Universidad Nacional Autónoma de México
FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE SCHOENFLIES

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

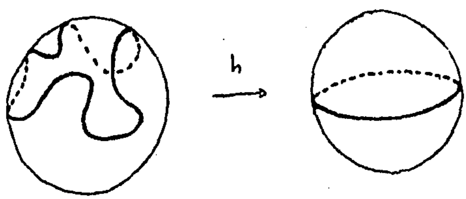
MAX NEUMANN COTO

México, D. F. 1985

INDICE

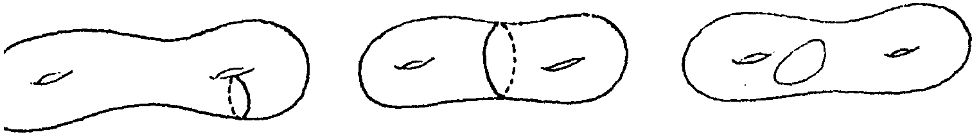
INTRODUCCION.

Sea S^2 la esfera estandar en $\mathbb{R}^3$ y sea S^1 el ecuador de S^2. El teorema de la curva de Jordan dice que si Σ es un subconjunto de la esfera homeomorfo a S^1, entonces Σ divide a la esfera en dos componentes conexas, de las que es frontera común. En 1908 Schoenflies probó que existe un homeomorfismo $h: S^2 \to S^2$ que lleva a Σ sobre S^1.



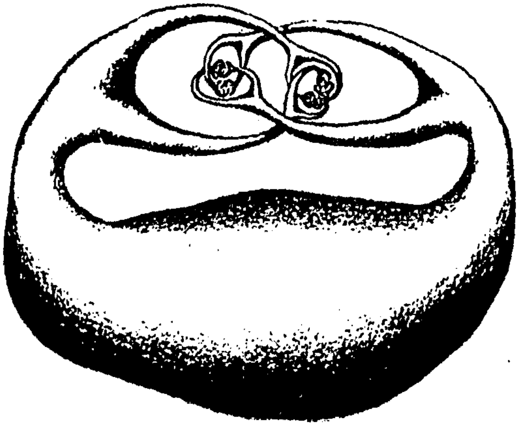
El teorema de Schoenflies fue el primer resultado importante de un problema muy general: dado un espacio topológico X y un subconjunto Y de X ¿cuantas formas esencialmente distintas de encajar Y en X existen?
Si por ejemplo cambiamos S^2 por la superficie del doble toro, vemos que hay al menos tres formas esencialmente distintas de encajar a S^1: hay 1-esferas

que separan al doble toro, mientras que otras no lo hacen. De las primeras, algunas son el borde de un disco encajado en la variedad y otras no.



En 1912 Brower demostró un analogo del teorema de Jordan en dimensiones mayores: Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\}$ y veamos a S^{n-1} como el ecuador de S^n. Si Σ es cualquier subconjunto de S^n homeomorfo a S^{n-1}, entonces Σ divide a S^n en dos componentes conexas, de las que es frontera común.

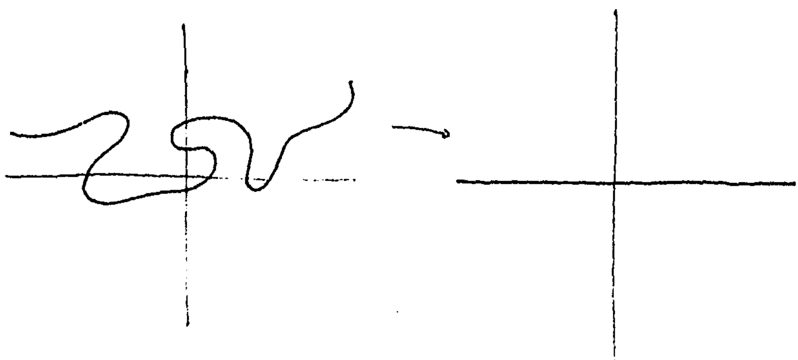
Quedó entonces la siguiente pregunta: ¿existirá un homeomorfismo $h: S^n \to S^n$ que lleve a Σ sobre S^{n-1}? Alexander, en 1924, encontro una superficie en $\mathbb{R}^3$, homeomorfa a la esfera y cuyo exterior (la componente no acotada del complemento) no es homeomorfo al exterior de S^2. De aqui resulta, anadiendo un "punto al infinito" a $\mathbb{R}^3$, un ejemplo de un subconjunto de S^3, homeomorfo a S^2, que no puede ser llevado a S^2 por un homeomorfismo de S^3 sobre si misma.



LA ESFERA DE
ALEXANDER

La idea de este trabajo es presentar los primeros resultados de la busqueda de condiciones para que un encaje $h: S^{n-1} \to S^n$ pueda extenderse a un homeomorfismo $\bar{h}: S^n \to S^n$.
En el capitulo 1 veremos que si junto con S^{n-1} podemos encajar una de sus vecindades (es decir, si $h: S^{n-1} \to S^n$ puede extenderse a un encaje $h': V \to S^n$, donde V es una vecindad de S^{n-1} en S^n) entonces las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - h(S^{n-1})$ son n bolas, y por lo tanto h puede extenderse a un homeomorfismo $\bar{h}: S^n \to S^n$.
El capitulo 2 es acerca de la posibilidad de extender h a una vecindad de S^{n-1}: se verá que en el fondo es una propiedad local del encaje, que depende de que cada punto de $h(S^{n-1})$ tenga una vecindad U en S^n en la que $h(S^{n-1}) \cap U$ esté encajado de la misma forma que $\mathbb{R}^{n-1}$ lo está en $\mathbb{R}^n$

es decir que $h(S^{n-1})$ sea "localmente plana" en S^n.
En el capítulo 3 trataremos el problema de los encajes de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$: una consecuencia del teorema de Schoenflies es que si P es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo a $\mathbb{R}$ entonces existe un homeomorfismo del plano en sí mismo que lleva a P sobre una línea recta.



En dimensiones mayores hay un fenómeno interesante: Aún la condición "localmente plano" es insuficiente para asegurar que un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ pueda ser llevado a un plano por un homeomorfismo del espacio ambiente, pero probaremos que los encajes cerrados y localmente planos de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, sí son aplanables.

□

1. El TEOREMA GENERALIZADO DE SCHOENFLIES.

Lo que sigue está basado en el artículo "A proof of the generalized Schoenflies theorem" de M. Brown [1]

Definiciones y notación.

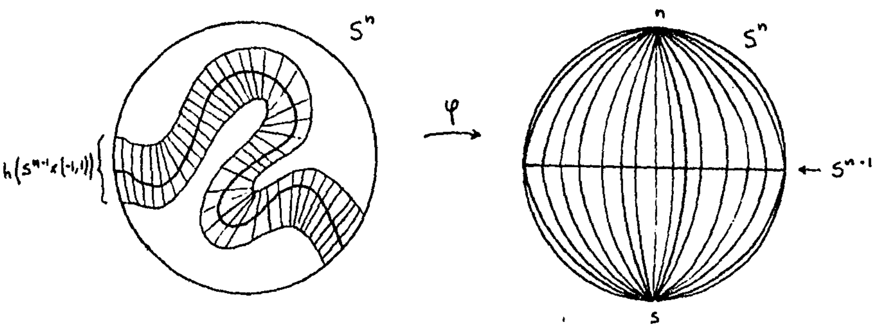
Una <u>n esfera</u> es un espacio homeomorfo a $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\}$
Una <u>n bola</u> es un espacio homeomorfo a $B^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| \leq 1\}$
$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n \geq 0\}$, $S^n_+ = S^n \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$. Veremos a $\mathbb{R}^{n-1}$ como el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ con ultima coordenada 0 y a S^{n-1} como $S^n \cap \mathbb{R}^n$.
Si M es una variedad con borde, $\mathring{M}$ denotará el interior de M y ∂M el borde de M. $\mathrm{Int}_X Y$ y $\mathrm{Fr}_X Y$ denotaran el interior y la frontera topológicos de Y en X. Un <u>encaje</u> de Y en X es un homeomorfismo de Y sobre un subconjunto de X. Un <u>mapeo</u> es una función continua. La doble flecha $f: X \twoheadrightarrow Y$ indica que f es suprayectiva. $\approx$ denotará homeomorfismo.

Sea Σ una n-1 esfera encajada en S^n. Diremos que Σ es <u>plana</u> si existe un homeomorfismo $h: S^n \longrightarrow S^n$ tal que $h(\Sigma) = S^{n-1}$. Diremos que Σ está <u>bicollareada</u> si tiene una vecindad en S^n homeomorfa a $S^{n-1}\times(-1,1)$, por un homeomorfismo que lleva a Σ en $S^{n-1}\times\{0\}$.
Probaremos que todas las esferas bicollareadas son planas (el recíproco es inmediato) y mostraremos algunas consecuencias de este resultado.
En la demostración usaremos ampliamente el teorema de la invariancia del dominio : Si U es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ entonces U es abierto.
Una prueba de este resultado y del teorema de separación de Jordan-Brower puede verse en el libro de Edwin H. Spanier "Algebraic Topology"

□

Es facil ver que una n-1 esfera Σ encajada en S^n es plana si y solo si las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - \Sigma$ son n bolas. (ver el lema 1.12).
Supongamos entonces que Σ está bicollareada, y sea $h: S^{n-1}\times(-1,1) \to S^n$ un encaje tal que $h(S^{n-1}\times 0) = \Sigma$
Sean $n = (0,0,\ldots,0,1)$ y $s = (0,0,\ldots,0,-1)$ los "polos" de S^n.

entonces $h(S^{n-1}\times(-1,1))$ es homeomorfo a $S^n-\{n,s\}$, por un homeomorfismo que lleva a $h(S^{n-1}\times 0)$ en el ecuador de S^n, y el homeomorfismo puede extenderse a un mapeo φ de S^n sobre S^n definiendolo como n en una de las componentes conexas de $S^n-h(S^{n-1}\times(-1,1))$ y como s en la otra.



Llamemos G a la cerradura de una de las componentes conexas de $S^n-h(S^{n-1}\times 0)$: φ mapea a G sobre un hemisferio de S^n, de forma que un subconjunto K del interior de G se colapsa a un punto, y fuera de G φ es uno a uno.

Sean S y T espacios topológicos y $\varphi : S \to T$ un mapeo. Un <u>conjunto singular</u> de φ es un conjunto de la forma $\varphi^{-1}\{t\}$ con $t\in T$ y que tiene mas de un punto.

Veremos que los mapeos de S^n sobre S^n con un número finito de conjuntos singulares se comportan casi como homeomorfismos con respecto a muchos subconjuntos de S^n : si $C\subset S^n$ es tal que cada conjunto singular de φ está contenido o en $\operatorname{Int}_{S^n}C$ o en S^n-C, entonces $f(C)$ es homeomorfo a C.

Para esto veremos que los conjuntos singulares de tales mapeos son de un tipo muy especial.

Un subconjunto X de una n variedad con borde M^n se llama celular en M^n si existe una sucesión $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de n bolas encajadas en M tales que $X = \bigcap_{i}^{\infty} Q_i$ y $Q_{i+1} \subset \mathring{Q}_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Resulta que si $\varphi : S^n \twoheadrightarrow S^n$ es un mapeo con un numero finito de conjuntos singulares, entonces estos son celulares en S^n.

Un subconjunto celular X de una variedad con borde M^n es, visto desde el complemento, como un punto de M^n: $M^n/_X \approx M^n$ y $M^n - X \approx M^n - \{p\}$ donde $p \in X$ (ver el corolario 1.9)

Hay que resaltar que el ser celular no es una propiedad intrinseca de X, sino resultado de la forma en que X está encajado en M: existen n bolas que no son celulares en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo es consecuencia del teorema de Schoenflies que los subconjuntos celulares de $\mathbb{R}^2$ son presisamente los subconjuntos compactos, conexos y no vacios del plano que no lo separan.

$\square$

<u>Lema 1.1</u> Sean X y Y espacios métricos, X compacto. Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es un mapeo inyectivo, entonces es un homeomorfismo.

$\square$

Lema 1.2 . Sean M y N n variedades. Si $\varphi : M \to N$ es un mapeo inyectivo, entonces φ es un homeomorfismo de M sobre un abierto de N.

Demostración. Falta mostrar que φ es una función abierta. Sea A un abierto de M, y $p \in A$. Sea V una vecindad de $\varphi(p)$ en N homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Como $\varphi^{-1}(V)$ es abierta en M, existe una vecindad U de p en M tal que $U \approx \mathbb{R}^n$, $U \subset A \cap \varphi^{-1}(V)$ y $\bar{U}$ es compacto. Por el lema 1.1, $\varphi|_{\bar{U}} : \bar{U} \twoheadrightarrow \varphi(\bar{U})$ es un homeomorfismo. Entonces $\varphi|_U : U \twoheadrightarrow \varphi(U) \subset V$ es un homeomorfismo y por el teorema de la invariancia del dominio $\varphi(U)$ es abierto en V y por lo tanto en N.

$\square$

Lema 1.3 . Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ un mapeo con un número finito de conjuntos singulares todos ellos compactos. Entonces $\varphi(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $S_1, S_2, \ldots, S_K$ los conjuntos singulares de φ. Por el lema 1.2 $\varphi(A - \bigcup_1^K S_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostraremos que $\varphi(p) \in \operatorname{Int} A$ $\forall p \in \bigcup_1^K S_i$.

1. Como los S_i son compactos, existe un abierto V con cerradura compacta $\bar{V}$ tal que $\bigcup_1^K S_i \subset V \subset \bar{V} \subset A$.

(Sea $\varepsilon > 0$ y menor que la distancia de $\bigcup_{i}^{k} S_i$ a $\mathbb{R}^n - A$, tomar $V = \{ x \in A \,/\, d(x, \bigcup_{i}^{k} S_i) < \varepsilon \}$). Sea $p \in \bigcup_{i}^{k} S_i$ y V_1 la componente conexa de V que contiene a p. Entonces $\operatorname{Fr} V_1 \cap V = \emptyset$ de donde $\varphi(V_1) \cap \varphi(\operatorname{Fr} V_1) = \emptyset$. Por lo tanto, como V_1 es conexo, $\varphi(V_1)$ está contenido en una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \varphi(\operatorname{Fr} V_1)$, a la que llamaremos U. Como $\operatorname{Fr} V_1$ es compacto, entonces $\varphi(\operatorname{Fr} V_1)$ es compacto $\therefore$ U es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostrando que $\varphi(V_1) = U$ habremos terminado.

$\overline{V}_1$ es compacto $\therefore$ $\varphi(\overline{V}_1)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ $\therefore$ $\varphi(V_1) = \varphi(\overline{V}_1) \cap U$ es cerrado en U $\therefore$ $\operatorname{Fr}_U \varphi(V_1) \subset \varphi(V_1)$.

Por el lema 1.2 $\varphi(V_1 - \bigcup_{i}^{k} S_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ $\therefore$ $\operatorname{Fr}_U \varphi(V_1) \subset \varphi(V_1) \cap \varphi(\bigcup_{i}^{k} S_i)$ que es un conjunto finito.

Entonces $\varphi(V_1) = U$, en vista del siguiente resultado.

2. Si U es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ y C es un cerrado infinito de U, distinto de U, entonces $\operatorname{Fr}_U C$ es un conjunto infinito: Sea $p \in \operatorname{Int}_U C$ y $q \in U - C$. Sea α una trayectoria en U que vaya de p a q y llamemos r al primer punto de α que está en $\operatorname{Fr}_U C$. Sea V una vecindad de r en U, $V \approx \mathbb{R}^n$, y sean $p_1 \in V \cap \operatorname{Int}_U C$ y $q_1 \in V \cap (U - C)$. Por cada arco en V que vaya de p_1 a q_1, hay un punto de $\operatorname{Fr}_U C$ (por supuesto distinto de p_1 y q_1). Como $V \approx \mathbb{R}^n$ y $n > 1$ existen una infinidad de arcos en V que solo se intersectan en p_1 y q_1. $\square$

Teorema 1.4. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo con un numero finito de conjuntos singulares, y estos son compactos, entonces son celulares en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $S_1, S_2, \ldots S_r$ los conjuntos singulares de f. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $S_r \subset A \subset \mathbb{R}^n - \bigcup\limits_{1}^{r-1} S_i$. Por el lema 1.3 $f(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Es muy facil entonces definir un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow f(A)$ que sea la identidad en una vecindad V de $p = f(S_r)$.

Definir $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S_r \\ f^{-1} h f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n - S_r \end{cases}$$

1. f' es un mapeo. Como $A - S_r$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f|A-S_r$ es un mapeo uno a uno, entonces (lema 1.2) $f|A-S_r : A - S_r \to\to f(A) - p$ es un homeomorfismo. Ademas $hf(\mathbb{R}^n - S_r) \subset h(f(\mathbb{R}^n) - p) \subset f(A) - p$, por lo tanto $f^{-1}hf$ es un mapeo bien definido en $\mathbb{R}^n - S_r$. Como $f^{-1}(V)$ es una vecindad de S_r en $\mathbb{R}^n$ y $f^{-1}hf \,|\, f^{-1}(V) - S_r$ es la identidad, entonces f' es un mapeo.

$\therefore$ Los conjuntos singulares de f' son $S_1, S_2, \ldots S_{r-1}$, ya que $f'(\mathbb{R}^n - S_r) \cap f'(S_r) = f^{-1}hf(\mathbb{R}^n - S_r) \cap S_r \subset (A - S_r) \cap S_r = \emptyset$, $f'|S_r$ no tiene conjuntos singulares y los conjuntos singulares de $f'|\mathbb{R}^n - S_r$ son los de $f|\mathbb{R}^n - S_r$, que son

$S_1, S_2, \ldots S_{r-1}$

Observar que la imagen de f' está contenida en A.

3. Si $r = 1$, f' es un mapeo uno a uno y por el lema 0.2 f' es un homeomorfismo. Sea B una n bola en $\mathbb{R}^n$ tal que $S_1 \subset \mathring{B}$. Como $f'(\mathbb{R}^n) \subset A$ y f' es la identidad en una vecindad de S_1, entonces $S_1 = f'(S_1) \subset f'(\mathring{B}) = \mathring{f'(B)} \subset f'(B) \subset A$. Por lo tanto en cualquier vecindad de S_1 en A hay una n bola encajada que contiene a S_1 en su interior y entonces S_1 es celular en A.

$\square$

<u>Corolario 1.5</u> Sea $f : S^n \longrightarrow S^n$ un mapeo con un numero finito de conjuntos singulares. Entonces estos son celulares en S^n.

<u>Demostración</u> Los conjuntos singulares de f no cubren a S^n, ya que son ajenos y cerrados en S^n, y S^n es conexa. Sea p un punto de S^n que no esté en ningun conjunto singular de f. Entonces $f|_{S-p} : S^n - p \to S^n - f(p)$ tiene los mismos conjuntos singulares que f y por el teorema 1.4 estos son celulares en $S^n - p$ y por lo tanto en S^n.

$\square$

Teorema 1.6.

Si M^n es una variedad con borde y X es un subconjunto celular de M^n, entonces existe un mapeo $f: M^n \twoheadrightarrow M^n$ tal que X es el único conjunto singular de f.

Demostración.

Sea $X = \bigcap_1^{\infty} Q_i$ con $Q_i \approx B^n$ y $Q_{i+1} \subset \mathring{Q}_i$ $\forall_{i \in \omega}$. En lo que sigue la métrica considerada es la de M. Sea $\varphi_1 : Q_1 \twoheadrightarrow Q_1$ un homeomorfismo que sea la identidad en ∂Q_1 y tal que $\operatorname{diam}(\varphi_1(Q_2)) < 1$ $^{(*)}$. Como $Fr_M Q_1 \subset \partial Q_1$ (Por invariancia del dominio), φ_1 puede extenderse a un homeomorfismo φ' de M sobre M, definiendolo como la identidad en $M - Q_1$.

Ahora definiremos φ_i' en terminos de φ_{i-1}'.

Sea $\varphi_i : \varphi_{i-1}'(Q_{i-1}) \twoheadrightarrow \varphi_{i-1}'(Q_{i-1})$ un homeomorfismo tal que $\varphi_i | \partial(\varphi_{i-1}'(Q_{i-1}))$ sea la identidad y tal que $\operatorname{diam}(\varphi_i(\varphi_{i-1}'(Q_i))) < \frac{1}{i}$. $^{(*)}$ Como $Fr_M(\varphi_{i-1}'(Q_{i-1})) \subset \partial(\varphi_{i-1}'(Q_{i-1}))$ entonces φ_i se extiende a un homeomorfismo $\varphi_i' : M^n \twoheadrightarrow M^n$ definiendolo como la identidad en $M - \varphi_{i-1}'(Q_{i-1})$.

Para cada $i \in N$ sea $f_i = \varphi_i' \circ \dots \circ \varphi_2' \circ \varphi_1'$, y sea $f = \lim_{i \to \infty} f_i$, es decir, $f(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x)$ para cada $x \in M$. Observar que si $r \geq s$ entonces $d(f_r(x), f_s(x)) < \frac{1}{s}$ $\forall x \in M$, ya que f_r y f_s coinciden $M^n - Q_s$ y $f_r(Q_s) = f_s(Q_s)$ tiene diametro menor que $\frac{1}{s}$.

y por lo tanto f es un mapeo bien definido.

Para ver que f es supráyectiva, sea $x \in M$: Si $x \notin Q_1$ entonces $f(x) = x$.

Si $x \in Q_1$ entonces $\{f_i^{-1}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en Q_1, que es compacto. Sea p un punto de acumulación de $\{f_i^{-1}(x)\}$.
Entonces $d(f(p), x) \leq d(f(p), f(f_i^{-1}(x))) + d(f(f_i^{-1}(x)), f_i(f_i^{-1}(x)))$ $\forall_{i \in \mathbb{N}}$, y los terminos de la derecha tienden a 0 cuando i tiende a infinito, por lo que $f(p) = x$.
Como $f(X) \subset f(Q_i) \subset f_i(Q_i)$ y $\operatorname{diam}(f_i(Q_i)) < \frac{1}{i}$ $\forall_{i \in \mathbb{N}}$ entonces la imagen de X bajo f es un punto. Veremos que X es el único conjunto singular de f. Si $p \in M - X$ entonces $p \in M - Q_k$ para alguna k $\therefore$ $f(p) = f_k(p) \in f_k(M - Q_k) = M - f_k(Q_k)$ $\therefore$ $f(p) \notin f(X)$.
Si $p, q \in M - X$, $p \neq q$ entonces $p, q \in M - Q_k$ para alguna k $\therefore$ $f(p) = f_k(p) \neq f_k(q) = f(q)$ ya que f_k es inyectiva.

(*) Los φ_i pueden definirse facilmente usando la estructura radial de las bolas.

$\square$

<u>Observación</u> 1.7 En el teorema anterior, si V es una vecindad de X en M^n, Q_1 puede elegirse contenida en V.
Por lo tanto, si M^n es una variedad con borde, $X_1, \ldots, X_r$ son subconjuntos celulares disjuntos de M^n y A es un abierto de M^n que los contiene entonces existe un mapeo $f: M^n \twoheadrightarrow M^n$ tal que $f|_{M^n - A}$ es la identidad y tal que $X_1, \ldots, X_r$ son los conjuntos singulares de f.

Corolario 1.8

Sea M^n una variedad con borde, compacta y E un espacio topologico. Si $\varphi : M^n \twoheadrightarrow E$ es un mapeo con un numero finito de conjuntos singulares y estos son celulares en M^n entonces M^n es homeomorfa a E.

Corolario 1.9

Sea M^n una variedad y X un subconjunto celular de M^n. Entonces M^n/X es homeomorfa a M^n.
(M^n/X es el espacio que se obtiene de identificar todos los puntos de X, con la topologia que hace a la proyeccion $p : M \to M/X$ una función continua y cerrada)

Demostración de 1.8 y 1.9 .

1. Observese lo siguiente: Si R, S, T son espacios topologicos y $\varphi : R \twoheadrightarrow S$, $\psi : R \twoheadrightarrow T$ son mapeos cerrados tales que $\varphi(r_1) = \varphi(r_2) \iff \psi(r_1) = \psi(r_2)$, entonces la asociación $\varphi(r) \to \psi(r)$ define un homeomorfismo entre S y T.

2. Sea $f : M^n \twoheadrightarrow M^n$ un mapeo tal que sus conjuntos singulares sean los de φ. Como M^n es compacta, φ y f son mapeos cerrados

3. El mapeo f del teorema 1.6 es la identidad fuera de un compacto, por lo que es un mapeo cerrado. p es por definición un mapeo cerrado.

<u>Teorema 1.10</u> (El Teorema Generalizado de Schoenflies)
Sea Σ una n-1 esfera bicollareada en S^n. Entonces las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - \Sigma$ son n bolas.

Demostración.
Sea $\varphi : S^{n-1} \times (-1,1) \to S^n$ un bicollar para Σ (es decir, φ es un homeomorfismo y $\varphi(S^{n-1} \times 0) = \Sigma$)
Por el teorema de Jordan-Brower, Σ separa a S^n en dos componentes conexas, de las que es frontera comun. Sea A la cerradura de la componente que contiene a $\varphi(S^{n-1} \times (0,1))$ y B la cerradura de la componente que contiene a $\varphi(S^{n-1} \times (-1,0))$.
1. A y B son distintas. Supongamos que $\varphi(S^{n-1} \times (0,1))$ y $\varphi(S^{n-1} \times (-1,0))$ estuvieran en la misma componente conexa de $S^n - \Sigma$. Como $\varphi(S^{n-1} \times (-1,1))$ es una vecindad de Σ en S^n, para cada $p \in S^n - \Sigma$ existe un arco en S^n que va de p a un punto de $\varphi(S^{n-1} \times (-1,1))$ y que no intersecta a Σ. Pero entonces $S^n - \Sigma$ sería conexo.
Sean $N = A - \varphi(S^{n-1} \times (-1,1))$ y $S = B - \varphi(S^{n-1} \times (-1,1))$. Mostraremos que existe un mapeo $f : S^n \twoheadrightarrow S^n$ tal que $f(A) = S^n_+$, $f(B) = S^n_-$ y tal que los conjuntos singulares de f son N y S. Sean $n = (0,0,\ldots 0,1)$ y $s = (0,0,\ldots 0,-1)$ los "polos" de S^n. Observar que existe un homeomorfismo $h : \varphi(S^{n-1} \times (-1,1)) \twoheadrightarrow S^n - \{n,s\}$ que lleva a $\varphi(S^{n-1} \times [0,1))$ en el hemisferio norte de S^n (S^n_+) y a $\varphi(S^{n-1} \times (-1,0])$ en el hemisferio sur (S^n_-). h se extiende a un mapeo $f : S^n \twoheadrightarrow S^n$ definiendolo como n en N y como s en S. Por definición los conjuntos singulares de f son N y S

Ahora, por el corolario 1.5, N y S son celulares en S^n. Como N está contenido en $A-\Sigma = \operatorname{Int} A$ y S está contenido en $B-\Sigma = \operatorname{Int} B$ entonces N y S son celulares en A y en B respectivamente. Por lo tanto $f|_A$ y $f|_B$ son mapeos de una variedad con frontera, compacta, sobre un espacio homeomorfo a B^n (S^n_+ y S^n_- respectivamente) y por el corolario 1.8, A y B son n bolas.

$\square$

<u>Corolario 1.11</u>

Sea Σ una n-1 esfera encajada en S^n y A la cerradura de una de las componentes conexas de $S^n-\Sigma$. Si Σ está collareada en A, entonces A es una n bola.

<u>Demostración</u>.

Sea $h: S^{n-1}\times[0,1) \to A$ un homeomorfismo tal que $h(S^{n-1}\times 0)=\Sigma$. Entonces $h(S^{n-1}\times \frac{1}{2})$ es una n-1 esfera bicollareada en S^n. Sea A' la cerradura de la componente conexa de $S^n - h(S^{n-1}\times\frac{1}{2})$ que no contiene a Σ: Por el teorema generalizado de Schoenflies A' es una n bola. Como A se obtiene de pegarle a A' un anillo $\left(h(S^{n-1}\times[0,\frac{1}{2}])\right)$ a lo largo de la frontera, entonces A es una n bola.

$\square$

Lema 1.12 (El Lema de Alexander)

Sean A y B n-bolas y $h: \partial A \twoheadrightarrow \partial B$ un homeomorfismo. Entonces h se extiende a un homeomorfismo $\bar{h}: A \twoheadrightarrow B$

Demostración.

Sean $\varphi_1: B^n \twoheadrightarrow A$ y $\varphi_2: B^n \twoheadrightarrow B$ homeomorfismos. Por la invariancia del dominio $\varphi_1^{-1}(\partial A) = S^{n-1}$ y $\varphi_2(S^{n-1}) = \partial B$. Entonces $\varphi_2^{-1} \circ h \circ \varphi_1 : S^{n-1} \twoheadrightarrow S^{n-1}$ es un homeomorfismo que puede extenderse a B^n definiendolo como $\overline{\varphi_2^{-1} h \varphi_1}(tx) = t\,\varphi_2^{-1} h \varphi_1(x)$ $\forall x \in S^{n-1}$, $0 \le t \le 1$. Hacer $\bar{h} = \varphi_2 \circ \overline{\varphi_2^{-1} h \varphi_1} \circ \varphi_1^{-1}$. $\square$

Una consecuencia del lema de Alexander es que una variedad que sea la unión de 2 n-bolas pegadas por el borde es una n-esfera, por lo que el teorema generalizado de Schoenflies puede replantearse como sigue:

Teorema 1.13

Sea Σ una n-1 esfera en S^n, y $h: \Sigma \twoheadrightarrow S^{n-1}$ un homeomorfismo. Supongamos que h puede extenderse a un homeomorfismo h' de una vecindad V de Σ sobre una vecindad de S^{n-1}. Entonces h se extiende a un homeomorfismo $H: S^n \twoheadrightarrow S^n$.

Demostración.

Como $h'(V)$ contiene un conjunto C de la forma $C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / -\frac{1}{M} < x_{n+1} < \frac{1}{M}\}$ (donde x_{n+1} es la n+1-esima coordenada de x en $\mathbb{R}^{n+1}$, y $M \in \mathbb{N}$) entonces $h'^{-1}|_C$ es un bicollar para Σ en S^n. Por el teorema generalizado de Schoenflies las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - \Sigma$

son n bolas. Llamemoslas A y B. Entonces por el lema de Alexander $h : \partial A \twoheadrightarrow \partial S^n_+$ y $h : \partial B \twoheadrightarrow \partial S^n_-$ se extienden a $H' : A \twoheadrightarrow S^n_+$ y $H'' : B \twoheadrightarrow S^n_-$.

Observar que H no es una extensión de h'.

$\square$

Teorema 1.14

Si M es una n variedad compacta tal que $M = A \cup B$, donde A y B son n bolas abiertas, entonces M es homeomorfa a S^n.

Demostración.

En vista del lema de Alexander, una variedad que es la unión de dos n bolas pegadas por el borde es una n esfera. Sea $h : A \twoheadrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\}$ un homeomorfismo. Como $M - B = A - B$ es compacto, entonces existe $r > 0$ tal que $h(A-B) \subset \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq r\}$. Si $r < t < 1$, entonces $\Sigma = h^{-1}\{x \in \mathbb{R}^n / |x| = t\}$ es una $n-1$ esfera bicollareada en A y en B. Sean $Q_1 = h^{-1}\{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq t\}$ y $Q_2 = M - h^{-1}\{x \in \mathbb{R}^n / |x| < t\}$. Q_2 es la cerradura de una de las componentes conexas de $B - \Sigma$, y es compacta. Por el teorema generalizado de Schoenflies, Q_2 es una n bola.

$\square$

Teorema 1.15

Sean Σ_1 y Σ_2 dos $n-1$ esferas micollareadas y que no se intersecten en S^n. Entonces la región entre Σ_1 y Σ_2 es homeomorfa a $S^{n-1} \times (-1,1)$, y la unión de esta región con Σ_1 es homeomorfa a $S^{n-1} \times (-1,1]$.

(La región entre Σ_1 y Σ_2 es la intersección de la componente conexa de $S^n - \Sigma_1$ que contiene a Σ_2 con la componente conexa de $S^n - \Sigma_2$ que contiene a Σ_1)

Demostración.

Por el teorema 1.10, A y B son planas. Sea $h : S^n \longrightarrow S^n$ un homeomorfismo tal que $h(\Sigma_1) = S^{n-1}$. Como $h(\Sigma_2)$ es plana, la cerradura de la componente conexa de $S^n - h(\Sigma_2)$ que no contiene a S^{n-1}, llamemosla A, es celular en S^n. A está contenida en el interior de uno de los hemisferios de S^n, digamos S^n_+. Entonces A es celular en S^n_+, y por lo tanto si llamamos R a la región entre Σ_1 y Σ_2, tenemos que:

$R \cup \Sigma_1 \approx h(R \cup \Sigma_1) = S^n_+ - A \approx S_n^+ - \{p\} \approx S^{n-1} \times (-1,1]$

Como la imagen de Σ_1 bajo la cadena de homeomorfismos es $S^{n-1} \times 1$, entonces $R \approx S^{n-1} \times (-1,1)$.

□

Teorema 1.16

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y M^n una variedad. Si $\varphi : A \to M^n$ es un mapeo con un número finito de conjuntos singulares, y estos son compactos, entonces $\varphi(A) \approx A$.

Demostración.

1. $\varphi(A)$ es una variedad. Sea $p \in \varphi(A)$ y V una vecindad de p en M homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Considerar $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to V$. Por el lema 1.5 $\varphi(\varphi^{-1}(V))$ es un abierto de V, y por lo tanto de M, que contiene a p. Entonces $\varphi(A)$ es un abierto de M.

2. Los conjuntos singulares de φ son celulares en A. Sea S uno de los conjuntos singulares de φ, y $S_1, S_2, \ldots S_k$ los demás. Sea V una vecindad de S en A tal que $\bar{V}$ sea compacto y $\bar{V} \subset A - \bigcup_1^k S_i$. Observar que los abiertos como V forman una base de vecindades de S en A, y por lo tanto si mostramos que existe una n bola Q encajada en A tal que $S \subset \dot{Q} \subset Q \subset V$ habremos terminado. Por 1. $\varphi(V)$ es abierto en M y por lo tanto existe una n bola B en M tal que $s \in \mathring{B} \subset B \subset V$, donde $\{s\} = \varphi(S)$. Veremos primero que S y $\mathbb{R}^n - V$ estan en distintas componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \varphi^{-1}(\partial B)$. De no ser así, existiría un arco L (en $\mathbb{R}^n$) de un punto p de S a un punto q de $\mathbb{R}^n - V$ que no intersecta a $\varphi^{-1}(\partial B)$. En el orden de p a q, sea r el primer punto de L que está en $\mathbb{R}^n - V$. Entonces $r \in \bar{V} - V \subset A - V$ y el subarco L' que va de p a r está contenido en A, y no

intersecta a $\varphi^{-1}(\partial B)$. Por lo tanto $\varphi(L') \subset \varphi(A)-\partial B$. Esto es imposible: la componente conexa de $\varphi(A)-\partial B$ que contiene a s es $\mathring{B}$, que está contenido en $\varphi(V)$. $\mathbb{R}^n-V$ intersecta a la componente no acotada de $\mathbb{R}^n-\varphi^{-1}(\partial B)$, ya que $\mathbb{R}^n-V$ es un cerrado de $\mathbb{R}^n$, y si estuviera contenido en la cerradura de la componente acotada, sería compacto y por lo tanto $\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}^n-V)\cup\bar{V}$ sería compacto. Por lo tanto $\mathbb{R}^n-V$ está contenido en la componente no acotada de $\mathbb{R}^n-\varphi^{-1}(\partial B)$ y S está contenido en la componente acotada, cuya cerradura en vista del corolario 1.11 es una n bola.

3. A es homeomorfa a $\varphi(A)$. Como los conjuntos singulares de φ son celulares en A, existe un mapeo $\psi: A \twoheadrightarrow A$ tal que sus conjuntos singulares son presisamente los de φ (observación 1.7). Si mostramos que φ (como mapeo de A sobre $\varphi(A)$) y ψ son mapeos cerrados, en vista de 1. de la demostración de 1.9 habremos terminado. Para esto, sea K la unión de los conjuntos singulares de φ. Como K es compacto, está contenido en un abierto con cerradura compacta (en A). Entonces cada cerrado C de A es la unión de un cerrado C_1 contenido en $A-K$ y de un compacto. Por el lema 1.3 $\varphi(A-C_1)$ es un abierto de $\varphi(A)$ y por lo tanto $\varphi(C_1)=\varphi(A)-\varphi(A-C_1)$ es un cerrado de $\varphi(A)$. Con ψ es igual

$\square$

Teorema 1.17

Una n variedad M que es la unión monótona de n bolas abiertas (es decir, $M = \bigcup_1^\infty B_i$ donde $B_i \approx \mathring{B}^n$ y $B_i \subset B_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$) es una bola abierta.

Demostración.

1. $M = \bigcup_1^\infty Q_i$ donde $Q_i \approx B^n$, $Q_i \subset \mathring{Q}_{i+1}$ y ∂Q_i está bicollareada en Q_{i+1} para toda $i \in \mathbb{N}$. Como M es una variedad, M es la unión de una familia numerable de compactos, digamos $K_1, K_2, \ldots$. Como K_1 es compacto, $K_1 \subset B_{\alpha_1}$ para alguna $\alpha_1 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $K_1 \subset \mathring{Q}_1 \subset Q_1 \subset B_{\alpha_1}$, donde Q_1 es una n bola con frontera bicollareada en B_{α_1}. Supongamos que hemos definido Q_m. Como $Q_m \cup K_m$ es compacto, $Q_m \cup K_n \subset B_{\alpha_{m+1}}$ para alguna $\alpha_{m+1} \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $Q_m \cup K_n \subset \mathring{Q}_{m+1} \subset Q_{m+1} \subset B_{\alpha_{m+1}}$, donde Q_{m+1} es una n bola con frontera bicollareada en $B_{\alpha_{m+1}}$. Como $\bigcup_1^m K_i \subset Q_m$ $\forall_{m \in \mathbb{N}}$ entonces $M = \bigcup_1^\infty Q_i$. Como ∂Q_m está bicollareada en $B_{\alpha_{m+1}}$ y $\partial Q_m \subset \mathring{Q}_{m+1}$ entonces ∂Q_m está bicollareada en Q_{m+1}.

2. M puede encajarse en S^n. Para cada i sea $h_i : Q_i \to\to S^n_+$ un homeomorfismo. Como ∂Q_i está bicollareada en Q_{i+1}, entonces $h_{i+1}(\partial Q_i)$ está bicollareada en $h_{i+1}(Q_{i+1})$. Por el teorema generalizado de Schoenflies, $S^n - h_{i+1}(\mathring{Q}_i)$ es una n bola. Por lo tanto $h_i \circ h_{i+1}^{-1} : h_{i+1}(Q_i) \to\to S^n_+$ se extiende a un homeomorfismo $\varphi_i : S^n \to\to S^n$ (Lema de Alexander).

Definir $\varphi : M \to S^n$ como $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{i-1} \circ h_i$ en Q_i $(i > 1)$.

Como $\varphi_i|_{h_{i+1}(Q_i)} = h_i \circ h_{i+1}^{-1}|_{h_{i+1}(Q_i)}$ entonces $\varphi_{i-1} \circ \varphi_i \circ h_{i+1}|_{Q_i} = \varphi_{i-1} \circ h_i|_{Q_i}$. Por lo tanto $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_{i-1} \circ h_i|_{Q_i} = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i \circ h_{i+1}|_{Q_i}$, y φ está bien definido. Como φ es un mapeo inyectivo entonces es un homeomorfismo (Ver el lema 1.2).

3. $S^n - \varphi(M)$ es celular en S^n, y por lo tanto $\varphi(M)$ es una n bola. Como $M = \bigcup_i^{\infty} Q_i$ entonces $S^n - \varphi(M) = \bigcap_i^{\infty} (S^n - \varphi(\mathring{Q}_i))$. $\varphi(Q_i)$ está bicollareado en $\varphi(Q_{i+1})$ y por lo tanto en S^n. Como $\varphi(Q_i) \subset \varphi(\mathring{Q}_{i+1})$ entonces $S^n - \varphi(\mathring{Q}_{i+1}) \subset S^n - \varphi(Q_i) = \overline{S^n - \varphi(\mathring{Q}_i)}$.

$\square$

2. ENCAJES LOCALMENTE PLANOS.

Este capítulo trata de la condición "bicollareada" del teorema de Schoenflies generalizado. Veremos que una n-1 esfera Σ encajada en S^n está bicollareada si cada punto de Σ tiene una vecindad V en S^n en la que $\Sigma \cap V$ está encajada como $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$.

Para esto, nos fijaremos en las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - \Sigma$, y veremos que el que Σ esté collareada en alguna de ellas solo depende de la "apariencia local" del encaje. Haremos esto en general, pensando en encajes en espacios métricos, ya que la técnica es la misma y puede verse que propiedades de los espacios se están usando.

Si E es un espacio metrico y B es un subconjunto de E, decimos que B está collareado en E si existe un homeomorfismo de $B \times [0,1)$ sobre una vecindad de B en E tal que $h(b,0) = b \quad \forall b \in B$.

Si cada punto de B tiene una vecindad en B collareada en E diremos que B está localmente collareado en E.

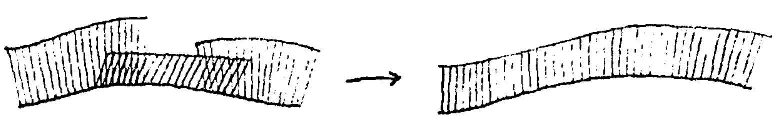
Mostraremos que si E es separable, entonces un subconjunto localmente collareado de E está collareado en E.

Aquí parecería mas natural definir "localmente bicollareado" y tratar de mostrar que "localmente bicollareado" implica bicollareado, pero esto no es siempre cierto : la curva central de una banda de Moebius está localmente bicollareada y no esta bicollareada.

Aun en el caso de una n-1 esfera encajada en S^n, en el que "localmente plana" (una condición equivalente a "localmente bicollareada") implica bicollareada, la técnica que usaremos no puede modificarse para demostrarlo directamente. Sin embargo, "localmente plana" implica "localmente collareada en las cerraduras de ambas componentes de $S^n - \Sigma$", de donde se sigue el resultado anterior.

Una consecuencia del teorema de los collares locales será que el borde de una variedad con borde está collareado en la variedad, de donde resultará (en vista del corolario 1.13) que la única variedad compacta encajada en S^n (ó $\mathbb{R}^n$) cuyo borde es una n-1 esfera, es una n bola.

Veremos entonces como pegar los collares locales para obtener uno global.



Sea E un espacio métrico y A un abierto de E.

A cada función continua $\lambda : \overline{A} \to [0,1]$ tal que $\lambda|_A > 0$ y $\lambda|_{\overline{A}-A} = 0$ se le asocia una vecindad $V(A,\lambda)$ de $A \times \{0\}$ en $E \times [0,1)$ como sigue:

$V(A,\lambda) = \{(e,t) \in E \times [0,1) / e \in A , 0 \leq t < \lambda(e)\}$.

El conjunto de las $V(A,\lambda)$ es una base de vecindades de $A \times \{0\}$ en $E \times [0,1)$ ya que si V es una vecindad de $A \times \{0\}$ en $E \times [0,1)$ podemos definir para cada $a \in \overline{A}$

$\lambda(a) = \min \{1, D((a,0), E \times [0,1) - V), d(a, E-A)\}$.

donde d es la metrica de E y D la metrica del producto $E \times [0,1)$.

(*) Observar que $\overline{V(A,\lambda)} = \{(e,t) \in E \times [0,1) / e \in \overline{A} , 0 \leq t \leq \lambda(e)\}$ y que $\overline{V(A,\lambda)} - V(A,\lambda) = \{(a, \lambda(a)) / a \in \overline{A}\}$.

Se define $\pi(A,\lambda) : E \times [0,1) \longrightarrow E \times [0,1)$ como

$$\pi(A,\lambda)(e,t) = \begin{cases} (e,t) & \text{si } (e,t) \in E \times [0,1) - V(A,\lambda) \\ (e, 2t - \lambda(e)) & \text{si } (e,t) \in \overline{V(A,\lambda)} - V(A,\frac{\lambda}{2}) \\ (e,0) & \text{si } (e,t) \in \overline{V(A,\frac{\lambda}{2})} \end{cases}$$

π es continua, ya que es continua en tres cerrados que cubren al dominio y está bien definida en vista de (*).

(+) Observar que π manda homeomorficamente a $\overline{V(A,\lambda)} - V(A,\frac{\lambda}{2})$ sobre $\overline{V(A,\lambda)}$. Ademas si S es un subconjunto de $B \times [0,1)$

que contiene a $V(A,\lambda)$ entonces $\Pi(S-V(A,\frac{\lambda}{2}))=$

$$=\Pi(S-V(A,\lambda))\cup\Pi(V(A,\lambda)-V(A,\tfrac{\lambda}{2}))=(S-V(A,\lambda))\cup V(A,\lambda)=S\ .$$

Llamemos I' al intervalo $[0,1)$

<u>Lema 2.1</u> Sea E un espacio métrico, A un abierto de $E\times I'$ y $A_0=A\cap E\times\{0\}$. Sea $\varphi:\bar{A}\longrightarrow E\times I'$ un homeomorfismo tal que $\varphi|_{A_0}=$ Identidad y tal que $\varphi(A)$ sea un abierto de $E\times I'$. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi':\bar{A}\longrightarrow E\times I'$ tal que $\varphi'(\bar{A})=\varphi(A)$, $\varphi'/_{\bar{A}-A}=\varphi/_{\bar{A}-A}$ y $\varphi/_V=$ Identidad en una vecindad V de A_0 en $E\times I'$.

<u>Demostración</u>. Como $A\cap\varphi(A)$ es un abierto de $E\times I'$ que contiene a A_0, podemos elegir $V(A_0,\lambda)$ contenida en $A\cap\varphi(A)$. Observar que $\overline{V(A_0,\frac{\lambda}{2})}\subset V(A_0,\lambda)\cup\bar{A}_0\subset\bar{A}\cap\varphi(\bar{A})$.

Definir $\varphi':\bar{A}\longrightarrow E\times I'$ como

$$\varphi'(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\overline{V(A_0,\frac{\lambda}{2})}\\ \Pi^{-1}\circ\varphi\circ\Pi(x) & \text{si } x\in\bar{A}-V(A_0,\frac{\lambda}{2})\end{cases}$$

donde $\Pi=\Pi(A_0,\lambda)$ y $\Pi^{-1}=\left[\Pi(A_0,\lambda)\,|_{E\times I'-V(A_0\frac{\lambda}{2})}\right]^{-1}$.

φ' está bien definida. $\overline{V(A_0,\frac{\lambda}{2})}\cap A-V(A_0,\frac{\lambda}{2})=\overline{V(A_0,\frac{\lambda}{2})}-V(A_0,\frac{\lambda}{2})$.
Si $x\in\overline{V(A_0\frac{\lambda}{2})}-V(A_0\frac{\lambda}{2})$ entonces $x=(a,\frac{\lambda}{2}(a))$, donde $(a,0)\in\bar{A}_0$, por lo tanto $\Pi^{-1}\circ\varphi\circ\Pi(x)=\Pi^{-1}\circ\varphi\circ\Pi(a,\frac{\lambda}{2}(a))=\Pi^{-1}\circ\varphi(a,0)=$

$$=\Pi^{-1}(a,0)=(a,\tfrac{\lambda}{2}(a))=x$$

Para mostrar que φ' es un homeomorfismo de $\bar{A}$ sobre $\varphi(\bar{A})$ hay que observar lo siguiente:

2.1.1 Sean S y T espacios topológicos, C y D subconjuntos cerrados (abiertos) de S que cubran a S. Si $f: S \twoheadrightarrow T$ es una función tal que $f|_C : C \twoheadrightarrow f(C)$ y $f|_D : D \twoheadrightarrow f(D)$ son homeomorfismos, $f(C)$ y $f(D)$ son cerrados (abiertos) de T y $f(C) \cap f(D) = f(C \cap D)$, entonces f es un homeomorfismo.

Pongamos $\bar{A}$ en lugar de S, $\varphi'(\bar{A})$ en lugar de T, y $\overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})}$ y $\bar{A} - V(A_0 \frac{\lambda}{2})$ en lugar de C y D respectivamente.

(1) $\varphi'\left(\overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})}\right) = \overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})}$ que es cerrado en $\varphi(\bar{A})$

(2) $\varphi'\left(\bar{A} - V(A_0 \frac{\lambda}{2})\right) = \pi^{-1} \circ \varphi \circ \pi\left(\bar{A} - V(A_0 \frac{\lambda}{2})\right) = \pi^{-1}\varphi(\bar{A}) = \varphi(\bar{A}) - V(A_0 \frac{\lambda}{2})$ que es cerrado en $\varphi(\bar{A})$ (las dos ultimas igualdades son consecuencia de (‡)).

(3) Por (1) y (2) $\varphi'(\bar{A}) = \left(\varphi(\bar{A}) - V(A_0, \frac{\lambda}{2})\right) \cup \overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})} = \varphi(\bar{A})$

Por (1), (2) y (3) $\varphi'\left(\bar{A} - V(A_0 \frac{\lambda}{2})\right)$ y $\varphi'\left(\overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})}\right)$ son cerrados en $\varphi'(\bar{A})$

Por (1) y (2) $\varphi'\left(\bar{A} - V(A_0 \frac{\lambda}{2})\right) \cap \varphi'\left(\overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})}\right) = \overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})} - V(A_0 \frac{\lambda}{2}) =$
$= \varphi'\left(\left(\bar{A} - V(A_0 \frac{\lambda}{2})\right) \cap \overline{V(A_0 \frac{\lambda}{2})}\right)$

$\varphi'|_{\bar{A}-A} = \varphi|_{\bar{A}-A}$. $\bar{A} - A \subset \bar{A} - V(A,\lambda)$ $\therefore$ $\pi|_{\bar{A}-A} =$ Identidad.

$\varphi(\bar{A} - A) = \varphi(\bar{A}) - \varphi(A) \subset \varphi(\bar{A}) - V(A,\lambda)$ $\therefore$ $\pi^{-1}|_{\varphi(\bar{A}-A)} =$ Identidad.

Por lo tanto $\varphi'|_{\bar{A}-A} = \pi^{-1} \circ \varphi \circ \pi|_{\bar{A}-A} = \pi^{-1} \circ \varphi|_{\bar{A}-A} = \varphi|_{\bar{A}-A}$.

$\square$

Lema 2.2 Sean E un espacio métrico, B_1 y B_2 subconjuntos de E que son abiertos en $B = B_1 \cup B_2$ y K un cerrado de B contenido en $B_1 \cap B_2$. Supongamos que existen homeomorfismos $h_1 : B_1 \times I' \longrightarrow E$, $h_2 : B_2 \times I' \longrightarrow E$ cuya imagen es abierta en E y tales que $h_1(b_1, 0) = b_1$, $h_2(b_2, 0) = b_2$ $\forall b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$. Entonces existe un homeomorfismo $h_2' : B_2 \times I' \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow h_2(B_2 \times I')$ tal que $h_2'(b_2, 0) = b_2$ $\forall b_2 \in B_2$ y tal que h_2' coincide con h_1 en una vecindad de $K \times \{0\}$ en $B \times I'$.

Demostración. Nótese que $B_1 \times I'$ y $B_2 \times I'$ son abiertos de $B \times I'$. $I = h_1(B_1 \times I') \cap h_2(B_2 \times I')$ es un abierto de E que contiene a K $\therefore$ $h_1^{-1}(I) \cap h_2^{-1}(I)$ es un abierto de $B \times I'$ que contiene a $K \times \{0\}$. Como $B \times I'$ es normal, existe una vecindad A de $K \times \{0\}$ en $B \times I'$ tal que $\bar{A} \subset h_2^{-1}(I) \cap h_1^{-1}(I)$. Observar que $\bar{A} \subset B_1 \cap B_2 \times I'$.

Definir $\varphi : \bar{A} \longrightarrow B \times I'$ como $\varphi(a) = h_1^{-1} \circ h_2(a)$. φ es un homeomorfismo que es la identidad en $A_0 = A \cap B \times \{0\}$, y $\varphi(A)$ es un abierto de $B \times I$ (ya que $h_2(A)$ es un abierto de $h_2(B_2 \times I)$ $\therefore$ es un abierto de E $\therefore$ $h_1^{-1} \circ h_2(A)$ es un abierto de $B_1 \times I'$ $\therefore$ $h_1^{-1} \circ h_2(A)$ es un abierto de $B \times I'$).

Por el lema anterior existe un homeomorfismo $\varphi' : A \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \varphi(A)$ tal que $\varphi'|\bar{A} - A = \varphi|\bar{A} - A$ y φ' es la identidad en una vecindad V de A_0 en $B \times I'$.

Como $\bar{A} \subset I \subset B_2 \times I'$ entonces $\bar{A}$ es la cerradura de A en $B_2 \times I'$.

Definir $h_2' : B_2 \times I' \to X$ como

$$h_2'(x) = \begin{cases} h_2(x) & \text{si } x \in B_2 \times I' - A \\ h_1 \circ \varphi'(x) & \text{si } x \in \bar{A} \end{cases}$$

h_2' está bien definida ya que $\varphi' | \bar{A} - A = h_1^{-1} \circ h_2 | \bar{A} - A$.

h_2' es un homeomorfismo de $B_2 \times I'$ sobre $h_2(B_2 \times I')$. Veremos que h_2' satisface las condiciones de la observación 2.1.1

(1) $h_2'(B_2 \times I' - A) = h_2(B_2 \times I' - A)$ que es un cerrado de $h_2(B_2 \times I')$.

(2) $h_2'(\bar{A}) = h_1 \circ \varphi'(\bar{A}) = h_1(\varphi(\bar{A})) = h_1 \circ h_1^{-1} \circ h_2(\bar{A}) = h_2(\bar{A})$ que es un cerrado de $h_2(B_2 \times I')$.

(3) Por (1) y (2) $h_2'(B_2 \times I') = h_2(B_2 \times I' - A) \cup h_2(\bar{A}) = h_2(B_2 \times I')$.

Por (1), (2) y (3) $h_2'(B_2 \times I' - A)$ y $h_2'(\bar{A})$ son cerrados de $h_2'(B_2 \times I')$.

Por (1) y (2) $h_2'(B_2 \times I' - A) \cap h_2'(\bar{A}) = h_2(B_2 \times I' - A) \cap h_2(\bar{A}) =$
$= h_2(\bar{A} - A) = h_2'(\bar{A} - A) = h_2'((B_2 \times I' - A) \cap \bar{A})$.

$h_2'/V = h_1/V$ ya que φ' es la identidad en V.

$\square$

Teorema 2.3

Sea B un subconjunto del espacio métrico E tal que $B = B_1 \cup B_2$ donde B_1 y B_2 son abiertos de B. Supongamos que B_1 y B_2 están collareados en E. Entonces B está collareado en E.

Demostración.

$B - B_2 = B_1 - B_2$ y $B - B_1 = B_2 - B_1$ son cerrados ajenos de B. Como B es métrico, existen abiertos A_1 y A_2 de B tales que $B - B_2 \subset A_1$, $B - B_1 \subset A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces $C = B - (A_1 \cup A_2)$ es cerrado en B y $C \subset B_2 \cap B_1$.

Por hipotesis, para $i = 1, 2$ existe un homeomorfismo h_i de $B_i \times I'$ sobre una vecindad de B_i en E tal que $h_i(b,0) = b$ $\forall b \in B_i$.

Aplicando el lema anterior, encontramos un homeomorfismo $h_2' : B_2 \times I' \longrightarrow h_2(B_2 \times I')$ tal que $h_2'(b,0) = b$ $\forall b \in B_2$ y tal que $h_2'|V_0 = h_1|V_0$ en una vecindad V_0 de $C \times 0$ en $B_2 \times I'$.

Como A_1 y A_2 son abiertos ajenos de B, entonces la cerradura de A_1 en E no intersecta a A_2, y la cerradura de A_2 en E no intersecta a A_1. Como E es métrico, existen abiertos U_1 y U_2 de E que contienen a A_1 y A_2 respectivamente.

Sean $V_1 = h_1^{-1}(U_1)$ y $V_2 = (h_2')^{-1}(U_2)$.

Observar que para $i = 1, 2$, V_i es una vecindad de $A_i \times 0$ en $B_i \times I'$ y por lo tanto en $B \times I'$. Entonces $N = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ es una vecindad de $B \times 0$ en $B \times I'$.

Definir $h : N \longrightarrow E$ como

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) & x \in V_1 \\ h_2'(x) & x \in V_2 \\ h_1(x) = h_2'(x) & x \in V_0 \end{cases}$$

Como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, h está bien definida. Como $h(V_1) \cap h(V_2) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$ h es inyectiva. Para $i = 0, 1, 2$ V_i es un abierto de N y $h(V_i)$ es un abierto de X, y por lo tanto de $h(N)$. Entonces por la observación 2.1.1, h es un homeomorfismo de N sobre una vecindad de B. La demostración del teorema termina con el siguiente lema.

Lema 2.4.

Sea B un subconjunto del espacio métrico E. Supongamos que existe un homeomorfismo h de una vecindad N de $B \times 0$ en $B \times I'$ sobre una vecindad de B en E tal que $h(b, 0) = b$ $\forall b \in B$. Entonces B está collareado en E.

Demostración.

Sea D la métrica del producto en $B \times I'$. Definir $f(b) = \min\{1, D(b, B \times I' - N)\}$ para cada $b \in B$. Entonces f es un mapeo de B en $(0, 1)$ y la función $g : B \times I' \longrightarrow N$ definida como $g(b,t) = (b, f(b) \cdot t)$ es un homeomorfismo de $B \times I'$ sobre un abierto de N, de donde $h \circ g$ es un collar de B en E.

$\square$

Lema 2.5

Sea B un subconjunto del espacio metrico E y sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de abiertos disjuntos de B. Si cada V_α está collareada en E, entonces $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ está collareada en E.

Demostración.

Para cada $\alpha\in A$, sea $h_\alpha : V_\alpha \times I' \longrightarrow E$ un collar para V_α en E.
Sea $U_\alpha = \{ x\in E \,/\, d(x, V_\alpha) < d(x, \bigcup_{\beta\neq\alpha} V_\beta) \}$.
U_α es un abierto de E tal que $V_\alpha \subset U_\alpha \subset E - \bigcup_{\beta\neq\alpha} V_\beta$. (Si $x\in V_\alpha$ entonces existe un abierto W de E tal que $x\in W\cap B \subset V_\alpha$, por lo que $d(x, \bigcup_{\beta\neq\alpha} V_\beta) > 0$). Por lo tanto $h_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es una vecindad de $V_\alpha \times 0$ en $V_\alpha \times I'$, de donde $h_\alpha(h_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ es una vecindad de V_α en $h_\alpha(V_\alpha \times I')$ y por lo tanto en E.
Entonces $h : \bigcup_{\alpha\in A} h_\alpha^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow E$ definido como h_α en $h_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un homeomorfismo, y por el lema 2.4, $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ está collareado en E.

□

Teorema 2.6

Sea E un espacio métrico separable, y B un subconjunto de E. Si B está localmente collareado en E, entonces B está collareado en E.

Demostración.

Para cada $p\in B$ sea V_p un abierto de B que contenga a p y que esté collareado en E $\{V_p\}_{p\in B}$ es una cubierta abierta de B. Sea $\{a_1, a_2, \ldots\}$ un subconjunto denso numerable de B. Para cada a_i elegir el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(a_i)$ (*) esté contenido en un elemento de la cubierta, y sea A_i un elemento de la cubierta que lo contenga. Sea $p \in B$. Alguna $B_{\frac{1}{n}}(p)$ está contenida en V_p, y algun a_i está en $B_{\frac{1}{2n}}(p)$, por lo que $p \in B_{\frac{1}{2n}}(a_i) \subset V_p$. Entonces $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una subcubierta numerable de $\{V_p\}_{p \in B}$.

Por el teorema 2.3, $C_n = \bigcup_{i}^{n} A_i$ está collareado en E.

Sea $D_n = \{x \in C_n \,/\, d(x, E - C_n) > \frac{1}{n}\}$. Sean $E_1 = D_2$ y (para $n > 1$) $E_n = D_{2n} - \overline{D}_{2n-3}$ ($\overline{D}_n$ es la cerradura de D_n en B). E_n es un abierto de B contenido en C_n y por lo tanto E_n está collareado en E.

$\{E_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{E_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos colecciones de abiertos disjuntos de B ($E_m \subset D_{2m} - D_{2m-3}$ y $E_n \subset D_{2n}$. Si $m \geq n+2$, entonces $2m-3 > 2n$ $\therefore$ $D_{2n} \subset D_{2m-3}$ $\therefore$ $E_m \cap E_n = \emptyset$).

Por el lema 2.4 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2n}$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2n-1}$ están collareados en E.

Por el teorema 2.3 $B = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2n}\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2n-1}\right)$ está collareado en E.

(*) $B_\varepsilon(a_i) = \{x \in B \,/\, d(x, a_i) < \varepsilon\}$ donde d es la metrica de E.

$\square$

<u>Lema 2.7</u> El borde de una variedad con borde M^n está localmente collareado en M.

<u>Demostración</u>.

Sea $p \in \partial M$ y h un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n_+$ sobre una vecindad

V de p en M. Si $q \in h(\mathbb{R}^n_+ - \mathbb{R}^{n-1})$ entonces q tiene una vecindad en M homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, de donde $q \in \mathring{M}$. Por el teorema de la invariancia del dominio ningun punto de $\mathbb{R}^{n-1}$ tiene una vecindad en $\mathbb{R}^n_+$ homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\partial M \cap V = h(\mathbb{R}^{n-1})$ y $\partial M \cap V$ es una vecindad de p en ∂M que está collareada en M.

□

Teorema 2.8

El borde de una variedad con borde, M, está collareado en M

La demostración es inmediata de 2.6 y 2.7.

□

Teorema 2.9.

Sea Σ una n-1 esfera encajada en S^n y A la cerradura de una de las componentes conexas de $S^n - \Sigma$. Si A es una variedad con borde entonces A es una n bola.

Demostración.

Si A es una variedad con borde entonces $\partial A = Fr_{S^n} A$, en vista del teorema de la invariancia del dominio. Como $Fr_{S^n} A = \Sigma$ entonces por el teorema 2.9 $\partial A = \Sigma$ está collareada en A, y por el corolario 1.13, A es una n bola.

□

Sea M una n variedad y N una n-1 variedad encajada en M. Se dice que N es localmente plana en M si para cada $p \in N$ existe una vecindad V de p en M y un encaje $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(V \cap N) = \mathbb{R}^{n-1}$.

Por invariancia del dominio $h(V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, y entonces $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, h(p)) < r\}$ está contenido en $h(V)$ para alguna $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Poniendo $h^{-1}(B_r)$ en lugar de V y $h|_{h^{-1}(B_r)}$ en lugar de h se ve que h y V pueden elegirse de tal modo que $h : V \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ y $h(V \cap N) = \mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema 2.10

Sea Σ una n-1 esfera encajada en S^n. Si Σ es localmente plana en S^n, entonces es plana.

Demostración.

Sean A y B las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - \Sigma$. Como Σ es localmente plana, entonces está localmente collareada en A y en B. Por el teorema 2.6 Σ esta collareada en A y en B y por lo tanto está bicollareada en S^n.

En el capitulo 3 usaremos el siguiente resultado.

<u>Lema 2.11</u> Sea B un subconjunto del espacio metrico separable E, y A un abierto de B localmente collareado en E. Entonces existe un encaje

$h : \{(x,t) \in B \times [0,1) \ / \ t \leq \lambda(x)\} \longrightarrow E$ donde $\lambda : B \rightarrow [0,1)$ es una función continua tal que $\lambda^{-1}(0) = B - A$, y $h(b,0) = b$ para toda $b \in B$.

<u>Demostración</u>. Por el teorema 2.6 existe un homeomorfismo h' de $A \times [0,1)$ sobre una vecindad de A en E tal que $h'(a,0) = a \ \ \forall a \in A$.

Sea $V = \{(a,t) \in A \times [0,1) \ / \ d(h'(a,t), a) < d(a, B-A)\}$, donde d es la métrica de E.

Definir $\lambda : B \rightarrow [0,1)$ como $\lambda(b) = \min\{1, \min\{t \in [0,1) \ / \ h(b,t) \notin V\}\}$ y hacer $h(b,t) = \begin{cases} h'(b,t) & \text{si } b \in A \\ b & \text{si } b \in B-A \end{cases}$

$\square$

3. ENCAJES DE $\mathbb{R}^{n-1}$ EN $\mathbb{R}^n$

Es consecuencia del teorema de Schoenflies que cualquier subconjunto cerrado del plano homeomorfo a la recta puede ser llevado a una recta por un homeomorfismo del plano sobre si mismo.

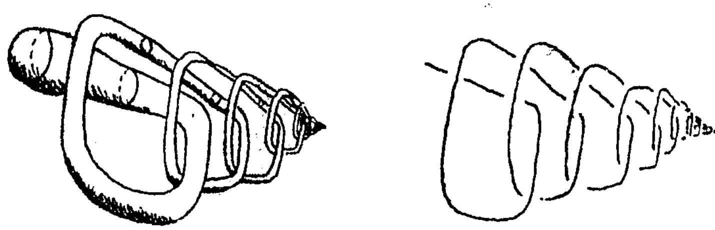
Si P es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$ d bajo que condiciones existirá un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(P) = \mathbb{R}^{n-1}$? Desde luego, como $\mathbb{R}^{n-1}$ es cerradó en $\mathbb{R}^n$, P debe ser cerrado. En el caso de que h exista diremos que P es aplanable.

Para $n>2$ los ejemplos de encajes salvajes (no planos) de S^{n-1} en S^n pueden modificarse facilmente para obtener encajes no aplanables de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, una hipótesis razonable para P es que sea localmente plano en $\mathbb{R}^n$.

Sea $s \in S^n$. La existencia de un homeomorfismo $e: \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow S^n - \{s$ que lleva a $\mathbb{R}^{n-1}$ sobre un "círculo maximo" de S^n, muestra que P es aplanable si y solamente si la esfera $e(P) \cup \{s\}$ es plana en S^n ($e(P) \cup \{s\}$ ès una esfera ya que $e(P)$ es cerrado en $S^n - \{s\}$).

El problema es que aunque P sea localmente plano en $\mathbb{R}^n$ (y por lo tanto $e(P)$ sea localmente plano en S^n) no podemos aplicar el teorema generalizado de Schoenflies, ya que no sabemos si $e(P) \cup \{s\}$ es localmente plana en s. ¿Será cierto que una n-1 esfera encajada en S^n, de la que sabemos que es localmente plana en todos sus puntos, salvo quizas uno, es plana?

En 1948 Artin y Fox encontraron una 2-esfera en $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ que es localmente plana en todos sus puntos, salvo uno, y que sin embargo no es plana. Ver [3].



Σ $\qquad\qquad$ σ

Para ver que Σ no es plana, mostraron que la "espina dorsal" σ de la 3-bola cuyo borde es Σ es un arco que no es plano en $\mathbb{R}^3$ (Un arco encajado en una variedad M^n es <u>plano</u> si existe una vecindad del arco en M y un homeomorfismo de la vecindad en $\mathbb{R}^n$ que manda al arco en un segmento de recta).

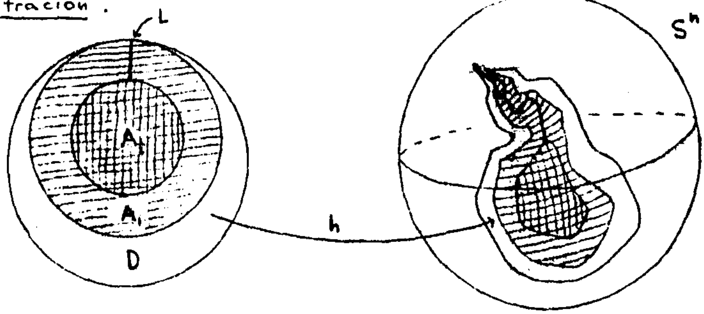
Existen, pues, encajes cerrados y localmente planos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que no son aplanables.

Sean $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq t\}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - (0,0,\dots,0,1)| \leq 2\}$
y $L = \{(0,0,\dots 0,t) \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$.

Lema 3.2

Sea $h : D \to S^n$ un encaje . Entonces $h(\partial A_1)$ es plana si y solo si $L' = h(L)$ es plano .

Demostración .



$\Rightarrow$ Si $h(\partial A_1)$ es plana , entonces $h^{-1}|_{h(\partial A_1)}$ puede extenderse a un homeomorfismo $\overline{h^{-1}} : V \to \mathbb{R}^n - \mathring{A}_1$, donde V es una vecindad de $h(\partial A_1)$ en $S^n - h(\mathring{A}_1)$, por lo que $\varphi : V \cup h(A_1) \to \mathbb{R}^n$ definido como h^{-1} en $h(A_1)$ y como $\overline{h^{-1}}$ en V es un homeomorfismo que lleva a L' en L .

$\Leftarrow$ Supongamos que L' es plano en S^n . Falta mostrar que $S^n - h(\mathring{A}_1)$ es una n-bola . Como $h(\partial A_{\frac{1}{2}})$ está bicollareada en S^n, entonces $S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}})$ es una n-bola . La idea es ver que $S^n - h(\mathring{A}_1)$ es homeomorfa a $S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}})$.

1. Observar que existe un mapeo $g' \cdot D - \mathring{A}_{\frac{1}{2}} \twoheadrightarrow D - \mathring{A}_1$

tal que $g'|\partial D$ es la identidad, $g'(\partial A_{\frac{1}{2}}) = \partial A_1$ y tal que L es el único conjunto singular de g' ($g'(L) = (0,0,\ldots,0,1)$). Definir $g : S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}}) \twoheadrightarrow S^n - h(\mathring{A}_1)$ como $h \circ g \circ h^{-1}$ en $h(D - \mathring{A}_{\frac{1}{2}})$ y extenderla a $S^n - h(D)$ como la identidad.

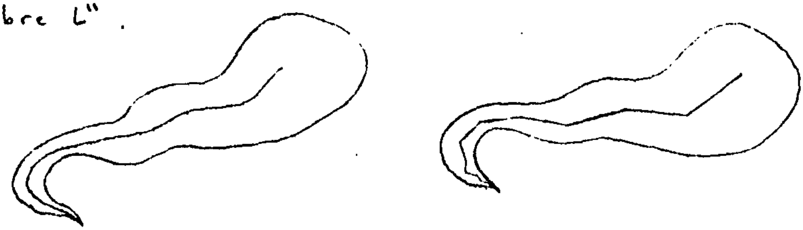
2. Sea $E = \{ x \in \mathbb{R}^n / |x - (0,0,\ldots,0,1)| < \frac{1}{4} \}$. Como L' es plano en S^n, existe un encaje $\varphi : E \to S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}})$ tal que $\varphi(L') = L$. Ahora es muy facil definir un mapeo $f' : E \twoheadrightarrow E$ que sea la identidad en ∂E y tal que L sea el unico conjunto singular de f'. Definir $f : S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}}) \twoheadrightarrow S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}})$ como $\varphi \circ f' \circ \varphi^{-1}$ y extenderlo a $S^n - \varphi(E)$ como la identidad. f y g son mapeos cerrados con los mismos conjuntos singulares, por lo que $S^n - h(\mathring{A}_1)$ y $S^n - h(\mathring{A}_{\frac{1}{2}})$ son homeomorfos.

□

<u>Teorema 3.3</u> Sea $h : D \to S^n$ un encaje. Si $n > 3$ entonces $L' = h(L)$ es plano en S^n.

Pensemos en h como un encaje de D en $\mathbb{R}^n \approx S^n - \{q\} \subset S^n$. Es inmediato que cualquier subarco de L' que no contenga a $p = h(0,0,\ldots,0,1)$ es plano en $\mathbb{R}^n$: el problema está en p. La demostracion de que L' es plano requiere de un resultado que no probaremos: que existe un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(L')$ es una poligonal infinita (en el siguiente sentido : que $\varphi(L')$ sea la unión de una familia numerable de segmentos de recta, mas un punto)(*).

La demostración de esto no es facil, pero la idea es sencilla : "se siente" por la forma en que L' está encajada en $h(D)$, que si L'' es una poligonal infinita con un extremo en p y salvo por este punto contenida en $h(\mathring{D})$, y L'' está suficientemente cerca de L', entonces $\mathbb{R}^n$ debe poder deformarse continuamente para llevar a L' sobre L''.



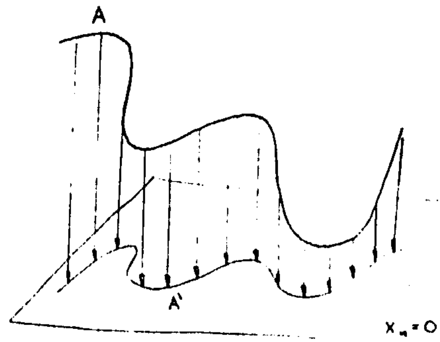
Es claro que $\varphi(L')$ es plano si y solo si L' es plano. Supondremos entonces que L' es una poligonal infinita.

<u>Lema 3.31</u> Sea A un arco en $\mathbb{R}^n$. Si existe una recta L en $\mathbb{R}^n$ tal que todas las rectas paralelas a L intersectan a A en, a lo mas, un punto, entonces A es plano.

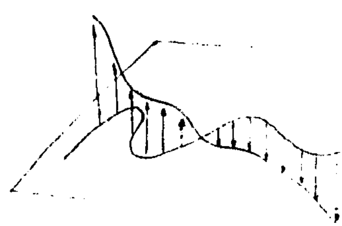
<u>Demostración</u>. Demos a $\mathbb{R}^n$ un sistema ortogonal de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tal forma que la recta L sea el eje de las x_n's.

(*) ver [5] pag 102

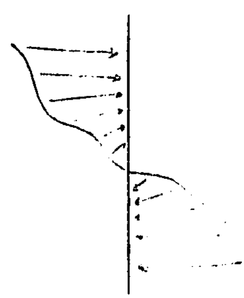
1. Existe un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que la imagen de A bajo φ está contenida en el plano $x_n = 0$: Sea A' la proyección de A en el plano $x_n = 0$ (en la dirección de L) Definir $h : A' \to \mathbb{R}$ en $a' \in A$ como la ultima coordenada del punto de A que se proyecta en a'. Por la hipotesis sobre L, h es una función continua, por lo que puede extenderse a un mapeo del plano $x_n = 0$ en $\mathbb{R}$*. Definir $\varphi(\bar{x}, x_n) = (\bar{x}, x_n - h(\bar{x}))$ donde $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$.



2. Existe un homeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(\varphi(A))$ intersecta a cada plano $x_n =$ cte. en, a lo mas, un punto: Sea $\alpha : [0,1] \to \varphi(A)$ un homeomorfismo. El mapeo $\alpha^{-1} : \varphi(A) \to [0,1]$ se extiende* a un mapeo $\overline{\alpha^{-1}}$ del plano $x_n = 0$ en $[0,1]$. Definir $\psi(\bar{x}, x_n) = (\bar{x}, x_n + \overline{\alpha^{-1}}(\bar{x}))$.



3. Existe un homeomorfismo $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta(\psi \circ \varphi(A)) \subset L$:



$$\text{Sea } \eta(\bar{x}, x) = \begin{cases} (\bar{x} - \alpha(x_n), x_n) & \text{si } 0 \le x_n \le 1 \\ (\bar{x} - \alpha(1), x_n) & \text{si } 1 \le x_n \\ (\bar{x} - \alpha(0), x_n) & \text{si } x_n \le 0 \end{cases}$$

* Por el teorema de extensión de Tietze.

□

Lema 3.32 Si A es un arco en $\mathbb{R}^n$ que está contenido en una familia numerable de rectas y $n > 3$ entonces A es plano.

Demostración. Sea $\{l_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de rectas que contenga a A. Cada par de rectas l_i, l_j está contenida en un plano de dimensión 3 en $\mathbb{R}^n$, P_{ij}, y cualquier recta que intersecta a A en mas de un punto está contenida en algun P_{ij}.

Sea P'_{ij} el plano paralelo a P_{ij} que pasa por el origen de $\mathbb{R}^n$. Es facil ver que una familia numerable de planos de dimensión menor que n en $\mathbb{R}^n$ no puede cubrir a $\mathbb{R}^n$, por lo tanto existe un punto p en $\mathbb{R}^n$ que no está en la unión de los P'_{ij}. Sea L la recta que pasa por p y por el origen de $\mathbb{R}^n$. Ninguna recta paralela a L está contenida en un P_{ij}: Si lo estuviera L estaría contenida en un P'_{ij} y entonces p estaría en P'_{ij}.

□

Teorema 3.4 Sea Σ una n-1 esfera encajada en S^n y $p \in \Sigma$. Si $\Sigma - \{p\}$ es localmente plana en S^n, y $n > 3$, entonces Σ es plana.

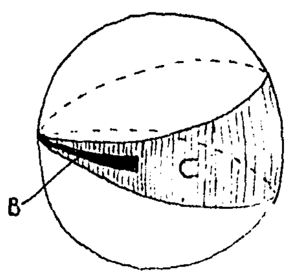
Demostración.

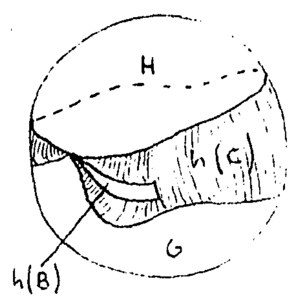
Sea $C = \{(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} / -1-x_1 \leq x_{n+1} \leq 1+x_1\}$.

C es homeomorfo al anillo $S^{n-1} \times [-1,1]$ en el que se ha colapsado un conjunto de la forma $\{s\} \times [-1,1]$ a un punto.

Por el corolario 2. existe un encaje $h : C \to S^n$ tal que $h(S^{n-1}) = \Sigma$. Sean G y H las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - h(C)$. Probaremos que las cerraduras de las componentes conexas de $S^n - h(S^{n-1})$ (que son homeomorfas a $G \underset{h|FrG}{\cup} C$ y a $H \underset{h|FrH}{\cup} C$) son n bolas. Observar que el resultado de pegarle a G una copia de C a lo largo de $Fr\, G$ no depende del homeomorfismo de pegado, sino solamente del punto de $Fr\, G$ al que se pegue el "vertice" de C.

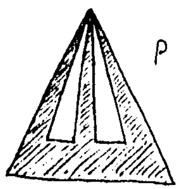
Sea B la siguiente n bola en S^n: $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} / -1-\frac{1}{2}x_1 \leq x_{n+1} \leq 1+\frac{1}{2}x_1,\ x_1 \leq 0 \leq x_2\}$

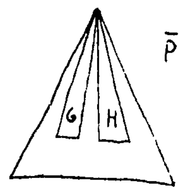




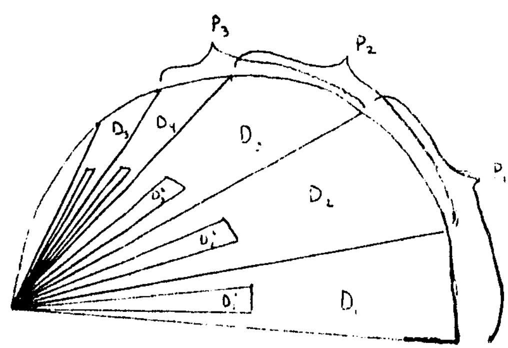
$C - \mathring{B}$ es homeomorfo al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n$: una n bola convexa, de la que se han removido los interiores de dos bolas, convexas y salvo por un punto común de la frontera (el "vertice"), contenidas en el interior de la

primera. Llamemos a este objeto P.
Sea $h_1 : P \twoheadrightarrow h(C - \mathring{B})$ un homeomorfismo fijo.
Podemos recuperar $S^n - h(\mathring{B})$ pegandole a P una copia de H y una de G por medio de $h_1^{-1}|$ Frontera de G y $h_1^{-1}|$ Frontera de H.
Veremos que el espacio $\bar{P}$ así obtenido es una n bola.





Es facil verificar que existe un encaje $g : D \to C$ que lleva a A_1 en B. Como $n > 3$, los lemas 3.2 y 3.3 implican que $h \circ g(A_1) = h(B)$ es plana en S^n, por lo que $\bar{P} \approx S^n - h(\mathring{B})$ es una n bola. (La hipótesis $n > 3$ solo se utiliza en este punto).
Sea F la mitad superior de la bola de radio 1 y centro en $(1,0,\dots 0) \in \mathbb{R}^n$: $F = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n / (x_1-1)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1,\ x_n \geq 0\}$
Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea D_i la n bola $\{(x_1, x_2 \dots x_n) \in F / (i-1)\, x_1 \leq x_n \leq i\, x_1\}$
$F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$. Sea D_i' una n bola de la misma forma que D_i, y salvo por el punto $(0,0,\dots,0)$, contenida en $\mathring{D}_i$.
Llamemos P_i a $(D_i - \mathring{D}_i') \cup (D_{i+1} - \mathring{D}_{i+1}')$: cada P_i es una copia de P.

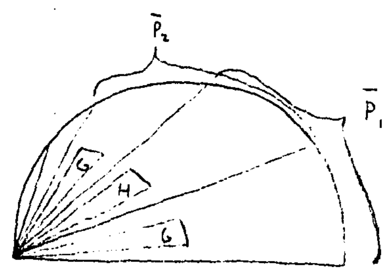


Sea $h_1 : P_1 \twoheadrightarrow h(C - \mathring{B})$ un homeomorfismo que lleve a $\operatorname{Fr} D_1'$ en $\operatorname{Fr} G$ y a $\operatorname{Fr} D_2'$ en $\operatorname{Fr} H$.

Sea $\varphi_i : P_i \twoheadrightarrow P_{i+1}$ un homeomorfismo que sea la identidad en la frontera de D_{i+1}' y que lleve a $\operatorname{Fr} D_i'$ en $\operatorname{Fr} D_{i+2}'$ (desde luego aquí hace falta que $n \geq 3$). Entonces $\varphi_{i-2} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ h_1^{-1}$ es un homeomorfismo de $h(C - \mathring{B})$ sobre P_i.

Por cada i impar, tomar una copia de G, y pegarla a $F - \bigcup_1^{\infty} \mathring{D}_i'$ a lo largo de $\operatorname{Fr} D_i'$, identificando cada punto x de $\operatorname{Fr} G$ con el punto $h_1^{-1}(x) \in \operatorname{Fr} D_1'$, si $i = 1$, o con el punto $\varphi_{i-2} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ h_1^{-1}(x) \in \operatorname{Fr} D_i'$ si $i > 1$.

Por cada i par, tomar una copia de H y pegarla a $F - \bigcup_1^{\infty} \mathring{D}_i'$ a lo largo de $\operatorname{Fr} D_i'$, identificando cada punto $x \in \operatorname{Fr} H$ con el punto $h_1^{-1}(x) \in \operatorname{Fr} D_2'$, si $i = 2$, o con $\varphi_{i-2} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ h_1^{-1}(x) \in \operatorname{Fr} D_i'$ si $i > 2$. Llamemos $\bar{F}$ a $F - \bigcup_1^{\infty} \mathring{D}_i'$ junto con las copias de G y H. Llamemos $\bar{P}_i$ a P_i junto con las copias de G y H que están pegadas a $\operatorname{Fr} D_i'$ y $\operatorname{Fr} D_{i+1}'$. Como $\varphi_{i+1} | \operatorname{Fr} D_i$ es la identidad, entonces el



homeomorfismo $\varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ h_1^{-1} : h(C - \mathring{B}) \twoheadrightarrow P_i$ se extiende a un homeomorfismo de $S^n - h(\mathring{B})$ sobre $\bar{P}_i$. Por lo tanto cada $\bar{P}_i$ es una n bola.

Como $\bar{P}_i$ y $D_i \cup D_{i+1}$ son n bolas, el homeomorfismo identidad entre sus fronteras se extiende a un homeomorfismo $\psi_i : \bar{P}_i \twoheadrightarrow D_i \cup D_{i+1}$. La unión de estos homeomorfismos sobre las i impares da un homeomorfismo $\psi : \bar{F} = \bigcup_{i \text{ impares}} \bar{P}_i \twoheadrightarrow F = \bigcup_{i \text{ impares}} (D_i \cup D_{i+1})$. La unión de los ψ_i sobre las i pares da un homeomorfismo $\psi' : \bigcup_{i \text{ pares}} \bar{P}_i \twoheadrightarrow \bigcup_{i \text{ pares}} (D_i \cup D_{i+1})$. Extender ψ' a $D_1 - \mathring{D}'_1$ y a la copia de G que está pegada a $\mathrm{Fr}\, D'_1$ como la identidad: esto nos da un homeomorfismo entre $\bar{F}$ y el siguiente espacio: $F - \mathring{D}'_1$ con una copia de G pegada identificando los puntos de $\mathrm{Fr}\, G$ con sus imagenes en $\mathrm{Fr}\, D'_1$ bajo h'_1. Esto no es mas que G con una copia de C pegada a lo largo de la frontera, por un homeomorfismo que identifica a p con el vertice de C.

□

<u>Corolario 3.5</u> Los encajes cerrados y localmente planos de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$, $n \neq 3$, son planos.

□

Esta tesis fue dirigida por el profesor Javier Bracho, a quien agradezco su ayuda y paciencia.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Brown. "A proof of the generalized Schoenflies Theorem", Bulletin American Mathematical Society 12 (1961) 812-814

[2] M. Brown. "Locally flat embeddings of topological manifolds". Annals of Mathematics (2) 75 (1962) 331-341

[3] E. Artin., R. Fox. "Some wild cells and spheres in three dimensional space". Annals of Math. (2) 49 (1948) 979-990

[4] J.C. Cantrell. "Separation of the n sphere by an n-1 sphere". Transactions of the American Math. Society 108 (1963) 185-194

[5] T.B. Rushing "Topological Embeddings". Pure and Applied Mathematics 52. Academic Press.