Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

HIPERESPACIOS DE CONJUNTOS CONVEXOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

PRESENTA:

SERGIO MACIAS ALVAREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, OCTUBRE DE 1985.

Contenido

Capítulo I

Conjuntos Convexos

El objetivo de este capítulo es presentar un resumen de la Teoría de Convexidad de $\mathbb{R}^n$. Este resumen consiste en dar las principales definiciones y resultados que se utilizarán posteriormente. Aunque no se aplicarán directamente, se incluyen los Teoremas de Radon, Helly y Carathéodory por su gran importancia dentro de esta Teoría.

Diremos que un conjunto $\{x_j\}_{j=0}^r \subset \mathbb{R}^n$ es <u>afínmente independiente</u> si el conjunto $\{x_j - x_i\}_{j\neq i}$ es linealmente independiente. Esto geométricamente significa que cualesquiera $k+1$ puntos de $\{x_j\}$ no están en un hiperplano de dimensión $k-1$, para $1\leq k\leq r-1$.

Es fácil ver que el conjunto $\{x_j\}_{j=0}^r \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si y sólo si cada vez que se tenga que

$$\sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j x_j = 0 \quad y \qquad \sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j = 0$$

con $\varepsilon_j \in \mathbb{R}$, implique que para cada $j\in\{0,\ldots,r\}$, $\varepsilon_j=0$. De aquí se tiene que el conjunto $\{x_j\}_{j=0}^r$ es <u>afínmente dependiente</u> si existen $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_r$, no todos cero, tales que

$$\sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j x_j = 0 \quad y \qquad \sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j = 0.$$

Se dice que una combinación lineal

$$\sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j x_j$$

de elementos de $\mathbb{R}^n$ es una <u>combinación</u> <u>afín</u> si

$$\sum_{j=0}^{r} \mathcal{E}_j = 1.$$

Si además pedimos que para cada $j \in \{0,\ldots,r\}$, $\mathcal{E}_j \geq 0$ entonces tal combinación se llama <u>convexa</u>. Con esto en mente podemos decir que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un <u>subespacio</u> <u>afín</u> de $\mathbb{R}^n$ si contiene a cualquier combinación afín de sus elementos, y que $K \subset \mathbb{R}^n$ es un <u>conjunto</u> <u>convexo</u> si toda combinación convexa de elementos de K está en K. Observemos que los subespacios afines son los k-hiperplanos transladados, $0 \leq k \leq n$. Los conjuntos convexos son muy variados y no es posible caracterizarlos como a los subespacios afines.

Una definición equivalente de conjunto convexo es la siguiente: Un conjunto K es <u>convexo</u> si para cada $x_0, x_1 \in K$ y $\mathcal{E} \in I$ $(:=[0,1])$,

$$(1-\mathcal{E})x_0 + \mathcal{E}x_1 \in K$$

Esta definición es más geométrica pues nos dice que un conjunto es convexo si dados dos puntos cualesquiera de él, el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto. Notemos que esto implica que todo conjunto convexo es arcoconexo.

Como ejemplos de conjuntos convexos tenemos a $\mathbb{R}^n$, los subespacios afines, a los subespacios lineales y al conjunto vacío. Un ejemplo menos trivial de conjunto convexo es la n-bola cerrada

$$\overline{V}_{\delta}(a) := \{ x \in \mathbb{R}^n / \ |x - a| \leq \delta \}$$

donde δ es un número real positivo. Por supuesto, también tenemos que la n-bola abierta

$$V_{\delta}(a) := \{ x \in \mathbb{R}^n / \ |x - a| < \delta \}$$

es un conjunto convexo.

Dado un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ podemos pensar en el subespacio afín "más pequeño" que lo contenga, es claro que siempre existe, y se le llama el <u>casco afín</u> de X, y se le denota como aff$X$. Si L es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ y contiene a un conjunto X que cumple con que aff$X$=L entonces diremos que X <u>genera afínmente</u> a L. Además, si resulta que X es máximo afínmente independiente entonces se dice que X es una <u>base afín</u> de L. Como se sabe que toda base afín tiene el mismo número de puntos, si X es una base afín de L con $k+1$ puntos entonces diremos que la <u>dimensión afín</u> de L es k. Convenimos en que la dimensión del conjunto vacío sea -1. La <u>dimensión</u> de un conjunto convexo K es, por definición, la dimensión afín de aff$K$.

Una propiedad interesante e inmediata de las familias de conjuntos convexos es que su intersección también es un conjunto convexo. Debido a esto podemos definir el <u>casco convexo</u> de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ como la intersección de todos los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contengan a X. Intuitivamen *te el casco convexo de X es el "más pequeño" conjunto convexo que contiene a X. El casco convexo de X será denotado como* $\mathrm{conv}X$.

Es fácil ver que el conjunto de todas las combinaciones convexas de subconjuntos finitos de un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y es, por lo tanto, el casco convexo de X. Y de aquí es inmediato que si $X,Y\subset\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos entonces

$$\mathrm{conv}(X\cup Y)=\cup\{\varepsilon x+(1-\varepsilon)y \;/\; x\in X,\ y\in Y,\ \varepsilon\in I\}.$$

Supongamos que $X=\{x_j\}_{j=1}^{r}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$, con $r\geq n+2$. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio de dimensión n, cualquier subconjunto máximo afínmente independiente tiene $n+1$ puntos. Como $r\geq n+2$, X es afínmente dependiente, de donde podemos encontrar números reales $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_r$, no todos cero tales que

$$\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j\,x_j=0 \quad y \quad \sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j=0\,.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_k>0$ y que $\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_r\leq 0$, para alguna k con $1\leq k<r$. Sean

$$\varepsilon=\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j=-\sum_{j=k+1}^{r}\varepsilon_j$$

y

$$x=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\varepsilon}\,\varepsilon_j\,x_j=-\sum_{j=k+1}^{r}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon_j\,x_j\,.$$

De aquí que x *es una combinación convexa de* $\{x_1,\ldots,x_k\}$ *y de* $\{x_{k+1},\ldots,x_r\}$. *Por lo tanto hemos encontrado una partición de* X *en dos conjuntos* X_1 *y* X_2 *tales que*

$$\operatorname{conv}X_1 \cap \operatorname{conv}X_2 \neq \emptyset .$$

A este resultado se le conoce como el Teorema de Radon.

Ahora supongamos que tenemos una familia finita de $r(\geq n+1)$ *conjuntos convexos de* $\mathbb{R}^n$, $\{K_j\}_{j=1}^{r}$, *tal que la intersección de cualquier subfamilia de* $n+1$ *conjuntos es no vacía. Mostraremos, por inducción sobre* r, *que la intersección de toda la familia es no vacía. Si* $r=n+1$, *por hipótesis se tiene el resultado. Considerémoslo válido para todas las subfamilias de* $r-1$ *conjuntos convexos. Esto implica que para cada* $j\in\{1,\ldots,r\}$, *existe* x_j *tal que*

$$x_j \in K_1 \cap \ldots \cap K_{j-1} \cap K_{j+1} \cap \ldots \cap K_r .$$

Como $r \geq n+2$, *aplicando el Teorema de Radon al conjunto* $X=\{x_1,\ldots,x_r\}$, *podemos encontrar* $X_1, X_2 \subset X$ *tales que* X_1, X_2 *forman una partición de* X *y* $\operatorname{conv}X_1 \cap \operatorname{conv}X_2 \neq \emptyset$. *Sin pérdida de generalidad podemos suponer que* $X_1=\{x_1,\ldots,x_k\}$ *y que* $X_2=\{x_{k+1},\ldots,x_r\}$. *Sea* $x\in \operatorname{conv}X_1 \cap \operatorname{conv}X_2$. *Como* $x_1,\ldots,x_k \in K_{k+1},\ldots,x_1,\ldots,x_k \in K_r$ *y cada* K_j *es convexo, resulta que*

$$x\in \operatorname{conv}X_1 \subset \bigcap_{j=k+1}^{r} K_j$$

Análogamente tenemos que

$$x\in \operatorname{conv}X_2 \subset \bigcap_{j=1}^{k} K_j .$$

Por lo tanto, $x \in \bigcap_{j=1}^{r} K_j$. *Así que hemos probado que si tenemos* $r (\geq n+1)$ *subconjuntos convexos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que la intersección de cada n+1 de ellos es no vacía entonces todos los r conjuntos tienen intersección no vacía. Este Teorema se debe a* <u>*Helly*</u>.

Anteriormente vimos que el casco convexo de un conjunto X estaba formado por el conjunto de las combinaciones convexas de subconjuntos finitos de X, afirmamos que para formarlo basta tomar combinaciones convexas con a lo más n+1 puntos. Para probar esto sea $x \in \operatorname{conv} X$ *con*

$$x = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \, x_j \quad y \qquad \sum_{j=1}^{r} \gamma_j = 1$$

y supongamos que $r \geq n+2$ *y que x no puede ser expresada como una combinación convexa con menos de r puntos de X. Como* $r \geq n+2$, *existe una relación afín no trivial*

$$\sum_{j=1}^{r} \vartheta_j \, x_j = 0 \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{r} \vartheta_j = 0$$

Consideremos a todas las $\vartheta_j > 0$ *(al menos existe una) y elijamos el subíndice, digamos k, para el cual* $\frac{\gamma_i}{\vartheta_i}$ *toma el mínimo valor positivo. Entonces*

$$x = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \, x_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\gamma_j - \frac{\gamma_k}{\vartheta_k} \vartheta_j \right) x_j \, .$$

Pero esta es una combinación convexa con menos de r elementos de X, lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto, $r \leq n+1$. <u>*Carathéodory*</u> *fue el primero en probar este resultado.*

Es importante señalar que los Teoremas de Radon, Helly y Carathéodory son equivalentes. Este hecho no es inmediato, y una demostración puede ser encontrada en [4].

Denotaremos como ρ a la función distancia de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que tenemos un subconjunto convexo y compacto K de $\mathbb{R}^n$. Como ρ es una función continua, tenemos que existe $x\in K$ tal que $\rho(0,x)=\rho(0,K)$. Como K es convexo, afirmamos que la x es única. Pues si existiera $x'\in K\setminus\{x\}$ tal que $\rho(0,x')=\rho(0,K)$ entonces $x''=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x'\in K$ sería tal que $\rho(0,x'')<\rho(0,x)$ y $\rho(0,x'')<\rho(0,x')$, lo cual sería un contradicción. Por lo tanto, si $K\subset\mathbb{R}^n$ es convexo y compacto entonces existe un único punto de K más cercano al origen.

Sean X y Y subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, definimos su suma como

$$X+Y:=\{x+y \;/\; x\in X \quad y \quad y\in Y\},$$

y si $\alpha\in\mathbb{R}$ entonces definimos el producto de α por X como

$$\alpha X:=\{\alpha x \;/\; x\in X\}.$$

Debido a las propiedades de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ se tiene que algunas de las propiedades que se satisfacen son:

$$X+Y=Y+X$$
$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$$
$$X+\{0\}=X$$

$$1X=X$$
$$(\alpha\beta)X=\alpha(\beta X)$$

Observemos que si X tiene más de un punto, $-X:=(-1)X$ y $x\in X$ entonces $X-\{x\}\subset X-X$, de donde se tiene que con estas operaciones el conjunto potencia de $\mathbb{R}^n$ no es un espacio vectorial.

Es inmediato verificar que si X y Y son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ entonces tanto $X+Y$ como αX son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.

Utilizando las definiciones de suma de conjuntos y del producto de un número real por un conjunto, podemos dar una tercera definición de conjunto convexo: Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es <u>convexo</u> si para toda $\alpha\in I$,

$$(1-\alpha)K+\alpha K\subset K.$$

Observemos que

$$V_\varepsilon(X)=V_\varepsilon(0)+X.$$

Sean X° y $\bar{X}$ el interior y la cerradura de X, respectivamente. Como $(\alpha X)^\circ=\alpha X^\circ$ y $X^\circ+Y^\circ\subset(X+Y)^\circ$ se tiene que si X es convexo entonces X° es convexo. Como $\bar{X}=\bigcap_{\varepsilon>0}V_\varepsilon(X)$, si X es convexo entonces $\bar{X}$ es convexo.

Ahora estudiaremos algunas propiedades de "soporte" de conjuntos convexos y compactos. Recordemos que un hiperplano H puede ser escrito como

$$H=\{x\in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x,a\rangle=\beta\}$$

donde a es un vector no cero ortogonal a H y β es un número real.

El conjunto de puntos que está sobre o a un lado de un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es llamado un <u>semiespacio cerrado</u>; el conjunto de puntos que están estrictamente en un lado de un hiperplano es llamado un <u>semiespacio abierto</u>. Si

$$H=\{x\in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x,a\rangle=\beta\}$$

entonces los semiespacios cerrados determinados por H son

$$H^+=\{x\in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x,a\rangle\geqslant\beta\}$$

y

$$H^-=\{x\in \mathbb{R}^n / \ \langle x,a\rangle\leqslant\beta\}.$$

Si reemplazamos las desigualdades en H^+ y en H^- por desigualdades estrictas, obtenemos los correspondientes semiespacios abiertos.

Sea K un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, diremos que H es un <u>hiperplano soporte</u> de K si H y K tienen intersección no vacía y K está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por H. El semiespacio cerrado determinado por H

que contiene a K se llama un <u>semiespacio</u> <u>soporte</u>.

Observemos que si K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y a - es un vector no nulo, entonces

$$H_1=\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x,a\rangle= \sup_{y\in K}\{\langle y,a\rangle\}\}$$

y

$$H_2=\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x,a\rangle= \inf_{y\in K}\{\langle y,a\rangle\}\}$$

son hiperplanos soportes de K ortogonales a a. De aquí que - en toda dirección existen dos hiperplanos soportes ortogonales a esta dirección.

Dado un conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$, K, difinimos

$$\varphi_K: \mathbb{R}^n \longrightarrow K$$

como

$$\varphi_K(p)=p'$$

donde p' es el punto, en K, más cercano a p. McMullen y - Shephard [9] prueban que si K es un conjunto convexo y com - pacto de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$/\varphi_K(q)-\varphi_K(p)/\leq/ q-p /,$$

de donde se sigue que φ_K *es continua. Denotemos como* $R(\varphi_K(p),p)$ *al rayo que empieza en* $\varphi_K(p)$ *y contiene a* p*. Es claro que si* $q\in R(\varphi_K(p),p)$ *entonces* $\varphi_K(q)=\varphi_K(p)$*. Ahora sea* $p\in\mathbb{R}^n\setminus K$ *y consideremos el hiperplano,* H*, ortogonal a* $R(\varphi_K(p),p)$ *y que pasa por* $\varphi_K(p)$*, afirmamos que* K *está contenido en el semiespacio cerrado determinado por* H *que no contiene a* p*. Pues de otro modo podríamos encontrar una* $x\in K$ *del mismo lado de* H *que* p*, el hiperplano ortogonal a* $\varphi_K(p)-x$ *y que pasa por* x *intersecaría a* $R(\varphi_K(p),p)$ *en un punto* q*,* $\varphi_K(q)=\varphi_K(p)$*, y como el triángulo con vértices* x*,* q*,* $\varphi_K(q)$ *sería rectángulo en* x*, obtendríamos que*

$$|q-x|<|q-\varphi_K(q)|,$$

lo cual es una contradicción. Así que probamos que el hiperplano ortogonal a $R(\varphi_K(p),p)$ *y que pasa por* $\varphi_K(p)$ *es un hiperplano soporte de* K *en* $\varphi_K(p)$*.*

Un Corolario importante del hecho mostrado en el párrafo anterior es que si K *es un conjunto convexo y compacto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $p\in\mathbb{R}^n\setminus K$ *entonces existe un hiperplano que los separa, esto es,* K *y* p *están en distintos semiespacios. Y de aquí es inmediato que un conjunto convexo y compacto es la intersección de sus semiespacios soporte; ya que, en caso contrario podríamos encontrar un punto en la intersección de los semiespacios soporte que no estaría en el conjunto, pero de aquí se tendría que existiría un hiperplano que los separaría, de donde el punto no estaría en la intersección de los semiespacios soporte, esta contradicción muestra lo afirmado.*

Supongamos que K_1 y K_2 son dos conjuntos convexos, compactos y ajenos de $\mathbb{R}^n$. Sean $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que x_1 es el punto de K_1 más cercano a K_2 y x_2 es el punto de K_2 más cercano a K_1. Por la construcción hecha antes podemos encontrar hiperplanos soporte a K_1 en x_1 y a K_2 en x_2, respectivamente, de tal manera que sean ortogonales al vector x_2-x_1. Así que el hiperplano ortogonal a x_2-x_1 que pasa por $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$ separa a K_1 de K_2. Por lo tanto, dados dos conjuntos convexos, compactos y ajenos de $\mathbb{R}^n$, existe un hiperplano que los separa.

Sean K un conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ y S_0^{n-1} una $(n-1)$-esfera que contenga a K. Tomemos $x \in \partial K$ (la frontera de K). Para cada $m \in \mathbb{N}$, la n-bola abierta con centro en x y radio $\frac{1}{m}$ contiene un punto $p_m \in \mathbb{R}^n \setminus K$, y como $\varphi_K(x)=x$, tenemos que

$$| x-\varphi_K(p_m) | \leq | x-p_m | < \frac{1}{m}$$

Supongamos que $R(\varphi_K(p_m),p_m)$ interseca a S_0^{n-1} en y_m, así que $\varphi_K(p_m)=\varphi_K(y_m)$. Haciendo tender m a infinito obtenemos una sucesión de puntos $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en S_0^{n-1} y una sucesión correspondiente de puntos $\{\varphi_K(y_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\varphi_K(y_m)\}$ tiende a x. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{y_m\}$ tiende a $y \in S_0^{n-1}$. Como φ_K es continua, tenemos que $\varphi_K(y)=x$. Por lo tanto, dada $x \in \partial K$, existe $y \in S_0^{n-1}$ tal que $\varphi_K(y)=x$.

Teniendo en cuenta lo anterior, ya es fácil ver que si K es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ y $x \in \partial K$ entonces existe un hiperplano soporte de K en x. De hecho se puede probar que esto caracteriza a los conjuntos convexos y compactos.

Capítulo II

Hiperespacios de un Continuo

Durante este capítulo (X,ρ) denotará un espacio métrico compacto y conexo, es decir X será un continuo. Los hiperespacios de un continuo X son: el espacio de los subconjuntos compactos no vacíos de X, denotado como 2^X, y el espacio de los subcontinuos no vacíos de X, denotado como $C(X)$. Es claro que $C(X)\subset 2^X$. 2^X es un espacio métrico con la métrica de Hausdorff. Esto es

$$\rho^1(A,B):=\inf\{\varepsilon \,/\, A\subset V_\varepsilon(B) \text{ y } B\subset V_\varepsilon(A)\}.$$

Los hiperespacios se empezaron a estudiar a principios de este siglo, con Hausdorff y Vietoris. En 1942, Kelley publicó un artículo llamado Hyperspaces of a Continuum [8], el cual es importante pues reúne bastante del material que estaba disperso y aplica nuevas técnicas en el estudio de los hiperespacios. En los últimos años se han obtenido resultados impresionantes como, por ejemplo [3]:

> 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo.

y

> $C(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo y no tiene arcos libres.

Nuestras pretenciones no son tan ambiciosas, el propósito de este capítulo es mostrar que:

2^X y $C(X)$ son compactos.

Tanto 2^X como $C(X)$ son arcoconexos.

Si X es localmente conexo entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles en sí mismos.

2^X contiene a un subconjunto homeomorfo al cubo de Hilbert.

Los cuales forman parte del camino para probar los resultados anteriores, y serán útiles para los siguientes capítulos.

Veamos que 2^X es compacto. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X, definimos

$\lim\inf A_n := \{x\in X /$ Toda vecindad de x interseca a casi todas las $A_n\}$.

y

$\lim\sup A_n := \{x\in X /$ Toda vecindad de x interseca a una infinidad de las $A_n\}$.

Es claro que $\lim\inf A_n \subset \lim\sup A_n$ y que tanto $\lim\inf A_n$ como $\lim\sup A_n$ son cerrados de X.

Si $\lim\inf A_n = \lim\sup A_n = A$ entonces diremos que $\{A_n\}$ <u>converge</u> a A. No es difícil probar que $\{A_n\}$ converge a A si y sólo si $\rho^1(A_n, A)$ tiende a cero.

Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X y $\varepsilon>0$. Como X es compacto, podemos encontrar un subconjunto finito F de X que cumpla con que $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(F)$ contenga a una infinidad de las A_n y que F tenga el mínimo número de elementos posible.- Por lo tanto, para todo subconjunto propio G de F, sólo un número finito de las A_n está contenido en $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(G)$. Sean

$$J_G:=\{n\in\mathbb{N}/\ A_n\subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(G)\},$$

con G un subconjunto propio de F, y

$$J_0:=\{n\in\mathbb{N}/\ A_n\subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(F)\},$$

observemos que J_0 es infinito y que J_G es finito. Sea $J:=J_0\setminus\bigcup_{G\subsetneq F} J_G$. Por definición, para toda $n\in J$, $A_n\subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(F)$, además se tiene que para cada $n\in J$ y para cada $x\in F$, $A_n\cap V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\neq\emptyset$, lo que implica que $F\subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_n)$, de donde $\rho^1(F,A_n)\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto tenemos que si $n,m\in J$ entonces $\rho^1(A_n,A_m)\leq\varepsilon$. Así, hemos probado que toda sucesión en 2^X contiene una subsucesión de Cauchy. Ahora veremos que 2^X es completo, esto es, mostraremos que toda sucesión de Cauchy es convergente. Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de 2^X. Sean $A=\liminf A_n$, $x\in\limsup A_n$ y $\varepsilon>0$. Como $\{A_n\}$ es de Cauchy existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq N$ entonces $\rho^1(A_n,A_m)<\frac{\varepsilon}{2}$. Como $x\in\limsup A_n$, existe $k\geq N$ tal que $A_k\cap V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\neq\emptyset$. De lo anterior se tiene que si $n\geq N$ entonces $A_k\subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_n)$. Dada $y\in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\cap A_k$, para cada $n\geq N$, existe $a_n\in A_n$ tal que $\rho(y,a_n)<\frac{\varepsilon}{2}$, de aquí que si $n\geq N$ entonces $\rho(x,a_n)<\varepsilon$. Por lo tanto si $n\geq N$ entonces $A_n\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$, pero esto implica que $x\in\liminf A_n$. Por lo tanto, $\liminf A_n=\limsup A_n$. Así que 2^X es completo.

Lo que hemos probado es que toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente, y esto implica que 2^X es compacto. (Véase Dieudonné [5])

Para ver que $C(X)$ es compacto demostraremos que es cerrado en 2^X. Sea $A\in\overline{C(X)}$. Como A es compacto, falta ver que A es conexo. Supongamos que A no es conexo, esto quiere decir que $A=A_1\cup A_2$, donde A_1,A_2 forman una separación de A. Como $A_1\cap A_2=\emptyset$ y A_1,A_2 son compactos podemos encontrar una $\varepsilon>0$ tal que $V_\varepsilon(A_1)\cap V_\varepsilon(A_2)=\emptyset$. Es claro que $V_\varepsilon(A)=V_\varepsilon(A_1)\cup V_\varepsilon(A_2)$.- Como $A\in\overline{C(X)}$, para la $\varepsilon>0$ que tenemos, existe $B\in C(X)$ tal que $\rho^1(A,B)<\varepsilon$, pero esto implica que $B\subset V_\varepsilon(A)=V_\varepsilon(A_1)\cup V_\varepsilon(A_2)$, de donde $B=(B\cap V_\varepsilon(A_1))\cup(B\cap V_\varepsilon(A_2))$, pero $B\cap V_\varepsilon(A_1)$, $B\cap V_\varepsilon(A_2)$ forman una separación de B, de donde B no es conexo. Esta contradicción prueba que $A\in C(X)$ y, por lo tanto, que $C(X)$ es compacto.

Para probar que tanto 2^X como $C(X)$ son arcoconexos lo primero que haremos es definir lo que entendemos por un segmento (en el sentido de Kelley [8]), y para esto necesitamos definir una función continua, cuya existencia fue probade por Whitney y se le llama <u>función de Whitney</u>,

$$\mu:2^X\longrightarrow I$$

que tiene las siguientes propiedades:

Si $A,B\in 2^X$ y $A\subsetneq B$ entonces $\mu(A)<\mu(B)$,

Para toda $x\in X$, $\mu(\{x\})=0$ y

$\mu(X)=1$.

Daremos una construcción de una función de Whitney debida a Alejandro Illanes [7]. Esta construcción es importante pues en el caso de que X sea localmente conexo resulta que la función obtenida es monótona y abierta, contestando algunas de las preguntas planteadas por Nadler [11]. Sea X un continuo. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos

$$w_n:2^X\longrightarrow[0,\infty)$$

como

$$w_n(A):=\inf\{\varepsilon>0 \;/\; \text{existen } x_1,\ldots,x_n\in X \text{ tales que } A\subset\bigcup_{j=1}^{n}V_\varepsilon(x_j)\}.$$

No es difícil ver que w_n es una función continua. Así, podemos definir la siguiente función

$$w:2^X\longrightarrow[0,\infty)$$

como

$$w(A):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,w_n(A).$$

Veamos que w está bien definida. Supongamos que $\varepsilon\in\mathbb{R}$ es tal que $X=V_\varepsilon(x_0)$, para alguna $x_0\in X$. Esto implica que $w_1(A)\leq\varepsilon$, pues $A\subset V_\varepsilon(x_0)$. En general, como $A\subset\bigcup_{j=1}^{n}V_\varepsilon(x_0)$, tenemos que $w_n(A)\leq\varepsilon$. Por lo tanto, w está bien definida y es continua. Como para cada $n\in\mathbb{N}$, $w_n(\{x\})=0$, tenemos que $w(\{x\})=0$. Es claro que si $A\subset B$ entonces $w_n(A)\leq w_n(B)$. Así que para probar que si $A\subsetneq B$ entonces $w(A)<w(B)$, basta mostrar que existe una $m\in\mathbb{N}$ tal que $w_m(A)<w_m(B)$. Sean $A\subsetneq B$, $b\in B\setminus A$ y $\varepsilon>0$ tal que $V_\varepsilon(b)\cap A=\emptyset$. Sea

$$m:=\min\{n\in\mathbb{N} \,/\, \text{existen } x_1,\dots,x_n\in X \text{ tales que } A\subset \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)\}.$$

Afirmamos que $w_m(A)<w_m(B)$. Como A es compacto y $A\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$ podemos encontrar una $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ tal que $A\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_\delta(x_j)$, de donde $w_m(A)<\frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado si $w_m(B)<\frac{\varepsilon}{2}$ entonces existen $b_1,\dots,b_m\in X$ tales que $B\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_j)$, con $b\in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_m)$. Como $V_\varepsilon(b)\cap A=\emptyset$ entonces $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_m)\cap A=\emptyset$, de donde A está cubierto con a lo más m-1 bolas. Esta contradicción prueba que $w_m(B)\geq\frac{\varepsilon}{2}$ y que, por lo tanto $w(A)<w(B)$. Por último definimos

$$\mu:2^X\longrightarrow I$$

como

$$\mu(A):=\frac{1}{w(X)}w(A).$$

Por todo lo hecho en este párrafo es claro que μ es una función de Whitney.

Dados $A_0,A_1\in 2^X$, un <u>segmento</u> (si es que existe) de A_0 a A_1 es una función continua

$$\xi:I\longrightarrow 2^X$$

$(\xi(t):=A_t)$ que cumple con las siguientes condiciones:

Si $0\leq t\leq t'\leq 1$ entonces $A_t\subset A_{t'}$, y

$\mu(A_t)=(1-t)\mu(A_0)+ t\mu(A_1)$.

Observemos que no es difícil convencerse de que dados $A_0,A_1\in 2^X$, una condición necesaria y suficiente para que exista un segmento de A_0 a A_1 es que $A_0\subset A_1$ y que toda componente conexa de A_1 interseque a A_0.

Un corolario importante de esta observación es que dada $A\in 2^X$, siempre existe un segmento de A a X.

Además, del hecho de que cualquier subarco de un segmento es, con una reparametrización adecuada, un segmento, se sigue que cualquier segmento que "empiece" en un continuo está totalmente formado por continuos. Por lo primero basta ver que donde "termina" el segmento es conexo. Pero si no lo fuera A_0 estaría en una componente de A_1 y existiría otra componente de A_1 que no intersecaría a A_0, lo que contradice la observación anterior.

Con todo esto en mente es claro que 2^X y $C(X)$ son arcoconexos.

Para comenzar nuestro camino para la demostración de que si X es localmente conexo entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles en sí mismos, mencionaremos una característica de los continuos, pero para eso necesitamos el siguiente subespacio de 2^X:

$$X^{\star}=\{\{x\}\ /\ x\in X\}$$

el cual está claramente contenido en $C(X)$.

La característica de la que habíamos hablado es la equivalencia de las siguientes condiciones:

$X^\bigstar$ es contraíble en 2^X;

2^X es contraíble en sí mismo; y

$C(X)$ es contraíble en sí mismo.

(Recordemos que un espacio Z es contraíble en un espacio Y- si $Z\subset Y$ y existe una función continua

$$F:Z\times I \longrightarrow Y$$

tal que

$$F(z,0)=z \text{ y } F(z,1)=k$$

para toda $z\in Z$)

Supongamos que $X^\bigstar$ es contraíble en 2^X, esto implica que existe una función continua

$$\tilde{F}:X^\bigstar\times I \longrightarrow 2^X$$

tal que para toda $x\in X$,

$$\tilde{F}(\{x\},0)=\{x\} \text{ y } \tilde{F}(\{x\},1)=K$$

con $K\in 2^X$. Consideremos la siguiente función continua

$$f:X\longrightarrow X^{\star}$$

definida como

$$f(x)=\{x\}.$$

Así podemos definir la función

$$G:X\times I\longrightarrow 2^{X}$$

como

$$G(x,t)=\tilde{F}(f\times 1_{I})(x,t)$$

es claro que G es continua y con esto podemos definir la siguiente función continua

$$F:2^{X}\times I\longrightarrow 2^{X}$$

como

$$F(A,t)=\cup\{\,G(a,t)\,/\,a\in A\}.$$

Es fácil ver que

$$F(A,0)=A \quad \text{y que } F(A,1)=K,$$

para toda $A\in 2^{X}$, de donde 2^{X} es contraíble en sí mismo.

Ahora supongamos que 2^{X} es contraíble en sí mismo, así que existe una función continua

$$\tilde{F}:2^X x I \longrightarrow 2^X$$

que satisface que para toda $A\in 2^X$,

$$\tilde{F}(A,0)=A \quad y \text{ que } \quad \tilde{F}(A,1)=K$$

con $K\in 2^X$. Como 2^X es arcoconexo, sin pérdida de generalidad- podemos suponer que $K=X$. Con esto podemos definir

$$F:C(X)xI \longrightarrow C(X)$$

como

$$F(A,t)=\bigcup\{\tilde{F}(A,t') \ / \ 0\leq t'\leq t\}.$$

Como A es un continuo y hemos considerado $\tilde{F}(A,t')$ para toda- $0\leq t'\leq t$, tenemos que $F(A,t)$ es conexo y, por lo tanto que F - está bien definida. Además, no es difícil mostrar que F es - continua y que

$$F(A,0)=A \quad y \text{ que } \quad F(A,1)=X,$$

por lo tanto, $C(X)$ es contraíble en sí mismo.

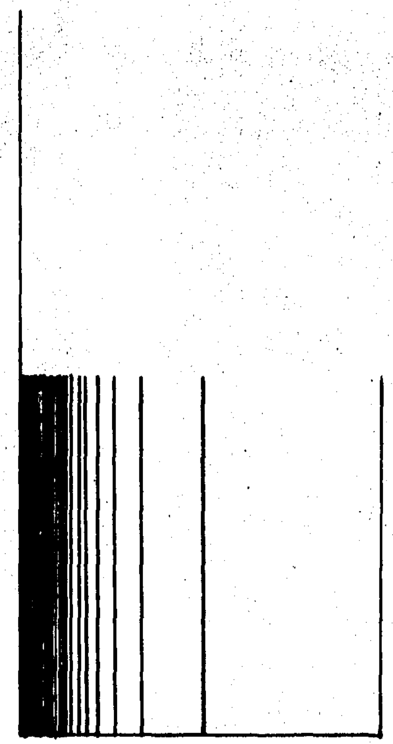
Si $C(X)$ es contraíble en sí mismo entonces, como - $X^{\bigstar}\subset C(X)$, se tiene que $X^{\bigstar}$ es contraíble en 2^X.

La siguiente propiedad es técnica pero nos será de gran utilidad, ya que si X la satisface entonces $X^{\bigstar}$ es contraíble en 2^X y, por lo que acabamos de probar, 2^X y $C(X)$ son contraíbles en sí mismos.

La propiedad dice que para cada $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ - *tal que si* $a, b \in X$, $\rho(a,b) < \delta$ *y si* $a \in A \in C(X)$ *entonces existe* - $B \in C(X)$ *tal que* $b \in B$ *y* $\rho^{1}(A,B) < \varepsilon$.

Existen continuos que no la satisfacen como por ejemplo:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = \tfrac{1}{n} \ , \ 0 \leq y \leq 1\} \ \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ y = 0\} \ \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = 0 \ , \ 0 \leq y \leq 2\} .$$



Veamos que X no satisface la propiedad. Sean $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $a=(0,1)$, $A=\{(0,y) \,/\, 1 \leq y \leq 2\}$. Sean $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$, $b=(\frac{1}{n},1)$. Claramente no existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $\rho^1(A,B) < \varepsilon$.

Para probar que si X satisface la propiedad entonces X^* es contraíble en 2^X necesitamos definir una función continua

$$F: X^* \times I \to 2^X$$

y para esto, lo que hay que hacer es decir qué le pasa al punto $\{x\}$ en el "tiempo t", esto es:

$$F(\{x\},t) = \bigcup \{A \in C(X) \,/\, x \in A \text{ y } \mu(A)=t\}.$$

Es fácil ver que F está bien definida. Debido a la propiedad y a la continuidad de μ si $(\{x\},t)$ está cerca de $(\{y\},t')$ y $x \in A \in C(X)$ con $\mu(A)=t$, podemos encontrar $A' \in C(X)$ con $y \in A'$ y $\mu(A')=t'$ tal que A' esté cerca de A, de donde se sigue la continuidad de la F. Y, por lo tanto, X^* es contraíble en 2^X.

Debido a lo que hemos hecho, para mostrar que si X es localmente conexo entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles en sí mismos basta mostrar que si X es localmente conexo entonces X satisface la propiedad. Pero Hocking y Young [6] prueban que si X es localmente conexo entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $a,b \in X$, $\rho(a,b) < \delta$ entonces existe un arco M de a a b tal que diám$M < \varepsilon$. De donde X satisface la propiedad si X es localmente conexo.

Para concluir este capítulo mostraremos que para cualquier continuo X se tiene que 2^X contiene un subconjunto homeomorfo al cubo de Hilbert.

Definimos el cubo de Hilbert como

$$Q := \prod_{n=1}^{\infty} I_n \ ,$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n *es una copia de* I. Q *tiene la métrica producto*

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ | \ x_n - y_n \ | \ .$$

Tomemos una sucesión disjunta ($A_n \in C(X)$) *de continuos no degenerados que tienda al punto* $\{a\}$ ($a \notin A_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$). *Como cada* A_n *es un continuo no degenerado entonces cada* 2^{A_n} - $(\subset 2^X)$ *contiene un arco no degenerado* B_n. *Definimos*

$$f : Q \rightarrow 2^X$$

como

$$f(\{x_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi_n(x_n)$$

donde $\xi_n : I_n \rightarrow 2^{A_n}$ *es la función determinada por el n-ésimo arco,* B_n. *Como* $\{A_n\} \xrightarrow[\rho]{} \{a\}$ *y, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n(x_n) \subset A_n$, *tenemos que* $\{\xi_n(x_n)\} \xrightarrow[\rho]{} \{a\}$, *por lo tanto* $\{\xi_n(x_n)\}$ *es un compacto de* 2^X, *de donde* $\bigcup_{n=1}^{\infty} \xi_n(x_n) \in 2^X$. *Por lo tanto* f *está bien definida. Como* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n(x_n) \subset A_n$ *y cada* ξ_n *es un encaje, tenemos que* f *es inyectiva. Por lo* -

tanto f *es biyectiva sobre su imagen. Como* Q *es compacto y* 2^X *es de Hausdorff, basta probar que* f *es continua para que sea un encaje. Sea* $\{x_n\} \in Q$*, veamos que* f *es continua en* $\{x_n\}$*. Sea* $\varepsilon > 0$*, queremos encontrar* $\delta > 0$ *tal que*

$$\text{si } d(\{x_n\},\{y_n\}) < \delta \text{ entonces } \rho^1(f(\{x_n\}),f(\{y_n\})) < \varepsilon.$$

Como $\{A_n\} \xrightarrow{\rho^1} \{a\}$*, tomando* $\frac{\varepsilon}{2}$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $\rho^1(A_n,\{a\}) < \frac{\varepsilon}{2}$ *. Esto implica que si* $\{x_n\} \in Q$ *y* $n,m \geq N$ *entonces*

$$\rho^1(\xi_n(x_n),\{a\}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \quad \rho^1(\xi_m(x_m),\{a\}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde, si $n,m \geq N$ *entonces*

$$\rho^1(\xi_n(x_n),\xi_m(x_m)) < \varepsilon .$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$*,* ξ_n *es continua, existe* $\delta_n > 0$ *tal que*

$$\text{si } \frac{1}{2^n}|x_n - y_n| < \delta_n \text{ entonces } \rho^1(\xi_n(x_n),\ \xi_n(y_n)) < \varepsilon .$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1,\dots,\delta_N\}$*. De aquí que*

$$\text{si } d(\{x_n\},\{y_n\}) < \delta \text{ entonces } \rho^1(\xi_n(x_n),\ \xi_n(y_n)) < \varepsilon ,$$

para $n \in \{1,\dots,N\}$*. De aquí es fácil ver que, en esas condiciones,*

$$\rho^1(f(\{x_n\}),f(\{y_n\})) < \varepsilon.$$

De esta manera hemos terminado con lo que nos habíamos propuesto. Un estudio más detallado sobre continuos se puede encontrar en Kelley [8] *y en Nadler* [11].

Capítulo III

Haces, Fibraciones y el Cubo de Hilbert

El propósito de este capítulo es el de dar algunas definiciones y mencionar algunos resultados que necesitaremos posteriormente.

Empezaremos revisando las nociones de Haz Fibrado Localmente Trivial y de Fibración de Hurewicz.

Una función continua

$$f : E \longrightarrow Y$$

es un ***Haz Fibrado Localmente Trivial*** *con fibra X si para cada $y \in Y$, existen una vecindad V de y en Y y un homeomorfismo*

$$h : f^{-1}(V) \longrightarrow X x V$$

tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & X x V \arrow[d, "\Pi"] \\ & V \end{tikzcd}$$

es conmutativo (#).

(#) En el presente trabajo consideraremos que el grupo estructural del haz fibrado es el grupo de homeomorfismos de la fibra en sí misma.

Si

$$f:E \longrightarrow Y$$

es un haz fibrado localmente trivial, diremos que Y es la <u>base</u> y que E es el <u>espacio total</u>.

Es claro que si

$$\Pi : X x W \longrightarrow W$$

es la función proyección entonces Π *es un haz fibrado localmente trivial. De hecho es trivial, esto es; si*

$$f:E \longrightarrow Y$$

es un haz fibrado localmente trivial y para $y \in Y$ *podemos tomar* $V=Y$, *entonces se dice que f es un <u>Haz Fibrado Trivial</u>.*

Sean X un espacio topológico y

$$h:X \longrightarrow X$$

un homeomorfismo. Consideremos en XxI la relación de equivalencia, $\sim$, *que identifica a* $(x,0)$ *con* $(h(x),1)$. *Sea* $E_h := XxI/\sim$. *Observemos que* S^1 *es homeomorfo a* $I/\approx$, *donde* $\approx$ *es la relación de equivalencia que identifica al cero con el uno. Definimos*

$$f_h : E_h \longrightarrow S^1$$

como

$$f_h([(x,t)]):=[t].$$

Es claro que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X x I & \xrightarrow{\Pi_2} & I \\ \Pi_1 \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \Pi_3 \\ E_h & \xrightarrow[f_h]{} & S^1 \end{array}$$

es conmutativo y, de aquí que, f_h es continua. Afirmamos que f_h es un haz fibrado localmente trivial. Claramente se cumple la condición de trivialidad local para cualquier $z \in S^1 \setminus \{[0]\}$. Mostraremos que también se cumple para $[0]$. Sean $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ y

$$V := \Pi_3([0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,1])$$

Notemos que

$$f_h^{-1}(V) = \{ [(x,t)] \in E_h \ / \ t \in [0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,1] \}.$$

Definimos

$$g : f_h^{-1}(V) \longrightarrow X x V$$

como

$$g([(x,t)]) := \begin{cases} (x,[t]) & \text{si} \quad t \in [0,\varepsilon) \\ (h^{-1}(x),[t]) & \text{si} \quad t \in (1-\varepsilon,1] \end{cases}$$

Es claro que g es un homeomorfismo y hace que el triángulo

$$\begin{tikzcd} f_h^{-1}(V) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_h"'] & X \times V \arrow[d, "\Pi"] \arrow[dl, phantom, "///"] \\ & V \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

De hecho se puede demostrar que todo haz fibrado localmente trivial con base S^1 *se construye de la manera descrita en el párrafo anterior.*

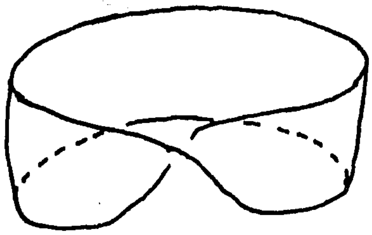
Como ejemplos de haces fibrados localmente triviales con fibra I *y base* S^1 *tenemos los inducidos por los homeomorfismos*

$$h, 1_I : I \longrightarrow I$$

definidos como

$$1_I(x) := x \qquad y \qquad h(x) := 1-x.$$

Con el primero se obtiene el anillo $I \times S^1$*, y con el segundo obtenemos la Banda de Möbius.*



Sea Y *un espacio topológico. Si*

$$h_0, h_1 : Y \longrightarrow Y$$

son homeomorfismos, diremos que h_0 *es* <u>*isotópico*</u> *a* h_1 *si existe una función continua*

$$H : Y x I \longrightarrow Y$$

tal que

$$H(y,0)=h_0(y), \quad H(y,1)=h_1(y)$$

y si

$$h_t : Y \longrightarrow Y$$

está definida como

$$h_t(y) := H(y,t)$$

entonces para cada $t \in I$, h_t *es un homeomorfismo.*

Sea

$$h : X \longrightarrow X$$

un homeomorfismo de X isotópico a la función identidad. Esto implica que existe una función continua

$$H:X\mathrm{x}I\longrightarrow X$$

tal que

$$H(x,0)=h(x) \quad y \quad H(x,1)=x$$

y para cada $t\in I$, h_t es un homeomorfismo. Definimos

$$g:E_h\longrightarrow X\mathrm{x}S^1$$

como

$$g([(x,t)]):=(H(x,t),[t]).$$

Debido a que

$$g([(x,0)])=(H(x,0),[0])=(h(x),[0])$$

y a que

$$g([(h(x),1)])=(H(h(x),1),[1])=(h(x),[1])$$

tenemos que g está bien definida. Además es fácil ver que g- es un homeomorfismo que hace que el triángulo

$$\begin{tikzcd} E_h \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_h"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "///"] & X\mathrm{x}S^1 \arrow[d, "\Pi"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Por lo tanto hemos probado que si todo homeomorfismo de X es isotópico a la función identidad entonces todo haz con base S^1 y fibra X es trivial.

En forma parecida a lo hecho en el último párrafo se puede demostrar que si todo homeomorfismo de X en sí mismo es isotópico a la función identidad entonces todo haz fibrado localmente trivial y base un ANR es trivial.

Sean X y Y espacios topológicos

$$\Pi_Y : XxY \longrightarrow Y$$

la función proyección. Si W es un espacio métrico,

$$f : WxI \longrightarrow Y$$

y

$$F : Wx\{0\} \longrightarrow XxY$$

son funciones continuas tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Wx\{0\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & XxY \arrow[d, "\Pi_Y"] \\
WxI \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo, entonces la función

$$G: WxI \longrightarrow XxY$$

definida como

$$G(w,t) := (\Pi_X F(w,0), f(w,t))$$

es tal que hace al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Wx\{0\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & XxY \arrow[d, "\Pi_Y"] \\
WxI \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "G"] & Y
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Esto nos sirve de motivación para la difinición de Fibración de Hurewicz.

Si

$$h: E \longrightarrow Y$$

es una función que satisface la siguiente propiedad: "Para - todo espacio métrico W y toda pareja de funciones continuas

$$f: WxI \longrightarrow Y$$

y

$$F: Wx\{0\} \longrightarrow E$$

tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W\times\{0\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & E \arrow[d, "h"] \\ W\times I \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo, existe una función continua

$$G: W\times I \longrightarrow E$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W\times\{0\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "h"] \\ W\times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "G"] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo". A h la llamaremos una __Fibración de Hurewicz__.

Es importante hacer notar que se puede demostrar que todo haz fibrado localmente trivial es una fibración de Hurewicz.

El __Cubo de Hilbert__ será representado como el producto numerable

$$Q:=\prod_{n=1}^{\infty} I_n$$

donde I_n *es el intervalo cerrado* $[-1,1]$. *Los puntos del cubo de Hilbert son sucesiones* $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $q_n \in I_n$. *Usaremos la métrica definida como*

$$\rho(\{q_n\},\{r_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |q_n - r_n|,$$

la cual es la que le da al cubo la topología producto. Recordemos que ℓ_2 *es el espacio de Hilbert formado por todas las sucesiones de números reales cuadrado sumables.*

Debido a que en $\mathbb{R}^n$ *cualquier conjunto convexo y compacto es homeomorfo a un m-cubo, no es de extrañarse que* Keller *haya demostrado que si* X *es un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de* ℓ_2 *entonces* X *es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Del Teorema de Keller se sigue que el cubo de Hilbert es homeomorfo a su cono, de la siguiente manera. Definimos

$$Q' := \{\{q_n\} \in \ell_2 \ / \ q_1 = 0 \ y \ \frac{-1}{2^n} \leq q_n \leq \frac{1}{2^n}, \ si \ n \geq 2\}.$$

Es claro que $Q' \subset \ell_2$ *y que es homeomorfa al cubo de Hilbert.- Sea*

$$\Gamma := \{(1-t)a + tx \ / \ a := \{1,0,\ldots\}, \ x \in Q' \ y \ t \in I\}.$$

Es fácil ver que Γ *es el cono de* Q', *y se puede probar que* Γ *es un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de* ℓ_2. *Por lo tanto, por el Teorema de Keller,* Γ *es homeomorfa al cubo de Hilbert.*

Un hecho desconcertante, pero bien conocido, es el de que el cubo de Hilbert es ***homogéneo****, esto es, dados x,y en el cubo de Hilbert, existe un homeomorfismo*

$$f:Q\longrightarrow Q$$

tal que

$$f(x)=y.$$

En realidad, el cubo de Hilbert es ***fuertemente homogéneo****, en el sentido de que existe una familia de subconjuntos cerrados del cubo de Hilbert, que incluye a los puntos, cuyos elementos son llamados conjuntos Z, y que cumplen con que dados A y B subconjuntos Z del cubo de Hilbert y un homeomorfismo*

$$f:A\longrightarrow B,$$

existe un homeomorfismo

$$h:Q\longrightarrow Q$$

tal que

$$h/_A=f.$$

A este resultado también se le conoce como el ***Teorema de Z-desanudamiento en Q****.*

La familia de subconjuntos cerrados del cubo de Hilbert a la que nos referíamos en el teorema anterior es la siguiente: Un subconjunto cerrado, A, del cubo de Hilbert es un

<u>conjunto Z</u> si dada $\varepsilon>0$, existe una función continua

$$g:Q \longrightarrow Q\setminus A$$

tal que para cada $x\in Q$,

$$\rho(x,g(x))<\varepsilon .$$

No es difícil probar, por ejemplo, que los puntos del cubo de Hilbert son subconjuntos Z, o que cualquier compacto contenido en el pseudointerior del cubo de Hilbert,

$$PI(Q):=\prod_{n=1}^{\infty} \mathring{I}_n \subset Q,$$

o en la pseudofrontera del mismo,

$$PB(Q):=Q\setminus PI(Q),$$

son conjuntos Z.

Observemos que el Teorema de Z-desanudamiento en Q implica que si A y B son subconjuntos Z del cubo de Hilbert tales que son homeomorfos entonces $Q\setminus A$ es homeomorfo a $Q\setminus B$. Chapman demostró algo mucho más fuerte, no requiere que A y B sean homeomorfos sino que tengan la misma "forma" (shape). En particular si tienen la misma "forma" entonces tienen el mismo tipo de homotopía. Lo que Chapman mostró fue que si A y B son subconjuntos Z del cubo de Hilbert entonces $Q\setminus A$ es homeomorfo a $Q\setminus B$ si y sólo si $sh(A)=sh(B)$. A este resultado se le conoce como el <u>Teorema de Complementación de Chapman</u>.- De este hecho se sigue que si X es un subconjunto Z del cubo de Hilbert el cual es homeomorfo a éste entonces $Q\setminus X$ es homeomorfo a $Q\setminus\{0\}$.

Como el cubo de Hilbert es homogéneo y es homeomorfo a su cono, tenemos que $Qx[0,1)$ es homeomorfo a $Q\setminus\{0\}$.

Supongamos que X es la unión de dos subespacios X_1,X_2 tales que tanto X_1,X_2 como su intersección son homeomorfos al cubo de Hilbert y que tal intersección es un subconjunto Z de ambos subespacios, esto implica que existen homeomorfismos

$$h_1:X_1 \longrightarrow Qx[0,1],$$

$$h_2:X_2 \longrightarrow Qx[1,2],$$

$$h_3:X_1\cap X_2 \longrightarrow Qx\{1\}.$$

Observemos que $h_1(X_1\cap X_2)$ no necesariamente es igual a $Qx\{1\}$. Pero, como ambos son subconjuntos Z de $Qx[0,1]$ y $h_3h_1^{-1}/h_1(X_1\cap X_2)$ es un homeomorfismo entre ellos, tenemos que, por el Teorema de Z-desanudamiento en Q, existe un homeomorfismo

$$f_1:Qx[0,1] \longrightarrow Qx[0,1]$$

tal que

$$f_1/_{h_1(X_1 \cap X_2)} = h_3 h_1^{-1}/_{h_1(X_1 \cap X_2)}.$$

De donde

$$\bar{h}_1 := f_1 h_1 : X_1 \longrightarrow Qx[0,1]$$

es un homeomorfismo que cumple con que $\bar{h}_1(X_1 \cap X_2) = Qx\{1\}$.

También el claro que $h_2(X_1 \cap X_2)$ no necesariamente es igual a $Qx\{1\}$. Como ambos son subconjuntos Z de $Qx[1,2]$ y $\bar{h}_1 h_2^{-1}/_{h_2(X_1 \cap X_2)}$ es un homeomorfismo entre ellos, por el Teorema de Z-desanudamiento en Q, existe un homeomorfismo

$$f_2 : Qx[1,2] \longrightarrow Qx[1,2]$$

tal que

$$f_2/_{h_2(X_1 \cap X_2)} = \bar{h}_1 h_2^{-1}/_{h_2(X_1 \cap X_2)}.$$

Así que

$$\bar{h}_2 := f_2 h_2 : X_2 \longrightarrow Qx[1,2]$$

es un homeomorfismo que satisface que $h_2(X_1 \cap X_2) = \bar{h}_1(X_1 \cap X_2)$. Por lo tanto podemos definir el homeomorfismo

$$h : X \longrightarrow Qx[0,2]$$

como

$$h(x) := \begin{cases} \overline{h}_1(x) & \text{si } x \in X_1 \\ \overline{h}_2(x) & \text{si } x \in X_2 \end{cases} .$$

Por lo tanto hemos demostrado que si X es la unión de dos subespacios X_1, X_2 tales que tanto X_1, X_2 como su intersección son homeomorfos al cubo de Hilbert y que tal intersección es un subconjunto Z de ambos subespacios entonces X es homeomorfo al cubo de Hilbert. Handel mejoró este resultado probando que: Si X es la unión de dos subespacios X_1, X_2 tales que X_1, X_2 así como su intersección son homeomorfos al cubo de Hilbert y, además, la intersección es un subconjunto Z de alguno de los subespacios entonces X es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Sea

$$h: Q \longrightarrow Q$$

un homeomorfismo. Es claro que $Q \times \{0,1\}$ es un subconjunto Z de $Q \times I$. Definimos

$$f: Q \times \{0,1\} \longrightarrow Q \times \{0,1\}$$

como

$$f(x,s) := \begin{cases} (h(x),0) & \text{si } s=0 \\ (x,1) & \text{si } s=1 \end{cases} .$$

Como h *y* 1_Q *son homeomorfismos,* f *es un homeomorfismo. Ahora, por el Teorema de Z-desanudamiento en* Q*, existe un homeomorfismo*

$$H:QxI \longrightarrow QxI$$

tal que

$$H(x,0)=(h(x),0) \quad y \quad H(x,1)=(x,1).$$

De hecho se puede probar que esta función H *puede ser escogida de tal manera que para toda* $t\in I$,

$$H(Qx\{t\})=Qx\{t\},$$

de donde H *tendría la forma*

$$H(x,t)=(\bar{H}(x,t),t).$$

Y, así que, $\bar{H}$ *sería una isotopía entre* h *y* 1_Q*. Por lo tanto, tenemos que en el cubo de Hilbert todo homeomorfismo es isotópico a la función identidad. Y por lo ya dicho anteriormente, todo haz fibrado localmente trivial con fibra el cubo de Hilbert es trivial.* <u>*Chapman*</u> *y* <u>*Ferry*</u> *generalizan este resultado mostrando que si*

$$f:E \longrightarrow Y$$

es una fibración de Hurewicz, con Y *un ENR (retracto de algún abierto de* $\mathbb{R}^n$ *), tal que para cada* $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ *es homeomorfa al cubo de Hilbert entonces existe un homeomorfismo*

$$h:E \longrightarrow YxQ$$

tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y x Q \arrow[d, "\Pi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto quiere decir que f es la función proyección de un producto.

Dada una función continua

$$f : E \longrightarrow Y,$$

una <u>*sección*</u> *de f es otra función continua*

$$s : Y \longrightarrow E$$

tal que

$$fs = 1_Y.$$

Esto nos permite mencionar una versión "parametrizada" de la homogeneidad del cubo de Hilbert debida a Wong, y es la siguiente: Si la función proyección

$$\Pi_B : BxQ \longrightarrow B$$

tiene dos secciones

$$s_1, s_2 : B \longrightarrow BxQ$$

entonces existe un homeomorfismo

$$h : BxQ \longrightarrow BxQ$$

tal que

$$hs_1 = s_2 \quad y \quad \Pi_B h = \Pi_B.$$

Una Q-variedad $\mathcal{M}$ es un espacio métrico separable tal que todo punto $x \in \mathcal{M}$ tiene una vecindad compacta homeomorfa al cubo de Hilbert. Se sabe que esta condición es equivalente a que todo punto $x \in \mathcal{M}$ tenga una vecindad abierta homeomorfa a $Qx[0,1)$; o a que tenga una vecindad abierta homeomorfa a algún subconjunto abierto del cubo de Hilbert.

Como ejemplos de Q-variedades podemos mencionar a los subconjuntos abiertos del cubo de Hilbert y a $M^n xQ$, donde M^n es una n-variedad. De hecho, si K es un poliedro entonces Chapman y West demostraron que KxQ es una Q-variedad y, además, que toda Q-variedad es homeomorfa a un poliedro multiplicado por el cubo de Hilbert. Por lo tanto, los únicos ejemplos de Q-variedades son los poliedros multiplicados por el cubo de Hilbert.

Surge la pregunta:

¿ Cuándo dos Q-variedades son homeomorfas ?

J. H. C. Whitehead, tratando de entender la Teoría de Homotopía, de una manera más geométrica, formuló lo que ahora se conoce como la Teoría de Homotopía Simple. Vagamente, dos es *pacios tienen el mismo tipo de homotopía simple si podemos ir de uno al otro por medio de expansiones y contracciones elementales [1]. Sin embargo, si el grupo fundamental es libre o libre abeliano, entonces la homotopía es equivalente a la homotopía simple. Con esto ya podemos contestar a la pregunta anterior diciendo que* $K \times Q$ *es homeomorfa a* $L \times Q$ *si y sólo si* K *y* L *tienen el mismo tipo de homotopía simple. De aquí que si* $\mathcal{M}$ *es una Q-variedad compacta y contraíble entonce* $\mathcal{M}$ *es homeomorfa al cubo de Hilbert.*

Otro resultado que va en esta dirección es el que dice que si $\mathcal{M}$ *y* $\mathcal{N}$ *son dos Q-variedades con el mismo tipo de homotopía entonces* $\mathcal{N} \times [0,1)$ *es homeomorfa a* $\mathcal{M} \times [0,1)$*. De donde se tiene que* $Q \times \mathbb{R}^n \times [0,1)$ *es homeomorfo a* $Q \times [0,1)$*.*

Para terminar mencionaremos que si X *y* Y *son dos poliedros entonces* $X \times Q \times [0,1)$ *es homeomorfo a* $Y \times Q \times [0,1)$ *si y sólo si* X *y* Y *tienen el mismo tipo de homotopía.*

Capítulo IV

Hiperespacios de Conjuntos Convexos

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$cc(X):=\{A\in 2^X \ / \ A \text{ es convexo}\},$$

con la métrica heredada como subespacio de 2^X. A $cc(X)$ se le llama el <u>cc-Hiperespacio</u> de X.

Recordemos que

$$X^{\star}=\{\{x\} \ / \ x\in X\},$$

es claro que $X^{\star}\subset cc(X)$ y que $X^{\star}$ es homeomorfo a X. Veamos que $X^{\star}$ es cerrado en $cc(X)$. Es fácil ver que si $x\in X$ y $B\subset X$ entonces para toda $b\in B$, $\rho(x,b)\leq \rho^1(\{x\},B)$. Sean $B\in\overline{X}^{\star}$ y $\varepsilon>0$. Como $B\in\overline{X}^{\star}$, existe $\{x\}\in X^{\star}$ tal que $\rho^1(\{x\},B)<\frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $b_1,b_2\in B$ entonces

$$\rho(b_1,b_2)\leq\rho(x,b_1)+\rho(x,b_2)\leq 2\rho^1(\{x\},B)<\varepsilon.$$

De aquí que $b_1=b_2$ y, por lo tanto, $B=\{b\}\in X^{\star}$. Esto prueba que $X^{\star}$ es cerrado y que si $cc(X)$ es compacto entonces X es compacto. Mostremos que el inverso es cierto. Supongamos que X es compacto, como $C(X)$ es compacto, basta demostrar que $cc(X)$ es cerrado en $C(X)$. Sea $B\in\overline{cc(X)}$. Esto implica que existe una sucesión $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de elementos de $cc(X)$ tal que $\{A_m\}\xrightarrow[\rho]{} B$. Sean $b_0, b_1\in B$ y $t\in I$, queremos ver que $b=(1-t)b_0+tb_1$ es un elemento de B. Es fácil convencerse de que podemos encontrar sucesiones de puntos de los A_m que converjan a b_0 y a b_1. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{a_{0m}\}\xrightarrow[\rho]{} b_0$ y que $\{a_{1m}\}\xrightarrow[\rho]{} b_1$, con $a_{0m}, a_{1m}\in A_m$. Como la métrica es compatible con las operaciones de espacio vectorial, tenemos que

$$\{(1-t)a_{0m}+ta_{1m}\}\xrightarrow[\rho]{}(1-t)b_0+tb_1=b.$$

Por lo tanto $b\in B$, y de aquí que $cc(X)$ es cerrado en $C(X)$.

Sea $Y=\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso de S^{n-1}, con $n\geq 2$. Para cada $m\in\mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_m : cc(B^n)\longrightarrow[-1,1]$$

como

$$\varphi_m(A):=\sup_{a\in A}\{\langle x_m, a\rangle\},$$

es claro que φ_m es continua. Con estas funciones podemos definir

$$\varphi : cc(B^n)\longrightarrow Q$$

como

$$\varphi(A):=\{\varphi_m(A)\}_{m\in\mathbb{N}}.$$

Debido a que cada φ_m *es continua,* φ *es continua. Veamos que* φ *es inyectiva. Sean* $A,B\in cc(B^n)$ *tales que* $A\neq B$*. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe* $b\in B\setminus A$*. De aquí que existe un hiperplano que separa a* b *de* A*. Pero como* Y *es denso en* S^{n-1}*, podemos suponer que ese hiperplano es ortogonal a* y_k*, para alguna* $y_k\in Y$*, pero esto quiere decir que* $\varphi_k(A)\neq\varphi_k(B)$*, de donde* $\varphi(A)\neq\varphi(B)$*. Por lo tanto, dado que* $cc(B^n)$ *es compacto y* Q *es de Hausdorff,* φ *es un homeomorfismo sobre su imagen, i.e.* φ *es un encaje.*

Afirmamos que la imagen de φ *es un subconjunto compacto, convexo y de dimensión infinita del cubo de Hilbert. De la compacidad de* $cc(B^n)$ *se sigue la compacidad de la imagen de* φ*. Sean* $m\in\mathbb{N}$*,* $t\in I$ *y* $A,B\in cc(B^n)$*, probaremos que*

$$\varphi_m((1-t)A+tB)=(1-t)\varphi_m(A)+t\varphi_m(B).$$

Como para toda $a\in A$ *y para toda* $b\in B$*,*

$$(1-t)\langle x_m,a\rangle+t\langle x_m,b\rangle\leqslant(1-t)\sup_{a\in A}\{\langle x_m,a\rangle\}+t\sup_{b\in B}\{\langle x_m,b\rangle\},$$

tenemos que

$$\varphi_m((1-t)A+tB)\leqslant(1-t)\varphi_m(A)+t\varphi_m(B).$$

Para mostrar la otra desigualdad observemos que como A *y* B *son compactos, existen* $a_0\in A$ *y* $b_0\in B$ *tales que*

$$\varphi_m(A)=\langle x_m,a_0\rangle \qquad y \qquad \varphi_m(B)=\langle x_m,b_0\rangle\ ,$$

de donde obtenemos que

$$(1-t)\varphi_m(A)+t\varphi_m(B)=(1-t)\langle x_m,a_0\rangle+t\langle x_m,b_0\rangle\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{(1-t)a+tb\in\\ \in(1-t)A+tB}}\{(1-t)\langle x_m,a\rangle+t\langle x_m,b\rangle\}=$$
$$=\varphi_m((1-t)A+tB).$$

Por lo tanto

$$\varphi_m((1-t)A+tB)=(1-t)\varphi_m(A)+t\varphi_m(B).$$

Así que la imagen de φ es convexa. Para probar que su dimensión es infinita, basta mostrar que la dimensión de $cc(B^n)$ - es infinita. Ya que $n\geqslant 2$, tenemos que B^n contiene una 2-celda convexa D. Sea $k\geqslant 2$. Existe en D un $2k$-ágono convexo P_{2k} con-lados $S_1,\ldots,S_{2k}$, donde la numeración ha sido escogida de - tal manera que $S_i\cap S_j\neq\emptyset$ si y sólo si $|i-j|\leqslant 1$, $i,j\in\{1,\ldots,2k\}$. Sea Δ_k la k-celda definida como

$$\Delta_k:=\prod_{m=1}^{k} S_{2m-1}\ .$$

Definimos

$$h:\Delta_k\longrightarrow cc(B^n)$$

como

$$h(x_1,\ldots,x_k):=\mathrm{conv}\{x_1,\ldots,x_k\}.$$

Es claro que h es un encaje de Δ_k en $cc(B^n)$. Así que $cc(B^n)$- contiene una k-celda. Por lo tanto, debido a que la $k\geqslant 2$ fue- arbitraria, la dimensión de $cc(B^n)$ es infinita. Ya que la imagen de φ es un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de ℓ_2, por el Teorema de Keller, la imagen de φ es un cubo de Hilbert. Por lo tanto hemos probado que si $n\geq 2$ entonces $cc(B^n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Observemos que si K es un subconjunto convexo, compacto cuya dimensión es, por lo menos, dos entonces esencialmente la misma demostración sirve para probar que $cc(K)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Supongamos que F es un subconjunto de $cc(\mathbb{R}^n)$, diremos que F es una familia convexa si para cada $A,B\in F$ y para cada $t\in I$, se tiene que

$$(1-t)A+tB\in F.$$

Supongamos que F es una familia compacta, convexa y de dimensión infinita de $cc(\mathbb{R}^n)$. Como F es compacta en $cc(\mathbb{R}^n)$, no es difícil mostrar que $\bigcup_{A\in F} A$ es un compacto de $\mathbb{R}^n$. Llamemos

$$K:=\bigcup_{A\in F} A,$$

K claramente es convexo y, además $F\subset cc(K)$. Por la última observación, $cc(K)$ se puede encajar en ℓ_2, de donde podemos encajar a F en ℓ_2. Como F es convexa, compacta y de dimensión infinita, por el Teorema de Keller, F es homeomorfa al cubo de Hilbert.

Sea $n\geqslant 2$. Sabemos que $cc(B^n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Consideremos el conjunto

$$\Xi:=\{A\in cc(B^n)\ /\ A\cap S^{n-1}\neq\phi\},$$

afirmamos que Ξ es un conjunto Z del cubo de Hilbert, pues dada $0<\varepsilon<1$, la función

$$\Psi_\varepsilon:cc(B^n)\longrightarrow cc(B^n)\setminus\Xi$$

definida como

$$\Psi_\varepsilon(A):=(1-\varepsilon)A$$

satisface la desigualdad $\rho^1(A,\ \Psi_\varepsilon(A))<\varepsilon$. Además, Ξ es contraíble en sí mismo ya que la función

$$\zeta:\Xi x I\longrightarrow\Xi$$

definida como

$$\zeta(A,t):=\overline{V}_{2t}(A)\cap B^n$$

es una contracción.

Sea

$$\xi:cc(B^n)\longrightarrow Q$$

un homeomorfismo. Debido a que Ξ *es un conjunto Z del cubo de Hilbert y* ξ *es un homeomorfismo,* $\xi(\Xi)$ *es un conjunto Z del cubo de Hilbert. Ya que el cubo de Hilbert es homogéneo, si* $p\in Q$ *entonces* $\{p\}$ *es un conjunto Z de Q.*

Dado que $\xi(\Xi)$ *y* $\{0\}$ *tienen el mismo tipo de homotopía, por el Teorema de Complementación de Chapman, tenemos que* $Q\setminus\xi(\Xi)$ *es homeomorfo a* $Q\setminus\{0\}$. *Y de aquí se tiene que, como* $cc(B^n)\setminus\Xi = cc(\mathring{B}^n)$, $cc(\mathring{B}^n)$ *es homeomorfo a* $Q\setminus\{0\}$, *que a su vez es homeomorfo a* $Qx[0,1)$, *puesto que el cono de Q es homeomorfo a Q.*

Dada $A\in cc(\mathbb{R}^n)$ *definimos*

$$|A| := \max_{a\in A}\{|a|\}.$$

Con esto podemos definir la función

$$\gamma: cc(\mathbb{R}^n) \longrightarrow cc(\mathring{B}^n)$$

como

$$\gamma(A) := \frac{1}{1+|A|}\,A,$$

claramente γ *es continua, y su inversa*

$$\gamma^{-1}: cc(\mathring{B}^n) \longrightarrow cc(\mathbb{R}^n)$$

está definido como

$$\gamma^{-1}(A) := \frac{1}{1-|A|} A.$$

Por lo tanto, $cc(\mathring{B}^n)$ *es homeomorfo a* $cc(\mathbb{R}^n)$*. De donde* $cc(\mathbb{R}^n)$ *es homeomorfo a* $Q\setminus\{0\}$*, el cual es homeomorfo a* $Qx[0,1)$*.*

Como sabemos $cc(B^2)$ *es homeomorfo al cubo de Hilbert. - La pregunta que surge es:*

¿ Cuáles subconjuntos del plano tienen su cc-hiperespacio homeomorfo al cubo de Hilbert ? (☆).

Nadler, Quinn y Stavrakas [12] contestan parcialmente - esta pregunta mostrando que si X *es un subcontinuo de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $cc(X)$ *es homeomorfo al cubo de Hilbert entonces* X *es una 2-celda.*

Uno podría sospechar que este resultado es cierto para- $\mathbb{R}^n$*, con* $n>2$*, pero no, y un ejemplo para* $n=3$ *es el siguiente:*

Sea

$$X := B^3 \cup B_2^2$$

donde

$$B_2^2 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Debido a que las dimensiones de B^3 y de B_2^2 son distintas, se tiene que

$$cc(X)=cc(B^3)\cup cc(B_2^2)$$

y

$$cc(B^3)\cap cc(B_2^2)=cc(B_1^2),$$

donde

$$B_1^2:=\{(x,y,0)\in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2\leq 1\}.$$

Es importante observar que en general no es cierto que si $Y=A\cup B$ entonces $cc(Y)=cc(A)\cup cc(B)$.

Sea $\varepsilon>0$, definimos

$$\eta: cc(B^3) \longrightarrow cc(B^3)\setminus cc(B_1^2)$$

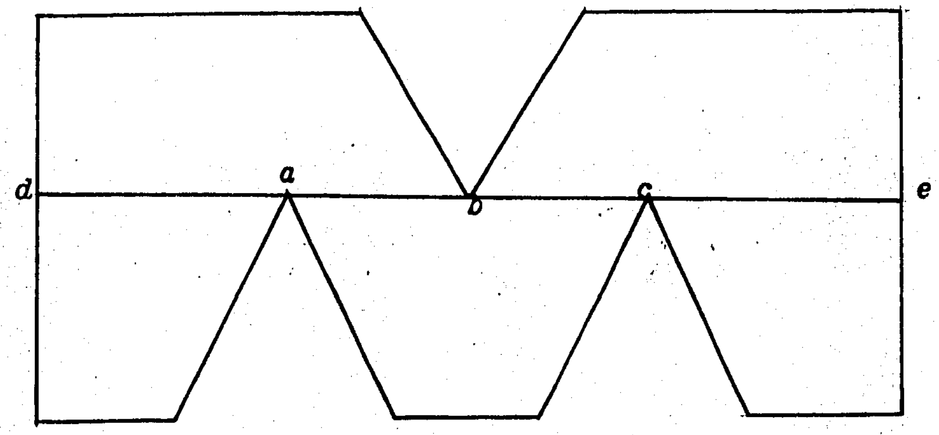
como

$$\eta(A):=\overline{V}_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)\cap B^3.$$

Debido a que η satisface la siguiente desigualdad $\rho^1(A,\eta(A))<\varepsilon$, tenemos que η es continua y que $cc(B_1^2)$ es un conjunto Z de $cc(B^3)$. De esta manera llegamos a que $cc(X)$ es la unión de dos espacios homeomorfos al cubo de Hilbert, cuya intersección es un conjunto Z de uno de ellos y, además, es homeomorfa al cubo de Hilbert, así que, por el Teorema de Handel, $cc(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Por otro lado, no toda 2-celda de $\mathbb{R}^2$ tiene su cc-hiperespacio homeomorfo al cubo de Hilbert, por ejemplo:

Sea X la 2-celda de $\mathbb{R}^2$ del dibujo



los tres puntos a, b, c, de no convexidad local están en el arco convexo Γ que va de d a e. Es claro que si $\varepsilon>0$ es suficientemente pequeña, cualquier subconjunto convexo y compacto de X que esté en la ε-vecindad de Γ en $cc(X)$ es un subarco de Γ, i.e. la ε-vecindad de Γ en $cc(X)$ está contenida en $cc(\Gamma)$, pero la dimensión de $cc(\Gamma)$ es a lo más dos. Por lo tanto $cc(X)$ no es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Sea X un poliedro contenido en $\mathbb{R}^2$ que además sea una 2-celda. Llamemos $LN(X)$ al conjunto de puntos de X en los cuales no es localmente convexo. Así, $LN(X)$ es un subconjunto de los vértices de X. Sea Θ un arco convexo contenido en X que tenga a un punto v de $LN(X)$. Consideremos la recta de-

terminada por Θ y sea Θ^{+} el semiplano para el cual exista una vecindad U de v en $\mathbb{R}^2$ tal que $U\setminus X\subset\Theta^{+}$. En este caso diremos que v determina al lado Θ^{+} de Θ.

Un arco convexo Θ de X se llama <u>singular</u> si contiene en su interior a tres puntos u, v, w de $IN(X)$ tales que el lado de Θ determinado por el punto de en medio, v, sea el opuesto al determinado por u y w.

Después de estas definiciones ya podemos decir que otra respuesta parcial a la pregunta (&) fue dada por Curtis, Quinn y Schori [2], y es la siguiente:

Si X es un poliedro contenido en $\mathbb{R}^2$ y que es una 2-celda entonces $cc(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X no contiene arcos singulares.

Sea

$$\alpha : cc(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

la selección continua la cual asigna a cada subconjunto convexo, compacto y no vacío, A, de $\mathbb{R}^n$ el único punto de A más cercano al origen.

Notemos que las fibras de α son homeomorfas a

$$\mathcal{A} := \{A\in cc(\mathbb{R}^n) \ / \ 0\in A\subset\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \ / \ x_n\geq 0\}\}$$

de hecho no es difícil ver que α *es un haz fibrado localmente trivial con fibra* $\mathcal{S}$. *Además, si* $U\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ *es un abierto y* α *también denota a la restricción a* $cc(U)$, *entonces se prueba que las fibras de* α *son homeomorfas al cubo de Hilbert menos un punto, y en este caso* α *es una fibración de Hurewicz.*

Sea

$$\mathfrak{m}_0 := cc(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cup \{\bar{v} \ / \ v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\}.$$

Si U *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ *y* $k>0$, *sea*

$$(U,k) := \{A\in cc(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \ / \ \alpha(A)\in U \text{ y diám} A>k\}\cup\{\bar{v} \ / \ v\in U\}.$$

Le daremos a $\mathfrak{m}_0$ *la topología que tiene como base a los subconjuntos abiertos de* $cc(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ *y a los subconjuntos de la forma* (U,k).

Sea

$$\psi : \mathfrak{m}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

la función continua definida como

$$\psi(A) := \alpha(A) \qquad \text{si } A\in cc(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$$

$$\psi(\bar{v}) := v \qquad \text{si } v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Observemos que si $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ *entonces* $\psi^{-1}(x)$ *es la compactificación unipuntual de* $\alpha^{-1}(x)$, *de hecho* $\mathfrak{m}_0$ *se construyó para compactificar cada fibra de* α.

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y sea

$$\mathfrak{h} := \psi^{-1}(U)/\sim$$

donde $A \sim \bar{v}$ si y sólo si $\alpha(A)=v$ y $A \not\subset U$. Sea

$$\Pi : \psi^{-1}(U) \longrightarrow \mathfrak{h}$$

la función cociente y sea

$$\bar{\Psi} : \mathfrak{h} \longrightarrow U$$

la función continua con la propiedad de que $\bar{\Psi}\Pi = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
\psi^{-1}(U) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\bar{\Psi}"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

De hecho las fibras de $\bar{\Psi}$ son las compactificaciones unipuntuales de las de α restringida a $cc(U)$ y, por lo tanto, las fibras de $\bar{\Psi}$ son homeomorfas al cubo de Hilbert.

Luis Montejano prueba en [10] que $\bar{\Psi}$ es una fibración de Hurewicz con fibra el cubo de Hilbert. De donde, por el Teorema de Chapman-Ferry, se tiene que $\bar{\Psi}$ es un haz trivial. Así que existe un homeomorfismo

$$\beta : U x Q \longrightarrow \eta_0$$

tal que

$$\bar{\Psi}\beta : U x Q \longrightarrow U$$

es una proyección. Además, ya que la función

$$\chi : U \longrightarrow \eta_0$$

definida como

$$\chi(v) := \bar{v}$$

es continua, por un Teorema de Wong [13] podemos suponer que $\beta(v,0)=\bar{v}$. Por otro lado, $\eta_0 \setminus \chi(U)$ es homeomorfo a $cc(U)$ y, por lo tanto

$$\alpha : cc(U) \longrightarrow U$$

es un haz trivial con fibra $Q x [0,1)$. En consecuencia, $cc(U)$ es homeomorfo a $U x Q x [0,1)$.

Si $U = \mathbb{R}^n$ tenemos que $cc(U)$ es homeomorfo a $Q x [0,1)$, el cual es homeomorfo a $\mathbb{R}^n x Q x [0,1)$.

Por lo tanto hemos demostrado que si U *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *entonces* $cc(U)$ *es homeomorfo a* $U \times Q \times [0,1)$.

Un Corolario importante de este hecho es que si U *y* V *son subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *entonces* $cc(U)$ *es homeomorfo a* $cc(V)$ *si y sólo si* U *y* V *tienen el mismo tipo de homotopía. En particular* U *es contraíble si y sólo si* $cc(U)$ *es homeomorfo a* $Q \times [0,1)$.

Es importante hacer notar que la misma técnica puede ser empleada para mostrar que si X *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$ *entonces* $cc(\mathbb{R}^n) \setminus cc(X)$ *es homeomorfo a* $Q \setminus X^+$, *donde* X^+ *es la unión disjunta de* X *con un punto.*

Para terminar mencionaremos un Corolario del resultado anterior y del Teorema de complementación de Chapman que dice que si X *y* Y *son subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^n$ *entonces* $cc(\mathbb{R}^n) \setminus cc(X)$ *es homeomorfo a* $cc(\mathbb{R}^n) \setminus cc(Y)$ *si sólo si* $sh(X) = sh(Y)$.

Capítulo V

Problemas

El objetivo del presente capítulo es el de presentar algunas de las interrogantes que surgen de manera natural en el estudio de los hiperespacios de conjuntos convexos.

Lo primero que necesitaremos son algunas definiciones.- Sea X un subconjunto de un espacio vectorial real topológico V. Para cada $x,y \in X$, definimos

$$\overline{xy} := \{(1-t)x+ty \ / \ t \in I\},$$

esto es, $\overline{xy}$ es el arco convexo con extremos x y y. Para cada $x \in X$, sea

$$S(x) := \{y \in X \ / \ \overline{xy} \subset X\}.$$

Con esto podemos definir el <u>Núcleo</u> de X, denotado como $\ker X$, como

$$\ker X := \bigcap_{x \in X} S(x).$$

Diremos que un conjunto X es <u>Estrellado</u> si su núcleo es no vacío. Durante todo este capítulo, los conjuntos estrellados que consideraremos serán compactos.

Recordemos que un arco α es la imagen de un encaje, φ_α, de I en X. Un arco α se dice que es <u>Libre</u> si $\varphi_\alpha((0,1))$ es un abierto en X.

Dados un n-simplejo $(n\geq 1)$ σ, *y un vértice* v_0 *de* σ *llamaremos* $\sigma(v_0)$ *al (n-1)-simplejo que se obtiene al quitar el vértice* v_0 *a* σ.

Sea X un poliedro y v_0 *un vértiee de X, definimos*

$$LK(v_0) := \bigcup_{v_0 \in \sigma \in X} \sigma(v_0).$$

Análogamente se define $LK(v_1)$, *donde* v_1 *es una arista del poliedro.*

Sea H un espacio de Banach tal que $2\leq \dim H < \infty$. *Nadler probó que si X es un subconjunto estrellado de H tal que su núcleo tiene interior no vacío entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert. Esto nos sugiere la pregunta:*

> *¿ Si X es un subconjunto estrellado de un espacio de Banach H* $(\dim H \geq 2)$ *tal que kerX tiene interior no vacío entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert ?*

Observemos que el espacio X del ejemplo de la página 53 es tal que cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert, pero kerX tiene interior vacío pues $\dim \ker X = 2$. *Meditando un poco en este espacio y tomando en cuenta que el cc-hiperespacio de un arco convexo es de dimensión finita podemos preguntarnos:*

> *¿ Si X es un subconjunto estrellado de un espacio de Banach tal que la* $\dim \ker X \geq 2$ *entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert ?*

¿ Si X es un subconjunto estrellado y sin arcos libres de un espacio de Banach bidimensional tal que ker$X$ tiene más de un punto entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert ?

También, tomando en cuenta que el cc-hiperespacio de un punto como el de un arco convexo es de dimensión finita, se nos ocurre la pregunta:

¿ Si X es un poliedro tal que:

(1) para todo vértice v_0, LK(v_0) es conexo y tiene más de un punto;

y

(2) para cada arista v_1, LK(v_1) es conexo; entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert ?

Recordemos que Curtis, Quinn y Schori probaron que si X es un poliedro en el plano que es una 2-celda sin arcos singulares entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Observemos que no es difícil ver que una n-celda ($n \geq 2$) todo conjunto convexo compacto, distinto de un arco convexo, tiene una vecindad de dimensión infinita en el cc-hiperespacio de la n-celda. Pensando en esto y en el ejemplo de la página 55 se nos ocurre definir que, dado un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$, un arco convexo J de X es un <u>arco feo</u> si tiene una vecindad de dimensión finita en cc(X). Y que el arco convexo J de X es un <u>arco refeo</u> si existe una $\varepsilon > 0$ tal que la ε-vecin-

dad de J en cc(X) está contenida en cc(J). Es claro que todo arco singular es un arco refeo y que todo arco refeo es un - arco feo, pero:

¿ Si X es un poliedro en el plano que además es una 2-celda, $J \subset X$ es un arco convexo entonces son equivalentes las afirmaciones:

(1) J es un arco singular.

(2) J es un arco refeo.

(3) J es un arco feo ?

Pensando en el resultado de Curtis, Quinn y Schori tenemos, por un lado las preguntas:

¿ Si X es una 2-celda plana sin arcos feos o- refeos entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert ?

Y en general:

¿ Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es una n-celda sin arcos feos o - refeos entonces cc(X) es homeomorfo al cubo de Hilbert ?

Por el otro lado, recordando que si $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ es un - abierto entonces cc(U) es homeomorfo a $U \times Q \times [0,1)$, se tiene:

¿ Si X es un poliedro en el plano sin arcos - feos o refeos entonces cc(X) es homeomorfo a $Q \times X$?

Ahora consideremos un subconjunto abierto U de un espacio de Banach H de dimensión infinita. Es una consecuencia inmediata de un Teorema de Torúczyk, detectada por Nguyen To Nhu, que $cc(U)$ es homeomorfo a $U\times cc(H)$. Observemos que el caso en el que H es de dimensión finita se probó en el capítulo IV, pues $cc(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $Q\times[0,1)$. En base a esto nos preguntamos:

¿ Si U es un subconjunto abierto del cubo de Hilbert o de la pseudofrontera del mismo entonces $cc(U)$ es homeomorfo a $Q\times U$ o a $U\times cc(PB(Q))$, respectivamente ?

Sea

$$\ell_2^f := \{\{x_n\} \in \ell_2 \ / \text{ existe } N\in\mathbb{N} \text{ tal que si } n\geq N \text{ entonces } x_n=0\}.$$

Debido a que Luis Montejano demostró que $cc(\ell_2^f)$ es homeomorfo a la pseudofrontera del cubo de Hilbert, tenemos la siguiente pregunta:

¿ Si U es un subconjunto abierto de ℓ_2^f entonces $cc(U)$ es homeomorfo a $U\times PB(Q)$?

Sea Y un subconjunto de un espacio vectorial. Definimos

$$I(Y) := \{\, \overline{xy} \subset Y \}.$$

Por último nos surge la pregunta:

¿ Si U es un subconjunto abierto de un espacio de Banach H, entonces $I(U)$ es homeomorfo a $UxI(H)$?

De esta manera terminamos el presente trabajo deseando que sirva de motivación para el lector para adentrarse en el fascinante mundo de los Hiperespacios.

REFERENCIAS

1 M. Cohen. A COURSE IN SIMPLE-HOMOTOPY THEORY. New York. Springer-Verlag, 1970.

2 D.W. Curtis, J. Quinn, and R.M. Schori. THE HYPERSPACE OF COMPACT CONVEX SUBSETS OF A POLYHEDRAL 2-CELL. - Houston J. Math., 3(1977).

3 D.W. and R.M. Schori. HYPERSPACES OF PEANO CONTINUA ARE HILBERT CUBES. Fund. Math. 101(1978).

4 L. Danzer, B. Grünbaum and V. Klee. HELLY'S THEOREM AND ITS RELATIVES, in: V. Klee, ed., Convexity. Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the - American Mathematical Society. (American Math. Society, Providence RI. 1963)

5 J. Dieudonné. FOUDATIONS OF MODERN ANALYSIS. New York.- Academic Press, 1969.

6 J.G. Hocking and G.S. Young. TOPOLOGY. Reading, Mass. - Addison-Wesley, 1961.

7 A. Illanes M. OPEN MAPAS AND MONOTONE WHITNEY MAPS. - Preprint.

8 J.L. Kelley. HYPERSPACES OF A CONTINUUM. Trans. Amer. - Math. Soc., 52(1942).

9 P. McMullen and G. Shephard. CONVEX POLYTOPES AND THE - UPPER BOUND CONJETURE. London. Cambridge University - Press, 1977. No. 3.

10 L. Montejano. THE HYPERSPACE OF COMPACT CONVEX SUBSETS- OF AN OPEN SUBSET OF $\mathbb{R}^n$. Preprint.

11 S.B. Nadler Jr. HYPERSPACES OF SETS. New York. Marcel - Dekker Inc. 1978.

12 S.B. Nadler Jr., J. Quinn, and N.M. Stavrakas. HYPER - SPACES OF COMPACT CONVEX SETS. Pas. J. Math. Vol. 83, - No. 2, 1979.

13 R.Y.T. Wong. ON HOMEOMORPHISMS OF INFINITE-DIMENSIONAL- BUNDLES III. Trans. Amer. Math. Soc. 191(1974).

Indice