO FINITO UNA "ESQUINA" DE M Y EN (b) LA SOLUCIÓN $\alpha(t)$ SE DISPERSA A INFINITO EN UN TIEMPO FINITO. SIN EMBARGO SI M ES COMPACTA NO HAY PROBLEMAS (PUESTO EN ESTE CASO M NO TIENE FRONTERA) NI HAY ALBERGO DE DISPERSARSE A INFINITO. FORMALIZAREMOS ESTE RESULTADO:

TEOREMA 1.27 (solución global)

Si M es una variedad diferenciable compacta entonces cada solución (o curva integral) está definida para toda $t \in \mathbb{R}$, es decir, es una solución global.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\alpha: J \rightarrow M$ la curva integral global basada en p donde $J = (a, b)$. Vamos a demostrar que $b = \infty$ (en forma análoga se ve que $a = -\infty$).

Supongamos que $b < \infty$, entonces existe una sucesión $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tal que $t_n \rightarrow b$ si $n \rightarrow \infty$ (por ejemplo $t_n = b - \frac{1}{n}$). Consideremos ahora la sucesión de imágenes de $\{t_i\}$ bajo α , $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \dots$. Si se tiene $\alpha(t_n) = \alpha(t_m)$ para $n \neq m$ entonces $\alpha(t_n - t_m) = \alpha(0) = p$ y $\alpha(t) = \alpha(t + t_n - t_m)$ lo que indica que α es periódica y por consiguiente está definida para toda t , lo que es una contradicción pues suponimos que $b < \infty$. Así, $\alpha(t_m) \neq \alpha(t_n)$ para toda n, m en \mathbb{Z}^+ . Como M es compacta, $\{\alpha(t_n)\}$ tiene un punto de acumulación β . Por el teorema de existencia y unicidad se tiene que existen soluciones únicas basadas en los puntos x que se hallan en una vecindad W de β y están definidas para $t \in (c, d)$ donde c depende de W y no del punto x escogido. Consideremos ahora t_n tal que $b - t_n \in c$ y tal que $\alpha(t_n) \in W$. Por unicidad local y por el caso anterior, α puede extenderse a una solución en $(a, t_n + \epsilon)$, sin embargo como $t_n + \epsilon > b$ esto contradice el que J sea maximal. En consecuencia, $b = \infty$. ii.

De esta manera, si M es compacta (y en muchos casos aunque no lo sea) podemos definir $\Phi_t(p) = \alpha(t, p) = \alpha_p(t)$, donde α_p es la solución

global para el campo X basado en p , y obtenemos de esta forma la transformación $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que representa simultáneamente a todas las curvas integrales de X (1). La transformación Φ así definida representa al flujo (tal como lo vimos antes) y justamente es la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos la que estudia la estructura de los flujos en una variedad.

DEFINICIÓN 1.28 (singularidad).

Sea $X \in \mathcal{X}^1(M)$ y $p \in M$. Decimos que p es una singularidad de X si $X(p) = 0$.

Si X es tal que $\Phi_t, t \in \mathbb{R}$, es el flujo asociado, y consideramos $O(p) = \{\Phi_t(p); t \in \mathbb{R}\}$ la órbita de X por el punto p , entonces si p es punto singular, $O(p) = p$.

Si p no es un punto singular de X decimos que p es un punto regular de X .

Supongamos que p es un punto regular del campo $X \in \mathcal{X}^1(M)$, entonces la transformación $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\alpha(t) = \Phi_t(p)$ es una inmersión. Si α no es biunívoca, existe $w > 0$ tal que $\alpha(w) = \alpha(0) = p$ y $\alpha(t) \neq p$ para toda t en el intervalo $(0, w)$. En este caso $O(p)$ es difeomorfa a S^1 y decimos que $O(p)$ es una órbita cerrada de período w . Decimos que α es una órbita regular si no es singular ni periódica. De esta manera, una órbita regular no es sino la imagen de un euclídeo de la recta real en M .

DEFINICIÓN 1.29

DEFINIMOS el w -LÍMITE DE UN PUNTO $p \in M$, $w(p)$, como el conjunto de aquellos puntos $q \in M$ tales que existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ con $\Phi_{t_n}(p) \rightarrow q$. ANálogAMENTE,

(1) observamos que sólo cuando las soluciones son globales se tiene que el campo define un flujo.

el ω -límite, $\omega(p)$, se p lo definimos como $\omega(p) = \{q \in M : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ con } \varphi_{t_n}(p) \rightarrow q\}$.

Observamos que si $r \in \omega(p)$ entonces $\omega(p) = \omega(r)$ pues si $r = \varphi_{t_0}(p)$ entonces si $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$, $\varphi_{t_n - t_0}(r) = \varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$ con $t_n - t_0 \rightarrow \infty$.

Podemos pensar intuitivamente que $\omega(p)$ es el lugar donde la órbita de p "muere" y $\alpha(p)$ es donde "nace".

Un ejemplo interesante es aquel que surge de considerar un flujo racional y un flujo irracional en el toro T^2 . En el primer caso el ω -límite de cualquier órbita es esa misma, sin embargo en el segundo toda órbita recorre sea densa y por consiguiente el ω -límite de cualquier órbita es todo el toro T^2 .

(Para mayor referencia consultar por ejemplo el libro Introducción a los Sistemas Dinámicos de Jacob Palis y Wellington de Melo, pag. 73)

Vamos a introducir a continuación un concepto básico en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales; para ello recordemos que cuando hablamos de un "estudio cualitativo" nos referimos fundamentalmente a una descripción geométrica del espacio de órbitas asociado a una ecuación diferencial. Una pregunta que surge inmediatamente es cuándo dos espacios de órbitas tienen la misma descripción. La respuesta está dada por la equivalencia topológica, que no es sino una relación de equivalencia entre ecuaciones diferenciales que se encuentra apoyada en la estructura geométrica de las órbitas.

compacta, provisto de una topología C^r , (21).

Decimos que dos campos son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h: M \rightarrow M$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación de las trayectorias. Es decir, si $p \in M$ y $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que si $0 < t < \delta$, $h\varphi_t(p) = \psi_{t'}(h(p))$ para alguna t' , $0 < t' < \epsilon$ donde $\varphi_t, \psi_{t'}$ son los flujos correspondientes a X y Y respectivamente.

Observamos que puede darse en $\mathcal{X}^r(M)$ una relación de equivalencia todavía más fuerte: dos campos X y Y en $\mathcal{X}^r(M)$ son topológicamente conjugados si existe una equivalencia topológica que preserve parámetros, es decir, $h\varphi_t(p) = \psi_t(h(p))$ para todo $p \in M$, $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN - 1.31

Sea h una equivalencia topológica entre X, Y en $\mathcal{X}^r(M)$ entonces

- a) $p \in M$ es una singularidad de X si y sólo si $h(p)$ es una singularidad de Y .
- b) la órbita de p por el campo X , $O_x(p)$, es cerrada si y sólo si $O_y(h(p))$ es cerrada
- c) la imagen del ω -límite de $O_x(p)$ por h es el ω -límite de $O_y(h(p))$; análogamente para el α -límite.

Puede introducirse una topología en el espacio $\mathcal{X}^r(M)$ de campos vectoriales de clase C^r sobre una variedad compacta observando que $\mathcal{X}^r(M)$ es un subconjunto cerrado (localmente) de $C^r(M, \mathbb{R}^n)$, donde $C^r(M, \mathbb{R}^n)$ denota al espacio de las transformaciones de clase C^r , $0 \leq r < \infty$ definidas en M . Si pensamos a $C^r(M, \mathbb{R}^n)$ con la topología C^r , vemos que al considerar \mathcal{X}^r con la topología inducida se tiene que dos campos X, Y en $\mathcal{X}^r(M)$ resultan cercanos si tanto X como sus derivadas hasta el orden r son cercanos en todos los puntos.

DEFINICIÓN - 1.30 - (EQUIVALENCIA TOPOLOGICA)

Sea $\mathcal{X}^r(M)$ el espacio de los campos vectoriales de clase C^r en una variedad

- DEFINICIÓN - 1.32 (ESTABILIDAD ESTRUCTURAL)

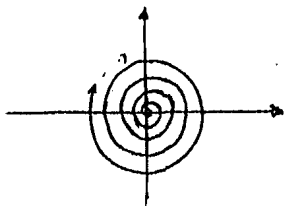
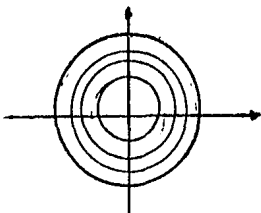
Sea $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Decimos que X es estructuralmente estable si existe una vecindad V de X en $\mathcal{X}^r(M)$ tal que todo $Y \in V$ es topológicamente equivalente a X . En otras palabras, un campo vectorial X es estructuralmente estable si no se altera el comportamiento topológico de sus órbitas bajo pequeñas perturbaciones de campo.

EJEMPLO:

Consideramos los campos vectoriales X y Y en \mathbb{R}^2 cuyos matrices en la base canónica son

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Es sencillo ver que las órbitas de X son círculos concéntricos y las de Y espirales que salen del origen y se abren conforme t tiende a infinito, pues el flujo φ_t asociado a X está dado por $\varphi_t(x) = (x_1 \cos t, x_2 \sin t)$, $x = (x_1, x_2)$ y el flujo ψ_t asociado a Y está dado por $\psi_t(x) = (x_1 e^{2t} \cos t, x_2 e^{2t} \sin t)$



Alteremos ahora ambos campos sumando una $\epsilon > 0$ muy pequeña como se indica a continuación

$$X^\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Y^\epsilon = \begin{bmatrix} 2+\epsilon & 1 \\ -1 & 2+\epsilon \end{bmatrix}$$

Ahora el flujo asociado a X^ϵ , φ_t^ϵ tiene la forma $\varphi_t^\epsilon = (x_1 e^{\epsilon t} \cos t, x_2 e^{\epsilon t} \sin t)$ y el flujo ψ_t^ϵ asociado al campo Y^ϵ tiene la forma $\psi_t^\epsilon = (x_1 e^{(2+\epsilon)t} \cos t, x_2 e^{(2+\epsilon)t} \sin t)$. Claramente el comportamiento cualitativo de φ_t^ϵ y de ψ_t^ϵ es completamente distinto pues las órbitas de este último son espirales mientras que las de φ_t^ϵ son círculos. Por otra parte, el comportamiento de φ_t^ϵ y de ψ_t^ϵ si resulta ser cualitativamente el mismo, pues en ambos casos se tienen espirales que salen del origen y se abren conforme t tiende a infinito. Así, podemos decir que X es un campo inestable mientras que Y es un campo estructuralmente estable.

- DEFINICIÓN - 1.33 (EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA EN UN PUNTO)

Sean $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$ y $p, q \in M$. Decimos que X y Y son topológicamente equivalentes en p y en q respectivamente si existen vecindades V_p y W_q y un homeomorfismo $h: V_p \rightarrow W_q$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación de las órbitas y tal que $h(p) = q$.

- DEFINICIÓN - 1.34 (ESTABILIDAD LOCAL)

Sean $X \in \mathcal{X}^r(M)$ y $p \in M$. Decimos que X es localmente estable en p si existen vecindades N_x de X en $\mathcal{X}^r(M)$ y de p , $U(p) \subset M$, tales que para cada $Y \in N_x$, X en p es topológicamente equivalente a Y en q , para alguna $q \in U$.

El siguiente teorema describe el comportamiento local de las órbitas en una vecindad de un punto regular.

TEOREMA (DEL FLUJO TUBULAR).

Sea $X \in \mathcal{X}^r(M)$ y $p \in M$ un punto regular de X . Sean $C = \{x^1, \dots, x^m\} \in \mathbb{R}^m$; $|x^i| < 1$ y X_c un campo en C definido por $X_c = (1, 0, \dots, 0)$. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^r , $h: V_p \rightarrow C$, donde V_p es vecindad de p en M , que lleva trayectorias de X en trayectorias de X_c .

COROLARIO (AL TEOREMA DEL TUBO TUBULAR)

Si $X \in \mathcal{X}^1(M)$ y $p \in M$ es un punto regular, entonces X es localmente estable en p .

Por las características de los campos estructuralmente estables no resulta extraño que tratemos de encontrar condiciones que nos permitan afirmar cuando un campo es estable. En lo que resta de esta sección intentaremos trazar un camino que nos conduzca a la definición de los campos Morse-Smale los cuales, como veremos de vez, resultan ser estructuralmente estables. Desafortunadamente el camino a seguir es demasiado largo, por lo que nos limitaremos a enunciar los teoremas sin dar demostración alguna.

DEFINICIÓN - 1.35 (CAMPO HIPERBÓLICO EN \mathbb{R}^n)

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n provisto de la norma $\|L\| = \sup\{\|Lx\| : \|x\|=1\}$. Decimos que un campo lineal $L \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es un campo hiperbólico si el espectro de L no tiene ningún elemento sobre el eje imaginario. El número de valores propios con parte real negativa es llamado el índice de L .

PROPOSICIÓN - 1.36

Si $L \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es un campo hiperbólico entonces existe una descomposición única de \mathbb{R}^n en suma directa $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ donde E^s y E^u son subespacios invariantes bajo L y bajo el flujo asociado a L , tales que los valores propios de $L^s = L|_{E^s}$ tienen parte real negativa y los valores propios de $L^u = L|_{E^u}$ tienen parte real positiva.

La demostración de esta proposición es muy sencilla si se considera la forma canónica de Jordán y se recuerda que el flujo asociado a L es $\varphi_t(x) = \varphi(t, x) = e^{tL}x$.

Observamos que si $\varphi_t = e^{tL}$ es el flujo asociado a un campo lineal hiperbólico L , entonces $\varphi_t = e^{tL}$ y puede demostrarse que φ_t

no posee ningún valor propio en el círculo unitario (basta demostrar que si λ es valor propio de L , $e^{t\lambda}$ resulta ser valor propio de e^{tL}). Esta situación motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.36 (ISOMORFISMO HIPERBÓLICO)

Si $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo lineal tal que su espectro es disjunto del círculo unitario S^1 , se dice que A es un isomorfismo hiperbólico. En particular, el difeomorfismo inducido en el tiempo $t=1$ por el flujo de un campo lineal hiperbólico es un isomorfismo hiperbólico.

PROPOSICIÓN 1.37

Sea $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ un isomorfismo hiperbólico, entonces existe una descomposición de \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, tal que E^s y E^u son invariantes bajo A y los valores propios de $A^s = A|_{E^s}$ son los valores propios de A que tienen módulo menor que uno, mientras que los de $A^u = A|_{E^u}$ son los valores propios de A de módulo mayor que uno.

TEOREMA 1.38

Si L es un campo lineal hiperbólico y $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ y L tiene la descomposición dada en la proposición 1.36, entonces el flujo asociado a L , φ_t , converge al origen si $x \in E^s$ y $t \rightarrow \infty$ o bien si $x \in E^u$ y $t \rightarrow -\infty$.

PROPOSICIÓN - 1.39 (DENSIDAD DE LOS CAMPOS LINEALES HIPERBÓLICOS)

El conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ de los campos lineales hiperbólicos de \mathbb{R}^n es abierto y denso en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSICIÓN - 1.40 (ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LOS CAMPOS HIPERBÓLICOS)

Un campo lineal es estructuralmente estable en el espacio de los campos lineales si y sólo si es hiperbólico.

Así, con estos resultados queda asentada la importancia de los campos hiperbólicos en \mathbb{R}^n pues estos campos resultan ser estables, abiertos y densos en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Ahora quisieramos saber lo que sucede con los 'campos hiperbólicos' en variedades

- DEFINICIÓN - 1.41 - (SINGULARIDAD HIPERBÓLICA)

Sea $X \in \mathcal{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad de X . Decimos que p es una singularidad hiperbólica si $DX_p: TM_p \rightarrow TM_p$ es un campo lineal hiperbólico, es decir si ningún valor propio de DX_p está en el eje imaginario.

Un resultado importante es que el conjunto J de campos vectoriales cuyas singularidades son todas hiperbólicas constituye un abierto denso en $\mathcal{X}^r(M)$. Además, si $X \in \mathcal{X}^r(M)$ y p es una singularidad hiperbólica de X , entonces X es localmente estable en p .

La variedad inestable $W^u(p)$ de p , es el conjunto de puntos que tienen a p como α -límite. $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son invariantes bajo f .

Si ahora denotamos por $B_\beta \subset M$ a la bola con centro en p y radio β (a M la pensamos con la métrica inducida de \mathbb{R}^n), entonces las variedades estable e inestable locales están dadas por los conjuntos $W_\beta^s(p) = \{q \in B_\beta; f^n(q) \in B_\beta \forall n \geq 0\}$ y $W_\beta^u(p) = \{q \in B_\beta; f^{-n}(q) \in B_\beta \forall n \geq 0\}$.

- DEFINICIÓN - 1.42 - (PUNTO FIJO HIPERBÓLICO)

Sea $p \in M$ un punto fijo de $f \in \text{Dif}^r(M)$. Decimos que p es un punto fijo hiperbólico si $Df_p: TM_p \rightarrow TM_p$ es un isomorfismo hiperbólico, es decir, Df_p no tiene un valor propio de módulo 1.

Nuevamente se tiene que el conjunto de los difeomorfismos cuyos puntos fijos son todos hiperbólicos es abierto y denso en $\text{Dif}^r(M)$, además de que un difeomorfismo de este tipo es localmente estable.

Ya hemos hablado de espacios invariantes bajo la acción de un flujo. Ahora vamos a introducir el concepto de variedad estable e inestable con el fin de obtener resultados análogos a los que se mencionaron anteriormente.

Consideremos un punto fijo hiperbólico p de f , donde $f \in \text{Dif}^r(M)$. La variedad estable $W^s(p)$ es el conjunto de puntos que tienen a p como ω -límite y

- PROPOSICIÓN - 1.43

Si $\beta > 0$ es suficientemente pequeño
1) $W_\beta^s(p) \subset W^s(p)$ y $W_\beta^u(p) \subset W^u(p)$ es decir, los puntos de una vecindad de p cuyo órbita positiva cae en la misma vecindad, tienen a p como ω -límite. Análogamente para puntos en la órbita negativa considerando el α -límite.

2) $W_\beta^s(p)$ ($W_\beta^u(p)$ respectivamente) es un disco topológico embebido en M cuya dimensión es igual a la del espacio estable (inestable) para $W_\beta^s(p)$ de $A = Df_p$.

3) $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\beta^s(p))$

$W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\beta^u(p))$.

En consecuencia existe una inmersión topológica biunívoca $\varphi_s: E^s \rightarrow M$ ($\varphi_u: E^u \rightarrow M$) cuya imagen es $W^s(p)$ ($W^u(p)$ respectivamente) donde E^s y E^u son los subespacios estable e inestable de $A = Df_p$.

- DEFINICIÓN - 1.44

Sean S y S' subvariedades C^1 de M y $x \in S$. Decimos que S y S' están C^1 próximas si existe un difeomorfismo C^1 $h: S \rightarrow S'$ en M tal que

i' es ϵ -próximo de i en la topología C^r ,
 donde $i: S \rightarrow M$, $i': S' \rightarrow M$ son las inclusiones.

TEOREMA (DE LA VARIEDAD ESTABLE) - 1.45

Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y E^s el subespacio estable de $A = Df_p$, entonces:

1) $W^s(p)$ es una variedad de clase C^r inmensa biunivocamente en M y el espacio tangente a $W^s(p)$ en el punto p es E^s

2) sea $D \subset W^s(p)$ un disco encajado $\ni p \in D$. Consideramos $\mathcal{N} \subset \text{Diff}^r(M)$ una vecindad tal que cada $\varphi \in \mathcal{N}$ tenga un único punto fijo hiperbólico p_φ contenido en una vecindad U de p .

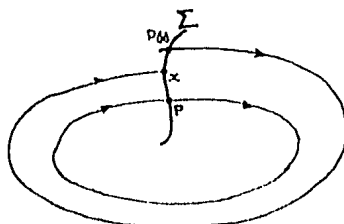
Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{N}'$, existe un disco $D_\varphi \subset W^s(p_\varphi)$ C^r -próximo de D .

Supongamos que se tienen dos singularidades hiperbólicas p y q tales que la intersección de la variedad estable de p con la variedad inestable de q es no vacía, de esta forma, p y q quedan relacionadas mediante órbitas que nocen en q y mueren en p . Un resultado que se depende (no muy fácilmente) de lo que hemos visto es que si la intersección de las variedades estable e inestable de p y q respectivamente es transversal, entonces una pequeña perturbación del campo origina singularidades hiperbólicas que se hallan relacionadas de la misma manera que lo estaban p y q .

Vamos a introducir a continuación el concepto de hiperbolicidad para órbitas cerradas. Naturalmente, como en el caso de las singularidades, una órbita cerrada hiperbólica no se verá alterada

como tal, mediante pequeñas perturbaciones del campo. Además la estructura de las trayectorias de un campo en una vecindad de una curva cerrada hiperbólica y resultado ser simple y estable bajo pequeñas perturbaciones. En particular el conjunto que tiene a γ como ω -límite (α -límite) es una variedad diferenciable que se conoce como variedad estable (inestable) de γ . Para estudiar las órbitas de un campo vectorial en una vecindad de una órbita cerrada se introduce una transformación conocida como transformación de Poincaré o transformación de holonomía (o monodromía):

Sea γ una órbita cerrada de un campo $X \in \mathcal{D}^r(M)$. Sea p un punto en γ y Σ una sección transversal al campo X en p . Sabemos que, por ser la órbita de p cerrada, ésta volverá a intersectar a Σ en un tiempo τ que es justamente el período de γ . Como el flujo es continuo con respecto a las condiciones iniciales, si consideramos un punto x suficientemente cercano a p , $x \in \Sigma$, la órbita por x intersectará a Σ en un tiempo muy cercano a τ . De esta manera si consideramos una vecindad $V \subset \Sigma$ de p suficientemente pequeña, podemos definir una transformación $P: V \rightarrow \Sigma$ tal que a cada punto $x \in V$ asocia el punto $P(x)$, donde $P(x)$ es el primer punto donde la órbita de x vuelve a intersectar a Σ .



A LA TRANSFORMACIÓN $P: V \rightarrow Z$ ASÍ DEFINIDA SE LE CONOCE COMO TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ ASOCIADA A LA ÓRBITA γ .

Si, POR EJEMPLO, TENEMOS QUE $X \in V$ ES UN PUNTO FIJO DE P , ENTONCES LA ÓRBITA DE X ES CERRADA Y EN CASO DE QUE X ESTE PRÓXIMO A P EL PERÍODO DE LAS DOS ÓRBITAS EN CUESTIÓN SERÍA MUY PARECIDO. POR OTRA PARTE, SI X FUESE UN PUNTO PERIÓDICO DE P DE PERÍODO K , ENTONCES LA ÓRBITA POR X ES PERIÓDICA DE PERÍODO CERCANO A K .

UN RESULTADO IMPORTANTE ES QUE LA TRANSFORMACIÓN P ES UN DIFEOMORFISMO LOCAL, DE UNA VEJINDAD DE P EN Z , QUE RESPECTO SEA DE LA MISMA CLASE QUE EL CAMPO, ES DECIR, SI X ES DE CLASE C^r , P TAMBIÉN LO ES.

DEFINICIÓN - 1.46 - (ÓRBITA CERRADA HIPERBÓLICA)

SEA γ UNA ÓRBITA CERRADA DE UN CAMPO $X \in \mathcal{X}^r(M)$ Y SEA P UN PUNTO EN γ . CONSIDEREMOS ADEMÁS UNA SECCIÓN TRANSVERSAL Σ POR EL PUNTO P . SI P ES UN PUNTO FIJO HIPERBÓLICO DE LA TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ $P: V \subset \Sigma \rightarrow Z$ DECIMOS QUE γ ES UNA ÓRBITA CERRADA HIPERBÓLICA DE X .

OBSERVAMOS QUE PUESTO QUE EL FLUJO ASOCIADO A UN CAMPO DEPENDE CONTINUAMENTE DEL CAMPO LA TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ P DEPENDERÁ CONTINUAMENTE DEL CAMPO. PODEMOS CONCLUIR ENTONCES QUE SI γ ES UNA ÓRBITA CERRADA HIPERBÓLICA DE UN CAMPO X , EXISTE UNA VEJINDAD V DE X EN $\mathcal{X}^r(M)$ TAL QUE TODO $Y \in V$ POSEE UNA ÓRBITA CERRADA HIPERBÓLICA γ_Y PRÓXIMA A γ .

PROPOSICIÓN - 1.47 - (ESTABILIDAD LOCAL DE ÓRBITAS C. HIPERBÓLICAS)

SI γ ES UNA ÓRBITA CERRADA HIPERBÓLICA DE UN CAMPO $X \in \mathcal{X}^r(M)$, ENTONCES X ES LOCALMENTE ESTABLE EN γ .

LA PROPOSICIÓN ANTERIOR SE PUEDE REFORMULAR DICIENDO QUE PARA CADA CAMPO Y EN UNA VEJINDAD V DE X EXISTE UN HOMEOMORFISMO $h: V \rightarrow V'$, DONDE V' ES UNA VEJINDAD DE Y , QUE LLEVA ÓRBITAS DE X EN ÓRBITAS DE Y .

LA DEFINICIÓN DE LAS VARIEDADES ESTABLE E INESTABLE DE UNA ÓRBITA CERRADA HIPERBÓLICA γ DE UN CAMPO $X \in \mathcal{X}^r(M)$ ESTÁN DADAS EN FORMA NATURAL POR

$$W^s(\gamma) = \{y \in M; \omega(y) = \gamma\}$$

$$W^u(\gamma) = \{y \in M; \alpha(y) = \gamma\}$$

DONDE POR $\omega(y)$ Y $\alpha(y)$ ENTENDEMOS EL W -LÍMITE Y EL U -LÍMITE DE y RESPECTIVAMENTE.

DIJIMOS ANTERIORMENTE QUE EL CONJUNTO \mathcal{J}_1 , CONSTITUIDO POR LOS CAMPOS VECTORIALES CUYAS SINGULARIDADES SON TODAS HIPERBÓLICAS RESULTA SER ABIERTO Y DENSO EN $\mathcal{X}^r(M)$. PUES BIEN, SI AHORA CONSIDERAMOS $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$, DONDE \mathcal{J}_2 DENOTA AL CONJUNTO DE CAMPOS DE \mathcal{J}_1 CUYAS ÓRBITAS CERRADAS SON HIPERBÓLICAS, SE TIENE QUE \mathcal{J}_2 ES RESIDUAL (RECORDAMOS QUE UN SUBCONJUNTO RESIDUAL DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO ES UNO QUE PUEDE SER EXPRESADO COMO UNA INTERSECCIÓN NUMERABLE DE CONJUNTOS DENSO Y ABIERTOS DE BUCHO ESTRECHO).

TEOREMA - 1.48 - (\mathcal{J}_2 ES RESIDUAL)

EL CONJUNTO $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{X}^r(M)$, DE CAMPOS CUYOS ELEMENTOS CRÍTICOS (SINGULARIDADES Y ÓRBITAS CERRADAS) SON HIPERBÓLICAS, ES RESIDUAL (Y EN CONSECUENCIA DENSO EN $\mathcal{X}^r(M)$).

DEFINICIÓN - 1.49 - (GENÉRICIDAD)

DECIMOS QUE UNA PROPIEDAD DE APLICACIONES DE UNA VARIEDAD EN OTRA ($M \rightarrow N$) ES C^r -GENÉRICA SI SUCEDER PARA TODOS LOS ELEMENTOS DE UN SUBCONJUNTO RESIDUAL DE $C^r(M, N)$.

EN OTRAS PALABRAS, UNA PROPIEDAD GENÉRICA DE LOS CAMPOS ES AQUELLA QUE ES SATISFECHA POR CASI TODOS LOS CAMPOS VECTORIALES.

Dijimos anteriormente que un problema importante en la teoría de los sistemas dinámicos es la descripción de los espacios fase de los campos vectoriales de una variedad diferenciable. Sin embargo, nos encontramos con que existen campos con espacios fase sumamente complicados y por lo tanto difíciles de describir. Así, nos gustaría poder encontrar un subconjunto del espacio de campos tal que sus elementos sean estructuralmente estables y posean espacios fase sencillos de describir. Si, además, dicho subconjunto resulta ser abierto y denso habríamos logrado un gran avance en nuestro análisis.

Un resultado en este sentido fue dado a principios de la década de los sesentas por M. Peixoto y se limita a una respuesta para variedades compactas de dimensión dos. En dimensiones mayores se tienen todavía muchas preguntas; un resultado conocido es que los campos estructuralmente estables no son densos. (1)

Vamos a definir ahora una clase de campos llamados campos de Morse-Smale. Dichos campos resultan ser un subconjunto abierto, no vacío, y sus elementos son estructuralmente estables. Si además nos restringimos a variedades compactas compactas de dimensión dos, tendremos que la clase de los Morse-Smale es también densa.

En la definición de los campos de Morse-Smale es claro que, si deseamos tener estabilidad estructural, deberíamos pedir como primer requisito que las singularidades y las órbitas cerradas sean hiperbólicas (de otra manera no podríamos garantizar siquiera estabilidad estructural local). Por otra

parte, requerimos que las intersecciones de las variedades estable e inestable de elementos críticos (singularidades y órbitas cerradas) sean preservadas bajo equivalencia topológica. Así, para garantizar dichas intersecciones bajo pequeñas perturbaciones del campo, habríamos de pedir que las intersecciones sean transversales.

Antes de definir los campos de Morse-Smale veamos algunas definiciones.

Sea $X \in \mathcal{X}^r(M)$ y consideremos los conjuntos $L_u(X)$ y $L_w(X)$ definidos como sigue

$$L_u(X) = \{p \in M \mid p \in \alpha(q) \text{ para alguna } q \in M\}$$

$$L_w(X) = \{p \in M \mid p \in \omega(q) \text{ para alguna } q \in M\}.$$

$L_u(X)$ y $L_w(X)$ resultan ser invariantes por el flujo asociado a X y la órbita de cualquier punto "nace" y "muere" en $L_u(X)$ y $L_w(X)$ respectivamente. A L_u y L_w se les conoce como conjuntos límite.

- DEFINICIÓN - 1.50 - (PUNTO ERRANTE)

Sea $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Decimos que $p \in M$ es un punto errante de X si existe una vecindad V de p y un número $t_0 > 0$ tal que si $|t| > t_0$, entonces $\varphi_t(V) \cap V = \emptyset$ (donde φ_t es el flujo asociado a X). Cuando lo anterior no sucede decimos que p es no errante.

- LEMA - 1.51

Sea $\Omega(X)$ el conjunto de los puntos no errantes de X , entonces

- $\Omega(X)$ es compacto e invariante bajo el flujo
- $\Omega(X) \supset L_u(X) \cup L_w(X)$. En particular $\Omega(X)$ contiene a los elementos críticos de X .
- si $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$ y $h: M \rightarrow M$ es una equivalencia topológica entre X y Y entonces $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$.

(1) La demostración de este hecho la dio S. Smale en 1966 en su artículo "Structurally stable systems are not dense", publicado en *American Journal of Mathematics* 80, 1966.

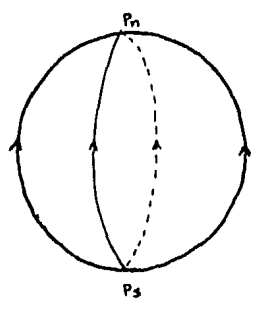
DEFINICIÓN - 1.6.2 - CAMPO DE MORSE-SMALE

Sea M una variedad compacta de dimensión n y $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Decimos que X es un campo de Morse-Smale si:

- 1) X tiene un número finito de elementos críticos (singularidades y órbitas cerradas) todos hiperbólicos;
- 2) si p y q son elementos críticos de X , entonces $W^s(p)$ es transversal a $W^u(q)$;
- 3) $\Omega(X)$ es igual al conjunto de los elementos críticos.

Vamos a ver cuatro ejemplos de campos de Morse-Smale:

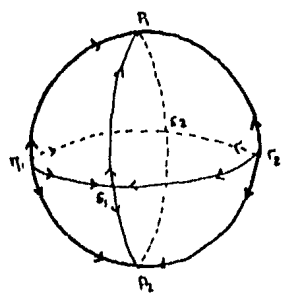
1)



en este caso

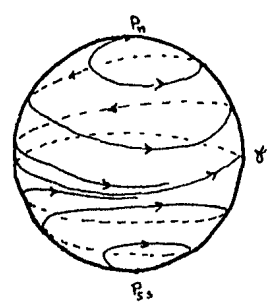
P_N y P_S son singularidades hiperbólicas; P_N atractor y P_S repulsor; si $x \in S^2 - \{P_N, P_S\}$, $w(x) = P_N$ y $\kappa(x) = P_S$.

2)



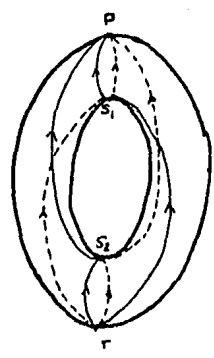
aquí, P_1, P_2 son atractores hiperbólicos; r_1, r_2 repulsores hiperbólicos; s_1, s_2 son líneas hiperbólicas y $\Omega(X) = \{P_1, P_2, r_1, r_2, s_1, s_2\}$.

3)



aquí P_N, P_S son singularidades hiperbólicas repulsoras; γ es órbita cerrada hiperbólica atractora; si $x \in S^2 - \{P_N, P_S\} \cup \gamma$ entonces $w(x) = \gamma$ y $\kappa(x) = P_N$ o P_S .

4)



aquí, P es atractor hiperbólico; r es repulsor hiperbólico; s_1, s_2 son líneas hiperbólicas y $\Omega(X) = \{P, r, s_1, s_2\}$

VERAMOS AHORA TRES RESULTADOS IMPORTANTES
RELACIONADOS CON LOS CAMPOS DE MORSE-SMILE.

TEOREMA 1.53 (ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE M-S EN $\mathcal{X}^r(M)$).

SI $X \in \mathcal{X}^r(M)$ ES UN CAMPO DE MORSE-SMILE,
ENTONCES X ES ESTRUCTURALMENTE ESTABLE.

TEOREMA 1.54 (DENSIDAD DE LOS M-S EN $\mathcal{X}^r(M^2)$).

EL CONJUNTO DE LOS CAMPOS DE MORSE-SMILE
ES DENSO EN $\mathcal{X}^r(M^2)$, PARA M^2 VARIEDAD
ORIENTABLE.

TEOREMA 1.55

EL SUBCONJUNTO DE CAMPOS DE MORSE-SMILE
ES DENSO EN $\mathcal{X}^1(M^2)$ SIENDO M^2 ORIENTA-
BIE O NO.

VAMOS A CONCLUIR ESTA SECCIÓN INTRODUCIEN-
DO LA NOCIÓN DE FLUJO HOLOMORFO EN UNA
VARIEDAD COMPLEJA M .

DEFINICIÓN 1.56 (FLUJO HOLOMORFO).

SEA M UNA VARIEDAD HOLOMORFA DE
DIMENSIÓN COMPLEJA m (ES DECIR, M ES
LOCALMENTE DIFEOMORFA A \mathbb{C}^m POR UN DI-
FEOMORFISMO HOLOMORFO (VER PAGINA 3)).

UN FLUJO HOLOMORFO ES UNA ACCIÓN HO-
LOMORFA $\varphi: \mathbb{C} \times M \rightarrow M$, DONDE POR
ACCIÓN HOLOMORFA ENTENDEMOS LO SIGUIENTE:

- i) PARA CADA $T \in \mathbb{C}$, $\varphi_T: M \rightarrow M$
DADO POR $\varphi_T(p) = \varphi(T, p)$, $p \in M$, ES
UN DIFEOMORFISMO HOLOMORFO.
- ii) SI $T_1, T_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi_{T_1+T_2} = \varphi_{T_1} \circ \varphi_{T_2}$
Y $\varphi_0(p) = p$, PARA TODO $p \in M$.

VAMOS A VER AHORA LO QUE SE ENTENDE POR UN
CAMPO VECTORIAL HOLOMORFO SOBRE UNA VA-

RIEDAD COMPLEJA.

DEFINICIÓN 1.57 (CAMPO VECTORIAL HOLOMORFO).

SEA M UNA VARIEDAD HOLOMORFA Y SEA TM
SU HAZ TANGENTE. UN CAMPO VECTORIAL HOLOMOR-
FO SOBRE M ES UNA TRANSFORMACIÓN $X: M \rightarrow TM$
HOLOMORFA TAL QUE LA TRANSFORMACIÓN $\pi \circ X$,
 $\pi \circ X: M \rightarrow M$, ES LA IDENTIDAD.

CONSIDEREMOS AHORA UN FLUJO HOLOMORFO φ ,
 $\varphi: \mathbb{C} \times M \rightarrow M$, EN UNA VARIEDAD HOLOMORFA M .
EL FLUJO φ INDUCE UN CAMPO HOLOMORFO X
EN M SI DEFINIMOS X COMO

$$X(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{T=0} \varphi_T(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{T=0} \varphi(T, p).$$

OBSERVAMOS QUE SI $p \in M$ ES UNA SINGU-
LARIDAD DEL CAMPO, $X(p) = 0$, ENTONCES $\varphi_T(p) = p$
PARA TODO $T \in \mathbb{C}$; EN ESTE CASO DECIMOS QUE
LA ÓRBITA DE p BAJO $\varphi_T(p)$ SE REDUCE A UN
SOLO PUNTO. POR OTRA PARTE, SI $X(p) \neq 0$,
LA ÓRBITA DE $\varphi_T(p)$, $\{\varphi_T(p) \mid T \in \mathbb{C}\}$, ES
UNA CURVA COMPLEJA O, DICHO DE OTRA FOR-
MA, LA ÓRBITA DE $\varphi_T(p)$ ES UNA SUPERFI-
CIE REAL DOS DIMENSIONAL.

EN EL SIGUIENTE CAPÍTULO HAREMOS DE CONSI-
DERAR FLUJOS EN \mathbb{C}^n DEFINIDOS POR

$$\varphi(T, z) = e^{TA}(z), \text{ CON } T \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n \text{ Y } A \in GL(n, \mathbb{C}).$$

EN ESTE CASO, EL CAMPO LINEAL INDUCIDO POR
 φ ES EL QUE ASOCIA A CADA $z \in \mathbb{C}^n$ EL PUNTO
 Az EN \mathbb{C}^n ($z \rightarrow Az$), Y PUEDE VERSE
QUE SI A ES NO SINGULAR, φ DEFINE UNA FO-
RMACIÓN 2-DIMENSIONAL REAL EN $\mathbb{C}^n - \{0\}$.

(1) LA DEMOSTRACIÓN ORIGINAL DE ESTE TEOREMA EN DIMENSIÓN DOS, PUE-
DE ENCONTRARSE EN "STRUCTURAL STABILITY IN THE PLANE WITH ENLARGED
BOUNDARY CONDITIONS", M.C. PEIKOTO, M. PEIKOTO, ANAIS DE ACAD. BRAS.
DE CIENCIAS 31, 1959. OTRA DEMOSTRACIÓN ORIGINAL PUEDE VERSE
EN "ON MORSE-SMILE DYNAMICAL SYSTEMS", THIS J., TOPOL-
OGY 8, 1969.

(2) LA DEMOSTRACIÓN ORIGINAL ES DE M. PEIKOTO Y PUEDE EN-
CONTRARSE EN "STRUCTURAL STABILITY ON TWO DIMENSIONAL
MANIFOLDS", TOPOLOGY 1, 1962.

- CAPÍTULO 2 -

INTRODUCCIÓN.

EN ESTE CAPÍTULO TRATABEMOS DE ESTUDIAR CON DETALLE LAS CURVAS INTEGRABLES ASOCIADAS A ECUACIONES DIFERENCIALES DEFINIDAS POR UN CAMPO VECTORIAL HOLONOMO EN \mathbb{C}^n . LAS CURVAS INTEGRABLES QUE HABEREMOS DE OBTENER NO SERÁN SINO CURVAS COMPLEJAS PARAMETRIZADAS POR \mathbb{C} . A LA ACCIÓN DE \mathbb{C} LA LLAMAREMOS FLUJO HOLONOMO Y LAS ÓRBITAS DE ÉSTE SON PRECISAMENTE LAS CURVAS COMPLEJAS QUE, EN GENERAL, RESULTARÁN SER SUPERFICIES REALES DE DIMENSIÓN DOS. LAS ÓRBITAS ASOCIADAS AL CAMPO CONSTITUYEN UNA FOLIACIÓN UNIDIMENSIONAL COMPLEJA $\mathcal{F}(F)$ CON SINGULARIDADES EN LOS CEROS DEL CAMPO VECTORIAL F . CONCRETAMENTE, PUESTO QUE NOS INTERESARÁ ESTUDIAR LA TOPOLOGÍA DE DICHAS FOLIACIONES $\mathcal{F}(F)$ CERCA DE UNA SINGULARIDAD, HABEREMOS DE RESTRINGIRNOS A LOS CASOS EN QUE F RESULTA SER UN CAMPO VECTORIAL CON UNA ÚNICA SINGULARIDAD LA CUAL, ADELLÁS, ESTARÁ EN EL ORIGEN.

PRIMERAMENTE VEREMOS UN EJEMPLO QUE NOS SERVIRÁ PARA MOTIVAR LA PRESENCIA DE DOS TIPOS DISTINTOS DE HOJAS QUE ESTUDIAREMOS MÁS ADELANTE, LAS HOJAS DE POINCARÉ Y LAS HOJAS DE SIEGEL. LAS PRIMERAS SE CARACTERIZAN POR LA PROPIEDAD DE INTERSECTAR TRANSVERSALMENTE A TODA ESFERA S_r , $r > 0$, Y POR ENREDARSE EN LOS EJES AL MISMO TIEMPO QUE CONVERGEN AL ORIGEN; A SU VEZ, LAS SEGUNDAS SE CARACTERIZAN POR LA PROPIEDAD DE TENER UNA DISTANCIA MÍNIMA AL ORIGEN Y POR SER ENCADENES DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}^n .

EN RELACIÓN CON LAS HOJAS DE POINCARÉ VEREMOS QUE, EN EL CASO HIPERBÓLICO, SI CONSIDERAMOS LA INTERSECCIÓN DE ÉSTAS CON UNA ESFERA S_r , SE OBTIENE UNA FOLIACIÓN UNIDIMENSIONAL REAL EN LA ESFERA CUYO CAMPO ASOCIADO RESULTA SER UN CAMPO DE MORSE-SMALE. POR OTRA PARTE, CON RESPECTO A LAS HOJAS DE SIEGEL VEREMOS QUE DADO UN CAMPO VECTORIAL HIPERBÓLICO $F(z)$ EN \mathbb{C}^n SE TIENE QUE LA UNIÓN W DE TODAS LAS HOJAS DE SIEGEL CONSTITUYEN UN ABIERTO DENSO EN \mathbb{C}^n SIEMPRE Y CUANDO SEAN SATISFECHAS Ciertas CONDICIONES SOBRE LOS VALORES PROPIOS ASOCIADOS AL CAMPO.

UNA OBSERVACIÓN QUE ES IMPORTANTE HACER ES QUE MUCHAS DE LAS FIGURAS QUE SE INCLUYEN NO PRETENDEN REFLEJAR EXACTAMENTE EL COMPORTAMIENTO DE AQUELLO QUE SE ESTÁ ESTUDIANDO, SINO QUE SE AJUSTAN A DAR SOLAMENTE UNA IDEA ESQUEMÁTICA DE ÉSTE.

LOS RESULTADOS DE ESTE CAPÍTULO SON DE C. CAMACHO, N. KUIPER Y J. PAULIS, CONCRETAMENTE LA ELABORACIÓN DE ÉSTE SE BASÓ EN LOS SIGUIENTES ARTÍCULOS:

CAMACHO C., KUIPER N., PAULIS J., "THE TOPOLOGY OF HOLONOMORPHIC FLOWS WITH SINGULARITY", PUBL. MATH., IHES 48 (1978), p. 5-19.

CAMACHO C., "HOLONOMORPHIC DYNAMICAL SYSTEMS", SUMMER SCHOOL IN DYNAMICAL SYSTEMS, INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS, TRIESTE, ITALIA, p. 1-17.

CAPÍTULO 2.

1.- CAMPOS VECTORIALES LINEALES EN \mathbb{C}^n .

NUESTRO PRINCIPAL OBJETIVO ES OCUPARNOS DE AQUELLOS SISTEMAS LINEALES DE LA FORMA

$$\frac{dz}{dT} = Az, \quad A \in GL(n, \mathbb{C}), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

SIN EMBARGO, PUESTO QUE SIEMPRE AMBAREMOS DE PEDIR QUE LOS VALORES PROPIOS DE A SEAN DISTINTOS, PODREMOS SUPONER DE AQUI EN ADELANTE, SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD, QUE A ES UNA MATRIZ DIAGONAL. ANTES QUE NADA VEAMOS UN EJEMPLO.

CONSIDEREMOS EL SISTEMA

$$\frac{dz_1}{dT} = -z_1,$$

$$\frac{dz_2}{dT} = iz_2$$

ES DECIR,

$$\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dT} \\ \frac{dz_2}{dT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

CON $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ Y $T \in \mathbb{C}$. SI SUPONEMOS QUE LA SOLUCIÓN $z = (z_1(T), z_2(T))$ PASA POR EL PUNTO $(w_1, w_2) = (z_1(0), z_2(0)) \in \mathbb{C}^2$ EN EL INSTANTE $T=0$. ENTONCES EL FLUJO $\varphi = \varphi(T, z)$, $\varphi: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ESTÁ DADO POR LA EXPRESIÓN $\varphi(T, z) = (e^{-T}w_1, e^{iT}w_2)$ (CLARAMENTE $\varphi(0, z) = (w_1, w_2)$).

PARA ANALIZAR EL COMPORTAMIENTO DE ESTE FLUJO ANALIZAREMOS VARIOS CASOS:

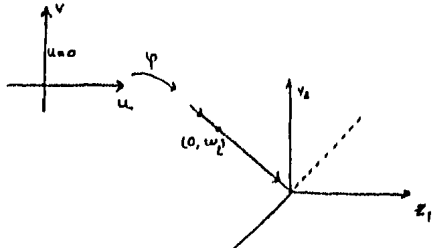
SEA $T = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$.

-CASO 1.-

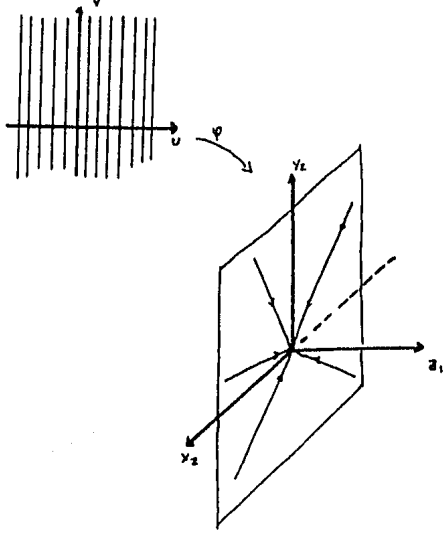
SI $w_2 = 0$

ENTONCES $\varphi(T, z) = (0, e^{iT}w_2) = (0, e^{-v+iu}w_2)$

SI $u=0$, ENTONCES $\varphi(T, z) = (0, e^{-v}w_2)$

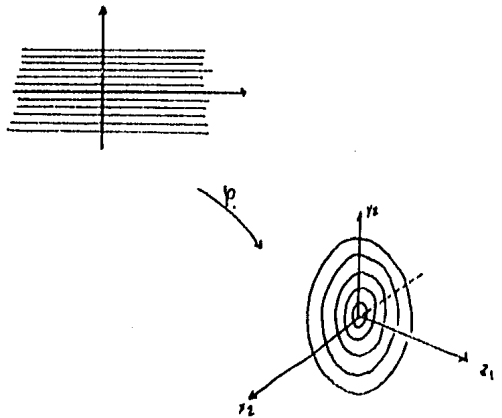


SI $u=k$, ENTONCES $\varphi(T, z) = (0, e^{-v+ik}w_2)$

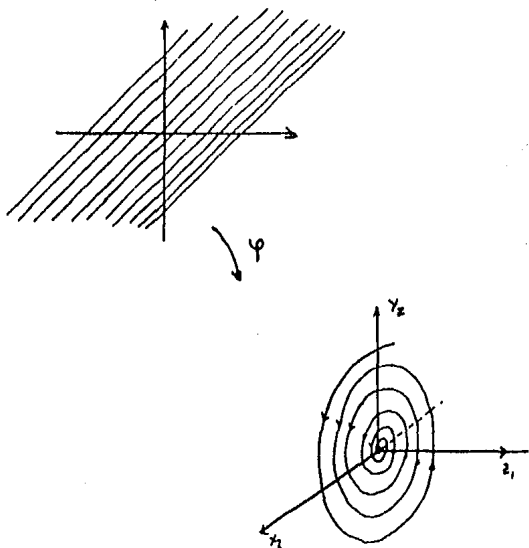


OBSERVAMOS QUE SI $k' = k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ENTONCES $e^{-v+ik'}w_2 = e^{-v+(k+2\pi n)w_2} = e^{-v+ik}w_2$ Y, POR CONSIGUIENTE, EL CONJUNTO DE RECTAS VERTICALES QUE SE ENCUENTRAN EN UNA FRANJA DE ANCHO 2π VAN A DAR BAJO φ A $\{0\}$ EN FORMA DE RAYOS.

SI $v=k$, ENTONCES $\varphi(T, z) = (0, e^{-k+iu}w_2)$ Y, EN CONSECUENCIA, CADA RECTA VERTICAL SE CONVIERTE, BAJO φ , EN UN CÍRCULO DE RADIO $e^{-k}|w_2|$ EL CUAL ES RECORRIDO UN NÚMERO INFINITO DE VECES SI $u \rightarrow \infty$; DE HECHO, CADA SEGMENTO DE LONGITUD 2π SE CONVIERTE, BAJO φ EN UN CÍRCULO DE RADIO $e^{-k}|w_2|$.



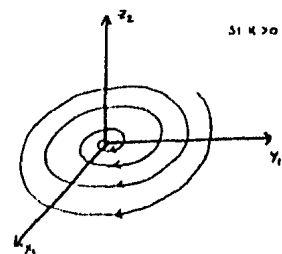
si $v = kv$, ENTONCES $\varphi(t, z) = (0, e^{u(k+i)w_2})$, DE MODO QUE LAS RECTAS DE PENDIENTE k VAN A DAR, BAJO φ , EN ESPIRALES QUE TIENDEN AL ORIGEN CONFORME $u \rightarrow \infty$ (O BIEN $-\infty$ EN CASO DE QUE $k < 0$).



Así, cada recta dada por $v = kv$, REPRESENTA UNA ESPIRAL EN EL PLANO z_2 CUYO VECTOR VELOCIDAD EN CADA PUNTO ESTÁ DADO POR LA EXPRESIÓN $(0, (k+i) e^{u(k+i)w_2})$, LA CUAL TIENDE A CERO CONFORME $u \rightarrow \infty$ SI $k > 0$, O BIEN CONFORME $u \rightarrow -\infty$ SI $k < 0$. LO ANTERIOR NOS DICE QUE MIENTRAS MÁS CERCA ESTAMOS DEL ORIGEN, MÁS DEJANCIO NOS APROXIMAREMOS A ÉL.

CASO 2.º

si $w_2 = 0$, $\varphi(t, z) = (e^{-u-i'v} w_1, 0)$ Y EL COMPORTAMIENTO PARA $v = kv$ ES ANÁLOGO AL DEL CASO ANTERIOR:



TANTO EN EL CASO EN QUE $w_1 \neq 0$ COMO EN EL QUE $w_2 = 0$ SE TIENE QUE EL FLUJO φ DEJA INVARIANTES LOS EJES, ES DECIR,

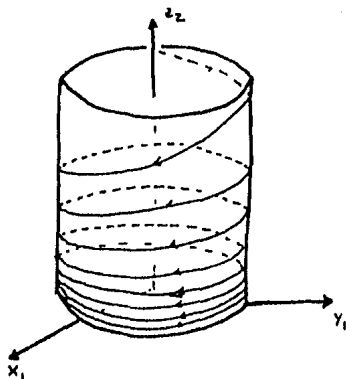
$$\varphi(t, (0, w_2)) = (0, z_2)$$

$$\varphi(t, (w_1, 0)) = (z_1, 0).$$

CASO 3.º

si $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$ ENTONCES SE TIENE QUE $\varphi(t, z) = (e^{-u-i'v} w_1, e^{-v+i'u} w_2)$.

SI AMBA SUPONEMOS QUE $u = 0$, ENTONCES $\varphi(t, z) = \varphi(v, z) = (e^{-i'v} w_1, e^{-v} w_2)$ Y, COMO PARA TODA $v \in \mathbb{R}$, $|e^{-i'v} w_1| = |w_1|$, TENEMOS QUE $\varphi(v, z)$ REPRESENTA UNA CURVA REAL QUE SE ENROSCA AITREDOR DE UN "CILINDRO" DE BASE $2|w_1|$ (CADA $|w_1|$) Y QUE TIENDE AL PLANO x_1, y_1 CONFORME $v \rightarrow \infty$.

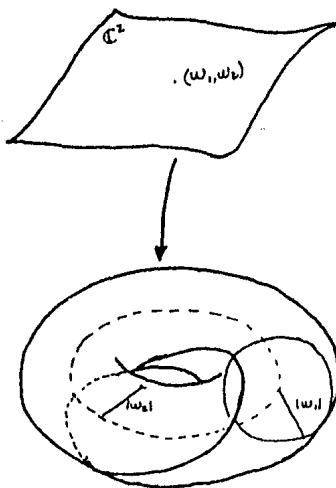
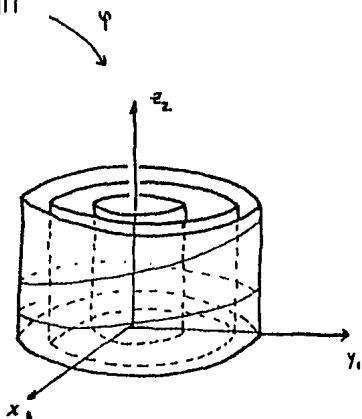
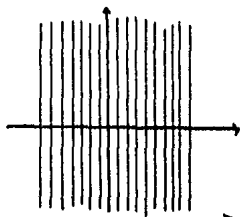


(OBSERVAMOS QUE EN LAS FIGURAS ANTERIORES, HEMOS REPRESENTADO A φ POR MEDIO DE UNA RECTA LO CUAL ES FORMALMENTE INCORRECTO; SIN EMBARGO, ESTANDO CONSCIENTES DE ESTO, LAS IMÁGENES QUE SE OBTIENEN NOS SERÁN ÚTILES PARA PENSAR IDEAS.)

si $u = k$

$$\varphi(t, z) = \varphi(k+iv, z) = (e^{-k-iv} w_1, e^{-v+ik} w_2)$$

COMO $|e^{-k-iv} w_1| = e^{-k} |w_1|$ ENTONCES, PARA CADA $k \in \mathbb{R}$ SE TIENE ASOCIADO UN CILINDRO DE RADIO $e^{-k} |w_1|$ TAL QUE LA CURVA REAL $\varphi(k+iv)$ SE ENROSCA EN ÉL.



OBSERVACIÓN: TODOS LOS PUNTOS $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ TALES QUE $|z_1| = |w_1|$ Y $|z_2| = |w_2|$ TIENEN ASOCIADO EL MISMO TORO AUNQUE UNA CURVA PASA POR (w_1, w_2) Y LA OTRA POR (z_1, z_2) . Así, LO QUE HEVOS OBTENIDO ES UNA TRANSFORMACIÓN DEL TORO EN SÍ MISMO TAL QUE A UN PUNTO (w_1, w_2) EN T^2 , ASOCIA UNA ÓRBITA QUE PASA POR EL PUNTO Y QUE ESTÁ DADA POR $(e^{-iu} w_1, e^{iu} w_2)$.

VOLVIENDO A NUESTRO PROBLEMA INICIAL, OBSERVAMOS QUE PARA EL FLUJO REAL DADO POR $\varphi(t, z) = e^{-u} (e^{-iu} w_1, e^{iu} w_2)$ SE TIENE QUE CUANDO u VA DE u_0 A $u_0 + 2\pi$ $(e^{iu_0} w_1, e^{iu_0} w_2) = (e^{i(u_0+2\pi)} w_1, e^{i(u_0+2\pi)} w_2)$ PERO $e^{-u_0} > e^{-(u_0+2\pi)}$. EN OTRAS PALABRAS, CUANDO SE RECORRE u SE TIENE UN DOBLE EFECTO QUE CONSISTE DE ROTACIONES AUNADAS A CONTRACCIONES ($e^{-u} \rightarrow \omega$).

DE ESTE MODO, A CADA PUNTO (w_1, w_2) EN \mathbb{C}^2 LE ASOCIAMOS UN "CONO ENROSCADO" Y UNA CURVA REAL EN ÉL QUE PASA POR (w_1, w_2)

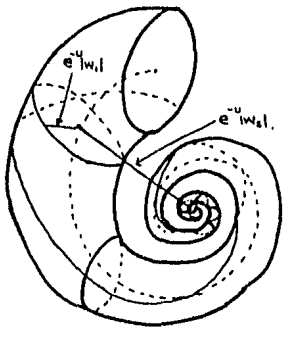
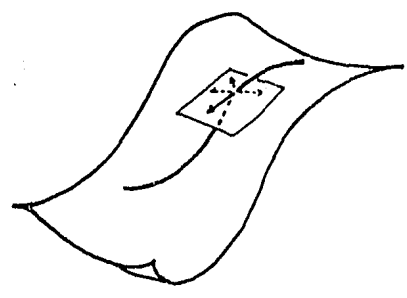
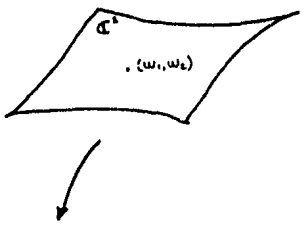
si $u = v$

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) &= \varphi((v+i)v, z) = (e^{-v-iv} w_1, e^{-v+iv} w_2) \\ &= (e^{-v} e^{-iv} w_1, e^{-v} e^{iv} w_2) \\ &= e^{-v} (e^{-iv} w_1, e^{iv} w_2) \end{aligned}$$

PARA VER ESTE CASO ANalicEMOS ANTES UN CASO MÁS SENCILLO, ES DECIR, PENSEMOS POR UN MOMENTO QUE SOLO TENEMOS $(e^{-iv} w_1, e^{iv} w_2)$.

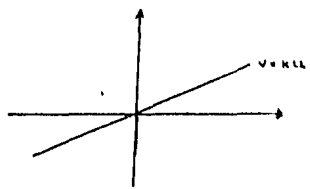
Aquí a un punto (w_1, w_2) EN \mathbb{C}^2 , ASO-

CIAMOS UN TORO - QUE SE OBTIENE POR PRODUCTO $S^1 \times S^1$ DONDE: EL PRIMERA S^1 TIENE RADIO $|w_1|$ Y EL SEGUNDO TIENE RADIO $|w_2|$ - Y UNA CURVA REAL QUE SE ENROSCA EN ÉL.



EN OTRAS PALABRAS, DADO UNA CURVA REAL EN LA HOJA \mathcal{L}_w SE TIENE QUE CADA PUNTO (z_1, z_2) DE DICHA CURVA TIENE UN VECTOR TANGENTE QUE REPRESENTA UNA DIRECCIÓN REAL "PRE-DIRECTA" EN EL PLANO TANGENTE DADO POR $\alpha(-z_1, iz_2)$.

PENSEMOS EN EL CASO $v = ku$.



LO QUE HEMOS HECHO HASTA AHORA NOS DA UNA IDEA DEL COMPORTAMIENTO QUE TIENEN DISTINTAS CURVAS REALES BAJO φ . VEMOS AHORA CUÁLES SON LOS VECTORES REALES TANGENTES ASOCIADOS A DICHAS CURVAS.

Y SEA $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ TAL QUE $\gamma(u) = u + iku$, ENTONCES TENEMOS UNA FUNCIÓN DE \mathbb{R} EN \mathbb{C}^2 DADA POR

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\gamma} \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^2 \\ u &\rightarrow u + iku \rightarrow (e^{-(u+iku)w_1}, e^{i(u+iku)w_2}) \end{aligned}$$

ASI, LA DIFERENCIAL DE $\varphi \circ \gamma$ CON RESPECTO A u ESTÁ DADO POR

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{du} &= (D\varphi)_{\gamma(u)} \frac{d\gamma}{du} \\ &= (-e^{-(u+iku)w_1}, ie^{i(u+iku)w_2})(1+ki) \end{aligned}$$

SEA $O\varphi_w = \{\varphi(t, w) \mid t \in \mathbb{C}\}$ LA ÓRBITA QUE PASA POR EL PUNTO $w = (w_1, w_2)$ CUANDO $T=0$. $O\varphi_w$ ES UNA CURVA COMPLEJA PARAMETRIZADA POR T Y TIENE, POR CONSIGUIENTE, DIMENSIÓN REAL DOS. UN PUNTO (z_1, z_2) EN $O\varphi_w$ SATISFACE EL SISTEMA (*), LO QUE INDICA QUE EL VECTOR TANGENTE EN ESTE PUNTO ESTÁ DADO POR $\alpha(-z_1, iz_2)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. EL HECHO DE QUE PARA TODA $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha(-z_1, iz_2)$ SEA UN VECTOR TANGENTE EN (z_1, z_2) NOS GENERA TODO UN PLANO BASADO EN DICHO PUNTO.

DE DONDE CONCLUIAMOS QUE LOS PUNTOS $(z_1, z_2) = (e^{(u+iku)w_1}, e^{i(u+iku)w_2})$ DE LAS CURVAS REALES TIENEN COMO VECTOR TANGENTE REAL A

HAY SIN ELABORAR, POR CADA RECTA REAL EN \mathbb{C} UNA CURVA REAL EN LA HOJA $\mathcal{L}_w = O\varphi_w$ Y UN VECTOR TANGENTE REAL ASOCIADO A CADA PUNTO DE LA CURVA EN \mathcal{L}_w .

$$\gamma(z_1, z_2)(1+ki) \text{ PARA } \gamma \in \mathbb{R}.$$

EN GENERAL PARA $v = f(u)$ TENEMOS:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{z} \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^2$$

$$u \longrightarrow u + if(u) \longrightarrow \left(e^{-i(u+if(u))} \omega_1, e^{i(u+if(u))} \omega_2 \right)$$

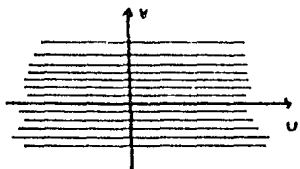
$$\frac{d\varphi}{du} = (D\varphi) \frac{dz}{z(u)du}$$

$$= \left(-e^{-i(u+if(u))} \omega_1, i e^{i(u+if(u))} \omega_2 \right) (1 + if'(u))$$

EL OBLA, A UN PUNTO (z_1, z_2) EN LA CURVA, ASOCIAMOS EL VECTOR TANGENTE $r = (-z_1, iz_2) (1 + if'(u))$, $r \in \mathbb{R}$.

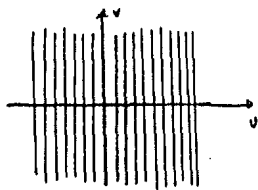
EJEMPLOS:

a) si $v = k$.



si $(z_1, z_2) = (e^{-i(u+ik)} \omega_1, e^{i(u+ik)} \omega_2)$
 ENTONCES EL VECTOR TANGENTE ASOCIADO AL PUNTO ES
 $(-e^{-i(u+ik)} \omega_1, i e^{i(u+ik)} \omega_2) \cdot 1 = (-z_1, iz_2)$

b) si $u = k$



$$\mathbb{R} \xrightarrow{z} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$v \longrightarrow k + iv \longrightarrow \left(e^{-i(k+iv)} \omega_1, e^{i(k+iv)} \omega_2 \right)$$

si $(z_1, z_2) = (e^{-i(k+iv)} \omega_1, e^{i(k+iv)} \omega_2)$

ENTONCES EL VECTOR TANGENTE ASOCIADO AL PUNTO ES

$$\left(-e^{-i(k+iv)} \omega_1, i e^{i(k+iv)} \omega_2 \right) \cdot i = (-z_1, iz_2) \cdot i$$

UNA MANERA DE SABER EL COMPORTAMIENTO CUANTITATIVO DE LA HOJA \mathcal{D}_w , ES INTERSECTARLAS CON ESFERAS $S_r = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = r\}$ PARA r CADA VEZ MÁS PEQUEÑA. ESTAS INTERSECCIONES NOS INDICAN CUÁNDO UNA HOJA SE APROXIMA TANTO COMO DESEAMOS AL ORIGEN O BIEN, CUÁNDO EXISTE UNA DISTANCIA MINIMAL DE LA HOJA AL ORIGEN. AFIRMAMOS QUE, EN EL EJEMPLO QUE ESTAMOS TRATANDO, LAS CURVAS DE φ SON TRANSVERSALES A LAS \mathbb{S}^3 -ESFERAS S_r , PARA DEMOSTRARLO USAREMOS EL PRODUCTO HERMITIANO Y LA IDEA DE ORTOGONALIDAD EN \mathbb{R}^4 .

PRODUCTO HERMITIANO Y ORTOGONALIDAD:

EN \mathbb{C}^n PODEMOS DEFINIR EL PRODUCTO HERMITIANO "TRADUCIENDO" EL PRODUCTO ESCALAR USUAL A LOS NÚMEROS COMPLEJOS COMO SIGUE:

SEAN $z, w \in \mathbb{C}^n$ $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$,
 DEFINIMOS EL PRODUCTO HERMITIANO $\langle \cdot, \cdot \rangle$ DE MODO
 QUE $\langle z, w \rangle = \langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$
 Y $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$

EL PRODUCTO ASI DEFINIDO TIENE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

- a) $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}^n$
- b) $\langle z, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle z, w \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}^n$
- c) $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$, $z, w \in \mathbb{C}^n$
- d) $\langle z + \xi, w \rangle = \langle z, w \rangle + \langle \xi, w \rangle$, $z, \xi, w \in \mathbb{C}^n$
- e) $\langle z, z \rangle > 0$ si $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^n$.

EL PRODUCTO $\langle z, w \rangle$ ES UN NÚMERO COMPLEJO Y POR CONSIGUIENTE PODEMOS EXPRESARLO COMO LA SUMA DE SU PARTE REAL Y SU PARTE IMAGINARIA
 $\langle z, w \rangle = \text{Re} \langle z, w \rangle + i \text{Im} \langle z, w \rangle$

El concepto de ortogonalidad en \mathbb{R}^4 puede trasladarse a \mathbb{C}^2 como sigue:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle \\ &= [\operatorname{Re} z_1 + i \operatorname{Im} z_1][\operatorname{Re} w_1 - i \operatorname{Im} w_1] + [\operatorname{Re} z_2 + i \operatorname{Im} z_2][\operatorname{Re} w_2 - i \operatorname{Im} w_2] \\ &= [\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Im} z_2 \operatorname{Im} w_2] + \\ &\quad + i[-\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} w_1 - \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} z_2 \operatorname{Re} w_2] \end{aligned}$$

de esta forma se tiene que

$$\operatorname{Re} \langle z, w \rangle = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Im} z_2 \operatorname{Im} w_2 = 0$$

si y sólo si

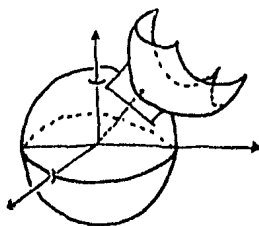
$$(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2) \cdot (\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Im} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Im} w_2) = 0$$

(donde \cdot denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^4).

Lo anterior nos dice que dos vectores $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$ son ortogonales en el sentido de ortogonalidad en \mathbb{R}^4 si y sólo si $\operatorname{Re} \langle z, w \rangle = 0$.

Hacemos notar que la generalización de estos conceptos a \mathbb{C}^n es inmediata.

Después de este paréntesis, pasaremos a decir que las hojas \mathcal{L}_w son transversales a las 3-esferas dadas por $S_r = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = r^2, r > 0\}$. Para ello, observamos que una hoja \mathcal{L}_w que interseca a una 3-esfera S_r no es transversal a ella si el espacio tangente a la hoja se halla contenido en el espacio tangente a la esfera S_r en ese punto.



En otras palabras, \mathcal{L}_w no es transversal a la 3-esfera S_r en (z_1, z_2) si la parte real del producto hermitiano del vector $\alpha = (-\bar{z}_1, i\bar{z}_2)$ y el vector normal a la esfera (que es justamente el vector de posición (z_1, z_2)) es cero para todo

número α en $\mathbb{C} - \{0\}$, es decir, si $\operatorname{Re} \langle \alpha(z_1, i z_2), (z_1, z_2) \rangle = 0$ para todo α en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Para demostrar lo anterior suponamos que, en efecto, se tiene que

$$\operatorname{Re} \langle \alpha(-\bar{z}_1, i z_2), (z_1, z_2) \rangle = 0$$

para toda α en $\mathbb{C} - \{0\}$. Entonces

$$\operatorname{Re} \langle \alpha(-z_1, \bar{z}_1 + i z_2 \bar{z}_2) \rangle = 0$$

y por tanto,

$$\operatorname{Re} \alpha(-|z_1|^2 + i |z_2|^2) = 0$$

para toda α en $\mathbb{C} - \{0\}$. Tomando $\alpha = 1 - i$ obtenemos

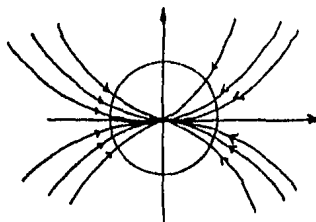
$$|z_1|^2 = i |z_2|^2$$

luego $z_1 = z_2 = 0$. Sin embargo, z_1 y z_2 están por hipótesis en la esfera S_r , por lo que

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = r^2 > 0,$$

lo que es una contradicción.

De esta manera, la imagen que podemos asociar a nuestro ejemplo es la "parábolas" que se acumulan en el origen.



Este ejemplo describe el comportamiento general de las soluciones de cualesquiera sistemas autónomos en \mathbb{C}^2 , salvo en los casos en que λ_1 sea un múltiplo real de λ_2 , sin embargo, no nota todos los comportamientos posibles cuando se trata de sistemas lineales en \mathbb{C}^n para n mayor que 2.

Bastará considerar el sistema

$$\frac{dz_1}{dt} = -1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = i$$

$$\frac{dz_3}{dt} = 1 - i$$

para convencernos de que existen hojas con un comportamiento distinto al que acabamos de describir.

HEMOS VISTO QUE PARA EL CAMPO VECTORIAL DADO POR

$$\frac{dz_1}{dT} = -z_1$$

$$\frac{dz_2}{dT} = iz_2$$

LAS SOLUCIONES $(z_1, z_2) = (e^{-T}w_1, e^{iT}w_2)$ CON $w_1 = z_1(0), w_2 = z_2(0)$, SON LAS HOJAS $\alpha_w = \mathcal{O}_w^{\mathbb{C}}$ DE LA FOLIACION $\mathcal{F}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix})$ Y SON TALES QUE $\mathcal{O}_w \perp S_r$, ES DECIR, PARA $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, LA HOJA α_w ESTÁ TRANSVERSAL A LA 3-ESFERA S_r . $S_r = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = r\}$. OTRA CARACTERÍSTICA DE ESTAS HOJAS ES QUE SE ENROSCAN ALREDEDOR DE LOS EJES z_1 Y z_2 A LA VEZ QUE CONVERGEN A EYOS. A ESTAS HOJAS LAS NOMBRAREMOS HOJAS DE POINCARÉ.

EN GENERAL, SI TENEMOS LAS ECUACIONES

$$\frac{dz_j}{dT} = \lambda_j z_j, \quad z_j = e^{\lambda_j T} w_j, \quad j=1, \dots, n$$

$$T \in \mathbb{C}$$

Y LAS HOJAS DE LA FOLIACION SON TALES QUE SE ENROSCAN A LA VEZ QUE CONVERGEN A LOS EJES Y SON TRANSVERSALES A LAS $2n-1$ ESFERAS S_r DADAS POR $S_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = r\}$, DECIMOS QUE LAS HOJAS SON HOJAS DE POINCARÉ.

PARA $n=2$ EL EJEMPLO QUE HEMOS VISTO CARACTERIZA TODOS LOS POSIBLES CASOS SIEMPRE Y CUANDO $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$.

ANUNCIEMOS AHORA UN CASO MÁS GENERAL:

$$\frac{dz}{dT} = A \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad T \in \mathbb{C}$$

$$\text{CON } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_j \neq 0 \quad j=1, \dots, n.$$

Y SUPONEMOS $i \notin \lambda_j \Rightarrow \lambda_j, \lambda_i \notin \mathbb{R}$.

LA SOLUCIÓN A ESTE SISTEMA QUE PASA POR EL PUNTO $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ EN $T=0$ ESTÁ DADA POR

$$z(T) = \varphi(T, w) = e^{T \cdot A} w$$

$$\text{DONDE } e^{T \cdot A} w = (I + T \cdot A + \frac{1}{2!} (T \cdot A)^2 + \dots) \cdot w$$

- AFIRMACIÓN: Así DEFINIDO, $\varphi: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ES UN FLUJO COMPLEJO EN \mathbb{C}^n , ES DECIR, PARA φ SE CUMPLE

$$i) \varphi(0, z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

$$ii) \varphi(T_1 + T_2, z) = \varphi(T_1, \varphi(T_2, z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ y } T_1, T_2 \in \mathbb{C}.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$i) \varphi(0, w) = e^{0 \cdot A} w = I \cdot w = w. \quad \forall w \in \mathbb{C}^n$$

$$\begin{aligned} ii) \varphi(T_1 + T_2, z) &= e^{(T_1 + T_2) \cdot A} w \\ &= e^{T_1 \cdot A} + T_2 \cdot A \cdot w \\ &= e^{T_1 \cdot A} e^{T_2 \cdot A} w \\ &= e^{T_1 \cdot A} (e^{T_2 \cdot A} w) \\ &= e^{T_1 \cdot A} \varphi(T_2, w) \\ &= \varphi(T_1, \varphi(T_2, w)) // \end{aligned}$$

RECORDAMOS QUE:

$$\begin{aligned} e^{T \cdot A} &= \exp \begin{pmatrix} T \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{T \lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{T \lambda_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

AL IGUAL QUE EN EL EJEMPLO (*) VAMOS A CONSIDERAR AHORA FLUJOS REALES INDUCIDOS POR φ Y VAMOS A ANALIZAR SU COMPORTAMIENTO:

$$\text{Sea } \varphi_\alpha(t, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

DEFINIDO POR

$$\varphi_\alpha(t, z) = \varphi(\alpha t, z) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, z \in \mathbb{C}^n.$$

Así, para cada α se tiene un flujo real inducido por φ . El comportamiento de ciertos flujos reales nos dará, como habremos de ver, información importante sobre el flujo $\varphi: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Sea $\alpha = \lambda_j = \frac{2\pi i}{\lambda_j}$

Entonces $\varphi_{\lambda_j} = \varphi(\lambda_j t, w) = e^{\lambda_j t A} w$.

Como

$$\lambda_j A = \begin{bmatrix} 2\pi i \lambda_j / \lambda_j & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 2\pi i & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 2\pi i \lambda_n / \lambda_j \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$e^{t \lambda_j A} = \exp \begin{bmatrix} 2\pi i \lambda_j t / \lambda_j & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 2\pi i t & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 2\pi i \lambda_n t / \lambda_j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_j t / \lambda_j} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{2\pi i t} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & e^{2\pi i \lambda_n t / \lambda_j} \end{bmatrix}$$

y, en consecuencia,

$$z = \varphi_{\lambda_j}(t, w) = [e^{2\pi i \lambda_j t / \lambda_j} w_1, \dots, e^{2\pi i t} w_j, \dots, e^{2\pi i \lambda_n t / \lambda_j} w_n]$$

Seguramente la elección de α como λ_j resulta, a primera vista, artificial; sin embargo, vamos a analizar lo que φ_{λ_j} hace con espacios de la forma

$$\Gamma_j = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| = 1\}$$

Para ver entonces que tanto λ_j como φ_{λ_j} surgen de manera natural.

Sean $\Gamma_j = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| = 1\}$ y $w \in \Gamma_j$.
Entonces,
 $\varphi_{\lambda_j}(t, w) = (e^{2\pi i \lambda_j t} w_1, \dots, e^{2\pi i t} w_j, \dots, e^{2\pi i \lambda_n t} w_n)$

y como $w \in \Gamma_j$, $|w_j| = 1$ y por consiguiente

$$|e^{2\pi i t} w_j| = |e^{2\pi i t}| |w_j| = 1.$$

Luego, Γ_j resulta ser invariante bajo φ_{λ_j} . Observamos además que para todo entero n se tiene que

$$\varphi_{\lambda_j}(n, w) = (e^{2\pi i \lambda_j n} w_1, \dots, w_j, \dots, e^{2\pi i \lambda_n n} w_n),$$

lo que nos dice que la coordenada j -ésima tiene período 1.

Por otra parte, si $e^{2\pi i \lambda_k \lambda_j} w_k = w_k$ y $w_k \neq 0$, $k \neq j$, se tiene que

$$e^{2\pi i \lambda_k \lambda_j} w_k = w_k,$$

de donde

$$e^{2\pi i \lambda_k \lambda_j} = 1$$

y, por tanto,

$$\lambda_k \lambda_j = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Lo cual es imposible pues suponimos desde un principio que $k \neq j$ implica $\lambda_k \lambda_j \notin \mathbb{R}$.

Esto nos dice que solamente aquellas órbitas cuyo punto base w se halla en el j -ésimo eje coordenado cumplen con la igualdad $\varphi_{\lambda_j}(n, w) = w$, para todo entero n . A estas órbitas muy particulares las vamos a denotar (cuando $|w_j| = 1$) como γ_j , es decir,

$$\gamma_j = \{z \in \Gamma_j \mid z_k = 0, \quad k \neq j\}$$

Puesto que $\gamma_j \subset \Gamma_j$ es claro que γ_j es invariante bajo φ_{λ_j} en Γ_j , sin embargo, resulta inmediato que también lo es en γ_j .

Después de haber visto algunas propiedades de Ψ_j vamos a ver que cada órbita de Ψ intersecciona transversalmente a Γ_j a lo largo de una órbita de Ψ_j . Para ello, veremos primero cómo son los puntos de $\Psi(t, w)$ que interseccionan a Γ_j .

Sea $w \in \mathbb{C}^n$ y supongamos que para alguna $T \in \mathbb{C}$, $\Psi(T, w) = (e^{i T} w_1, \dots, e^{i n T} w_n)$ intersecciona a Γ_j , es decir, $|e^{i T} w_j| = 1$ entonces,

$$|e^{i T} w_j| = |w_j|^{-1}$$

Si ahora consideramos $c_j \in \mathbb{R}$ tal que $e^{c_j} = |w_j|^{-1}$, la igualdad anterior queda expresada como

$$|e^{i T} w_j| = e^{c_j}$$

de donde se sigue que

$$|e^{\operatorname{Re} T i_j + i \operatorname{Im} T i_j}| = e^{\operatorname{Re} T i_j} = e^{c_j}$$

Luego,

$$\operatorname{Re} T i_j = c_j$$

y

$$T i_j = c_j + 2\pi n i t.$$

Así,

$$T = c_j i_j^{-1} + i 2\pi t i_j^{-1}$$

es decir,

$$T = c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t.$$

OBSERVACIÓN: T es una recta real en la dirección de $\hat{\lambda}_j$.

Ahora bien, como $T = c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t$, $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Psi(T, w)$ intersecciona a Γ_j justamente en puntos de la forma

$$(e^{(c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t) i_j} w_1, \dots, e^{c_j i_j^{-1} i_j} w_j, \dots, e^{(c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t) i_n} w_n)$$

y dado que $e^{c_j} = |w_j|^{-1}$,

$$\Psi_j(c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t, w) = [e^{(c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t) i_j} w_1, \dots, e^{c_j i_j^{-1} i_j} w_j, \dots, e^{(c_j i_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t) i_n} w_n]$$

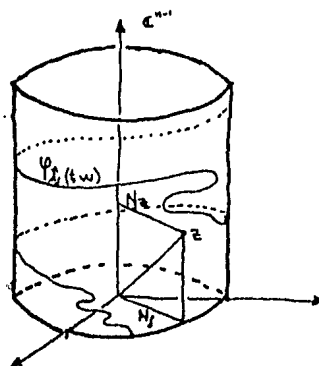
λ_j , la recta dada por $c_j + 2\pi i t$, $t \in \mathbb{R}$,

representa una curva real en Γ_j que es precisamente la intersección de Ψ con Γ_j .

Una vez que hemos logrado dar una descripción precisa de los puntos de $\Psi(T, z)$ que interseccionan a Γ_j , vamos a ver que dicha intersección es transversal. Debemos observar, primeramente, que Γ_j es una variedad de dimensión real $2n-1$, pues es la imagen inversa del valor regular 1 de la función $\eta_j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{\eta_j} x_j^2 + y_j^2.$$

Para demostrar la transversalidad, usaremos el hecho de que el vector normal N_z a un punto z en Γ_j no es más que el translado del vector $N_j = (0, \dots, 0, z_j, 0, \dots, 0)$



Por lo que vimos en la página 29 debemos demostrar que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\langle \alpha F(z), N_j \rangle) \neq 0$. Para ello, vamos a suponer que para todo número α en \mathbb{C} se tiene que

$$\operatorname{Re}(\langle \alpha (z_1, \dots, z_n), (0, \dots, z_j, \dots, 0) \rangle) = 0.$$

Así, para toda α en \mathbb{C}

$$\operatorname{Re} \alpha \lambda_j |z_j| = 0$$

Luego,

$$\lambda_j |z_j| = 0$$

pero como $z \in \Gamma_j$, $|z_j| = 1$ y, por lo tanto $\lambda_j = 0$, lo que es una contradicción.

Así, la intersección de OP con F_j^i es transversal y, el hecho de que sea justamente en una órbita de φ_j^i , nos dice que analizando el comportamiento de φ_j^i obtenemos información de la forma que tiene P cuando interseca a F_j^i .

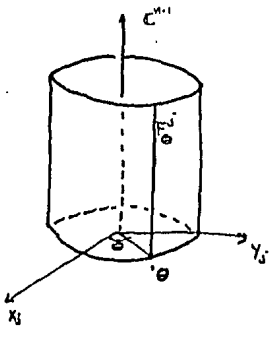
Ya hemos visto dos propiedades de φ_j^i , concretamente que $\varphi_j^i(t, F_j^i) \subset F_j^i$ y que

$$\varphi_j^i(\eta, z) = z \text{ si y solo si } z \in \mathcal{Y}_j; \text{ TROTAREMOS DE OBTENER MÁS INFORMACIÓN DE } \varphi_j^i \text{ POR MEDIO DE LOS CONJUNTOS } F_0^j = \{z \in F_j^i, z_j = 0\}$$

MAIS DE OBTENER MÁS INFORMACIÓN DE φ_j^i POR MEDIO DE LOS CONJUNTOS $F_0^j = \{z \in F_j^i, z_j = 0\}$

$$F_0^j \cong \mathbb{C}^{n-1} \text{ y EN PARTICULAR EL PUNTO } (0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Y}_j \cap F_0^j$$

DE HECHO, F_0^j ES UNA FIBRA SOBRE EL PUNTO $(0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0) = \mathcal{Y}_j \cap F_0^j$.



Nos preguntamos ahora ¿qué es $\varphi_j^i(t, F_0^j)$?

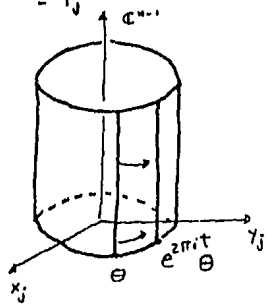
Sea $w \in F_0^j$, ENTONCES $w = (w_1, \dots, \theta, w_{j+1}, \dots, w_n)$

$$\varphi_j^i(w, t) = (e^{i\lambda_1 t} w_1, \dots, e^{in\lambda_j t} \theta, \dots, e^{i\lambda_n t} w_n)$$

$$\therefore \varphi_j^i(w, t) \in F_0^j \text{ en } e^{in\lambda_j t} \theta$$

Así, PARA t FIJO SE TIENE UNA FIBRA (de dim_ℝ $n-1$) SOBRE EL PUNTO EN \mathcal{Y}_j $(0, \dots, 0, e^{in\lambda_j t} \theta, \dots, 0)$. Si EN CAMBIO DE-

UNA CORREA t DE CERO A UNO OBTENEMOS $S^1 \times \mathbb{C}^{n-1} = F_j^i$



PARA $t = n, n \in \mathbb{Z}$ $e^{2\pi i n} \theta = \theta$, POR LO QUE PARA t ENTERO φ_j^i LLEVA A F_0^j EN SÍ MISMO.

DE ESTE MODO, φ_j^i INDUCE UNA APLICACIÓN $H_j: F_0^j \rightarrow F_0^j$ DADA POR $H_j(z) = \varphi_j^i(1, z)$,

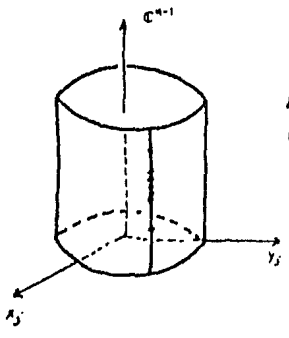
$$\text{ES DECIR, } H_j(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) = (e^{2\pi i \lambda_1 / \lambda_j} z_1, \dots, z_j, \dots, e^{2\pi i \lambda_n / \lambda_j} z_n)$$

CON $|z_j| = 1$. z_j es θ

EN PARTICULAR RESALTAMOS LA APLICACIÓN $H_j: F_1^j \rightarrow F_1^j$ TAL QUE

$$H_j(z_1, \dots, 1, \dots, z_n) = (e^{2\pi i \lambda_1 / \lambda_j} z_1, \dots, 1, \dots, e^{2\pi i \lambda_n / \lambda_j} z_n)$$

QUE LLAMAREMOS APLICACIÓN DE POINCARÉ O PRIMERA APLICACIÓN DE RETORNO ALREDEDOR DE \mathcal{Y}_j O APLICACIÓN DE HOLONOMÍA DEL EJE j -ÉSIMO (VER PÁGINA 18)



SI DENOTAMOS POR $H_j^m(z)$, LA IMAGEN DE z DESPUÉS DE APLICAR H_j m VECES, PODEMOS PREGUNTARNOS CUÁNDO, DADO z EN F_1^j , SE TIENE QUE

$$H_j^m(z) \rightarrow (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

EN OTRAS PALABRAS, QUEREMOS VER CUÁNDO UNA APLICACIÓN SUCESIVA DE H_j NOS DA UNA SUCESIÓN DE PUNTOS EN LA FIBRA F_j QUE CONVERGE AL PUNTO $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. PERO RESPONDER ESTA PREGUNTA NOS VA A PLANTEAR UN PROBLEMA MÁS GENERAL QUE TIENE COMO CONSECUENCIA INMEDIATA LO QUE BUSCAMOS:

¿CUÁNDO, SI $z \in \Gamma_j \setminus \gamma_j$, SE TIENE QUE $\varphi_j(t, z) \rightarrow \gamma_j$ SI $t \rightarrow \infty$?

PUESTO QUE LA EXPRESIÓN DE $\varphi_j(t, z)$ ES $(e^{\frac{2\pi i \lambda_1}{\lambda_j} t} z_1, e^{\frac{2\pi i \lambda_2}{\lambda_j} t} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i t}{\lambda_j} z_j}, \dots, e^{\frac{2\pi i \lambda_n}{\lambda_j} t} z_n)$

NECESITAMOS QUE CADA COORDENADA $e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} z_k$ TIENDA A CERO CUÁNDO $t \rightarrow \infty$

IE. QUEREMOS QUE

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} z_k = 0$$

$e^{\frac{2\pi i t}{\lambda_j}}$ REPRESENTA UN NÚMERO COMPLEJO DE NORMA IGUAL A LA NORMA DE z_k , DE MODO QUE

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{2\pi i t}{\lambda_j}} z_k \neq 0$$

Afirmamos que para que $e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} z_k \rightarrow 0$

NECESITAMOS QUE $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$. SUPONGAMOS QUE $\lambda_k/\lambda_j = r \in \mathbb{R}$, ENTONCES LA k -ÉSIMA COORDENADA TOMA LA FORMA $e^{2\pi i r t} z_k$ QUE ES NUEVAMENTE UN NÚMERO COMPLEJO DE NORMA $(|z_k|)$ CONSTANTE PARA TODO t . ASÍ, LO QUE OBTENEMOS CUANDO $t \rightarrow \infty$ ES UN CIRCULO DE RADIO $|z_k|$ Y CLARAMENTE $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{2\pi i r t} z_k \neq 0$.

SUPONGAMOS ENTONCES QUE $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$, TENEMOS DOS CASOS:

- 1) si $\lambda_k/\lambda_j = a+ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$
- 2) si $\lambda_k/\lambda_j = a-ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$

1) SUPONGAMOS QUE $\lambda_k/\lambda_j = a+ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ENTONCES $e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} = e^{2\pi i a t - 2\pi b t}$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} z_j = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{2\pi i a t} \cdot e^{-2\pi b t} z_j = 0$$

2) SUPONGAMOS QUE $\lambda_k/\lambda_j = a-ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ENTONCES $e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} = e^{2\pi i a t + 2\pi b t}$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} z_j = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{2\pi i a t} e^{2\pi b t} z_j = \infty$$

(o $-\infty$ según sea $\text{Re}(z_j)$).

O EQUIVALENTEMENTE $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\frac{2\pi i \lambda_k}{\lambda_j} t} z_j = 0$.

EN RESUMEN SI $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ Y $\text{Im}(\lambda_k/\lambda_j) < 0$ TENEMOS UNA EXPANSIÓN Y SI $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ Y $\text{Im}(\lambda_k/\lambda_j) > 0$ TENEMOS UNA CONTRACCIÓN.

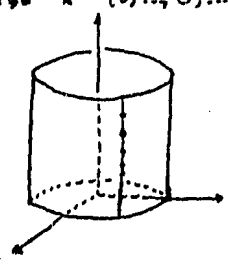
DE ESTE MODO, SI $\text{Re}(\lambda_k/\lambda_j) \neq 0$, $k=1, \dots, n$, SE TIENE QUE SI $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ Y $\text{Im}(\lambda_k/\lambda_j) > 0$,

$$\text{ENTONCES } \varphi_j(t, z) = (e^{\frac{2\pi i \lambda_1}{\lambda_j} t} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i t}{\lambda_j} z_j}, \dots, e^{\frac{2\pi i \lambda_n}{\lambda_j} t} z_n)$$

TIENDE A γ_j CUANDO $t \rightarrow \infty$.

EN PARTICULAR $\varphi_j(m, z) \rightarrow (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ PARA $z \in F_0^j \setminus \gamma_0$ Y $m \in \mathbb{Z}$.

COMO $\varphi_j(m, z)$ ES (COMO PUEDE VERSE EN LAS DEFINICIONES H_j) IGUAL A $H_j^m(z)$, LO ANTERIOR NOS DICE QUE SI $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ Y $\text{Im}(\lambda_k/\lambda_j) > 0$ OBTENEMOS, AL APLICAR SUCESIVAMENTE H_j A $z \in F_0^j \setminus \gamma_j$, UNA SUCESIÓN DE PUNTOS EN LA FIBRA QUE ES MONÓTONA Y CONVERGE A $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.



RECORDAMOS AHORA LA DEFINICIÓN 1.36 DEL CAPÍTULO 1:

- DEFINICIÓN

DECIMOS QUE UN AUTOMORFISMO DE UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA $V, h: V \rightarrow V$ ES HIPERBÓLICO SI SUS VALORES PROPIOS α_j SON TALES QUE $|\alpha_j| = 1$. EL AUTOMORFISMO h ES UNA CONTRACCIÓN SI $|\alpha_j| < 1$ PARA TODA j , ES UNA EXPANSIÓN SI $|\alpha_j| > 1$ PARA TODA j Y ES DE TIPO SILO SI NO ES CONTRACCIÓN NI EXPANSIÓN

- LEMA 2.1

LA HOLONOMÍA H_j ES HIPERBÓLICA SI Y SÓLO SI $k \neq j$ IMPLICA $\lambda_k / \lambda_j \notin \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN:

$$\text{Sea } H_j: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

$$H_j(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) = (e^{\lambda_1 \lambda_j z_1}, \dots, e^{\lambda_{k-1} \lambda_j z_{k-1}}, e^{\lambda_{k+1} \lambda_j z_{k+1}}, \dots, e^{\lambda_n \lambda_j z_n})$$

ENTONCES,

$$D H_j(z) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \lambda_j} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{\lambda_{k-1} \lambda_j} & & & & & \\ & & & e^{\lambda_{k+1} \lambda_j} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & e^{\lambda_n \lambda_j} & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Y, POR TANTO, LOS VALORES PROPIOS DE H_j SON

$$\{ e^{\lambda_1 \lambda_j}, \dots, e^{\lambda_{k-1} \lambda_j}, e^{\lambda_{k+1} \lambda_j}, \dots, e^{\lambda_n \lambda_j} \}.$$

DE LA DEFINICIÓN 1.36 SE TIENE QUE H_j NO ES HIPERBÓLICO SI Y SÓLO SI

$$|e^{\lambda_k \lambda_j}| = |e^{\lambda_k \lambda_j}| = 1$$

PARA ALGUNA $k, k \neq j$; PERO ESTO SUCEDE SI Y SOLO SI $\lambda_k / \lambda_j \in \mathbb{R}$. EN CONSECUENCIA, UNA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE H_j SEA HIPERBÓLICO ES QUE $\lambda_k / \lambda_j \notin \mathbb{R} \quad \square$.

OBSERVACIÓN:

SI H_j ES HIPERBÓLICO PODEMOS TENER TRES TIPOS DE COMPORTAMIENTO DEPENDIENDO DE QUE H_j SEA UNA CONTRACCIÓN, UNA EXPANSIÓN O DE TIPO SILO.

VEAMOS QUE

$$|e^{\lambda_k \lambda_j}| < 1 \text{ si y sólo si } \operatorname{Im}(\lambda_k / \lambda_j) < 0$$

$$\text{y } |e^{\lambda_k \lambda_j}| > 1 \text{ si y sólo si } \operatorname{Im}(\lambda_k / \lambda_j) > 0.$$

ASI, PODEMOS DIVIDIR EL ESPACIO $\mathbb{F}_j \cong \mathbb{C}^{n-1}$ EN DOS SUBESPACIOS INVARIANTES BAJO H_j COMO MOSTRAMOS A CONTINUACIÓN:

SUPONGAMOS QUE LOS PRIMEROS r VALORES $\lambda_k / \lambda_j, k=1, \dots, r$, SON TALES QUE $\operatorname{Im}(\lambda_k / \lambda_j) < 0$ Y LOS RESTANTES $\lambda_k / \lambda_j, k=r+1, \dots, n$, SON TALES QUE $\operatorname{Im}(\lambda_k / \lambda_j) > 0$.

$$H_j(z) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \lambda_j} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{\lambda_r \lambda_j} & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & e^{\lambda_{r+1} \lambda_j} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & e^{\lambda_n \lambda_j} & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, z = (z_1, \dots, z_r, \dots, z_n) \in \mathbb{F}_j$$

Y DEFINIMOS AHORA LOS SIGUIENTES ESPACIOS PROPIOS.

$$F^s = \{ z \in \mathbb{C}^{n-1} \mid z = (z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0) \}$$

$$F^u = \{ z \in \mathbb{C}^{n-1} \mid z = (0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n) \}$$

ASI, $\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{F}_j = F^s \oplus F^u$. EL ESPACIO ESTABLE ES F^s Y SE TIENE QUE $H_j|_{F^s}$ ES UNA CONTRACCIÓN. EL ESPACIO INESTABLE ES F^u Y $H_j|_{F^u}$ ES UNA EXPANSIÓN (VER PÁGINA 16).

POR LO QUE HEMOS VISTO, EL COMPORTAMIENTO TOPOLÓGICO DE $\tilde{F}(A)$ DEPENDE FUERTEMENTE DE LA POSICIÓN DE LOS VALORES PROPIOS DE A EN EL PLANO COMPLEJO; ELLO NOS CONDUCIRÁ A TRATAR DE OBTENER UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS FOLIACIONES EN BASE A LOS VALORES PROPIOS $\{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$.

- DEFINICIÓN 2.2

(EL DOMINIO DE POINCARÉ Y EL DE SIEGEL)

SEA $\Lambda = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} \subset \mathbb{C}$ Y $\mathcal{H}(\Lambda) = \{ \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j \mid c_j > 0 \text{ y } \sum_{j=1}^n c_j = 1, \text{man} \}$ EL CONJUNTO CONVEXO DE Λ $\{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$. EL CONJUNTO ABIERTO $\Lambda^* = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid k \neq l \Rightarrow \lambda_k / \lambda_l \notin \mathbb{R} \}$

CONSTA DE DOS COMPONENTES CONEXAS:

- 1) EL DOMINIO DE POINCARÉ: $= \{ \Lambda + 0 \notin \mathcal{H}(\Lambda) \}$
- 2) EL DOMINIO DE SIEGEL: $= \{ \Lambda + 0 \in \mathcal{H}(\Lambda) \}$.

DEFINICIÓN 2.3 - (campo hiperbólico)

Un campo vectorial A es llamado hiperbólico si y sólo si $\lambda_k / \lambda_j \notin \mathbb{R}$ para todo $k \neq j$.

En consecuencia, todas las holonomías H_j , $j=1, \dots, n$ de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

$x \in \mathbb{C}^n$, $T \in \mathbb{C}$, donde A es un campo vectorial hiperbólico, son hiperbólicas.

2. GEOMETRÍA DE LAS HOJAS EN EL DOMINIO DE POINCARÉ.LEMA 2.4 -

Si A es hiperbólico son equivalentes:

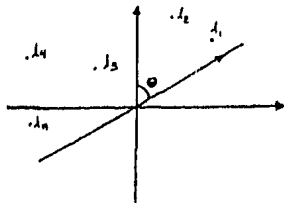
- a) A está en el dominio de Poincaré
- b) Existe $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que φ_α es atracción (es decir, todos los valores propios tienen parte real negativa).
- c) Las hojas de la foliación son transversales a las $(2n-1)$ -esferas S_r .

DEMOSTRACIÓN:

Venimos primero que (a) y (b) son equivalentes.

Si A está en el dominio de Poincaré, entonces $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Consideremos ahora $\alpha \in \mathbb{C}$ y φ_α el flujo real inducido por φ . Dado que los valores propios de φ_α son $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$, se tiene que $\mathcal{H}(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n)$ es el casco convexo asociado a φ_α .

Como $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, podemos hacer pasar una recta por el origen de manera tal que todos los valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ queden en un semiplano.



Si θ denota al ángulo que forma dicha recta con el eje imaginario, bastará ro-

tar el plano un ángulo θ o $180^\circ - \theta$ (según convenga) para que todos los valores propios tengan parte real negativa.

Si $\alpha \in \mathbb{C}^\theta$, entonces φ_α es atracción, pues sus valores propios son $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$.

Veamos ahora que (b) implica (a).

Supongamos que φ_α es atracción, entonces los valores propios de φ_α tienen parte real negativa y, por consiguiente, $0 \notin \mathcal{H}(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n)$.

Si A no está en el dominio de Poincaré, entonces $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ahora, puesto que el casco convexo es lineal, se tiene que para todo $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathcal{H}(\beta\lambda_1, \dots, \beta\lambda_n)$. Así, $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ implica que $0 \in \alpha \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y por tanto, $0 \in \mathcal{H}(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n)$ que es una contradicción.

DEMOSTRAREMOS AHORA QUE (a) ES EQUIVALENTE A (c).

Para ello, consideremos A en el dominio de Poincaré y supongamos que existe una hoja que no es transversal a la esfera S_r en algún punto, es decir, existen $0 \neq \varphi$ y $q \in S_r$ tales que, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, φ_α es tangente a la esfera S_r en q . Entonces, para todo α en los complejos se tiene que

$$\operatorname{Re}(\langle (\alpha\lambda_1 q_1, \dots, \alpha\lambda_n q_n), (q_1, \dots, q_n) \rangle) = 0$$

luego,

$$\operatorname{Re}(\langle (\lambda_1 q_1, \dots, \lambda_n q_n), (q_1, \dots, q_n) \rangle) = 0.$$

Como esto sucede para toda α en \mathbb{C} , si consideramos $\alpha = i$ y después $\alpha = -i$ se tiene que

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j |q_j|^2 = 0$$

$$\operatorname{Re} (i \sum_{j=1}^n \lambda_j |q_j|^2) = 0$$

por lo tanto,

$$\langle (\lambda_1 q_1, \dots, \lambda_n q_n), (q_1, \dots, q_n) \rangle = 0.$$

$$A_{S^1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j |q_j|^2 = 0$$

Y PUESTO QUE $\sum_{j=1}^n |q_j|^2 > 0$ SE TIENE QUE

$$\frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j |q_j|^2}{\sum_{j=1}^n |q_j|^2} = 0 ;$$

SI AHORA DEFINIMOS $c_j = \frac{|q_j|^2}{\sum_{j=1}^n |q_j|^2}$, ENTONCES

$$\sum_{j=1}^n c_j = 1 \text{ y } \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j = 0$$

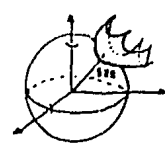
LO CUAL IMPLICA QUE $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, SIENDO ESTO UNA CONTRADICCIÓN.

SUPONGAMOS AHORA QUE LAS HOJAS DE LA FOLIACIÓN SON TRANSVERSALES A LAS ESFERAS S^1 Y SUPONGAMOS TAMBIÉN QUE A ESTÁ EN EL DOMINIO DE SIEGEL.

SI A ESTÁ EN EL DOMINIO DE SIEGEL, ENTONCES $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Y SE TIENE QUE EL CONJUNTO M DEFINIDO POR

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0\}$$

ES DISTINTO DEL VACÍO. Así, existe $\tilde{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{j=1}^n \lambda_j |\tilde{z}_j|^2 = 0$. PUESTO QUE SIEMPRE PODEMOS ENCONTRAR \tilde{z} Y w TALES QUE $\tilde{z} \in O_{\mathbb{P}^n}$, ENTONCES LA CONDICIÓN $\sum_{j=1}^n \lambda_j |\tilde{z}_j|^2 = 0$, QUE ES EQUIVALENTE A $\langle (\lambda_1 \tilde{z}_1, \dots, \lambda_n \tilde{z}_n), (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) \rangle = 0$ NOS INDICA QUE $O_{\mathbb{P}^n}$ ES TANGENTE A LA ESFERA DE RADIO $\|\tilde{z}\|$, QUE ES UNA CONTRADICCIÓN. POR CONSIGUIENTE, SI LAS HOJAS DE LA FOLIACIÓN SON TRANSVERSALES A LAS $(2n-1)$ -ESFERAS, A ESTÁ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ.



OBSERVACIONES:

1.- SI NO PEDIMOS QUE A SEA HIPERBÓLICA, PODEMOS MODIFICAR EL LEMA ANTERIOR DE LA SIGUIENTE MANERA:

LEMA-

Son equivalentes

- a) A está en el dominio de POINCARÉ UNIÓN $C = \{A \mid \lambda_k/\lambda_j = r_{kj}, r_{kj} \in \mathbb{R}^+, j, k \in \{1, \dots, n\}\}$
- b) Existe α en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que φ_α es atráctor.
- c) Las hojas de la foliación son transversales a las $(2n-1)$ -ESFERAS.

2.- SI SÓLO PEDIMOS QUE A ESTÉ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ PODEMOS VER QUE EL HECHO DE QUE LAS HOJAS DE LA FOLIACIÓN SEAN TRANSVERSALES A LAS $(2n-1)$ ESFERAS, NO IMPLICA QUE A SEA NECESARIAMENTE HIPERBÓLICO; CONSIDEREMOS $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{C}$, CIARAMENTE A ESTÁ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ, LAS HOJAS DE LA FOLIACIÓN SON TRANSVERSALES A LAS $(2n-1)$ -ESFERAS Y EXISTE α TAL QUE φ_α ES ATRÁCTOR, SIN EMBARGO A NO ES HIPERBÓLICO PUES $k/k = 1 \in \mathbb{R}$. Así, SI QUITAMOS LA CONDICIÓN DE QUE A ESTÉ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ UNIÓN C , PODEMOS AFIRMAR LO SIGUIENTE:

LEMA-

SI A ESTÁ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ, ENTONCES EXISTE α EN $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ TAL QUE φ_α ES ATRÁCTOR Y ADEMÁS, LAS HOJAS DE LA FOLIACIÓN SON TRANSVERSALES A LAS $(2n-1)$ -ESFERAS.

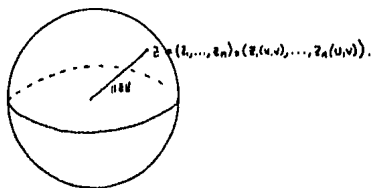
A CONTINUACIÓN VAMOS A VER UN LEMA QUE, SI BIEN NO UTILIZAREMOS SI NO HASTA LA SIGUIENTE SECCIÓN, LO INCLUIAMOS AQUÍ EN VISTA DE QUE LA DEMOSTRACIÓN DE LO DITAMA IMPLICA CIÓN DEL LEMA 2.4 LOS HA DEJADO PARTE DEL CAMINO TAPADO.

LEMA - 2.4'

La función real $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z) = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$ tiene un valor crítico en la hoja $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{O}P_\omega = \{(z_1(\tau), \dots, z_n(\tau)) = (e^{i\tau} w_1, \dots, e^{i\tau} w_n)\}$, $\tau \in \mathbb{C}$ si y solamente si $0 = d \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$ y, si esto sucede, entonces $\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $T = u + iv$ y $f(u, v) = f(z) = \|z\|^2$



Siendo $f(u, v) = f(z) = \|z\|^2$ se tiene que

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Si expresamos a u, v como combinaciones lineales de T y de \bar{T} , $u = \frac{1}{2}(T + \bar{T})$, $v = \frac{i}{2}(T - \bar{T})$ entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dT} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dT} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad y$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{T}} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{d\bar{T}} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{d\bar{T}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

de manera que

$$df(T, \bar{T}) = \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial \bar{T}} d\bar{T}.$$

Como $f(T, \bar{T}) = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j(T, \bar{T})$ y $z_j(T, \bar{T})$ es holomorfa, entonces $z_j = z_j(T)$ y $\bar{z}_j = \bar{z}_j(\bar{T})$. Así, $0 = d\|z\|^2 = \frac{\partial}{\partial T} \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j(T, \bar{T}) dT + \frac{\partial}{\partial \bar{T}} \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j(T, \bar{T}) d\bar{T}$

es decir,

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_j(T)}{\partial T} \bar{z}_j(\bar{T}) dT + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{z}_j(\bar{T})}{\partial \bar{T}} z_j(T) d\bar{T}$$

es decir,

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \bar{z}_j dT + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \bar{z}_j z_j d\bar{T}$$

por lo tanto,

$$0 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j (\lambda_j dT + \bar{\lambda}_j d\bar{T}).$$

Si tomamos como base del espacio tangente a $dT = i, d\bar{T} = i$ entonces,

$$0 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j (\lambda_j + \bar{\lambda}_j) \quad \text{para } dT = i \quad y$$

$$0 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j (\lambda_j - \bar{\lambda}_j) \quad \text{para } dT = i.$$

Si ahora sumamos las igualdades anteriores se tiene

$$0 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j \lambda_j, \quad \text{es decir, } \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0.$$

Así, puesto que la demostración de la implicación "si" del lema ya se dio en la página 37, queda demostrado el lema. II.

Volvamos ahora a las holonomías H_j . Supongamos que $0 \notin \lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; observamos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está contenido en el semiplano superior de \mathbb{C} (pues basta rotar un ángulo apropiado); además, suponemos que $\lambda_j \neq 0$ implica que $\lambda_j / \lambda_1 \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en el espectro de A . Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ están en el semiplano superior podemos reordenarlos de modo que se cumpla que $0 < \arg \lambda_1 < \dots < \arg \lambda_n \leq \pi$. Así, la holonomía del primer eje $H_1: \Gamma_1 \rightarrow F_1$ está dada por $H_1(z_1, \dots, z_n) = (e^{2\pi i z_1 / \lambda_1}, \dots, e^{2\pi i z_n / \lambda_n})$.

Si ahora escribimos $\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}$ para toda $j = 1, \dots, n$, tenemos que

$$\lambda_j / \lambda_1 = \frac{r_j}{r_1} e^{i(\theta_j - \theta_1)} = \frac{r_j}{r_1} (\cos(\theta_j - \theta_1) + i \sin(\theta_j - \theta_1))$$

luego, para toda $j, j = 1, \dots, n$,

$$\operatorname{Re}(2\pi i \lambda_j / \lambda_1) = \frac{2\pi r_j}{r_1} (-\sin(\theta_j - \theta_1)) < 0.$$

Por lo tanto, H_1 es atracción.

En forma análoga puede verse que H_n tiene un valor propio con parte real positiva y los demás con parte real negativa; así, podemos seguir hasta H_n que tiene todos sus valores propios con parte real positiva, es decir H_n es repulsión.

A continuación veremos un lema que nos será de gran utilidad en el próximo capítulo:

- LEMA 2.5 -

Sea $X(z) = Az$ el campo vectorial en \mathbb{C}^n dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dt} = Az, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \vdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}^n, j=1, \dots, n.$$

Si A es hiperbólica y $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ está en el dominio de Poincaré, entonces la intersección de la foliación $\mathcal{F}(A)$ con S_1 produce una foliación real unidimensional que puede orientarse como un campo de Morse-Smale.

DEMOSTRACIÓN:

Como A es hiperbólico y $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ está en el dominio de Poincaré, la intersección de $\mathcal{F}(A)$ con S_1 es transversal. Así, dado que la dimensión de la foliación es la dimensión de sus hojas (que en este caso es dos), se tiene que

$$\dim[\mathcal{F}(A) \cap S_1] = \dim \mathcal{F}(A) + \dim S_1 - \dim[\mathcal{F}(A) \cap S_1]$$

luego,

$$\dim[\mathcal{F}(A) \cap S_1] = (2 + 2n - 1) - 2n$$

y, por lo tanto,

$$\dim[\mathcal{F}(A) \cap S_1] = 1.$$

Así, la intersección de $\mathcal{F}(A)$ con S_1 genera una foliación unidimensional real.

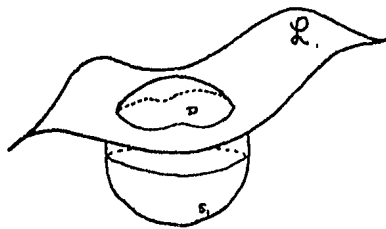
Vamos a ver a continuación que el campo X_1 inducido en S_1 puede orientarse como un campo de Morse-Smale; para ello, recordemos que es necesario verificar tres condiciones:

a) X_1 tiene un número finito de elementos críticos (líneas nodales y órbitas cerradas) todos hiperbólicos.

b) Si u_1 y u_2 son elementos críticos de X_1 , entonces $W_{u_1}^s(u_1)$ es transversal a $W_{u_2}^u(u_2)$.

c) El conjunto $\Omega(X_1)$ de los puntos no escapados es igual al conjunto de los elementos críticos de X_1 .

AFIRMACIÓN: si X_1 es el campo inducido en S_1 , las órbitas cerradas γ_j , $j=1, \dots, n$, dadas por la intersección de S_1 con los ejes coordenados, resultan ser los únicos elementos críticos de X_1 . La demostración de este hecho es sencilla: como se verá posteriormente (ver página 47), todas las órbitas de X salvo los ejes coordenados son homeomorfas a \mathbb{C} ; de esta manera, si existiese una órbita cerrada γ de X_1 que no estuviese dada por la intersección de S_1 con un eje coordenado, se tendría que γ actuaría a un disco D contenido en una órbita (hoja) \mathcal{L} del campo X .



De esta forma, la función distancia d (usual) en \mathbb{C}^n restringida a D , puede verse como una función continua de un disco cerrado $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{R} que es constante en $\partial D = \gamma$; así, d alcanza necesariamente un valor crítico en un punto p en D , lo cual contradice el lema 1, pues el

HECHO DE QUE d TOQUE UN VALOR CRÍTICO EN P IMPLICA QUE EXISTE UNA ESFERA S_r TANGENTE A LA HOJA \mathcal{L} EN P .

a) VAMOS A VER QUE LAS ÚNICAS n ÓRBITAS CERRADAS γ_j , $j=1, \dots, n$, DE X , SON HIPERBÓLICAS:

SABEMOS QUE UN ELEMENTO $z = (z_1, \dots, z_n)$ EN S_1 DEBE SATISFACER LA RELACIÓN $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$ DE MODO QUE, SI NOS FIJAMOS EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL AL FIBRO DADA POR $S_1 \cap \mathcal{H}$, DONDE \mathcal{H} ES EL HIPERPLANO $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}^n : z_i \in \mathbb{R}\}$, TENEMOS QUE UN PUNTO w EN ESTA DEBERÁ SER DE LA FORMA

$$(w_1, \dots, w_n) = \left(\left(1 - \sum_{j=2}^n |w_j|^2\right)^{1/2}, w_2, \dots, w_n \right).$$

Sea $\bar{H}_i: S_1 \cap \mathcal{H} \rightarrow S_1 \cap \mathcal{H}$ tal que

$$\bar{H}_i(w_1, \dots, w_n) = (e^{i\lambda_1 \lambda_1} w_1, e^{i\lambda_2 \lambda_2} w_2, \dots, e^{i\lambda_n \lambda_n} w_n)$$

$$\text{DONDE } e^{i\lambda_1 \lambda_1} w_1 = \left(1 - \sum_{j=2}^n |e^{i\lambda_j \lambda_j} w_j|^2\right)^{1/2};$$

COMO $e^{i\lambda_1 \lambda_1} w_1 = e^{2\pi i} w_1 = w_1$, TENEMOS QUE \bar{H}_i ES LA TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ ALREDEDOR DE γ_i . PODEMOS VER A \bar{H}_i COMO LA TRANSFORMACIÓN DE \mathbb{C}^{n-1} EN \mathbb{C}^{n-1} DADA POR LA EXPRESIÓN $\bar{H}_i(w_2, \dots, w_n) = (e^{i\lambda_2 \lambda_2} w_2, \dots, e^{i\lambda_n \lambda_n} w_n)$; SE OBSERVA ENTONCES QUE \bar{H}_i ES JUSTAMENTE LA TRANSFORMACIÓN H_i QUE DEFINIMOS ANTES Y QUE DEMOSTRAMOS SER HIPERBÓLICA (VER PÁGINA 36).

ANÁLOGAMENTE PUEDEN DEFINIRSE \bar{H}_j , $j=2, \dots, n$ DE MODO QUE CADA \bar{H}_j LA TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ DE γ_j . NUEVAMENTE LAS \bar{H}_j RESULTARÁN SER HIPERBÓLICAS Y, EN CONSECUENCIA, LAS n ÓRBITAS CERRADAS γ_j DE X , SON ÓRBITAS HIPERBÓLICAS.

b) DEMOSTRAREMOS AHORA, POR INDUCCIÓN EN n , QUE LAS VARIETADES ESTABLES E INESTABLES DE ELEMENTOS CRÍTICOS SE INTERSECTAN TRANSVERSALMENTE.

PARA $n=2$ SE OBSERVA QUE γ_1 ES ATRACTOR Y γ_2 ES REPULSOR DE MODO QUE EL CAMPO INDUCIDO X_1 RESULTA CLARAMENTE DE MORSE-SMILE.

SUPONGAMOS AHORA QUE $0 \in \text{arg } \lambda_1, \dots, \text{arg } \lambda_n \in \pi$ Y ESCRIBAMOS $S_1^{2n-3} = S_1^{2n-1} \cap E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}$

$$\text{DONDE } E_j = \langle (0, \dots, 0, \underset{j\text{ésimo}}{1}, 0, \dots, 0) \rangle, \quad j=1, \dots, n-1.$$

SABEMOS, POR HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN, QUE $Y = X|_{S_1^{2n-3}}$ ES UN CAMPO DE MORSE-SMILE ENTONCES, SI γ_k Y γ_j SON ÓRBITAS PERIÓDICAS EN S_1^{2n-3} SE CUMPLE QUE $W_Y^u(\gamma_k)$ ES TRANSVERSAL A $W_Y^s(\gamma_j)$. ASÍ, SE TIENE QUE

$$\dim W_Y^u(\gamma_k) + \dim W_Y^s(\gamma_j) - \dim (W_Y^u(\gamma_k) \cap W_Y^s(\gamma_j)) = \dim [W_Y^u(\gamma_k) \cap W_Y^s(\gamma_j)] \quad (*)$$

$$\text{DONDE } \dim [W_Y^u(\gamma_k) \cap W_Y^s(\gamma_j)] = 2n-3.$$

VAMOS A VER QUE SI $X_1 = X|_{S_1^{2n-1}}$ ENTONCES

$$\dim W_{X_1}^u(\gamma_k) + \dim W_{X_1}^s(\gamma_j) - \dim [W_{X_1}^u(\gamma_k) \cap W_{X_1}^s(\gamma_j)] = \dim [W_{X_1}^u(\gamma_k) \cap W_{X_1}^s(\gamma_j)],$$

$$\text{DONDE } \dim [W_{X_1}^u(\gamma_k) \cap W_{X_1}^s(\gamma_j)] = 2n-1.$$

SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD SUPONGAMOS QUE $j < k$. UN PUNTO $z = (z_1, \dots, z_j, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$, $z_k \neq 0$ ES UN PUNTO DE LA VARIEDAD INESTABLE DE γ_k PUES $\text{Re}(\lambda_j \lambda_k) = 2\pi(-\sin(\theta_j - \theta_k)) > 0$; UN PUNTO DE LA FORMA $(0, \dots, 0, z_j, \dots, z_k, \dots, z_{n-1})$ CON $z_j \neq 0$ ES UN PUNTO EN LA VARIEDAD ESTABLE DE γ_j PUES $\text{Re}(\lambda_k \lambda_j) = 2\pi(-\sin(\theta_k - \theta_j)) < 0$ (RECORDAR LO QUE SE HIZO EN LA PÁGINA 30).

ES CLARO QUE SI AHORA CONSIDERAMOS S_1^{2n-1} , LOS ELEMENTOS DE LA VARIEDAD INESTABLE DE γ_k DEBERÁN SER n -ADAS DE LA FORMA $(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$, $z_k \neq 0$, MIENTRAS QUE LOS ELEMENTOS DE LA VARIEDAD ESTABLE DE γ_j SERÁN DE LA FORMA $(0, \dots, 0, z_j, \dots, z_{n-1}, z_n)$ CON $z_j \neq 0$. ADICIÓN, UN ELEMENTO EN LA INTERSECCIÓN DE $W_{X_1}^u(\gamma_k)$ CON $W_{X_1}^s(\gamma_j)$ HA DE SER DE LA FORMA $(0, \dots, 0, z_j, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ CON $z_k z_j \neq 0$.

Así,

$$\dim W_{X_1}^u(\gamma_k) = \dim W_Y^u(\gamma_k),$$

$$\dim W_{X_1}^s(\gamma_i) = \dim W_{X_1}^s(\gamma_i) + 2 \quad \gamma$$

$$\dim[W_{X_1}^u(\gamma_k) \cap W_{X_1}^s(\gamma_i)] = \dim[W_Y^u(\gamma_k) \cap W_Y^s(\gamma_i)].$$

DE ESTO FORMA, SUSTITUYENDO LAS EXPRESIONES ANTERIORES EN (*) SE TIENE QUE

$$\dim W_{X_1}^u(\gamma_k) + \dim W_{X_1}^s(\gamma_i) - (2n-1) = \dim[W_{X_1}^u(\gamma_k) \cap W_{X_1}^s(\gamma_i)],$$

CON $\dim(W_{X_1}^u(\gamma_k) + W_{X_1}^s(\gamma_i)) = 2n-1$, LO QUE IMPLICA QUE LA VARIEDAD $W_{X_1}^u(\gamma_k)$ ES TRANSVERSAL A LA VARIEDAD $W_{X_1}^s(\gamma_i)$.

c) POR ÚLTIMO, VALDRI A DEMOSTRAR QUE EL CONJUNTO $\Omega(X_1)$ DE LOS PUNTOS NO ERANTES COINCIDE CON EL CONJUNTO DE LOS ELEMENTOS CRÍTICOS DE X_1 . PARA ELLO, VALDRI A VER QUE SI z ES UN PUNTO EN UNA ÓRBITA NO CERRADA $\beta = \tilde{\varphi}(t, z_0)$ DE X_1 , ENTONCES PARA TODA VECINDAD U DE z EXISTE $t_0 > 0$ TAL QUE SI $|t| > t_0$, $\tilde{\varphi}(t, u) \cap U = \emptyset$. EL HECHO DE QUE z ESTE EN UNA ÓRBITA β NO CERRADA NOS DICE QUE z NO ESTÁ EN UN EJE COORDENADO, POR CONSIGUIENTE EXISTEN $k, l \Rightarrow z_k z_l \neq 0$.

EN GENERAL, SI SUPONEMOS QUE $W = (W_1, \dots, W_n) = (e^{i\lambda_1 t} z_1, \dots, e^{i\lambda_n t} z_n)$, ES TÁN CERCANO COMO QUERAMOS A z ENTONCES, PUESTO QUE $z_k z_l \neq 0$ Y $W_k = e^{i\lambda_k t} z_k$, $W_l = e^{i\lambda_l t} z_l$, T DEBERÍA SER MUY CERCANO A $\lambda_k n$ Y A $\lambda_l m$, PARA $n, m \in \mathbb{Z}$. ASÍ, MOSTRO QUE $\lambda_k \notin \mathbb{R} \lambda_l$, LA ÚNICA POSIBILIDAD QUE RESTA ES QUE T SEA MUY CERCANO A CERO.

QUEDA CLARO ENTONCES QUE SI $z \in S$, Y z NO ESTÁ EN UNA ÓRBITA CERRADA DE

X_1 , ENTONCES PARA TODA VECINDAD U DE z SE TIENE QUE EXISTE $t_0 > 0$ TAL QUE SI $|t| > t_0$, $\tilde{\varphi}(t, u) \cap U = \emptyset$.

//

EN ESTA SECCIÓN HEMOS DADO UNA DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LA GEOMETRÍA DE LAS HOJAS DE FOLIACION, EN LA SIGUIENTE SECCIÓN VALDRI A INTRODUCIR UN NUEVO TIPO DE HOJA CUYA EXISTENCIA QUEDÓ DE ALGÚN MODO IMPLÍCITO EN LAS DEMOSTRACIONES DE LAS LEMAS 2.4 Y 2.4'.

3.- LA FOLIACIÓN DE LAS HOJAS DE SIGUEL

ANTES DE DEFINIR UN NUEVO TIPO DE HOJA VALDRI A RECORDAR ALGUNOS RESULTADOS DE LA SECCIÓN ANTERIOR. RECORDAMOS PRINCIPALMENTE QUE LA FUNCIÓN REAL $|| \cdot ||^2: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DADO POR $||z||^2 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$ TIENE UN VÍNCULO CRÍTICO EN LA HOJA $P_w = D\varphi = \{z(t), \dots, z_n(t)\} = (e^{i\lambda_1 t} w_1, \dots, e^{i\lambda_n t} w_n)$, $T \in \mathbb{C}$ SI Y SÓLO SI $0 = d \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$ Y, SI ESTO SUCEDE, ENTONCES $\sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 0$.

TAMBIÉN EN LA SECCIÓN ANTERIOR SURTIÓ EN FORMA NATURAL EL CONJUNTO $M = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 0\}$. OBSERVAMOS QUE LOS PUNTOS $z \in M$ SON JUSTAMENTE AQUELLOS DONDE LA FOLIACIÓN ES TANGENTE A LAS ESFERAS $S_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = r^2\}$, PUES UNA HOJA ES TANGENTE A LA ESFERA S_r EN EL PUNTO z SI Y SÓLO SI PARA TODA $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ SE TIENE QUE $\text{Re} \langle \alpha F(z), z \rangle = 0$, DONDE $F(z)$ ES EL CAMPO VECTORIAL EN z DADO POR UNA FUNCIÓN DIFERENCIAL. COMO LA ECUACIÓN $\text{Re} \langle \alpha F(z), z \rangle = 0$ SUCEDE PARA TODOS $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ CONSIDEREMOS UNA α MUY PARTICULAR:

$$\alpha = \frac{\langle F(z), z \rangle}{\text{Re} \langle F(z), z \rangle}$$

ENTONCES $\alpha \in \mathbb{R}$ Y SE CUMPLE QUE $0 = \text{Re} \langle \alpha F(z), z \rangle$; POR TANTO,

$$0 = \text{Re} \left[\frac{\langle F(z), z \rangle}{\text{Re} \langle F(z), z \rangle} F(z), z \right]$$

LUEGO,

$$0 = \frac{\langle F(z), z \rangle}{\text{Re} \langle F(z), z \rangle} \text{Re} \langle F(z), z \rangle$$

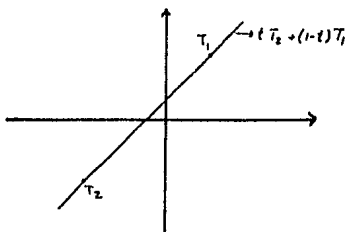
y, EN CONSECUENCIA,
 $0 = \langle F(z), z \rangle$.

Así, TENEMOS QUE LA HOJA \mathbb{P}_w ES TANGENTE A LA ESPERA S_r EN EL PUNTO z SI Y SÓLO SI: $\langle F(z), z \rangle = 0$.

EN NUESTRO CASO, $F(z) = (f_1 z_1, \dots, f_n z_n)$ POR LO QUE SE TIENE QUE LA HOJA \mathbb{P}_w ES TANGENTE A LA ESPERA S_r EN EL PUNTO z SI Y SÓLO SI: $\langle (f_1 z_1, \dots, f_n z_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = 0$.

RECORDAMOS QUE EN ESTE CASO $\sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 0$ Y ENTONCES $\frac{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} = 0$, LO QUE IMPLICA QUE $0 \in \mathcal{X}(f_1, \dots, f_n)$.

VEREMOS AHORA QUE SI EN UNA HOJA \mathbb{P}_w LA FUNCIÓN $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ TOMA UN VALOR CRÍTICO, ENTONCES EN DICHO PUNTO SE TIENE UN MÍNIMO Y ÉSTE ES, ADEMAS, ÚNICO. PARA ESTE FIN, CONSIDEREMOS DOS PUNTOS T_1 Y T_2 EN \mathbb{C} ARBITRARIOS Y LA RECTA REAL QUE LOS UNE.



CONSIDEREMOS AHORA LA FUNCIÓN DADA POR $t \rightarrow \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ DONDE $z_j(t) = e^{i(tT_2 + (1-t)T_1) / w_j}$ PARA TODA j , $j=1, \dots, n$. (COMO SE TIENE QUE, PARA CADA j , $|z_j(t)|^2 = e^{2\operatorname{Re}(i(tT_2 + (1-t)T_1) / w_j)}$, ENTONCES LA FUNCIÓN $t \rightarrow \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ RESULTA SER UNA SUMA DE FUNCIONES CÓNCAVAS (PUES e^x , $x \in \mathbb{R}$ ES UNA FUNCIÓN CÓNCAVA) Y, POR CONSECUENTE, ESTA MISMA TAMBIÉN ES CÓNCAVA.

Así, PARA TODA DIRECCIÓN Y MAGNITUD DADAS POR T_1 Y T_2 , SE TIENE QUE LA FUNCIÓN $t \rightarrow \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ ES CÓNCAVA, LO QUE IMPLICA QUE LA FUNCIÓN DE \mathbb{C} A \mathbb{R} DADA POR $T \rightarrow \sum_{j=1}^n |z_j(T)|^2$ TAMBIÉN LO ES. EN CONCLUSIÓN, EL PUNTO CRÍTICO EN LA HOJA ES MÍNIMO Y ADEMAS ES ÚNICO.

DEFINICIÓN - 2.6 (HOJAS DE SIEGEL)

LAS HOJAS QUE TIENEN UNA DISTANCIA MÍNIMA AL ORIGEN SE LES DENOMINAN HOJAS DE SIEGEL.

PROPOSICIÓN - 2.7

LAS HOJAS DE SIEGEL SON UN ENCAJE CERRADO DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}^n .

DEMOSTRACIÓN:

Sea $T \xrightarrow{\mathbb{P}_w} (z_1, \dots, z_n) = (e^{i t_1 / w_1}, \dots, e^{i t_n / w_n})$.

SUPONGAMOS QUE PARA $T \in \mathbb{C}$, EXISTE $T' \in \mathbb{C}$, $T \neq T'$ TAL QUE $D\mathbb{P}_w(T) = D\mathbb{P}_w(T')$, ES DECIR, $(f_1 e^{i t_1 / w_1}, \dots, f_n e^{i t_n / w_n}) = (f_1 e^{i t'_1 / w_1}, \dots, f_n e^{i t'_n / w_n})$.

Así, $f_j e^{i t_j / w_j} = f_j e^{i t'_j / w_j}$ PARA TODA j , $j=1, \dots, n$, LO QUE IMPLICA QUE $e^{i(t-t') / w_j} = 1$

AUNQUE,

$$(T-T') / w_j = i t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

COMO ES PARA TODA j , SE TIENE QUE SI $k \neq j$ Y $w_k w_j \neq 0$, ENTONCES $T-T' = \frac{w_j}{w_k} i t = \frac{w_j}{w_k} i t'$ PARA $t, t' \in \mathbb{R}$, LO CUAL IMPLICA QUE $w_k / w_j \in \mathbb{R}$ QUE ES UNA CONTRADICCIÓN.

LA INYECTIVIDAD DE \mathbb{P}_w SE DEMUESTRA EN FORMA ANALÓGICA; ASÍ, PUESTO QUE, EN EL CASO DE LAS HOJAS DE SIEGEL, LA PREIMAGEN DE COMPACTOS $(\mathbb{P}_w^{-1}(K))$, K COMPACTO ES COMPACTO. SE TIENE QUE \mathbb{P}_w ES UN ENCAJE CERRADO DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}^n . II.

Así, LAS HOJAS DE SIEGEL SON UN ENCAJE CERRADO DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}^n Y CADA HOJA PUEDE CARACTERIZARSE POR SU PUNTO CRÍTICO $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ EN M .

SI AHORA DENOTAMOS POR W A LA UNIÓN DE TODAS LAS HOJAS DE SIEGEL, ENTONCES W ES EL ESPACIO TOTAL DE UN HAZ TRIVIAL $W = M \times \mathbb{C} \rightarrow M$ ENCAJADO EN \mathbb{C}^n CUAL SIEMPRE: SI $(\xi, T) = (\xi_1, \dots, \xi_n, T) \in M \times \mathbb{C}$, ENTONCES

$$(\xi, T) \longrightarrow (\xi_1 e^{i t_1 / w_1}, \dots, \xi_n e^{i t_n / w_n}) = (z_1, \dots, z_n).$$

(VEREMOS MÁS ADELANTE QUE W ES ABIERTO Y DENSO EN \mathbb{C}^n).

EN LO QUE AFIRMAMOS EN EL PÁRRAFO ANTERIOR QUEDA IMPLÍCITO EL HECHO DE QUE M ES UNA VARIEDAD, PARA DEMOSTRARLO, USAREMOS UN RESULTADO DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL QUE AFIRMA QUE LA INTERSECCIÓN TRANSVERSAI DE DOS VARIETADES ES VARIEDAD (VER PLATA 6).

CONSIDEREMOS M DEFINIDA POR:

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0\}$$

COMO $\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2) = 0$ y

$$\operatorname{Im}(\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2) = 0$$

ENTONCES PODEMOS EXPRESAR M COMO LA INTERSECCIÓN DE DOS CONJUNTOS M_1 y M_2 DONDE

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Re}(\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2) = 0\}$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Im}(\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2) = 0\}$$

SI ESCRIBIMOS $z_j = x_j + iy_j$ y $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$, ENTONCES M_1 y M_2 QUEDAN EXPRESADOS POR

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \mu_j (x_j^2 + y_j^2) = 0\}$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \nu_j (x_j^2 + y_j^2) = 0\}$$

M_1 y M_2 SON VARIEDADES PUES SON LA IMAGEN INVERSA DEI VALOR REGULAR O DE LAS FUNCIONES

$$f_1(x, y) = \sum_{j=1}^n \mu_j (x_j^2 + y_j^2),$$

$$f_2(x, y) = \sum_{j=1}^n \nu_j (x_j^2 + y_j^2) \quad \text{RESPECTIVAMENTE,}$$

PODE

$$Df_{f_1}(x, y) = \begin{bmatrix} \mu_1 x_1 & 0 & \dots & 0 & \mu_1 y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 x_2 & \dots & 0 & 0 & \mu_2 y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n x_n & 0 & \dots & \mu_n y_n & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$Df_{f_2}(x, y) = \begin{bmatrix} \nu_1 x_1 & 0 & \dots & 0 & \nu_1 y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu_2 x_2 & \dots & 0 & 0 & \nu_2 y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \nu_n x_n & 0 & \dots & \nu_n y_n & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore M_1$ y M_2 TIENEN DIMENSIÓN $2n-1$

PARA VER QUE M ES VARIEDAD BASTARÁ VER QUE LA INTERSECCIÓN DE M_1 y M_2 ESTAN TRANSVERSAL.

$$\text{PARA } M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{j=1}^n \mu_j (x_j^2 + y_j^2) = 0\}$$

SU ESPACIO TANGENTE EN (x, y) ESTÁ DADO POR

$$T_{(x, y)} M_1 = \{(dx, dy) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{j=1}^n (x_j dx_j + y_j dy_j) \mu_j = 0\}$$

ANLOGAMENTE, PARA M_2 SU ESPACIO TANGENTE ES

$$T_{(x, y)} M_2 = \{(dx, dy) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{j=1}^n (x_j dx_j + y_j dy_j) \nu_j = 0\}$$

LOS GENERADORES EN $T_{(x, y)} M_1$ y $T_{(x, y)} M_2$ SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES PUES

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 dx_1 + y_1 dy_1 \\ x_2 dx_2 + y_2 dy_2 \\ \vdots \\ x_n dx_n + y_n dy_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 x_1 & \dots & \mu_n x_n & \mu_1 y_1 & \dots & \mu_n y_n \\ \nu_1 x_1 & \dots & \nu_n x_n & \nu_1 y_1 & \dots & \nu_n y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dx_n \\ dy_n \end{bmatrix}$$

$$y \mu_j \nu_k - \mu_k \nu_j \neq 0$$

YA QUE SI $\mu_j \nu_k - \mu_k \nu_j = 0$, ENTONCES

$$\mu_j \nu_k = \mu_k \nu_j$$

LO QUE IMPLICA QUE

$$\frac{\mu_j}{\mu_k} = \frac{\nu_j}{\nu_k} \in \mathbb{R}$$

ALREVO,

$$\mu_j = \frac{\nu_j}{\nu_k} \mu_k$$

$$\text{Así, COMO } \frac{\nu_j}{\nu_k} = r \in \mathbb{R}$$

ENTONCES,

$$\mu_j = r \mu_k$$

$$y \nu_j = r \nu_k$$

POR TANTO,

$$\lambda_j = \mu_j + i \nu_j = r(\mu_k + i \nu_k) = r \lambda_k$$

y así,

$$\lambda_j = r \lambda_k$$

QUE ES UNA CONTRADICCIÓN

De esta manera, los espacios tangentes $TM_1(x,y)$ y $TM_2(x,y)$ son linealmente independientes, lo que implica que M_1 y M_2 se interseccionan transversalmente y, por consiguiente, M es una variedad de dimension $2n-2$.

Asi, M es un cono sin topo en el cero ($0 \in \mathbb{C}^n$) sobre la variedad compacta

$$M(1) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$$

pues si $z \in M(1)$, entonces $\alpha z \in M$ para toda $\alpha \in \mathbb{C}$. En efecto, sea $z \in M(1)$, entonces $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2$ y por consiguiente se tiene que, para $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitraria,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j |\alpha z_j|^2 = |\alpha|^2 \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0$$

luego, $\alpha z \in M$.

Como hemos visto, las hojas de Siegel solo pueden existir (y en este caso $M \neq \emptyset$) en el dominio de Siegel, es decir, cuando $0 \in \mathcal{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Mas adelante veremos que si $0 \in \mathcal{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ entonces $W = \{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 \in \mathcal{K}(\lambda_j \mid \lambda_j \in J(z))\}$ donde $J(z) = \{j \mid z_j \neq 0\}$, que es un abierto denso en \mathbb{C}^n . (Recordemos que por W habiamos denotado la union de las hojas de Siegel).

1.- GEOMETRIA DE LAS HOJAS DE $F(A)$

Hemos visto, en las secciones anteriores, la existencia de dos tipos de hojas, las hojas de Poincaré y las hojas de Siegel. En esta seccion daremos una clasificacion de todas las hojas que es posible obtener cuando A representa a un campo hiperbolico; de hecho, el teorema que habremos de demostrar nos dice que los unicos tipos de hojas que podemos obtener son o bien un e^{tA} coordinado, o una hoja de Poincaré o una hoja de Siegel. Antes de enunciar formalmente dicho teorema, veremos una serie de resultados que no

solo nos permitirán demostrarlo, sino que, a su vez, nos daran una mejor idea de la geometria de las hojas de $F(A)$.

Hasta ahora hemos considerado la interseccion de las hojas de la foliacion $F(A)$ con "cilindros" $\Gamma_i, \Gamma_j = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| = 1\}$ y hemos sacado de esto alguna informacion. Sin embargo, para extraer una informacion mas precisa sobre el comportamiento de las hojas de $F(A)$, vamos a considerar ahora la interseccion de estas con el disco B de radio uno, con centro en $0 \in \mathbb{C}^n$, dado por

$$B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sup_j |z_j| \leq 1, j=1, \dots, n\}$$

Si $w \in B$, entonces $\varphi: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ induce una immersion $T \rightarrow \varphi(T, w)$ de \mathbb{C} en \mathbb{C}^n cuya imagen es la orbita de φ que pasa por w , $0\varphi_w = \mathcal{L}_w$.

- DEFINICION 2.7 (GRUPO ESTABILIZADOR)

Sea $G_w = \{T \in \mathbb{C} \mid \varphi(T, w) = w\}$. G_w es el grupo estabilizador de φ en w .

- AFIRMACION:

$$\varphi(T, w) = \varphi(T', w) \text{ si y solo si } T-T' \in G_w.$$

Sea $T-T' \in G_w$ entonces

$$\varphi(T-T', w) = w$$

es decir,

$$e^{(T-T')A} w = w$$

luego,

$$e^{TA} e^{-T'A} w = w.$$

Multiplicando ambos lados por $I = e^{-TA} e^{T'A}$ se tiene

$$e^{TA} e^{-T'A} w = e^{TA} e^{-T'A} w$$

de aqui,

$$e^{-T'A} w = e^{-TA} w,$$

de donde

$$e^{TA} w = e^{TA} w,$$

por lo tanto,

$$\varphi(T', w) = \varphi(T, w).$$

Si ahora suponemos que $\varphi(T', w) = \varphi(T, w)$
entonces,

$$e^{T'A} w = e^{TA} w$$

de aquí,

$$e^{-T'A} e^{T'A} w = e^{-T'A} e^{TA} w$$

luego,

$$w = e^{-T'A} e^{TA} w,$$

$$w = e^{(T-T')A} w$$

Así,

$$\varphi(T-T', w) = w$$

y, por lo tanto,

$$T-T' \in G_w.$$

||.

De este modo, obtenemos una inmersión inyectiva de \mathbb{C}/G_w sobre la órbita $O\varphi_w = \varphi_w$ de w :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\bar{i}_w} \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \\ T &\longmapsto \varphi(T, w): \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \\ &\text{para } w \text{ fijo.} \end{aligned}$$

$$\mathbb{C}/G_w \xrightarrow{\bar{i}_w} O\varphi_w$$

Tenemos que \bar{i}_w es inyectiva pues $\varphi(T, w) = \varphi(T', w)$ si y sólo si $T-T' \in G_w$.

Veamos con detenimiento que es G_w :

Sea $T \in G_w$, donde $w = (w_1, \dots, w_n)$

entonces

$$\varphi(T, w) = (e^{A_1 T} w_1, \dots, e^{A_n T} w_n) = (w_1, \dots, w_n).$$

Esta igualdad nos dice que para toda

$j, j=1, \dots, n$ debe suceder que

$$e^{A_j T} w_j = w_j$$

lo cual implica que $e^{A_j T} = 1$ si $w_j \neq 0$.

Así, $A_j T = 2\pi i m$ para $m \in \mathbb{Z}$ y

$$T = \frac{2\pi i m}{\lambda_j} = \hat{\lambda}_j m.$$

Por consiguiente, $T \in \hat{\lambda}_j \mathbb{Z}$.

Ahora, en vista de que esto sucede para toda $j, j=1, \dots, n$ entonces si w no está en un eje coordenado, es decir, si $w \neq (0, \dots, 0, w_j, 0, \dots, 0)$ se tiene

que

$$\frac{T}{2\pi i} = \frac{m_1}{\lambda_1} = \dots = \frac{m_n}{\lambda_n}, \quad m_j \in \mathbb{Z} \text{ para}$$

$j=1, \dots, n$.

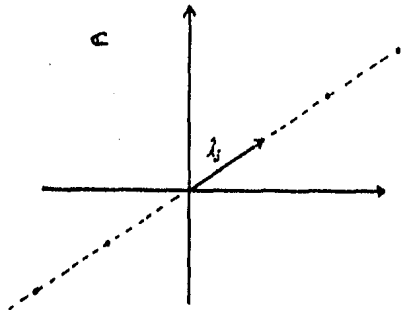
Así, $\lambda_k = \frac{m_k}{m_j}$ para $k \neq j$, que es uno

contradicción - pues suponimos que A es hiperbólico.

De este modo, si denotamos

$$G_{w_j} = \{T \in \mathbb{C} \mid T = 2\pi i \lambda_j^{-1} m, m \in \mathbb{Z}\},$$

$G_{w_j} = \hat{\lambda}_j \mathbb{Z}$ es un conjunto discreto en \mathbb{C} cuyos puntos se alinean en la dirección de $\hat{\lambda}_j$.



$$\text{Como } \varphi \text{ es uníval, } G_w = \bigcap_{j=1}^n G_{w_j}.$$

Si w no está en alguno de los ejes

$$G_w = \bigcap_{j=1}^n G_{w_j} = \emptyset$$

Pues claramente si $k \neq j$ y $w_k \neq 0 \neq w_j$

$$G_{w_j} \cap G_{w_k} = \emptyset$$

EN CONCLUSIÓN, CUNCUER HOJA AJEUS A LOS ESPACIOS PROPIOS ES DIFEOMORFA A \mathbb{C} .

Los espacios propios son, en nuestro caso, los ejes:

$$E_j = \{z \in \mathbb{C}^n : A z = \lambda_j z\}$$

$$= \{(0, \dots, w_j, \dots, 0), w_j \in \mathbb{C}\}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Se tiene entonces que, para ellos,

$$G_{w_j} = \lambda_j \mathbb{Z} \text{ y } G_w = G_{w_j}$$

Así, las únicas órbitas cerradas son los ejes coordenados.

Suponemos ahora que $0 \leq \arg \lambda_1 < \dots < \arg \lambda_n < 2\pi$, y

consideraremos la intersección de una hoja L_w con el polígono B y veremos lo que esto significa en el plano de T .

Sea $G = G(z)$ la configuración más por los semiplanos α_j definidos como

$$\alpha_j = \{T \in \mathbb{C} \mid |z_j| \leq 1\}, j \in J(z)$$

donde $J(z) = \{j \mid z_j \neq 0\}$.

Así, para todo T en α_j se tiene que la hoja L_w cae dentro del cilindro T_j (excluyendo las hélices tales que $z_j = 0$), donde $L_w = OP_w$ está dada por

$$z_j = e^{i_j T} w_j \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

La frontera de α_j es precisamente el cilindro

$$\partial \alpha_j = \{T \in \mathbb{C} \mid |z_j| = 1\}, j \in J(z).$$

Supongamos por un momento que $\lambda_j = 1$ y sea $T \in \partial \alpha_j$, entonces $|e^{T} w_j| = 1$ es decir,

$$|e^T| |w_j| = 1$$

luego,
$$e^{\operatorname{Re} T} = |w_j|^{-1}$$

Así, si ahora hacemos $|w_j|^{-1} = e^{c_j}$, la igualdad anterior queda expresada como

$$e^{\operatorname{Re} T} = e^{c_j}$$

por lo tanto,

$$\operatorname{Re} T = c_j$$

y en consecuencia,

$$T = c_j + z n i t, t \in \mathbb{R}.$$

que es una recta real en la dirección del eje imaginario (que es la de λ_j , pues si $\lambda_j = 1, \lambda_j = 2\pi i$).

Ahora, si $T \in \alpha_j \cup \partial \alpha_j, |e^T w_j| \leq 1$ y, en consecuencia,

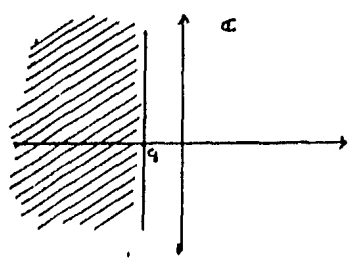
$$e^{\operatorname{Re} T} |w_j| \leq 1$$

luego
$$e^{\operatorname{Re} T} \leq e^{c_j}$$

y por lo tanto

$$\operatorname{Re} T \leq c_j.$$

Esta última desigualdad nos dice que toda T tal que su parte real sea menor que c_j , se encuentra en α_j , lo cual nos da inmediatamente un semiplano.



EN GENERAL, PARA λ_j ARBITRARIO SE TIENE QUE SI $T \in \partial \alpha_j$, ENTONCES

$$|e^{T\lambda_j} w_j| = 1,$$

$$|e^{T\lambda_j}| |w_j| = 1 \text{ y}$$

$$|e^{T\lambda_j}| = |w_j|^{-1} = e^{c_j}$$

es decir,

$$e^{\operatorname{Re} \lambda_j T} = e^{c_j}$$

luego,

$$\operatorname{Re} \lambda_j T = c_j$$

y, POR CONSIGUIENTE,

$$\lambda_j T = c_j + 2\pi i t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Así, } T = c_j \lambda_j^{-1} + \frac{2\pi i t}{\lambda_j}$$

y, POR LO TANTO,

$$T = c_j \lambda_j^{-1} + \lambda_j^{-1} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

QUE ES UNA RECTA REAL EN DIRECCIÓN DE λ_j

Así, si $T \in \alpha_j \setminus \partial \alpha_j$, ENTONCES

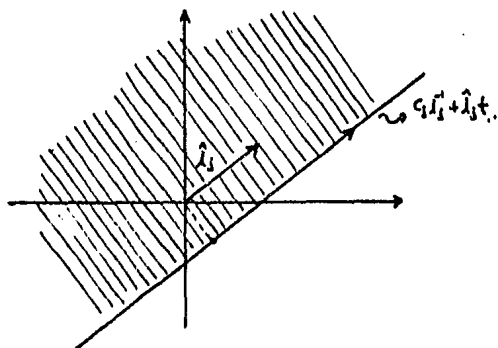
$$e^{\operatorname{Re} T \lambda_j} < e^{c_j},$$

LO QUE IMPLICA QUE

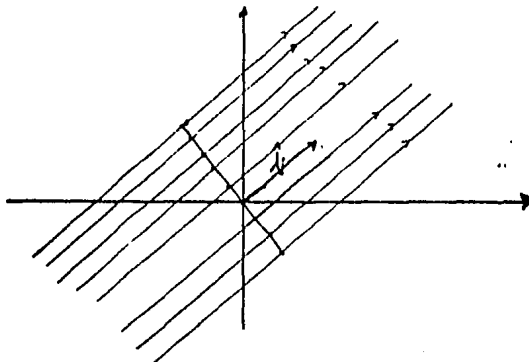
$$\operatorname{Re} T \lambda_j < c_j.$$

ESTA DESIGUALDAD NOS DA UN SEMIPLANO ROTADO SEGÚN $\arg \lambda_j$ QUE SE LOCALIZA A LA IZQUIERDA DE LA RECTA ORIENTADA

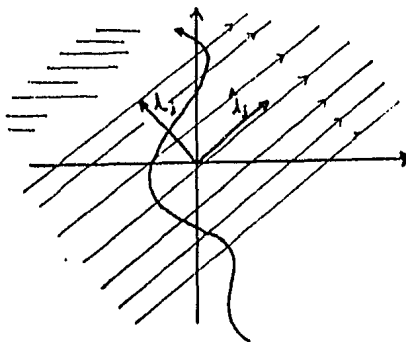
$$c_j \lambda_j^{-1} + \lambda_j^{-1} t.$$



PAR CADA REAL c_j TENEMOS ASOCIADA UNA ÚNICA RECTA y, POR CONSIGUIENTE, UNA FAMILIA DE \mathbb{C} POR RECTAS EN LA DIRECCIÓN DE λ_j .



CADA UNA DE ESTAS RECTAS REPRESENTA UNA CURVA EN UN CILINDRO. MOVERSE EN \mathbb{C} POR MEDIO DE UNA CURVA QUE VAYA ATRAVESANDO TODAS LAS RECTAS, ES IR PASANDO DE CILINDRO EN CILINDRO (EL MODO MÁS EFICIENTE ES MEDIANTE UNA RECTA EN DIRECCIÓN DE λ_j)



$$\text{Sea } \Gamma_j^{e^{\tau_0}} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| = e^{\tau_0}\}.$$

TOMAREMOS UN PUNTO EN Γ_j y UNA SÁBITA QUE PASE POR ÉL y VIREMOS EL MODO DE LLEVAR UNA CURVA EN Γ_j A UNA EN $\Gamma_j^{e^{\tau_0}}$.

Sea $w \in \Gamma_j$, ENTONCES $|w_j| = 1$

QUEREMOS QUE PARA $\tau_0 \in \mathbb{R}$ FIJO,

$$|z_j| = |e^{T\lambda_j} w_j| = e^{\tau_0}.$$

LO ANTERIOR IMPLICA QUE $|e^{T \lambda_j}| = |w_j| = e^{z_0}$,
 PERO SABO QUE $|w_j| = 1$, $|e^{T \lambda_j}| = e^{z_0}$.

Así,
 $e^{\operatorname{Re} T \lambda_j} = e^{z_0}$,
 DE DONDE SE TIENE QUE

$$\operatorname{Re} T \lambda_j = z_0$$

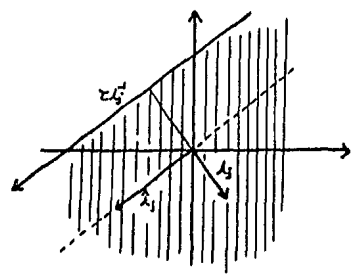
LUEGO,

$$T = z_0 \lambda_j^{-1} + \frac{2\pi i t}{\lambda_j}$$

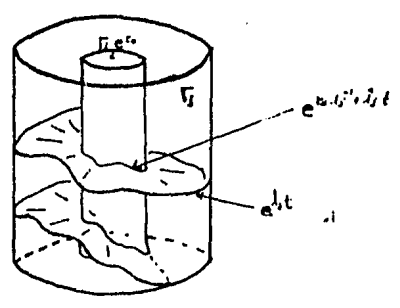
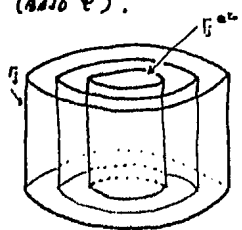
Y, POR LO TANTO,

$$T = z_0 \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t.$$

LA PARTE DE LA DROTA QUE CAE DENTRO
 DEL CILINDRO Γ_j SE ENCUENTRA REPRESENTA-
 DADA EN \mathbb{C} POR EL SEMIPLANO DETERMINA-
 DO POR LA RECTA $T = \hat{\lambda}_j t$ Y, LA PARTE
 QUE CAE DENTRO DEL CILINDRO $\Gamma_j^{e^{z_0}}$, POR
 EL SEMIPLANO DETERMINADO POR LA RECTA
 $T = z_0 \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t$.



Así, si tomamos $0 \leq z \leq z_0$ y $T = T(z)$
 TAL QUE $T = z \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t$, TENDRÍAMOS QUE
 T, DE ESTE MODO DEFINIDA, LLEVA A LA CUR-
 VA DE INTERSECCIÓN DE \mathcal{L}_w CON Γ_j A LA
 CURVA DE INTERSECCIÓN DE \mathcal{L}_w CON
 $\Gamma_j^{e^{z_0}}$ (RADIO φ).



EN GENERAL, PARA PASAR DE UNA CURVA DADA
 POR LA INTERSECCIÓN $\mathcal{L}_w \cap \Gamma_j^{e^{z_0}}$ A OTRA
 DADA POR LA INTERSECCIÓN $\mathcal{L}_w \cap \Gamma_j^{e^{z_1}}$ PO-
 DEMOS TOMAR

$$T = T(s, t) = (z_1 s + (1-s) z_0) \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t$$

PARA $s \in [0, 1]$ Y $t \in \mathbb{R}$, DE MODO
 QUE,

$$T(0, t) = z_0 \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t \quad \text{Y}$$

$$T(1, t) = z_1 \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j t.$$

AHORA NOS PREGUNTAMOS QUÉ SIGNIFICA
 EL HECHO DE QUE $\operatorname{Re} T \lambda_j$ SEA MENOR QUE
 CERO, Y QUÉ SIGNIFICA QUE $\operatorname{Re} T \lambda_j$ SEA
 MAYOR QUE CERO:

SEAN $T = r e^{i\alpha}$ Y $\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j}$

ENTONCES,

$$\operatorname{Re} T \lambda_j = \operatorname{Re}(r \rho_j e^{i(\alpha + \theta_j)})$$

$$= r \rho_j \cos(\alpha + \theta_j).$$

Así, si $\operatorname{Re} T \lambda_j < 0$, SE TIENE QUE

$$r \rho_j \cos(\alpha + \theta_j) < 0$$

Y POR TANTO,

$$\pi/2 < \alpha + \theta_j < 3/2 \pi$$

LUEGO,

$$\pi/2 - \theta_j < \alpha < 3/2 \pi - \theta_j.$$

ANÁLOGAMENTE, SI $\operatorname{Re} T \lambda_j > 0$,

$$-\pi/2 < \alpha + \theta_j < \pi/2$$

Y, POR CONSIGUIENTE,

$$-\pi/2 - \theta_j < \alpha < \pi/2 - \theta_j.$$

Aquí queda nuevamente reafirmado el hecho de que la posición de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ juega un papel primordial en el comportamiento de las hojas de la foliación $\mathcal{F}(A)$.

Si $\text{Re } T\lambda_j < 0$, $e^{\text{Re } T\lambda_j} < 1$
LUEGO,
 $|e^{T\lambda_j} w_j| = e^{\text{Re } T\lambda_j} |w_j| < |w_j|$,
POR LO TANTO,
 $|e^{T\lambda_j} w_j| < |w_j|$;

EN ESTE CASO, HAY CONTRACCIÓN EN LA j -ÉSIMA COORDENADA.
ANÁLOGAMENTE, SI $\text{Re } T\lambda_j > 0$, ENTONCES

$|e^{T\lambda_j} w_j| > |w_j|$
ES DECIR, HAY EXPANSIÓN EN LA j -ÉSIMA COORDENADA.

a) Supongamos $w_j \in \Gamma_j$ y sea T_0 tal que $\text{Re } T_0 \lambda_j < 0$. Si dejamos correr T en dirección tal que $\text{Re } T\lambda_j < 0$ digamos, $T = T_0 t$, $t \in \mathbb{R}^+$

TENEMOS QUE, CONFORME $t \rightarrow \infty$ $\text{Re } T\lambda_j < 0$ y POR CONSIGUIENTE

$|e^{T\lambda_j} w_j| \rightarrow 0$

ESTO NOS DICE QUE EN UN TIEMPO t INFINITAMENTE GRANDE, LA j -ÉSIMA COORDENADA ESTÁ MUY CERCANA AL CERO. Si esto sucediese para toda j , $j=1, \dots, n$ tendríamos que todos los puntos en

$B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sup_j |z_j| \leq 1, j=1, \dots, n\}$

NO SÓLO PERMANECEN EN B CONFORME $t \rightarrow \infty$, SINO QUE SON LLEVADOS BAJO φ AL ORIGEN.

b) Si $w_j \in \Gamma_j^e$ con $\epsilon < 1$ y T_0 es tal que $\text{Re } T_0 \lambda_j > 0$; si dejamos correr $T = T_0 t$ $t \in \mathbb{R}^+$, TENEMOS QUE CONFORME $t \rightarrow \infty$, $\text{Re } T\lambda_j \rightarrow \infty$ y, EN CONSECUENCIA,

$|e^{T\lambda_j} w_j| \rightarrow \infty$

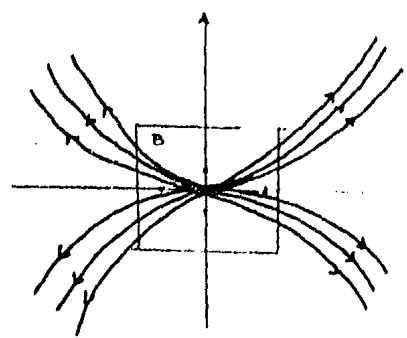
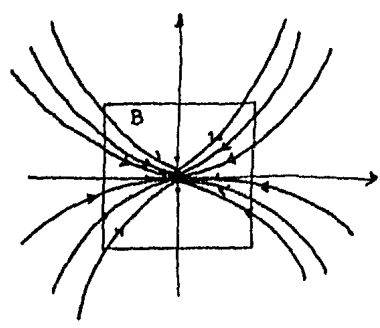
ESTO NOS DICE QUE EN UN TIEMPO FINITO T' , $e^{T'\lambda_j} w_j = z_j$, SE ENCUENTRA FUERA DEL CILINDRO Γ_j y, CONFORME t SE HACE INFINITAMENTE GRANDE, $|z_j| = |e^{T'\lambda_j} w_j|$ TAMBIÉN.

SI ESTO SUCEDIERE PARA TODA j , $j=1, \dots, n$ TENDRÍAMOS QUE PARA TODO PUNTO EN

$B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sup_j |z_j| \leq 1, j=1, \dots, n\}$

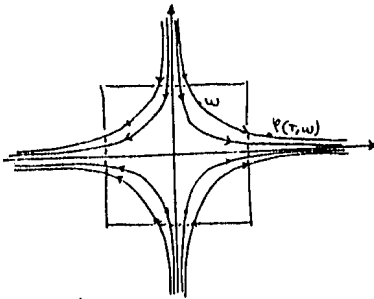
SE TIENE QUE, EN UN TIEMPO FINITO QUE-DA, BAJO φ FUERA DEL POLIDISCO B .

EN LOS DOS CASOS ANTERIORES, EL COMPORTAMIENTO ES SEMEJANTE AL DE NUMEROS O FUENTES EN \mathbb{R}^2 .



SUPONGAMOS AHORA QUE PARA $T \in \mathbb{C}$ SE TIENE QUE EXISTE $j = 1, \dots, l$, TAL QUE $\text{Re } \lambda_j T < 0$ Y $k = p+1, \dots, n$, TAL QUE $\text{Re } \lambda_k T > 0$. ESTO NOS DICE QUE, MIENTRAS LAS PRIMERAS COORDENADAS TIENDEN AL ORIGEN, LAS RESTANTES $n-l$, ABANDONAN EN UN TIEMPO FINITO AL POLIDISCO B Y SE ALEJAN DEL ORIGEN CONFORME $t \rightarrow \infty$

ESTE COMPORTAMIENTO ES DE TIPO SINA Y TRAE A LA MENTE EL COMPORTAMIENTO DE LAS HIPÉRBOLAS EN \mathbb{R}^2 .



AL DEFINIR LA CONFIGURACIÓN $G = G(z)$ CONSTRUIAMOS UN CONJUNTO $J(z) = \{j ; z_j \neq 0\}$ DE INDICES. ESTE CONJUNTO TIENE COMO FIN EXCLUIR AQUELLAS ÓRBITAS CONTENIDAS EN HIPERPLANOS PUES EN ESTOS CASOS ES NECESARIO PRESTAR ATENCIÓN A CIERTOS DETALLES QUE MÁS ADELANTE VEREMOS.

CONSTRUYAMOS AHORA EL DISCO CONVEXO $D(z)$ DADO POR

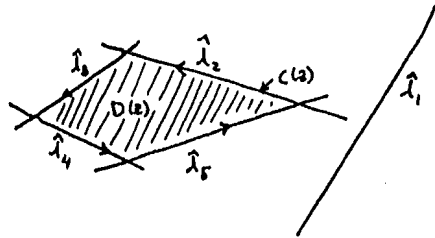
$$D(z) = \bigcap_j \alpha_j \subset \mathbb{C}$$

$$\text{DONDE } \alpha_j = \{T \in \mathbb{C} \cdot |z_j| \leq 1\}, j \in J(z)$$

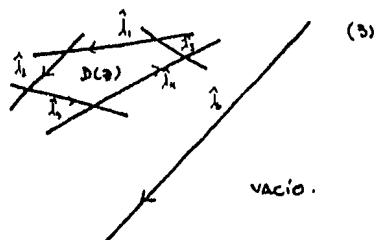
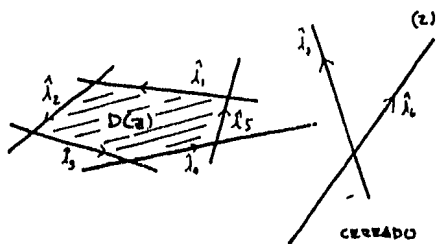
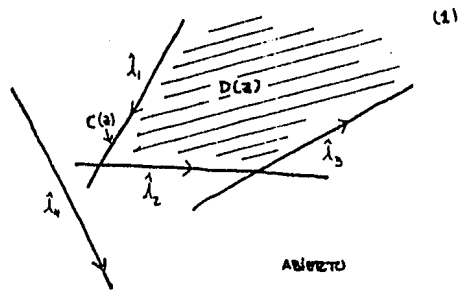
$D(z)$ REPRESENTA, EN T , LA INTERSECCIÓN DE LA HOJA P_w CON EL POLIDISCO B .

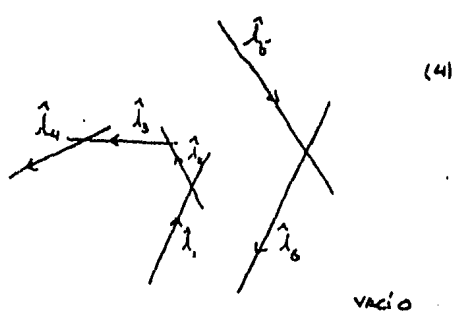
SEA $C(z) = \partial D(z)$ EL POLÍGONO CONVEXO ORIENTADO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE LAS l FRONTERAS $\partial \alpha_j, j \in J(z)$ CUANDO ÉSTAS SON ARISTAS DE $C(z)$.

OBSERVAMOS QUE NO NECESARIAMENTE TODO $\partial \alpha_k$ ES FRONTERA DE $C(z)$:



Y QUE EL POLÍGONO $C(z)$ PUEDE SER ABIERTO, CERRADO O VACÍO.





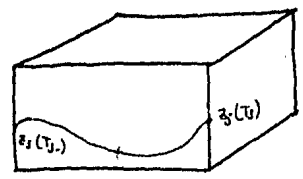
VERIFIQUEMOS QUE $2\pi \hat{n}_j$ ES JUSTAMENTE EL INCREMENTO DEL ÁNGULO DE z_j DE T_{j-} A T_j

$$\begin{aligned} z_j(T_{j-}) &= e^{T_{j-} \lambda_j} \omega_j \\ z_j(T_j) &= e^{T_j \lambda_j} \omega_j \\ &= e^{(T_{j-} + \hat{n}_j \lambda_j) \lambda_j} \omega_j \\ &= e^{\lambda_j T_{j-} + i 2\pi \hat{n}_j} \omega_j \end{aligned}$$

POR LO TANTO,

$$z_j(T_j) = z_j(T_{j-}) e^{i 2\pi \hat{n}_j}$$

ESTO CORRESPONDE EN B A UN CAMBIO DE "TAPA"



EN (1) Y (2) SE TIENE QUE, PARA TODA $T \in D(z)$, LA HOJA CAE DENTRO DE B . EN (3), CUANDO T ESTÁ EN EL POLÍGONO FORMADO POR $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_5$, ENTONCES LAS 5 COORDENADAS z_1, \dots, z_5 CAEN DENTRO DE LOS CILINDROS $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ MIENTRAS QUE LA SEXTA NO (Y VICEVERSA). EN (4) CUANDO T ESTÁ EN LA INTERSECCIÓN DE α_5 Y α_6 SE TIENE QUE z_5 Y z_6 ESTÁN EN Γ_5 Y Γ_6 RESPECTIVAMENTE, MIENTRAS QUE z_1, \dots, z_4 NO ESTÁN EN $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$.

Sea $I(z) \subset J(z)$ el conjunto de índices j en $J(z)$ tales que $\partial \alpha_j$ es arista de $C(z)$.

Denotamos T_j, T_{j-} a los vértices de la arista $\partial \alpha_j$ donde j es el sucesor cíclico de j_- en $I(z)$.

Escribamos $T_j = T_{j-} + \hat{n}_j \hat{\lambda}_j$

La configuración total $G(z)^*$ está dada por los semiplanos (con fronteras orientadas) α_j para $j \in J(z)$ y el conjunto de puntos $T \in \partial \alpha_j$ tales que $z_j \in \mathbb{R}$, es decir, tales que $z_j = \pm 1$. Estos puntos T tienen entonces como imagen puntos dentro y fuera de B tales que la j -ésima coordenada es ± 1 (Recordar las homomorfías H_j).

si $z_j = 1$

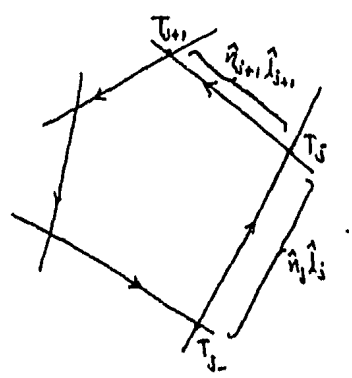
entonces, $e^{T \lambda_j} \omega_j = 1$.

Así, si $|\omega_j|^{-1} = e^{c_j}$

se tiene $T \lambda_j = c_j + i 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, y

portanto, $T = c_j \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j m$.

La siguiente propiedad nos resultará útil, más adelante, para determinar el comportamiento de las hojas al intersectar el polígono B :



$T_j - T_{j-} = \hat{n}_j \hat{\lambda}_j = \partial \alpha_j \cap C(z)$.

- PROPIEDAD (*)

Denotaremos η_j a los enteros m tales que z_j es real en la arista $T_j - T_j$ (es decir, cuando $z_j = 1$ en $T_j - T_j$). Vamos a demostrar que $\eta_j \leq \hat{\eta}_j + 1$.

Si $T \in \partial \alpha_j$ entonces $T = c_j \lambda_j^{-1} + t \hat{\lambda}_j$.
Ahora, puesto que $T_j = T_{j-1} + \hat{\eta}_j \hat{\lambda}_j$,
se tiene que

$T = T_{j-1} + t_j \hat{\lambda}_j$, para $0 \leq t_j \leq \hat{\eta}_j$
representa juntamente la arista $T_{j-1} T_j$.
Vamos a comparar a T en \mathbb{C} tal que $|z_j(T)| = 1$ y a T en la arista $T_{j-1} T_j$.

Supongamos entonces que $T = T_{j-1} + t \hat{\lambda}_j$,
 $0 \leq t_j \leq \hat{\eta}_j$ y $T = c_j \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j \eta_j$
entonces,

$$T_{j-1} + t_j \hat{\lambda}_j = c_j \lambda_j^{-1} + \hat{\lambda}_j \eta_j$$

lo que implica que

$$t_j \hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_j \eta_j$$

y

$$t_j = \eta_j.$$

Así, puesto que $t \leq \hat{\eta}_j$

$$\hat{\eta}_j \geq \eta_j$$

y, en consecuencia,

$$\hat{\eta}_j + 1 > \eta_j$$

II.

- Afirmación:

Si el polígono $C(z)$ es acotado y huecos $\hat{\eta}_j = 0$ para $j \notin I(z)$, entonces $\sum_j \hat{\eta}_j \hat{\lambda}_j = 0$.

Demostración:

Puesto que $\hat{\eta}_j \hat{\lambda}_j = T_j - T_{j-1}$.

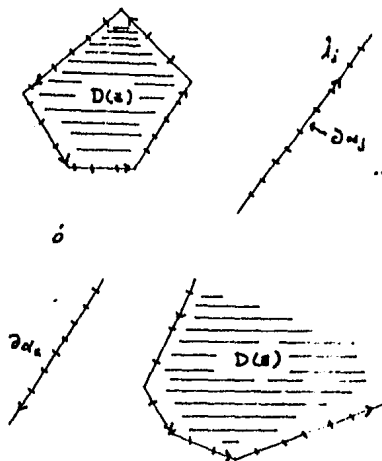
$$\sum_{j=2}^n \hat{\eta}_j \hat{\lambda}_j = \sum_{j=1}^n T_j - T_{j-1}$$

$$= T_n - T_1$$

Como $C(z)$ es cerrado, $T_n = T_1$ y por lo tanto, $T_n - T_1 = 0$

II.

La configuración $G(z)^*$ se ve como



La configuración $G(z)^*$ debe ser considerada modulo traslaciones de \mathbb{C} .

- LEMA - 2.3

Toda configuración completa $G(z)^*$ que correspondo a $\hat{\lambda} = \{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n\}$ determina una única hoja. Un punto $T \in \mathbb{C}$ determina un único punto z en dicha hoja.

Demostración:

Si α_j no está en $G(z)$ entonces $z_j = 0$.
Si se conoce z_j en algún punto de la hoja (de hecho se sabe que $z_j = 1$ en los puntos de $G(z)^*$ marcados sobre $\partial \alpha_j$) entonces la expresión

$$z_j = e^{i_j T} w_j$$

determina z_j para cualquier punto T en \mathbb{C} . Como esto es para toda j , $j=1, \dots, n$, dado T , el punto $z = z(T)$ y su hoja quedan determinadas II.

ANTES DE ENUNCIAR EL SIGUIENTE LEMA QUE CLASIFICA LOS TIPOS DE RAÍZES QUE PUEDEN ENCONTRARSE CUANDO SE TIENE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL TIPO

$$\frac{dz}{dT} = A \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad T \in \mathbb{C}$$

DONDE

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \neq 0, \text{ PARA } j=1, \dots, n$$

$$\text{Y } k \neq j \Rightarrow \lambda_k / \lambda_j \notin \mathbb{R}.$$

(DESPUÉS VEREMOS QUE EL RESULTADO ES MÁS FUERTE),
VAMOS A VER LA RELACIÓN QUE GUARDAN

$$\hat{\lambda} = \{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n\} \text{ CON RESPECTO A}$$

$$\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ CUANDO SE TIENE LA CONDICIÓN}$$

$$0 \leq \arg \hat{\lambda}_1 < \arg \hat{\lambda}_2 < \dots < \arg \hat{\lambda}_n < \pi.$$

$$\text{COMO } \hat{\lambda}_j = \frac{2\pi i}{\lambda_j}$$

ENTONCES ESCRIBIENDO A λ_j EN LA FORMA $\rho_j e^{i\theta_j}$ SE TIENE QUE

$$\hat{\lambda}_j = \frac{2\pi i}{\rho_j e^{i\theta_j}}$$

$$\text{COMO } i = e^{i\pi/2}$$

$$\text{ENTONCES } \hat{\lambda}_j = \frac{2\pi e^{i\pi/2}}{\rho_j e^{i\theta_j}}$$

$$\text{LUEGO, } \hat{\lambda}_j = \frac{2\pi}{\rho_j} e^{i(\pi/2 - \theta_j)},$$

POR LO TANTO,

$$\arg \hat{\lambda}_j = \pi/2 - \theta_j$$

DENOTEMOS $\hat{\theta}_j = \arg \hat{\lambda}_j$, DE MODO QUE

$$\hat{\theta}_j = \pi/2 - \theta_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

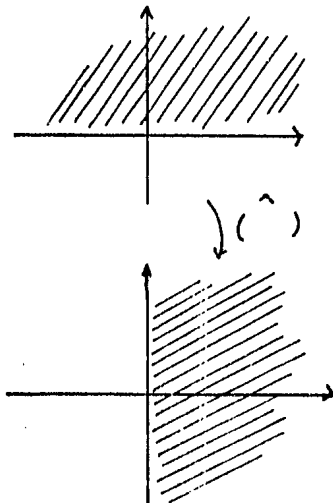
COMO HEMOS SUPUESTO QUE $0 \leq \hat{\theta}_j < \pi$
ENTONCES USANDO * TENEMOS QUE

$$0 \leq \pi/2 - \theta_j < \pi, \text{ PARA TODOS } j.$$

$$\text{ASÍ, } \theta_j > \frac{3}{2}\pi \quad \text{Y} \quad \theta_j \geq \pi/2$$

$$\text{I.E. } \pi/2 \leq \theta_j < 3/2\pi, \text{ CON } j=1, \dots, n.$$

ASÍ, AQUELLO QUE ESTABA EN EL SEMIPLANO SUPERIOR, PASA AL SEMIPLANO DE PARTE REAL POSITIVA



TEOREMA - 2.9 (DE CLASIFICACIÓN DE LAS HOJAS).

Si A es hiperbólico, es decir, si $k \neq j$ implica que $\lambda_k / \lambda_j \notin \mathbb{R}$, entonces toda hoja de $F(A)$ (salvo $0 \in \mathbb{C}^n$) es de uno de los siguientes tipos:

- i) UN EJE COORDENADO (sin el cero, $0 \in \mathbb{C}^n$) si el polinomio $C(z)$ es una línea. Hay n ejes.
- ii) UNA HOJA DE BIEGEL, UN ENCAJE CERRADO DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}^n , CON $C(z)$ ALOTTADO O VACÍO EN UNO DE QUE $0 \in \mathcal{H}(\{\hat{\lambda}_j; j \in J(z)\})$
- iii) UNA HOJA DE POINCARÉ, UNA INMERSIÓN DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}^n , TRANSVERSAL A CADA ESFERA $\text{sup } |z_j| = r > 0$, CON $C(z)$ NO ALOTTADO, EN CASO DE QUE $0 \notin \mathcal{H}(\{\hat{\lambda}_j; j \in J(z)\})$.

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGAMOS $z_j \neq 0$ PARA TODA j Y $0 \notin \mathcal{H}(\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n\})$, $n \geq 2$. PODEMOS ENTONCES SUPONER QUE

$$0 \leq \arg \hat{\lambda}_1 < \arg \hat{\lambda}_2 < \dots < \arg \hat{\lambda}_n < \pi$$

$$\text{SEA } \hat{\gamma}_j = \arg \hat{\lambda}_j - \arg \hat{\lambda}_{j-1}$$

(CLARAMENTE $\hat{\gamma}_j < \pi$ PARA TODA $j=1, \dots, n$).

SI $C(z)$ FUERA UN POLIGONO ALOTTADO, LA SUMA DE SUS ÁNGULOS INTERNOS SATISFARÍA LA RELACIÓN

$$\sum_{j=2}^n \hat{\gamma}_j = (n-2)\pi$$

ES DECIR,

$$\sum_{j=2}^n \arg \hat{\lambda}_j - \arg \hat{\lambda}_{j-1} = (n-2)\pi$$

LUEGO,

$$\arg \hat{\lambda}_n - \arg \hat{\lambda}_1 = (n-2)\pi;$$

SIN EMBARAZO, COMO $\arg \hat{\lambda}_k - \arg \hat{\lambda}_j < \pi$ PARA TODA j DISTINTA DE k , ENTONCES $\arg \hat{\lambda}_n - \arg \hat{\lambda}_1 < \pi$ Y POR CONSIGUIENTE n DEBE SER IGUAL A DOS.

DE ESTE MODO, $\arg \hat{\lambda}_n - \arg \hat{\lambda}_1 = 0$

$$\text{Y } \arg \hat{\lambda}_n = \arg \hat{\lambda}_1,$$

LO CUAL IMPLICA QUE $\hat{\lambda}_1$ Y $\hat{\lambda}_n$ SE ENCUENTRAN ALINEADOS POR UNA RECTA QUE PARA POR EL ORIGEN LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN.

ASI, $C(z)$ ES NO ALOTTADO (LOS SUJOS PLANOS α_j TIENEN INTERSECCIÓN NO ALOTTADA).

HEMOS SUPUESTO QUE $0 \leq \hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 < \dots < \hat{\theta}_n < \pi$ PONDE $\hat{\theta}_j = \arg \hat{\lambda}_j$. ASI, PUESTO QUE $\hat{\theta}_n < \pi$ EXISTE $\mu \in \mathbb{C}$ TAL QUE

$$\hat{\theta}_n < \arg \mu < \pi$$

LO CUAL IMPLICA QUE

$$\arg \mu - \hat{\theta}_n > 0$$

ASI, RECORDANDO LA RELACIÓN (*) SE TIENE

$$\arg \mu - (\pi/2 - \theta_n) > 0$$

LUEGO,

$$\arg \mu + \theta_n > \pi/2.$$

POR OTRA PARTE,

$$0 < \hat{\theta}_n < \arg \mu < \pi$$

IMPLICA QUE

$$\arg \mu - \hat{\theta}_n < \pi,$$

ASI, USANDO NUEVAMENTE LA RELACIÓN (*) SE TIENE QUE

$$\arg \mu - (\pi/2 - \theta_n) < \pi,$$

LUEGO,

$$\arg \mu + \theta_n < \frac{3}{2}\pi.$$

DE ESTA FORMA TENEMOS QUE

$$\pi/2 < \arg \mu + \theta_n < 3\pi/2$$

Y, POR LO TANTO,

$$\text{Re } \mu \lambda_n < 0$$

ASI, PARA $T = \mu t$, SI ELLA Ψ_μ , $\Psi_\mu(t, z) = (e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ INCLUIDO POR Ψ , TIENE TODOS SUS VALORES PROPIOS CON PARTE REAL NEGATIVA, ES DECIR, $\text{Re } (\mu \lambda_j) < 0$ PARA TODA $j, j=1, \dots, n$.

Por tanto, $\mathcal{P}_\mu(t, z)$ es estructural y, por el lema 2.4,
es transversal a las esferas $S_r = \{z \cdot \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = r\}$

Otra manera de argumentar sin apejar al lema 2.4
es:

$\operatorname{Re} \mu_j < 0$, con $j, j=1, \dots, n$
implica

$\operatorname{Re}(\mu_j t + d_j) < 0$, para $t > k_j > 0$, $d_j \in \mathbb{R}$ fijo.

Así,

$$\operatorname{Re}(\mu_j t + d_j) \rightarrow -\infty \text{ si } t \rightarrow \infty$$

sea $d_j \cdot |w_j| = e^{d_j}$, entonces

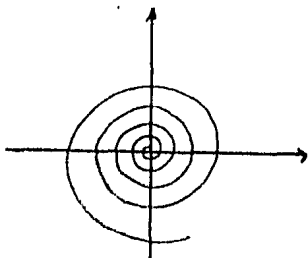
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_j t + d_j) &= \ln(e^{\operatorname{Re} \mu_j t + d_j}) \\ &= \ln e^{\operatorname{Re} \mu_j t} |w_j| \\ &= \ln |z_j| \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \ln |z_j| = \ln |z_j(\mu t)| \rightarrow -\infty \text{ si } t \rightarrow \infty$$

luego, $|z_j| \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y lo hace exponen-
cialmente $\forall j, j=1, \dots, n$.

Por tanto, $z = z(\mu t)$ es transversal a todas las esferas
 $E_r = \{z \in \mathbb{C} \cdot \sup |z_j| = r\}$.

Por otra parte, $z_j = z_j(t, \mu) = |z_j(t, \mu)| e^{i\theta_j t}$,
lo que implica que, conforme $t \rightarrow \infty$
 $|z_j(\mu t)| \rightarrow 0$, mientras que $e^{i\theta_j t}$ pro-
duce una rotación que hace que la so-
lución $z_j = z_j(t, \mu)$ tenga un comporta-
miento espiral alrededor del cero $\forall j$,
 $j=1, \dots, n$.



Puesto que $\forall j, j=1, \dots, n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_j(t, \mu) = 0$

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\mu(t, w) = 0$, que implica

que $0 \in \mathbb{C}^n$ es un punto de acumulación de
la hoja. Así, por todo lo que hemos visto,
se tiene una hoja de Poincaré.

Si $z_j = 0$, como $0 \notin \mathcal{H}(\{\lambda_j; z_j \neq 0\})$
el argumento anterior se repite exactamente
igual (en un momento haremos ciertas obser-
vaciones al respecto).

— Si $C(z)$ es una recta real, $C(z) = a + bt$
 $a, b \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(a+bt, w) = (e^{\lambda_1(a+bt)/w_1}, \dots, e^{\lambda_n(a+bt)/w_n})$$

Si suponemos $z_j, z_k \cdot j, k \in J(z)$
i.e. $z_j \neq 0 \neq z_k$, entonces

$$\left| e^{\lambda_j(a+bt)/w_j} \right| = 1 \quad \text{y} \quad \left| e^{\lambda_k(a+bt)/w_k} \right| = 1$$

es decir,

$$\left| e^{\lambda_j(a+bt)} \right| = e^{c_j} \quad \text{y} \quad \left| e^{\lambda_k(a+bt)} \right| = e^{c_k}$$

donde $e^{c_j} = |w_j|^{-1}$ y $e^{c_k} = |w_k|^{-1}$

luego,

$$\lambda_j(a+bt) = c_j + 2\pi i t \quad \text{y} \quad \lambda_k(a+bt) = c_k + 2\pi i t.$$

$$\lambda_j a = c_j \quad \text{y} \quad \lambda_k a = c_k.$$

$$\text{Así, } a = \frac{c_j}{\lambda_j} = \frac{c_k}{\lambda_k}$$

y $\lambda_j/\lambda_k = c_j/c_k \in \mathbb{R}$ que es una contradicción.

Así, la única posibilidad es que la hoja sea
un eje, es decir, $z = (0, \dots, z_j(\pi), \dots, 0)$.
Hay n ejes coordenados.

— Por último vamos a ver el caso en
que $0 \in \mathcal{H}(\{\lambda_j; j \in J(z)\})$

Si $z \in \mathcal{H}(\{\hat{\lambda}_j; j \in J(z)\})$, entonces $C(z)$ es un polígono acotado o es vacío. En ambos casos, si tomamos N suficientemente grande, el conjunto $\{T; \sup |z_j| \leq N\}$ es un conjunto compacto y convexo en el plano T . Así, la función $\|z\| = \|z(T)\|$ toma un mínimo en $\{T; \sup |z_j| \leq N\}$; en consecuencia, la hoja es una hoja de Siegel.

Como marcamos en la página 45, tenemos que

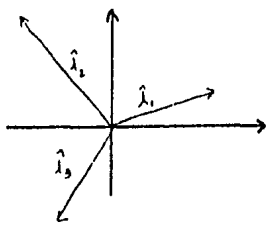
$$W = \{z \in \mathbb{C}^n; z \in \mathcal{H}(\{\hat{\lambda}_j; j \in J(z)\})\}$$

donde W es la unión de las hojas de Siegel.

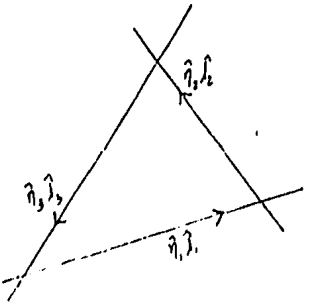
OBSERVACIONES:

- Si $C(z)$ es acotado, entonces está formado por, al menos, 3 aristas; esto nos dice que la intersección de la hoja con B se da en, a lo menos, tres tapas.

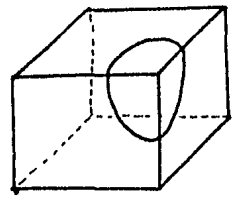
Por ejemplo para $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ como en la figura



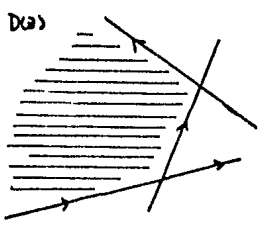
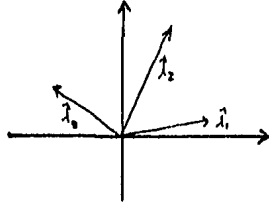
$D(z)$ es



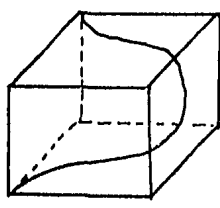
siendo la intersección de \mathcal{L}_W con B de la forma



Si $C(z)$ es no acotado, entonces la intersección de la hoja con B es en una, dos o más tapas.



siendo la intersección de \mathcal{L}_W con B de la forma:



- EN EL TEMA 3 SE HIZO LA CLASIFICACIÓN EN BASE A LOS CASOS $0 \in \mathcal{H}(\{\lambda_j; j \in J(\mathbb{R})\})$ Y $0 \notin \mathcal{H}(\{\lambda_j; j \in J(\mathbb{R})\})$ Y NO EN BASE A QUE $0 \in \mathcal{H}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$ Y $0 \notin \mathcal{H}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$, LA RAZÓN ES CLARA:

SUPONGAMOS POR UN MOMENTO QUE $0 \in \mathcal{H}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$ Y QUE $z_j = 0$, $z_k \neq 0$ PARA $k \neq j$. FORMEMOS LOS CONJUNTOS

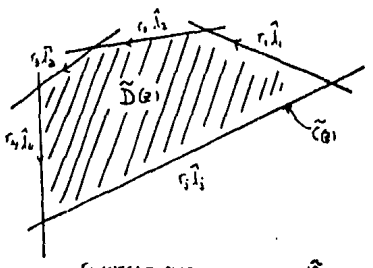
$$\tilde{\alpha}_j = \{T \in \mathbb{C} \mid |z_j| \leq 1\} \quad j=1, \dots, n$$

SIENDO EL DISCO CONVEXO $\tilde{D}(\mathbb{R})$ FORMADO POR

$$\tilde{D}(\mathbb{R}) = \bigcap_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j$$

$$\text{y } \tilde{C}(\mathbb{R}) = \partial(\tilde{D}(\mathbb{R})).$$

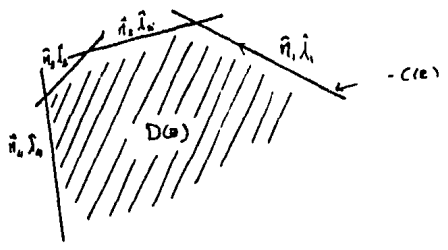
VAMOS A VER EN EJEMPLOS LO QUE PUEDE SUCEDER SEGÚN SEA $\tilde{C}(\mathbb{R})$:



r_j JUEGA EL PAPEL QUE JUEGA \tilde{r}_j PARA $C(\mathbb{R})$

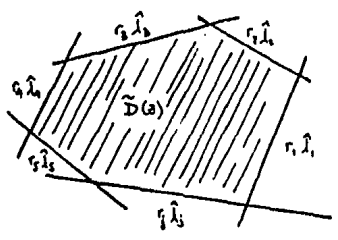
SABEMOS QUE POR HIPÓTESIS $z_j = 0$, LO QUE IMPLICA QUE LA POSICIÓN DE λ_j ES IRRELEVANTE PUES LA j -ÉSIMA COORDENADA ES SIEMPRE CERO AKA!, PENSAREMOS EN $C(\mathbb{R})$ EN LUGAR DE $\tilde{C}(\mathbb{R})$ (RECORDAMOS QUE $C(\mathbb{R})$ SE CONSTRUYE EXCLUYENDO LOS CASOS $z_j = 0$, SI TOMAR $\alpha_j = \{T \in \mathbb{C} \mid |z_j| \leq 1\}, j \in J(\mathbb{R})$ Y $C(\mathbb{R}) = \partial(\bigcap \alpha_j)$.

EL POLÍGONO $C(\mathbb{R})$ ES EN ESTE CASO:

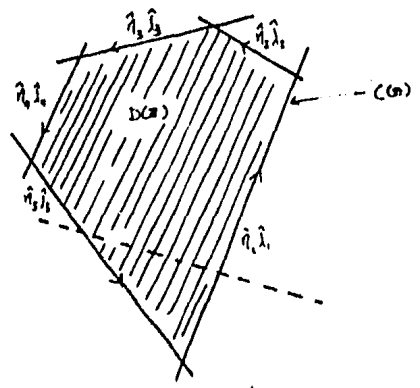


$C(\mathbb{R})$ ES NO ACOTADO, LO QUE NOS INDICA QUE SE TIENE UN NOO DE POINCARÉ (CONTRARIO A LO QUE PODÍAMOS HABER PENSADO SI VERA $\tilde{C}(\mathbb{R})$) Y ÉSTA ESTÁ CONTENIDA EN UN HIPERPLANO DE DIMENSIÓN $n-1$

SUPONGAMOS AHORA QUE $\tilde{C}(\mathbb{R})$ TIENE LA FORMA:



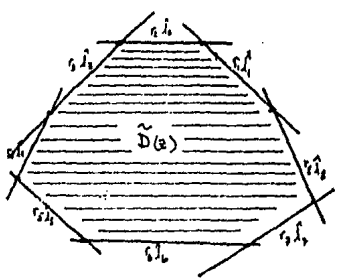
ENTONCES PUESTO QUE $z_j = 0$ POR HIPÓTESIS, PODRÍAMOS DEJAR DE CONSIDERAR A λ_j , QUEDANDO $C(\mathbb{R})$ COMO SIGUE:



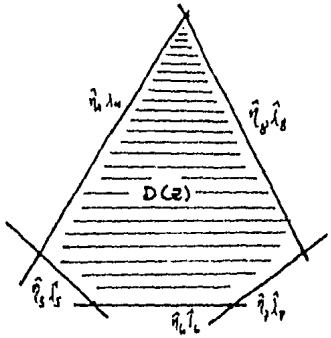
$C(z)$ es entonces cerrado y por consiguiente la hoja es de Siegel y está contenido en un hiperplano de dimensión $n-1$.

Si ahora pensamos en el caso en el que varios z_k sean cero, el razonamiento es semejante como veremos en el siguiente ejemplo:

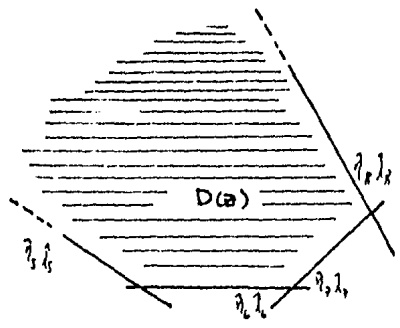
Pensemos que $\tilde{C}(z)$ tiene la forma



y z_1, z_2, z_3 fuesen cero y $z_j \neq 0, j=4, \dots, 6$ el polígono $C(z)$ quedaría de todos modos cerrado, lo que implica que se tiene una hoja de Siegel contenida en un hiperplano de dimensión 5.

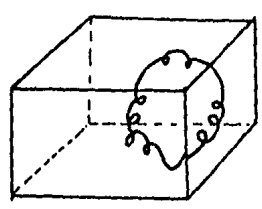


Sin embargo, si se tiene que además de z_1, z_2 y z_3 , también $z_4 = 0$ entonces el polígono $C(z)$ es no acotado y, en consecuencia se tiene una hoja de Poincaré contenida en un hiperplano de dimensión 4.



Así, como hemos visto, está justificada la clasificación del lema 3 en base a la condición $0 \in \mathcal{H}(\{z_j; j \in I(z)\})$ y $0 \notin \mathcal{H}(\{z_j; j \in J(z)\})$ y no en base a $0 \in \mathcal{H}(\{z_1, \dots, z_n\})$ y $0 \notin \mathcal{H}(\{z_1, \dots, z_n\})$.

- Otra observación es que, debido a la propiedad (*) que vimos en la página 53, se tiene que un punto en la curva que resulta de la intersección de una hoja con una tapa de la frontera del polidisco B es tal que, al caminar por dicha curva, se enrosca un número finito de veces alrededor de un eje antes de pasar a la siguiente tapa. Un esquema de ello es la siguiente figura.



Un hecho que se desprende inmediatamente del lema de clasificación es que $W = \{z: z \in \mathcal{H}(\{z_j; j \in J(z)\})\}$ que claramente es abierto y denso en \mathbb{C}^n .

- CAPÍTULO 3 -

INTRODUCCIÓN.

EN EL CAPÍTULO ANTERIOR DAMOS UNA CLASIFICACIÓN DE LOS DISTINTOS TIPOS DE HOJAS QUE PUEDEN OBTENERSE CUANDO F RESULTA SER UN CAMPO LINEAL HIPERBÓLICO Y ANALIZAMOS CON DETENIMIENTO EL COMPORTAMIENTO DE CADA UNA DE ÉSTAS. AHORA, NUESTRO OBJETIVO ES DETERMINAR CUÁNDO ES POSIBLE ESTABLECER UNA EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA ENTRE DAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DADAS, PUES ELLO NOS PERMITIRÁ SABER CUÁNDO LOS ESPACIOS DE ÓRBITAS ASOCIADAS A DICHAS ECUACIONES TIENEN LA MISMA DESCRIPCIÓN TOPOLÓGICA. EN ESTE SENTIDO, VEREMOS QUE SI EL ESPECTRO DE A ESTÁ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ, EL FLUJO Φ ASOCIADO A LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL $\frac{dz}{dt} = Az$ RESULTA SER ESTRUCTURALMENTE ESTABLE CON RESPECTO A PERTURBACIONES LINEALES Y ESTRUCTURALMENTE ESTABLE LOCALMENTE CON RESPECTO A PERTURBACIONES HOLONÓRFAS. POR OTRA PARTE, VEREMOS QUE CUANDO SE TIENEN DAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES $\frac{dz}{dt} = Az$ y $\frac{dz}{dt} = Mz$ CON $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$ Y A Y M ESTÁN EN EL DOMINIO DE SIEGEL, ÉSTAS RESULTAN SER TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES SI Y SOLO SI EXISTE UNA EQUIVALENCIA LINEAL REAL ENTRE M Y A . ASÍ, SI F ES EL CAMPO VECTORIAL DADO POR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $\frac{dz}{dt} = F(z) = Az$, DONDE EL ESPECTRO DE A ESTÁ EN EL DOMINIO DE SIEGEL, SE TIENE QUE F NO PUEDE SER ESTRUCTURALMENTE ESTABLE LOCALMENTE. EN EL CASO DE POINCARÉ, EL RESULTADO MENCIONADO FUE DEMOSTRADO POR GUCKENHEIMER EN 1977 Y, EN EL CASO DE SIEGEL, LA DEMOSTRACIÓN FUE DADA SIMULTANEAMENTE POR YU. S. ILYASHENKO Y POR C. CALUCCO, N. KUIPER Y J. PALIS EN 1977. CON ACIARDA QUE EN ESTE TRABAJO SE SEGUIRÁ EL ENFOQUE DE YU. S. ILYASHENKO.

POR ÚLTIMO VEREMOS QUE, CON LOS RESULTADOS MENCIONADOS EN EL PÁRRAFO ANTERIOR, PODREMOS DAR UN RESULTADO RELATIVO A LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL LOCAL EL CUAL NO HABRÁ DE RESTRINGIRSE SOLAMENTE A AQUELLAS FOLIACIONES ASOCIADAS A CAMPOS LINEALES EN \mathbb{C}^n , SINO QUE ABORCARÁ A LOS CAMPOS VECTORIALES HOLONÓRFOS CON SINGULARIDAD AISLADA EN EL ORIGEN ($0 \in \mathbb{C}^n$). PARA ELLO, HABRÁMOS DE RECURRIR A DOS TEOREMAS CENTRALES EN ESTA TEORÍA, EL TEOREMA DE POINCARÉ Y EL TEOREMA DE SIEGEL, LOS CUALES DATAN DE 1879 Y 1952 RESPECTIVAMENTE.

- CAPÍTULO 3 -

EN EL ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES, DESDE UN PUNTO DE VISTA CUALITATIVO, NOS INTERESA SABER CUÁNDO DOS ECUACIONES TIENEN UNA MISMA DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE SU ESPACIO DE ÓRBITAS. LA NOCIÓN DE EQUIVALENCIA TOPOLOGICA (VER PÁGINAS 14 Y 15) NOS PERMITE DAR RESPUESTA A ESTE PROBLEMA PUES ELLA ESTABLECE UNA RELACIÓN ENTRE LAS ÓRBITAS TENIENDO COMO BASE SU ESTRUCTURA GEOMÉTRICA.

EL LEMA 2.5 DEL CAPÍTULO ANTERIOR NOS PERMITIRÁ ESTABLECER UN RESULTADO QUE NOS HABLA NO SÓLO DE LA EQUIVALENCIA TOPOLOGICA ENTRE ECUACIONES CUYAS MATRICES ASOCIADAS ESTÁN EN EL DOMINIO DE POINCARÉ, SINO TAMBIÉN SOBRE LA ESTABILIDAD DE DICHAS ECUACIONES (VER PÁG. 15-20). MENCIONAREMOS EN DICHO TEOREMA UN RESULTADO RELATIVO A LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL CON RESPECTO A PERTURBACIONES LINEALES Y UN RESULTADO RELATIVO A LA ESTABILIDAD LOCAL CUANDO SE TRATA DE PERTURBACIONES HOLONOMORFAS.

EN EL PRIMER CASO, SI DOS MATRICES A Y \tilde{A} SON SUFICIENTEMENTE CERCANAS ENTONCES EXISTE UN HOMEOMORFISMO h DE \mathbb{C}^n QUE LLEVA ÓRBITAS DE Φ EN ÓRBITAS DE $\tilde{\Phi}$, DONDE Φ Y $\tilde{\Phi}$ SON LOS FLUJOS ASOCIADOS A LAS ECUACIONES $\frac{dx}{dt} = A(x)$ Y $\frac{dx}{dt} = \tilde{A}(x)$ RESPECTIVAMENTE. EN EL SEGUNDO CASO, SI \tilde{X} ES UN CAMPO VECTORIAL HOLONOMO MORFO CERCANO EN LA TOPOLOGÍA C^1 AL CAMPO $X(x) = Ax$ EN UNA VECINDAD U DEL ORIGEN, ENTONCES EXISTE UN HOMEOMORFISMO LOCAL h DEFINIDO EN UNA VECINDAD V DEL ORIGEN TAL QUE LLEVA LAS ÓRBITAS DE Φ EN LAS ÓRBITAS DE $\tilde{\Phi}$, DONDE $\tilde{\Phi}$ ES EL FLUJO ASOCIADO A LA ECUACIÓN $\frac{dx}{dt} = \tilde{X}(x)$.

ESTABLEZCAMOS A CONTINUACIÓN DICHO TEOREMA.

TEOREMA 3.1 (J. GUCKENHEIMER 1972) (1)

SEAN Φ EL FLUJO DEFINIDO POR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x \in \mathbb{C}^n$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ CON EL ESPECTRO DE A IGUAL A $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. SI A ESTÁ EN EL DOMINIO DE POINCARÉ (ES DECIR, SI $i \notin \sigma(A)$ IMPLICA $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ Y $0 \notin \sigma(A)$) ENTONCES Φ ES ESTRUCTURALMENTE ESTABLE CON RESPECTO A PERTURBACIONES LINEALES Y ESTRUCTURALMENTE ESTABLE LOCALMENTE CON RESPECTO A PERTURBACIONES HOLONOMORFAS.

DEMOSTRACIÓN:

SEAN $X(x) = Ax$ Y $\tilde{X}(x)$ EL CAMPO INDUCIDO EN LA ESFERA S_1 . POR EL LEMA 2.5 Y EL TEOREMA 1.5.3 (PÁGINAS 9 Y 22 RESPECTIVAMENTE) SE TIENE QUE \tilde{X} ES ESTRUCTURALMENTE ESTABLE. OBSERVAMOS QUE SI $\tilde{X}(x)$ ES UN CAMPO HOLONOMO MORFO C^1 CERCANO A $X(x)$ ENTONCES $\tilde{X}_1(x)$ SERÁ C^1 CERCANO A $X_1(x)$.

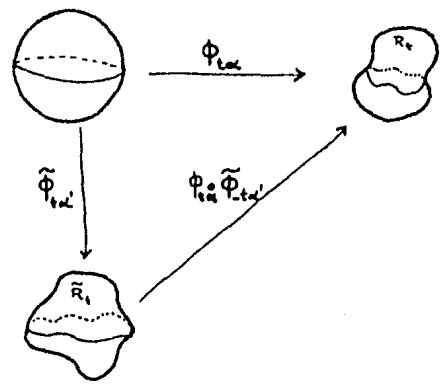
DADO QUE X_1 ES UN CAMPO ESTRUCTURALMENTE ESTABLE, EXISTE UNA EQUIVALENCIA TOPOLOGICA $h: S_1 \rightarrow S_1$ DE X_1 EN \tilde{X}_1 .

PENSEMOS PRIMERO EN EL CASO DE UNA PERTURBACIÓN LINEAL:

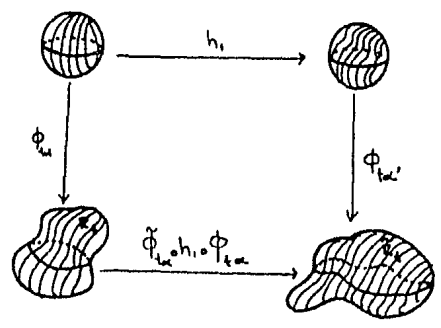
SEAN $X(x) = Ax$ Y $\tilde{X}(x) = \tilde{A}(x)$ CON A Y \tilde{A} EN EL DOMINIO DE POINCARÉ, ENTONCES EXISTEN α Y $\alpha' \in \mathbb{C}$ TALES QUE EL ESPECTRO DE αA Y EL ESPECTRO DE $\alpha' \tilde{A}$ ESTÁN EN EL SEMIPLANO CON PARTE REAL NEGATIVO. CONSIDEREMOS LOS FLUJOS Φ_α Y $\tilde{\Phi}_{\alpha'}$ Y DEFINAMOS LOS CONJUNTOS $R_\alpha = \Phi_\alpha(s_1) = \Phi(\alpha s_1)$ Y $\tilde{R}_{\alpha'} = \tilde{\Phi}_{\alpha'}(s_1) = \tilde{\Phi}(\alpha' s_1)$. (OBSERVAMOS QUE SI A Y \tilde{A} TUVIERAN MATRICES DIAGONALES $R_\alpha(\omega) = (e^{i\omega t}, \dots, e^{i\omega t})$ Y $\tilde{R}_{\alpha'}(\omega) = (e^{i\omega t}, \dots, e^{i\omega t})$ DONDE $\{|\lambda_i|, |\lambda'_i|, \dots, \dots\}$ SON LOS VALORES PROPIOS DE A Y \tilde{A} RESPECTIVAMENTE).

(1) ESTE RESULTADO PUEDE ENCONTRARSE EN GUCKENHEIMER J., "HOMOCLINIC POINTS AND HOMOCLINIC TORI IN THE POINCARÉ DOMAIN" COMMUNICATIONS MATHEMATICA 24 (1977) P. 1-10

TANTO R_t COMO \tilde{R}_t FORMAN, CADA UNO, UNA FAMILIA DE "ESFERAS" DISJUNTAS ANIDADAS, CUYA UNIÓN ES $\mathbb{C}^n - \{0\}$ Y QUE SE CONTRAJEN AL ORIGEN CONFORME $t \rightarrow +\infty$.



DEFINIMOS AHORA $h: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ COMO SIGUE:
 $h(0) = 0$
 $h|_{R_t} = \tilde{\phi}_{t, t'} \circ h_t \circ \phi_{t, t'}^{-1}: R_t \rightarrow \tilde{R}_t$
 h ESTÁ BIEN DEFINIDA PUES $\phi_{t, t'}(R_t) = S_t$



CLARAMENTE, h ES UN HOMEOMORFISMO QUE LLEVA LAS ÓRBITAS DE ϕ EN LAS ÓRBITAS DE $\tilde{\phi}$.

OBSERVAMOS QUE PARA EL CASO NO LINEAL (1) NO SE TIENE UN RESULTADO GLOBAL DE TRANSVERSALIDAD DE FLOW CON RESPECTO A LA ESFERA S_t (HECHO QUE FUE INDISPENSABLE EN LA DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.6), SIN EMBARGO, SI \tilde{X} ES UN CAMPO VECTORIAL HOLONOMOFO TAL QUE \tilde{X} ES UNA PEQUEÑA PERTURBACIÓN EN UNA VECINDAD DEL ORIGEN (ES DECIR, CONSIDERAMOS UN CAMPO HOLONOMOFO \tilde{X} CERCANO A X EN LA TOPOLOGÍA C^1 EN UNA VECINDAD DEL ORIGEN), SE TIENE QUE LA TRANSVERSALIDAD NO SE PIERDE SI AHORA PENSAMOS EN LAS ESFERAS S_t PARA t SUFICIENTEMENTE PEQUEÑA. ASÍ, PARA UNA t SUFICIENTEMENTE PEQUEÑA PODRÍAMOS TOMAR NUEVAMENTE LAS RECTAS PERDIDAS EN DIRECCIÓN DE α Y DE α' DE MODO QUE $\phi(S_t, t)$ Y $\tilde{\phi}(S_t, t')$ SE CONTRAJAN AL ORIGEN CONFORME t TIENDE A MÁS INFINITO ($t \rightarrow +\infty$). UTILIZANDO AHORA UN ARGUMENTO ANÁLOGO AL QUE DÍJIMOS ANTES EN UNA VECINDAD DEL ORIGEN Y CONSIDERANDO EL CAMPO INDUCIDO X_t PARA t SUFICIENTEMENTE PEQUEÑA, QUEDA DEMOSTRADA LA ESTABILIDAD LOCAL BAJO PERTURBACIONES HOLONOMOFAS.

//

HABRÍAMOS RESALTADO EL SIGUIENTE HECHO: SI CONSIDERAMOS LA CLASE Ψ DE FAMILIAS DE TODOS LOS CAMPOS VECTORIALES HOLONOMOFOS CON SINGULARIDAD AISLADA EN $0 \in \mathbb{C}^n$,
 (*) $\frac{dF}{dt} = F(z) = \sigma z + R(z) \in \mathbb{C}^n$, $F(0) = 0$, $\sigma = (DF_0)_z$, DONDE σ TIENE ESPECTRO $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; ENTONCES EL TEOREMA DE ESTABILIDAD DE GUCKENHEIMER NOS PERMITE AFIRMAR QUE SI F Y F' SON CAMPOS VECTORIALES HOLONOMOFOS CON SINGULARIDAD EN EL ORIGEN COMO EN (*) Y CON ESPECTRO $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ DE DF_0 Y $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}$ DE DF'_0 EN EL DOMINIO DE POINCARÉ, SE TIENE QUE LAS FAMILIAS $F(F)$ Y $F'(F')$ SON LOCALMENTE EQUIVALENTES.

(1) ES DECIR, EN EL CASO DE PERTURBACIONES NO LINEALES

NOS PREGUNTAMOS AHORA SI PODEMOS DAR UNA RELACION DE EQUIVALENCIA ENTRE DOS ECUACIONES DIFERENCIALES CUANDO ÉSTAS SON DEL TIPO DE SIEGEL (ES DECIR, CUANDO EL ESPECTRO DE UNA Y OTRA ESTÁ EN EL DOMINIO DE SIEGEL). LA RESPUESTA A NUESTRA PREGUNTA LA DA EL SIGUIENTE TEOREMA:

TEOREMA 3.2 (DE LADIS; DEM. IVASHENKO (1978). (1))

SEAN $\frac{dz}{dT} = \Lambda z$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{C}^n$
 Y $\frac{dw}{dT} = Mw$, $M = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$, $w \in \mathbb{C}^n$

DOS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL TIPO DE SIEGEL Y TALES QUE $j \neq k \Rightarrow \lambda_j \notin \mathbb{R}\lambda_k$ Y $\mu_j \notin \mathbb{R}\mu_k$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$. ENTONCES, TENEMOS QUE $\frac{dz}{dT} = \Lambda z$ Y $\frac{dw}{dT} = Mw$ SON TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES SI Y SÓLO SI $\hat{\Lambda}$ Y \hat{M} SON \mathbb{R} -LINEALMENTE EQUIVALENTES, ES DECIR, SI EXISTE $g \in GL(2, \mathbb{R})$ TAL QUE $\hat{\mu}_j = g \hat{\lambda}_j$, $\forall j = 1, \dots, n$, DONDE $\hat{\Lambda} = \{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n\}$ Y $\hat{M} = \{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n\}$.

LA IMPLICACIÓN "SI" DEL TEOREMA ES TRIVIAL Y PARA SU DEMOSTRACIÓN NOS REFERIMOS A LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN.

PROPOSICIÓN 3.3

SEA $\eta(\Lambda)$ LA CLASE DE EQUIVALENCIA DE Λ BAJO LA ACCIÓN DE $GL(2, \mathbb{R})$, ENTONCES LA TOPOLOGÍA DE $\mathcal{F}(\Lambda)$ ESTÁ TOTALMENTE DETERMINADA POR $\eta(\Lambda)$. (LAS HIPÓTESIS SOBRE Λ SON AQUÍ LAS MISMAS QUE EN EL TEOREMA).

(1) LADIS H. ENUNCIÓ ESTE TEOREMA EN 1977 Y FUE DEMOSTRADO EN EL MISMO AÑO POR YU. S. IVASHENKO EN SU ARTÍCULO "REMARKS ON THE TOPOLOGY OF SINGULAR POINTS OF ANALYTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE COMPLEX PLANE AND LADIS' THEOREM", FUNCTIONAL ANALYSIS AND APPLICATIONS (1977) P. 105-113. UN RESULTADO EQUIVALENTE PUEDE ENCONTRARSE EN LADIS H. "THE TOPOLOGY OF HOLOMORPHIC

DEMOSTRACIÓN:

SEAN $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ Y $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}$ Y SUPONGAMOS QUE EXISTE $g \in GL(2, \mathbb{R})$ TAL QUE $\hat{\lambda}'_j = g \hat{\lambda}_j$.

DEFINIMOS $h: (\mathbb{C}^n, \mathcal{F}(\Lambda)) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathcal{F}(\Lambda'))$ TAL QUE $h(e^{\lambda_j T} w_j, \dots, e^{\lambda_n T} w_n) = (e^{\lambda'_j T} w'_j, \dots, e^{\lambda'_n T} w'_n)$

DONDE $T'_j = g T_j$, $j = 1, \dots, n$

SI ESCRIBIMOS w_j COMO $w_j = e^{\alpha_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, ENTONCES POR w_j ENTENDEMOS $w'_j = e^{g \alpha_j}$. ASÍ, $h(e^{\lambda_j T} w_j, \dots, e^{\lambda_n T} w_n) = h(e^{\lambda'_j T + \alpha_j}, \dots, e^{\lambda'_n T + \alpha_n}) = (e^{\lambda'_j (g T_j + \alpha_j)}, \dots, e^{\lambda'_n (g T_n + \alpha_n)})$

OBSERVAMOS QUE, PUESTO QUE $\hat{\lambda}'_j = g \hat{\lambda}_j$ ENTONCES $\frac{2\pi i}{\lambda'_j} = g \frac{2\pi i}{\lambda_j}$

LO QUE IMPLICA, $\lambda'_j = g^{-1} \lambda_j$.

ASÍ, LA TRANSFORMACIÓN h NO HACE SINO EXPRESAR DE UNA MANERA DISTINTA UN MISMO PUNTO:

$$\begin{aligned} e^{\lambda'_j T'_j} w'_j &= e^{\lambda'_j T'_j} e^{g \alpha_j} \\ &= e^{(g \lambda_j) (g T_j + \alpha_j)} \\ &= e^{\lambda_j (T_j + \alpha_j)} \\ &= e^{\lambda_j T_j} w_j. \end{aligned}$$

EN PARTICULAR, PARA UN PUNTO EN UNA HOJA DE $\mathcal{F}(\Lambda)$ SE TIENE QUE

$$\begin{aligned} h(z(\tau)) &= h(e^{\lambda_1 T} w_1, \dots, e^{\lambda_n T} w_n) \\ &= (e^{\lambda'_1 T} w'_1, \dots, e^{\lambda'_n T} w'_n) \\ &= z(h(e)) \end{aligned}$$

La siguiente afirmación nos permitirá reducir la demostración de la parte "sólo si" del Teorema 3.2 al caso $n=3$.

Afirmación - B.4

Son equivalentes:

i) Existe $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación \mathbb{R} -lineal que lleva la colección $\mathcal{L}^{-1} = (\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ en la colección $\mathcal{M}^{-1} = (\mu_1^{-1}, \dots, \mu_n^{-1})$.

ii) El rango de la matriz $(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{M}^{-1}, \bar{\mathcal{L}}^{-1})$ es dos.

(Aquí estamos suponiendo que $j \neq k \Rightarrow \lambda_j \notin \mathbb{R}\lambda_k$ y $\mu_j \notin \mathbb{R}\mu_k$).

Demostración:

Veremos primero que (i) implica (ii).

Supongamos que existe $x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ tal

que $\mu_j^{-1} = x \lambda_j^{-1} \quad \forall j=1, \dots, n$.

si $\mu_j^{-1} = \alpha_j + i\beta_j$ y $\lambda_j^{-1} = a_j + ib_j$ con $\alpha_j, \beta_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, n$.

Entonces la expresión anterior puede reescribirse en la forma

$\alpha_j + i\beta_j = x_{11}a_j + x_{12}b_j + i(x_{21}a_j + x_{22}b_j)$
que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}$$

Así, la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \\ \mathcal{M}^{-1} \\ \bar{\mathcal{L}}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n \\ \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n \\ a_1 - ib_1, \dots, a_n - ib_n \end{bmatrix}$$

(i) Cuando escribimos \mathbb{C} , estamos entendiendo a \mathbb{C} "descartificado", es decir, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. En general se denota por $\mathbb{F} = \mathbb{F}_R$ a los espacios complejos de dimensión finita.

queda expresada en función de a_j y $b_j, j=1, \dots, n$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \\ \mathcal{M}^{-1} \\ \bar{\mathcal{L}}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n \\ x_{11}a_1 + x_{12}b_1 + i(x_{21}a_1 + x_{22}b_1), \dots, x_{1n}a_n + x_{12}b_n + i(x_{2n}a_n + x_{22}b_n) \\ a_1 - ib_1, \dots, a_n - ib_n \end{bmatrix}$$

si ahora multiplicamos la primera rengión $(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n)$ por el escalar

$\frac{x_{11} + x_{22} + i(x_{21} - x_{12})}{2}$ y el tercer

rengión $(a_1 - ib_1, \dots, a_n - ib_n)$ por el escalar $\frac{(x_{11} + x_{22}) - i(x_{21} - x_{12})}{2}$ y

sumamos ambos rengiones, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \\ \mathcal{M}^{-1} \\ \bar{\mathcal{L}}^{-1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n \\ \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n \\ \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n \end{bmatrix}$$

de donde se sigue inmediatamente que el rango de $(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{M}^{-1}, \bar{\mathcal{L}}^{-1})$ es dos.

Veremos ahora que (ii) implica (i).

Supongamos que el rango de $(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{M}^{-1}, \bar{\mathcal{L}}^{-1})$ es dos. Vamos a demostrar entonces que existe $g \in M(2, \mathbb{R})$ tal que $\mu_j^{-1} = g \lambda_j^{-1}$ para toda $j, j=1, \dots, n$.

El rango de $(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{M}^{-1}, \bar{\mathcal{L}}^{-1})$ es dos, entonces existen x y $y \in \mathbb{C}$ tal que $x\mathcal{L}^{-1} + y\bar{\mathcal{L}}^{-1} = \mathcal{M}^{-1}$

$x, y \in \mathbb{C}$ cualquiera puede escribirse en forma

matricial como $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}$ y y

como $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{bmatrix}$, donde $x = x_1 + iy_1$
 $y = y_1 + iy_2$.

DE ESTA FORMA, PARA CADA j , $j=1, \dots, n$ SE TIENE QUE

$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ -b_j \end{bmatrix}$$

ENTONCES,

$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_j + x_2 b_j \\ -x_2 a_j + x_1 b_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 a_j - y_2 b_j \\ -y_2 a_j - y_1 b_j \end{bmatrix}$$

LUEGO,

$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_j + y_1 a_j + x_2 b_j - y_2 b_j \\ -x_2 a_j - y_2 a_j + x_1 b_j - y_1 b_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 - y_2 \\ -x_2 - y_2 & x_1 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}$$

POR LO TANTO,

$$\text{SI } g = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 - y_2 \\ -x_2 - y_2 & x_1 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ENTONCES } \mu_j^{-1} = g \lambda_j^{-1} \quad \forall j=1, \dots, n.$$

VEREMOS AHORA QUE, PUESTO QUE LA AFIRMACIÓN ANTERIOR ES CIERTA, BASTA DEMOSTRAR EL TEOREMA (3.2) PARA $n=3$.

SUPONGAMOS POR UN MOMENTO VÁLIDO EL TEOREMA PARA $n=3$:

$$\text{SEAN } \frac{dz}{dt} = \Lambda z, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

$$\text{Y } \frac{dw}{dt} = M w, \quad M = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}, \quad w \in \mathbb{C}^n$$

DOS ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBÓLICAS, DEL TIPO DE SIEGEL, TALES QUE SUS FOLIAJONES $\mathcal{F}(\Lambda)$ Y $\mathcal{F}(M)$ SON TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES.

DENOTEMOS POR $\lambda_{(j,k,R)}$ A LA COLECCIÓN $\lambda_j, \lambda_k, \lambda_R$, CON $R \neq j \neq k$, $k \neq R$. PODEMOS REEscribir μ_1, \dots, μ_n EN FORMA TAL QUE SI h ES EL HOMOMORFISMO QUE LLEVA ÓRBITAS DE $\mathcal{F}(\Lambda)$ EN ÓRBITAS DE $\mathcal{F}(M)$, h RESTRICTO A LAS COORDENADAS j, k, R , ES EL HOMOMORFISMO QUE LLEVA LAS ÓRBITAS DE $\mathcal{F}(\lambda_{(j,k,R)})$ EN LAS DE $\mathcal{F}(\mu_{(j,k,R)})$.

LO ANTERIOR NOS DICE QUE $\mathcal{F}(\lambda_{(j,k,R)})$ ES TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTE A $\mathcal{F}(\mu_{(j,k,R)})$ Y, PUESTO QUE ASUMIMOS QUE EL TEOREMA ES VÁLIDO PARA $n=3$ TENEMOS QUE EXISTE $g \in M(2, \mathbb{R})$ TAL QUE $\mu_j^{-1} = g \lambda_j^{-1}$, $\mu_k^{-1} = g \lambda_k^{-1}$, $\mu_R^{-1} = g \lambda_R^{-1}$. Así, LA MATRIZ DE LA FORMA

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^{-1} & \lambda_k^{-1} & \lambda_R^{-1} \\ \mu_j^{-1} & \mu_k^{-1} & \mu_R^{-1} \\ \bar{\lambda}_j^{-1} & \bar{\lambda}_k^{-1} & \bar{\lambda}_R^{-1} \end{bmatrix}$$

TIENE RANGO DOS.

COMO ESTO SUCEDE PARA TODO j, k, R , $j, k, R \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k \neq R$, $j \neq R$, SE TIENE QUE LA MATRIZ

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{-1} & \lambda_n^{-1} \\ \mu_1^{-1} & \mu_2^{-1} & \dots & \mu_{n-1}^{-1} & \mu_n^{-1} \\ \bar{\lambda}_1^{-1} & \bar{\lambda}_2^{-1} & \dots & \bar{\lambda}_{n-1}^{-1} & \bar{\lambda}_n^{-1} \end{bmatrix}$$

TIENE RANGO DOS.

ASÍ, POR LA AFIRMACIÓN 3.3 EXISTE UNA TRANSFORMACIÓN \mathbb{R} -LINEAL $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ QUE LLEVA LA COLECCIÓN $\lambda^{-1} = (\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ EN LA COLECCIÓN $\mu^{-1} = (\mu_1^{-1}, \dots, \mu_n^{-1})$.

UNA VEZ VISTO LO ANTERIOR, PODEMOS PASAR A LA DEMOSTRACIÓN DE LA PARTE "SÓLO SI" DEL TEOREMA PARA EL CASO $n=3$.

NOTA: PUESTO QUE LA DEMOSTRACIÓN ES LARGA, ALGUNAS OTRAS CIENCIAS Y SECUENCIAS SE OMITEN BAJO (N) A CONTINUACIÓN REFERENCIAS A LA DEMOSTRACIÓN.

REFORMULAMOS EL TEOREMA PARA EL CASO $n=3$:

TEOREMA 33 (CASO $n=3$)

SEAN $\frac{dz}{dT} = \Lambda z$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{C}^3$

Y $\frac{dw}{dT} = Mw$, $M = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$, $w \in \mathbb{C}^3$

DOS ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBÓLICAS, DEL TIPO DE SIEGEL. ENTONCES $\frac{dz}{dT} = \Lambda z$

Y $\frac{dw}{dT}$ SON TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES SI Y SÓLO SI EXISTE $g \in GL(2, \mathbb{R})$ TAL QUE $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) = (g\lambda_1, g\lambda_2, g\lambda_3)$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

ENTONCES SI $\hat{\lambda}_j = 2\pi i \lambda_j^{-1}$ $j=1,2,3$ SE TIENE QUE $0 \in \mathcal{H}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$.

$0 \in \mathcal{H}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) \Rightarrow \exists$ UNA SUCECIÓN DE ENTEROS POSITIVOS, $(k_m^1, k_m^2, k_m^3) \in \mathbb{Z}_+$ TALES QUE

(*1) $(k_m^m, \hat{\lambda}) = k_m^1 \hat{\lambda}_1 + k_m^2 \hat{\lambda}_2 + k_m^3 \hat{\lambda}_3 \rightarrow 0$
SI $m \rightarrow \infty$.

SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD, SUPONEMOS QUE

$0 \leq \arg \hat{\lambda}_1 \leq \arg \hat{\lambda}_3 \leq \arg \hat{\lambda}_2 < 2\pi$.

ASIGNAMOS QUE LA HOLONOMÍA $H_1: F_1' \rightarrow F_1'$ ES DE TIPO SILLA PUES

$H_1(z_1, z_2, z_3) = (z_1, e^{2\pi i \lambda_2 / \lambda_1} z_2, e^{2\pi i \lambda_3 / \lambda_1} z_3)$

(*2) Y $Re(2\pi i \lambda_2 / \lambda_1) > 0$ MIENTRAS QUE

$Re(2\pi i \lambda_3 / \lambda_1) < 0$.

SEA $\Sigma_1 = \{z; z_i = 1, |z_k| \leq 1, k=2,3\} \subset \Gamma_1$
Y CONSIDEREMOS UN PUNTO $p \in \Sigma_1 \cap (z_2=0)$

ES DECIR, p ES DE LA FORMA $p = (1, 0, p^3)$ DONDE p^3 COMPLE $|p^3| \leq 1$ Y ADÉMÁS $p^3 \neq 0$.

EXISTE UNA SUCECIÓN $\{P_m\} \in \Sigma_1$ TAL QUE $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = p$.

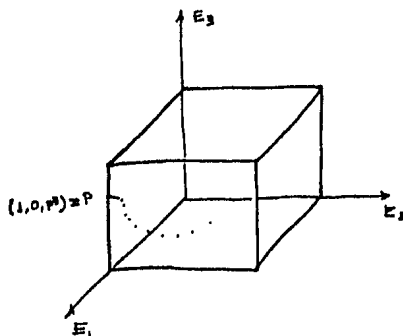
EN PARTICULAR SI p^3 ES TAL QUE $|p^3| \leq 1$ PODEMOS CONSIDERAR LA SUCECIÓN $\{(P_m^1, P_m^2, P_m^3)\}_{m \in \mathbb{Z}}$

DADA POR $\{(1, P^2 e^{-k_m^1 \lambda_2 \hat{\lambda}_1}, P^3)\}_{m \in \mathbb{Z}}$

CIARAMENTE SI $m \rightarrow \infty$ $P^2 e^{-k_m^1 \lambda_2 \hat{\lambda}_1} \rightarrow 0$

Y POR CONSIGUIENTE,

$P_m = (P_m^1, P_m^2, P_m^3) \rightarrow p = (1, 0, P^3)$.



SEA q_m UNA SUCECIÓN DE PUNTOS DADA POR $q_m = H_1^{k_m^1}(P_m)$

ENTONCES

$q_m = H_1^{k_m^1}(P_m^1, P_m^2, P_m^3)$

$= H_1^{k_m^1}(1, P_m^2, P_m^3)$

$= (1, e^{k_m^1 \lambda_2 \hat{\lambda}_1} P_m^2, e^{k_m^1 \lambda_3 \hat{\lambda}_1} P_m^3)$

$= (1, q_m^2, q_m^3)$

PUNTO QUE $Re(\lambda_3 \hat{\lambda}_1) < 0$ Y $|P_m^3| < 1$ SE TIENE QUE

$$e^{K_m^1 \lambda_3 \hat{\lambda}_1} P_m^3 \rightarrow 0 \text{ al } m \rightarrow \infty.$$

Así, $\{q_m = H_1^{K_m^1}(P_m)\}$ ES UNA SUCESIÓN DE PUNTOS QUE TIENDE A UN PUNTO $q = (1, q^2, 0)$ DONDE $|q^2| \leq 1$. I.E. $q \in Z_2 \cap (z_3 = 0)$.

LA CONDICIÓN SOBRE q^2 NO ES DIFÍCIL DE HALLAR.

EN EL CASO EN QUE $P_m = (1, P^2 e^{-K_m^1 \lambda_3 \hat{\lambda}_1}, P^3)$

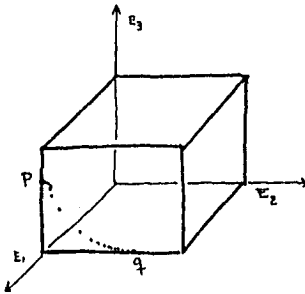
SE TIENE QUE

$$H_1^{K_m^1}(1, P^2 e^{-K_m^1 \lambda_3 \hat{\lambda}_1}, P^3) \approx (1, P^2, e^{K_m^1 \lambda_3 \hat{\lambda}_1} P^3)$$

Y

$$(1, P^2, e^{K_m^1 \lambda_3 \hat{\lambda}_1} P^3) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (1, P^2, 0) = q$$

DONDE $|P^2| \leq 1$.



SEA $T_0 \in \mathcal{C}$ TAL QUE $r = \varphi(T_0, q) \in Z_2$ ES DECIR,

$$r = \varphi(T_0, (1, P^2, 0)) = (e^{\lambda_1 T_0}, e^{\lambda_2 T_0} P^2, 0)$$

$$r \in Z_2 = \{z \cdot |z_k| = 1, |z_k| \leq 1, k=1, 2\};$$

Y SEA $\{T_m\} \in \mathcal{C}$ UNA SUCESIÓN DE PUNTOS

(#3) QUE TIENDE A T_0 , TAL QUE LA SUCESIÓN $\{r_m\}$ DE PUNTOS, DADA POR

$$r_m = \varphi(T_m, q_m)$$

ESTÁ EN Z_2 .

$$r_m = \varphi(T_m, q_m) = (e^{\lambda_1 T_m}, e^{\lambda_2 T_m} q_m^2, e^{\lambda_3 T_m} q_m^3)$$

$$\therefore r_m = (e^{\lambda_1 T_m}, 1, e^{\lambda_3 T_m} q_m^3)$$

$$\text{SEA } S_m = H_2^{K_m^2}(r_m)$$

$$S_m = H_2^{K_m^2}(r_m^1, 1, r_m^3), \quad |r_m^3| \leq 1, \quad K_m^2 \geq 1$$

$$S_m = (e^{\lambda_1 K_m^2}, 1, e^{\lambda_3 K_m^2} q_m^3).$$

LEMA 3.5

EL LÍMITE DE S_m CUANDO m TIENDE A INFINITO (∞) EXISTE Y ES DISTINTO DE CERO.

DEMOSTRACIÓN:

CONSIDERAREMOS LA PARAMETRIZACIÓN DE UNA HOJA (POR T) QUE CONTIENE A LOS PUNTOS P_m, q_m, r_m, S_m Y DENOTAREMOS A LOS PARÁMETROS $T(P_m), T(q_m), T(r_m), T(S_m)$ RESPECTIVAMENTE; ES DECIR, $\varphi(T(P_m), z) = P_m, \varphi(T(q_m), z) = q_m, \varphi(T(r_m), z) = r_m, \varphi(T(S_m), z) = S_m$.

BASTA CHECAR QUE $\lim_{m \rightarrow \infty} z_3(S_m)$ EXISTE Y ES DISTINTO DE CERO, DONDE POR $z_3(S_m)$ ENTENDEMOS LA TERCERA COORDENADA DE S_m . (#4)

$$P_m = \varphi(T(P_m), z),$$

$$q_m = H_1^{K_m^1}(P_m)$$

POR DEFINICIÓN DE $H_1^{K_m^1}$

$$q_m = \varphi_{\lambda_1}^{K_m^1}(K_m^1, P_m)$$

LUEGO,

$$q_m = \varphi(\hat{\lambda}_1, K_m^1, P_m),$$

$$q_m = \varphi(\hat{\lambda}_1, K_m^1, \varphi(T(P_m), z))$$

$$\text{Y } q_m = \varphi(\hat{\lambda}_1, K_m^1 + T(P_m), z);$$

POR OTRA PARTE, $q_m = \varphi(T(q_m))$

ENTONCES,

$$\varphi(T(q_m)) = \varphi(\hat{\lambda}_1, K_m^1 + T(P_m), z).$$

DE DONDE

$$T(q_m) = \hat{\lambda}_1, K_m^1 + T(P_m) \quad (*)$$

Y, POR LO TANTO,

$$T(q_m) - T(P_m) = \hat{\lambda}_1, K_m^1.$$

(*) ENTO SE DEBE A QUE $\hat{\lambda}_1$ ES UN VECTOR UNIDAD EN E_1

ANÁLOGAMENTE,

$$r_m = \varphi(T(r_m), z)$$

$$s_m = H_2^{K_m^2}(r_m)$$

POR DEFINICIÓN DE $H_2^{K_m^2}$ SE TIENE QUE

$$s_m = \varphi_{\lambda_2}^{K_m^2}(r_m),$$

$$s_m = \varphi(\hat{\lambda}_2 K_m^2, r_m)$$

LUGAR,

$$r_m = \varphi(\hat{\lambda}_2 K_m^2, \varphi(T(r_m), z))$$

Y, POR LO TANTO,

$$s_m = \varphi(\hat{\lambda}_2 K_m^2 + T(r_m), z);$$

POR OTRA PARTE, $s_m = \varphi(T(s_m), z)$

ENTONCES,

$$\varphi(T(s_m), z) = \varphi(\hat{\lambda}_2 K_m^2 + T(r_m), z)$$

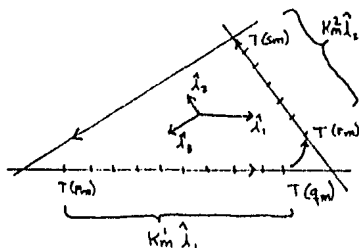
DE DONDE,

$$T(s_m) = \hat{\lambda}_2 K_m^2 + T(r_m)$$

Y, POR LO TANTO,

$$T(s_m) - T(r_m) = \hat{\lambda}_2 K_m^2.$$

COMO p_m Y q_m ESTÁN EN Σ , Y r_m Y s_m EN Σ_z , SE TIENE LA SIGUIENTE IMAGEN EN EL POLIGONO (C_2) .



OBSÉRVESE QUE LOS PUNTOS MARCADOS CORRESPONDEN A PUNTOS DESTACADOS EN LA CONFIGURACIÓN COMPLETA $\zeta^*(z)$.

AHORA BIEN, PUESTO QUE s_m TIENE LA EXPRESIÓN

$$s_m = (e^{T(r_m)\lambda_1} z_1, e^{T(s_m)\lambda_2} z_2, e^{T(q_m)\lambda_3} z_3), \text{ ENTONCES}$$

$$s_m^2 = z_3(s_m) = e^{T(s_m)\lambda_3} z_3$$

USANDO QUE $T(s_m) - T(r_m) = \hat{\lambda}_2 K_m^2$ TENEMOS QUE

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 T(s_m)} z_3$$

IMPLICA

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 K_m^2 + T(r_m))} z_3$$

CUANDO,

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_2 K_m^2} e^{\hat{\lambda}_2 T(r_m)} z_3$$

Y, EN CONSECUENCIA,

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_2 K_m^2} z_3(r_m), \quad z_3(r_m) = r_m^2$$

COMO

$$r_m = \varphi(T_m, q_m), \quad z_3(r_m) = z_3(\varphi(T_m, q_m))$$

ENTONCES

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_2 K_m^2} z_3(\varphi(T_m, q_m))$$

ASI,

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_2 K_m^2} e^{\hat{\lambda}_2 T_m} z_3(q_m)$$

Y

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_2 K_m^2 + \hat{\lambda}_2 T_m} z_3(q_m).$$

COMO

$$q_m = (1, e^{K_m^2 \lambda_2 \lambda_1} z_1, e^{K_m^2 \lambda_3 \lambda_1} z_3),$$

$$z_3(q_m) = e^{K_m^2 \lambda_3 \lambda_1} z_3 = e^{K_m^2 \lambda_3 \lambda_1} z_3(p_m)$$

ENTONCES

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_2 K_m^2 + \hat{\lambda}_2 T_m} e^{K_m^2 \lambda_3 \lambda_1} z_3(p_m)$$

$$y \quad z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 K_m^2 + T_m + \hat{\lambda}_1 K_m^2)} z_3(p_m).$$

OBSERVAMOS QUE

$$r_m = \varphi(T_m, q_m) = \varphi(T_m, \varphi(T(q_m), z)) = \varphi(T_m + T(q_m), z)$$

Y

$$r_m = \varphi(T(r_m), z)$$

POR CONSIGUIENTE,

$$\varphi(T(r_m), z) = \varphi(T_m + T(q_m), z)$$

Y

$$T_m = T(r_m) - T(q_m).$$

ASI, SUSTITUYENDO ESTA EXPRESIÓN EN LA QUE OBTUVIMOS PARA $z_3(s_m)$ SE TIENE QUE

$$z_3(s_m) = e^{\hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 K_m^2 + \hat{\lambda}_1 K_m^2 + T(r_m) - T(q_m))} z_3(p_m).$$

SI AHORA USAMOS EL HECHO DE QUE

$$K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2 + K_m^3 \hat{\lambda}_3 \rightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

OBTENEMOS QUE

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_3(s_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{(\lambda_3 - K_m^3 \hat{\lambda}_3 + o(1)) T(s_m) - T(q_m)} z_3(p_m)$$

DONDE $o(1) \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$

COMO $T(s_m) - T(q_m) = T_m$ TIENDE A T_0 Y p_m TIENDE A p SI $m \rightarrow \infty$, ENTONCES PUESTO QUE $e^{(\lambda_3 - K_m^3 \hat{\lambda}_3)} = e^{-K_m^3 \hat{\lambda}_3} \approx 1$, LA IGUALDAD ANTERIOR SE REDUCE A

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_3(s_m) = e^{\lambda_3 T_0} z_3(p)$$

COMO $z_3(p) = P^3 \neq 0$, ENTONCES

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_3(s_m) \neq 0$$

POR LO TANTO,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m \neq 0$$

SUPONGAMOS AHORA QUE EXISTE UNA EQUIVALENCIA TOPOLOGICA ENTRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE TIPO DE SIEGEL

$$\frac{dz}{dT} = \Lambda z, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}^3$$

$$\frac{dw}{dT} = Mw, \quad M = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbb{C}^3$$

Y DENOTEMOS POR h AL HOMEOMORFISMO DE \mathbb{C}^3 EN \mathbb{C}^3 QUE MANDA ORBITAS DE $\tilde{f}(\Lambda)$ EN ORBITAS DE $\tilde{f}(M)$. ESTABLECEMOS QUE PARA TODO PUNTO $a \in \mathbb{C}^3$ $h(a) = a'$ Y DENOTAMOS $\Psi = h\varphi$.

SEAN $p' = h(p)$, $p'_m = h(p_m)$, $q'_m = H_1^{K_m^1}(p_m)$,

PARA TRANSILACION A LO LARGO DE LAS ORBITAS (VER PÁG. 9) PODEMOS PENSAR, SIN PERDIDA DE GENERALIDAD, QUE $p'_m \in \Sigma_1$ Y $r'_m \in \Sigma_2$.

ASI, PUESTO QUE h Y LA TRANSILACION A LO LARGO DE LAS ORBITAS SON FUNCIONES CONTINUAS, TENEMOS QUE $p'_m \rightarrow p'$, $q'_m \rightarrow q'$, $r'_m \rightarrow r'$ Y $s'_m \rightarrow s'$, DONDE $s'_m = H_2^{K_m^2}(r'_m)$.

OBSERVACION:

h ES UN HOMEOMORFISMO QUE MANTIENE EL MISMO RADIO DE Λ EN EL DE M , POR LO QUE PODEMOS PENSAR QUE ESTOS SON LO MISMO.

EN LA HOJA DE p'_m TENEMOS QUE

$$T(q'_m) - T(p'_m) = K_m^1 \hat{\mu}_1$$

$$T(s'_m) - T(r'_m) = K_m^2 \hat{\mu}_2$$

ASI, SUMANDO AMBAS IGUALDADES ANTERIORES,

$$T(s'_m) + T(q'_m) - T(r'_m) - T(p'_m) = K_m^1 \hat{\mu}_1 + K_m^2 \hat{\mu}_2$$

Y

$$T(s'_m) - T(p'_m) = T(r'_m) - T(q'_m) + K_m^1 \hat{\mu}_1 + K_m^2 \hat{\mu}_2$$

OBSERVAMOS QUE

$$r'_m = \Psi(\zeta_m, q'_m) = \Psi(\zeta_m, \Psi(T(q'_m), z'))$$

Y

$$r'_m = \Psi(T(r'_m), z')$$

POR CONSIGUIENTE,

$$\varphi(T(r'_m), z') = \varphi(\zeta_m + T(q'_m), z')$$

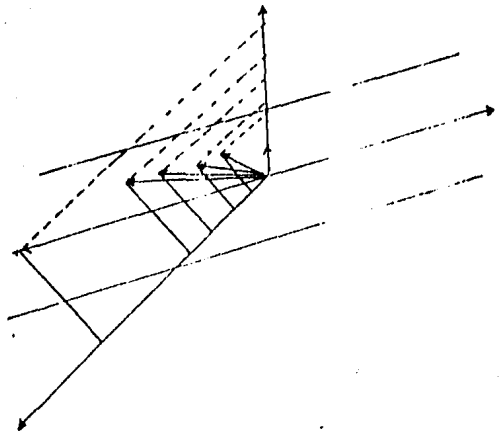
Y

$$\zeta_m = T(r'_m) - T(q'_m)$$

POR LO TANTO,

$$T(s'_m) - T(p'_m) = K_m^1 \hat{\mu}_1 + K_m^2 \hat{\mu}_2 + \zeta_m$$

DONDE $\zeta_m \rightarrow \zeta_0$ SI $m \rightarrow \infty$



Así,

$$z_3(S_m^i) = e^{M_3(\hat{\mu}_1 K_m^1 + \hat{\mu}_2 K_m^2 + \xi_m)} z_3(P_m^i).$$

$z_3(S^i)$ es por la observación anterior con respecto a h .
 Puesto que $z_3(S_m^i) \rightarrow z_3(S^i)$ y $z_3(S^i) \neq 0$
 tenemos que

$$\hat{\mu}_1 K_m^1 + \hat{\mu}_2 K_m^2 = \hat{\mu}_3 l_m + u_m$$

con $l_m \in \mathcal{L}_+$, $u_m \in \mathcal{C}$ y $u_m \rightarrow u_0$.

Sea $\sigma_3: \mathbb{R}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}$ una transformación \mathbb{R} -lineal definida por:

$$\begin{aligned} \sigma_3(\hat{\mu}_1) &= \hat{\lambda}_1 \\ \sigma_3(\hat{\mu}_2) &= \hat{\lambda}_2 \\ \sigma_3(\hat{\mu}_3) &= \hat{\nu}_3 \end{aligned}$$

es claro que nuestro interés está en demostrar que $\hat{\nu}_3 = \hat{\lambda}_3$.

Puesto que $K_m^1 \hat{\mu}_1 + K_m^2 \hat{\mu}_2 = l_m \hat{\mu}_3 + u_m$

$$\sigma_3(K_m^1 \hat{\mu}_1 + K_m^2 \hat{\mu}_2) = \sigma_3(l_m \hat{\mu}_3 + u_m),$$

lo que implica,

$$K_m^1 \sigma_3(\hat{\mu}_1) + K_m^2 \sigma_3(\hat{\mu}_2) = l_m \sigma_3(\hat{\mu}_3) + \sigma_3(u_m).$$

De aquí,

$$K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2 = l_m \sigma_3(\hat{\mu}_3) + \sigma_3(u_m)$$

luego,

$$K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2 = l_m \hat{\nu}_3 + \sigma_3(u_m).$$

Esta relación nos dice que existe una franja paralela a $\hat{\nu}_3$ tal que todos los vectores $K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2$ están contenidos en ella.

Por otra parte, de la relación

$$K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2 + K_m^3 \hat{\lambda}_3 \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty$$

se tiene que existe una franja paralela a $\hat{\lambda}_3$ tal que todos los vectores $K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2$ están contenidos en ella.

Si los vectores $\hat{\lambda}_3$ y $\hat{\nu}_3$ no son colineales, entonces dichas franjas se intersectan en un conjunto acotado (concretamente en un paralelogramo) en el cual se encuentran $K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2$. Esto claramente no sucede pues se contradice la simetría entre K_m^1 , K_m^2 y K_m^3 cuando $m \rightarrow \infty$.

Así, $\hat{\nu}_3 = \alpha \hat{\lambda}_3$ con $\alpha > 0$ (esto se debe a que $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ y $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ están en el dominio de Siegel).

Andamos ahora si $\sigma_1: \mathbb{R}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}$ es la transformación lineal dada por

$$\begin{aligned} \sigma_1(\hat{\mu}_1) &= \hat{\nu}_1 \\ \sigma_1(\hat{\mu}_2) &= \hat{\lambda}_2 \\ \sigma_1(\hat{\mu}_3) &= \hat{\lambda}_3 \end{aligned}$$

se tiene que $\hat{\nu}_1 = \alpha_1 \hat{\lambda}_1$ con $\alpha_1 > 0$.

De esta manera, la composición $\sigma_3 \circ \sigma_1^{-1}: \mathbb{R}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}$ es tal que

$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1}(\hat{\lambda}_1) &= \sigma_3\left(\frac{1}{\alpha_1} \hat{\mu}_1\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \sigma_3(\hat{\mu}_1) \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \hat{\lambda}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1}(\hat{\lambda}_2) &= \sigma_3(\hat{\lambda}_2) \\ &= \hat{\lambda}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1}(\hat{\lambda}_3) &= \sigma_3(\hat{\mu}_2) \\ &= \gamma_3 \\ &= \alpha_3 \hat{\lambda}_3 \end{aligned}$$

De estas relaciones concluimos que $\sigma_3 \circ \sigma_1^{-1}$ es una transformación lineal que tiene como vectores propios a $\hat{\lambda}_2$ y $\hat{\lambda}_3$, con valores propios 1 y α_3 respectivamente. Sin embargo, $\hat{\lambda}_1$ es también un vector propio de $\sigma_3 \circ \sigma_1^{-1}$ de modo que, si $\sigma_3 \circ \sigma_1^{-1} \neq id$, se tiene que $\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{\alpha_1} \hat{\lambda}_1$ o $\hat{\lambda}_3 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3} \hat{\lambda}_1$ lo que claramente contradice la condición de hiperbolicidad.

Así, $\sigma_3 \circ \sigma_1^{-1} = id$ y $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$,

por lo que podemos concluir que existe una transformación lineal $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que manda a $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ en $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$

II.

(*) COMENTARIOS A LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA.

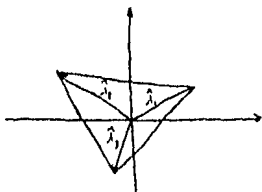
(*, 1)

$$(K_m^0 \hat{\lambda}) = K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2 + K_m^3 \hat{\lambda}_3 \rightarrow 0$$

con $(K_m^1, K_m^2, K_m^3) \in \mathbb{Z}_+^3$.

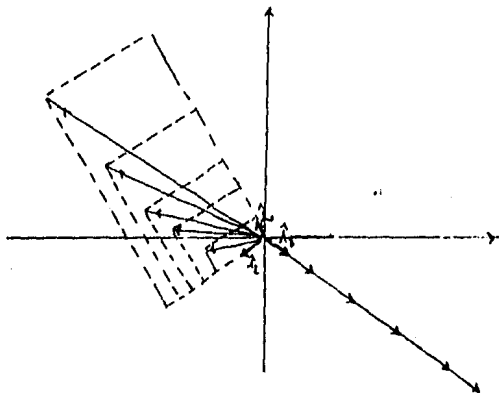
Esto se debe a que $0 \in \mathcal{H}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$

pues esta condición implica que siempre una $\hat{\lambda}_j$ tiene parte real positiva mientras que otra tiene parte real negativa.



Una manera de interpretar el comportamiento $K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2 + K_m^3 \hat{\lambda}_3 \rightarrow 0$ es pensar en una sucesión de paralelogramos formados por pares de

vectores, digamos $K_m^1 \hat{\lambda}_1$ y $K_m^2 \hat{\lambda}_2$, tales que la resultante $K_m^1 \hat{\lambda}_1 + K_m^2 \hat{\lambda}_2$ tiende a $-K_m^3 \hat{\lambda}_3$. Esquemáticamente:



(*, 2) suponemos $\theta_j = \arg \hat{\lambda}_j$ $j=1, 2, 3$.

$$\lambda_2/\lambda_1 = \frac{\sqrt{r_2}}{r_1} (\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1))$$

$$\lambda_3/\lambda_1 = \frac{\sqrt{r_3}}{r_1} (\cos(\theta_3 - \theta_1) + i \sin(\theta_3 - \theta_1))$$

$$\operatorname{Re}(2\pi i \lambda_2/\lambda_1) = -\frac{2\pi r_2}{r_1} \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\operatorname{Re}(2\pi i \lambda_3/\lambda_1) = -\frac{2\pi r_3}{r_1} \sin(\theta_3 - \theta_1)$$

como $0 \in \mathcal{H}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ y

$$0 \leq \arg \hat{\lambda}_1 < \arg \hat{\lambda}_2 < \arg \hat{\lambda}_3 < 2\pi$$

tenemos que $\theta_2 - \theta_1 > 180^\circ$ y $\theta_3 - \theta_1 < 180^\circ$;

por consiguiente,

$$\operatorname{Re}(2\pi i \lambda_2/\lambda_1) > 0 \quad \vee$$

$$\operatorname{Re}(2\pi i \lambda_3/\lambda_1) < 0.$$

(*, 3)

Afirmamos que existe T_0 tal que

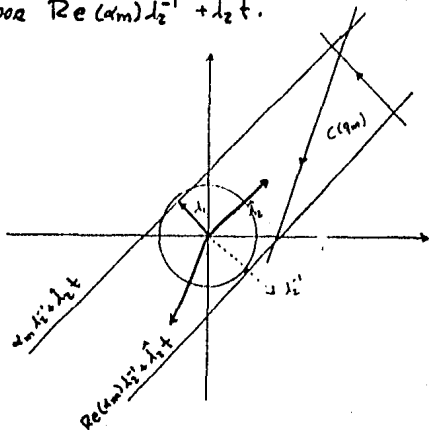
$$T = \varphi(T_0, q) \in \Sigma_2 \vee T_M \text{ tal}$$

$$\text{que } T_M = \varphi(T_M, q) \in \Sigma_2.$$

Vamos a dar explícitamente dichas T_0 y T_M .

Dado $q_m = (1, q_m^2, q_m^3)$ se tiene que $r_m = \varphi(T_m, q_m) = (e^{i_1 T_m}, e^{i_2 T_m} q_m^2, e^{i_3 T_m} q_m^3)$ y la condición dada por $e^{i_1 T_m} q_m^2 = 1$ implica que T_m deberá ser de la forma $\alpha_m \lambda_2^{-1} + \lambda_2 t$, $n \in \mathbb{Z}$, donde $q_m^2 = e^{-i_1 t}$, $\alpha_m \in \mathbb{C}$. Así, para m fijo, se tiene un conjunto de puntos sobre la recta $T = \alpha_m \lambda_2^{-1} + \lambda_2 t$, $t \in \mathbb{R}$, tal que un subconjunto de él deberá cumplir con las restricciones dadas por $|e^{i_1 T_m}| < 1$ y $|e^{i_3 T_m} q_m^3| < 1$.

Afirmamos que siempre podemos escoger T_m con estas características pues en particular se cumplen para los puntos T en el polígono $C(q_m)$ que están sobre la cara dada por un segmento de la recta $T = \text{Re}(\alpha_m) \lambda_2^{-1} + \lambda_2 t$, $t \in \mathbb{R}$. Observamos además que la recta $T = \alpha_m \lambda_2^{-1} + \lambda_2 t$ es paralela a la recta dada por $\text{Re}(\alpha_m) \lambda_2^{-1} + \lambda_2 t$.



(# 4)

Para demostrar que $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m$ exista y es distinto de cero, diremos que basta demostrarlo para $z_3(S_m)$; esto se debe a que la hiperbolicidad de $H_2^{k_m}$ obliga a que $z_1(S_m)$ tienda a cero conforme m tiende a infinito:

Puesto que $r_m = \varphi(T_m, q_m) \in \mathbb{Z}_2$ tenemos que $r_m = (e^{i_1 T_m}, e^{i_2 T_m} q_m^2)$ y $S_m = H_2^{k_m}(e^{i_1 T_m}, 1, e^{i_3 T_m} q_m^3)$, lo que implica $S_m = (e^{i_1 \lambda_2^{-1} k_m + i_1 T_m}, 1, e^{i_2 \lambda_2 k_m + i_3 T_m} q_m^3)$

pues $S_m = \varphi_{\lambda_2}(k_m^2, (e^{i_1 T_m}, 1, e^{i_3 T_m} q_m^3))$.

Sabemos que $\text{Re}(i_1 \lambda_2^{-1}) = \frac{2\pi n}{\lambda_2} (-\sin(\theta_1 - \theta_2)) > 0$ por lo tanto $\text{Re}(i_1 \lambda_2^{-1}) = \frac{2\pi n}{\lambda_2} (-\sin(\theta_1 - \theta_2)) < 0$ y $e^{i_1 \lambda_2^{-1} k_m^2} \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$.

Por otra parte, $T_m \rightarrow T_0$ si $m \rightarrow \infty$, de modo que $e^{i_1 T_m} \rightarrow e^{i_1 T_0}$ si $m \rightarrow \infty$. Así, $z_1(S_m) = e^{i_1 \lambda_2^{-1} k_m^2 + i_1 T_m} \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$.

Hemos visto ya varios resultados importantes en lo que se refiere a ecuaciones diferenciales lineales en \mathbb{C}^n , vamos a ver cómo podemos usar estos resultados si consideramos ahora la clase \mathcal{A} de foliaciones de todos los campos vectoriales holomorfos con singularidad aislada en el origen ($0 \in \mathbb{C}^n$).

$$(*) \frac{dz}{dt} = F(z) = Az + R(z) \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C}^n,$$

$F(0) = 0$, $Az = (DF_0)z$ donde el espectro de A es $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \lambda_i / \lambda_j \notin \mathbb{R}$.

Para este tipo más general de ecuaciones el problema de hallar una equivalencia holomorfa entre F y A fue tratado por H. Poincaré en 1879 y por C.L. Siegel en 1952. Enunciamos, sin demostrar, dos teoremas en esta dirección, cuyas demostraciones pueden encontrarse en los siguientes artículos:

- H. Poincaré, "Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles", *Mémo. Paris*, 1879 (Ouvres complètes, t. p. XCIX - CV).
- C.L. Siegel, "Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage", *Göttingen, Nachr. Akad. Wiss. Math. Kl.* (1952) p. 21-30.

Observamos que la condición de hiperbolicidad sobre A implica que estamos considerando solamente órbitas de campos en \mathbb{C}^n cuya parte lineal es no degenerada. Estos campos forman un abierto denso en el espacio de todos los campos con singularidad aislada en el origen ($0 \in \mathbb{C}^n$).

TEOREMA DE POINCARÉ - 3.6

Sea F un campo vectorial como en (*). Suponemos que $k \neq j$ implica $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ y $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si no sucede que $\lambda_j = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \lambda_k$, $\bar{r}_k \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \geq 2$, $k=1, \dots, n$, entonces F es holomorficamente equivalente a A .

TEOREMA DE BIEGEL - 3.7

Sea F un campo vectorial como en (*). Si $j \neq k$ implica $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ y $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, entonces F es holomorficamente equivalente a A cerca del origen ($0 \in \mathbb{C}^n$) para casi toda $A = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ con respecto a la medida de Lebesgue.

Estos dos teoremas nos permiten concluir este trabajo con un resultado que caracteriza la estabilidad local de un campo F en A en una vecindad del origen.

COROLARIO - 3.8

Sea F un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^n , $F(0) = 0$ y sea $A = D\tilde{F}_0$ con espectro $\{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$. Entonces F es localmente estable si y sólo si $k \neq j$ implica $\lambda_k/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ y $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

DEMOSTRACIÓN:

Queda demostrado por el teorema 3.1. La parte "si" del corolario.

Suponemos que $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ entonces, por el teorema de Siegel, podemos aproximar F por medio de otro campo \tilde{F} , $F(0) = 0$,

tal que es holomorficamente equivalente a su parte lineal $\tilde{A} = D\tilde{F}_0$, donde el espectro de \tilde{A} está en el dominio de Cayley; sin embargo, la condición para la equivalencia topológica que establece el teorema 3.2 nos dice que \tilde{A} no es localmente estable, de modo que F tampoco lo es.

Veamos ahora lo que sucede si suponemos que $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ podemos encontrar dos campos F' y F'' arbitrariamente cercanos a F con las siguientes propiedades:

- F' con $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $j \neq k \Rightarrow \lambda_j/\lambda_k \notin \mathbb{R}$ y tal que $\lambda_j' = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i$ $\neq 0$ para cualesquiera $k_i \in \mathbb{Z}_+$.
- F'' con $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_2'' = r \lambda_1$, $r \in \mathbb{Q}$, $\lambda_n/\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ para $n \neq 1, i, j, k \geq 2$ y $\lambda_j'' = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \neq 0$ para cualesquiera $k_i \in \mathbb{Z}_+$.

Por el teorema de Poincaré tanto F' como F'' son holomorficamente equivalentes a su parte lineal A' y A'' respectivamente. Sin embargo, A' genera una foliación constituida exclusivamente por hojas de Poincaré a excepción de los ejes coordenados, mientras que para A'' se tiene que todas las hojas en el subespacio generado por las ecuaciones $z_3 = z_4 = \dots = z_n = 0$ son cilindros, de modo que $F(A')$ y $F(A'')$ no son homeomorfas en una vecindad del origen y, por consiguiente, F no es estable.

II.

- ÍNDICE -

- AUTOMORFISMO HIPERBÓLICO	p. 35	- INMERSIÓN	p. 5
- CAMPO DE MORSE-SMALE	p. 21, 22	- LÍMITE: α -LÍMITE, ω -LÍMITE	p. 13
- CAMPO HIPERBÓLICO	p. 16, 36	- ÓRBITA LERBADA HIPERBÓLICA	p. 19..
- ESTABILIDAD Y DENSIDAD DE LOS C.H.	p. 16	- ANILINDIO B	p. 45
- CAMPO VECTORIAL	p. 7	- PRODUCTO HERMITIANO	p. 28
- CARTAS LOCALES	p. 2	- PUNTO ERRANTE	p. 20
- CONFIGURACIÓN $G(2)$	p. 47	- PUNTO FIJO HIPERBÓLICO	p. 17
- CONFIGURACIÓN TOTAL $G^*(2)$	p. 52	- SECCIÓN TRANSVERSA	p. 9
- CURVA INTEGRAL	p. 11	- SINGULARIDAD	p. 13
- DEBIVADA	p. 5	- SINGULARIDAD HIPERBÓLICA	p. 17
- DIFERENCIABILIDAD EN \mathbb{R}^n	p. 1	- SUBVARIEDAD	p. 5
- DIFERENCIABILIDAD	p. 1	- TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNI-	p. 11
- DIFERENCIABILIDAD LOCAL	p. 1	- CIDAD DE ECUACIONES BIRECURREN- CIALES	
- DOMINIO DE POINCARÉ	p. 35	- TEOREMA DE POINCARÉ	p. 74
- DOMINIO DE SIEGEL	p. 35	- TEOREMA DE SIEGEL	p. 74
- ENCAJE	p. 5	- TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ	p. 18, 33
- EQUIVALENCIA TOPOLOGICA	p. 14, 15	- TRANSVERSALIDAD	p. 6
- ESPACIO FASE	p. 11	- UNIFORMIDAD TRANSVERSAL	p. 9
- ESPACIO TANGENTE	p. 4	- VALOR REGULAR Y V. CRÍTICO	p. 5
- ESTABILIDAD ESTRUCTURAL	p. 15	- VARIEDAD	p. 2, 3
- ESTABILIDAD LOCAL	p. 15, 19	- VARIEDAD ESTABLE Y V. INESTABLE	p. 17, 18 .
- ESTRUCTURA DIFERENCIABLE	p. 2		
- FIBRADO TANGENTE	p. 7		
- FLUJO FASE	p. 11		
- FOLIACIÓN	p. 8		
- FOLIACIÓN TRANSVERSAL	p. 9		
- GENERALIDAD	p. 19		
- GRUPO ESTABILIZADOR G_w	p. 45		
- GRUPO δ UN PARÁMETRO	p. 11		
- HAZ TANGENTE	p. 7		
- HOJA DE POINCARÉ	p. 30		
- HOJA DE SIEGEL	p. 42		
- HOMOTOPÍA	p. 18, 23		

- BIBLIOGRAFIA -

- ARNOLD V.I., *ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS*, MIT, E.U., 1978.
- CAMACHO C., "HOLONORPHIC DYNAMICAL SYSTEMS", *SUMMER SCHOOL IN DYNAMICAL SYSTEMS*, INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS, TRIESTE, ITALY, 1983.
- CAMACHO C., KUIPERS N., PALIS J., "THE TOPOLOGY OF HOLONORPHIC FLOWS WITH SINGULARITY" *PUBL. MATH. IHES* 48 (1978), p. 5-19.
- CAMACHO C., LINS M.A., *TEORIA GEOMETRICA DAS FOLHEAÇOES*, IMPA, RIO DE JANEIRO, BRASIL, 1979.
- GUCKENHEIMER, "HARTMAN'S THEOREM FOR COMPLEX FLOWS IN THE POINCARÉ DOMAIN", *COMPOSITIO MATH.*, 24. (1972), p. 75-82.
- ILYASHENKO YU.S., "REMARKS ON THE TOPOLOGY OF SINGULAR POINTS OF ANALYTICAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE COMPLEX DOMAIN AND LADIS THEOREM." *FUNCTIONAL ANALYSIS AND APPLICATIONS* (1977) p. 105-113.
- PALIS J., DE MELO W., *INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS*, IMPA, RIO DE JANEIRO, BRASIL, 1977.