UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ENSEÑANZA DE LA CONTINUIDAD EN LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

T E S I S

Que para obtener el Título de
MATEMATICO
Presenta

PATRICIA NOVA COVARRUBIAS

Ciudad Universitaria, D. F., enero 1985

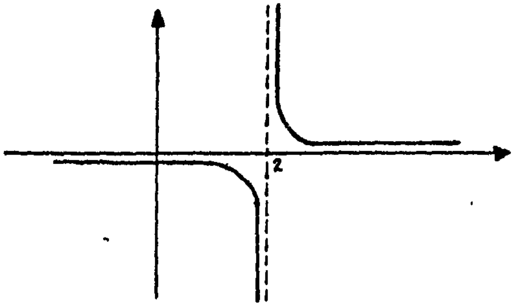
INDICE GENERAL

INTRODUCCION.

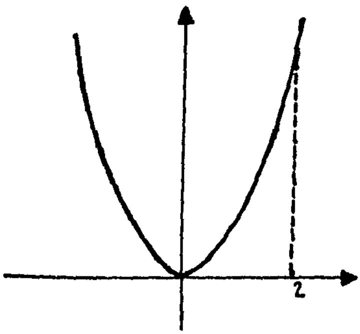
Estas notas tratan el concepto de continuidad, una de las más importantes ideas de la matemática. Antes de dar una definición rigurosa de continuidad, comentaremos este concepto brevemente en forma intuitiva para orientar al lector sobre su significado.

Consideremos la función f tal que :

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ con $x \in \mathbb{R}$, cuya gráfica es :



Y la función $g(x) = x^2$ con $x \in \mathbb{R}$, cuya gráfica es :



En las gráficas de f y g en la vecindad de $x=2$, podemos ver que hay un salto o rotura en la gráfica de $f(x)$, pero no lo hay en la gráfica de $g(x)$.

Este hecho se expresa diciendo que la función $f(x)$ es discontinua en 2 ; y que la función $g(x)$ es continua en $x=2$.

Otro modo de expresar lo anterior es como sigue :

Si x se aproxima hacia 2 el correspondiente valor de la función $f(x)$ debe llegar a ser tan proximo a $f(2)$ como se desee , cual quiera que sea la forma con que x se acerca a 2 .

Al aproximarse x al valor de 2 tanto por la derecha , (x se acerca a 2^+) como por la izquierda (x se acerca a 2^-) , el valor de $g(x)$ se aproxima a su valor en 2 , lo que no ocurre para $f(x)$, en vez de esto hay un salto en su gráfica en el punto 2 .

Por lo tanto la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ es discontinua en el punto $x=2$.

Por el contrario la función $g(x)= x^2$ es continua en el punto $x=2$, ya que cuando x se acerca a 2 , $g(x)$ se acerca a $4=g(2)$.

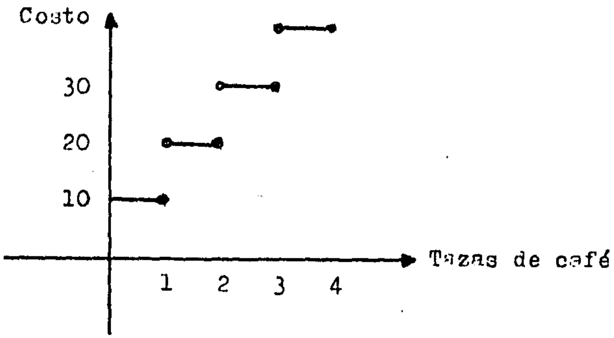
A continuación analizaremos otro ejemplo.

Si f es la función definida de la siguiente manera :

$f(t)= qt$ en la que t representa el número de tazas de café consumidas por una persona y q el costo correspondiente.

Nota: se cobrará cada taza de café no importa que no haya sido tomada totalmente.

La gráfica de la función f sería la siguiente :



En los valores de una función continua no se presentan saltos bruscos como en el ejemplo anterior.

Hablando en términos generales , diremos que una función es continua cuando la gráfica es una curva sin interrupción.

A partir de este razonamiento podemos estudiar intuitivamente la continuidad de una función $f(x)$, haciendo que la variable independiente x se aproxime indefinidamente , por la derecha y por la izquierda, hacia un valor prefijado a .

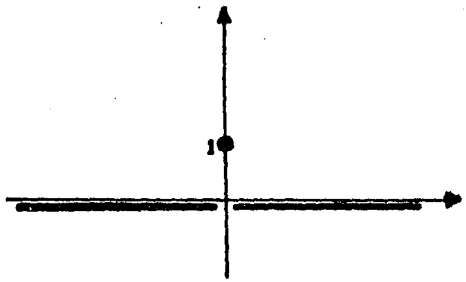
A menos que la función $f(x)$ sea constante en el entorno o vecindad de a su valor cambiará.

Si el valor de $f(x)$ se acerca a el valor de $f(a)$, es decir , al valor de la función en el punto prefijado $x=a$, cualquiera que sea la forma como se acerque x a el punto a , por un lado o por el otro, se dice que la función es continua en el punto a .

Si esto es cierto para todo punto x de cierto intervalo , se dice que la función es continua para cada punto a en el intervalo.

En el ejemplo siguiente :

$$f(x)= \begin{cases} 0 \text{ para } x \neq 0 \\ 1 \text{ para } x = 0 \end{cases}$$



Gráfica de la función f(x)

Si x se acerca a 0^+ entonces $f(x)$ se acerca a 0 .

Si x se acerca a 0^- entonces $f(x)$ se acerca a 0 .

Como $f(x)$ se acerca a 0 cuando x se acerca a 0 , decimos que límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es cero . ($\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$)

De este modo existen ambos límites (por la derecha y por la izquierda) y son iguales , pero la función no es continua ya que el valor del límite de $f(x)$ cuando x se acerca a 0 es diferente a el valor de la función evaluada en 0 , es decir $f(0) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

En forma general podemos decir que una función es continua en el punto a cuando :

i) f esta definida en a .

ii) $f(x)$ tiene límite en el punto a .

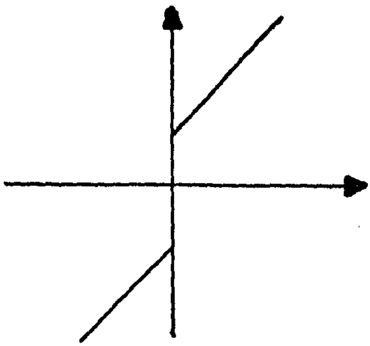
iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

DISCONTINUIDAD REMOVIBLE Y DISCONTINUIDAD ESENCIAL.

Aunque toda función que este representada por una curva sin interrupciones es continua , es facil definir funciones que no son continuas en todo punto , pero que estan definidas para todo valor de x .

Ejemplo 1.-

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{para} \quad x > 0 \\ -1+x & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases}$$



Gráfica de la función f(x).

En este ejemplo observamos que :

Si x se acerca a 0^+ f(x) se acerca a 1 .

y

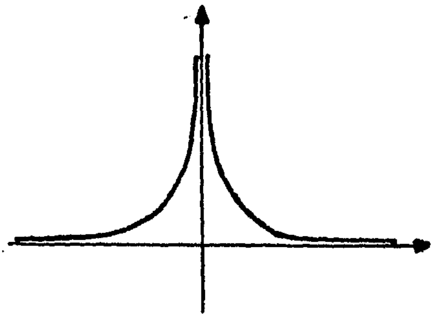
Si x se acerca a 0^- f(x) se acerca a -1 .

El límite de la función no existe por lo tanto no es continua.

Ejemplo 2.-

Otro tipo de discontinuidad es el que presenta la función :

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el punto $x = 0$.



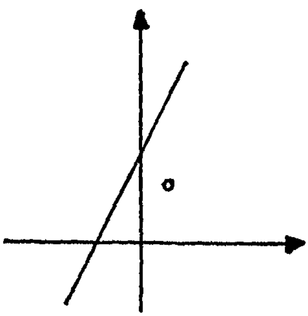
Gráfica de la función $f(x)$.

Si x se acerca a 0 , sea por la derecha o por la izquierda $f(x)$ tiende a infinito.

En sentido estricto , el valor de la función no esta definido para $x = 0$, ya que el infinito no es un número.

Ejemplo 3.-

Si $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-3}{x-1} & \text{para} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{para} \quad x = 1 \end{cases}$



Gráfica de la función $f(x)$.

Hay una discontinuidad en $x = 1$; ya que a pesar de existir el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 , éste es diferente a el valor de la función evaluada en 1 .

Supongamos que x se aproxima a 1 de la siguiente manera :

Por la izquierda mediante la siguiente sucesión:

$x = .9$ entonces $f(x) = 4.8$

$x = .99$ entonces $f(x) = 4.98$

$x = .999$ entonces $f(x) = 4.998$

$x = .9999$ entonces $f(x) = 4.999$

Y por la derecha mediante la sucesión:

$x = 1.1$ entonces $f(x) = 5.2$

$x = 1.01$ entonces $f(x) = 5.02$

$x = 1.001$ entonces $f(x) = 5.002$

$x = 1.0001$ entonces $f(x) = 5.0002$

Por lo tanto podemos decir que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1$$

Notese que si $f(1)$ se define como 5 , entonces

$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$ y entonces $f(x)$ sería continua para $x = 1$.

A este tipo de discontinuidad se le da el nombre de discontinuidad removible.

En general , supóngase que f es una función discontinua en el número a , pero para el cual el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista , entonces pueden pasar dos cosas.

Primero que $f(a)$ sea diferente a el $\lim_{x \to a} f(x)$

o

Segundo que f no este definida en a .

Tal discontinuidad se llama discontinuidad removible ; ya que si f fuese redefinida en a de tal manera que :

$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, entonces $f(x)$ se volvería continua para $x = a$

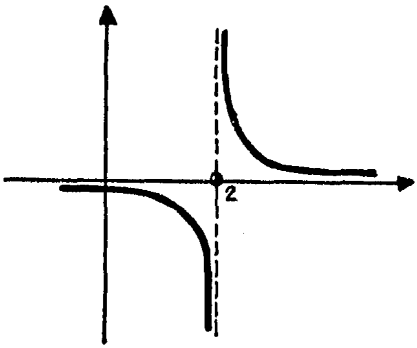
Si la discontinuidad no es removible entonces se llama discontinuidad esencial.

A continuación daremos algunos ejemplos.

1) Consideremos la función $g(x)$ definida de la siguiente manera :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Veamos si la discontinuidad es removible o esencial.

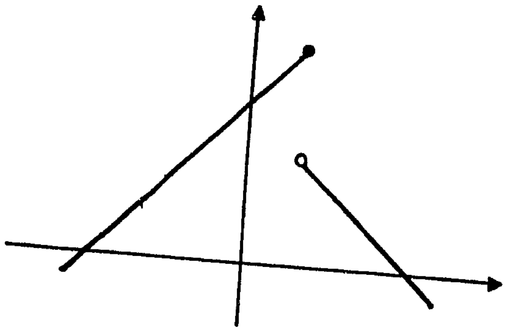


Gráfica de la función $g(x)$.

Tenemos que $g(x)$ es discontinua en $x = 2$ y el límite de $g(x)$

cuando x tiende a 2 no existe , por lo tanto la discontinuidad es esencial.

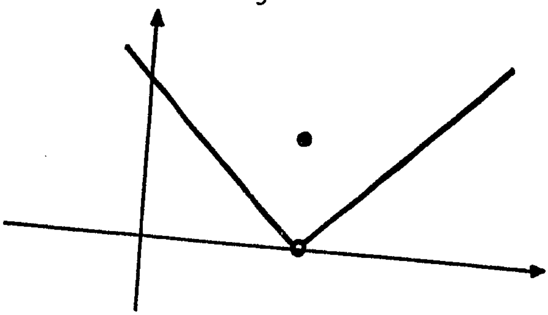
2) Si $h(x) = \begin{cases} 3+x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3-x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$



Gráfica de la función $h(x)$.

$h(x)$ es discontinua en $x = 1$ ya que el $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe por lo tanto la discontinuidad es esencial.

3) Si $F(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$



Gráfica de la función $F(x)$.

$F(x)$ es discontinua en $x = 3$ ya que el $\lim\limits_{x \to 3} F(x) = 0$

pero $F(3) = 2$, sin embargo si redefinimos $F(3)=0$ entonces la función es continua en 3 , y así la discontinuidad es removible.

EJERCICIOS :

Demostrar que la función es discontinua en el número a . Luego determinar si la discontinuidad es removible o esencial . Si la discontinuidad es removible , definir $f(a)$ de manera que la dis_continuidad sea removible.

a) $f(x) = \dfrac{9x^2-4}{3x-2}$; $a = \dfrac{2}{3}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$; $a = 3$

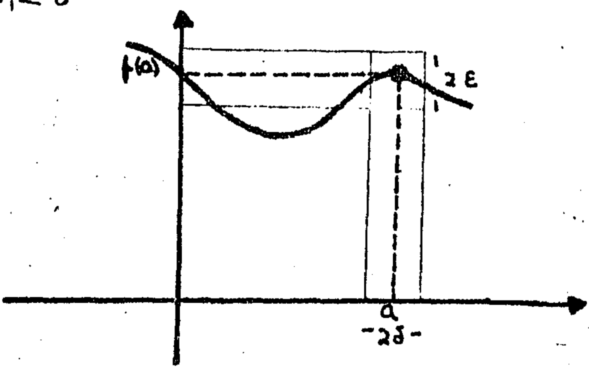
c) $f(t) = \begin{cases} t^2-4 & \text{si} \quad t \leq 2 \\ t & \text{si} \quad t > 2 \end{cases}$; $a = 2$

DEFINICION PRECISA DE CONTINUIDAD.

La función $f(x)$ es continua para el valor $x = a$ si , para todo número positivo ε , por pequeño que sea , puede encontrarse otro δ , también positivo (que depende de ε) , tal que :

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo x que cumpla la desigualdad

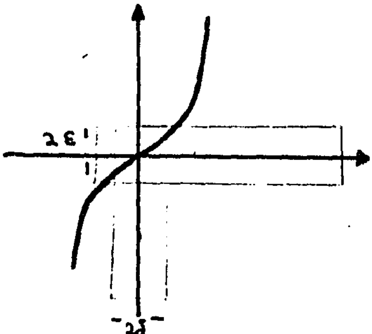
$|x - a| < \delta$



A continuación daremos algunos ejemplos , demostrando la continuidad de algunas funciones a partir de la definición de continuidad.

Ejemplo 1.-

Demostrar que la función $f(x) = x^3$ es continua en el punto $a = 0$.



Gráfica de la función f(x).

Gráficamente es claro que la función es continua en el punto a = 0 basandonos en nuestra primera idea acerca de la continuidad de una función que dice : Si la gráfica de una función no tiene saltos (es decir se puede dibujar sin separar el lápiz del papel) es continua.

Para demostrar esto se tiene que $f(a) = 0^3 = 0$.

Primero consideremos algunos ejemplos , asignemos a ε cualquier valor positivo , por ejemplo $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

Debemos demostrar ahora que si x se mantiene suficientemente próximo a el punto a = 0 , los valores correspondientes de f(x) no diferirán de 0 mas de .001 ; es decir , estarán situados entre -0.001 y 0.001 , se ve inmediatamente que no salen de ese intervalo si se impone la condición de que los valores de x difieran de a = 0 en menos de $\delta = \sqrt[3]{0.001} = 0.1$ pues si $|x| < 0.1$, se tiene que $|f(x)| = x^3 < .001$.

De la misma manera , podemos reemplazar $\varepsilon = .001$ por $\varepsilon = 10^{-4}$...

..... 10^{-k} .

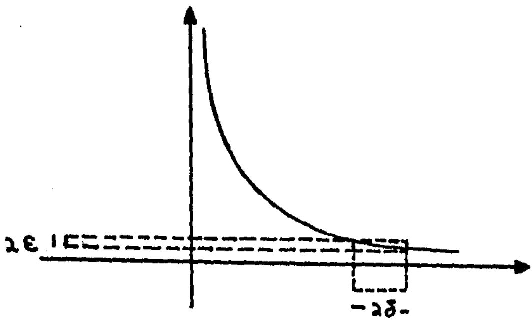
En general , vemos que si se toma $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$, y que si $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$,

entonces $|f(x) - f(a)| = x^3 < \varepsilon = \delta^3$.

Por lo tanto la función es continua en el punto a .

Ejemplo 2.-

Demostrar que la función $y = \frac{1}{x}$ es continua para todo valor $c \geq \frac{1}{2}$



Gráfica de la función y para x 0 .

Lo que debemos demostrar es que si x se mantiene suficientemente proximo a c , los valores correspondientes de f(x) no diferirán de f(c) mas de una cierta $\varepsilon > 0$; es decir estarán situados entre $f(c) - \varepsilon$ y $f(c) + \varepsilon$.

Aplicando la definición de continuidad , queremos que :

$$|f(x) - f(c)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|x - c|}{|xc|} < 2\,\frac{|x - c|}{|c|} \quad \text{si} \quad 1 < x \ .$$

Si $\varepsilon > 0$, encontraremos el valor de δ_2 :

Para que $2\,\frac{|x - c|}{|c|} < \varepsilon$

Basta que $|x - c| < \frac{\varepsilon |c|}{2} = \delta_2$.

Tomando $\delta =$ mínimo $\left(1 , \frac{\varepsilon |c|}{2} \right)$.

Por lo tanto $|f(x) - f(c)| = \frac{|x - c|}{|xc|}$ para $|x - c| < \delta$ y $1 < x$

OPERACIONES CON FUNCIONES.

En la vida diaria estamos rodeados de funciones que aparecen en casi todas las cosas ; a continuación daremos unos ejemplos :

1.- A cada ciudad corresponden dos números , su latitud y su longitud geográfica.

2.- A cada persona corresponde un idioma su idioma materno.

3.- El volumen de un cubo es función de la longitud de sus aristas . Si las aristas tienen de longitud x , el volumen esta dado por la formula $V = x^3$.

4.- La ley de Boyle establece que para un gas ideal a temperatura constante , si el volumen es v unidades, la presión p es de $\frac{k}{v}$ unidades , siendo k un número fijo . En este caso tenemos una ley volumen presión y la función volumen presión f está determinada por $f(v) = \frac{k}{v}$ $v > 0$.

En el ejemplo 3 observamos que $V = x^3$ también lo podemos expresar por $V = x^2 . x$ o $V = x.x.x$.

En el ejemplo 4 $f(v) = \frac{k}{v}$ $v > 0$, también lo podríamos ver como $f(v) = k \cdot \frac{1}{v}$.

Hasta aquí hemos analizado funciones sencillas que sin embargo las podríamos expresar de una manera mas simple.

Las operaciones con funciones nos ayudan a simplificar una función complicada , expresandola en términos de funciones sencillas.

Por ejemplo si quisieramos averiguar la continuidad de la siguiente función :

$$R(x) = \frac{5x^2 - 3x + 9}{(x+1)\ (x+3)}$$

No sería sencillo aplicar la definición de continuidad ; pero si esta misma función la descompusieramos en un cociente de ciertas funciones f y g ; tendríamos que : $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde

$f(x) = 5x^2 - 3x + 9$ y $g(x) = (x+1)\ (x+3)$

Además estas funciones f y g a su vez descomponerlas en sumas o productos de funciones mas simples , de esta manera podríamos encontrar mas facilmente una respuesta acerca de si la función $R(x)$ es continua en un cierto punto.

Definición : Dadas dos funciones $f(x)$, $g(x)$

i) Su suma , denotada por $(f+g)(x)$ es la función definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

ii) Su diferencia , denotada por $(f-g)(x)$ es la función definida por $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

iii) Su producto , denotado por $(f.g)(x)$ es la función definida por $(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

iv) Su cociente , denotado por $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, es la función definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

En cada caso el dominio de la función resultante consiste de aquellos valores de x comunes a los dominios de $f(x)$ y $g(x)$, con la excepción de que en el caso iv) los valores de x para los cuales $g(x) = 0$ se excluyen.

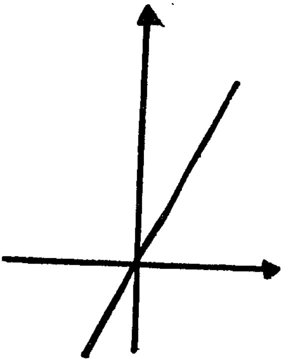
A continuación consideremos dos funciones f y g continuas en un cierto punto x_0 y analizaremos como se comportan $f+g$, $f-g$, $f.g$, f/g .

Ejemplo :

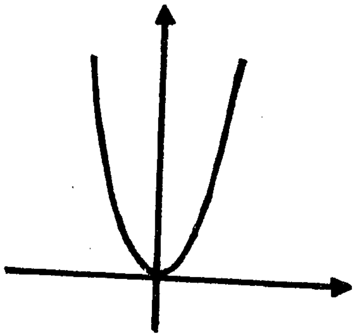
$f(x) = 2x$ es continua en el punto $x_0 = 1$ y

$g(x) = x^2$ es continua en el punto $x_0 = 1$

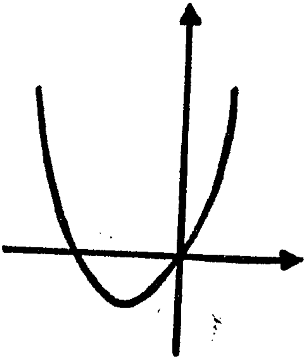
Si observamos la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x_0 = 1$, notamos que al dibujarla no despegamos el lápiz del pápel y por lo tanto es continua de acuerdo a nuestra primera noción de continuidad , lo mismo sucede para las gráficas de $g(x)$, $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$, $(f/g)(x)$.



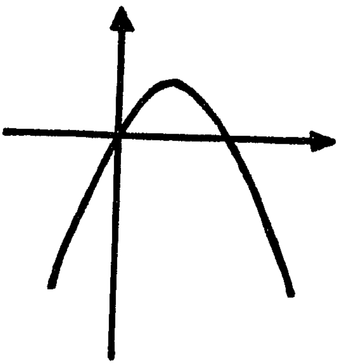
Gráfica de f(x).



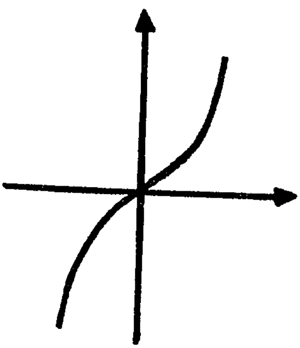
Gráfica de g(x).



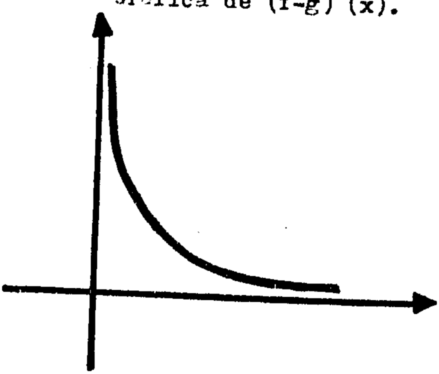
Gráfica de (f+g) (x).



Gráfica de (f-g) (x).



Gráfica de (f.g) (x).



Gráfica de (f/g) (x).

Demostraremos que $f(x) = 2x$ es continua en $x_o = 1$

Aplicando la definición de continuidad:

$$|f(x) - f(x_o)| = |2x-2| = |2(x-1)| = 2\,|x-1|$$

Si $\varepsilon > 0$ encontraremos el valor de δ,

para que $2\,|x-1| < \varepsilon$

basta que $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$

Por lo tanto $|f(x)-f(x_o)| < \varepsilon$ si $|x-x_o| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

esto es f es continua en $x_o = 1$.

Probaremos ahora que $g(x) = x^2$ es continua en $x_o = 1$.

Aplicando la definición de continuidad :

$$|g(x) - g(x_o)| = |x^2 - 1| = |x-1|\ |x+1|$$

y si $\varepsilon > 0$, encontraremos el valor de δ .

Si $|x-1| < 1 = \delta_1$

$x-1 < 1$ basta que

$x+1 < 3$ esto es $|x+1| < 3$

y entonces para $|x-1| < \delta_1$

$$|g(x) - g(x_o)| = |x-1|\ |x+1| < 3\,|x-1|$$

y si $\varepsilon > 0$, para que $3\,|x-1| < \varepsilon$ basta que $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta_2$

Entonces tomando $\delta =$ mínimo $(1, \varepsilon/3)$ concluimos que $g(x)$ es continua en $x_o = 1$.

Demostración de que $F(x) = (f+g)(x) = 2x + x^2$ es continua en $x_o = 1$

Aplicando la definición de continuidad :

$|F(x) - F(x_0)| = |2x + x^2 - 3| = |x-1||x+3|$

Si $|x-1| < 1 = \delta_1$

$x-1 < 1$

$x < 2$

$x+3 < 5$

$|x+3| < 5$

Y entonces para $|x-1| < \delta_1$

$|F(x) - F(x_0)| = |x-1||x+3| < 5|x-1|$

y si $\varepsilon > 0$ y para que $5|x-1| < \varepsilon$ es suficiente que

$|x-1| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta_2$ entoces tomando δ = minímo (δ_1, δ_2)

concluimos que $(f+g)(x)$ es continua en $x_0 = 1$.

Demostración de que $F(x) = (f-g)(x) = 2x - x^2$ es continua en $x_0 = 1$.

Aplicando la definición de continuidad :

$|F(x) - F(x_0)| = |2x - x^2 - 1| = |x^2 - 2x + 1| = |x-1|^2$

Si $\varepsilon > 0$ $|F(x) - F(x_0)| = |x-1|^2$

si y solo si $|x-1| < \sqrt{\varepsilon}$ y por lo tanto si $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ y $|x-1| < \delta$, entonces $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ que es lo que queríamos demostrar.

Demostración de que $F(x) = (f.g)(x) = 2x^3$ es continua en $x_0 = 1$

Aplicando la definición de continuidad :

$|F(x) - F(x_o)| = |2x^3 - 2| = 2|x^3 - 1| = 2|x-1||x^2 + x + 1|$

Si $|x-1| < 1 = \delta_1$ entonces $-1 < x-1 < 1$ de aquí que

$0 < x < 2$ por lo que $x^2 < 4$ y por lo tanto $x^2 + x + 1 < 7$

y entonces para $|x-1| < \delta_1$, $|F(x) - F(x_o)| = 2|x-1||x^2+x+1| < 14|x-1|$

y si $\varepsilon > 0$ y para que $14|x-1| < \varepsilon$ es suficiente que $|x-1| < \varepsilon/14 = \delta_2$

entonces tomando δ = minímo (δ_1, δ_2) concluimos que $(f.g)(x)$ es continua.

Demostración de que $F(x) = (f/g)(x) = 2/x$ es continua en $x_o = 1$

Aplicando la definición de continuidad :

$$|F(x) - F(x_o)| = |2/x - 2| = |2-2x/x| = 2\frac{|1-x|}{|x|}$$

Si $|x-1| \leq 1/2 = \delta_1$ entonces $1/2 \leq |x|$

Por lo tanto $|F(x) - F(x_o)| = 2\dfrac{|1-x|}{|x|} \leq 4|1-x|$

para $\varepsilon > 0$ encontraremos δ tal que si $\delta > 0$ y $\delta \leq 1/2$

entonces tomando δ = minímo $(1/2, \varepsilon/4)$ si $|x-1| < \delta$

obtenemos $|F(x) - F(x_o)| < \varepsilon$

Hemos observado en nuestro ejemplo anterior que si tomamos dos funciones continuas f y g en x_o las funciones $f \pm g$, $f.g$, y f/g son también continuas en x_o ; este hecho se puede generalizar.

TEOREMA :1

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones que son continuas en el punto x_o , entonces :

i) $(f+g)(x)$ es continua en x_o .

ii) $(f-g)(x)$ es continua en x_o .

iii) $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_o .

iv) $(f/g)(x)$ es continua en x_o , suponiendo $g(x_o) = 0$

Demostración i) .-

Como $f(x)$ es una función continua en $x=x_o$ se cumple que si $\varepsilon > 0$ para alguna $\delta_f > 0$ entonces $|f(x) - f(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $|x-x_o| < \delta_f$.

Como $g(x)$ es también una función continua en $x=x_o$ se tiene que para un $\delta_g > 0$ $|g(x) - g(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $|x-x_o| < \delta_g$

Sumando se obtiene que :

$$[f(x) + g(x)] - [f(x_o) + g(x_o)] = [f(x) - f(x_o)] + [g(x) - g(x_o)]$$

y por la desigualdad del triángulo tenemos :

$$|f(x) + g(x) - f(x_o) + g(x_o)| \leq |f(x) - f(x_o)| + |g(x) - g(x_o)|$$

Sabemos también que si $|x-x_o| < \delta_f$ y $|x-x_o| < \delta_g$ entonces

$$|f(x) - f(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - g(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y por lo tanto en este caso :

$$|f(x) + g(x) - f(x_o) + g(x_o)| < \varepsilon$$

Tomando δ igual al minimo entre δ_f y δ_g ; y si $|x-x_o|<\delta$ entonces

$|f(x) + g(x) - f(x_o) + g(x_o)| < \varepsilon$ y por lo tanto la función

$(f + g)(x)$ es continua en $x=x_o$.

Demostración ii).-

En primer lugar demostraremos que si f es una función continua en x_o y $c = 0$ una constante ; Entonces cf es continua en x_o .

Aplicando la definición de continuidad :

$$|c\, f(x) - c\, f(x_o)| = |c\,(f(x) - f(x_o))| = |c|\,|f(x) - f(x_o)|$$

como f es una función continua en x_o entonces se puede encontrar $\delta > 0$ tal que para $|x-x_o|<\delta$, $|f(x) - f(x_o)|< \frac{\varepsilon}{c}$ y por lo tanto $|c|\,|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Regresando al teorema original :

La función $-g = (-1)\,g$ es continua en x_o por el resultado anterior.

Por lo tanto la función $f - g = f + (-g)$ es continua en x_o , ya que la suma de funciones continuas es continua.

Demostración iii).-

Tomemos $\varepsilon > 0$, tratamos de probar que :

$|f(x) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x_o)| < \varepsilon$ siempre que $|x-x_o| < \delta$

para un valor positivo y adecuado de .

Sumando y restando el término $g(x)\, f(x_0)$, tenemos :

$$|(f.g)(x) - f(x_0)\, g(x_0)| = |f(x)\, g(x) - g(x)\, f(x_0) + g(x)\, f(x_0) -$$

$$f(x_0)\, g(x_0)| \leqslant |g(x)|\, |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|\, |g(x) - g(x_0)|$$

Si $|g(x)|$ no se hace grande para x proximo a x_0 , podemos hacer $|(f.g)(x) - f(x_0)\, g(x_0)|$ tan pequeño como queramos haciendo $|f(x) - f(x_0)|$ y $|g(x) - g(x_0)|$ suficientemente pequeño.

Como g es continua existe un número $\delta_1 > 0$, tal que si $|x-x_0| < \delta_1$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < 1$

Por la desigualdad del triángulo tenemos :

$$|g(x)| < |g(x_0) + 1| \quad \text{si} \quad |x-x_0| < \delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Por ser f y g funciones continuas existen números $\delta_2 > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que :

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(g(x_0) + 1)} \quad \text{y} \quad |x-x_0| < \delta_2 \ldots\ldots \quad 2$$

y

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(f(x_0) + 1)} \quad \text{y} \quad |x-x_0| < \delta_3 \ldots\ldots \quad 3$$

Sea $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces , siempre que $|x-x_0| < \delta$, las desigualdades 1 , 2 , 3 se cumplen . Así pues :

$$|(f.g)(x) - f(x_0)\,g(x_0)| \leq |g(x)|\,|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|\,|g(x) - g(x_0)|$$

$$< (\,|g(x_0)| + 1\,)\frac{\varepsilon}{2\,(\,|g(x_0)|+1)} + |f(x_0)|\frac{\varepsilon}{2\,(\,|f(x_0)|+1\,)} <$$

$$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |x-x_0| < \delta$$

Demostración iv).-

$f(x) / g(x)$ es el producto $f(x) \,.\, 1 / g(x)$

Sabemos que el producto de funciones continuas es continua , por lo tanto basta demostrar que $1 / g(x)$ es continua en x_0 , ya que la función $f(x)$ es continua por hipótesis en x_0 .

$$|1 / g(x) - 1 / g(x_0)| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)\; g(x_0)|}$$

Como $g(x)$ es continua en x_0 si $\varepsilon > 0$, se puede elegir $\delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$,

$|g(x) - g(x_0)| < |g(x_0)|/2$ y por lo mismo

$-|g(x_0)|/2 < |g(x)| - |g(x_0)|$ de donde

$|g(x_0)|/2 < |g(x)|$ y entonces

$2 / |g(x_0)| > 1 / |g(x)|$ y

$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\, g^2(x_0) / 2$

Por lo tanto :

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \varepsilon\frac{|g^2(x_0)|\,2}{2\,g(x_0)\;g(x_0)} = \varepsilon$$

si $|x-x_0| < \delta$, esto dice que la función $1 / g(x)$ es continua en el punto x_0 .

TEOREMA : 2

La función polinomial es continua.

Demostración.-

Demostramos en primer lugar que la función $f(x) = x$ y las constantes son continuas ; por lo tanto , por el teorema anterior que dice que el producto de funciones continuas es continua, entonces las siguientes funciones serán continuas.

$x^2 = x \cdot x$

$x^3 = x^2 \cdot x$

.

.

.

Luego toda función x^n , con n natural es continua.

También hemos demostrado que las constantes son continuas , por lo tanto las funciones de la forma cx^n , con c una constante y n natural , son continuas.

Sabemos también que la suma de funciones continuas es continua y ya que los polinomios son sumas de funciones continuas, es decir, funciones de la forma cx^n , concluimos que la función polinomial es continua.

TEOREMA : 3

La función racional es continua en todo punto de su dominio.

Demostración.-

Una función racional se puede escribir como f / g , donde f y g son polinomios que no tienen raíces comunes , ya que los polinomios son continuos esté cociente es continuo en cada punto que no sea raíz del denominador g .

TEOREMA : 4

Continuidad de funciones compuestas.-

Sean f y g funciones que cumplen la condición de ser continuas en x_0 , f continua en x_0 y g continua en $f(x_0) = y_0$; entonces también lo es la función compuesta F , dada por $F(x) = g\,[f(x)]$.

Nota : Sea $f(x)$ definida en un cierto conjunto D y con dominio R y sea $g(y)$ definida en un conjunto D' que contiene al dominio R . Así si x esta en D entonces $f(x)$ esta en D' de tal manera que $g\,[f(x)]$ está definida. La función resultante se llama la composición de g con f .

Demostración:

Sea x_0 un punto de D. Entonces $y_0 = f(x_0)$ esta en D' para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ si $|y - y_0| < \delta_1$

Existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$|f(x) - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \delta_1$ $|$si $x - x_0| < \delta_2$

Así si $|x - x_0| < \delta_2$

$|F(x) - F(x_0)| = |g[f(x)] - g[f(x_0)]| = |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

Ejercicios:

1.- En los siguientes ejercicios $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas de x; definidas para todo valor de x. Cada una de las funciones numeradas abajo es continua. Verifíquelo, usando los teoremas 1, 2, 3, 4.

a) $Q(x) = f(x) + g(x) + f(x)g(x)$

b) $Q(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)^4}$

c) $Q(x) = f(x^2 + 2x)$

2.- Para las siguientes funciones f encuéntrense los puntos (si es que ha algunos) donde la función no es continua:

a) $f(x) = \cot x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

c) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x + 1}$

e)

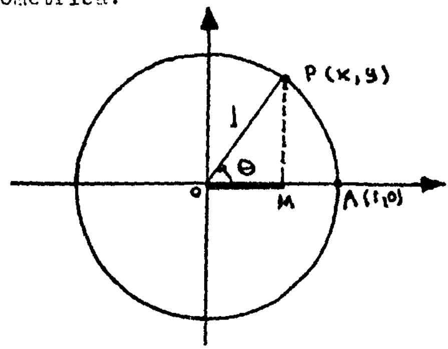
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x - 0 \\ x \text{ si } x \quad (0, 1) \\ 1 \text{ si } x \quad 1, \quad) \end{cases}$$

FUNCIONES TRASCENDENTES:

A continuación estudiaremos algunas funciones trascendentes y demostraremos que son continuas.

Función Seno.-

Es una de las funciones trigonométricas más importantes, recordemos su definición geométrica:



Consideremos la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$. Supongamos que θ es un número real. Coloquemos un ángulo que tiene medida en radianes θ , en posición normal (es decir, tiene el lado "inicial" sobre el lado positivo del eje x).

Sea el punto P la intersección del lado terminal del ángulo con el círculo unitario con centro en el origen. Si P es el punto (x,y), entonces la función seno esta definida por:

$\text{Sen}\ \theta = y$

y la función coseno esta definida por:

$\text{Cos}\ \theta = x$

La definición implica que seno y coseno son periódicos con periodo 2π, esto es:

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

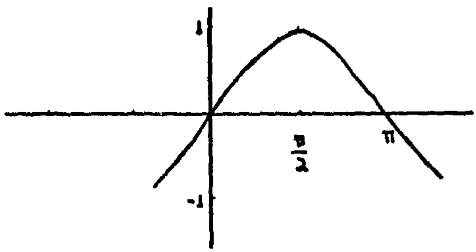
Además $P(0) = (1, 0)$, $P(\pi/2) = (0, 1)$, $P(\pi) = (-1, 0)$ y por lo tanto,

$\cos 0 = \operatorname{sen}\pi/2 = 1, \quad \operatorname{sen} 0 = \cos\pi/2 = \operatorname{sen}\pi = 0, \quad \cos\pi = -1$

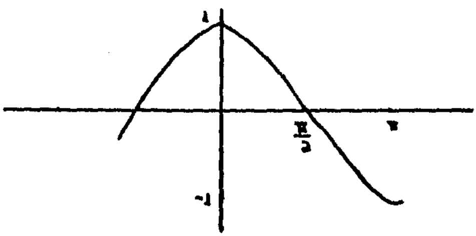
como $P(\theta)$ y $P(-\theta)$ son simétricos respect. del eje x, se tiene:

$$\cos(-\theta) = \cos 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

Las gráficas de sen θ y cos θ en el intervalo $[0, \pi]$ se ilustran en las siguientes figuras.



Gráfica de la función sen x

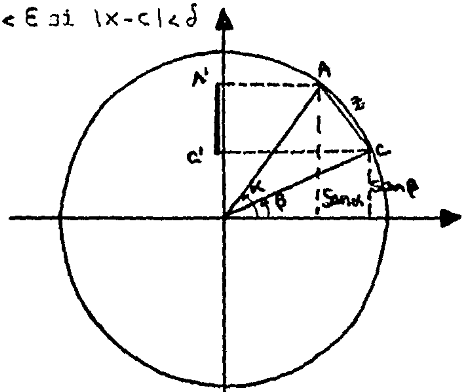


Gráfica de la función cos x

Demostraremos que la función seno así definida es continua para todo valor c.

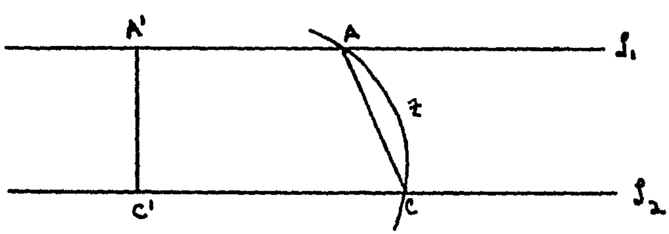
Aplicando la definición de continuidad debemos demostrar que:

$|\text{Sen } x - \text{Sen } c| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$



Para esto queremos demostrar que $|\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\beta|$ es menor que la longitud del arco AC determinado por arco α - arco β.

Sea Z= longitud del arco determinado por arco α - arcoβ. Si proyectamos en el eje y la diferencia de senα - sen β es claro que es menor que el arco Z ; veamoslo de la siguiente manera:



Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas, entonces el camino más cor to para unir un punto en L_1 y otro en L_2 es una recta perpendicular, esto es:

$$\overline{A'C'} \leq \overline{AC} \leq \alpha - \beta$$

Por lo tanto $\quad |\text{Sen}\,\alpha - \text{Sen}\,\beta| \leq \alpha - \beta$

Regresando a la demostración de continuidad de sen x para todo c tomando $\varepsilon = \delta$ tenemos que:

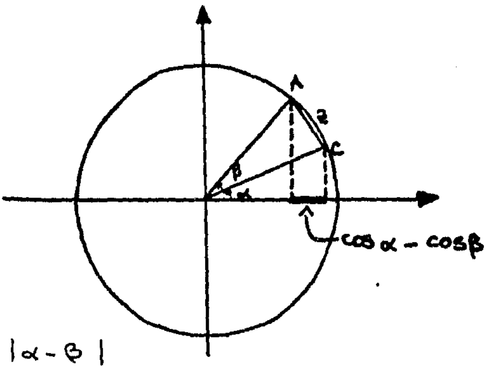
$|\text{Sen } x - \text{Sen } c| < \varepsilon$ para $|x-c| < \delta$

por lo tanto la función es continua en todo c .

Función Coseno.-

Demostremos que la función coseno es continua para todo valor c.

Utilizando el mismo argumento que en la función seno tenemos:



$|\cos\alpha - \cos\beta| \leq |\alpha - \beta|$

Aplicando la definición de continuidad a la función coseno tenemos que: para $\varepsilon = \delta$

$$|\cos x - \cos c| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x-c| < \delta$$

Por lo tanto la función coseno es continua en todo c.

Las funciones tan x, cot x, sec x, csc x, son continuas en cada punto donde estan definidas.

Demostrar lo anterior es simple , ya que estas funciones las podemos expresar de la siguiente manera :

Tan. x = Sen.x / Cos.x

Cot.x = Cos.x / Sen.x

Sec.x = 1 / Cos.x

Csc.x = 1 / Sen.x

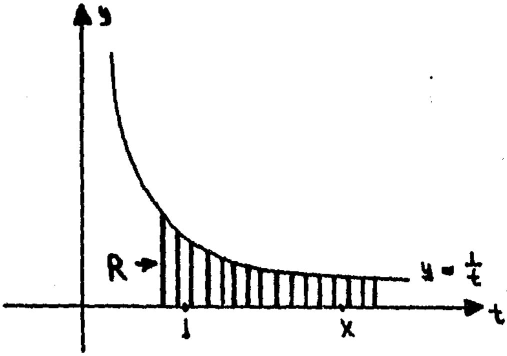
Y ahora aplicando los teoremas acerca de que las operaciones de funciones continuas son continuas , su validez es inmediata.

Función logaritmo.

Definición.- Consideremos la función definida por la ecuación $y = 1 / t$, donde $t > 0$.

Sea R el área comprendida de la siguiente manera :

$$R = \begin{cases} \text{área entre } y=1/t,\ y=0,\ t=x,\ t=1 & \text{para } x \geq 1 \\ -\text{área entre } y=1/t,\ y=0,\ t=1,\ t=x & \text{para } x < 1 \end{cases}$$

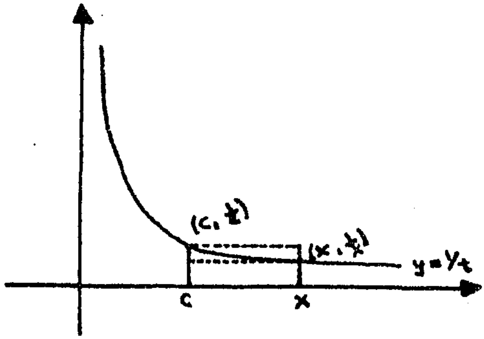


El área de R es una función de x . Llamemosla A(x) y definamosla como $\ln x = A(x)$.

Lo que queremos es demostrar que la función $\ln x$ es continua en todo c .

Primeramente demostraremos que $\ln x$ es continua para $c \geq 1$.

..., primero consideremos los puntos x tales que $x > c$ y $c > 1$



De la figura observamos que :

$(c-x)\ 1/c < \ln t < (c-x)\ 1/x$

Aplicando la definición de continuidad ; queremos que para $\varepsilon > 0$,

$|\ln x - \ln c| < \varepsilon$ si $|x-c| < \delta_1$, entonces debemos encontrar un valor de δ_1 .

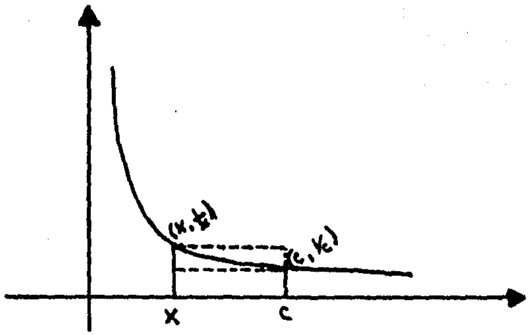
De la figura también vemos que :

$|\ln x - \ln c| < |x-c|\ 1/c$ por lo tanto

$|\ln x - \ln c| < \varepsilon$ si $|x-c| < \delta_1 = c\varepsilon$

Hemos encontrado $\delta_1 > 0$ que sirve para $c < x$.

Ahora si $x < c$ encontraremos $\delta_2 > 0$ que sirva en este caso.



Observamos en la figura que :

$(c-x)\,1/c < \ln t < (c-x)\,1/x$ y también que

$|\ln c - \ln x| < |c-x|\, 1/x$

De acuerdo a la definición de continuidad debemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que $|\ln c - \ln x| < \varepsilon$ si $|c-x| < \delta_2$;

encontrremos el valor de δ_2 .

Si $|c-x|\, 1/x < \varepsilon$ entonces $c-x < \varepsilon x$ esto es $c < (\varepsilon + 1)\,x$ de aquí que $x > c/\varepsilon + 1$

Por lo tanto $|c-x| < c\varepsilon/\varepsilon + 1$ entoces

$|\ln x - \ln c| < \varepsilon$ si $|c-x| < \delta_2 = c\varepsilon/\varepsilon + 1$

Ahora tomando la menor de $(\delta_1$ y $\delta_2)$

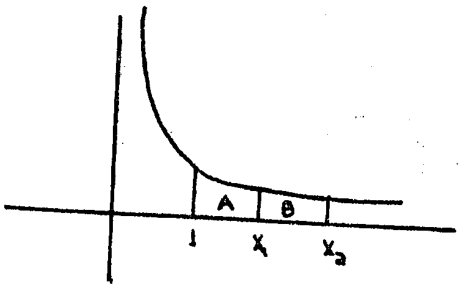
$|\ln x - \ln c| < \varepsilon$ si $|x-c| < \delta$

Esto dice que la función logaritmo es continua para todo $c > 0$.

A continuación daremos algunas propiedades de la función logaritmo.

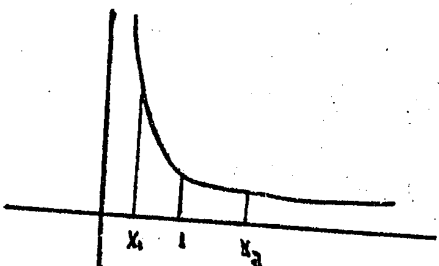
La función logaritmo es monótona creciente esto es (a un mayor valor de la variable x corresponde un mayor valor de la función, en otras palabras si $x_1 < x_2$ entonces $\ln x_1 < \ln x_2$ lo demostraremos por casos.

Caso 1.- Si $1 \leq x_1 < x_2$



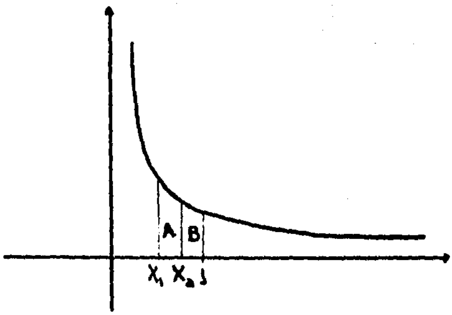
De la figura observamos que $\ln x_2$ = área A + área B = $\ln x_1$ + área B por lo tanto $\ln x_1 < \ln x_2$.

Caso 2 .- Si $x_1 \leq 1 < x_2$



Aplicando la función logaritmo obtenemos que $\ln x_1 \leq 0 < \ln x_2$.

Caso 3.- Si $x_1 < x_2 < 0$



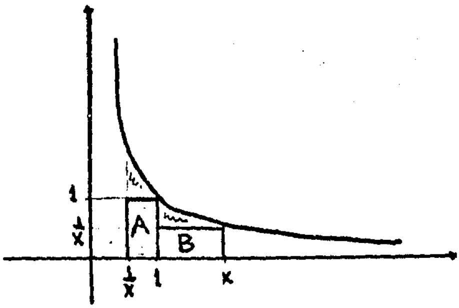
En la figura observamos que:

$\ln x_1$ = (-área A) + (-área B) = (-área A + $\ln x_2$) por lo tanto:

$$\ln x_1 < \ln x_2$$

Otra propiedad importante es la siguiente:

$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$



En la figura observamos que las regiones marcadas con espiral (~~) son iguales ya que la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ es simétrica con respecto a la recta $y = x$, por lo que para completar la demostración basta ver que el área de la región A es igual al área de la re gión B.

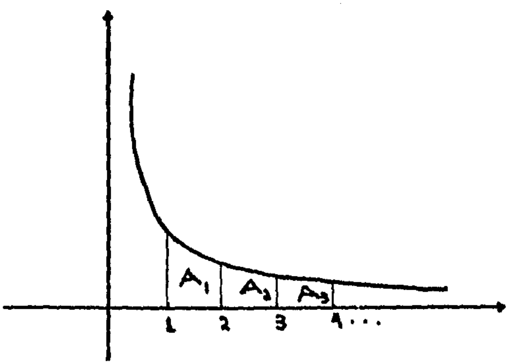
Area $A = (1 - \frac{1}{x})1 = 1 - \frac{1}{x}$; Area $B = (x - 1)\frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

por lo tanto para $x > 1$ $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$, esta igualdad es cierta también para $x = 1$ y $x < 1$ por lo siguiente:

Si $x = 1$ entonces $\ln 1 = 0 = -\ln 1$ y si $x < 1$ entonces $\frac{1}{x} > 1$, por lo tanto $\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -\ln \frac{1}{x}$, de aquí que $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$

Por último veremos que ln x tiende a infinito cuando x tiende a infinito ($\ln x \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$) y que ln x tiende a -infinito cuando x tiende a cero ($\ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$).

Si n es un número entero positivo y $z > n$ de la siguiente figura



$\ln z >$ área A_1 + área A_2 + ... + área $A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

Ahora agrupemos los sumandos de la derecha en la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ . \ . \ . + \frac{1}{n}$$

la suma en cada paréntesis es mayor que $\frac{1}{2}$ y por lo tanto las sumas de la derecha son tan grandes como uno quiera, por lo tanto queda demostrado que:

$$\underset{x \to \infty}{\ln x \longrightarrow \infty}$$

De la igualdad

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

se observa fácilmente que cuando x tiende a cero, el logaritmo tiende a menos infinito.

TEOREMA:

Valores extremos.

Si f es continua en un intervalo cerrado [a, b] , existen puntos c y d en [a, b] tales que f(c) es el valor máximo* de la función f en el intervalo [a, b] y f(d) es el valor mínimo** de la función f en el intervalo [a, b] .

Demostración:

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica de la función f debe tener, por lo menos, un punto más alto y otro más bajo.

* Es decir para cada $x \in [a, b]$, $f(c) \geq f(x)$

** Es decir para cada $x \in [a, b]$, $f(d) \leq f(x)$

Llamemos I al intervalo $[a\ ,\ b]$ en el cuál esta definida $f(x)$.
Dividiremos I en dos partes por su punto medio;

$$\begin{array}{c} \quad I' \qquad\qquad\qquad I'' \\ a\ \underbrace{\rule{4em}{0.4pt}}_{\frac{(a+b)}{2}}\rule{4em}{0.4pt}\ b \\ I \end{array}$$

y fijamos nuestra atención sobre I' ,como el intervalo donde debe buscarse el valor máximo de $f(x)$, a menos que exista un punto α en I'' , tal que $f(\alpha)$ exeda a cualquier valor de $f(x)$ en I' ; si así ocurriera eligiriamos I'' . Llamaremos I_1 al intervalo asi elegido.

Procedamos ahora con I_1 de igual forma que hicimos con I , obteniendo un intervalo I_2 .

$$\frac{\text{Longitud de } I_1}{\frac{(a+b)}{2}} \qquad\qquad \frac{\text{Longitud de } I_2}{\frac{(a+b)}{4}} \qquad\qquad \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Mediante este proceso , obtenemos una sucesión $I_1, I_2, I_3 \ldots . I_n ..$ de intervalos que tienen un único punto en común z .

Demostraremos que el valor $f(z) = M$ es el mayor que toma la función en I ; esto es , no puede existir un punto s en I para el cual $f(s) > M$. Supongamos que existe un punto s tal que $f(s) = M + 2\varepsilon$, donde ε es un número positivo . Alrededor de z

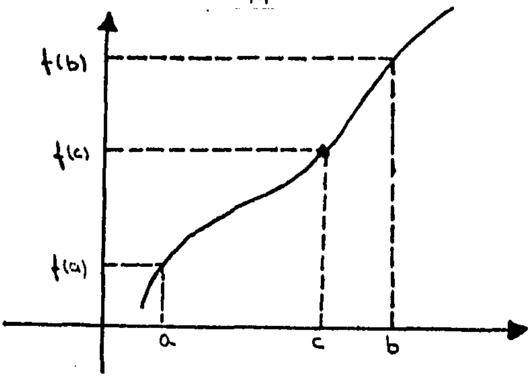
como centro , dado que $f(x)$ es continua , consideremos un pequeño intervalo K , tal que s quede fuera de él y que los valores que en K tome $f(x)$ difieran de $f(z) = M$ en menos de ε , por lo que se tendrá , en K , $f(x) < M + \varepsilon$ pero, para n suficientemente grande , el intervalo I_n queda dentro de K , y , por otra parte , se definió I_n de tal manera que ningún valor de $f(x)$ para todo x fuera de I_n pudiera superar a los valores de $f(x)$ para los x de I_n . Ya que s esta fuera de I_n , y $f(s) > M + \varepsilon$, mientras que en K , y por consiguiente en I_n , tenemos que $f(x) > M + \varepsilon$, hemos llegado a una contradicción.

Si ahora vemos que el valor minímo de $f(x)$ es menos el maximo de $- f(x)$ como $-f$ es continua , con este mismo método queda demostrado que f alcanza su valor minímo en $[a , b]$.

TEOREMA :

Del valor intermedio.

Sea $f(x)$ continua en $a \leq x \leq b$ y supongamos que $f(a) \neq f(b)$. Si γ es cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un punto c $a < c < b$ tal que $f(c) = \gamma$.



Demostración:

Consideremos el caso $f(a) < \gamma < f(b)$.

Llamemos I al intervalo $[a,b]$ en el cual esta definida $f(x)$. I tiene la propiedad de que en el extremo izquierdo de este intervalo f toma un valor menor que γ y en el extremo derecho f toma un valor mayor que γ.

Dividiremos I en dos partes por su punto medio:

$x_1=\frac{(a+b)}{2}$, si resultase ser $f(x_1)=\gamma$ el teorema quedaría demostrado. Sin embargo, si $f(x_1)\neq\gamma$; $f(x_1)$ será mayor o menor que γ. En cualquiera de los dos casos, alguna de las dos mitades en que dividimos I gozará ahora de la misma propiedad, que I.

Llamemos I_1 a este nuevo intervalo y repitamos el mismo proceso, dividiendo I_1 en dos partes iguales; será entonces $f(x)=\gamma$ en el punto medio de I_1 , o, de lo contrario, podemos elegir un intervalo I_2 , mitad de I_1 con la propiedad mencionada; repitiendo este procedimiento, después de un número finito de bisecciones encontraremos un punto para el cual $f(x)=\gamma$, o tendremos una sucesión de intervalos encajados I_1 , $I_2 \ldots\ldots I_n \ldots$ que tienen un único punto en común.

Afirmamos que $f(c)=\gamma$ o sea que c es el punto cuya existencia afirma el teorema. Hasta ahora no hemos utilizado la hipótesis inicial de la continuidad de la función. La usaremos ahora para completar la demostración mediante el siguiente razonamiento:

Demostraremos que $f(c)=\gamma$, suponiendo lo contrario y deduciendo una contradicción.

Supongamos que $f(c)\neq\gamma$; por ejemplo $f(c)$ mayor que γ .

Dado que $f(x)$ es continua podemos encontrar un intervalo J (tal vez muy pequeño) cuyo punto medio sea c y tal que en todo el valor de $f(x)$ difiera de $f(c)$ en menos de ε . Ahora bien, como el intervalo J es fijo, bastará tomar n suficientemente grande para que el intervalo I_n quede enteramente dentro de J , ya que la sucesión I_n tiende a cero. Aquí aparece la contradicción, pues de la forma como se eligió I_n , resulta que la $f(x)$ debe tener valores diferentes en los extremos de todo I_n , por lo que $f(x)$ tiene que tomar valores menores en algun punto de J. El absurdo a que conduce suponer $f(c)>\gamma$ o bien $f(c)<\gamma$, demuestra que $f(c)=\gamma$

.

DEFINICION:

Función inversa.

Un método importante para encontrar nuevas funciones es el siguiente: comenzando por una función conocida $f(x)$, intentamos resolver la ecuación $y = f(x)$, respecto a x, de tal modo que x aparezca como función de y: $x = g(y)$.

La función $g(y)$ se llamará entonces una función inversa de $f(x)$. Este procedimiento conduce a un resultado único sólo cuando la función $y = f(x)$ es biunívoca del dominio de $f(x)$ en su rango, es decir, si la desigualdad $x_1 \neq x_2$ implica siempre esta otra: $f(x_1) \neq f(x_2)$ pues solo entonces quedará definida unívocamente una x para cada y. Observando la gráfica de una función $y = f(x)$ puede deducirse de una ojeada la existencia de una función inversa única. Esta estará unívocamente definida, si a cada valor de y corresponde solo uno de x. En la gráfica esto significa que ninguna paralela al eje x corta a la curva en más de un punto, lo que ocurrirá por ejemplo si la función $y = f(x)$ es monótona; es decir si aumenta o disminuye constantemente al aumentar x; por ejemplo si $y = f(x)$ es monótona creciente, para $x_1 < x_2$ se tendrá siempre:

$$y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$$

De aquí se deduce que para cada valor de y puede existir a lo más un x, tal que $y = f(x)$, con lo que la función inversa quedará definida unívocamente.

TEOREMA:

De la función inversa.

Si f es una función continua monótona creciente en $[a,b]$ con $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$ entonces existe una función inversa única de f; ϕ , definida en $[\alpha, \beta]$ estrictamente creciente y continua allí.

Demostración:

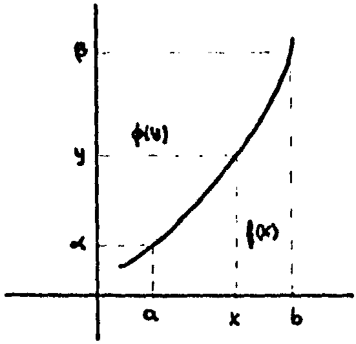
Por el teorema del valor intermedio para toda y en $[\alpha, \beta]$ existe $x \in [a, b]$ para el cual $f(x) = y$ y como f es estrictamente creciente, x es única. Así esta x depende de la y escogida y se denotará por $\phi(y)$. Luego, por definición:

$$\phi[f(x)] = \phi(y) = x$$

Aplicando f a ambos miembros se obtiene:

$$f\ (\ \phi\ (y)\ )\ = f(x) = y$$

De aquí que la función única $\phi\ (y)$ es la inversa de f.



Puede verse que ϕ es estrictamente creciente, de la manera siguiente:

Escojanse y_1 y y_2, digamos $y_1 > y_2$ y sean x_1 y x_2 respectivamente las correspondientes x. Entonces supóngase, por contradicción que:

$$x_1 = \phi\ (y_1) \quad \leqslant \phi\ (y_2) \quad = \ x_2$$

aplicando f a ambos miembros y aplicando la monotonía de f,

se tiene que :

$$y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$$

esta es una contradicción y de aquí se obtiene la estricta monotonía de ϕ.

Para probar la continuidad elijamos un punto y_0 en $[\alpha, \beta]$.

Para demostrar que $\phi(y)$ es continua en y_0, debemos probar que

para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$|\phi(y) - \phi(y_0)| < \varepsilon$ si $|y-y_0| < \delta$

en otras palabras:

$$\phi(y_0) - \varepsilon < \phi(y) < \phi(y_0) + \varepsilon \quad \text{siempre que}$$

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$$

Pongamos $x_0 = g(y_0)$, de modo que $f(x_0) = y_0$.

Supóngamos $\varepsilon > 0$. Sea δ el menor de los siguientes números

$[f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)$ y $f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)]$

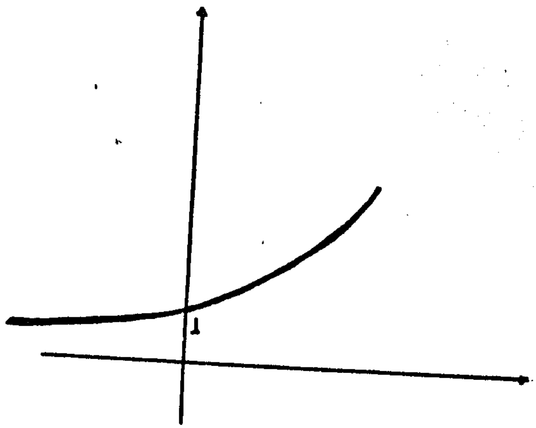
Si $|y - y_0| < \delta$ entonces

$f(x_0 - \varepsilon)$ y $f(x_0 + \varepsilon)$ por lo tanto

$$x_0 - \varepsilon < \phi(y) < x_0 + \varepsilon$$

con lo cuál queda concluida la demostración.

Hemos visto que ln x tiene como su dominio de definición el intervalo semi-infinito $\{0 < x < \infty\}$, que es continua y estrictamente creciente, y que su rango es $\{-\infty < x < \infty\}$. Por lo tanto, tiene una función inversa continua única cuyo dominio es $\{-\infty < x < \infty\}$ y cuyo rango es $\{0 < x < \infty\}$ los valores de esta función inversa se denotan por: exponencial $x = e^x$

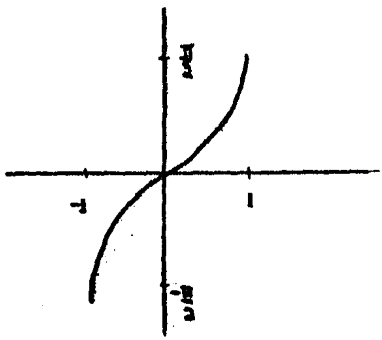


Gráfica de exponencial x .

Función arc sen x y arc. cos x.

Por supuesto sen θ y cos θ no son funciones monótonas. Para definir la función inversa de cos θ y sen θ es necesario elegir un intervalo en el cual estas funciones sean crecientes o decrecientes. En el caso de sen θ, recordando su gráfica, resulta que sen θ es creciente para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ por lo tanto, la función seno tiene inversa, denominada arco seno. Por supuesto, esta inversa esta definida en el intervalo $[-1, 1]$.

θ = arc sen x significa que x = sen θ, $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



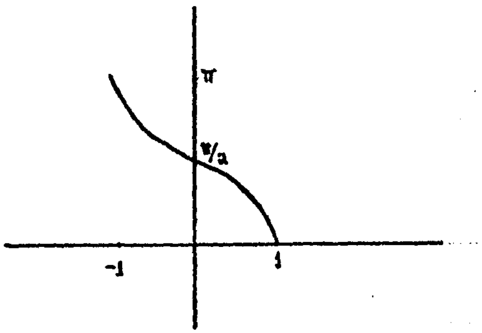
Gráfica de la función arc sén θ

En el caso de la función coseno elegimos el intervalo $[0, \pi]$ en donde la función es decreciente, la función inversa de cos θ en ese intervalo se llama arco coseno.

$\theta = \text{arc cos } x$ significa que $x = \cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

o bien $\text{arc cos }(\cos\theta) = \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$

la función arc cos θ esta definida sólo para $-1 \leq \theta \leq 1$



Gráfica de la función arc cos θ

Función arc tg x.

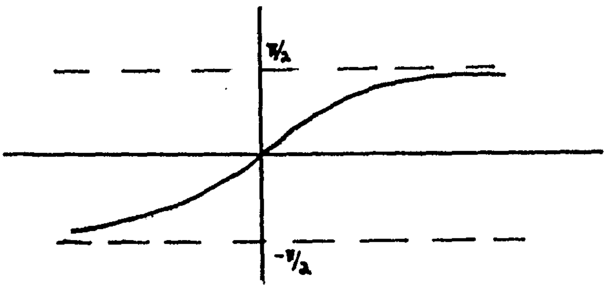
Recordemos que definimos la función tg θ como:

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos\theta}$$

esta función esta definida y es continua para todos los valores de θ en los que $\cos\theta \neq 0$, es decir, para $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n = 0, \pm 1, \ldots$

la tangente es monótona creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.
De todo lo anterior podemos concluir que la función tg θ tiene inversa, esta función se llama arc tg θ y esta definida para todos los valores de θ.

Como tg (0) = 0 resulta que arc tg(0) = 0



Grafíca de la función arc tg (θ)

Ejercicios:

1.- Supongamos que f es continua en el intervalo $[-1\ 1]$ y que

$f(-1) = 2$

$f(0) = -1$

$f(1) = 3$

¿Cuál es el mínimo número de raíces que f puede tomar en ese intervalo?

2.- Defina una función en el intervalo $[-1\ 1]$, continua en todo punto, excepto en 0. positiva en 1 y negativa en -1 y que no tenga raíces. ¿Contradice tal función al teorema del valor intermedio?

3.- En los siguientes incisos decidir su la función tiene o no inversa, en caso afirmativo encontrarla.

a) $f(x) = x^2$ definida para toda x

b) $f(x) = x^2 + x - 1$ definida para todo x

c) $f(x) = x^2 + x - 1$ definida para $x \geqslant -1/2$

d) $f(x) = x^2 + x - 1$ definida para $x \leqslant -1/2$

4.- ¿Es la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

continua en $(-\pi/2, \pi/2)$?

5.- Pruébese que la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, \infty)$

BIBLIOGRAFIA.

Tom M. Apostol , Calculus vol. 1 .
Ed. Reverté 1979.

Richard Courant,Herbert Robbins ; ¿ Qué es la matemática ?
Ed. Aguilar 1971.

Louis Leithold ; El calculo con geometría analítica.
Ed. Harla 1973.