



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON
EN 2-VARIADES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O

PRESENTA:

MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, OCTUBRE 1985.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

Introducción .	1
Capítulo I: Campos vectoriales en \mathbb{R}^n .	3
Capítulo II: Teorema del Flujo Tubular Corto.	15
Capítulo III: Teorema de Poincaré-Bendixon en el plano y algunas consecuencias.	20
Capítulo IV: Campos Vectoriales en Variedades y Teorema de Poincaré-Bendixon en la esfera.	31
Capítulo V: Teorema de Schwartz .	45
Referencias	52

Introducción

El tema central de este trabajo es la información cualitativa (topológica) acerca de los conjuntos límite, que son los conjuntos donde "nacen" o "mueren" las órbitas asociadas a campos vectoriales tanto en el plano como en 2-variedades compactas. Información que se resume en resultados conocidos como teoremas de tipo Poincaré-Bendixon. Pues este estudio fue iniciado por Henri Poincaré [P] e Ivar Bendixon [Be] a fines del siglo pasado y principios de este.

En el primer capítulo, basado en [Hi-Sm] y [Ba-Sz] se dan los conceptos y herramientas básicas para poder dar la demostración del Teorema de Poincaré-Bendixon en el plano. Para el segundo capítulo se proporciona una caracterización del comportamiento local de un campo vectorial alrededor de un punto regular, caracterización dada por el Teorema del Flujo Tubular Corto. Para ello se usaron [Hi-Sm], [So] y [DeM-Bar].

En el capítulo III, ya con la herramienta obtenida en los primeros dos, se procede a probar el Teorema de Poincaré-Bendixon en el plano, siendo de vital importancia el Teorema de la Curva de Jordan. Asimismo se dan algunas consecuencias interesantes del Teorema de Poincaré-Bendixon. Para lo anterior, se tomó material que se encuentra en [Hi-Sm] [C-Le].

A lo largo del cuarto capítulo, se generalizan los conceptos y resultados dados en los primeros dos capítulos para el plano y \mathbb{R}^n a variedades. Se construye un flujo en el toro que tiene a esta superficie como conjunto límite de cualquier punto en ella. Y para terminar el -

capítulo se demuestra un teorema de tipo Poincaré-Bendixon para la esfera. Tomándose como base para este capítulo [Li] [Pa - De M].

Finalmente, en el último capítulo se presenta un resultado debido a A.J. Schwartz [Sc], el cual es una extensión bastante notable para campos vectoriales en 2-variedades compactas del Teorema de Poincaré - Bendixon, para el plano y la esfera; dándose una idea básica de la demostración de tal resultado.

CAPITULO I

-CAMPOS VECTORIALES EN \mathbb{R}^n

Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Un campo vectorial de clase C^k ($k \geq 1$) es una función

$$X: W \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de clase C^k . Al campo vectorial X , es posible asociarle la ecuación diferencial

$$x' = X(x) \quad (1)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $X = (X_1, \dots, X_n)$. Las soluciones de esta ecuación son funciones diferenciables

$$\varphi: I \rightarrow W \quad (I \text{ intervalo abierto de } \mathbb{R})$$

tales que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)) \quad (2)$$

para cada $t \in I$, y son llamadas trayectorias o curvas integrales de X o de la ecuación diferencial (1).

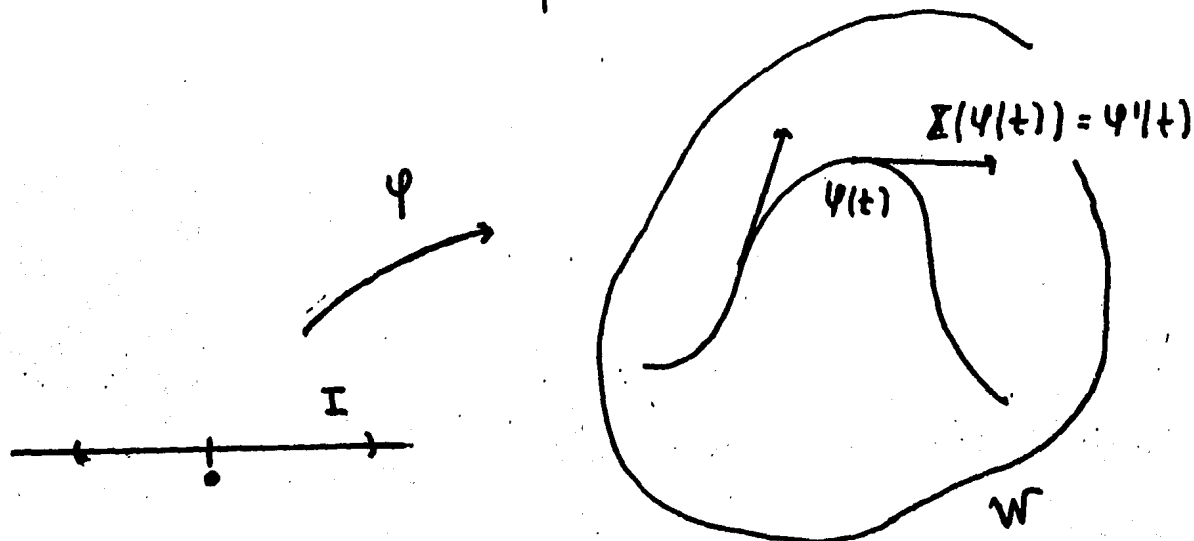
Un punto $x_0 \in W$ se dice que es un punto singular de X si $X(x_0) = (0, \dots, 0)$. En caso contrario diremos que x_0 es un punto regular de X .

Si $x_0 \in W$ es un punto singular de X , entonces la función $\varphi(t) = x_0$ ($-\infty < t < \infty$) es solución de (1). Recíprocamente, si $\varphi(t) = x_0$ ($-\infty < t < \infty$) es solución de (1), entonces x_0 es un punto singular de X , ya que

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x_0)$$

Una curva integral $\varphi: I \rightarrow W$ se dice máxima (o solución máxima) si para cada curva integral $\psi: J \rightarrow W$ tal que $I \subseteq J$ y $\varphi = \psi|_I$ se tiene que $I = J$, y, consecuentemente $\varphi = \psi$. En este caso al intervalo I lo llamaremos máximo.

Geométicamente, φ es una curva integral de I si y sólo si su vector velocidad $\varphi'(t)$ en t coincide con el valor del campo I en $\varphi(t)$.



TEOREMA I.1

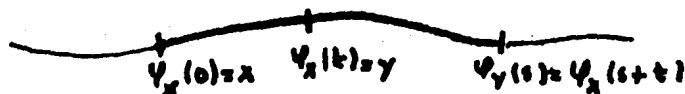
a) (Existencia y unicidad de soluciones máximas)

Para cada $x \in W$ existe un intervalo abierto $I(x)$, $0 \in I(x)$, donde está definida una única solución máxima

$$\varphi_x : I(x) \longrightarrow W$$

tal que $\varphi_x(0) = x$.

b) Si $y = \varphi_x(t)$, $t \in I(x)$, entonces $I(y) = I(x) - t = \{r - t \mid r \in I(x)\}$ y $\varphi_y(s) = \varphi_x(t+s)$ para $s \in I(y)$



c) El conjunto $D = \{(t, x) \mid t \in I(x), x \in W\}$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{n+1} y la función

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ es de clase C^h .

Para una demostración del anterior teorema ver

Definición I.2 A la función $\varphi: D \rightarrow W$ la llamaremos el flujo generado por X .

Observemos que de la parte (b) del teorema se tienen dos hechos

i) Para cada $x \in W$, $\varphi(0, x) = x$

ii) Para cada $x \in W$; $s, t \in I(x)$ tales que $s+t \in I(x)$ se tiene que $t \in I(\varphi(s))$ y

$$\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$$

Notación: También se usará $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$.

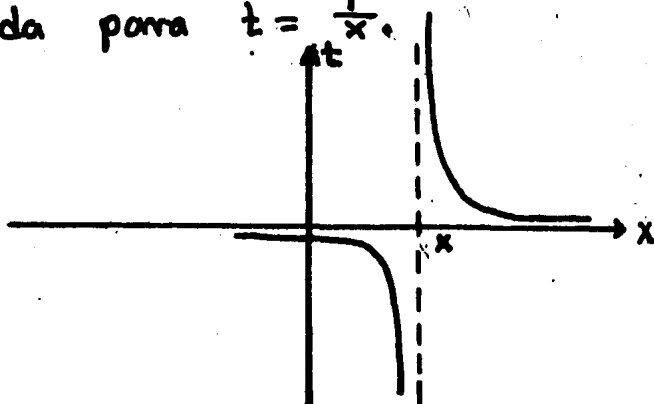
En general, las soluciones de ecuaciones diferenciales, no están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, como es el caso de

$$x' = x^2$$

donde $D = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xt < 1 \}$ y $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$
dada por

$$\varphi(t, x) = -\frac{x}{xt-1}$$

no está definida para $t = \frac{1}{x}$.



Por lo tanto, en general el flujo generado por X

sólo es de carácter local.

Por simplicidad, en este trabajo nos ocuparemos únicamente de flujos globales, que llamaremos simplemente flujos, donde el intervalo de definición de todas las curvas integrales es todo \mathbb{R} .

Definición I.3 En vista del teorema se podría definir un flujo global en W como una función

$$\varphi: \mathbb{R} \times W \longrightarrow W$$

de clase C^k ($k \geq 1$) tal que

$$i) \quad \varphi(0, x) = x \quad ; \quad x \in W$$

$$ii) \quad \varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t+s, x) \quad ; \quad x \in W; s, t \in \mathbb{R}.$$

El campo vectorial asociado al flujo φ está dado por

$$X(x) = \left. \frac{d\varphi(t, x)}{dt} \right|_{(0, x)}$$

Definición I.4 Dado un punto $p \in W$, el conjunto

$$O(p) = \{ \varphi(t, p) \mid t \in \mathbb{R} \},$$

esto es, la imagen de la curva integral de X que pasa por el punto p , la llamaremos la órbita de X por el punto p o trayectoria de X por el punto p . $O^+(p) = \{ \varphi(t, p) \mid t \geq 0 \}$ y $O^-(p) = \{ \varphi(t, p) \mid t \leq 0 \}$ serán llamadas semiórbitas positiva y negativa de p .
Observemos que si $q \in O(p)$, entonces $O(q) = O(p)$.

Definición I.5 Una órbita por un punto p , tal que $\varphi(t+\tau, p) = \varphi(t, p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y algún $\tau \neq 0$ es llamada periódica de periodo τ .

Corolario I.1.1 Si φ es una solución máxima de (1) definida en un intervalo máximo $I(p)$ y además
 $\varphi_{t_1}(p) = \varphi_{t_2}(p)$ para $t_2 \neq t_1$, entonces $I = \mathbb{R}$ y
 $\varphi_{t+c}(p) = \varphi_t(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $c = t_2 - t_1$.
 Es decir, φ es periódica.

Demostración Definimos una función $\psi: [t_2, t_2+c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $\psi(t) = \varphi(t-c)$. Por ello, $\psi'(t) = \varphi'(t-c) = X(\varphi(t-c)) = X(\psi(t))$. Además $\psi(t_2) = \varphi(t_2-c) = \varphi(t_1)$. Por unicidad de soluciones $[t_2, t_2+c] \subseteq I$, y $\psi(t) = \varphi(t+c)$ si $t \in [t_1, t_2]$. Prosiguiendo de esta manera $I = \mathbb{R}$ y $\psi(t) = \varphi(t+c)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

De aquí en adelante, consideraremos flujos globales φ generados por campos vectoriales $X: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en abiertos W de \mathbb{R}^n .

Definición I.6 Dado un punto $q \in W$, diremos que es un punto ω -límite de un punto $p \in W$ bajo el flujo φ si existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales tales que cuando $t_n \rightarrow \infty$ entonces $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$.

Al conjunto de puntos ω -límite de un punto $p \in W$ lo llamaremos conjunto ω -límite de p y será denotado por $\omega(p)$.

Definición I.7 Un punto $q \in W$ se dirá que es un punto α -límite de un punto $p \in W$ bajo el flujo φ si existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que si $t_n \rightarrow -\infty$ entonces $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$.

Por $\alpha(p)$ denotaremos el conjunto de puntos α -límite de $p \in W$ y lo llamaremos conjunto α -límite de p .

Intuitivamente, podemos pensar a $\alpha(p)$ como el conjunto donde la órbita de p "nace" y $\omega(p)$ al conjunto donde "muere" la órbita de p .

Ejemplo I.8 Si consideramos el campo vectorial en \mathbb{R}^2 dado por $\mathcal{X}(x,y) = (x,y)$, y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado

$$\frac{dx}{dt} = x$$

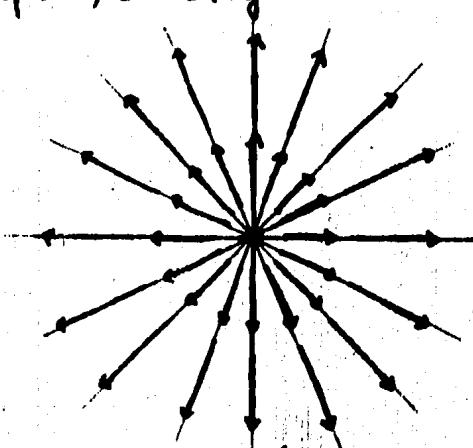
$$\frac{dy}{dt} = y$$

Se tienen las siguientes curvas integrales por puntos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi_t((x_0, y_0)) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$$

cuyas imágenes en el plano están dadas por semirrectas que salen del origen.

En este ejemplo, el origen es el único punto singular del campo



Por la forma en que están dadas las soluciones, es claro que están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y además, claramente son de clase C^∞ ; teniendo definido un flujo en \mathbb{R}^2 .

Sus conjuntos límite son $\omega((0,0)) = \{(0,0)\}$, $\alpha((0,0)) = \{(0,0)\}$ y si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ entonces $\omega((x_0, y_0)) = \emptyset$ y $\alpha((x_0, y_0)) = \{(0,0)\}$.

Ejemplo I.9

Para el sistema de ecuaciones diferenciales

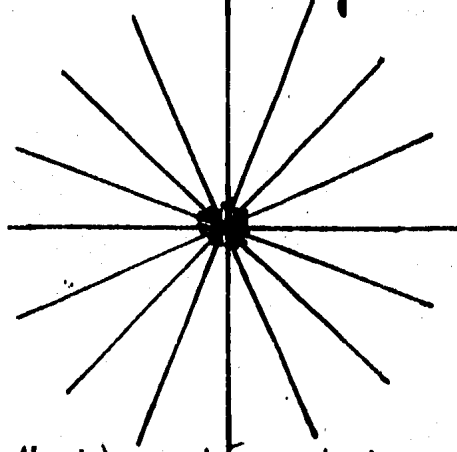
$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

asociado al campo vectorial plano $\mathcal{X}(x,y) = (-x, -y)$ cuyas orbitas (curvas integrales) por puntos (x_0, y_0) están dados por

$$\varphi_t(x_0, y_0) = (-x_0 e^t, -y_0 e^t)$$

Haciendo un razonamiento análogo al del ejemplo anterior, las orbitas del flujo generado por \mathcal{X} son rayos que se acercan al origen cuando t crece positivamente y que se alejan cuando t crece negativamente



Los conjuntos límite están dados por: $w(0,0) = \{(0,0)\}$, $\alpha(0,0) = \{(0,0)\}$ en el caso del origen, y, para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ se tiene que $w(x_0, y_0) = \{(0,0)\}$ y $\alpha(x_0, y_0) = \emptyset$.

A partir de los ejemplos anteriores, es posible observar que los conjuntos límite pueden ser conjuntos vacíos. Además, estos ejemplos muestran un principio de dualidad general: los conjuntos α -límite y w -límite de un campo \mathcal{X} son los conjuntos w -límite y α -límite, respectivamente, del campo $-\mathcal{X}$. Así, lo que se demuestra a continuación para w -límites, vale también para α -límites.

Proposición I.10

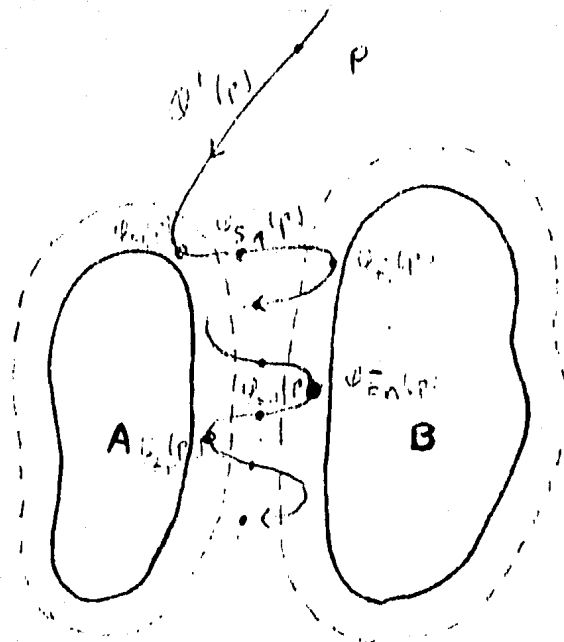
- i) $w(p)$ es cerrado
- ii) Dados dos puntos p, q en la misma trayectoria, se tiene que $w(p) = w(q)$
- iii) Si $w(p)$ es compacto, entonces es conexo.

Demostración:

i) Si $q \notin w(p)$, entonces existe una vecindad V_q de q que no contiene ningún punto de la trayectoria que pasa por p , con lo cual ninguno de los puntos de V_q es elemento de $w(p)$. Esto implica que el complemento de $w(p)$ es abierto.

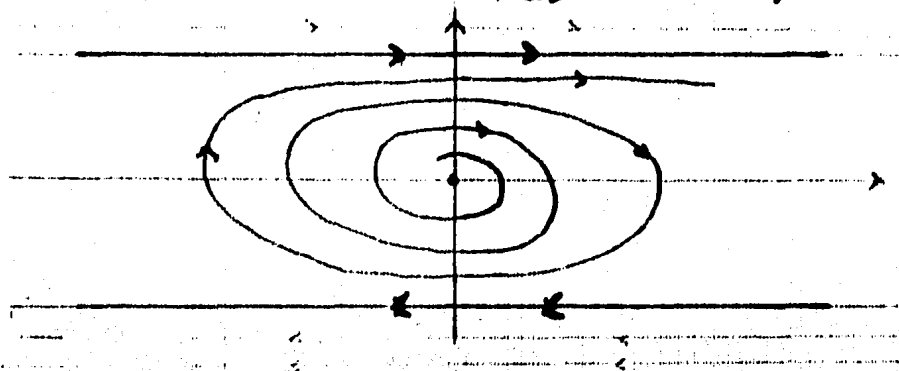
ii) Sean p y q puntos que se hallan en la misma trayectoria, de donde existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{t_1}(p) = q$. Tomemos $x \in w(q)$, debemos mostrar que $x \in w(p)$. Por ser x punto w -límite de q , existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números reales tal que cuando $t_n \rightarrow \infty$, $\varphi_{t_n}(q) \rightarrow x$. Como $\varphi_{t_1}(p) = q$, entonces $\varphi_{t_n+t_1}(p) = \varphi_{t_n}(\varphi_{t_1}(p)) = \varphi_{t_n}(q) \rightarrow x$. Si tomamos $\{s_n = t_n + t_1\}$, la cual tiende a infinito como sucesión real, se tiene que $\varphi_{s_n}(p) \rightarrow x$. Por tanto $x \in w(p)$. Es decir $w(q) \subset w(p)$. Análogamente se prueba que $w(p) \subset w(q)$.

iii) Supongamos que $w(p)$ es compacto, mas no conexo. Por ello existen conjuntos cerrados A y B tales que $A \cup B = w(p)$ y $A \cap B = \emptyset$. Por ser $w(p)$ compacto y A, B son subconjuntos cerrados de $w(p)$ se tiene que A y B son compactos disjuntos. Por tanto, es posible considerar $\delta > 0$ tal que A y B estén separados esa distancia. Ya que $A, B \subset w(p)$, es posible considerar sucesiones $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\bar{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\text{dist}(\varphi_{t_n}(p), A) < \delta/3$ y $\text{dist}(\varphi_{\bar{t}_n}(p), B) < \delta/3$; además con la condición $t_1 < \bar{t}_1 < t_2 < \dots < \bar{t}_2 < t_3 < \bar{t}_3 < t_4 < \dots$.



Como $\text{dist}(\psi_t(p), A)$ es función continua de t , podemos escoger valores s_n que cumplan, por una parte $t_n < s_n < \bar{t}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) y por otra que los puntos $\psi_{s_n}(p)$ estén a una distancia $\delta/2$ de A. Hemos obtenido una sucesión acotada $\{\psi_{s_n}(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y por tanto tiene una subsucesión convergente a un punto q , el cual debe estar a una distancia $\delta/2$ de A por la continuidad de la distancia respecto a t . Pero $\text{dist}(q, B) \geq \text{dist}(A, B) - \text{dist}(A, q) = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$, de donde $q \notin A \cup B$, pero por la forma como se construyó $\{\psi_{s_n}(p)\}$, se tiene que $q \in \omega(p)$, lo cual no es posible. Por lo tanto $\omega(p)$ es conexo cuando es compacto.

El siguiente ejemplo nos muestra la necesidad de la hipótesis de compacidad del conjunto ω -límite para asegurar conexidad. (Para su construcción véase [Ne-St])



En este ejemplo, el conjunto ω -límite de cualquier punto que no sea el origen ni elemento de las dos rectas paralelas es precisamente la unión de ambas rectas paralelas que es cerrado, mas no compacto, ni conexo.

Definición I.11 Se dice que un subconjunto $A \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ del dominio de un campo X es positivamente invariante bajo el flujo ϕ generado por X , si para cada $p \in A$, $\phi_t(p) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Del mismo modo se pueden definir conjuntos negativamente invariantes. Cuando un conjunto A es positiva y negativamente invariante bajo un flujo, diremos que A es invariante.

En otras palabras, un conjunto A es invariante si para cada $p \in A$, la trayectoria por tal punto "vive" en A .

Ejemplo I.12 Considérese el campo $X(x,y) = (x,y)$ del ejemplo I.8. Al tomar la bola de radio $r > 0$ centrada en el origen, resulta ser negativamente invariante y su complemento es positivamente invariante. Claramente el punto singular y las trayectorias son conjuntos invariantes, así como las uniones de tales conjuntos.

Proposición I.13 Si $A \subseteq W$ es un conjunto cerrado invariante, entonces $\omega(p), \alpha(p) \subset A$ para cada $p \in A$.

Demostración Sea $p \in A$ y $q \in \omega(p)$. Debemos mostrar que $q \in A$. Como $q \in \omega(p)$, existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$. Por ser A invariante $\phi_{t_n}(p) \in A$ para cada t_n y por ser q límite de una sucesión de puntos en A , que es cerrado, entonces $q \in A$.

Hemos hablado de conjuntos α y ω -límite y de conjuntos

invariantes bajo un flujo, pero ¿Qué relación guardan entre ellos?, ¿Todo conjunto límite es invariante? En caso de suceder esto, surge otra pregunta ¿Los conjuntos límite son todos los conjuntos invariantes? Para dar respuesta a la segunda pregunta, se tiene la siguiente

Proposición I.14 Los conjuntos límite contenidos en el dominio del flujo son invariantes.

Demostración Sea $q \in \omega(p) \subset W$, entonces $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$ cuando $t_n \rightarrow \infty$. Tomemos $t \in \mathbb{R}$, debemos ver que $\varphi_t(q) \in \omega(p)$. Como φ_t es continua $\varphi_t(\varphi_{t_n}(p)) \rightarrow \varphi_t(q)$. Pero φ es un flujo, así que $\varphi_t(\varphi_{t_n}(p)) = \varphi_{t+t_n}(p)$ y claramente $t_n + t \rightarrow \infty$ cuando $t_n \rightarrow \infty$. Por tanto se tiene que $\varphi_t(q) \in \omega(p)$.

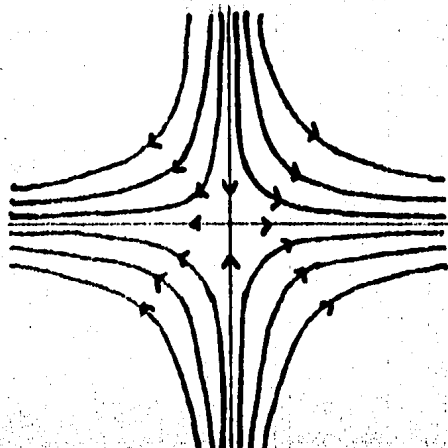
Para contestar la última interrogante, consideremos los siguientes campos vectoriales planos, dados por los ejemplos

Ejemplo I.15 Tomemos el campo $X(x,y) = (x, -y)$, así como su sistema de ecuaciones diferenciales asociado:

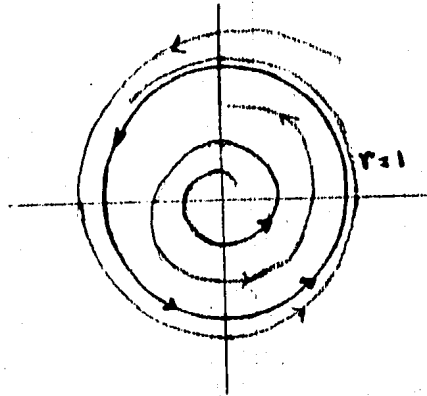
$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

donde el flujo correspondiente está determinado a continuación



Ejemplo I.16 Sea $X(r, \theta) = (r(1-r), 1)$, donde las curvas solución se muestran en la siguiente figura.



En los dos ejemplos anteriores, las partes sombreadas representan conjuntos invariantes; sin embargo, el primero no contiene puntos límite, y, en el segundo, el interior del círculo unitario contiene el origen, siendo tal punto el α -límite de todo punto en el interior del círculo, mas no todo punto del interior es punto límite.

Así, se ha mostrado que todo conjunto límite es invariante, pero no todo conjunto invariante es conjunto límite.

CAPITULO II

TEOREMA DEL FLUJO TUBULAR CORTO

A lo largo de este capítulo, consideraremos el flujo φ asociado a un campo vectorial

$$X: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

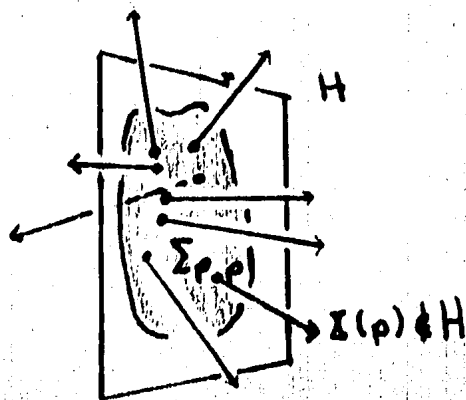
de clase C^1 .

Aunque, en general, el comportamiento global de las orbitas de un flujo puede ser bastante complicado, como como es el caso de los flujos racional e irracional en el toro, que construiremos más adelante. Localmente, es posible caracterizar el comportamiento de las trayectorias en una vecindad de un punto regular.

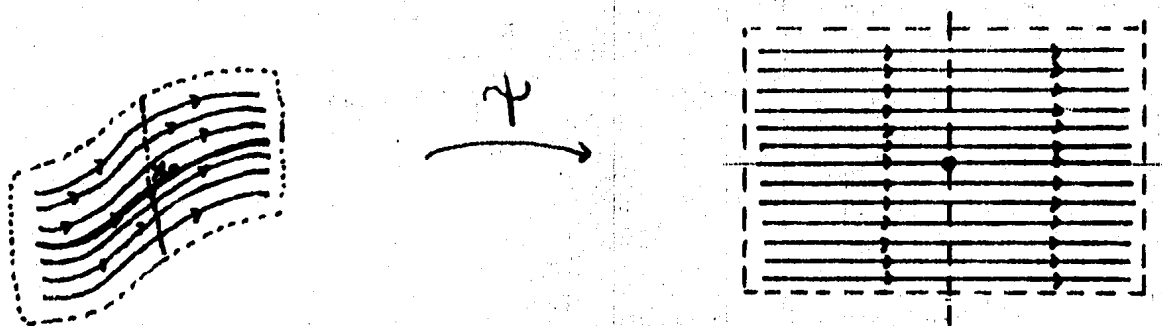
Para facilitar tal caracterización, daremos antes algunos conceptos elementales

Por un hiperplano H , entenderemos un subespacio lineal afín de \mathbb{R}^n de dimensión $n-1$.

Definición II.1 Dado un subconjunto Σ de un hiperplano H , diremos que Σ es transverso a un campo X si para cada $q \in \Sigma$, $X(q) \notin H$. Una sección local de X en un punto p será un subconjunto Σ_p de un hiperplano H que contenga a tal punto tal que Σ_p es transverso a X . Algunas veces llamaremos sección transversal a una sección local.



Definición II.2 Dado un campo vectorial \mathcal{X} de clase C^1 y $x_0 \in \mathcal{W}$ un punto regular bajo \mathcal{X} . Una caja de flujo en torno de x_0 será un difeomorfismo ψ de clase C^1 de una vecindad de x_0 en una vecindad del origen tal que $\psi(x_0) = 0$ y $D\psi_x(\mathcal{X}(x)) = (1, 0, \dots, 0)$ para cada x en la vecindad de x_0 .



En estas condiciones, el flujo de \mathcal{X} se transforma, a través del difeomorfismo ψ , en un flujo mucho más simple: en un flujo paralelo, de velocidad constante.

Teorema (Del flujo tubular corto) II.3

En torno de cada punto regular x_0 de un campo \mathcal{X} de clase C^1 existe una caja de flujo

Demostración Es posible suponer que $x_0 = 0$ es punto regular de \mathcal{X} , ya que si $x_0 \neq 0$, podemos considerar la traslación $\xi(x) = x - x_0$, la cual claramente es un difeomorfismo.

Sea x_1, \dots, x_n un sistema de coordenadas asociado a una base v_1, \dots, v_n de \mathbb{R}^n tal que $X(\bar{0}) = v_1$. Sea H el hiperplano generado por v_2, \dots, v_n .

Sean $W' = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid (0, x_2, \dots, x_n) \in W \}$ y una función

$$g : W' \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por $g(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$. Como φ es un flujo de clase C^1 , en particular se tiene que g es de clase C^1 .

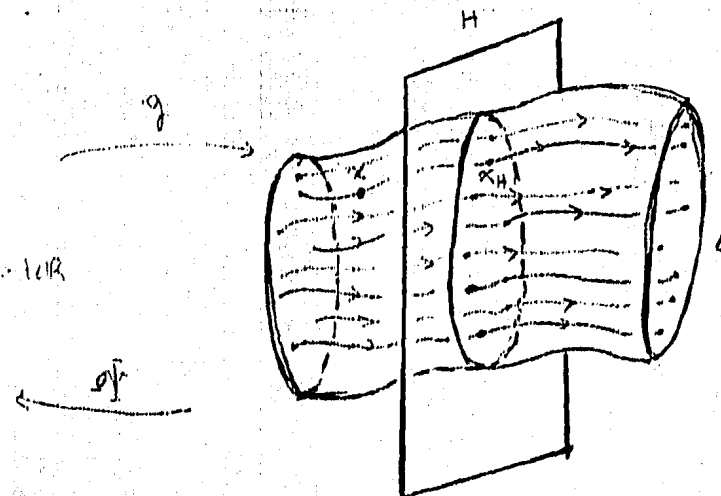
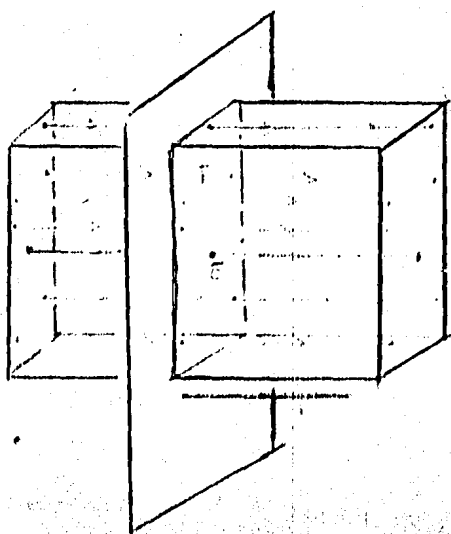
Es claro, por definición, que $g|_{H \cap W'} = 1_{H \cap W'}$. Además, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \\ &= X(\varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)) \\ &= X(g(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

se tiene en particular que $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{0}) = v_1$. Por lo tanto

$Dg(\bar{0})$ es la identidad. Por el teorema de la función inversa existen vecindades Δ y $\Omega \subset W'$ del origen y un difeomorfismo de clase C^1

$$\psi : \Delta \longrightarrow \Omega$$



tal que $g \circ \psi = 1_\Delta$. Claramente podemos tomar Ω de la forma $(-\delta, \delta) \times T$, donde $\delta > 0$ y T es un subconjunto de H transversal a \mathbb{X} en el origen.

Por último, g manda el campo constante $(1, 0, \dots, 0)$ en el campo \mathbb{X} , ya que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \mathbb{X}(g(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

Por lo tanto ψ es una caja de flujo.

Es de observarse que si el campo \mathbb{X} es de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$), la misma demostración, prueba que ψ es a su vez de clase C^r . Además de que dado $x \in \Delta$, existe una única $t \in (-\delta, \delta)$, tal que $\psi_t(x) \in T$.

Algunas veces llamaremos caja de flujo a la imagen del difeomorfismo ψ .

Dado un punto regular p de un campo vectorial \mathbb{X} de clase C^1 . Por el teorema del flujo tubular corto, existe un difeomorfismo de una vecindad de p que manda el campo \mathbb{X} en el campo constante $\mathbb{Y} \equiv (1, 0, \dots, 0)$ localmente. En consecuencia, dos campos vectoriales $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ de clase C^1 son localmente difeomorfos en vecindades suficientemente pequeñas de puntos regulares. Por esta observación, es posible considerar satisfactorio el conocimiento cualitativo local de las órbitas de un campo vectorial de clase C^1 alrededor de puntos regulares.

CAPITULO III

TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON
EN EL PLANO

En este capítulo, consideraremos flujos asociados a campos vectoriales \mathbb{X} en el plano, de clase C^1 . La idea principal será conjugar nociones vistas en los capítulos anteriores; tales nociones son las de conjunto límite y de caja de flujo. Conjugación que nos permitirá probar el Teorema de Poincaré-Bendixon en el plano.

Sean Σ una sección transversal, $p \in W$ y $0 \leq t_0 < t_1$ tales que

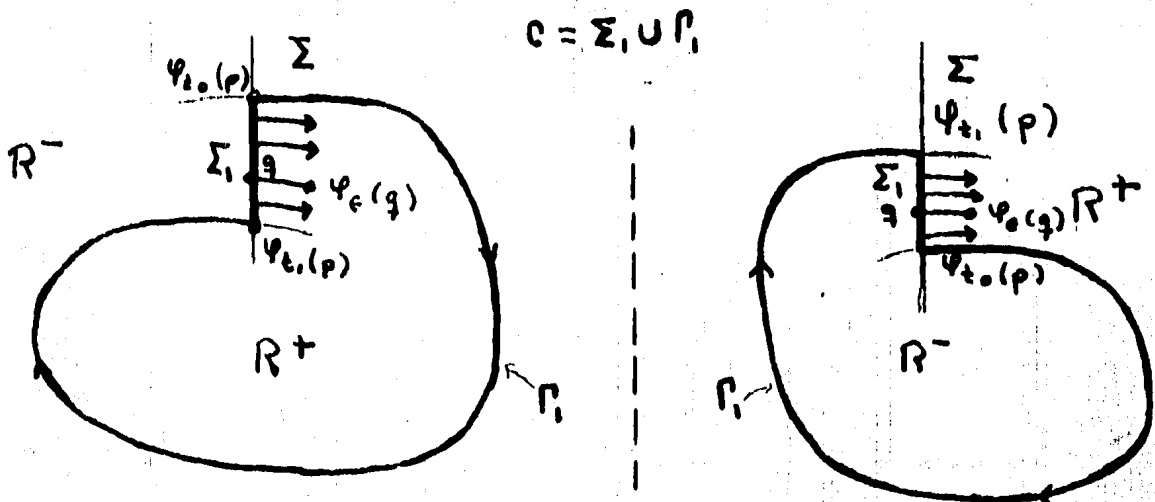
- i) $\varphi_{t_0}(p), \varphi_{t_1}(p) \in \Sigma$
- ii) $\varphi_t(p) \notin \Sigma$ si $t_0 < t < t_1$

Cuando suceda esto, diremos que los puntos $\varphi_{t_0}(p)$ y $\varphi_{t_1}(p)$ son intersecciones consecutivas de $\mathcal{O}^+(p)$ con Σ .

Sea C la curva simple cerrada consistente de la unión de $\Gamma_1 = \{\varphi_t(p) \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ y el segmento de sección transversal $\Sigma_1 = [\varphi_{t_0}(p), \varphi_{t_1}(p)] \subset \Sigma$. Por el Teorema de la Curva de Jordan, C divide el plano en dos conjuntos abiertos, siendo uno de ellos acotado y el otro no acotado.

Como Σ es una sección transversal a un campo vectorial \mathbb{X} y $\Sigma_1 \subset \Sigma$, se tiene que dados $q \in \Sigma_1$ y $\epsilon > 0$, $\varphi_\epsilon(q)$ debe ser elemento de una de las componentes determinadas por C .

No es difícil probar, usando la continuidad del flujo, que todos los puntos $\varphi_\epsilon(q)$, $q \in \Sigma_1$, están en la misma componente. A la cerradura de tal componente la denotaremos por R^+ ; y, por R^- denotaremos la cerradura del complemento de R^+ . (R^+ es la región hacia la que apunta el campo \mathbb{X} en Σ_1). Es claro que $R^+ \cap R^- = C$.



Lema III.1 Si $q \in R^+$ entonces $\mathcal{O}^+(q) \subset R^+$. Más aún, si $q \in \text{Int } R^+$ entonces $\mathcal{O}^+(q) \subset \text{Int } R^+$.

Demostración Por la forma como se construyó R^+ , todas las orbitas que intersectan Σ_1 , deben entrar a R^+ , por ser Σ_1 sección transversal. Por ello, si $q \in R^+$ entonces $\mathcal{O}^+(q)$ no puede salir de R^+ por Σ_1 ; tampoco puede hacerlo por Γ_1 , debido a la unicidad local de soluciones. Para la segunda afirmación, consideremos $q \in \text{Int } R^+$. Por el mismo argumento anterior, $\mathcal{O}^+(q) \subset R^+$. Pero, además, $\mathcal{O}^+(q)$ no puede ser tangente a Σ_1 ni a Γ_1 , por ser Σ_1 sección transversal y por unicidad local de soluciones en Γ_1 . Por lo tanto, si $q \in \text{Int } R^+$, entonces se tiene que $\mathcal{O}^+(q) \subset \text{Int } R^+$.

Observemos que resultados análogos son ciertos para la región R^- y la semiórbita $\mathcal{O}^-(q)$, por un punto $q \in R^-$.

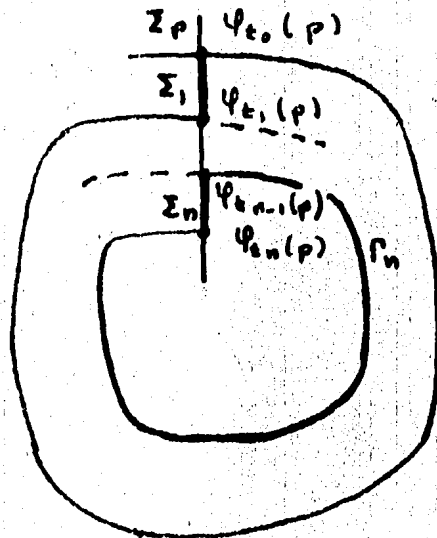
Proposición III.2 Sea Σ_p una sección transversal por un punto $p \in W$. Si $\{Q^+(p) \cap \Sigma_p\} \neq \{p\}$ entonces $Q(p)$ no es orbita periódica y $Q^+(p) \cap \Sigma_p$ define una sucesión estrictamente monótona en Σ_p .

Demostración: $Q^+(p) \cap \Sigma_p$ tienen el orden inducido por $Q^+(p)$. Como $\{Q^+(p) \cap \Sigma_p\} \neq \{p\}$ entonces existe $t_1 > t_0 = 0$ tal que $\varphi_{t_1}(p) \in \Sigma_p$ y $\varphi_t(p) \notin \Sigma_p$ para $t_0 < t < t_1$. Sea C_1 la curva dada por $C_1 = \Gamma_1 \cup \Sigma_1$ donde $\Gamma_1 = \{\varphi_t(p) \mid 0 = t_0 \leq t \leq t_1\}$ y $\Sigma_1 = [\varphi_{t_0}(p) \cdot p, \varphi_{t_1}(p)] \subset \Sigma_p$. Es claro que C_1 es una curva de Jordan. Definamos R_1^+ y R_1^- como al inicio del capítulo. Dado $\epsilon > 0$, se tiene que $\varphi_{t_0-\epsilon}(p) = \varphi_{-\epsilon}(p) \in R_1^-$ y $\varphi_{t_1+\epsilon}(p) \in R_1^+$. Por el lema III.1, se tiene que $Q^-(\varphi_{-\epsilon}(p)) \subset R_1^-$ y $Q^+(\varphi_{t_1+\epsilon}(p)) \subset R_1^+$. Ahora es claro que $Q(p)$ no puede ser periódica.

Supongamos, por inducción, que se tiene $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ tales que definen $n+1$ intersecciones consecutivas de $Q^+(p)$ con Σ_p . Asimismo, supongamos que existe $t_{n+1} > t_n$ tal que $\varphi_{t_{n+1}}(p) \in \Sigma_p$ y $\varphi_t(p) \notin \Sigma_p$ para $t_n < t < t_{n+1}$. Probaremos que $\varphi_{t_n}(p)$ y $\varphi_{t_{n+1}}(p)$ son intersecciones consecutivas de $Q^+(p)$ con Σ_p . Sea C_n la curva de Jordan, donde $C_n = \Gamma_n \cup \Sigma_n$, $\Gamma_n = \{\varphi_t(p) \mid t_{n-1} \leq t \leq t_n\}$, $\Sigma_n = [\varphi_{t_{n-1}}(p), \varphi_{t_n}(p)] \subset \Sigma_p$. Ver figura en la página siguiente.

Observemos que $\varphi_{t_{n+1}}(p) \neq \varphi_{t_n}(p)$, ya que $t_{n+1} \neq t_n$. Pues en caso contrario $Q(p)$ sería orbita periódica por el corolario, pero como ya se probó, esto no es posible. Por el lema III.1, $\varphi_{t_{n+1}}(p) \in \text{Int } R_n^+$, pues $t_{n+1} > t_n$.

Por lo tanto, $\varphi_{t_{n+1}}(p) \in \text{Int } R_n^+ \cap \Sigma_p$. Además, como $\mathcal{Q}(\varphi_{t_{n+1}}(p)) \subset R_n^-$, entonces tenemos que $\varphi_{t_{n-1}}(p)$, $\varphi_{t_n}(p)$ y $\varphi_{t_{n+1}}(p)$ son intersecciones consecutivas de $\mathcal{Q}^+(p)$ con Σ_p . Por tanto, $\mathcal{Q}^+(p) \cap \Sigma_p$ define una sucesión, estrictamente monótona en Σ_p .



Teorema III.3 (Poincaré-Bendixon).

Si $w(p)$ es un conjunto límite compacto, no vacío sin puntos singulares de un campo vectorial \mathcal{X} de clase C^1 en $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^2$, entonces $w(p)$ es una órbita periódica.

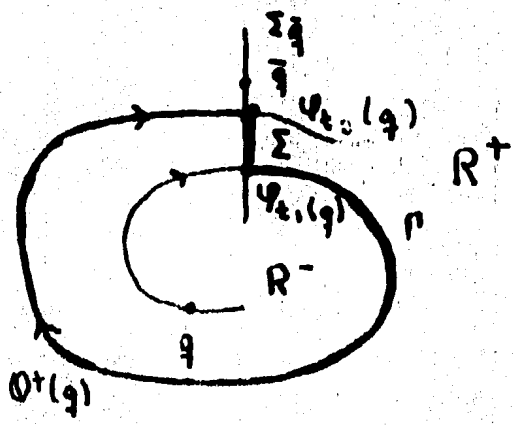
Demostración: Es suficiente probar que la órbita por cualquier punto de $w(p)$ es periódica, ya que al ser $w(p)$ compacto, por la proposición I.10, $w(p)$ debe ser conexo.

Sea $q \in w(p)$, como $w(p)$ es invariante bajo el flujo φ asociado al campo \mathcal{X} (proposición I.14), consideremos una sucesión $\{\varphi_{t_n}(q) \mid t_n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}\}$ en $w(p)$. Por ser $w(p)$ compacto, existe una sub sucesión convergente a un punto $\bar{q} \in w(p)$. Debido a la forma como se tomó la sucesión, se tiene que $\bar{q} \in w(q)$.

Por hipótesis, $w(p)$ no contiene puntos singulares, de ahí que podamos considerar una sección transversal $\Sigma_{\bar{q}}$ en \bar{q} . Como $\bar{q} \in w(q)$, entonces la semiórbita $\mathcal{O}^+(q)$ debe intersectar $\Sigma_{\bar{q}}$.

Supongamos que $\mathcal{O}^+(q)$ no interseca $\Sigma_{\bar{q}}$ en \bar{q} , entonces, por la proposición III.2, $\mathcal{O}^+(q) \cap \Sigma_{\bar{q}}$ define una sucesión estrictamente monótona en $\Sigma_{\bar{q}}$, la cual debe converger a \bar{q} , ya que $\bar{q} \in w(q)$. Sean $t_1 = \min\{t > 0 \mid \varphi_t(q) \in \Sigma_{\bar{q}}\}$, $t_2 = \min\{t > t_1 \mid \varphi_t(p) \in \Sigma_{\bar{q}}\}$ y C la curva de Jordan definida por la unión del segmento de órbita Γ por q entre los puntos $\varphi_{t_1}(q)$ y $\varphi_{t_2}(q)$ y el segmento de sección transversal $\Sigma \subset \Sigma_{\bar{q}}$ entre $\varphi_{t_1}(q)$ y $\varphi_{t_2}(q)$. Sean R^+ y R^- como se definieron al inicio del capítulo. Claramente $\bar{q} \in \text{Int } R^+$ y $q \in \text{Int } R^-$. Como $\bar{q} \in w(p)$, entonces existe $\bar{t} > 0$ tal que $\varphi_{\bar{t}}(p) \in \text{Int } R^+$, por el lema III.1 III.1 se tiene que $\mathcal{O}^+(\varphi_{\bar{t}}(p)) \subset \text{Int } R^+$. Pero como $q \in R^-$, esto implica que $q \notin w(p)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{O}^+(q)$ interseca $\Sigma_{\bar{q}}$ en \bar{q} .

Como $\bar{q} \in \mathcal{O}(q)$, por la proposición I.10, $w(q) = w(\bar{q})$, de donde $\bar{q} \in w(\bar{q})$. Por lo tanto $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(\bar{q})$ es una órbita periódica.



A continuación mostraremos algunos resultados, como consecuencias del Teorema de Poincaré-Bendixon.

Corolario III.3.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto, no vacío. Si A es un conjunto invariante sin puntos singulares, entonces A contiene una órbita periódica.

Demostración: Sea $p \in A$, como A es compacto e invariante tenemos que $w(p) \subset A$ (proposición I.13). Pero $w(p)$ es cerrado (proposición I.10), de hecho $w(p)$ es un conjunto compacto el cual por hipótesis no contiene puntos singulares. Por el teorema de Poincaré-Bendixon, $w(p)$ es una órbita periódica.

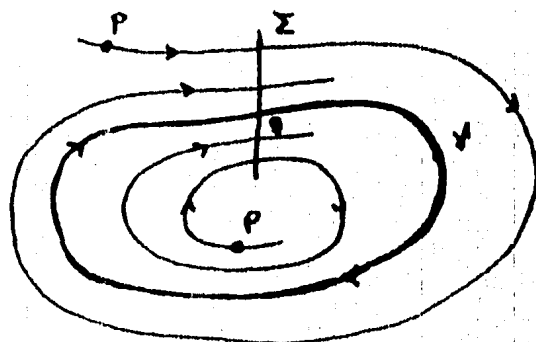
Definición III.4 Diremos que una órbita periódica γ es un ciclo ω -límite si $\gamma \subset w(p)$, para algún $p \notin \gamma$. Del mismo modo podemos definir ciclos α -límite.

Para ejemplo de ciclos α y ω -límite vease la página

Si γ es un ciclo ω -límite de un punto $p \notin \gamma$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Psi_t(p), \gamma) = 0$. Ya que si tomamos $q \in \gamma$ y Σ_q una sección transversal en q entonces, como $q \in w(p)$ tendremos que $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_q$ define una sucesión estrictamente monótona en Σ_q (proposición III.2), la cual claramente debe converger a q . Por lo tanto $d(\Psi_t(p), q) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Geoméricamente, en el caso que γ es un ciclo ω -límite, tendremos que $\mathcal{O}^+(p)$ "espiralea" hacia γ , y,

$\alpha^-(p)$ lo hace cuando γ es un ciclo α -límite.



Dada γ una órbita periódica, por el teorema de la curva de Jordan, ésta orbita divide el plano en dos conjuntos abiertos, siendo acotado uno de ellos. A tal conjunto lo denotaremos por $\hat{\gamma}$.

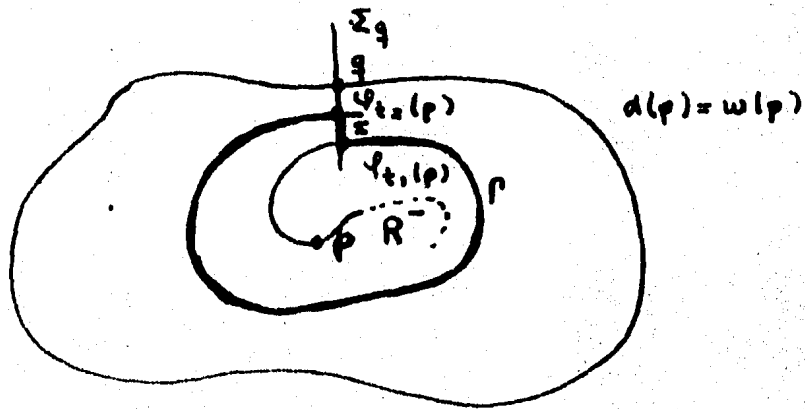


Teorema III.5. Sean γ_1 y γ_2 dos órbitas periódicas tales que $\hat{\gamma}_2 \subset \hat{\gamma}_1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, donde Ω es el anillo abierto determinado por γ_1 y γ_2 . Si \mathbb{R}^2 no contiene puntos singulares ni órbitas periódicas entonces una de las órbitas es ciclo w -límite de todos los puntos de Ω y la otra es ciclo α -límite.

Demostación Sea $A = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \Omega$, el cual es claramente un conjunto compacto e invariante. Por la proposición dado $p \in A$, $\alpha(p)$ y $w(p) \subset A$. De hecho $\alpha(p)$ y $w(p)$ son conjuntos compactos, que por hipótesis no contienen puntos singu-

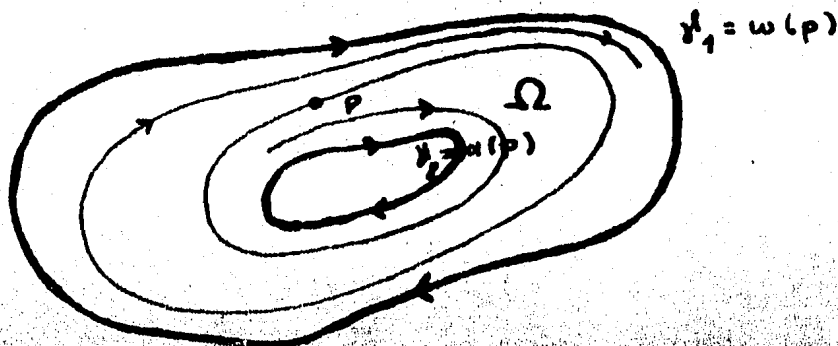
laes. Por el teorema de Poincaré-Bendixon, tenemos que $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ deben ser órbitas periódicas. Además, como Γ no contiene órbitas periódicas, deben coincidir con las δ_i .

Mostraremos, a continuación que las órbitas periódicas $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ no pueden coincidir. Supongamos que $\alpha(p) = \omega(p)$. Sean $q \in \omega(p)$ y Σ_q una sección transversal en q . (Observemos que $p \notin \omega(p)$). Sean $t_1 = \min \{ t > 0 \mid \varphi_t(p) \in \Sigma_q \}$ y $t_2 = \min \{ t > t_1 \mid \varphi_t(p) \in \Sigma_q \}$ y $C = \Gamma \cup \Sigma$ la curva de Jordan donde $\Gamma = \{ \varphi_t(p) \mid t_1 \leq t \leq t_2 \}$ y $\Sigma = [\varphi_{t_1}(p), \varphi_{t_2}(p)] \subset \Sigma_q$. Por el lema III.1, como $p \in \text{Int } R^-$, entonces se



tiene que $\Omega^-(p) \subset \text{Int } R^-$. Por ello $q \notin \alpha(p)$. Por lo tanto $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ deben ser órbitas periódicas distintas. Es decir $\alpha(p)$ coincide con δ_1 y $\omega(p)$ con δ_2 o viceversa.

De hecho, no es difícil mostrar que dados $p_1 \in R^+$ y $p_2 \in R^-$, entonces $\omega(p_1) = \omega(p)$ y $\alpha(p_2) = \alpha(p)$. Por lo tanto si δ_1 es un ciclo ω -límite de un punto, entonces debe ser ciclo ω -límite de todos los puntos de Ω y δ_2 debe ser ciclo α -límite de todos los puntos de Ω o viceversa.



Teorema III.6 Si γ es una órbita periódica de un campo vectorial X de clase C^1 en $W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\widehat{\gamma} \subset W$, entonces $\widehat{\gamma}$ contiene un punto singular.

Demostración Supongamos que $\widehat{\gamma}$ no contiene puntos singulares. Sea Ω el conjunto de órbitas periódicas contenidas en $\widehat{\gamma}$. Consideremos en Ω el siguiente orden parcial: $\gamma_1 \leq \gamma_2$ si y sólo si $\widehat{\gamma}_1 \subset \widehat{\gamma}_2$.

Mostraremos que todo subconjunto S totalmente ordenado de Ω , (es decir, si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ entonces $\gamma_1 < \gamma_2$ o $\gamma_2 < \gamma_1$), admite una cota superior. Un conjunto con estas condiciones es llamado un conjunto inductivo.

Sea

$$\sigma = \bigcap_{\gamma \in S} \widehat{\gamma}$$

Notemos que $\sigma \neq \emptyset$ ya que $\widehat{\gamma}_i$ es compacto y además la familia $\{\widehat{\gamma}_i\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Es decir, cualquier intersección de una cantidad de elementos finita de la familia es no vacía. Tomemos $q \in \sigma$, como σ es compacto e invariante y por hipótesis no contiene puntos singulares, entonces $w(q) \subset \sigma$ es una órbita periódica por el teorema de Poincaré-Bendixon. Esta órbita es cota superior de S .

Por el lema de Zorn, Ω tiene un elemento maximal μ , pues Ω es inductivo. Por lo tanto, no existe una órbita periódica en $\widehat{\mu}$. Sea $p \in \widehat{\mu}$, como $\widehat{\mu}$ es compacto sin puntos singulares entonces $d(p)$ y $w(p)$ son órbitas periódicas contenidas en $\widehat{\mu}$. Debido a que ya probamos que $d(p)$ y $w(p)$ deben ser órbitas periódicas distintas, entonces uno de ellas debe estar contenida en $\widehat{\mu}$. Lo cual es una

contradicción. Esto muestra que en $\hat{\mathcal{I}}$ deben existir al menos un punto singular.

Corolario Sea \mathcal{I} un campo vectorial de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Si \mathcal{I} no contiene puntos singulares entonces no posee orbitas periódicas.

CAPITULO IV

CAMPOS VECTORIALES EN VARIEDADES
Y TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON EN
LA ESFERA

Sea M^n una n -variedad diferenciable de clase C^r . Denotaremos al espacio tangente a M en un punto p , y al fibrado tangente de M por $T_p M$ y TM respectivamente. Además, recordemos que el fibrado tangente es la unión disjunta de los espacios tangentes a todos los puntos de M , es decir $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$. De hecho, $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$.

Un campo vectorial de clase C^r ($1 \leq r \leq k-1$) en una n -variedad diferenciable M^n , será una sección de clase C^r del fibrado tangente de M ; esto es, una función de clase C^r

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (p, v) \end{aligned}$$

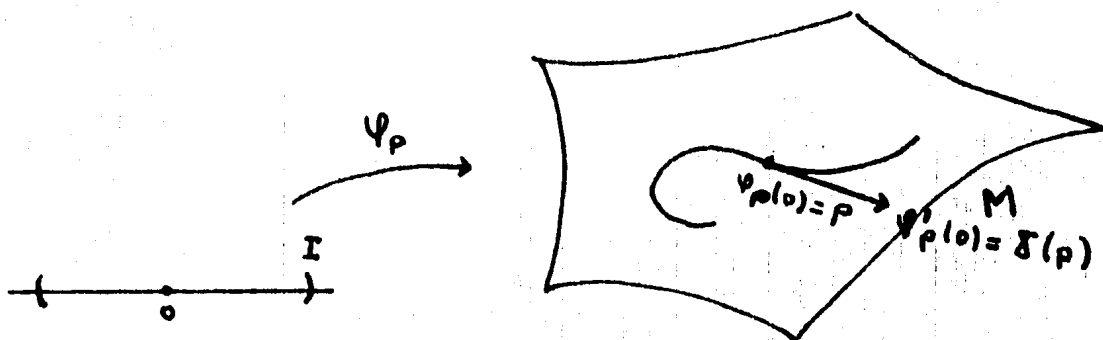
tal que $\pi \circ \mathcal{X} = \text{Id}_M$, donde $\pi : TM \longrightarrow M$ está definida como $\pi(p, v) = p$. Intuitivamente, estamos "pegando" a cada punto de M un elemento del espacio tangente a tal punto.

Al conjunto de campos vectoriales de clase C^r en una variedad M , lo denotaremos como $\mathcal{X}^r(M)$.

Definición Una curva integral de un campo vectorial $\mathcal{X} \in \mathcal{X}^r(M)$ que pasa por un punto $p \in M$, es una función de clase C^1

$$\varphi_p : I = (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$$

tal que $\varphi_p(0) = p$ y $\varphi_p'(t) = \mathcal{X}(\varphi_p(t))$ para cada $t \in I$.



Diremos que una curva integral $\psi_p : I \rightarrow M$, por un punto $p \in M$ es maximal si para cada curva integral $\psi_p : J \rightarrow M$ por p , tal que $I \subseteq J$ y $\psi_p|_I = \psi_p$ se tiene que $I = J$, y, consecuentemente $\psi_p = \psi_p$. En este caso, al intervalo I , lo llamaremos intervalo maximal.

Si $p \in M$ es un punto tal que $\mathcal{E}(p) = 0$, entonces diremos que p es un punto singular de \mathcal{E} . En caso contrario, al punto p lo llamaremos punto regular de \mathcal{E} .

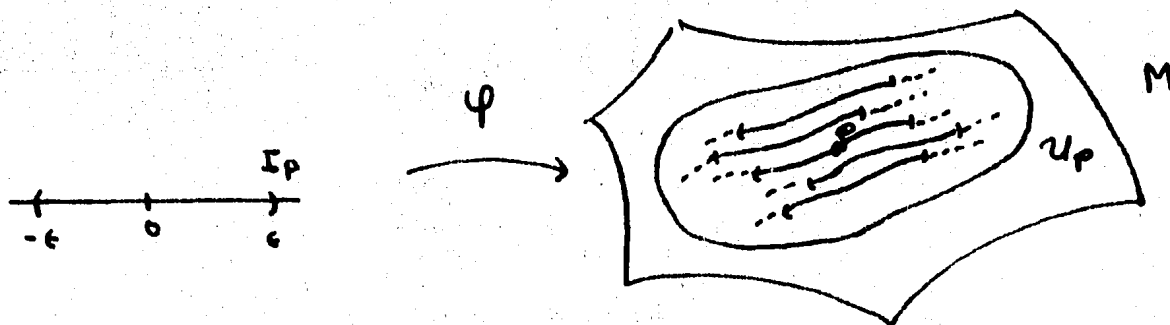
Dada $\alpha : U \subset M^n \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^n$ una carta local de M y $\mathcal{E} \in \mathcal{X}^r(M)$, se tiene que el campo vectorial $\mathcal{Y} = d\alpha \cdot \mathcal{E}$, es un campo vectorial en U_0 , al que llamaremos la expresión del campo \mathcal{E} en la carta local (α, U) . Bajo esta consideración, es posible traducir a variedades diferenciables, toda la información de carácter local que se tenga en \mathbb{R}^n , información como la dada por dos teoremas de existencia y unicidad de curvas integrales para campos vectoriales en \mathbb{R}^n y el teorema del flujo tubular corto, ambos en \mathbb{R}^n .

Teorema IV.1 Sean M^n una variedad diferenciable de clase C^k y $\mathcal{X} \in \mathcal{X}^r(M)$. Entonces, dado $p \in M$ existen un intervalo abierto $I(p) = (-\epsilon, \epsilon)$ y \mathcal{U}_p una vecindad abierta de p en M , tales que

i) Para todo $q \in \mathcal{U}_p$ existe una única curva integral $\psi_q : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ de \mathcal{X} tal que $\psi_q(0) = q$.

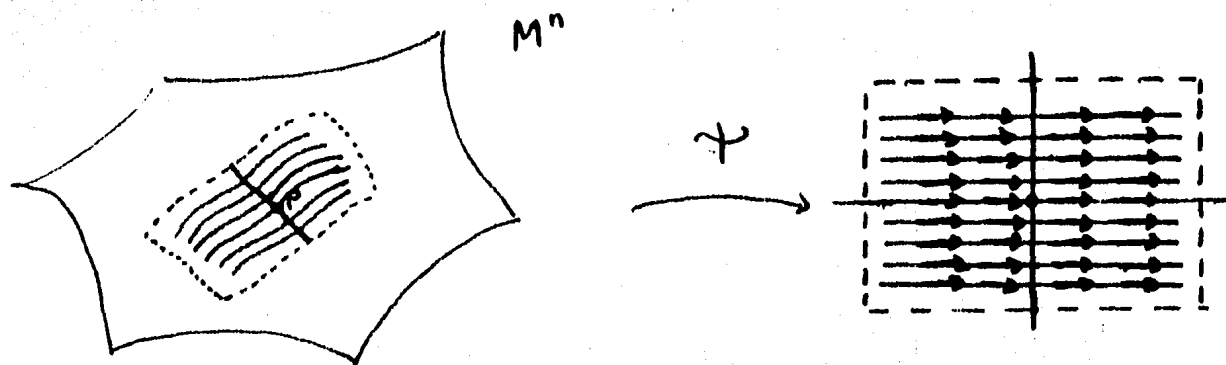
ii) Si definimos la función $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U}_p \rightarrow M$ como $\psi(t, q) = \psi_q(t)$, entonces ψ es de clase C^r .

iii) Si (t_1, q) , $(t_2 + t_1, q)$ y $(t_1, \psi_q(t_2))$ están en $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U}_p$ entonces se tiene que $\psi(t_1 + t_2, q) = \psi(t_1, \psi_q(t_2))$.



Corolario IV.1.1 Si dos curvas integrales coinciden en un punto entonces coinciden en una vecindad de tal punto.

Teorema IV.2: Si $\mathcal{X} \in \mathcal{X}^r(M)$ y $p \in M$ es un punto regular de \mathcal{X} entonces existe un difeomorfismo de clase C^r $\psi : \mathcal{V}_p \rightarrow \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ de una vecindad de p en M a una vecindad \mathcal{U}_0 del origen de \mathbb{R}^n , que lleva curvas integrales de \mathcal{X} en curvas integrales de $\mathcal{Y} = (1, 0, 0, \dots, 0)$ en \mathbb{R}^n .



Dado un punto $p \in M$, existe una curva integral maximal que pasa por p . Para mostrar esto, consideremos todas las curvas integrales que pasan por p .

$$\varphi_p^\lambda : (-\epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda) \longrightarrow M$$

Sea J la unión de todos los intervalos de definición de las curvas integrales por p , y definamos φ_p como φ_p^λ en cada intervalo $(-\epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda)$. Claramente J es un intervalo, y además, por el corolario, φ_p está bien definida.

De lo anterior, para cada $p \in M$ consideremos el dominio de definición $(-\epsilon_p, \epsilon_p)$ de la curva integral maximal que pasa por p . Sea $U = \bigcup_{p \in M} (-\epsilon_p, \epsilon_p) \times p$. Tal conjunto es abierto en $\mathbb{R} \times M$, y además la función dada mediante las curvas integrales

$$\varphi : U \subset \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

$$\varphi_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \longrightarrow M$$

la llamaremos el flujo maximal de \mathcal{X} en M . Tal función es una función de clase C^r y las condiciones $\varphi(0, p) = p$ y $\varphi(s+t, p) = \varphi(s, \varphi(t, p))$ se deducen del hecho que las curvas $\varphi_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \longrightarrow M$ son curvas integrales.

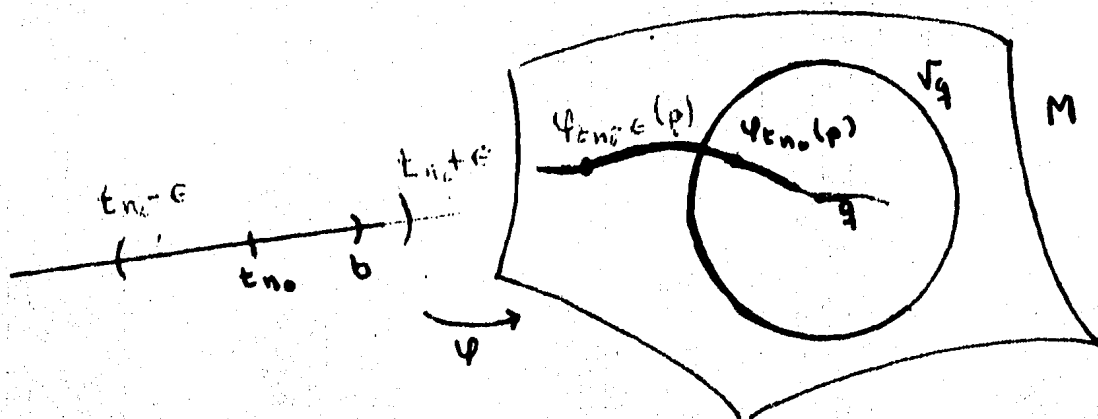
Teorema IV.3 Sean M^n una variedad compacta y $X \in X^r(M^n)$. Existe un flujo global de clase C^r en M . Es decir, una función de clase C^r

$$\psi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

tal que $\psi(0, p) = p$ para cada $p \in M$, $\frac{\partial \psi(t, p)}{\partial t} = X(\psi(t, p))$ y $\psi(s+t, p) = \psi(s, \psi(t, p))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Demostración Sólo es necesario probar que dado $p \in M$, el intervalo de definición de la curva integral maximal por p es todo \mathbb{R} .

Sea $\psi_p: (a, b) \longrightarrow M$ la curva integral maximal que pasa por p . Probaremos que $b = +\infty$. Un argumento semejante muestra que $a = -\infty$. Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{R} tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Al tomar la sucesión correspondiente $\{\psi_p(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bajo ψ_p en M , ésta contiene una subsucesión convergente a un punto $q \in M$, ya que M es compacta. Por el teorema IV.1, existen $\epsilon > 0$ y $U_q \subset M$ una vecindad abierta de q , tal que $\psi_{\tilde{q}}: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es la curva integral que pasa por \tilde{q} , para cada $\tilde{q} \in U_q$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_p(t_{n_0}) \in U_q$ y $|b - t_{n_0}| < \epsilon/2$. Consideremos la curva integral que pasa por $\psi_p(t_{n_0})$. Esta última curva integral y la curva integral por p , coinciden en



el punto $\varphi_p(t_0)$. Por el corolario IV.1.1 tenemos definida una curva integral que pasa por p en el intervalo $(a, t_0 + \epsilon) \supset (a, b]$. Lo cual es una contradicción ya que (a, b) era intervalo maximal. Por lo tanto $b = +\infty$.

Observemos que si tomamos la función $\varphi_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, dada por $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$, esta función es un difeomorfismo de M en sí mismo, ya que $\varphi_t \circ \varphi_{-t}(p) = \varphi_0(p) = p$, es decir $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = 1_M$. Por lo tanto φ_{-t} es inversa de φ_t y ambas son diferenciables.

Sean $\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M)$ y $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ el flujo asociado a \bar{X} . La órbita de \bar{X} que pasa por un punto $p \in M$ se denotará por $\mathcal{O}(p)$, esto es $\mathcal{O}(p) = \{ \varphi_t(p) \mid t \in \mathbb{R} \}$. Asimismo $\mathcal{O}^+(p) = \{ \varphi_t(p) \mid t \geq 0 \}$ y $\mathcal{O}^-(p) = \{ \varphi_t(p) \mid t \leq 0 \}$ serán las semiorbitas positiva y negativa que pasan por p . Es claro, que si p es un punto singular entonces $\mathcal{O}(p) = \{p\}$; en caso contrario la función $t \mapsto \varphi(t, p)$ es una inmersión. Si la función anterior no es inyectiva, entonces existe $\tau > 0$ tal que $\varphi(\tau, p) = p$ y $\varphi(t, p) \neq p$ para $0 < t < \tau$. De suceder lo anterior, diremos que la órbita $\mathcal{O}(p)$ es una órbita periódica de periodo τ .

Definición IV.4 Dado un punto $q \in M$, diremos que q es un punto ω -límite de un punto $p \in M$ bajo el flujo φ si existe una sucesión $\{t_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que cuando $t_n \rightarrow \infty$ entonces $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$. Al conjunto de puntos

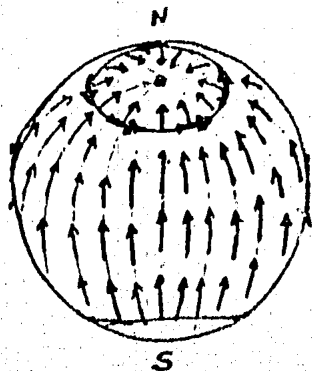
w -límite de un punto $p \in M$, lo denotaremos por $w(p)$ y se le llamará conjunto w -límite de p .

De manera semejante, es posible definir punto α -límite y conjunto α -límite.

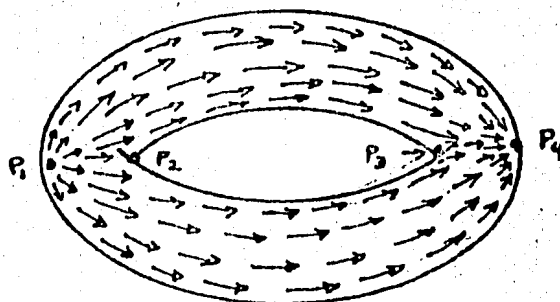
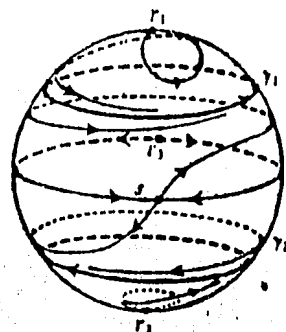
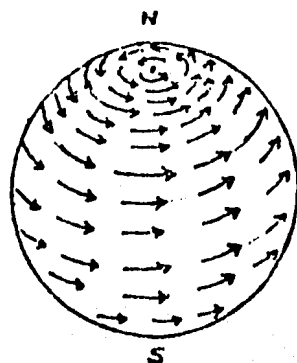
Definición IV.5 Dado $A \subset M^n$ subconjunto de una variedad diferenciable, diremos que A es positivamente invariante bajo un flujo φ si $\varphi^+(p) \subset A$ para todo $p \in A$. Análogamente podemos definir conjuntos negativamente invariantes. Si A es un conjunto positivo y negativamente invariante, será llamado conjunto invariante.

A continuación daremos un ejemplo de conjuntos límite en la esfera S^2 .

Ejemplo IV.6 Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 centrada en el origen. Sean $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ los polos norte y sur de S^2 respectivamente. El campo vectorial $X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$ en \mathbb{R}^3 induce en S^2 un campo vectorial tangente a los meridianos. Es claro que X es de clase C^∞ y es fácil verificar que los únicos puntos singulares de X son N y S . Como X es tangente a los meridianos y "apunta" siempre en dirección al polo norte (pues la tercera coordenada $x^2 + y^2 \geq 0$) se tiene que $w(p) = N$ y $\alpha(p) = S$ si $p \in S^2 \setminus \{N, S\}$.



Otros ejemplos de conjuntos límite fáciles de visualizar están dados por los flujos en la esfera S^2 y el toro T^2 que se muestran en las siguientes figuras

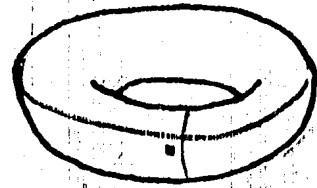
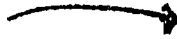
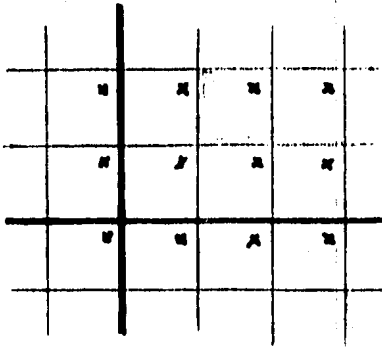


A continuación construiremos los llamados flujos racional e irracional en el toro T^2 , siguiendo a la hecha por

El toro T^2 lo podemos obtener como la imagen de la función $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada como sigue:

$$\xi(u, v) = (1 + \cos 2\pi v) \cos 2\pi u, (1 + \cos 2\pi v) \sin 2\pi u, \sin 2\pi v$$

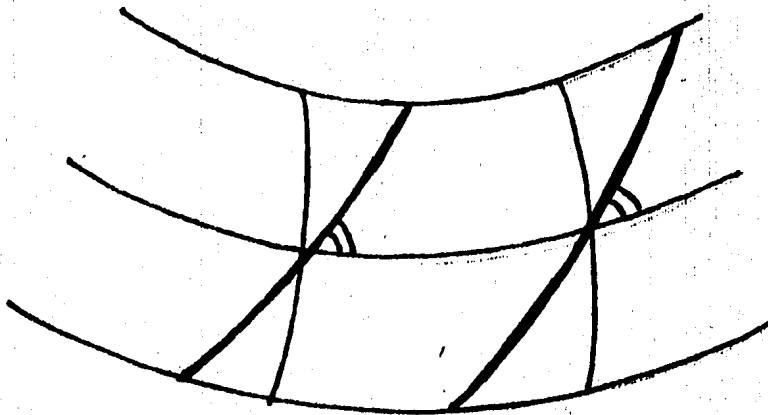
la cual es de clase C^∞ . De hecho tal función es una inmersión y $\xi(u, v) = \xi(u', v')$ si y sólo si $(u - u', v - v') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hemos obtenido el toro a través de ξ como una relación de equivalencia del plano, donde $(u, v) \sim (u', v')$ si y sólo si $(u - u', v - v') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Es decir $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.



Así, tenemos una función cubriente $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$. Consideremos en \mathbb{R}^2 el campo vectorial $X^r(u, v) = (1, r)$, $r \in \mathbb{R}$, cuyas curvas integrales son rectas de pendiente r . Bajo π , obtenemos en T^2 un único campo vectorial Υ^r , (véase

Sea $\lambda(t) = (t, rt)$ recta en \mathbb{R}^2 de pendiente r que pasa por el origen. Es fácil ver que si $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $(m, n) = 1$, entonces $\xi \circ \lambda(0) = \xi \circ \lambda(n)$. Por lo tanto, $\xi \circ \lambda$ es una órbita periódica en T^2 . Geométricamente, $\xi \circ \lambda$ intersecta cada meridiano n veces y cada paralelo m veces.

Supongamos que r es irracional, entonces para $s \neq t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda(s) - \lambda(t) = (s-t, r(s-t))$ no tiene coordenadas enteras. Por lo tanto $\xi \circ \lambda$ es una inmersión inyectiva y su imagen es llamada Curva de Kronecker en el toro. Geométricamente, esta curva da infinitas intersecciones a cada meridiano y paralelo del toro, haciendo un ángulo constante con todos ellos.



Para mostrar que la curva de Kronecker es un subconjunto denso del toro, es suficiente ver que ξ es un difeomorfismo local de \mathbb{R}^2 sobre T^2 y que los puntos de \mathbb{R}^2 que se aplican bajo ξ en la curva de Kronecker forman un subconjunto denso en \mathbb{R}^2 . Es decir, que el conjunto $G_1 = \{(t+m, rt+n) \mid r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; t \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en \mathbb{R}^2 . Para esto último, basta ver que $G_2 = \{nr+m \mid n, m \in \mathbb{Z}, r \text{ irracional}\}$ es denso en \mathbb{R} , ya que dado $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$, existirían $\tilde{m}, n \in \mathbb{Z}$ tales que $|v - ru - \tilde{m}r - n| < \epsilon$, y tomando $t = u + \tilde{m}$, $m = -\tilde{m}$ entonces $(t+m, rt+n) = (u, v - \tilde{m}r - n)$. De donde $d((u, v), (t+m, rt+n)) < \epsilon$.

Finalmente mostremos que G_2 es denso en \mathbb{R} . Para ello, veremos que G_2 es denso en $(0, 1)$. Sean $b \in (0, 1)$ y $\epsilon > 0$. Se probará que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $|b - (nr+m)| < \epsilon$.

Es claro que tales que $0 \leq n, r+m_1 < \epsilon$. Consideremos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < k(n, r+m_1) < b < (k+1)(n, r+m_1)$, de donde $0 < b - k(n, r+m_1) < n, r+m_1 < \epsilon$. Tomando $m = km_1$, $n = kn_1$ se obtiene lo que se quería.

El flujo en T^2 asociado al campo vectorial \mathbb{F}^r será llamado flujo racional o irracional, conforme r sea racional o no. En el primer caso, todas las órbitas son periódicas y el conjunto α y ω -límite de cualquier punto en T^2 es su propia órbita. Por otro lado, si r es irracional, como todas las órbitas son densas en el toro, entonces para cada $p \in T^2$, $\alpha(p) = \omega(p) = T^2$.

Este ejemplo de conjunto límite en T^2 bajo el flujo irracional es un ejemplo bastante interesante que nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

No es difícil convencerse que las proposiciones I.10, I.13 y I.14 referentes a conjuntos límite e invariantes siguen resultando válidas al aplicarlas en variedades, y a que las demostraciones son de menor carácter topológico.

Terminaremos este capítulo con un teorema del tipo Poincaré-Bendixon para la esfera S^2 . Observemos que una herramienta básica para la demostración del Teorema de Poincaré-Bendixon en el plano fue el Teorema de la Curva de Jordan. Como este resultado sigue siendo cierto para la esfera: "toda curva simple cerrada en S^2 , la separa en dos regiones abiertas disconexas", entonces tanto la proposición III.2, como el lema III.1 y el teorema III.3 (Poincaré-Bendixon) resultan ciertos en S^2 .

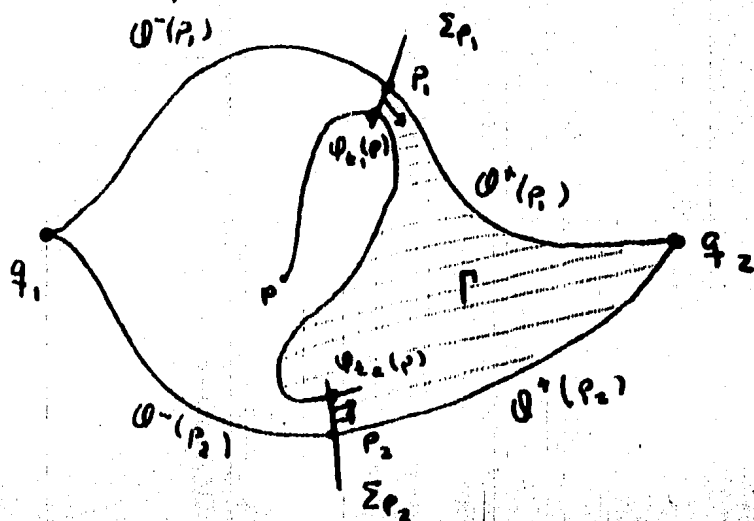
Teorema III.7 Sean $\mathcal{X} \in \mathcal{X}^r(S^2)$, $r \geq 1$, un campo vectorial con un número finito de puntos singulares; $p \in M$ y $w(p)$ su correspondiente conjunto límite. Entonces

- i) $w(p)$ es un punto singular
- ii) $w(p)$ es una órbita periódica
- iii) $w(p)$ está constituido de singularidades q_1, \dots, q_n y órbitas tales que si $(\theta(q)) \subset w(p)$ entonces $\alpha(q) = q_i$ y $w(q) = q_i$.

Demostración Si $w(p)$ no contiene puntos regulares entonces $w(p)$ es un punto singular, ya que $w(p)$ es compacto, por serlo S^2 y por la proposición I.10, $w(p)$ es conexo. En caso que $w(p)$ no contenga puntos singulares, por el Teorema de Poincaré-Bendixon III.3, $w(p)$ es una órbita periódica. Supongamos que $w(p)$ contiene puntos singulares y puntos regulares. Sea $q \in w(p)$ un punto regular, como $w(p)$ es compacto, entonces $w(q) \subset w(p)$ y $w(q) \neq \emptyset$.

(Notemos que en el Teorema de Poincaré-Bendixon, de hecho se demostró que si un punto regular (\bar{q}) es punto w -límite de un punto (q) que a su vez es punto w -límite, entonces ambos puntos están en la misma órbita ($\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(\bar{q})$), la cual es periódica). Si $\bar{q} \in w(q)$ es un punto regular, entonces por lo dicho anteriormente $\mathcal{O}(q)$ es una órbita periódica. Pero esto es imposible, ya que por ser $w(p)$ compacto, por la proposición I.10, $w(p)$ es conexo. Por lo tanto $w(q)$ es un punto singular. De manera semejante, $\alpha(q)$ es un punto singular.

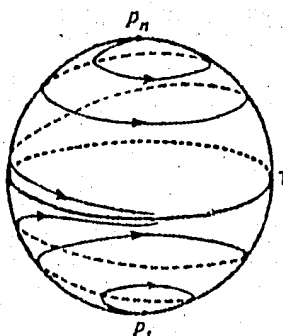
Obsérvese que si $p_1, p_2 \in w(p)$ son puntos regulares tales que $\alpha(p_1) = \alpha(p_2) = q_1$ y $w(p_1) = w(p_2) = q_2$ donde q_1, q_2 son puntos singulares entonces podemos considerar la curva de Jordan definida como $C = \mathcal{O}(p_1) \cup \mathcal{O}(p_2) \cup \{p_1, p_2\}$. Además p no está en ninguna de las órbitas de p_1 o p_2 . Por tanto debe pertenecer a alguna de las regiones abiertas determinadas por C . Por el teorema III.2 podemos considerar Σ_{p_i} secciones transversales en p_i ($i=1,2$) con cajas de flujo alrededor de p_i . Sean $t_1 = \min\{t > 0 \mid \varphi_t(p) \in \Sigma_{p_1}\}$, $t_2 = \min\{t > 0 \mid \varphi_t(p) \in \Sigma_{p_2}\}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $t_1 < t_2$. Sea \tilde{C} la curva de Jordan



dada por la unión de los segmentos de sección transversal $[\varphi_{t_1}(p), p_1] \subset \Sigma_{p_1}$, $[\varphi_{t_2}(p), p_2] \subset \Sigma_{p_2}$, el segmento de órbita $\{\varphi_t(p) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$, las semiorbitas $\mathcal{O}^+(p_1)$, $\mathcal{O}^+(p_2)$ y el punto q_2 . Sea Π la región de S^2 determinada por \tilde{C} tal que $\varphi_{t_2+\epsilon}(p) \in \Pi$ para $\epsilon > 0$. Es claro que Π es positivamente invariante. Por lo tanto $\mathcal{O}^-(p_1)$ y $\mathcal{O}^-(p_2)$ no pueden contener puntos w -límite de p , lo cual no es posible, ya que por la proposición I.13, $\mathcal{O}(p_1)$ y $\mathcal{O}(p_2)$ son subconjuntos de $w(p)$, pues $p_1, p_2 \in w(p)$.

De lo anterior se desprende que no pueden existir dos órbitas regulares que unan sus respectivos conjuntos α y w -límites cuando estos sean puntos singulares en la esfera.

Si $X \in X^r(S^2)$, $r \geq 1$, admite una cantidad infinita de puntos singulares entonces el Teorema IV.7 es falso, como lo muestra un campo cuyo flujo está representado en la figura siguiente, donde el campo se anula en los



polos y en todos los puntos del ecuador y las órbitas regulares "nacen" en los polos y mueren en el ecuador. En este caso, el conjunto w -límite de cualquier punto no singular no representa ninguna de las posibilidades enunciadas en el Teorema IV.7.

CAPITULO V.

TEOREMA DE SCHWARTZ

Definición I.1 Un subconjunto no vacío $N \subset M^n$ de una variedad diferenciable se dice minimal bajo un campo vectorial X si es invariante bajo el flujo asociado a X , cerrado y además ningún subconjunto propio de N tiene estas características

Ejemplos: Un punto singular y una órbita (periódica o no) son ejemplos sencillos de conjuntos minimales. Un ejemplo más elaborado se obtiene al considerar el flujo irracional en el toro, ya construido páginas atrás; en este ejemplo, el conjunto minimal es todo el toro.

Es de observarse que los conjuntos minimales deben ser conexos y además, dos conjuntos minimales distintos son disjuntos

El interés que se tiene respecto a los conjuntos minimales está basado en el hecho que son los conjuntos invariantes más sencillos. Además de un resultado, el cual se da a continuación

Teorema: I.2 Todo conjunto $E \subset M^n$ compacto e invariante contiene un conjunto minimal.

Demostración Si el conjunto E es minimal, no hay nada por hacer. En caso contrario, existe un subconjunto $E_1 \subsetneq E$ cerrado e invariante; si E_1 es minimal tampoco hay que probar nada, sino lo es, existe $E_2 \subsetneq E_1$ cerrado e invariante, etc. Sea \mathcal{O} el conjunto formado por los conjuntos cerrados e invariantes contenidos en E , tal conjunto claramente es parcialmente ordenado por inclusión, es de-

cir, dados $E_1, E_2 \in \mathcal{O}$, $E_1 \subseteq E_2$ si y sólo si $E_1 \supseteq E_2$.
 Por ser E compacto y M^n espacio de Hausdorff, entonces E tiene la propiedad de la intersección finita. De lo anterior se tiene que $\bigcap E_i$ es un conjunto no vacío, cerrado e invariante. Por el lema de Zorn, \mathcal{O} tiene un elemento maximal, pues \mathcal{O} es inductivo. Tal elemento maximal debe ser minimal, ya que en caso contrario, existiría un subconjunto propio, cerrado e invariante del elemento maximal de \mathcal{O} , lo cual es imposible.

El siguiente resultado, nos proveerá de una caracterización de los conjuntos minimales

Teorema V.3 Un conjunto N es minimal si y sólo si toda órbita contenida en él es densa en N .

Demostración: Sea $p \in N$, por ser N invariante tenemos que $\overline{\mathcal{O}(p)} \subset N$ y $\mathcal{O}(p) \subset N$, pues N es cerrado. Además por hipótesis N no contiene subconjuntos propios cerrados e invariantes, como lo es $\overline{\mathcal{O}(p)}$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{O}(p)} = N$.

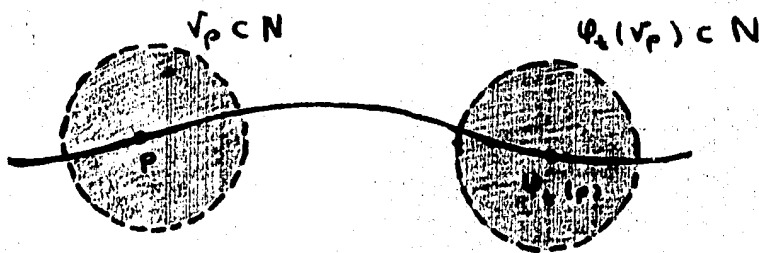
Recíprocamente, si N no fuese minimal, existiría un subconjunto propio H de N el cual es cerrado e invariante. Sea $q \in H$, entonces $\overline{\mathcal{O}(q)} \subset H \neq N$. Es decir, $\overline{\mathcal{O}(q)}$ no es densa en N .

Al considerar en el toro el flujo irracional, el teorema anterior nos muestra que T^2 es minimal bajo tal flujo, ya que todas las órbitas son densas en el toro.

El próximo teorema es atribuido por Nemytskii y Stepanov [Ne-st] a G.F. Tumarkin

Teorema V.4 Si un conjunto minimal N tiene interior no vacío, entonces N es abierto.

Demostración: Sea $p \in \text{Int } N$, entonces existe una vecindad abierta V_p de p contenida en N . Como N es invariante, entonces para toda $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(V_p) \subset N$. Por



ser φ_t difeomorfismo, tenemos que $\varphi_t(V_p)$ es una vecindad abierta de $\varphi_t(p)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. De lo anterior se desprende que si un punto de un conjunto minimal N es punto interior de N , entonces todos los puntos de su órbita son puntos interiores. Por el Teorema $\overline{\mathcal{O}(p)} = N$; sea $\tilde{p} \in N \setminus \mathcal{O}(p)$, entonces existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{p} \in \varphi_{t_1}(V_p)$. Por lo tanto \tilde{p} es punto interior de N , ya que $\varphi_{t_1}(V_p)$ es vecindad abierta de \tilde{p} contenida en N .

Corolario V.4.1 Ningún subconjunto propio, minimal N de una variedad diferenciable conexa tiene puntos interiores.

Demostración Si N tuviese interior no vacío, entonces por el teorema anterior N sería abierto. Pero N es también cerrado por ser N minimal. Pero esto no es posible ya

que una variedad conexa no contiene subconjuntos propios que sean abiertos y cerrados.

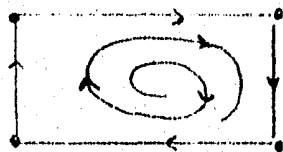
Proposición V.5 En el plano, los únicos conjuntos minimales no compactos son órbitas periódicas con conjuntos límite vacíos.

Demostración: Sean N un conjunto minimal en el plano y $p \in N$ tales que $w(p) \neq \emptyset$. Como N es cerrado e invariante, por la proposición I.13, $w(p) \subset N$. Dado que $w(p)$ es cerrado, no vacío y N es minimal, entonces $w(p) = N$, de ahí que $p \in w(p)$. Ya que estamos en \mathbb{R}^2 , se tiene que $\alpha(p)$ es periódica, pues $p \in w(p)$. Por lo tanto $\alpha(p) = N$ es compacto.

Diremos que un conjunto minimal es trivial si es un punto singular o una órbita (periódica o no). Observe-mos que los Teoremas de Poincaré-Bendixon en el plano y la esfera, y la proposición anterior nos muestran que en \mathbb{R}^2 y S^2 no existen conjuntos minimales no triviales, ya que los únicos conjuntos minimales compactos del plano son puntos singulares y órbitas periódicas.

Notemos que no todo conjunto minimal es conjunto límite. (para esto, consideremos una órbita no compacta en el plano).

Asimismo, no todo conjunto límite es conjunto minimal, como lo muestra la figura siguiente



La proposición IV.5 no es cierta en dimensiones superiores. Para convencerse de esto, consideremos en \mathbb{R}^3 el flujo irracional dado para el toro y extiéndase a un flujo en \mathbb{R}^3 .

El siguiente resultado es una extensión bastante notable del Teorema de Poincaré-Bendixson demostrado para el plano y la esfera en los capítulos III y IV respectivamente.

Teorema IV.6 (A.J. Schwartz): Sea X un campo vectorial de clase C^2 en una 2-variedad compacta M^2 , conexa y sin frontera. Si N es un conjunto minimal, entonces N es las siguientes posibilidades:

i) Un punto singular

ii) Una órbita periódica

iii) $N = M^2 = T^2$ y en este caso X genera un flujo irracional.

Bosquejo de Demostración:

Si N contiene un punto singular, entonces N debe ser tal punto singular ya que N es minimal. En caso que N contenga una órbita periódica, entonces como tal órbita es cerrada e invariante y N no contiene subconjuntos propios cerrados e invariantes se tiene que N es una órbita periódica.

Para el tercer caso, supongamos que N no contiene ni puntos singulares ni órbitas periódicas; debemos mostrar que N es toda la variedad. Este caso, podemos subdividirlo como sigue:

a) N tiene interior no vacío. En tal posibilidad, se tiene, por el Teorema III.4 que N es abierto, y por ser N minimal, N es cerrado; por la conexidad de

M^2 , se tiene que $N = M^2$. De este modo, el flujo asociado a \mathcal{X} , es un flujo en M^2 sin puntos singulares y por lo tanto M^2 es el toro T^2 o la botella de Klein K^2 , pues éstas son las únicas 2-variedades compactas que admiten un campo vectorial sin puntos singulares. (ver [Go]). Más, M^2 no puede ser K^2 , ya que todo flujo en K^2 sin puntos singulares admite necesariamente una órbita periódica (véase [Gu] ó [Ma]). Por este hecho y la hipótesis de que N no contiene órbitas periódicas, se tiene que $N = M^2 = T^2$ y en este caso \mathcal{X} genera un flujo irracional en T^2 .

b) N tiene interior vacío. Como (i) (ii) y el caso anterior son aquellos casos posibles de acuerdo a la conclusión del teorema, faltaría mostrar que N no puede tener interior vacío. Pero probar esto último, enfrenta varias dificultades de carácter técnico. Para ver una demostración de esta imposibilidad, pueden verse [So] o [Ha].

Es de notarse el hecho que a lo largo del bosquejo anterior, se hizo uso de dos resultados topológicos de cierta profundidad, cuyo estudio queda fuera del alcance de este trabajo. Asimismo, se ha omitido la demostración de la imposibilidad de la vacuidad del interior del conjunto minimal N , debido a que la aportación que hace ésta al estudio que se realizó es casi nula.

Referencias

- [Ba-Sz] Bathia, N.P - Szego G.P. : " Dynamical Systems : Stability Theory and Applications ". Lectures Notes in Mathematics . 35 SP ringer-Verlag (1967) .
- [Be] Bendixon, I : " Sur les courbes définies par des équations différentielles ". Acta Math. 24 (1901)
- [C-Le] Coddington, E - Levinson, N : " Theory of Ordinary Differential Equations ". Mc Graw-Hill (1955).
- [Go] Godbillon C. : " Dynamical Systems on Surfaces ". Springer-Verlag (1982).
- [Gu] Gutiérrez, C : " Structural stability for flows on the torus with a cross-cap ". Trans. Amer. Math. Soc. 241 (1978).
- [Ha] Hartman, Philip : " Ordinary Differential Equations ". Birkhäuser (1982) .
- [Hi-Sm] Hirsch, M - Smale, S. : " Differential Equation, Dynamical Systems, and Linear Algebra " Academic Press .(1974)
- [Li] Lima, E.L. : " Variedades Diferenciáveis ". IMPA Projeto Euclides .
- [Ma] Markeley, N : " The Poincaré-Bendixon Theorem for the Klein Bottle ". Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969) .

- [Ne-St] Nemytskii V.V. - Stepanov V.V. "Qualitative Theory of Differential Equations". Princeton University Press (1960).
- [Pa - De M] Palis, J, - De Melo, W : "Introdução aos Sistemas Dinâmicos". IMPA. Projeto Euclides (1981).
- [Sc] Schwartz, A.J. : "A generalization of a Poincaré-Bendixson Theorem for the Klein Bottle". Trans. Amer. Math. Soc. 174 (1972).
- [So] Sotomayor, J. : "Lições de Equações diferenciais ordinárias". IMPA. Projeto Euclides (1981).
- [P] Poincaré, H. : "Sur les courbes définies par les équation différentielle". C. R. Acad. Sci. (Paris) 90 (1880).