



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

**DINAMICA GENERADA POR HOMEOMORFISMOS
DEL CIRCULO**

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

ANA MARGARITA GUZMAN GOMEZ

México, D. F.

1985





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

P R O L O G O

A muchos estudiantes de matemáticas les queda la visión de que esta ciencia es fundamentalmente deductiva y que un matemático es aquel que tiene habilidad de encontrar demostraciones de ciertos enunciados ya planteados. Si bien el lenguaje formal es indispensable para garantizar la coherencia interna de la matemática en general no permite ver que para llegar a detectar una propiedad o comportamiento importante de un determinado modelo, o a la definición de algún modelo es necesario de todo un proceso de trabajo previo.

En este trabajo se exponen algunos resultados acerca de la dinámica generada por homeomorfismos del círculo que conservan la orientación, tomando en cuenta dos elementos acerca de nuestra concepción de lo que es la matemática.

a) La matemática, como cualquier ciencia surge y se desarrolla de la necesidad del hombre de transformar y conocer la naturaleza, dado el nivel de desarrollo socioeconómico en su momento.

b) El método formal que toma en su exposición no corresponde al proceso de descubrimiento, si bien no existe una receta para "descubrir", pensamos que un elemento que no se puede olvidar, es partir de casos particulares, muchas veces observaciones experimentales buscando ciertas relaciones, sintetizarlas hasta lograr enunciarlas en forma precisa y poder así buscar una demostración. En esta parte lo esencial es lograr la síntesis de esas relaciones para después proce-

der así buscar una demostración. En esta parte lo esencial es lograr la síntesis de esas relaciones para después proceder a la generalización.

Sin embargo el proceso de construir la matemática no termina logrando enunciados lógicamente coherentes. La permanencia de ciertos resultados queda determinada en tanto a su necesidad dentro de la práctica social (en particular aplicaciones y necesidades de otras ciencias o de la tecnología o bien la "completas" de algunas ramas de la propia matemática). A este respecto conocemos de antemano que no queda reflejado en nuestro trabajo.

En la introducción tratamos de bosquejar el desarrollo de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y - en éste contexto ubicar como un problema particular el análisis de flujos en toros y una forma de atacarlo es mediante el estudio de la dinámica generada por homeomorfismos del círculo.

En el capítulo 1 se plantea un problema físico: el movimiento de partículas bajo la acción de ciertos resortes; a través de este ejemplo se ilustra la construcción de un homeomorfismo del círculo y la relación de su dinámica con el movimiento de partículas. Se aprovecha este ejemplo para describir la dinámica de los homeomorfismos más simples: las rotaciones.

El capítulo 2 trata el caso de homeomorfismos que generan órbitas periódicas; partiendo de ejemplos particulares y del comportamiento ya conocido de las rotaciones, se llegan a establecer dos conceptos fundamentales: el ρ -límite y el número rotacional de un homeomorfismo dado. Puede ser que en esta parte se "abuse" en la forma de exponer, al intentar redescubrir éstos conceptos y sus propiedades. Sin embargo consideramos que de ésta manera queda más claro la necesidad de estos conceptos y la forma matemática que toman.

En el capítulo 3, se trata el caso de homeomorfismos que no tienen órbitas periódicas. Al construir los ejemplos nos dimos cuenta que bajo pequeñas variantes de las construcciones se obtenían homeomorfismos "cualitativamente distintos entre sí". Esto nos llevó a intentar clasificarlos. Para hacerlo fueron importantes dos cosas, el remitirse a rotaciones (o sea los homeomorfismos más sencillos) y lograr incluir que lo que determina las clases son, la rotación que está asociada al homeomorfismo, así como lo que después llamaremos ángulo entre dos órbitas e índice de un homeomorfismo. Es interesante el proceso que nos llevó a estos conceptos - partiendo de algo tan "vago", hasta llegar a poder visualizar cierto tipo de homeomorfismos e intentamos reproducir la experiencia en la exposición.

Este trabajo se pudo llevar a cabo gracias a la liberación de horas por un semestre que obtuvimos varios ayudantes de profesor de la Facultad de Ciencias y que a pesar de la desconfianza manifestada por los miembros del CDM y del hostigamiento abierto del personal académico de derecha, todos terminamos nuestros trabajos en el plazo acordado.

Este trabajo se hizo con la colaboración y apoyo de José Antonio Gómez, Javier Pulido, Guillermo Gómez, Jesús López Santiago López de Medrano, José Santos, Pilar Martínez, Lino Samaniego, Marco Zepeda, Faustino Hernández, Urbano, Sra. Chabela, Maru, Arturo López.

I N D I C E.

	Pág.
INTRODUCCION.	1
CAPITULO I. GENERALIDADES	
1. Resortes, Toros y Homeomorfismos.	7
2. Levantamientos.	28
CAPITULO II.	
HOMEOMORFISMOS CON ORBITAS PERIODICAS Y LOS CONCEPTOS DE ω -LIMITE Y NUMERO ROTACIONAL.	
1. Ejemplos.	35
2. Orden y Comportamiento asintótico de una órbita.	42
3. Rotación Promedio de un Homeomorfismo.	46
CAPITULO III. HOMEOMORFISMOS SIN ORBITAS PERIODICAS.	
1. Orden.	55
2. Ejemplos.	58
3. Propiedades y otros Conceptos involucrados.	78
4. Clasificación de Homeomorfismo con número rotacional irracional.	90
ANEXO AL CAPITULO II.	107
ANEXO AL CAPITULO III.	109
BIBLIOGRAFIA.	151

I N T R O D U C C I O N .

Una de las fuentes más ricas de la matemática, sobre todo en los inicios del capitalismo ha sido el estudio de problemas físicos, en particular del movimiento mecánico, al intentar utilizar éste y comprenderlo se han desarrollado disciplinas como el Cálculo Diferencial e Integral y las Ecuaciones Diferenciales.

En particular uno de los primeros problemas que se atacaron con esta herramienta fue el del movimiento de los planetas, más generalmente: la mecánica celeste. La gran precisión de las predicciones en tanto a la posición de los cuerpos celestes obtenida a través de las soluciones a las ecuaciones diferenciales, consolidó y desarrolló esta rama de la matemática.

Si se plantean las ecuaciones diferenciales correspondientes al problema del movimiento de dos cuerpos que se mueven bajo la acción de la fuerza gravitacional, se pueden encontrar las soluciones explícitamente, de las cuales se obtiene información exhaustiva del movimiento de los cuerpos.

Sin embargo si este mismo problema se plantea para tres o más cuerpos, la situación se complica mucho más. Sólo para casos muy especiales se pueden obtener soluciones en términos de integrales de funciones elementales y aún en estos casos el análisis de éstas es bastante complicado.

Una forma de obtener información es aproximando numéricamente las soluciones, en la actualidad la aproximación numérica juega un papel muy importante.

Sin embargo de esta forma sólo se pueden encontrar -- aproximaciones a un determinado número de soluciones y en un tiempo finito.

Poincaré, refiriéndose al problema de los n-cuerpos, marcaba algunas preguntas clave:

"¿Algunos de los cuerpos permanecerán siempre en una región determinada del espacio o se pueden escapar al infinito? ¿La distancia entre dos de estos cuerpos decrecerá indefinidamente o al contrario, permanecerá siempre entre límites definidos?".

El conocimiento aproximado de unas cuantas soluciones no resuelve estas preguntas. En la búsqueda de resolverlas, a finales del siglo pasado se empieza a desarrollar la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

Ésta ataca problemas tales como:

a) Si las soluciones a una ecuación diferencial están acotadas o no, b) si hay soluciones periódicas, c) si para tiempos suficientemente grandes algunas soluciones se van aproximando a un comportamiento especial, ¿cuál es este comportamiento?, ¿cuáles son las condiciones iniciales para las cuales el comportamiento asintótico sea uno determinado?, ¿qué sucede al perturbar una solución?, ¿qué sucede si la misma ecuación diferencial es modificada un poco?.

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales no sólo se ha utilizado en el estudio de sistemas mecánicos, ésta es una herramienta muy importante en ciencias naturales y tecnología, por ejemplo en otros campos de la física como: acústica, óptica, hidrodinámica, etc. y en ecología, química, ingeniería, etc.

En este trabajo expondremos una cuestión particular: la dinámica generada al iterar homeomorfismos del círculo en el círculo que conservan la orientación.

Esbozaremos cómo es que surge el estudio de este problema.

Una idea clave en el trabajo de Poincaré fue ver a las soluciones de una ecuación diferencial como función de las condi

ciones iniciales que determinan el movimiento y al tiempo como un parámetro. Esto lleva, como ejemplificaremos más adelante el estudio de "flujos" en ciertas superficies (más generalmente en variedades).

Una técnica usada para el análisis de flujos es lo que se conoce como el mapeo de Poincaré.

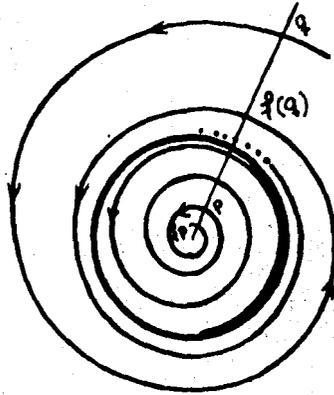
Esbozaremos la construcción de este mapeo. Por simplicidad tomaremos un flujo en una superficie.

Sea C una curva que corte a las trayectorias de un flujo de forma transversal. El mapeo de Poincaré será un mapeo

$$f : S \subset C \rightarrow C$$

que a cada punto p de S le asocia el punto en el cual la trayectoria que pasa por p corta por primera vez a C (después de p)*

* f está definido en un subconjunto S de C donde se puede garantizar que las trayectorias que pasan por S vuelven alguna vez a C . Que exista una primera vez, lo garantiza el hecho de que C sea transversal al flujo.



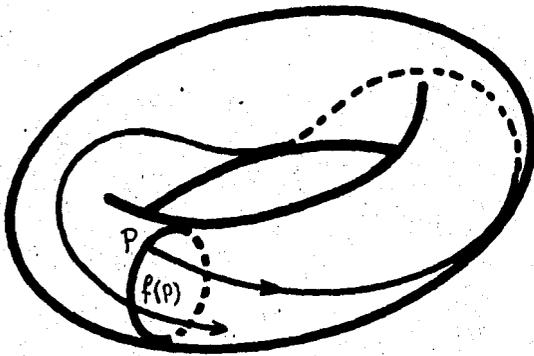
Para estudiar el comportamiento asintótico de una trayectoria (o sea su comportamiento cuando el tiempo tiende a infinito), una gran parte del análisis se reduce al estudio de las interacciones del mapeo de Poincaré.

Este mapeo reduce la dimensión del problema y discreti

za el tiempo, es decir, en lugar de tener curvas en una superficie se tienen sucesiones contenidas en una curva.

Si en particular nos interesa el flujo sobre un toro, bajo ciertas hipótesis y haciendo cambios de coordenadas adecuadas, se puede conseguir que un meridiano del toro sea transversal al flujo y que ahí quede definido el mapeo de Poincaré*

En este caso dicho mapeo será un homeomorfismo del círculo en el círculo que conserva la orientación.



* Para ver esto detalladamente consúltese (5)

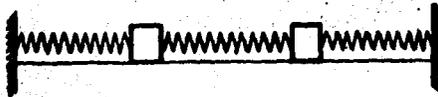
CAPITULO I.

GENERALIDADES

1. RESORTES, TOROS Y HOMEOMORFISMOS.

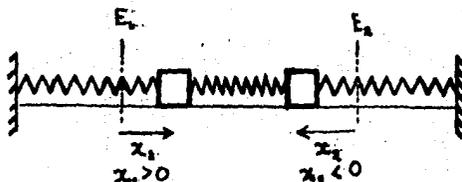
Comenzaremos planteando un problema que nos conducirá al estudio de ciertos flujos sobre toros y veremos cómo en este caso el comportamiento asintótico de las trayectorias se puede conocer a través de las iteraciones del mapeo de Poincaré. Aprovecharemos también este ejemplo para caracterizar a la dinámica generada por los homeomorfismos del círculo más sencillos: las rotaciones.

Estudiaremos la dinámica de dos cuerpos, restringidos a moverse sobre una línea, los cuales están unidos por tres resortes, dos de ellos sujetos en uno de sus extremos a paredes.



Supondremos que las masas de los cuerpos son iguales y que las constantes de elasticidad de los resortes externos son iguales a k_1 , y la del resorte de enmedio es k_2 . Además supondremos que no hay fricción.

Para estudiar esta dinámica representaremos a cada posible posición de los cuerpos con dos variables x_1 y x_2 , x_1 representará el desplazamiento que tiene el centro de masa del primer cuerpo con respecto a su punto de equilibrio que denotaremos por E_1 y x_2 el desplazamiento que tiene el segundo con respecto a E_2 . Convenimos en que $x_1 \approx 0$ si el cuerpo se encuentra a la derecha de E_1



Podemos describir el movimiento a través de una función que a cada tiempo le asocie la posición de las partículas

$$t \longmapsto (x_1(t), x_2(t))$$

Idealizando este sistema (por ejemplo; suponiendo que la constante de elasticidad de los resortes no depende del tiempo, que no hay factores externos que lo perturben, etc.), se puede modelar por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{m} x_1 + \frac{k_2}{m} x_2$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m} x_1 - \frac{k_1+k_2}{m} x_2$$
(1)

Se puede ver que con este modelo basta dar la posición inicial y la velocidad inicial de cada partícula para que el movimiento quede totalmente determinado. O sea que el sistema (1) junto con la condición inicial

$$x_1(t_0) = x_{10} \quad \dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_{10}$$

$$x_2(t_0) = x_{20} \quad \dot{x}_2(t_0) = \dot{x}_{20}$$

tiene una solución única.

Observemos que el sistema (1) nos muestra que la aceleración de cada cuerpo, está en función de las posiciones de los dos cuerpos, en este caso se dice que está acoplado.

En estos casos se acostumbra buscar otras variables que nos conduzcan a un sistema "desacoplado" o sea que la segunda derivada de cada variable esté como función únicamente de esa misma variable.

En este caso definiendo las nuevas variables como:

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

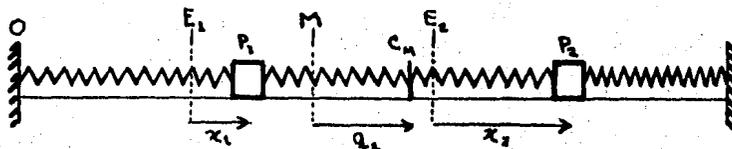
El sistema (1) se transforma en:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{k_1}{m} q_1 \quad (2)$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{k_1 + 2k_2}{m} q_2$$

Daremos una interpretación de las variables q_1 , q_2 .

Sea P_1 el punto donde está el centro de masa del primer cuerpo (a un tiempo fijo) y P_2 donde está el segundo, C_M el centro de masa de los dos cuerpos, O el extremo izquierdo del primer resorte y M el punto medio entre E_1 y E_2 .



Tenemos que:

$$OC_M = \frac{OP_1 + OP_2}{2} = \frac{OE_1 + x_1 + OE_2 + x_2}{2} = OM + q_1$$

De donde q_1 está representando el desplazamiento del centro de masa de los cuerpos, con respecto a M .

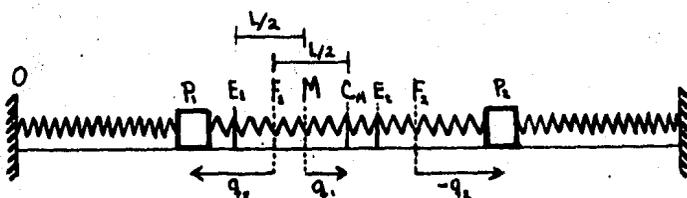
La posición del primer cuerpo respecto al centro de masa del sistema está dada por

$$\begin{aligned} C_M P_1 &= OP_1 - OC_M = OE_1 + x_1 - \frac{OE_1 + x_1 + OE_2 + x_2}{2} = \\ &= OE_1 - OM + \frac{x_1 - x_2}{2} = ME_1 + q_2 \end{aligned}$$

Como ME_1 no depende de la posición de los cuerpos, q_2 es una medida indirecta de la desviación de los cuerpos con respecto al centro de masa del sistema (recordemos que las masas son iguales, por lo que C_M es el punto medio entre P_1 y P_2).

Para aclarar la idea, llamemos L a la longitud del resorte de enmedio sin estirar y sean F_1 y F_2 los puntos que distan entre sí L y cuyo punto medio es C_M . En estos términos

$$q_2 = F_1 P_1 \quad \text{y} \quad -q_2 = F_2 P_2$$



Además tenemos que $2q_2$ es la elongación que sufrió el resorte de enmedio.

Para el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, Poincaré introdujo el concepto de espacio fase.

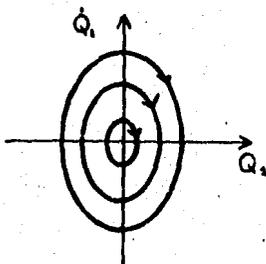
En este caso el espacio fase será \mathbb{R}^4 . Cada uno de sus puntos representará a una cuarteta $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$. Una curva fase es la imagen de la función $\varphi(t) = (q_1(t), \dot{q}_1(t), q_2(t), \dot{q}_2(t))$, donde $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son soluciones del sistema (2). Como dadas las condiciones iniciales para la posición y la velocidad, hay una sola solución al sistema, entonces por cada punto del espacio fase, pasará una sola curva fase.

Veremos cómo son las curvas fase. Como el sistema (2) está desacoplado, las curvas que tocan el plano $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$, siempre permanecerán en este plano (Nótese que $q_2 = 0$ es una solución de $\ddot{q}_2 = -\frac{k_1 + 2k_2}{m} q_2$).

En nuestro problema que $q_2 = 0$ significa que el resorte de enmedio ^{no} cambia de tamaño, por lo que podemos pensar que -- las dos masas están unidas por una barra rígida. Entonces los -- cuerpos oscilarán paralelamente. Además lo harán en una forma periódica, ya que estamos suponiendo que no hay fricción, y que por tanto se conserva la energía.

Si colocamos las partículas en una posición $q_{10} < 0$ -- inicial con velocidad cero, el centro de masa se irá moviendo hacia M, hasta llegar a éste con una velocidad máxima, pues en ese momento, los resortes de los lados no estarán estirados, después el centro de masa seguirá avanzando, pero disminuyendo su velocidad, pues la resistencia de los resortes será cada vez mayor, --

hasta llegar a tener velocidad cero, en este momento, empezará a retroceder. Con esto y usando la conservación de la energía, tenemos que las curvas fase correspondiente a las condiciones iniciales $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$, serán curvas cerradas en el plano $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ que cortan a los ejes perpendicularmente y que son recorridas en el sentido de las manecillas del reloj mientras transcurre el tiempo



De hecho se puede ver que son elipses.

La energía potencial correspondiente a un resorte está dada por $\frac{1}{2} k (\Delta x)^2$ donde k es la constante de elasticidad del resorte y Δx es la elongación del resorte con respecto a su longitud sin estirar.

De aquí la energía potencial de los resortes de los extremos es

$$U_1 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

y como $q_2 = 0$ entonces $x_1 = x_2 = q_2$ de donde

$$U_1 = k_1 q_1^2$$

La energía cinética es

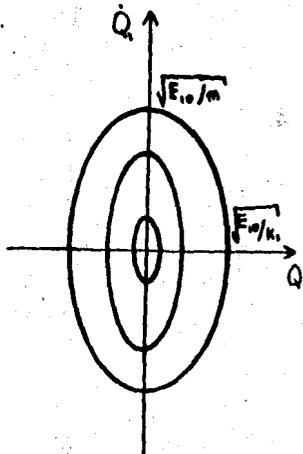
$$T_1 = \frac{1}{2} 2m \dot{q}_1^2 = m \dot{q}_1^2$$

Como la energía $E = T + U$ se conserva, tenemos que q_2 y \dot{q}_1 deben cumplir

$$E_{10} = k_1 q_1^2 + m \dot{q}_1^2$$

Donde E_{10} es una constante dada por la energía total al tiempo inicial.

Con esto vimos que las curvas fase son elipses concéntricas, una por cada valor de E_{10} (Nótese que por el contexto del problema $k_1 > 0$ y $m > 0$)



Veremos ahora cómo son recorridas las elipses al transcurrir el tiempo.

La parametrización de la elipse correspondiente a una energía E_{10} , a través del ángulo θ_1 , indicado en la figura

está dada por:

$$\varphi(\theta_1) = \left(\sqrt{\frac{E_{10}}{\lambda_1}} \sin \theta_1, \sqrt{\frac{E_{10}}{m}} \cos \theta_1 \right)$$

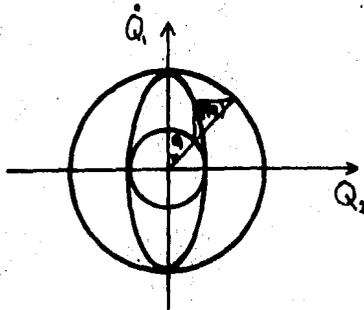
Por lo que si $(q_1(t), \dot{q}_1(t))$ es una curva fase con esta energía, entonces

$$q_2(t) = \sqrt{\frac{E_{10}}{\lambda_1}} \sin \theta_1(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \sqrt{\frac{E_{10}}{m}} \cos \theta_1(t)$$

Derivando la primera igualdad y sustituyendo en la segunda se obtiene que

$$\dot{\theta}_1(t) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}}$$



De forma análoga se obtiene que en el plano $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$ las curvas fase son elipses de la forma

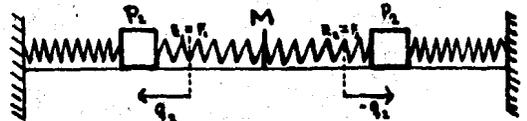
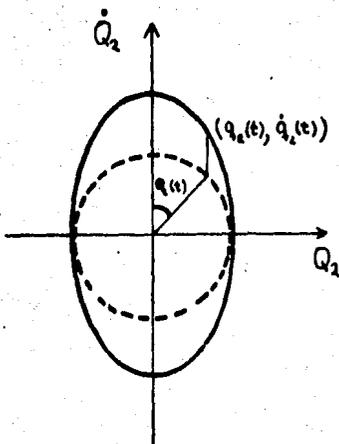
$$E_{20} = (k_1 + 2k_2) q_2^2 + m \dot{q}_2^2$$

recorridas en sentido contrario a las manecillas del reloj. Su velocidad está determinada por

$$\dot{\theta}_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

donde θ_2 es el ángulo análogo a θ .

Estas elipses corresponden a movimientos de las partículas que oscilan acercándose y alejándose periódicamente. Su movimiento es simétrico con respecto a M.



Ahora veremos qué ocurre con las curvas fase que no están en los planos mencionados.

Tomemos E_{10} y E_{20} como las energías correspondientes a la primera y segunda ecuación del sistema (2).

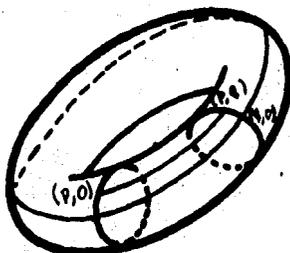
Todas las curvas fase correspondientes a dichas energías formarán una superficie en \mathbb{R}^4 , que llamaremos \mathcal{M} .

Esta tiene la propiedad de que sus proyecciones sobre los planos Q_1, \dot{Q}_1 y Q_2, \dot{Q}_2 son las elipses

$$\mathcal{C}_1 : E_{10} = k_1 q_1 + m \dot{q}_1$$

$$\mathcal{C}_2 : E_{20} = (k_1 + 2k_2) q_2 + m \dot{q}_2$$

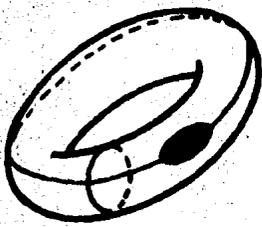
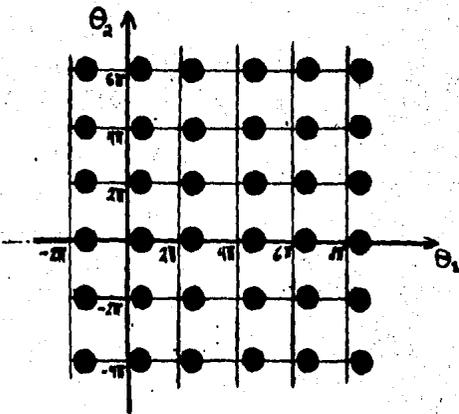
Es más, a esta superficie la podemos pensar como el producto cartesiano de dos elipses \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , y a éste a su vez le podemos dar una representación en \mathbb{R}^3 : la de un "toro" deformado (la superficie de una dona cuyos paralelos y meridianos son elipses).



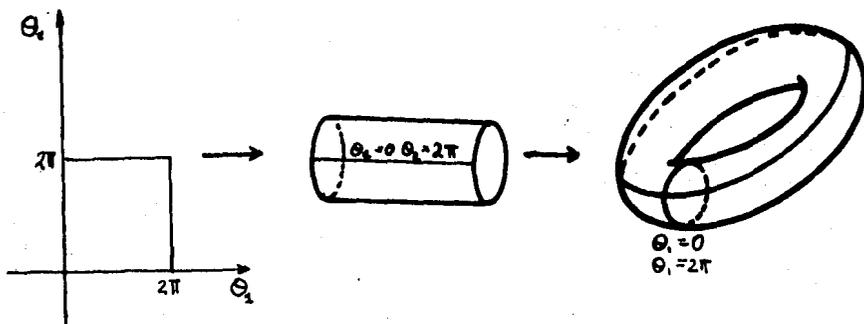
Este "toro" puede estar muy "enredado" en \mathbb{R}^4 , por lo que para ser más precisos trabajaremos con coordenadas.

Cada punto de \mathcal{L}_2 lo podemos especificar a través del ángulo θ_2 (medido como habíamos visto). Si hacemos variar $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tendremos que identificar θ_1 con $\theta_1 + 2\pi$, $\theta_1 + 4\pi$, etc. O sea cada punto de la elipse tendrá una infinidad de coordenadas, todas generadas a través de tomar una y sumarle múltiplos de 2π (positivos o negativos). Lo mismo se puede hacer con \mathcal{L}_2 .

Con esto podemos dar coordenadas a la superficie \mathcal{T} , cada punto del plano representará un punto de \mathcal{T} y todos los puntos de la forma $(\theta_1 + n2\pi, \theta_2 + m2\pi)$ con n y m enteros, representan el mismo punto.



Si tomamos el cuadrado $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, todos los puntos sobre la recta $\theta_2 = 0$ se verán identificados con los de la recta $\theta_2 = 2\pi$ y lo mismo sucederá con las rectas $\theta_1 = 0$ y $\theta_1 = 2\pi$



Ahora veremos cómo son las curvas fase en cada toro.

Recordemos que la velocidad con que son recorridas las elipses está determinada por las derivadas de sus coordenadas:

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 \quad \dot{\theta}_2(t) = \omega_2 \quad (3)$$

donde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

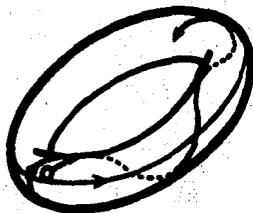
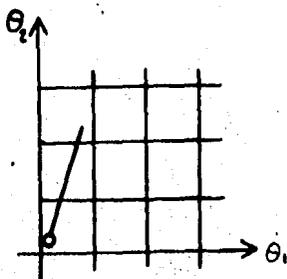
Las curvas fase que buscamos en el toro son aquellas cuyas coordenadas sean las soluciones del sistema (3) en el plano.

Éstas son sencillas de encontrar

$$\theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_{10}$$

$$\theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_{20}$$

Sus imágenes son rectas de pendiente ω_2/ω_1 .



Para el estudio más detallado de estas curvas, nos auxiliaremos del mapeo de Poincaré. Tomemos un meridiano en el toro, (que lo podemos pensar como un círculo). Por cada uno de sus puntos, digamos p , pasa una curva fase, siguiendo ésta llegaremos otra vez a cortar al meridiano original, digamos que la primera vez que lo corta es q .

El mapeo se define como

$$f(p) = q$$

Veremos cual es el mapeo de Poincaré para este caso:

Tomemos al toro generado al fijar las energías E_{10} y E_{20} , tomemos al meridiano del toro dado por $\theta_1 = 0$ y fijamos un punto en él, el de coordenada $\theta_2 = \theta_0$.

Como $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2$, después de un tiempo $T = 2\pi\omega_1$ la curva fase volverá a cortar al meridiano correspondiente a $\theta_1 = 0$ y lo cortará en el punto con coordenada

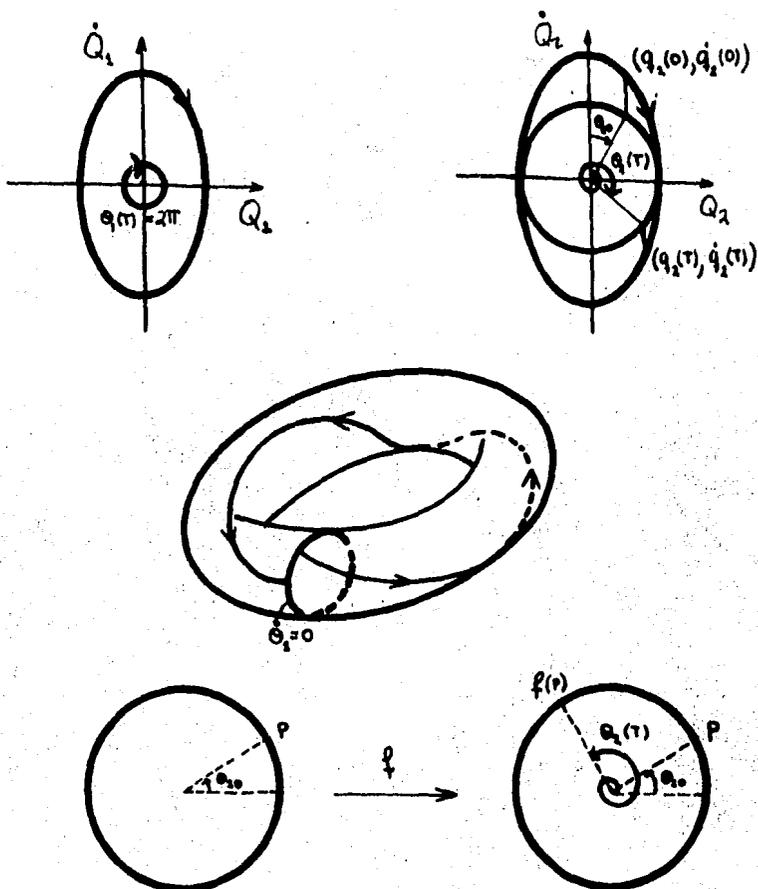
$$\theta_2(T) = \omega_2 T + \theta_{20} = \frac{\omega_2}{\omega_1} 2\pi + \theta_{20}$$

Con esto definimos el mapeo de Poincaré

$$f(p) = q$$

donde p es el punto en el círculo con coordenada θ_{20} y q es el punto con coordenada $\omega_2/\omega_1 2\pi + \theta_{20}$

Por lo que en este caso el mapeo es una rotación de un ángulo $\frac{\omega_2}{\omega_1} 2\pi$.



NOTA: Aunque en el contexto del problema es natural medir los ángulos en el sentido contrario de las manecillas del reloj, es equivalente medirlos en cualquier sentido, siempre y cuando se fije uno. En general se acostumbra medirlos en el sentido contrario de las manecillas del reloj, por eso en el mapeo de Poincaré estamos midiendo el ángulo a partir del eje horizontal y en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Veamos cómo este mapeo nos da información sobre las curvas fase.

Lo primero que nos dice es que la intersección de una curva fase (digamos la correspondiente a condiciones iniciales $\theta_1(0)=0$ $\theta_2(0)=\theta_{20}$) con el meridiano $\theta_1=0$ es el conjunto de puntos:

$$O^+(P) \cup O^-(P)$$

donde

$$O^+(P) = \{f^n(P) = f \circ f \circ \dots \circ f(P)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad O^-(P) = \{f^{-n}(P) = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}(P)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

y donde las coordenadas de p son $\theta_1=0$, $\theta_2=\theta_{20}$. A este conjunto se le llama la órbita de P generada por f .

En nuestro caso f es una rotación de un ángulo $\frac{\omega_2}{\omega_1} 2\pi$.

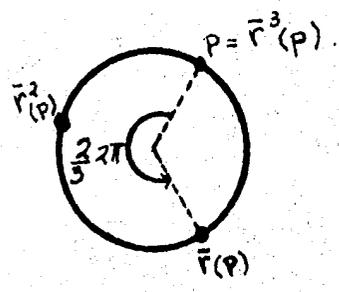
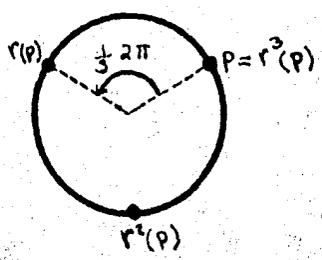
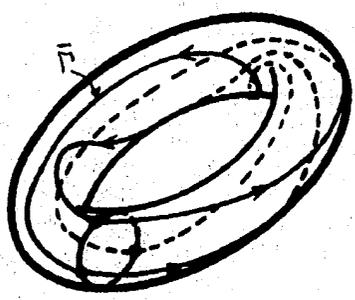
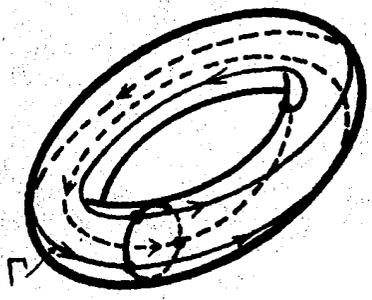
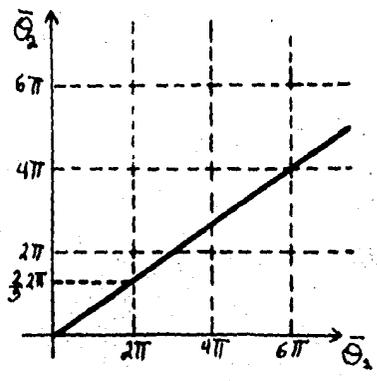
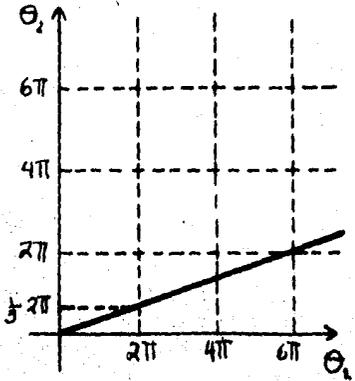
Antes de proseguir, analicemos dos ejemplos concretos:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{3} \qquad \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1} = \frac{2}{3}$$

Interpretaremos en este caso qué información da ω_2/ω_1 y $\bar{\omega}_2/\bar{\omega}_1$ sobre las curvas en los toros y sobre las rotaciones en los círculos:

$$\begin{aligned} \omega_2/\omega_1 &= \frac{1}{3} \\ \dot{\theta}_1(t) &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2(t) &= \omega_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2/\bar{\omega}_1 &= \frac{2}{3} \\ \dot{\bar{\theta}}_1(t) &= \bar{\omega}_1 \\ \dot{\bar{\theta}}_2(t) &= \bar{\omega}_2 \end{aligned}$$



Γ es una curva cerrada, que da una vuelta al toro en la dirección de los meridianos y 3 en la dirección de los paralelos. Mientras $\bar{\Gamma}$ da 2 vueltas al toro en la dirección de los meridianos y 3 en la de los paralelos, de hecho si Γ es la imagen de $(q_1(t), \dot{q}_1(t), q_2(t), \dot{q}_2(t))$, entonces esta curva es periódica de período $3T = 6\pi\omega_1$ y lo análogo sucede con $\bar{\Gamma}$.

En tanto a las rotaciones, tenemos que las órbitas generadas por r y por \bar{r} constan de tres puntos en el círculo. En este caso decimos que son órbitas de período 3, ya que cada tres iteraciones se repite lo mismo, o sea

$$r^{n+3}(p) = r^n(r^3(p)) = r^n(p)$$

La diferencia entre r y \bar{r} , es que el orden con respecto al círculo en que se recorren los puntos de una órbita al iterar la rotación es distinto*

$r(p)$ se encuentra en el primer lugar después de p , mientras que $\bar{r}(p)$ se encuentra en el segundo.

En general lo que sucede si ω_2/ω_1 es racional, se puede inducir fácilmente de este ejemplo:

Si $\omega_2/\omega_1 = m/n$ y m, n son primos relativos con $n > 0$, entonces las curvas fase en el toro son periódicas de período nT y le dan m vueltas al toro en la dirección de los meridianos y n en la de los paralelos, al cerrarse.

* Recordemos que el orden lo estamos dando en contra de las manecillas del reloj.

El mapeo de Poincaré, r , es una rotación de un ángulo $m/n 2\pi$, la cual es periódica de período n , y $m \pmod{n}$ indica en qué lugar se encuentra $r(p)$ en la órbita de p generada por r , contando los puntos de esta órbita a partir de p y en el sentido contrario a las manecillas del reloj*

Con esto lo único que nos queda por ver es el caso en que ω_2/ω_1 es irracional.

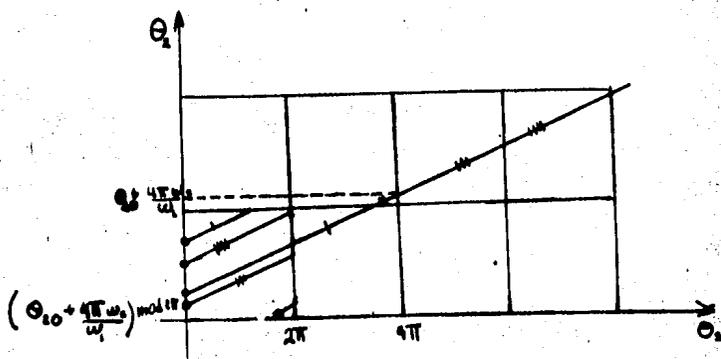
Analicemos primero la rotación correspondiente. Sea r_2 la rotación de un ángulo $2\pi c$. Sea m/n un número racional $(m:n) = 1$ muy cercano a ω_2/ω_1 .

Podemos esperar que mientras más cercano sea m/n a ω_2/ω_1 , más se parecerán las órbitas de $r^{m/n}$ a las de r_{ω_2/ω_1} . El número de puntos que tiene cada órbita de $r^{m/n}$ es n , y el ángulo entre dos puntos consecutivos en el círculo de esta órbita es $2\pi/n$. Al acercarse m/n a ω_2/ω_1 , n debe tender a infinito pues to que ω_2/ω_1 es irracional, por lo que es de esperarse que las órbitas de r_{ω_2/ω_1} , consten de una infinidad de puntos y que deben estar arbitrariamente cercanos, o sea que esta órbita debe ser densa. Este argumento no es una demostración, sin embargo nos da idea de como pueden ser estas órbitas. De hecho esto es cierto. Para una demostración se puede consultar A1 pag 163.

* El lugar $m \pmod{n}$ está dado así, pues si tenemos una rotación de un ángulo $4/3 2\pi$, es la misma que una de $1/3 2\pi$. $r(p)$ se encuentra en el primer lugar después de p que es lo mismo que el lugar $4 \pmod{3}$.

Si sólo conocemos la rotación correspondiente al mapeo de Poincaré, no podemos decir cuántas vueltas de una curva fase al toro. Esto se debe a que todas las razones de la forma $\omega_2/\omega_1 = c + k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y c fija determinan la misma rotación: la de un ángulo $2\pi c$. Sin embargo el hecho de que ω_2/ω_1 sea racional, sí determina la periodicidad de las curvas fase.

Veremos cómo el resultado anterior implica que cada curva fase es densa en el toro. Para esto buscaremos las coordenadas de una curva fase que se encuentran en el cuadrado $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Estas se obtienen al trasladar cada cuadrado de la forma $[2\pi k, 2\pi(k+1)] \times [2\pi m, 2\pi(m+1)]$ al cuadrado I. Así las coordenadas de una curva fase en I, son una colección de segmentos paralelos.



La densidad de éstos en I es equivalente a la densidad de una curva fase en el toro.

Claramente la densidad de la colección de segmentos mencionada se reduce a la densidad de sus ordenadas al origen y éstas son precisamente las coordenadas de una órbita del mapeo de Poincaré - la rotación (ω_2/ω_1) .

Con este resultado regresaremos al problema físico con el que empezamos.

Tenemos que para algunos valores de k_1 y de k_2 , ω_2/ω_1 es racional. En este caso las curvas fase serán periódicas. El movimiento de los cuerpos será un movimiento periódico independientemente de las condiciones iniciales (posición y velocidad) de los cuerpos.

Si k_1 y k_2 son tales que ω_2/ω_1 es irracional el movimiento, no será periódico (con la excepción de que las condiciones iniciales sean $x_{10} = -x_{20}$ y $\dot{x}_{10} = -\dot{x}_{20}$ ó $x_{10} = x_{20}$ y $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20}$). Que la curva fase sea densa en el toro significa que dado cualquier estado permisible por las energías iniciales, después de un determinado tiempo el sistema se encontrará tan cerca como se quiera de este estado. En particular si partimos de un estado inicial hay un tiempo para el cual regresaremos tan cerca como se quiera a este estado.

Más precisamente, dado $\epsilon > 0$ existe un tiempo T_ϵ para el cual

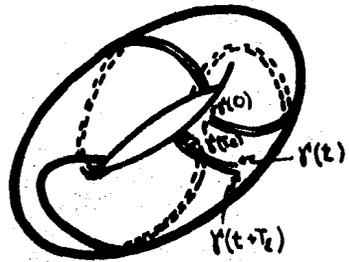
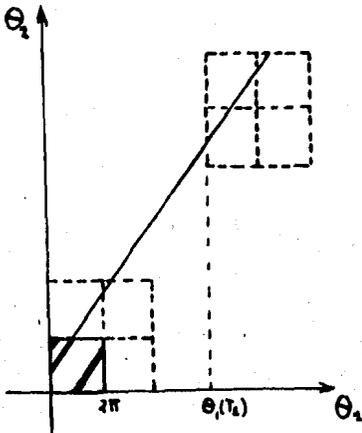
$$|\gamma(0) - \gamma(T_\epsilon)| < \epsilon$$

donde $\gamma(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ y q es una solución al sistema (2).

Es más, es sencillo ver que después de este tiempo el movimiento casi se repite o sea

$$|\gamma(t) - \gamma(t+T_\epsilon)| < \epsilon \quad \text{para toda } t \in \mathbb{R}$$

A este tipo de comportamiento se le llama case-periódico. Al tiempo T_ϵ se le llama un ϵ - periodo de γ



Así tenemos que el movimiento de los cuerpos atados por los resortes será periódico o casi periódico, dependiendo de que ω_2/ω_1 sea un número racional o irracional. En la práctica no podemos detectar la diferencia entre estos dos comportamientos pues el error de medición es siempre mayor que cero y el tiempo de observación es finito.

2. LEVANTAMIENTOS.

Antes de empezar el estudio de homeomorfismos del círculo más generales haremos un paréntesis técnico que nos ayudará posteriormente.

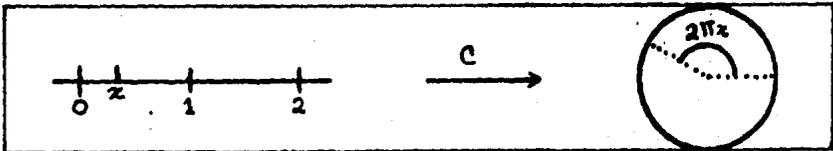
Para el estudio de funciones del círculo en el círculo, muchas veces se facilitan las cosas si le asociamos a cada una de éstas una función de los reales en los reales que refleje todas las propiedades que tiene la función original en el círculo.

Para esto se le dará un sistema de coordenadas al círculo. Si pensamos al círculo como el unitario sumergido en el plano complejo tenemos que la función

$$c: \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

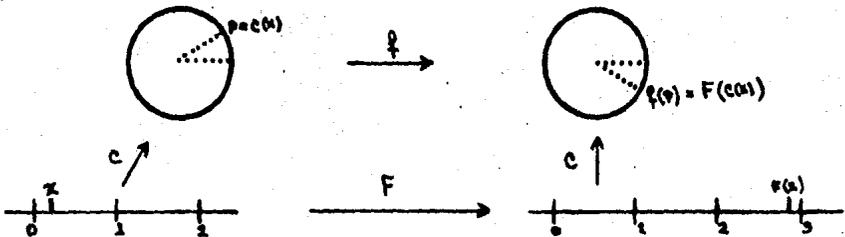
$$c(x) = e^{2\pi i x}$$

nos determina un sistema de coordenadas.



Sea f un homeomorfismo del círculo que conserve la orientación. Veremos que debe cumplir una función real F , para que nos dé toda la información del comportamiento de f .

Sea p un punto del círculo y x una coordenada de p , le pediremos a F que cumpla que $F(x)$ es una coordenada de $f(p)$



Como esto debe pasar para cada punto del círculo, le pediremos a F que cumpla

$$c \circ F = f \circ c \quad (1)$$

Si f es un homeomorfismo dado, (1) es una ecuación funcional -la incógnita es F -.

Si bien todas las soluciones a (1) reflejan las propiedades de f , hay soluciones de muy diversas características.

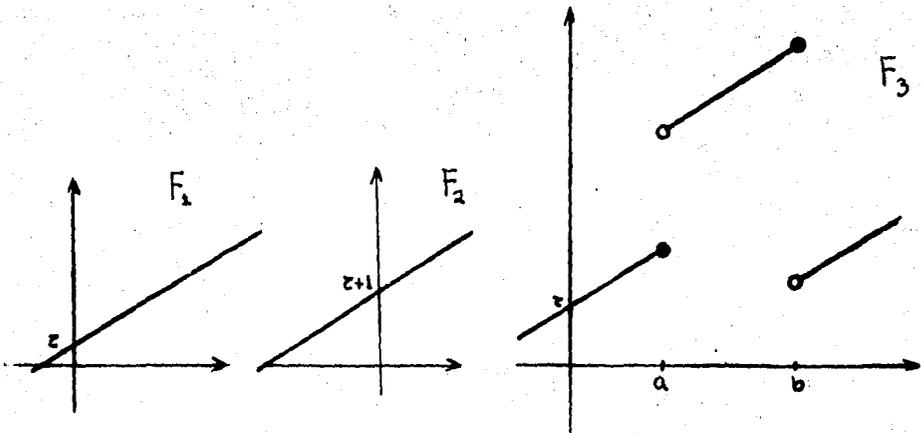
Por ejemplo si f es una rotación del ángulo $2\pi z$ medido en el sentido contrario de las manecillas del reloj, las funciones:

$$F_1(x) = x + z$$

$$F_2(x) = x + z + 1$$

$$F_3(x) = \begin{cases} x + z & \text{si } x \in (-\infty, a] \\ x + z + 1 & \text{si } x \in (a, b] \\ x + z - 1 & \text{si } x \in [b, \infty) \end{cases}$$

Son soluciones de (1)



Para evitar comportamientos tan diversos, le pediremos a F que cumpla otras condiciones.

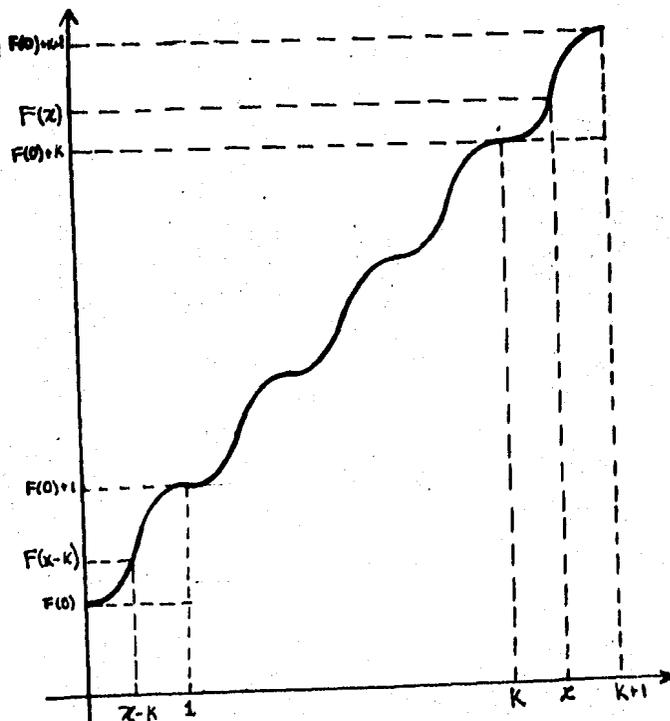
Observemos que f manda al círculo en sí mismo, por lo que podemos definir F en el intervalo unitario $[0, 1)$ (que cubre al círculo) de tal forma que su imagen sea un intervalo unitario, o sea que

$$F[0, 1) = [F(0), F(0)+1) \quad (2)$$

Definida F aquí se puede extender a todos los reales definiendo

$$F(x) = F(x-k) + k \quad \text{si } x \in [k, k+1) \quad (3)$$

donde k es un entero



Es inmediato ver que si f es un homeomorfismo que conserva la orientación, F será un homeomorfismo creciente. En este caso la condición (3) implica la (2) por lo que se define:

Definición. Sea f un homeomorfismo que conserva la orientación. F es un levantamiento de f si se cumplen

- i) $c \circ F = f \circ c$
- ii) F es creciente.
- iii) $F(x + k) = F(x) + k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$

Si f es la rotación del ángulo $2\pi z$ un levantamiento de f es

$$F(x) = x + z$$

Pero éste no es el único. Todas las funciones de la forma

$$F_m(x) = x + z + m$$

donde m es un entero, son levantamientos de f , y estos son todos.

En general se tiene que:

Proposición. Sea f un homeomorfismo del círculo que conserva la orientación y F un levantamiento de f .

Entonces

F^* es un levantamiento de F si y sólo si

$$F^*(x) = F(x) + m \quad \text{para algún entero } m \quad \bullet$$

- ⊙ Claramente $F(x) + m$ también es un levantamiento de f . Veremos que todos son de esta forma. Sea $x \in \mathbb{R}$. $F(x)$ y $F^*(x)$ son coordenadas de $f(c(x))$ por lo que $F^*(x) - F(x) \in \mathbb{Z}$.

Como F^* y F son continuas tenemos que $F^*(x) - F(x) = m$.

Nos interesa trabajar con las iteradas de f . Veamos como es un levantamiento de f^n

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \dots & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\
 c \uparrow & & c \uparrow & & c \uparrow & & c \uparrow & & c \uparrow \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \dots & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Del esquema tenemos que si F es un levantamiento de f , entonces

$$c \circ F^n = f^n \circ c$$

Además si F es creciente F^n también lo es, y por último tenemos que por inducción se demuestra que

$$F^n(x+k) = F^n(x) + k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Con esto queda demostrado

Proposición. Si f conserva la orientación y F es un levantamiento de f , entonces F^n es un levantamiento de f^n .

Una de las propiedades importantes de la dinámica generada por un homeomorfismo es la existencia o no de órbitas periódicas o sea de soluciones de

$$f^n(p) = p$$

* Suponiendo que $F^{n-1}(x+k) = F^{n-1}(x) + k$ tenemos que

$$F^n(x+k) = F(F^{n-1}(x+k)) = F(F^{n-1}(x) + k) = F^n(x) + k$$

para algún entero n y un punto $p \in S^1$.

Para levantamientos esto queda caracterizado como la existencia de soluciones para n y k enteros y x real a la ecuación

$$F^n(x) = x + k$$

Geométricamente esto nos dice que la gráfica de F^n - debe cortar a alguna recta de pendiente uno y ordenada al origen entera.

HOMEOMORFISMOS CON ORBITAS PERIODICAS Y
LOS CONCEPTOS DE ω -LIMITE Y NUMERO ROTACIONAL.

1 EJEMPLOS.

Es de esperarse que existan homeomorfismos con órbitas periódicas pero que no todas lo sean. Como ejemplo construiremos un homeomorfismo que tenga sólo k puntos fijos, los llamaremos p_1, \dots, p_k .

Veamos qué características debe tener un levantamiento de este homeomorfismo.

Supongamos que x_1, x_2, \dots, x_k son coordenadas de p_1, \dots, p_k respectivamente con $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < 1$ en tonces, $F(x_i) \in x_i + \mathbb{Z}$; para fijar ideas tomemos el levantamiento para el cual $F(x_i) = x_i$.

Como F es creciente y continua, tenemos que

$$F[x_i, x_{i+1}] = [x_i, x_{i+1}]$$

Además F no tiene puntos fijos en ningún intervalo de la forma $(x_i, x_i + 1)$, de donde

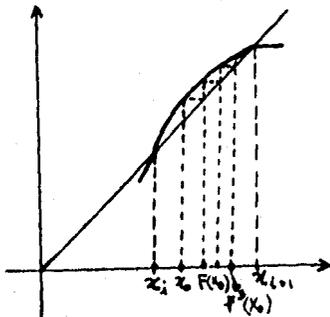
$$F(x) > x \quad \text{para toda } x \in (x_i, x_{i+1})$$

6

$$F(x) < x \quad \text{para toda } x \in (x_i, x_{i+1})$$

Veremos cómo estas propiedades nos determinan el comportamiento de las demás órbitas.

Tomemos $x_0 \in (x_1, x_{1+1})$ y supongamos que en este intervalo $F(x) > x$.



Nos interesa ver cómo es el conjunto de puntos $\{F^n(x_0)\}$. En la gráfica de F podemos trazar una "escalera" con sus vértices alternando en la gráfica de F y la de la identidad, como lo muestra la figura. Así podemos visualizar el comportamiento de $F^n(x_0)$.

Es claro que $\{F^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que tiende a x_{1+1} .

* Como $F(x) > x$ y F es creciente se obtiene que

$$x < F(x) < F^2(x) < F^3(x) < \dots$$

Además para toda $n \in \mathbb{N}$, $F^n(x) < F^n(x_{1+1}) = x_{1+1}$

pues F^n es creciente; de donde existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = y \quad \text{y además} \quad y \leq x_{1+1}$$

Por otro lado tenemos, por la continuidad de F que

$$F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = y, \quad \text{o sea } y \text{ es un punto fijo.}$$

$$\text{De donde} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = x_{1+1}$$

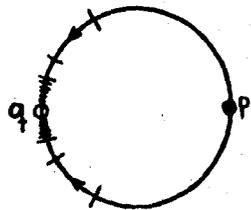
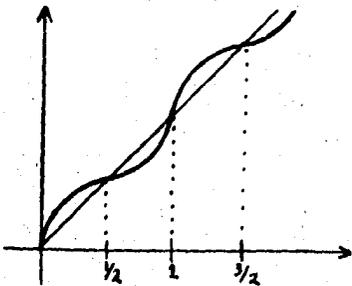
Análogamente se puede ver que si $F(x) < x$ en $(x_1, x_1 + 1)$ entonces $\{F^n(x)\}$ será una sucesión decreciente con x_1 como límite.

Con esto queda demostrado que en este caso hay dos tipos de órbitas:

Unas que sólo constan de un punto y otras que son sucesiones monótonas contenidas en los arcos entre los puntos fijos y que tienden a estos últimos.

Un ejemplo es el dado por el siguiente levantamiento:

$$F(x) = x + \frac{1}{2}\pi \operatorname{sen} 2\pi x$$



Los puntos fijos de F son los múltiplos de $\frac{1}{2}$.

$F(x) > x$ en los intervalos de la forma $(m, m + 1/2)$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $F(x) < x$ en los intervalos $(m + 1/2, m + 1)$.

En el círculo tenemos que los puntos fijos son p y q con coordenadas 0 y $\frac{1}{2}$ respectivamente y las órbitas de los demás puntos serán sucesiones monótonas tendiendo a q .

Analicemos un ejemplo de un homeomorfismo con puntos periódicos de período 2.

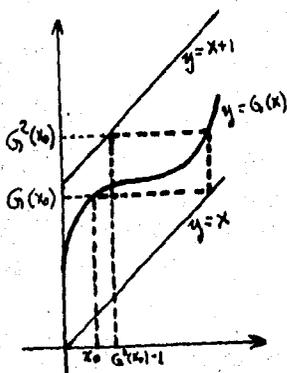
Tomemos el levantamiento definido por $G(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2 + 1$; $x_0 \in (0, 1)$

A G la podemos definir en todos los reales de una forma única, pidiéndole que cumpla $G(x + 1) = G(x) + 1$.

Tenemos que $G^2(0) = G(\frac{1}{2}) = 1$

Por lo que el homeomorfismo en el círculo correspondiente g tiene al menos una órbita periódica de período 2.

Buscaremos ahora otras órbitas periódicas.



Sea $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$. Tomemos el punto $(x_0, G(x_0))$ y de ahí tracemos una recta horizontal hasta tocar la recta $y = x$, de este último tracemos una recta vertical hasta tocar la gráfica de G y de aquí nuevamente tracemos una recta horizontal hasta tocar la recta $y = x + 1$, bajando después hasta cruzar la gráfica G . El punto al que llegamos tiene abscisa $G^2(x_0) - 1$. Si el punto al que llegamos es el mismo del que partimos, habremos encontrado otra órbita periódica de período 2. (Podemos hacer algo similar para $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$).

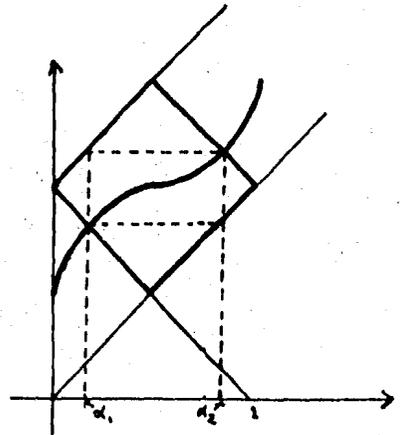
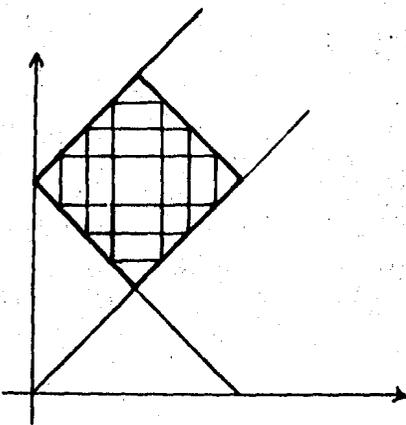
Con esto podemos replantear el problema en los siguientes términos:

¿Es posible construir un rectángulo con lados parale-

los a los ejes, con un vértice en la recta $y = x$, otro en la recta $y = x + 1$ y los otros dos en la gráfica de G ?

Claramente esto depende de cómo sea la gráfica de G ; una de las propiedades que sabemos de ella es que es simétrica con respecto al punto $(-\frac{1}{2}, 1)$. Esta simetría implica que a los rectángulos con centro en $(-\frac{1}{2}, 1)$, basta pedirles que uno de sus vértices esté en la gráfica de G para que el otro también lo esté.

Los vértices de los rectángulos con centro en $(-\frac{1}{2}, 1)$ y dos de sus vértices en las rectas $y = x$ y $y = x + 1$ caen sobre el cuadrado formado por estas rectas y las rectas $y = -x + 1$ y $y = -x + 2$.



Ahora, la gráfica de G corta a este cuadrado en dos puntos $(x_1, G(x_1))$ y $(x_2, G(x_2))$, ya que $G(0) = \frac{1}{2}$ y $G(1) = \frac{3}{2}$ y G es continua.

Estos puntos quedan determinados por $G(x_1) = -x_1 + 1$; $G(x_2) = -x_2 + 2$

Y cumplen que $G^2(x_1) = G(x_2) = x_2 + 1$

Hasta ahora hemos encontrado 2 órbitas periódicas de periodo 2, a saber las formadas por los puntos en el círculo p_1

y p_2 ; y q_1 y q_2 con coordenadas 0 y $\frac{1}{2}$, y α_1, α_2 respectivamente.

De hecho se puede ver que éstas son las únicas órbitas periódicas de período 2^*

* Sea $H(x) = G^2(x) - x - 1$ para $x \in [0, \frac{1}{2}]$

se puede obtener fácilmente que

$$H(0) = H(\alpha_1) = H(\frac{1}{2}) = 0 \quad (1)$$

$$H'(0) = H'(\frac{1}{2}) = -1 \quad (2)$$

$$H''(x) > 0 \text{ para } x \in (0, \frac{1}{2} - 2^{-3/2}) \text{ y } H''(x) < 0 \text{ para } x \in (\frac{1}{2} - 2^{-3/2}, \frac{1}{2}) \quad (3)$$

Por (3) tenemos que $H'(x) = 0$ tiene a lo más 2 raíces reales en $[0, \frac{1}{2}]$ y usando (1) y (2) obtenemos que $H'(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales: $r_1 \in (0, \alpha_1)$ y $r_2 \in (\alpha_1, \frac{1}{2})$. r_1 y r_2 son un mínimo local y un máximo local de H respectivamente y éstos son los únicos extremos locales. Por lo tanto

$$H(x) < 0 \text{ para } x \in (0, \alpha_1) \quad \text{y} \quad (4)$$

$$H(x) > 0 \text{ para } x \in (\alpha_1, \frac{1}{2})$$

Se puede ver también que la gráfica de G^2 es simétrica respecto a $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, de donde usando (4), obtenemos:

$$G^2(x) < x + 1 \text{ para } x \in (0, \alpha_1) \cup (\frac{1}{2}, \alpha_2)$$

$$G^2(x) > x + 1 \text{ para } x \in (\alpha_1, \frac{1}{2}) \cup (\alpha_2, 1)$$

En particular los únicos puntos fijos de g^2 son p_1, p_2, q_1, q_2 .

Ahora analicemos las órbitas de los demás puntos. Tomemos un punto p en el arco de circunferencia (recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj) que va de p_1 a q_1 .

Como

$$g(0, a_1) = (1/2, a_2) \quad \text{y} \quad g(1/2, a_2) = (1, a_1 + 1)$$

o sea

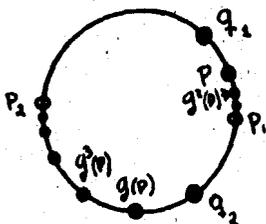
$$g(p_1, q_1) = (p_2, q_2) \quad \text{y} \quad g(p_2, q_2) = (p_1, q_1)$$

entonces la órbita de p está contenida en los arcos $(p_1, q_1) \cup (p_2, q_2)$ y va saltando de un arco al otro alternadamente. En el pie de página se vio que:

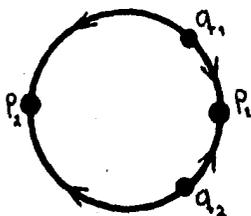
$$g^2(x) < x + 1 \quad \text{para} \quad x \in (0, a_1) \cup (1/2, a_2)$$

entonces $(g^2)^n(p)$ será una sucesión monótona que tiende a p_1 y $g^{2n+1}(p)$ será una sucesión monótona que tiende a p_2 .

Así vemos que la órbita de p no puede ser periódica; es más, al iterar suficientemente g , será muy parecida a la órbita periódica $\{p_1, p_2\}$



Con un razonamiento análogo se puede ver que los puntos que nos falta analizar también tienen órbitas que se van pegando a la órbita periódica $\{p_1, p_2\}$.



Así concluimos el análisis del homeomorfismo g .

En este ejemplo vemos que la órbita periódica $\{q_1, q_2\}$ no es muy relevante, en el sentido de que si partimos de casi -- cualquier punto, a la larga estaremos muy cerca de la órbita $\{p_1, p_2\}$. Digamos que tenemos un modelo de un fenómeno físico, dado por una ecuación diferencial sobre el toro y que su mapeo de Poincaré tiene las características del homeomorfismo g analizado. Bajo ca si cualquier condición inicial, a lo largo del tiempo, el comportamiento del fenómeno se estabilizará en el ciclo correspondiente a $\{p_1, p_2\}$. Además, si nuestras condiciones iniciales son tales que la solución parte del ciclo correspondiente a $\{q_1, q_2\}$ y que por tanto (en el modelo matemático) siempre permanece en él, no podemos asegurar que eso ocurra en el fenómeno físico, ya que cualquier factor o perturbación que no hubiésemos tomado en cuenta haría que la solución se saliera de este ciclo y por lo tanto, a lo largo del tiempo, fuera atrapado por el ciclo correspondiente a $\{p_1, p_2\}$.

2. ORDEN Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE UNA ORBITA.

Los ejemplos anteriores tienen órbitas periódicas, y

partiendo casi exclusivamente de la existencia de éstas, vimos que todos ellos tienen un mismo período; además las órbitas no periódicas, al iterar suficientemente el homeomorfismo, se van pegando a las periódicas.

Nuestro siguiente objetivo es ver que esta situación - es general, pero antes precisaremos qué es lo que entendemos por que ciertas órbitas "se peguen" a otras.

Sean O y Q dos órbitas de un homeomorfismo f , tales que " Q se pegue a O ".

Desde el punto de vista estático (o sea viendo a las órbitas sólo como conjuntos de puntos), una primera aproximación para precisar este hecho, será pedir que el conjunto de puntos - de acumulación de Q^+ sea O .

Sin embargo aquí surge un problema, ya que nos gustaría decir que una órbita periódica se pega a sí misma, pero una órbita periódica como conjunto no tiene puntos de acumulación. Para evitar esta anomalía usaremos la siguiente

Definición. Sea $q \in S'$.

Diremos que $p \in \omega\text{-lim}(q)$ si existe una sucesión $\{n_i\}$ de naturales tal que

$$i) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(q) = p$$

$$ii) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$$

De manera análoga se define el α -límite(q) como aquel conjunto de "donde partió la órbita de q ", más precisamente.

Definición. $p \in \alpha\text{-lim}(Q)$ si existe una sucesión n_i de naturales tal que

$$i) \lim_{i \rightarrow \infty} f^{-n_i}(q) = p$$

$$ii) \lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$$

Es claro que si $q, q' \in Q$, entonces

$$\omega \lim q = \omega \lim q'$$

$$\alpha \lim q = \alpha \lim q'$$

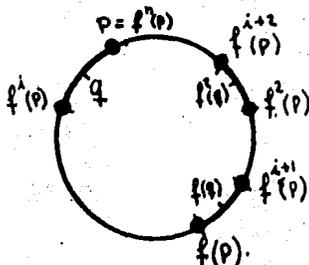
Por lo que podemos hablar del $\omega\text{-lim } Q$.

Con este nuevo concepto podemos decir que una condición necesaria para que " Q se pegue a O " es que $\omega\text{-lim } Q = O$.

Decimos que es necesaria puesto que todavía no hemos incluido cabalmente el comportamiento dinámico; tendremos que incluir el hecho de que el orden en que van siendo recorridas las órbitas al iterar la función sea parecido.

Veamos algo del orden en que son recorridas las órbitas.

Sea p un punto de la órbita O y supongamos que ésta es de período n . Sea i un entero tal que $f^i(p)$ sea el primer punto de O después de p . Como f preserva la orientación, cualquier punto del arco $(p, f^i(p))$ caerá, bajo f al arco $(f(p), f^{i+1}(p))$ y bajo f^2 al arco $(f^2(p), f^{i+2}(p))$ etc.



Si q es un punto de $Q \cap (p, f^1(p))$ este hecho le está imponiendo a las imágenes sucesivas de q recorrer a Q de una forma semejante a la que las imágenes sucesivas de p recorren a O , al menos hasta que las imágenes de q no vuelvan a caer al intervalo $(p, f^1(p))$. Para ver que pasa cuando las imágenes de q vuelven a caer al intervalo $(p, f^1(p))$ primero buscaremos cuales son los puntos de Q que están en $(p, f^1(p))$.

Por la forma en que fue escogido l , los intervalos de la forma $(f^k(p), f^{l+k}(p))$ no se intersectan o coinciden, por lo tanto $f^l(q)$ estará en $(p, f^1(p))$ si y sólo si $f^l(p) = p$, o sea si l es múltiplo de n .

Así los puntos de Q que nos interesa analizar son los de la forma $\{f^{nk}(q) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, o sea los puntos de la órbita de q bajo f^n .

f^n tiene puntos fijos (todos los puntos de O son fijos bajo f^n) por lo que sus órbitas serán puntos fijos o sucesiones monótonas acotadas por éstos.

Es más, si no hay otras órbitas periódicas, se puede ver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk}(q) = p \quad \text{ó} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk}(q) = f^l(p)$$

En general, se puede ver que los puntos de Q que están en cualquier intervalo de la forma $(f^l(p), f^{l+l}(p))$, son recorridos, al iterar f , de una forma monótona.

Y como anteriormente, si no hay otras órbitas periódicas, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk+l}(q) = f^l(p) \quad \text{ó} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk+l}(q) = f^{l+l}(p)$$

De hecho si $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk}(q) = p$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk+l}(q) = f^l(p)$$

Así, el hecho de que exista una órbita periódica está forzando a que las otras órbitas sean recorridas de una forma semejante a la que la periódica lo es.

Con esto queda claro que una condición necesaria y suficiente para que "Q se pegue a O" es que w -límite de Q = O (al menos en el caso de que O sea una órbita periódica).

Ahora sí estamos preparados para enunciar el siguiente teorema, que será demostrado en el anexo. (Ver pag. 107)

Teorema 1.

Si f es tal que tiene una órbita periódica de período n , entonces.

- i) Todas sus órbitas periódicas tendrán período n .
- ii) El w -límite de cualquier órbita es una órbita periódica.

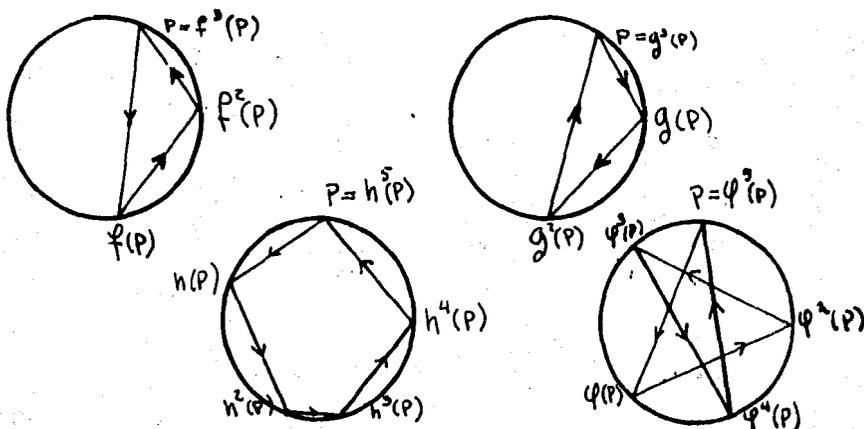
3. ROTACION PROMEDIO DE UN HOMEOMORFISMO.

Los resultados de la sección anterior nos hacen sospechar que los homeomorfismos con órbitas periódicas están relacionadas de alguna manera con una rotación. Nuestro objetivo en esta sección es encontrar un invariante que nos determine a qué rotación está relacionado un homeomorfismo dado. Además buscaremos este invariante de tal forma que tenga posibilidades de

definirse para el caso en que el homeomorfismo no tenga órbitas periódicas. Esto último es importante porque así daremos el primer paso para el estudio de estos homeomorfismos, que todavía no analizamos.

Empezaremos nuevamente con algunos ejemplos.

En la siguiente figura se muestran órbitas periódicas de distintos homeomorfismos.



Recordemos que si tenemos una rotación de un ángulo $\frac{m}{n} 2\pi$, n nos determina el período de sus órbitas y m nos determina el orden en que son recorridas (o el "número de vueltas que da la órbita al círculo" para regresar al punto de partida).

Con esto claramente se ve que la órbita periódica de f debe estar relacionada con la rotación del ángulo $\frac{1}{3}(2\pi)$, la de g con la de $\frac{2}{3}(2\pi)$ (que es la misma que la de $-\frac{1}{3}(2\pi)$), la de h con la de $\frac{1}{5}(2\pi)$ y la de φ con $-\frac{2}{5}(2\pi)$ (Recordemos que orientamos el círculo en el sentido contrario al de las manecillas del reloj).

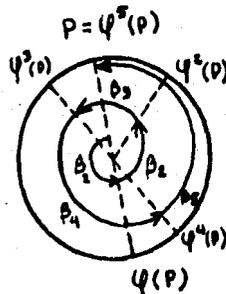
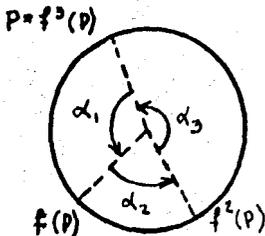
Es más, por los resultados de la sección anterior vemos que cualquier otra órbita de f estará relacionada con la rotación $\frac{1}{3} 2\pi$, ya que la órbita periódica que pasa por p le está imponiendo un orden determinado a las demás órbitas. (Esto mismo ocurre con g , h y ψ).

A cada homeomorfismo le asociaremos un número, que llamaremos número rotacional, que nos determinará a qué rotación está asociado dicho homeomorfismo.

Para los homeomorfismos que tengan órbitas periódicas, ya está resuelto el problema, basta fijarnos en el período de una órbita periódica y en el orden en que es recorrida.

Sin embargo no seguiremos este camino ya que nos deja sin armas (al menos a primera vista) para atacar el caso en que no existan órbitas periódicas.

Retomemos los ejemplos para buscar un camino más fácilmente generalizable



Sea α_i el ángulo formado por $f^{i-1}(p)$, c , $f^i(p)$ donde c es el centro del círculo. Análogamente sean β_i los ángulos correspondiente para ψ .

El promedio de las α_i 's es $\frac{1}{3} \sum \alpha_i = \frac{1}{3} 2\pi$
 y el de las β_i es $\frac{1}{5} \sum \beta_i = \frac{1}{5} 2\pi$

Si ψ tuviera otra órbita periódica, ésta sería de período 5 y el promedio de los ángulos de rotación también sería $\frac{2}{5} 2\pi$, ya que al recorrerse en el mismo orden implica que la suma de los ángulos es 4π y por tanto el promedio es $\frac{2}{5} (2\pi)$.

Además las órbitas no periódicas de ψ se van pegando a las periódicas. Es de esperarse que el promedio de sus ángulos de rotación también sea $\frac{2}{5} 2\pi$, pues al sacar el promedio de una infinidad de números podemos excluir cualquier subconjunto finito sin alterarlo y por tanto basta tomar los ángulos correspondientes a una cola de la órbita que esté suficientemente pegada a la órbita periódica.

Este promedio es un buen candidato para ser el número rotacional, ya que es de esperarse que a través de él podamos asociar a un homeomorfismo la rotación correspondiente, sin recurrir a la geometría de alguna órbita.

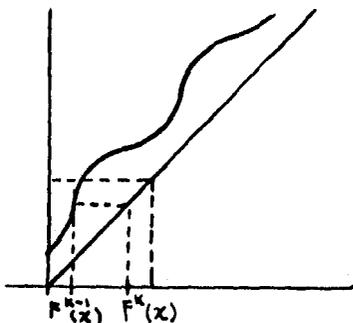
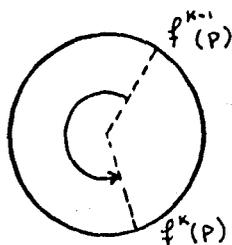
Pasaremos a ver cómo calcularlo, para esto nos valdremos de los levantamientos.

Sea f un homeomorfismo y p un punto de la circunferencia.

Sea F el levantamiento de f tal que $F(0) \in [0, 1)$ y sea x una coordenada de p .

El ángulo que generan $f^{k-1}(p)$, $f^k(p)$ con respecto al centro del círculo mide

$$2\pi (F^k(x) - F^{k-1}(x))$$



por lo que el promedio de los ángulos de rotación de los primeros n iterados es

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n F^k(x) - F^{k-1}(x) = \frac{2\pi}{n} (F^n(x) - x)$$

entonces el promedio de todos los ángulos de rotación es:

$$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

Va hemos argumentado que, en el caso de que f tenga órbitas periódicas, este promedio está definido y no depende de una órbita particular. De hecho esto ocurre en el caso general.

Proposición . Sea f un homeomorfismo y F un levantamiento de f , entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$ existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

y éste no depende de x . (ver demostración en [N] pág. 34.)

Para dar una definición del número rotacional que no depende de un levantamiento específico, veamos qué ocurre con otro levantamiento de f : F^* .

Vimos anteriormente que debe existir un entero k tal que $F^*(x) = F(x) + k$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^*)^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) + nk}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} + k$$

o sea los "números racionales" de dos levantamientos de f difieren por un entero, o sea son iguales modulo 1.

rotacional de la rotación del ángulo $2\pi z$ es $z \pmod{1}$. Un levantamiento de esta rotación es

$$F(x) = x + z$$

De donde
$$F^n(x) = x + nz$$

Por lo que
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = z$$

Con este nuevo concepto un resultado que vimos con el capítulo I sección 1, se traduce en que la racionalidad o irracionalidad del número rotacional de una rotación determina la periodicidad o no de las órbitas de ésta.

En este sentido es importante ver si se puede generalizar este resultado para cualquier homeomorfismo.

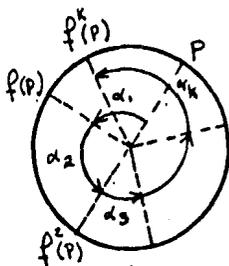
Se han dado ya algunos argumentos intuitivos que nos inducen a pensar que si un homeomorfismo tiene órbitas periódicas, entonces su número rotacional es racional.

¿Habrán homeomorfismos con número rotacional racional que no tengan órbitas periódicas?

Analizaremos el caso más simple: un homeomorfismo con número rotacional cero.

Nuestra idea intuitiva de número rotacional nos dice que si el rotacional es cero, entonces la órbita de cualquier punto no puede dar ni una vuelta entera al círculo; vemos que es cierto.

Supongamos que f es tal que hace que la órbita de p dé más de una vuelta, o sea que los ángulos α_i son tales que



$$\sum_{i=1}^k \alpha_i > 2\pi$$

Como f conserva la orientación, entonces es fácil ver que $f^{2k}(p) \in (f^k(p), f^{k+1}(p))$

O sea que, hasta este momento, la órbita de p ya dio más de dos vueltas al círculo, por lo que

$$\sum_{i=1}^{2k} \alpha_i > 4\pi$$

Visto esto, es claro el comportamiento general. En la mk -ésima iterada de p , la órbita ya dio más de m vueltas al círculo. Por lo que

$$\sum_{i=1}^{mk} \alpha_i > 2m\pi$$

Usando esta desigualdad, estimaremos el número rotacional:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mk} \sum_{i=1}^{mk} \alpha_i \gg \frac{2\pi}{k}$$

Por lo que el número rotacional de f es mayor que cero.

Por lo que si partimos de que el número rotacional de g es cero, entonces ninguna de sus órbitas le dará más de una vuelta al círculo. Tomemos q un punto del círculo y fijémosnos en su órbita Q .

Si ésta consta de un punto, q será punto fijo de g . Por lo que g tendrá al menos una órbita periódica de período 1.

Q no puede constar de un número finito de puntos mayor que uno, ya que al iterar g , debe pasar por todos ellos una infinidad de veces, y entonces la órbita estaría dando una infinidad de vueltas al círculo.

La otra posibilidad es que Q conste de una infinidad de puntos. De hecho deberá ser una sucesión monótona, ya que Q no alcanza a dar una vuelta al círculo.

Veremos que, en este caso, también hay un punto fijo de g .

Sea $p = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(q)$. Este límite existe porque $\{g^n(q)\}$ es monótona.

Entonces

$$g(p) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(q)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{n+1}(q) = p$$

O sea, p es punto fijo de g .

Con esto demostramos que:

Si $\text{rot } g = 0$, entonces g tiene al menos un punto fijo (o sea una órbita periódica de período 1).

Sintetizando esta discusión, enunciaremos el siguiente teorema, se puede ver una demostración en [N] pág. 38.

Teorema

Sea f un homeomorfismo que conserva la orientación, entonces.

$\text{rot } f$ es racional si y sólo si f tiene alguna órbita periódica.

HOMEOMORFISMOS SIN ÓRBITAS PERIÓDICAS.

1. ORDEN.

En este capítulo nos centraremos en el comportamiento que tienen los homeomorfismos sin órbitas periódicas. Hasta ahora la única información que tenemos sobre éstos es que su número rotacional es irracional. En esta sección veremos qué implicaciones tiene este hecho en tanto el "orden en que son recorridas las órbitas". Poder formularlo adecuadamente será fundamental para visualizar las dinámicas generadas por homeomorfismos sin órbitas periódicas.

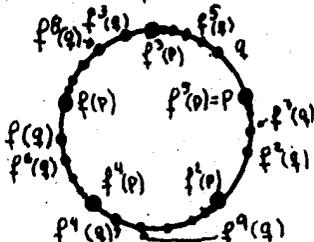
En el caso que un homeomorfismo tenga una órbita periódica, ésta impone a todas las otras órbitas un cierto orden. A su vez, el número rotacional determina el período y el orden en que son recorridas las órbitas periódicas; de hecho en uno de los intentos para definir este número se usó esta propiedad. El impedimento que veíamos era su difícil generalización para el caso en que no hubiese órbitas periódicas.

Ahora veremos qué tan real era ese impedimento; o, en otras palabras, ¿el número rotacional determina el orden en que es recorrida una órbita, aún en el caso de número rotacional irracional?

Para responder a esta pregunta, primero buscaremos una forma más adecuada de enunciarla, para poder trabajar mejor.

Recordemos que cuando discutíamos el orden en que se recorría una órbita para homeomorfismo con órbitas periódicas, nos remitíamos a estas últimas viendo que partían al círculo en un número finito de intervalos.

Cualquier otra órbita iba saltando sucesivamente sobre cada uno de estos intervalos en el mismo orden en que lo hacía la periódica y finalmente veíamos que la parte de la órbita que caía en uno de estos intervalos era monótona. En este sentido es en el que decíamos que una órbita periódica les imponía el orden a todas las demás.



En este caso teníamos 2 "ventajas":

Primera: nos remitíamos al comportamiento de algo conocido, o sea la órbita periódica. Segunda: de hecho, a pesar de estar analizando un número infinito de puntos (i.e. una órbita no periódica) reducíamos una buena parte el análisis de un número finito de intervalos, hecho que nos facilitaba ver, paso tras paso, cómo se comportaba la órbita.

Ahora, en el caso en que tengamos un homeomorfismo f sin órbitas periódicas, no sabemos si hay o no alguna órbita -clave, más sencilla tal vez, a la cual remitirnos. Es más, ni siquiera sabemos en general cómo son estas órbitas.

Por otra parte, se ve difícil reducir el problema al análisis de un número finito de objetos (por ejemplo, si escogemos las n primeras iteradas de una rotación, éstas no nos determinan suficientemente el orden de las que siguen). Este hecho implica que no podemos ir, paso por paso, siguiendo las iteraciones de un punto, hasta inducir el comportamiento de toda la órbita.

Es por eso que la analizaremos globalmente.

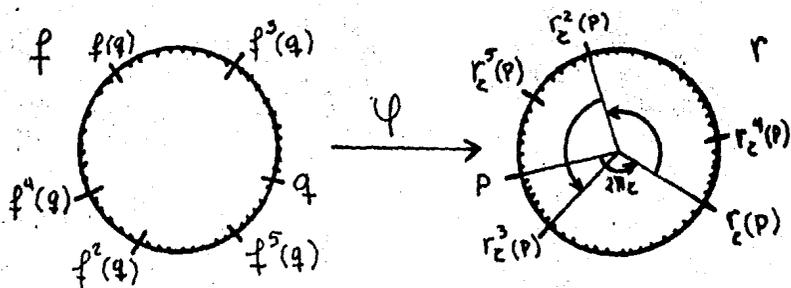
Para esto nos remitiremos a comparar el orden de una órbita de f con el orden de una órbita de alguna rotación -- con número rotacional irracional.

Definición. Sea f un homeomorfismo con número rotacional irracional y Q su órbita que pasa por q . Sea r_z la rotación del ángulo $2\pi z$ y O su órbita que pase por p .

Diremos que Q es recorrida bajo f en orden z si la función

$$\begin{aligned} \psi: Q &\rightarrow O \\ \psi(f^n(q)) &= r_z^n(p) \end{aligned}$$

es una biyección que conserva la orientación*.



- * Esta definición se puede adaptar también a homeomorfismos con número rotacional racional; la única modificación sería que ψ no necesariamente fuese inyectiva. Sin embargo consideramos que en este caso no es necesaria esta definición.

El resultado más fuerte que podríamos esperar acerca de la relación existente entre el número rotacional y el orden en que es recorrida una órbita es el siguiente.

Teorema 1. Sea f un homeomorfismo con número rotacional irracional y Q una de sus órbitas.

El número rotacional de f es α si y sólo si Q es recorrida bajo f en orden α .

Este teorema se demostrará en el anexo. (Ver pag. 110)

Su demostración es sencilla; en este caso, como es común en matemáticas, el poder formular correctamente y de forma sencilla un problema, es recorrer más de la mitad del camino.

2. EJEMPLOS.

Nuestro objetivo en esta sección es visualizar algunos homeomorfismos sin órbitas periódicas (o sea con número rotacional irracional).

Vamos a construir algunos ejemplos de homeomorfismos con número rotacional irracional.

Hasta ahora, los que hemos visto son únicamente las rotaciones de un ángulo inconmensurable con 2π . Basándonos en una rotación r_α de un ángulo $2\pi\alpha$ construiremos un homeomorfismo, f , con número rotacional α .

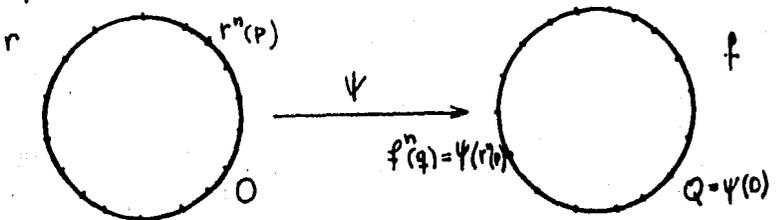
Primero construiremos una de sus órbitas, ya que una sola órbita determina el número rotacional.

Lo que haremos es tomar la órbita de un punto p bajo r_α , -que llamaremos O - y deformarla un poco, conservando

el orden. Esa será una órbita del homeomorfismo deseado.

Esta deformación la daremos a través de un homeomorfismo que conserve la orientación ψ .

Así lo que queremos es que una órbita bajo f sea el conjunto $\psi(0)$, que llamaremos Q .



Q se deberá recorrer bajo f en orden \mathbb{Z} . Por lo que buscaremos un homeomorfismo ψ tal que

$$f^n(q) = \psi(r^n(p))$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ con p y q fijos.

Esta ecuación la tenemos planteada en términos de las iteradas de f . Se simplificará si logramos cambiarla a una equivalente donde sólo aparezca f y no sus iteradas.

Así obtenemos que

$$f(f^{n-1}(q)) = \psi(r^n(p))$$

$$f(\psi(r^{n-1}(p))) = \psi(r^n(p))$$

por lo que

$$f \circ \psi(r^{n-1}(p)) = \psi \circ r(r^{n-1}(p))$$

para todo n entero.

Ahora como $\{r^n(p)\}$ es denso en el círculo y tanto $f \circ \psi$ como $\psi \circ r$ son continuas, entonces

$$f \circ \psi = \psi \circ r$$

Además ψ es invertible, por lo que podemos despejar

f. Así obtenemos que

$$f \equiv \psi \circ r_\alpha \circ \psi^{-1}$$

Ahora veremos cómo son las otras órbitas de f.

Sea q' un punto en el círculo. Su órbita será el conjunto $\{f^n(q') \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Como $f^n = \psi \circ r_\alpha^n \circ \psi^{-1}$

tenemos que

$$f^n(q') = \psi(r_\alpha^n(p'))$$

donde $p' = \psi^{-1}(q')$

ψ es un homeomorfismo y $\{r_\alpha^n(p')\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto denso en el círculo por lo que $\{f^n(q')\}_{n \in \mathbb{Z}}$ también es denso en el círculo.

En pocas palabras, con esto hemos encontrado una gran familia de homeomorfismos con número rotacional irracional que tienen un comportamiento cualitativo esencialmente igual al de rotaciones de un ángulo inconmensurable con 2π .

Surge una pregunta natural. ¿Todos los homeomorfismos con número rotacional irracional tendrán todas sus órbitas densas?

Por el teorema 1, sabemos que si f es un homeomorfismo con rotacional α (irracional) entonces

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ \psi(f^n(q)) &= r^n(p) \end{aligned}$$

es una biyección que conserva la orientación.

Esto le impone ciertas características a Q . Como \mathbb{Q} es un conjunto denso, entre cada pareja de puntos de Q deberá existir otro punto de Q . A esta propiedad la llamaremos densidad en orden.

Con esto tenemos que, una condición necesaria para que un conjunto Q sea una órbita bajo un homeomorfismo con rotacional irracional, es que Q sea denso en orden.

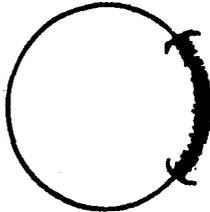
Daremos algunos conjuntos densos en orden y veremos si pueden ser órbitas de alguno de estos homeomorfismos.

Obviamente si Q es denso cumple esta propiedad, sin embargo este caso ya lo analizamos.

* Esto es fácil de demostrar. Sean $r^{m_1}(q)$ y $r^{m_2}(q)$ dos puntos de Q . Entre $r^{m_1}(p)$ y $r^{m_2}(p)$ hay al menos otro punto de \mathbb{Q} , digamos $r^k(p)$. Tenemos que $\psi(f^k(q)) = r^k(p)$

y como ψ conserva la orientación, $r^k(p)$ está entre $f^k(q)$ y $f^{m_1}(q)$

Otro conjunto denso en orden es el conjunto I formado por la intersección de un arco abierto con un conjunto denso



¿Podrá ser ésta una órbita de f ? Si lo fuera, entonces $f(\bar{I}) = \bar{I}$; como \bar{I} es un intervalo cerrado, entonces f debería tener un punto fijo, pero esto no puede ser ya que $\text{rot}(f)$ es irracional.

Veamos qué pasa si I es sólo una parte de una órbita de f .

O sea, analizaremos el caso en que una órbita Q , de f , tenga un subconjunto denso en un intervalo.

Supongamos que J es un intervalo cerrado tal que Q es denso en J^* y tal que Q ya no sea denso en ningún intervalo que contenga propiamente a J .

* Aquí diremos que Q es denso en J si $J \subset \bar{Q}$. Usualmente se dice que Q es denso en J si $\bar{Q} = J$; sin embargo, usando la definición usual se nos complicaría un poco la notación, oscureciendo el argumento central. Además no se pierde nada con esta definición, ya que si J es un intervalo cerrado entonces es equivalente que $J \subset \bar{Q}$ a que $J = \bar{Q} \cap J$.

Es claro que Q será denso en cada iterada de J , ya que un homeomorfismo manda densos en densos.

Analizaremos cómo son los conjuntos $f^n(J)$. Una primera característica es que son intervalos. Veamos dónde están:

$f^n(J)$ no puede estar contenido en J , ya que si lo estuviera, entonces f^n tendría un punto fijo (recordemos que J es un intervalo cerrado y f^n es continua).

Así, de intersectarse J con $f^n(J)$, su unión sería un intervalo que contine propiamente a J , hecho que no puede ser, ya que Q es denso en $f^n(J) \cup J$.

Por lo tanto, para cada entero n , $f^n(J)$ es ajeno a J . Sin embargo esto también es contradictorio, ya que si p es un punto de J y de Q , debe existir otro punto de Q en J (ya que Q es denso en J), o sea debe existir un entero m , tal que $f^m(p)$ esté también en J . Así J se debe intersectar con $f^m(J)$.

Ante tal contradicción, tendremos que desechar este tipo de conjuntos como candidatos a órbitas.

De hecho, con esto hemos demostrado la siguiente:

Proposición Cualquier órbita de un homeomorfismo con número rotacional irracional es densa en el círculo o densa en ningún lado.

Sin embargo todavía no hemos visto si existen o no órbitas del segundo tipo.

Así, si queremos construir un homeomorfismo con una órbita Q , que no sea densa, debemos pedirle a Q las siguientes condiciones para que sea un buen candidato a órbita:

- i) Ser numerable.
- ii) Denso en orden.
- iii) Denso en ninguna parte.
- iv) Además debe ser tal que se le pueda recorrer en un orden ζ con ζ irracional.

Recordemos que éstas son condiciones necesarias para que Q sea una órbita no densa. O sea, construir un conjunto Q con estas propiedades no nos garantiza que podamos encontrar un homeomorfismo f con Q como una de sus órbitas. Sin embargo la cuarta condición está imponiéndole a f ciertas características, que nos ayudarán a construirlo, es por esto que lo primero que haremos es construir un conjunto, Q , que cumpla con estas condiciones.

Primero construiremos este conjunto en el intervalo $[0,1]$, para luego bajarlo al círculo.

Para esto, recordemos cómo se construye el conjunto ternario de Cantor.

Primero tomamos el intervalo $[0,1]$, lo dividimos en 3 intervalos iguales y extraemos el intervalo abierto del centro, con cada uno de los intervalos sobranes hacemos el mismo proceso y así sucesivamente.



Al conjunto que queda se le llama el conjunto ternario de Cantor.

Sea \tilde{Q} el conjunto formado por los puntos medios de cada componente conexa del complemento del conjunto de Cantor

\tilde{Q} es numerable, denso en orden y denso en ninguna parte. O sea, si llamamos Q al subconjunto del círculo con coordenadas en \tilde{Q} ; Q cumple las condiciones i), ii) y iii).

Veremos que también cumple la condición iv). O sea, veremos que Q es un buen candidato a ser una órbita.

Sea \tilde{Q} un conjunto numerable y denso en $[0,1]$ (contenido en $(0,1)$).

Construiremos una función Φ biyectiva y creciente de \tilde{Q} a \tilde{O} .

Nótese que, de hacerlo, ya habríamos checado que Q -- cumple la condición iv), ya que bastaría tomar \tilde{O} como las coordenadas de una órbita O bajo una rotación y definir ψ de Q a O como aquella función que tiene como levantamiento a Φ . El hecho de que Φ sea creciente es equivalente a que ψ conserve la orientación.

Ahora sí procederemos a construir Φ . Tomemos x_1 -- cualquier punto de \tilde{Q} y y_1 cualquiera de \tilde{O} , definimos:

$$\Phi(x_1) = y_1$$

x_1 divide al intervalo $(0,1)$ en dos intervalos I_1 y I_2 donde todo elemento de I_1 es menor que todo elemento de I_2 . Análogamente y_1 divide al $(0,1)$ en J_1 y J_2 .

Para que Φ sea creciente es necesario que

$$\Phi(I_1) \subset J_1 \quad \text{y} \quad \Phi(I_2) \subset J_2$$

Escogemos x_2 un punto de $I_1 \cap \tilde{Q}$ y y_2 un punto de $J_1 \cap \tilde{O}$ definiendo $\Phi(x_2) = y_2$.

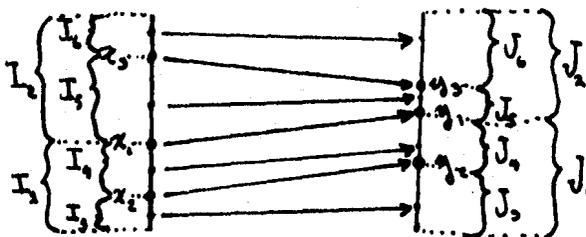
Hacemos lo mismo para I_2 y J_2 .

Las x_i en \tilde{Q} que escogimos, junto con x_1 , dividen al $(0,1)$ en cuatro intervalos, digamos I_3, I_4, I_5, I_6 . Asi--

mismo las y_i 's lo dividen en J_3, J_4, J_5, J_6 .

Para ir construyendo \mathcal{D} creciente es necesario mandar a los puntos de I_1 en puntos de J_1 . Por lo que se escogerá un punto en cada $I_1 \cap \tilde{Q}$ y se le asociará un punto de $J_1 \cap \tilde{O}$.

Así, dividiremos al $(0, 1)$ en ocho partes y volveremos a repetir el mismo proceso.



Esto siempre lo podemos hacer porque tanto \tilde{O} como \tilde{Q} son densos en orden y porque ni \tilde{O} ni \tilde{Q} toman su máximo ni su mínimo (se puede ver que la segunda característica no es relevante en el círculo).

Con este proceso quedará definida una función creciente, sin embargo, no podemos asegurar que quede definida en todo \tilde{Q} , ni que cubra a todo \tilde{O} . Este problema se eliminará si escogemos los puntos de los intervalos I_1 y J_1 de forma adecuada. La idea es darle una numeración a \tilde{O} y a \tilde{Q} , e ir cubriendo los puntos de tal forma que si sabemos que están cubiertos los primeros n , podamos asegurar que está cubierto el $n + 1$ -ésimo punto.

Esta construcción se hace con detalle en el anexo. De hecho ahí se demuestra el siguiente lema. (Ver pag. 112)

Lema 2. Dados dos conjuntos O y Q en el círculo, tales que sean numerables y densos en orden, existe una función φ de Q a O , biyectiva y que conserve la orientación.

Obviamente este lema está enunciado así porque nada más le estamos pidiendo a O y a Q las hipótesis estrictamente necesarias para que la demostración funcione.

El lema dos implica que basta que Q sea numerable y denso en orden para que pueda ser recorrido en orden \mathbb{Z} , siempre y cuando \mathbb{Z} sea irracional.

CONSTRUCCION DE UN HOMEOMORFISMO CON ROTACIONAL IRRACIONAL Y CON UNA ÓRBITA NO DENSA.

Sea Q el conjunto cuyas coordenadas son los puntos medios de las componentes conexas del complemento del Cantor.

Sea \mathbb{Z} un número irracional y $r_{\mathbb{Z}}$ la rotación de un ángulo $2\pi\mathbb{Z}$; Sea O una de sus órbitas.

Sea ψ una biyección que conserva la orientación, definida de Q sobre O . (El lema 2 nos garantiza que existe ψ).

$$\begin{aligned} \text{Definimos } f: Q &\rightarrow Q \\ f &= \psi^{-1} \circ r_{\mathbb{Z}} \circ \psi \end{aligned}$$

Esto nos garantiza que, -de poder extender f a un homeomorfismo del círculo que conserve la orientación- Q será una de sus órbitas y el número rotacional de f será \mathbb{Z} . *

-
- Tenemos que si $f = \psi^{-1} \circ r_{\mathbb{Z}} \circ \psi$, entonces $f^n = \psi^{-1} \circ r_{\mathbb{Z}}^n \circ \psi$. Si llamamos $p = \psi^{-1}(q)$ entonces $\psi(f^n(q)) = r_{\mathbb{Z}}^n(p)$. De aquí tenemos que la órbita de f que pasa por q es

$$\{f^n(q) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \psi^{-1}(O) = Q$$

Además como ψ es una biyección que conserva la orientación el número rotacional f es \mathbb{Z} (ver Teorema 1 de este capítulo).

Se puede extender f a todo el círculo, obteniendo un homeomorfismo del círculo que conserva la orientación. El hecho de que f se pueda extender de esta manera, depende mucho de las características de Q que ya hemos analizado. Aquí no construiremos la extensión de f , lo haremos de forma detallada en la siguiente sección, sólo mencionaremos una de las propiedades que cumple que nos ayudará a visualizar su comportamiento dinámico.

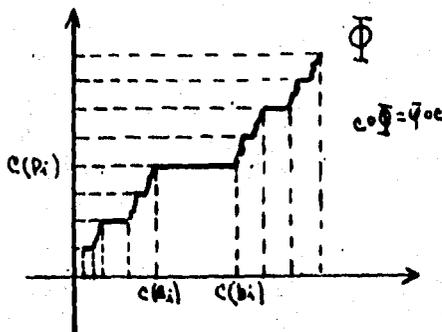
Resulta que ψ se puede extender de forma continua al círculo, sin que invierta la orientación en ningún lugar*. A esta extensión la llamaremos $\bar{\psi}$. Además se sigue cumpliendo en todo el círculo que

$$\bar{\psi} \circ f = r \circ \bar{\psi} \quad (1)$$

Describiremos brevemente a $\bar{\psi}$.

Llamemos $q_i = f^{-1}(q)$ y $p_i = r^{-1}(p)$ donde $p = \psi(q)$, y (a_i, b_i) a la componente conexa del complemento del Cantor que contiene a q_i .

$\bar{\psi}$ manda a cada intervalo $[a_i, b_i]$ al punto p_i y en el resto del círculo $\bar{\psi}$ es uno a uno. Así, manda a la unión de los intervalos $[a_i, b_i]$ sobre \mathbb{Q} y a casi todo el Cantor (a excepción de los puntos de la forma a_i ó b_i) en el complemento de \mathbb{Q} .



* O sea que podemos dar un levantamiento de la extensión de ψ que sea una función no decreciente.

Utilizando la propiedad (1) se obtiene facilmente que

$$\bar{\varphi} \circ f^n = r_2^n \circ \bar{\varphi}$$

Así, si \bar{q} es un punto del círculo tenemos que se cumple lo siguiente:

$$\bar{\varphi}(f^n(\bar{q})) = r_2^n(\bar{\varphi}(\bar{q}))$$

donde $\bar{p} = \bar{\varphi}(\bar{q})$

O sea que $\bar{\varphi}$ le está asociando a la órbita de f que pasa por \bar{q} una órbita de r_2 , a saber la que pasa por $\bar{p} = \bar{\varphi}(\bar{q})$.

Sin embargo si $\bar{q} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a_1, b_1]$, entonces \bar{p} está en O , por lo que $\bar{\varphi}$ le asocia a una infinidad de órbitas de f (todas las que parten de puntos de $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a_1, b_1]$) una sola órbita de $r_2: O$. Como $\bar{\varphi}$ es 1 a 1 en los demás puntos y $\bar{\varphi}$ es sobre, entonces cada órbita de r_2 distinta de O está asociada a una sola órbita de f .

Podemos pensar que es posible deformar de forma continua la estructura orbital de f , identificando una infinidad de órbitas de f en una sola órbita de r_2 , y a cada una de las -- otras órbitas sólo deformarlas hasta llevarlas a una órbita de r_2 .

Ahora veamos la estructura topológica de las órbitas de f .

Empezaremos por las órbitas que pasan por $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (a_1, b_1)$, o sea por el complemento del Cantor.

* Esto se puede demostrar facilmente por inducción sobre n ya que si suponemos que se cumple para n tendremos que

$$\bar{\varphi} \circ f^{n+1} = \bar{\varphi} \circ f \circ f^n = r_2 \circ \bar{\varphi} \circ f^n = r_2 \circ r_2^n \circ \bar{\varphi} = r_2^{n+1} \circ \bar{\varphi}$$

Para esto, veamos quién es $f(a_1, b_1)$.

Tenemos que

$$\bar{\varphi}(f[a_i, b_i]) = r_2(\varphi[a_i, b_i]) = p_{i+1}$$

por lo que

$$f[a_i, b_i] \subset [a_{i+1}, b_{i+1}]$$

Análogamente usando (1) para $n = -1$ se obtiene que

$$f[a_i, b_i] \supset [a_{i+1}, b_{i+1}]$$

Por lo que

$$f[a_i, b_i] = [a_{i+1}, b_{i+1}]$$

y como f es un homeomorfismo que conserva la orientación, tenemos que:

$$f(a_i) = a_{i+1} \quad f(b_i) = b_{i+1} \quad f(a_i, b_i) = (a_{i+1}, b_{i+1})$$

Así si $\bar{q} \in U(a_1, b_1)$, entonces su órbita constará de un punto en cada intervalo (a_i, b_i) . Así, vemos que su órbita consta de una infinidad de puntos aislados. Poniéndolo en símbolos, tenemos que, llamando \bar{Q} a la órbita de f que pasa por \bar{q} , ésta cumple con:

$$\bar{Q} \cap \bar{Q}^a = \emptyset$$

Es importante preguntarse cuál es el conjunto de puntos de acumulación de \bar{Q} , ya que éste será el lugar donde se encuentra el futuro remoto (y el pasado remoto) de los puntos de \bar{Q} .

Se puede ver que $\bar{Q}^a = C$ (donde C es el conjunto de Cantor).

Ahora analizaremos las órbitas de f que pasan por el conjunto de Cantor.

Comenzaremos viendo cuál es el conjunto de puntos de acumulación de cada una de estas órbitas.

Sea $\bar{q} \in C$ y \bar{Q} la órbita de f que pasa por \bar{q} .

Si $\bar{q} = a_m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, entonces su órbita será precisamente $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (recordemos que se vió que $f(a_1) = a_{1+1}$). El conjunto de puntos de acumulación de \bar{Q} es precisamente el Cantor.

Ahora supongamos que \bar{q} es cualquier punto del Cantor a excepción de los de la forma a_1 ó b_1 .

\bar{Q}^a está contenida en C , ya que \bar{Q} lo está, y C es un cerrado.

Se puede ver que \bar{Q}^a es todo C^* .

* Daremos un esbozo de la demostración:

Sea $c \in C$ y V un intervalo abierto que lo contiene. Se puede ver que $\varphi(V)$ es un intervalo; como la órbita bajo r_2 de $\varphi(\bar{q})$, es densa se tiene que:

$$\bar{Q} \cap \varphi(V) \neq \emptyset$$

Además, se puede escoger V arbitrariamente pequeña, tal que $\varphi^{-1}(\varphi(V)) \subset V$; y como \bar{Q} está en el Cantor menos los puntos a_1 o b_1 , tenemos que $\varphi^{-1}(\bar{Q}) = \bar{Q}$

Por lo que $\bar{Q} \cap V = \varphi^{-1}(\bar{Q} \cap \varphi(V)) \neq \emptyset$.

O sea c es punto de acumulación de \bar{Q} .

Así, tenemos que las órbitas que pasan por el Cantor, tiene como conjunto de puntos de acumulación el mismo Cantor. - Además, si una órbita pasa por el Cantor, nunca se saldrá de él. Por lo que, cada órbita de este grupo está formada por puntos que son, todos ellos, puntos de acumulación de sí misma. O sea que estas órbitas cumplen con: $\bar{Q} \cap \bar{Q}^a = \bar{Q}$

Para finalizar, resumiremos brevemente el comportamiento de f .

La estructura orbital de f la podemos deformar de forma continua en la estructura orbital de la rotación que tiene el mismo número rotacional que f . Esta deformación consiste en identificar una infinidad de órbitas de f y transformarlas en una sola órbita de la rotación mencionada. Cada una de las otras órbitas de f se transforma en cada una de las otras órbitas de la rotación.

Este segundo tipo de órbitas, junto con 2 órbitas más forman el conjunto de Cantor, el cual es el conjunto de puntos de acumulación de cualquier órbita de f .

Las orbitas que están contenidas en el Cantor están formadas por puros puntos de acumulación de si mismos ó sea que cumplan:

$$\bar{Q} \cap \bar{Q}^a = \bar{Q}$$

Las orbitas que están en el complemento del Cantor están formadas por puros puntos aislados ó sea que:

$$\bar{Q} \cap \bar{Q}^a = \emptyset$$

cada una de ellas pasa una sola vez por cada componente conexa del complemento del Cantor.

OTROS HOMEOMORFISMOS CON ROTACIONAL IRRACIONAL QUE NO TIENEN ÓRBITAS DENSAS.

Sea f el homeomorfismo con el que hemos venido trabajando y llamemos $g = f^2$.

Sea q un punto del círculo. La órbita bajo g de q es:

$$\{g^n(q)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f^{2n}(q)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

por lo que la órbita bajo g de q está contenida en la órbita bajo f de q . Para cubrir toda la órbita de f necesitamos dos órbitas de g : la que pasa por q y la que pasa por $f(q)$.

Recordemos la propiedad 1.

$$\varphi \circ f = r_\alpha \circ \varphi$$

De aquí se obtiene que

$$\varphi \circ g = r_\alpha^2 \circ \varphi$$

por lo que

$$\varphi(g^n(q)) = (r_\alpha^2)^n(\varphi(q)) \quad \text{donde } p = \varphi(q)$$

Si q es un punto del complemento del Cantor y (a_k, b_k) la componente conexa de este conjunto que lo contiene, tenemos que φ está identificando la órbita de g que pasa por q con todas las órbitas de g que pasan por puntos de $[a_k, b_k]$ y los está deformando en la órbita de la rotación r_α^2 que pasa por p .

Sin embargo, a diferencia de f , éstas no son las únicas órbitas que son identificadas por φ en una sola órbita de la rotación, ya que el punto $q' = f(q)$ no se encuentre en ninguna de las órbitas anteriores y sin embargo la órbita bajo g que pasa por q' se ve identificada por φ con todas las órbitas de g que pasan por puntos de $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ y φ transforma todas

estas órbitas en otra órbita de r_g^2 : la que pasa por $\varphi(q')$ (que no es la misma de la que pasa por $\varphi(q)$).

Así tenemos que, en tanto a la estructura orbital, la diferencia entre f y g es que mientras se puede identificar una familia de órbitas de f en una sola órbita de r_g , se necesita identificar 2 familias de órbitas de g en 2 órbitas de la rotación r_g^2 .

En ambos casos el resto de las órbitas (de f o de g) se identifican de forma biyectiva con el resto de las órbitas de la rotación correspondiente (r_g ó r_g^2).

Pasemos ahora a analizar las propiedades topológicas de las órbitas de g .

Esto lo podríamos hacer a pie, sin embargo utilizaremos las relaciones que existen entre las órbitas de f y de g y lo que ya conocemos de las órbitas de f .

Como ya habíamos visto, una órbita de f la podemos descomponer en 2 órbitas de g .

Sea Q la órbita de f que pasa por q y sean Q_1 y Q_2 las órbitas de g que pasan por q y $f(q)$ respectivamente. Tenemos que

$$Q = Q_1 \cup Q_2$$

Comenzaremos por ver cuál es el conjunto de puntos de acumulación de una órbita de g , por ejemplo de Q_1 . Obviamente este conjunto está contenido en el Cantor ya que $Q_1 \subset Q$ y Q es el Cantor. El problema para encontrar los puntos de acumulación de Q_1 sería que Q_1 y Q_2 estuvieran distribuidas de tal forma en el círculo, que no bastaran los puntos de acumulación

de una de ellas para cubrir el Cantor; o sea que Q_1 estuviese muy cargada hacia una parte del círculo y Q_2 hacia otra. Veremos que esto no es así.

Llamando D_1 y D_2 a las órbitas de r_c^2 que pasan por $\varphi(q)$ y $\varphi(r(q))$ respectivamente, tenemos que

$$\varphi(Q_1) = D_1 \quad \varphi(Q_2) = D_2$$

además, φ no invierte la orientación, por lo que cualquier propiedad referente al orden que tengan las órbitas de las rotaciones, la tendrán las órbitas de g .

Vemos que D_1 y D_2 están entrelazados, pues ambos conjuntos son densos en el círculo. Así también están entrelazadas Q_1 y Q_2 . Este hecho lo podemos enunciar de manera más precisa diciendo que: entre dos puntos cualesquiera de Q siempre hay puntos de Q_1 y de Q_2 .

Con esta propiedad es fácil checar que los puntos de acumulación de Q_1 es todo el Cantor.

Con esto vimos que en el caso de g , al igual que en el caso de f , el conjunto de puntos de acumulación de cualquier órbita es el conjunto de Cantor.

Ahora tomemos un punto q del complemento del Cantor. Si q está en un intervalo de la forma (a_{i_0}, b_{i_0}) con i_0 par, su órbita consta de un punto en cada intervalo (a_i, b_i) con i par (análogamente si i es impar). Por lo que las órbitas que están en el complemento del Cantor constan de puros puntos aislados.

Si q es un punto del Cantor, entonces todos los puntos de Q_1 serán puntos de acumulación de sí misma ya que

$$Q_1 \subset Q \subset Q^2 = Q_1^2$$

Así, vemos que las propiedades topológicas de las órbitas de g son exactamente las mismas a las de las órbitas de f .

De forma análoga podemos analizar el comportamiento -- del homeomorfismo $g_k = f^k$.

Es claro que el conjunto de puntos de acumulación de cada órbita de g_k es el conjunto de Cantor; además hay 2 tipos de órbitas: las que están contenidas en el cantor, que están -- formadas por puros puntos de acumulación de sí mismas y las que están fuera del Cantor, que están formadas por puros puntos aislados.

En tanto a su estructura orbital, tendremos k familias de órbitas de g_k con la propiedad de que φ identifica a cada familia y la deforma en una sola órbita de la rotación r_c^k (o sea de la rotación que tiene el mismo número rotacional al de g_k); obteniendo así k órbitas de r_c^k que provienen de k familias infinitas de órbitas de g_k .

Cada una de las otras órbitas de g_k se ve deformada en una órbita de r_c^k , cubriendo así la totalidad de órbitas de r_c^k .

Finalmente esbozaremos un último ejemplo de un homeomorfismo h , que no es del mismo tipo que ninguno de los anteriores.

Sea r una rotación con rotacional irracional y tomemos una colección numerable de órbitas distintas de r .

Construiremos un homeomorfismo h con número rotacional igual al de r y tal que se pueda deformar una familia de órbitas de h identificandola con una órbita de r , de las que escogimos previamente. Y esto hacerlo para una colección nume-

ble de familias de órbitas de h , identificando cada una de estas familias con cada una de las órbitas escogidas de la rotación.

Para esto llamemos O_1, \dots, O_n, \dots a las órbitas de la rotación escogidas y O a su unión.

Sea C el conjunto de Cantor y escojamos un punto de cada una de las componentes conexas de su complemento; a este conjunto de puntos lo llamaremos Q .

Aseguramos que se puede definir una biyección ξ de Q sobre O , que conserva la orientación. Esto se puede hacer, ya que Q es denso en orden (ver lema 2).

Es más, ξ se puede extender a todo el círculo de forma continua, sobre y que no invierta la orientación en ninguna parte.

Esta extensión manda a la cerradura de cada componente conexa del complemento del Cantor sobre cada punto de O y en el resto del círculo es inyectiva y cubre el complemento de O . Así, tenemos que ξ es análoga a la función η que construimos anteriormente; la diferencia es que en este caso O consta de una infinidad numerable de órbitas de r .

También se puede definir un homeomorfismo h que conserve la orientación y que cumpla que

$$\xi \circ h = r \circ \xi \quad \text{y} \quad h(Q) = Q$$

Este homeomorfismo h cumple con lo que deseábamos, además se puede ver que el conjunto de puntos de acumulación de cada una de sus órbitas es el Cantor y que hay 2 tipos de órbitas: las que están contenidas en el Cantor, que están formadas por puros puntos de acumulación de sí mismas y las que están fuera del Cantor, que están formados de puros puntos aislados.

Los argumentos para demostrar las propiedades enunciadas acerca de h serán totalmente análogos a los que ya usamos en los ejemplos anteriores.

3. PROPIEDADES Y OTROS CONCEPTOS INVOLUCRADOS.

En esta sección veremos las propiedades de los homeomorfismos con número rotacional irracional y algunos conceptos útiles para describir el comportamiento de éstos.

3.1 ω -Límite.

Como ya hemos comentado, el ω -límite y el ω -límite son conjuntos importantes para entender la dinámica global de un homeomorfismo. Empezaremos por analizar estos conjuntos.

En el caso de órbitas infinitas, los puntos de acumulación de una órbita dada son los puntos del ω -límite o del ω -límite de dicha órbita. En los ejemplos que dimos en la sección anterior vimos que este conjunto es el mismo para cualquier órbita. En el primer ejemplo, como las órbitas son densas, el conjunto de puntos de acumulación de cualquier órbita es todo el círculo. En los ejemplos siguientes el conjunto de puntos de acumulación de cualquier órbita es el conjunto ternario de Cantor.

De hecho se puede ver que, en general, el conjunto de puntos de acumulación de una órbita, no depende de la órbita.

Además es fácil ver que el ω -límite de una órbita es igual a su α -límite.

En el anexo se demostrará el siguiente:

Teorema 3. Sea f un homeomorfismo con rotacional irracional y Q y Q' dos de sus órbitas, entonces:

- a) ω -límite $Q = \alpha$ -lim Q
 - b) ω -lim(Q) = ω -lim(Q')
- se denotará por $\omega(f)$ a este conjunto.

La demostración del inciso b) depende fuertemente de que cualquier pareja de órbitas de f están entrelazadas entre sí, en el sentido de que, dados dos puntos de una órbita, siempre existe un punto de cualquier otra órbita entre ellos.

Para demostrar a) la clave es observar que las iteraciones positivas de un punto están entrelazadas con las negativas.

Ahora analizaremos la estructura topológica de $\omega(f)$.

* Ver pag. 117

Demostramos en la sección anterior que si una órbita no es densa en el círculo, entonces es densa, en ningún lado, por lo que también su w -límite es denso en ningún lado.

Se puede ver fácilmente que $w(f)$ es perfecto*.

Así tenemos que queda demostrado el siguiente

Teorema Si $\text{rot } f$ es irracional, entonces $w(f) = S^1$ ó $w(f)$ es un conjunto perfecto y denso en ningún lado.

A un conjunto que es perfecto y denso en ningún lado se le llama un conjunto de Cantor. El conjunto ternario de Cantor es uno de estos conjuntos, pero no es el único.

Es fácil ver que cualquier conjunto homeomorfo al conjunto ternario de Cantor es un Cantor. Es más, se puede ver que cualquier Cantor es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor.

El Teorema anterior lo podemos interpretar diciendo que $w(f)$ es todo el círculo o es, esencialmente, el conjunto ternario de Cantor, modulo un cambio de coordenadas.

* $w(f)$ es cerrado pues es un conjunto de puntos de acumulación. Veremos que es perfecto.
 Sea $q \in w(f)$, como $w(f)$ no depende de la órbita, entonces existe una sucesión de enteros n_k tal que $f^{n_k}(q) = q$. Además $f(w(f)) = w(f)$ (esto se demostrará posteriormente) - por lo que $f^{n_k}(q) \in w(f)$ de donde $q \in w(f)$ pues $f^{n_k}(q) \rightarrow q$.

A estos dos tipos de comportamiento se les dan los siguientes nombres:

Definición. Sea f con rotacional irracional.

- a) Si $w(f) = S^1$, se dice que f es transitivo.
- b) Si $w(f)$ es un Cantor, se dice que f es intransitivo.

El término transitivo se refiere a que las órbitas de f "transitan" por el círculo.

3.2 Conjuntos Invariantes.

Definición. Se dice que un conjunto D es invariante bajo f si $f(D) \subset D$.

Si D es invariante, entonces al iterar cualquier punto de D , siempre caerá en D . Si tanto D como D^c son conjuntos invariantes, entonces la órbita de cualquier punto de D , estará contenida en D^* .

Se puede ver fácilmente que tanto el $w\text{-lim } Q$ como su complemento son conjuntos invariantes**.

-
- * Si f es una biyección, como en nuestro caso, entonces D y D^c son invariantes si y solo si $f(D) = D$.
 - ** Sea $p \in w\text{-lim } Q$, sea $\{f^{n_k}(q)\}$ una sucesión tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(q) = p$ tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k+1}(q) = f(p)$ por lo que $f(p) \in w\text{-lim } Q$ y $f^{-1}(p) \in w\text{-lim } Q$. Y como f es una biyección, se tiene que $w\text{-lim } Q = f(w\text{-lim } Q)$

Definiremos aquí otros dos conjuntos importantes que resultan ser invariantes.

Puntos Recurrentes.

En los ejemplos de la sección anterior vimos que, en tanto a su estructura topológica, había dos tipos de órbitas: las formadas por puntos aislados o sea que cumplen

$$Q \cap Q^a = \emptyset,$$

y las que todos sus puntos son puntos de acumulación, o sea que cumplen

$$Q \cap Q^a = Q$$

Si observamos esto desde el punto de vista dinámico, tenemos que un punto que se encuentra en una órbita del primer tipo nunca vuelve a acercarse al lugar donde se encontraba y, al contrario, un punto de una órbita del segundo tipo, al iterar la función, eventualmente se acerca tanto como se quiera al punto de partida.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición.

- a) p es recurrente bajo f si dada cualquier vecindad de p , V , existe un entero $n \neq 0$ tal que

$$f^n(p) \in V.$$

- b) Denotaremos por $R(f)$ al conjunto de puntos recurrentes de f .

En términos de esta definición, tenemos que en los ejemplos hay dos tipos de órbitas: las formadas por puntos recurrentes y las formadas por puntos no-recurrentes, y esto se puede formular de forma más sencilla diciendo que tanto $R(f)$ como su complemento son conjuntos invariantes.

Este hecho es válido para cualquier homeomorfismo (aún los de rotacional racional).

Proposición $R(f)$ y su complemento son conjuntos invariantes*.

Puntos no errantes.

En los ejemplos de homeomorfismos intransitivos vimos que f manda cada componente conexa del complemento del ternario de Cantor en otra componente conexa del mismo conjunto y que las iteradas sucesivas de éstas nunca regresan a la original.

Así, vemos que un punto que no está en el Cantor, no sólo es no-recurrente sino que hay una vecindad de él, que al iterarla, nunca se vuelve a intersectar con la original.

Definición.

- a) Se dice que p es un punto errante si existe una vecindad de p , V , tal que para todo entero n , distinto de cero se cumple que $f^n(V) \cap V = \emptyset$
- b) Al conjunto de puntos que no son errantes se le denota por $\Omega(f)$

* Sea $q \in R(f)$, sea V una vecindad de $f(q)$. Sea $U = f^{-1}(V)$.
 U es una vecindad de q . Sea n tal que $f^n(U) \subset V$, entonces $f^{n+1}(U) \subset V$
 Por lo que $f(R(f)) \subset R(f)$. Para demostrar la otra contención obsérvese que $R(f^{-1}) = R(f)$ y aplicando lo anterior tenemos que
 $f^{-1}(R(f)) \subset R(f)$
 o sea $R(f) \subset f(R(f))$.

Proposición 4. $\Omega(f)$ y $\mathcal{R}(f)^c$ son invariantes (ver demostración en el anexo pag. 121)

El conjunto de puntos recurrentes y de puntos no-errantes son importantes, entre otras cosas , porque "acotan" al w -límite y al α -límite de las órbitas.

Es inmediato, de la definición de estos conjuntos, que

$$R(f) \subset \bigcup_{Q \text{ órbita de } f} w(Q) \cup \alpha(Q) \subset \Omega(f)$$

En el caso de homeomorfismo con rotacional racional, es sencillo ver que el conjunto de puntos recurrentes coincide con el conjunto de puntos no errantes y con el conjunto de puntos periódicos.

Si f es un homeomorfismo transitivo, todos los puntos del círculo son recurrentes, por lo que también se cumple que

$$R(f) = w(f) = \mathcal{R}(f)$$

En los ejemplos de homeomorfismos intransitivos que - dimos, estos tres conjuntos coinciden entre sí y con el ternario de Cantor.

Teorema 5.* Si f es un homeomorfismo que conserve la orientación, entonces

$$R(f) = \bigcup_{Q \text{ órbita } f} w(Q) \cup \alpha(Q) = \mathcal{R}(f)$$

Además si $\text{rot } f$ es racional, estos conjuntos coinciden con los puntos periódicos de f . Si rot es irracional se obtiene

$$R(f) = w(f) = \mathcal{R}(f)$$

3.3 Deformaciones de homeomorfismos en rotaciones.

En los ejemplos vimos que la dinámica de un homeomorfismo no transitivo, es en cierta medida parecida a la de una

* Ver pag. 122

rotación irracional, sólo que para algunas órbitas de la rotación, no corresponden "órbitas de puntos" del homeomorfismo mencionado, sino "órbitas de intervalos".

O sea que se puede deformar continuamente la dinámica de un homeomorfismo f en la de una rotación adecuada, pero "apachurrando" algunos intervalos en puntos.

Vimos también que el lugar donde la "deformación" es inyectiva es "casi todo el conjunto de puntos de acumulación de una órbita" o sea casi todo $\Omega(f)$.

Para formalizar estas ideas daremos las siguientes definiciones.

Definición. Si f y g son dos homeomorfismos de S^1 , se dice que f y g son conjugados si existe un homeomorfismo $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ que conserve la orientación tal que

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi$$

se denota $f \sim g$.

Como ya vimos, si f y g son conjugados entonces para cada $q \in S^1$ se tiene

$$\varphi(f^n(q)) = g^n(\varphi(q))$$

Por lo que a cada órbita de f , se le asocia una órbita de g -- con las mismas propiedades topológicas y de orden, puesto que es un homeomorfismo que conserva la orientación. Es más, como φ es la misma para cualquier órbita, entonces toda la dinámica generada por f será "igual" a la generada por g .

Debilitando este concepto definimos:

Definición. Se dice que f es semiconjugado a g ($f \sim g$) si existe una función (denominada semiconjugación) $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ --

continua, sobre γ y que no cambia la orientación tal que

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi$$

Este concepto corresponde a que algunas órbitas de g pueden representar "órbitas de intervalos" de f .

Si una conjugación o semiconjugación no está definida en todo el círculo diremos:

Definición. Sea A un subconjunto de S^1 invariante bajo f , se dice que f es A -conjugado (o A -semiconjugado) a g si existe una función

$$\varphi: A \rightarrow S^1$$

que conserva la orientación (o que no cambia la orientación) tal que

$$\varphi \circ f(q) = g \circ \varphi(q) \quad \text{para } q \in A$$

En estos casos denotaremos

$$f \simeq_A g \quad (\text{o } f \simeq_A g \text{ respectivamente})$$

Con este lenguaje, se pueden simplificar algunas propiedades. Por ejemplo, el teorema 1 queda en estos términos:

Teorema. Si $\text{rot } f$ es irracional y r es una rotación y Q es una órbita de f entonces

$$\text{rot } f = \text{rot } r \quad \text{si y solo si } f \simeq_Q r$$

La descripción de la dinámica de un homeomorfismo con rotacional irracional, se puede resumir y precisar en el siguiente teorema:

Teorema 6.

Sea $\zeta = \text{rot } f$, ζ irracional

Sea r la rotación con $\text{rot } r = \zeta$

Entonces

f es semiconjugada a r

y la semiconjugación es a lo más 2:1 en $\Omega(f)$

y ésta manda a la cerradura de cada componente conexa de $\Omega(f)^c$ en un punto.

La idea de la demostración es similar a la que usamos en los ejemplos para construir un homeomorfismo intransitivo, o sea tomar una órbita de f , tomar la biyección que conserva la orientación definida por

$$\varphi(f^n(q_0)) = r^n(p_0)$$

extender a φ a todo el círculo, y ésta será precisamente la semi conjugación.

Este teorema se demostrará en el anexo^{*}, antes demostrando el siguiente

Lema técnico 7.

Sean $X, Y \subset S^1$ tal que Y sea denso en S^1

Si existe una biyección que conserva la orientación

$$\varphi: X \rightarrow Y$$

Entonces

a) φ se puede extender a una función continua y sobre que no cambia la orientación

$$\bar{\varphi}: S^1 \rightarrow S^1$$

* Ver pag. 124

b) $\bar{\varphi}$ manda la cerradura de cada componente conexa de $S^1 - x^a$ en un sólo punto, y en el resto del círculo $\bar{\varphi}$ es 1 a 1.

De donde $\varphi|_{x^a}$ es a lo más 2 a 1

Del teorema se deduce de forma inmediata una propiedad, que ya demostramos:

Corolario. Si f es un homeomorfismo transitivo, entonces f es conjugado a una rotación.

Finalmente veremos que, dentro de las restricciones que imponen las propiedades que ya hemos enunciado, la dinámica de un homeomorfismo que conserve la orientación puede ser tan arbitraria como se quiere.

Más precisamente:

Teorema 8.* Sea Ω un conjunto de Cantor contenido en el círculo, sea z un número irracional, entonces existe f un homeomorfismo que conserve la orientación tal que

$$\text{rot } f = z \quad \text{y} \quad \Omega(f) = \Omega$$

Es más, si $\{O_m\}_m^M$ es una familia a lo más numerable de órbitas de f , la rotación de un ángulo $2\pi z$; se puede escoger f tal que para alguna semiconjugación φ de f a r_z se cumpla:

$$\varphi(\Omega^c) = \bigcup_{m=1}^M O_m$$

Aclararemos qué significa la segunda parte de este teorema.

Se puede ver fácilmente que si φ y φ' son dos semicon

* Ver pag. 129

Jugaciones de f a r_z , entonces sólo difieren en una rotación, o sea, existe r , rotación tal que $r \circ \varphi = \varphi'$, por lo que si

$$\varphi(\mathcal{R}^c) = \bigcup_{m=1}^M O_m$$

entonces

$$\varphi'(\mathcal{R}^c) = \bigcup_{m=1}^M O'_m$$

donde O'_m es la órbita de la rotación r_z determinada por $O'_m = r(O_m)$

Así, tenemos que el hecho de que $\varphi(\mathcal{R}^c) = \bigcup_{m=1}^M O_m$ está marcando el número de "órbitas de intervalos" de f , que se colapsan a "órbitas de puntos" de r_z y el orden que guardan éstas entre sí.

Para resumir estas propiedades, daremos la siguiente

Definición.

Sea f un homeomorfismo con rotacional irracional.

Se dice que $\{I_m\}_{m=1}^{M(f)}$ es un generador del conjunto de puntos errantes de f si

$$\mathcal{R}(f)^c = \bigcup_{m=1}^{M(f)} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(I_m)$$

donde cada I_m es una componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ y

$$f^n(I_m) \cap f^{n'}(I_{m'}) = \emptyset$$

para cada pareja de enteros n, n' y cada pareja $m, m' \in \{1, \dots, M(f)\}$

A $M(f)$ se le llame el índice de f y, en el caso que f sea transitivo, convenimos en que el índice de f es cero.

Usando estos conceptos, una consecuencia inmediata del teorema 8 es:

Corolario. Sean \mathcal{R} un conjunto de Cantor, z un irracional y M un natural o infinito. Existe un homeomorfismo f tal que

$$\mathcal{R}(f) = \mathcal{R} \quad \text{rot } f = z \quad M(f) = M$$

La idea para demostrar el teorema 8 es tomar un punto de cada componente conexa de \mathcal{R}^c y definir una biyección que conserva la orientación de este conjunto sobre $\bigcup_{m=1}^M O_m$, esta biyección se puede extender una función de todo el círculo que no cambia la orientación. Así quedará definida φ .

Conociendo φ es sencillo construir un homeomorfismo f tal que $\varphi \circ f = \tau \circ \varphi$

Claramente $\text{rot } f = \tau$

Para demostrar algunos detalles de lo esbozado y que $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}$ y $\varphi(\mathcal{R}^c) = \cup O_m$ se utiliza el lema técnico, el teorema 6 y el siguiente

Lema 9.^{*} Sea \mathcal{R} un conjunto de Cantor contenido en S^1 . Sea Q el conjunto formado escogiendo un punto de cada componente conexa de \mathcal{R}^c .

Entonces.

- a) $Q^{\mathbb{N}} = \mathcal{R}$
- b) Q es denso en orden

4. CLASIFICACION DE HOMEOMORFISMOS CON NÚMERO ROTACIONAL IRRACIONAL.

Lo que haremos aquí es clasificar los homeomorfismos que tienen número rotacional irracional, en tanto a las características cualitativas de la dinámica que generan.

Algunos de los conceptos relacionados con esta dinámica son el número rotacional ($\text{rot}(f)$) el conjunto de puntos no errantes ($\mathcal{R}(f)$) y el índice ($M(f)$).

Hemos mencionado ya que dos homeomorfismos conjugados tienen dinámicas "equivalentes". Esta idea la reforzaremos viendo la relación que hay entre éstos, en tanto a los conceptos arriba mencionados.

* Ver pag. 128

Proposición 10.

Si $f \approx g$ y ξ es una conjugación de f a g entonces

- a) $\text{rot } f = \text{rot } g$
- b) $\Omega(f)$ es homeomorfo a $\Omega(g)$. Este homeomorfismo está dado por la conjugación ξ (o sea $\xi\Omega(f) = \Omega(g)$).
- c) $M(f) = M(g)$

(Ver demostración en el anexo pag. 132)

Viendo esto, es natural clasificar los homeomorfismos observando si son conjugados o no.

Para formalizar esto, basta observar que la relación $f \approx g$ es una relación de equivalencia, la cual por lo tanto, induce clases de equivalencia.

El problema central será encontrar suficientes propiedades de la dinámica de un homeomorfismo, para que quede determinada la clase de equivalencia a la que pertenece.

Va hemos visto que si f es transitivo o sea $M(f) = \mathbb{D}$ y $\text{rot } f = \tau + 2\pi\alpha$ entonces $f \approx r_\alpha$ (donde r_α es la rotación de un ángulo $2\pi\alpha$) (ver teorema 6.)

Como \approx es una relación de equivalencia tenemos que si

$M(f) = M(g) = 0$ y $\text{rot } f = \text{rot } g$ entonces $f \simeq g$.

¿Bastará la igualdad en el número rotacional y del índice para determinar la clase de equivalencia?*

Veamos qué pasa si el índice es uno. Sean f y g homeomorfismos con rotacional τ y $M(f) = M(g) = 1$.

Esbozaremos la construcción de una semiconjugación de f a g .

Sea I un generador de $\mathcal{R}(f)^c$ y J uno de $\mathcal{R}(g)^c$. Podemos definir un homeomorfismo

$$\xi: I \rightarrow J$$

que conserve la orientación.

Éste se puede extender a una conjugación

$$\xi: \mathcal{R}(f)^c \rightarrow \mathcal{R}(g)^c$$

de tal forma que

$$\xi(f^n(x)) = g^n(\xi(x))$$

y

$$\xi(f(q)) = g(\xi(q)) \quad \text{para } q \in \mathcal{R}(f)^c$$

Si pudiéramos garantizar que ξ conservara la orientación, por el lema técnico tendríamos que ξ se podría extender a S^1 , continuamente y conservando la orientación.

* En el caso intransitivo, el conjunto de puntos errantes es un conjunto de Cantor y todos los Cantores son homeomorfos, por lo que (b) no influye en determinar la clase de equivalencia.

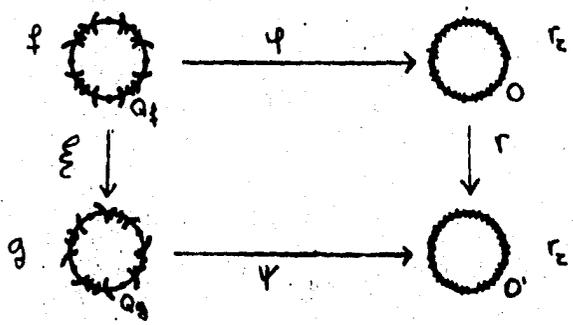
Como ξ conserva la orientación en cada componente conexa de $\Omega(f)^c$, basta ver que ξ no está cambiando "el orden de las componentes conexas de $\Omega(f)^c$ ".

Más precisamente: si $q_0 \in I$ y Q_f es la órbita de f que pasa por q_0 , entonces basta ver que

$$\xi|_{Q_f}$$

conserva la orientación. Veremos que esto último es cierto.

Sea φ una semiconjugación de f a r_2 y ψ una de g a r_2 , $O = \varphi(\Omega(f)^c)$, $O' = \psi(\Omega(g)^c)$, $Q_f = \xi(Q_0)$
 O y O' son órbitas de r_2 y Q_g de g



Se puede ver que hay una rotación tal que $r(O) = O'$, esta rotación es una conjugación de r_2 a r_2 . Entonces ξ cumple que

$$\psi \circ \xi = r \circ \varphi$$

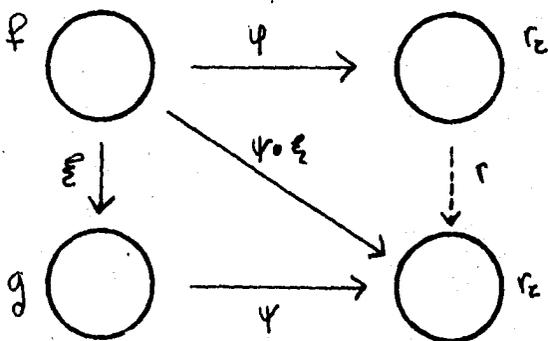
Si restringimos ψ a Q_g tenemos que ψ es invertible de donde

$$\xi|_{Q_f} = \psi^{-1} \circ r \circ \varphi$$

Por lo que $\xi|_{Q_f}$ conserva la orientación, pues ψ^{-1} , r y φ lo hacen.

Con esto hemos demostrado que si $\text{rot}(f) = \text{rot}(g)$ y $M(f) = M(g) = 1$ entonces $f \simeq g$.

La dificultad surge cuando el índice es mayor que uno. Aquí enfocaremos el problema "al revés". Supongamos que $f \simeq g$ y que $M(f) = M(g)$.



Sean φ, ξ, ψ como antes. Tenemos que $\psi \circ \xi$ es una semiconjugación de f a r_2 . Como φ es otra y todas estas semiconjugaciones "difieren en una rotación", existe r rotación tal que

$$r \circ \varphi = \psi \circ \xi$$

- Sean φ y φ' semiconjugaciones de f a r_2 . Veremos que existe una rotación r tal que $r \circ \varphi = \varphi'$. Sea $q \in S^1$ y q_2 su órbita bajo f . Sea r la rotación tal que $r(\varphi(q)) = \varphi'(q)$. Usando que $r \circ r = r \circ r$, es inmediato que $r \circ \varphi(f(q)) = r_2(\varphi(q))$ como $\varphi'(f(q)) = r_2(\varphi'(q))$ tenemos que

$$r \circ \varphi|_{q_2} = \varphi'|_{q_2}$$

Por continuidad se obtiene que $r \circ \varphi|_{\mathbb{R}^2} = \varphi'|_{\mathbb{R}^2}$ y $r \circ \varphi$ y φ' no cambia la orientación, y coinciden en un conjunto cuya imagen es un denso, por lo que $r \circ \varphi = \varphi'$.

De aquí obtenemos que

$$r(\varphi(\mathcal{R}(f)^c)) = \psi(\mathcal{R}(g)^c) = \psi(\mathcal{R}(g)^c)$$

Resumiendo: lo que vimos es que si $f \approx g$ y φ y ψ son semiconjugaciones de f y g respectivamente a r , entonces existe rotación r tal que

$$r(\varphi(\mathcal{R}(f)^c)) = \psi(\mathcal{R}(g)^c)$$

Resulta que esta condición, junto con el rotacional, basta para determinar la clase de equivalencia de un homeomorfismo.

En el anexo se demuestra:

Teorema 11. Si f y g tienen rotacional irracional y φ y ψ son semiconjugaciones de f y g a las rotaciones correspondientes entonces

$$f \approx g$$

si y sólo si se cumplen las condiciones

- i) $\text{rot } f = \text{rot } g$
- ii) Existe una rotación r tal que

$$r(\varphi(\mathcal{R}(f)^c)) = \psi(\mathcal{R}(g)^c)$$

Para demostrar este teorema, se demostrará primero:

Lema 12. Si $\text{rot } f$ y $\text{rot } g$ son irracionales, entonces

$$f \approx g \quad \text{si y sólo si} \quad f \approx_r g$$

El teorema 11, si bien es importante en tanto que da condiciones necesarias y suficientes para saber si dos homeomorfismos son conjugados, no está formulado explícitamente en términos intrínsecos del homeomorfismo.

Lo que haremos primero es entender el significado dinámico

mico de la condición

$$r(\psi(\mathcal{R}(f)^c)) = \psi(\mathcal{R}(g)^c) \quad (1)$$

y después plantearemos un teorema equivalente en términos de propiedades directas de f y g , o sea, sin hacer alusión a semiconjugaciones y a rotaciones.

Sabemos que

$$\psi(\mathcal{R}(f)^c) = \bigcup_{m=1}^{M(f)} O_m$$

donde cada O_m es una órbita de la rotación r_{α} . Haciendo lo análogo para g obtenemos que

$$r\left(\bigcup_{m=1}^{M(g)} O_m\right) = \bigcup_{m=1}^{M(g)} O'_m$$

De aquí vemos que para que la rotación r exista es necesario que $M(f) = M(g)$.

Sin embargo no es suficiente, por ejemplo si $M(f) = M(g) = 2$, y O_1, O_2, O'_1 y O'_2 son cuatro órbitas arbitrarias de r , no necesariamente existe una rotación r tal que

$$r(O_1 \cup O_2) = O'_1 \cup O'_2$$

Esto es fácil ver, puesto que una rotación está determinada por un ángulo*.

¿Qué propiedades deben cumplir estas órbitas para que exista la rotación r ?

Se ve que la existencia de tal rotación es equivalente

* Recordemos que el teorema A nos garantiza la existencia de f y g tales que $\psi(\mathcal{R}(f)^c) = O_1 \cup O_2$ y $\psi(\mathcal{R}(g)^c) = O'_1 \cup O'_2$

a que: dados $p_1 \in O_1$ existan $p'_1 \in O'_1$ tales que

$$\chi \{P_1, P_2\} = \chi \{P'_1, P'_2\}$$

Se puede decir, en términos vagos, que el ángulo entre las órbitas O_1 y O_2 debe ser el mismo que el determinado por las órbitas O'_1 y O'_2 o que la forma en que están intercalados O_1 y O_2 debe ser la misma en que están O'_1 y O'_2 .

Como ψ y φ no cambian la orientación, podemos interpretar a (1) como que la forma de intercalarse las "órbitas" de los intervalos generadores del conjunto de puntos errantes es la misma para f y para g .

En lo que sigue se trabajará para cambiar el enunciado del teorema 11 poniéndolo en términos de propiedades directas de f y g .

La idea es definir lo que será el ángulo entre dos órbitas de una rotación r_z y ver que unas órbitas de r_z se pueden rotar simultáneamente en otras, si los ángulos entre ellas coinciden. Con esto se podrá determinar la clase de equivalencia de un homeomorfismo con ciertos "ángulos" y el número rotacional.

Empezaremos definiendo el ángulo entre dos órbitas de la rotación r_z .

Sean $p_1 \in O_1$ y $p_2 \in O_2$. Buscaremos una relación entre

$$\chi \{P_1, P_2\} \text{ y } \chi \{r_z^n(P_1), r_z^m(P_2)\}$$

Sean x_1 y x_2 coordenadas de p_1 y p_2

$$\chi \{P_1, P_2\} = (x_1 - x_2) \bmod 2\pi$$

$$\chi \{r_z^n(P_1), r_z^m(P_2)\} = (x_1 + n\epsilon - x_2 - m\epsilon) \bmod 2\pi$$

Por lo que existe k , entero tal que

$$\chi \{P_1, P_2\} = \chi \{r_z^n(P_1), r_z^m(P_2)\} + (m-n)\epsilon + k$$

Para definir formalmente $\chi \{O_1, O_2\}$ usaremos que la

relación \sim_z definida por

$$\alpha \sim_z \beta$$

si existen enteros k_1 y k_2 tales que

$$\alpha = \beta + k_1 z + k_2$$

es una relación de equivalencia.

Denotaremos por $[a]_z$ la clase de equivalencia de a .

Definición. Si O_1 y O_2 son órbitas de la rotación r_z de finimos:

$$\chi \{O_1, O_2\} = [x_1, -x_2]_z$$

donde x_1 es una coordenada de algún punto de O_1 .

Con esta definición es fácil ver que existe una rotación r tal que $r(O_1 \cup O_2) = O'_1 \cup O'_2$ si y sólo si $\chi \{O_1, O_2\} = \chi \{O'_1, O'_2\}$

Más generalmente:

Proposición 13. Sean $\{O_m\}_{m=1}^M$ y $\{O'_m\}_{m=1}^M$ dos familias a lo más numerables de órbitas de r_z .

Existe una rotación r tal que

$$r(\cup O_m) = \cup O'_m$$

si y sólo si existe una permutación de $\{1, \dots, M\}$ $m \mapsto k_m$

tal que $\chi \{O_i, O_m\} = \chi \{O'_{k_i}, O'_{k_m}\}$

Se demuestra en el anexo pag. 141

Con esto se puede modificar el enunciado del teorema 11 en los siguientes términos:

Teorema (segunda versión del T. 11).

Sean f y g homeomorfismos con rotacional irracional.

$$\{I_m\}_{m=1}^{M(f)}, \{J_m\}_{m=1}^{M(g)}$$

generadores de $\mathcal{R}(f)^{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{R}(g)^{\mathbb{C}}$ respectivamente.

φ y ψ semiconjugaciones de f y g a $r_{\mathbb{C}}$ entonces

$$f \approx g$$

si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $\text{rot } f = \text{rot } g$
- ii) $M(f) = M(g) = M$
- iii) Existe una permutación $m \mapsto k_m$ de $\{1, \dots, M\}$ tal que

$$\{ \varphi(I_1), \varphi(I_m) \} = \{ \psi(J_{k_1}), \psi(J_{k_m}) \}$$

La equivalencia de esta versión con la primera es consecuencia directa de la proposición anterior.

Lo deseable sería poder quitar la referencia a las semiconjugaciones.

Definiremos el ángulo entre dos órbitas de un homeomorfismo y veremos que, con esta definición, se obtiene que éste es un invariante bajo cualquier semiconjugación a una rotación.

Siguiendo la idea que usamos para medir el ángulo entre órbitas de una rotación, buscaremos una relación entre

$$\{q_1, q_2\} \text{ y } \{f^n(q_1), f^m(q_2)\} \text{ donde } q_1 \in Q_1 \text{ y } q_2 \in Q_2.$$

Sin embargo es claro que como f no necesariamente es una rotación, no es de esperarse que la sola medida de estos ángulos determine la medida de lo que será $\chi \{q_1, q_2\}$.

Recordando la forma en que se define el número rotacional (o sea el promedio de los ángulos entre iteradas sucesivas de f), definiremos.

$$\chi(q_1, q_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \chi \{f^i(q_1), f^i(q_2)\}$$

$\chi(q_1, q_2)$ es el promedio de los ángulos entre algunos puntos de q_1 y de q_2

La idea será ahora encontrar una relación sencilla entre $\chi(q_1, q_2)$ y $\chi(f^n(q_1), f^m(q_2))$.

Antes de avanzar más formalicemos esta idea. Para facilitar el trabajo usaremos levantamientos de f y coordenadas.

Definición. Sea F un levantamiento de f , definimos la función

$$\chi(z_1, z_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n F^i(z_1) - F^i(z_2)$$

* Checaremos que este límite existe.

$$|F^i(z_1) - F^i(z_2)| \leq |z_1 - z_2| + 1$$

de donde

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |F^i(z_1) - F^i(z_2)| \leq |z_1 - z_2| + 1$$

Además F^i es creciente, por lo que $F^i(z_1) - F^i(z_2)$

mantiene el mismo signo $\forall i$ por lo que $\chi_n(z_1, z_2)$ es una sucesión monótona y acotada por tanto converge.

En estos términos lo que nos interesa es poder relacionar $\gamma(z_1, z_2)$ con $\gamma(F^k(z_1), F^l(z_2))$. Esta relación es la misma que mantienen los ángulos entre puntos de dos órbitas de la rotación r_z :

$$\gamma(F^k(z_1), F^l(z_2)) = \gamma(z_1, z_2) + k_1 z + k_2$$

donde k_1 y k_2 son enteros.

Para llegar a demostrar esto se utilizan algunas propiedades que se demostrarán en el anexo (pag. 142)

Proposición. 14.

γ tiene las siguientes propiedades:

- i) $\gamma(z_1, z_2) + \gamma(z_2, z_3) = \gamma(z_1, z_3)$
- ii) $\gamma(z_1, z_2) = -\gamma(z_2, z_1)$
- iii) $\gamma(z_1, z_2 + m) = \gamma(z_1, z_2) + m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$
 - a) $\gamma(z_1, F^k(z_2)) = \gamma(z_1, z_2) + k z + m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$
 - b) $\gamma(F^k(z_1), F^l(z_2)) = \gamma(z_1, z_2) + (l-k) z + m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$
 - c) Si F' es otro levantamiento de f , entonces

$$\gamma(F'^k(z_1), F'^l(z_2)) = \gamma(F^k(z_1), F^l(z_2)) + m$$
 para algún $m \in \mathbb{Z}$.

Con esto podemos dar una definición formal del ángulo entre dos órbitas de un homeomorfismo. Recordemos que al hacer lo, para una rotación usamos la relación de equivalencia \sim_z definida por

$$\gamma \sim_z \gamma' \text{ si existen enteros } k_1 \text{ y } k_2 \text{ tales que } \gamma = \gamma' + k_1 z + k_2$$

Definición. Sean Q_1 y Q_2 órbitas de un homeomorfismo f con rotacional \mathcal{Z} . Sean q_1 y q_2 puntos de Q_1 y Q_2 respectivamente y z_1 y z_2 dos de sus coordenadas, F un levantamiento de f .

Definimos

$$\mathcal{X}\{Q_1, Q_2\} = [\mathcal{X}(z_1, z_2)]_{\mathcal{Z}}$$

donde $[\mathcal{X}]_{\mathcal{Z}}$ denota la clase de equivalencia de \mathcal{X} .

La propiedad (iii) garantiza que no hay problema al tomar distintas coordenadas de un punto y la (c) que tampoco lo hay al tomar cualquier levantamiento.

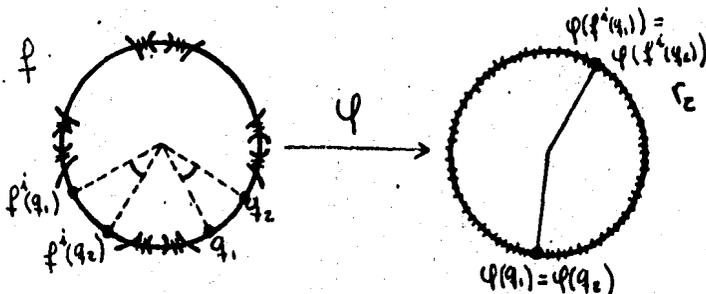
El siguiente paso será ver que relación existe entre $\mathcal{X}\{Q_1, Q_2\}$ y $\mathcal{X}\{\varphi(Q_1), \varphi(Q_2)\}$ donde φ es una semiconjugación de f a $r_{\mathcal{Z}}$. (Nótese que $\varphi(Q_1)$ y $\varphi(Q_2)$ son órbitas de $r_{\mathcal{Z}}$).

Si Q_1 y Q_2 tienen puntos q_1, q_2 en la cerradura de una misma componente conexa de $\Omega(f)^c$, digamos \bar{I} , entonces $f^i(q_j) \in f^i(\bar{I})$ por lo que el ángulo entre $f^i(q_1)$ y $f^i(q_2)$ no excederá la longitud de $f^i(\bar{I})$. De donde la suma de los ángulos es menor o igual a la longitud de $\Omega(f)^c$. Por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{X}\{Q_1, Q_2\} = [0]_{\mathcal{Z}}$$

Además en este caso $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2)$ de donde

$$\mathcal{X}\{Q_1, Q_2\} = [0]_{\mathcal{Z}} = \mathcal{X}\{\varphi(Q_1), \varphi(Q_2)\}$$



Se puede ver que si Q_1 y Q_2 no se intersecan en una misma componente conexa de $\Omega(f)^c$, o sea que para toda I - componente conexa de $\Omega(f)^c$ se tiene que

$$Q_1 \cap \bar{I} \neq \emptyset \Rightarrow Q_2 \cap \bar{I} = \emptyset$$

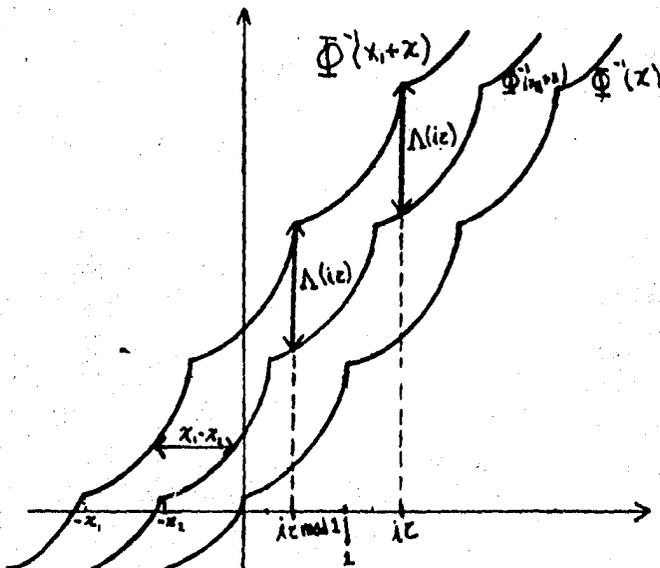
entonces se puede restringir φ de tal forma que podemos hablar de φ^{-1} y que $Q_j \subset \varphi^{-1}(S^j)$

Con levantamientos adecuados tenemos que

$$\begin{aligned} Y(z_1, z_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n F^j(z_1) - F^j(z_2) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \Phi^{-1}(x_j + iz) - \Phi^{-1}(x_j + iz) \end{aligned}$$

donde $x_j = \Phi^{-1}(z_j)$ es coordenada de algún punto de $\varphi(Q_j)$ y z_j es coordenada de Q_j .

Este segundo límite lo podemos interpretar intuitivamente de la siguiente manera.



La función

$$\Lambda(x) = \Phi^{-1}(x_1 + x) - \Phi^{-1}(x_2 + x)$$

es periódica de período 1.

Nos interesa calcular:

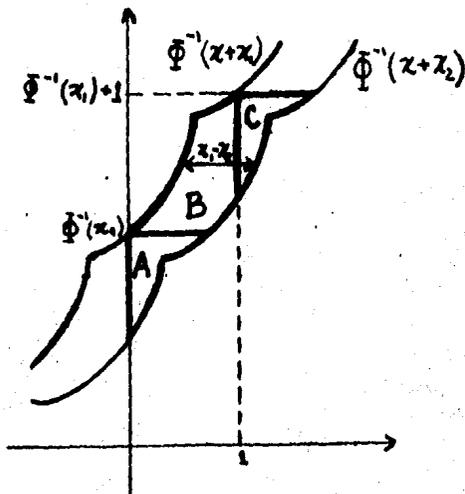
$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \Lambda(iz) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \Lambda(iz \bmod 1)$$

Si $\{iz \bmod 1\}_{i=0}^n$ se encontrara "bien distribuido" en el intervalo unitario, para n suficientemente grande, tendríamos que la distancia entre dos puntos consecutivos de este conjunto sería del orden de $\frac{1}{n}$, por lo que $\sum_{i=0}^n \Lambda(iz \bmod 1) \frac{1}{n}$

sería esencialmente una suma de Riemann correspondiente a la integral

$$\int_0^1 \Lambda(x) dx$$

Si Φ^{-1} tiene un comportamiento "decente", podemos interpretar este integral por el área entre las gráficas de las funciones $\Phi^{-1}(x_1 + x)$ y $\Phi^{-1}(x_2 + x)$ con $x \in [0, 1]$



$$\int_0^1 \Lambda(x) dx = \text{Area}(A \cup B)$$

Tenemos que $\text{Area } A = \text{Area } C$ de donde

$$\int_0^1 \Lambda(x) dx = \text{Area}(B \cup C)$$

Además cada recta horizontal intersecta a la región $B \cup C$ en segmentos de longitud $x_1 - x_2$; aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que:

$$\int_0^1 \Lambda(x) dx = x_1 - x_2$$

De aquí tenemos que

$$f(z_1, z_2) = x_1 - x_2$$

Por lo que

$$\chi \{Q_1, Q_2\} = \chi \{ \varphi(Q_1), \varphi(Q_2) \}$$

Este argumento está suponiendo que la sucesión $\{iz \bmod 1\}$ está bien "distribuida" en el intervalo. Esto lo garantiza el teorema de equipartición módulo 1 que dice.

Teorema 15. (Bohl, Sierpinski, Weyl).

Sea $\Lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 1 e integrable, z un número irracional, entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(x_0 + nz) = \int_0^1 \Lambda(x) dx$$

Este se demuestra en el anexo pag. 144

En el anexo* se precisará la demostración del siguiente lema:

Lema 16.

Si $\text{rot } f = z$ y φ es una semiconjugación de f a r_z entonces

$$\chi \{Q_1, Q_2\} = \chi \{ \varphi(Q_1), \varphi(Q_2) \}$$

* Ver pag. 147

donde Q_1 y Q_2 son órbitas de f .

De aquí se obtiene la 3a. versión del teorema 11.

Teorema

Sean f y g homeomorfismos con rotacional irracional.
Sean $\{I_m\}_{m=1}^{M(f)}$ y $\{J_m\}_{m=1}^{M(g)}$ generadores de $\Omega(f)$ y $\Omega(g)$; Q_m y Q'_m órbitas de f y g respectivamente tales que $Q_m \cap I_m \neq \emptyset$ y $Q'_m \cap J_m \neq \emptyset$ entonces

$$f \simeq g$$

Si y sólo si se cumplen las 3 condiciones:

- i) $\text{rot } f = \text{rot } g$
- ii) $M(f) = M(g) = M$
- iii) Existe una permutación de $\{1 \dots M\}$ $m \mapsto k_m$ tal que $\{Q_i, Q_m\} = \{Q_{k_i}, Q_{k_m}\}$

A N E X O .

Teorema 1.

Si f es tal que tiene una órbita periódica de período n entonces

- i) Todas sus órbitas periódicas tienen período n
- ii) El w -límite de cualquier órbita es una órbita periódica.

Demostración.

Sea $O = \{f^k(o)\}$ una órbita de período n .

Sean I_1, I_2, \dots, I_n las componentes conexas de $S^1 - O$

Sea Q una órbita periódica de f .

Sea $q \in Q$ y s tal que $q \in I_s$.

Como vimos en texto

$$Q \cap I_s = \{f^{nk}(q)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Por lo que si

$$f^m(q) = q \text{ entonces } m = nk \quad (1)$$

para algún entero k

Además $\{f^{nk}(q)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es la órbita bajo f^n de q , y f^n tiene un punto fijo, por lo que $\{f^{nk}(q)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión monótona o un punto.

En este caso por (1) vemos que es un punto.

De donde

$$f^n(q) = q \text{ y } f^m(q) \neq q \text{ si } \nexists k \mid n$$

Con esto queda demostrado (1).

11) Sea Q una órbita de f y $\bar{q} \in \omega$ -límite

Sea S tal que $\bar{q} \in I_S$

Veremos que, \bar{Q} , la órbita de \bar{q} es periódica.

sea $q \in Q \cap I_S$

Por las observaciones anteriores tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(q) = \bar{q}$$

De donde

$$f^n(\bar{q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n(k+1)}(q) = \bar{q}$$

Por otra parte, es inmediato que

$$\bar{Q} \subset \omega\text{-lim } Q \quad (2)$$

El ω -límite Q consta de a lo más n puntos, uno en cada I_i , pues Q está formada de sucesiones monótonas en cada I_i , y por (2) tenemos que

$$\bar{Q} = \omega\text{-lim } Q$$

A N E X O .

Teorema 1.

Sea f un homeomorfismo con número rotacional irracional y Q una de sus órbitas. Entonces

$\text{rot } f = z$ si y sólo si Q es recorrida bajo f en orden z .

Demostración.

(\Rightarrow) Sea F un levantamiento de f y z una coordenada de Q .

Veremos que

$$\begin{aligned} \varphi: Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(f^n(q)) &= r^n(p) \quad \text{donde} \quad c(0) = p \end{aligned}$$

conserva la orientación.

La función

$$\begin{aligned} \Phi: F^z(x) + \mathbb{Z} &\rightarrow z\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ \Phi(F^n(x) + m) &= nx + m \end{aligned}$$

Cumple con

$$\Phi(y + k) = \Phi(y) + k$$

y

$$c \circ \Phi = \varphi \circ c$$

Por lo que basta ver que Φ sea creciente para que conserve la orientación. En [N] pag. 42 se demuestra que esto es cierto.

(\Leftarrow) Ahora supongamos que Q es recorrida bajo f en orden ≥ 0 o sea que

$$\begin{aligned} \varphi: Q &\rightarrow O \\ \varphi(f^n(q)) &= r_z^n(p) \end{aligned}$$

es una biyección que conserve la orientación. Primero veremos que existen levantamientos Φ , R y F de φ , r_z y f respectivamente y coordenadas x y y de p y q tales que

$$\Phi(F^n(y)) = R^n(x) \text{ para toda } n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Sean Φ y F levantamientos de φ y f y y una coordenada de q .

$$\text{Sea } x = \Phi(y) \quad (2)$$

x es una coordenada de p

$$\Phi(F(y)) \text{ es una coordenada de } \varphi(f(q)) = r_z(p)$$

Sea R el levantamiento de r_z tal que

$$R(x) = \Phi(F(y)) \quad (3)$$

$\Phi \circ F$ y $R \circ \Phi$ son levantamientos de $\varphi \circ f = r \circ \varphi$ y usando (2) y (3) se ve que coinciden en un punto.

Recordemos que todos los levantamientos de funciones que conservan la orientación difieren por un entero, de esto tenemos que

$$\Phi \circ F = R \circ \Phi$$

De donde

$$\Phi \circ F^n = R^n \circ \Phi$$

En particular evaluando en y , queda demostrado (1).

Ahora veremos que $\text{rot } f = \text{rot } \varepsilon = \varepsilon$

Para esto basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F^n(y)}{n} - \frac{R^n(z)}{n} \right| = 0 \quad (4)$$

Tenemos que

$$\left| \frac{F^n(y)}{n} - \frac{R^n(z)}{n} \right| = \left| \frac{F^n(y)}{n} - \frac{\Phi(F^n(y))}{n} \right| \leq \frac{M}{n} \quad (5)$$

donde $M = \sup. |\varepsilon - \Phi(z)|$

Este supremo existe pues $\varepsilon - \Phi(z)$ es periódica y Φ es creciente. Claramente (5) implica (4), con lo que queda demostrado este teorema.

Lema 2. Dados O y Q subconjuntos del círculo, numerables y densos en orden, existe una biyección $\varphi: O \rightarrow Q$, que conserva la orientación.

Demostración.

Lo que vamos a demostrar es lo siguiente: Si \tilde{O} y \tilde{Q} son conjuntos numerables, densos en orden, contenidos en un intervalo abierto (a, b) y (c, d) respectivamente, que no alcanzan su máximo ni su mínimo, entonces existe una biyección creciente de \tilde{O} sobre \tilde{Q} .

Veamos como esto implica el lema. Sean O y $Q \subset S^1$ numerables y densos en orden,

Sean p_1 y p_2 dos puntos de O y q_1 y q_2 dos puntos de Q .

$$\begin{aligned} \text{Sean } O_1 &= O \cap (p_1, p_2) \\ O_2 &= O \cap (p_2, p_1) \\ Q_1 &= Q \cap (q_1, q_2) \\ Q_2 &= Q \cap (q_2, q_1) \end{aligned}$$

y sean $\varphi_1: O_1 \rightarrow Q_1$ $\varphi_2: O_2 \rightarrow Q_2$

biyecciones crecientes (éstas existen suponiendo que el resultado que se enunció al principio es cierto, claramente cumplen con las hipótesis que se les pidió a \tilde{O} y a \tilde{Q}).

Definimos $\varphi: O \rightarrow Q$ de la siguiente manera:

$$\varphi(p) = \begin{cases} \varphi_1(p) & \text{si } p \in O_1 \\ \varphi_2(p) & \text{si } p \in O_2 \\ q_1 & \text{si } p = p_1 \\ q_2 & \text{si } p = p_2 \end{cases}$$

φ así definida, claramente es una biyección que conserva la orientación.

A continuación demostraremos el enunciado que mencionamos.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una numeración de \tilde{D} y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una de \tilde{U} .

Daremos una reenumeración de \tilde{D} inductivamente:

Sean:

$$x_{i_1} = x_1$$

$$I_1 = (a, b) \quad I_2 = (a, x_{i_1}) \quad I_3 = (x_{i_1}, b)$$

se cumplen las siguientes propiedades:

$$i_1 = \min \{n \mid x_n \in I_1\}$$

$$I_2 \cup I_3 = (a, b) - \{x_{i_1}\}$$

$$I_2 < I_3$$

$$I_s \cap \tilde{D} \neq \emptyset \text{ para } s \in \{1, 2, 3\}$$

Esto último se debe a que \tilde{D} no alcanza su máximo ni su mínimo.

* Si I y J son dos intervalos, estamos denotando $I < J$, al hecho de que $x < y$ para todo $x \in I$ y $y \in J$.

Supongamos que ya definimos

$$i_1, \dots, i_{2^{k-1}-1} \quad \text{y} \quad I_1, \dots, I_{2^{k-1}}$$

y que se cumplen las siguientes propiedades

$$i_s = \min \{n \mid x_n \in I_s\} \quad \text{para } s \in \{1, \dots, 2^{k-1}-1\} \quad (1)$$

$$\bigcup_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} I_i = (a, b) - \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{2^{k-1}-1}}\} \quad (2)$$

$$I_{2^{k-1}} < I_{2^{k-2}} < \dots < I_{2^k-1} \quad (3)$$

$$I_s \cap \tilde{O} \neq \emptyset \quad \text{para } s \in \{1, \dots, 2^k-1\} \quad (4)$$

Definiremos

$$i_{2^{k-1}}, \dots, i_{2^k-1} \quad I_{2^k}, \dots, I_{2^{k+1}-1}$$

Sea:

$$i_s = \min \{n \mid x_n \in I_s\} \quad \text{para } s \in \{2^{k-1}, \dots, 2^k-1\} \quad (1')$$

i_s está definida por (4).

Como $(a, b) - \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{2^{k-1}-1}}\}$ son 2^k intervalos -- abiertos ajenos, se pueden definir $I_{2^k}, \dots, I_{2^{k+1}-1}$ de tal forma que cumplan:

$$I_{2^k} < \dots < I_{2^{k+1}-1} \quad (2')$$

$$\bigcup_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} I_i = (a, b) - \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{2^k-1}}\} \quad (3')$$

Además garantizamos que

$$I_s \cap \tilde{O} \neq \emptyset \quad \text{para } s \in \{1, \dots, 2^{k+1}-1\} \dots \quad (4')$$

pues \tilde{O} es denso en orden y no alcanza sus extremos.

Con esto hemos construido la sucesión $\{i_s\}_{s \in \mathbb{N}}$. Veremos que $\{x_{i_s}\}_{s \in \mathbb{N}}$ es otra enumeración de \tilde{O} .

Lo demostraremos por inducción.

$$i_1 = 1$$

Supongamos que

$$\{1, 2, \dots, k\} \subset \{i_s\}_{s \in \mathbb{N}}$$

Veremos que $k+1$ también lo está.

Sean

$$\bar{x}, \bar{x} \in \{x_1, \dots, x_k\}$$

tales que

$$x_{k+1} \in (\bar{x}, \bar{x}) \quad \vee \quad (\bar{x}, \bar{x}) \cap \{x_1, \dots, x_k\} = \emptyset$$

Entonces

$$(\bar{x}, \bar{x}) \in I_s \quad \text{para alguna } s \in \mathbb{N}$$

De donde

$$k+1 = \min \{n \mid x_n \in I_s\}$$

por lo que

$$k+1 = i_s$$

De forma análoga dada una enumeración $\{y_n\}$ de \tilde{Q} construimos una sucesión $\{j_s\}$ y los intervalos V_{j_s} y otra enumeración de \tilde{Q} : $\{y_{j_s}\}_{s \in \mathbb{N}}$

Sea

$$\varphi: \tilde{O} \rightarrow \tilde{Q}$$

$$\varphi(x_{i_s}) = y_{j_s}$$

Aseguramos que φ es una biyección creciente.

Como $\{x_{i_s}\}_{s \in \mathbb{N}}$ y $\{y_{j_s}\}$ son enumeraciones de \tilde{O} y \tilde{Q} respectivamente, entonces φ es una biyección.

Veremos que φ es creciente.

$$\text{Sea } A_k = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}\}$$

Demostremos que $\varphi|_{A_k}$ es creciente.

Para $k=2$ es claro ya que $A_2 = \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$

$$x_{i_2} < x_{i_1} < x_{i_3} \quad \vee \\ \varphi(x_{i_2}) = y_{j_2} < \varphi(x_{i_1}) = y_{j_1} < \varphi(x_{i_3}) = y_{j_3}$$

Ahora supongamos que $\varphi|_{A_n}$ es creciente y demostraremos que $\varphi|_{A_{n+1}}$ lo es.

Sean $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{2^n}$, los elementos de A_n y sean $\tilde{y}_l = \varphi(\tilde{x}_l)$ para $l \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$.

Como $\varphi|_{A_n}$ es creciente, entonces

$$\tilde{y}_l < \tilde{y}_{l'} \quad \text{si } l < l'$$

Los elementos de A_{n+1} quedan ordenados de la siguiente forma:

$$x_{i_{2^n}} < \tilde{x}_1 < x_{i_{2^{n-1}}} < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{2^n-2} < x_{i_{2^{n-2}}} < \tilde{x}_{2^n-1} < x_{i_{2^{n-1}}}$$

ya que $x_{i_{2^{k+l}}} \in I_{2^{k+l}} = (\tilde{x}_l, \tilde{x}_{l+1})$ para $l \in \{1, \dots, 2^n - 2\}$

y $x_{i_{2^k}} \in I_{2^k} = (a, \tilde{x}_1)$ $x_{i_{2^{n+1}}} \in I_{2^{n+1}} = (\tilde{x}_{2^n-1}, b)$

y las imágenes de A_n bajo φ quedan ordenadas así:

$$y_{j_{2^n}} < \tilde{y}_1 < \dots < \tilde{y}_{2^n-1} < y_{j_{2^{n+1}}}$$

o sea

$$\varphi(x_{i_{2^n}}) < \varphi(\tilde{x}_1) < \dots < \varphi(\tilde{x}_{2^n-1}) < \varphi(x_{i_{2^{n+1}}})$$

ya que:

$$y_{j_{2^{k+l}}} \in J_{2^{k+l}} = (\tilde{y}_l, \tilde{y}_{l+1}) \quad \text{para } l \in \{1, \dots, 2^n - 2\}$$

$$y_{j_{2^k}} \in J_{2^k} = (a, \tilde{y}_1) \quad y_{j_{2^{n+1}}} \in J_{2^{n+1}} = (\tilde{y}_{2^n-1}, b)$$

Por lo que $\varphi|_{A_{n+1}}$ es creciente.

Así queda demostrado que $\varphi|_{A_k}$ es creciente para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, para ver que φ es creciente notemos que

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

y $\text{dom. } \varphi \subset \tilde{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Ahora si $z_1 < z_2$ son dos puntos de \tilde{O} entonces existen n_1 y n_2 tales que

$$z_1 \in A_{n_1} \quad \text{y} \quad z_2 \in A_{n_2}$$

y si $n = \max\{n_1, n_2\}$

entonces $z_1 \in A_n$ y $z_2 \in A_n$

como $\varphi|_{A_n}$ es creciente, entonces

$$\varphi(z_1) < \varphi(z_2)$$

$\therefore \varphi$ es creciente.

Con esto queda demostrado el lema.

Para demostrar el teorema 3 primero se demostrarán los siguientes lemas:

Lema 3.1. Sea f un homeomorfismo con número rotacional irracional. Sea $q \in S^1$.

Si n y m son dos naturales, entonces existe k , entero negativo tal que

$$f^k(q) \in (f^n(q), f^m(q))$$

Demostración.

Sea r la rotación tal que $\text{rot}(f) = \text{rot}(r)$ Sea $p \in S^1$

y O su órbita bajo r . La biyección

$$\varphi: Q \rightarrow O$$

$$\varphi(f^n(q)) = r^n(p)$$

conserva la orientación.

Como $\text{rot } r$ es irracional, los conjuntos

$$O^+ = \{r^n(p) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ y } O^- = \{r^n(p) \mid n \in \mathbb{Z}^-\}$$

son densos en S^1 , por lo que existe k , entero negativo tal que

$$r^k(p) \in (r^n(p), r^m(p))$$

Como φ conserva la orientación

$$\varphi(r^k(p)) \in (\varphi(r^n(p)), \varphi(r^m(p)))$$

O sea

$$f^k(q) \in (f^n(q), f^m(q))$$

Lema 3.2.* Sea r con $\text{rot } f$ irracional.

Sean p y $q \in S^1$ y n y m enteros,

entonces existe k entero tal que

$$f^k(p) \in (f^n(q), f^m(q))$$

Demostración.

$$\text{Sea } I = [f^n(q), f^m(q)]$$

$$\text{Sea } I_i = f^{i(n-m)}(I)$$

Cada I_i es un intervalo y I_i se intersecta con I_{i+1} en un sólo punto. De donde se obtiene que alguna de las siguientes afirmaciones se cumple.

i) $\cup I_i$ cubren al círculo.

ii) Los extremos de los intervalos I_i forman una sucesión monótona.

Como $\text{rot } f$ es irracional la segunda afirmación es falsa, ya que esta sucesión es $\{(f^{n-m})^i(f^m(q))\}$ y si fuese monótona entonces f^{n-m} tendría puntos fijos.

Por lo tanto

$$\bigcup I_i = S^1$$

Sea k_i un entero tal que $p \in I_{k_i}$, entonces

$$f^{-k_i(n-m)}(p) \in I$$

llamando $k = -k_i(n-m)$ tenemos que

$$f^k(p) \in (f^n(q), f^m(q))$$

Teorema 3. Sea f un homeomorfismo con rotacional irracional. Sean Q y Q' dos de sus órbitas.

Entonces

- $w\text{-lim } Q = \alpha\text{-lim } Q$
- $w\text{-lim } Q = w\text{-lim } Q'$

Demostración.

- Sea $q \in Q$. Sea $p \in w\text{-lim } Q$
Sea n_k una sucesión de naturales tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(q) = p$$

Podemos suponer que $f^{n_k}(q)$ es una sucesión monótona (si no lo fuese, trabajamos con una subsucesión)

Por el lema 3.1, para cada k podemos escoger m_k un entero negativo tal que $f^{m_k}(q) \in (f^{n_k}(q), f^{n_{k+1}}(q))$.

* Esto es si $\{f^{n_k}(q)\}$ es creciente en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si $\{f^{n_k}(q)\}$ es creciente en el sentido de las manecillas del reloj, tomamos m_k tal que $f^{m_k}(q) \in (f^{n_{k+1}}(q), f^{n_k}(q))$

Claramente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{m_k}(q) = P$$

Además $\{m_k\}$ es una sucesión inyectiva de enteros negativos, de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = -\infty$$

por lo que $p \in \alpha\text{-lim } Q$

Hemos demostrado que $W\text{-lim } Q \subset \alpha\text{-lim } Q$

La demostración de la otra contención es análoga.

b) Sean Q y Q' dos órbitas de f .

Sea $p \in W\text{-lim } Q$.

De forma análoga al inciso anterior, usando el lema 3.2 se construye una sucesión $\{f^{m_k}(q')\}$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{m_k}(q') = P$$

donde q' es un elemento de Q' y $\{m_k\}$ es una sucesión inyectiva de enteros. Es fácil ver que existe una subsucesión de $\{m_k\}$ que tiende a infinito o a menos infinito. De donde

$$p \in \alpha\text{-lim } Q' \cup W\text{-lim } Q'$$

y por el inciso anterior

$$W\text{-lim } Q \subset W\text{-lim } Q'$$

Intercambiando el papel de Q y de Q' obtenemos lo deseado.

Proposición 4.

$\mathcal{R}(f)$ y $\mathcal{R}(f)^c$ son invariantes.

Demostración.

Sea $q \in \mathcal{R}(f)$. Sea U una vecindad de $f(q)$. Sea $V = f^{-1}(U)$ es una vecindad de q .

Sea $n \neq 0$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$

Como $f^n(V) \cap V = f^{n+1}(V) \cap f(V) \supset f(f^n(V) \cap V)$

entonces $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$

Por lo que

$$f(\mathcal{R}(f)) \subset \mathcal{R}(f) \quad (1)$$

Para demostrar la invarianza de $\mathcal{R}(f)^c$, tenemos que se puede obtener de la definición de $\mathcal{R}(f)$ que

$$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$$

De donde $f^{-1}(\mathcal{R}(f^{-1})) \subset \mathcal{R}(f^{-1})$

o sea $\mathcal{R}(f) \subset f(\mathcal{R}(f))$

Por lo que, usando (1) se obtiene que

$$\mathcal{R}(f) = f(\mathcal{R}(f))$$

y como f es una biyección, entonces $\mathcal{R}(f)^c = f(\mathcal{R}(f)^c)$

Teorema 5. Si f es un homeomorfismo que conserva la orientación entonces

$$R(f) = \bigcup_{Q \in \text{orb} f} w(Q) \cup d(Q) = \mathcal{R}(f)$$

Además si $\text{rot } f$ es racional, estos conjuntos coinciden con los puntos periódicos de f .

Si $\text{rot } f$ es irracional se obtiene

$$R(f) = w(f) = \mathcal{R}(f)$$

Demostración.

Las contenciones:

$$R(f) \subset \bigcup_{Q \in \text{orb} f} w(Q) \cup d(Q) \subset \mathcal{R}(f) \quad (1)$$

son inmediatas de las definiciones.

1er. Caso. $\text{rot } f$ irracional.

Veremos que

$$R(f)^c \subset \mathcal{R}(f)^c$$

de donde, usando (1) se sigue el teorema.

Tenemos que $w(f)$ no depende de la órbita y $w(f) = d(f)$, de donde $\bigcup w(Q) \cup d(Q) = w(Q)$, donde Q la podemos elegir como una órbita de $w(f)$

$$\therefore R(f) = w(f)$$

Por lo que $R(f)^c$ es un abierto.

Además f^n es una biyección y $R(f)$ y $R(f)^c$ son invariantes bajo f^n por lo que

$$f^n(R(f)^c) = R(f)^c$$

Sea $q \in R(f)^c$, sea C la componente conexa de $R(f)^c$ que contiene a q .

f^n es un homeomorfismo, por lo que $f^n(C)$ es una componente conexa de $R(f)^c$

Además $f^n(c) \neq c$ para toda $n \neq 0$, ya que f^n no tiene puntos fijos

$$\text{Por lo que } f^n(c) \cap c = \emptyset$$

Así tenemos que $c \in \mathcal{R}(f)^c$

2º Caso. rot (f) racional.

Sea n el periodo de las órbitas periódicas de f .

Sea p un punto no periódico.

Sean $q \in (p, f^n(p))^*$ y $U = (f^{-n}(q), q)$

Es claro que las únicas iteradas de U que posiblemente intersecten a U serán las de la forma

$$f^{kn}(U) = ((f^n)^{k-1}(q), (f^n)^k(q))$$

Sin embargo, como $\text{rot}(f^n) = 0$, la órbita de f^n que pasa por q es monótona, de donde

$$f^{kn}(U) \cap U = \emptyset$$

Así tenemos que $p \in \mathcal{R}(f)^c$, de donde

$$\text{per}(f) \supset \mathcal{R}(f)$$

Además, es inmediato que $\text{per}(f) \subset R(f)$. De donde

$$\text{per}(f) = R(f) = \bigcup_{Q \in \text{orb } f} U \cup \alpha(Q) = \mathcal{R}(f)$$

* En el caso que $f^{-n}(p)$ no esté en $(p, f^n(p))$; si no es así tómese $q \in (f^{-n}(p), p)$.

Para demostrar el teorema 6, primero se demostrará:
Lema técnico 7.

Sea $X, Y \subset S^1$, Y denso en S^1 .

Si existe una biyección que conserva la orientación
 $\varphi: X \rightarrow Y$

Entonces:

- a) φ se puede extender a una función continua y sobre, que no cambie la orientación: $\bar{\varphi}: S^1 \rightarrow S^1$
- b) $\bar{\varphi}$ manda la cerradura de cada componente conexa de $S^1 - X^c$ en un sólo punto, y en el resto del círculo es 1 a 1.

De donde $\varphi|_{X^c}$ es a lo más de 2 a 1.

Demostración.

- a) Sean A y $B \subset \mathbb{R}$ los conjuntos formados por las coordenadas de X y Y respectivamente.

Sea $\varphi: A \rightarrow B$ un levantamiento de φ , claramente φ es creciente y sobre y B es denso en \mathbb{R} .

Extenderemos φ a todos los reales

Sea $B_z = \{\varphi(x) \mid x < z, x \in A\}$

$B_z \neq \emptyset$ y está acotado superiormente

Definimos:

$$\bar{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{\varphi}(z) = \sup B_z$$

Afirmamos:

- 1) $\bar{\varphi}$ es una extensión de φ

Sea $z \in A$, como φ es creciente $\varphi(z)$ es el menor elemento superior de B_z .

Veremos que es la mínima.

Sea $\epsilon > 0$, sea $y \in B$ tal que

$$y \in (\bar{\Phi}(z) - \epsilon, \bar{\Phi}(z))$$

y existe pues B es denso, además

$$x = \Phi^{-1}(y) < z$$

puesto que Φ es creciente, de donde

$$y \in B_z$$

Por lo que.

$$\bar{\Phi}(z) = \sup B_z = \bar{\Phi}(z)$$

ii) $\bar{\Phi}$ es no decreciente

Sean $z_1 < z_2$

tenemos que $B_{z_1} \subset B_{z_2}$

Por lo que $\bar{\Phi}(z_1) \leq \bar{\Phi}(z_2)$

iii) $\bar{\Phi}$ es continua

Sean $z \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$

Sean $y_1, y_2 \in B$ tales que

$$\bar{\Phi}(z) - \epsilon < y_1 < \bar{\Phi}(z) < y_2 < \bar{\Phi}(z) + \epsilon$$

Tales y_i existen por ser B denso

Sea $x_i = \Phi^{-1}(y_i)$

Claramente

$$x_1 < z < x_2$$

y como $\bar{\Phi}$ es no decreciente

$$\bar{\Phi}(x_1, x_2) \subset (\bar{\Phi}(z) - \epsilon, \bar{\Phi}(z) + \epsilon)$$

iv) $\bar{\Phi}$ es sobre

Es inmediato, pues $\bar{\Phi}$ es continua y no decreciente.

y $B \subset \bar{\Phi}(\mathbb{R})$ es denso en \mathbb{R}

Mostrando estas afirmaciones es inmediato el teore-

ma.

De la definición de $\bar{\Phi}$ y usando que

$$\bar{\Phi}(x+1) = \bar{\Phi}(x) + 1 \quad \text{para todo } x \in A$$

se obtiene que

$$\bar{\Phi}(z+1) = \bar{\Phi}(z) + 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}$$

Como además $\bar{\Phi}$ es continua, sobre y no decreciente se proyecta en una función $\bar{\psi}: S^1 \rightarrow S^1$ continua, sobre y que no cambia la orientación; ésta es la extensión deseada de ψ .

b) Basta demostrar que

$$\bar{\Phi}(z_1) = \bar{\Phi}(z_2) \iff (z_1, z_2) \subset (A^c)^c$$

De la definición de $\bar{\Phi}$ y usando que $\bar{\Phi}$ es creciente, se obtiene que

$$\bar{\Phi}(z_1) = \bar{\Phi}(z_2) \iff \# A \cap [z_1, z_2] \leq 1 \quad (1)$$

Es inmediato entonces que

$$\bar{\Phi}(z_1) = \bar{\Phi}(z_2) \implies (z_1, z_2) \subset (A^c)^c$$

Veremos que la otra implicación también es verdadera.

Como $\Phi: A \rightarrow B$ es una biyección creciente, y B es denso, entonces A es denso en orden, de donde

$$(z_1, z_2) \subset (A^c)^c \implies \# [z_1, z_2] \cap A \leq 1$$

y por (1) tenemos que $\bar{\Phi}(z_1) = \bar{\Phi}(z_2)$

Teorema 6.

Sea $z = \text{rot } f$ con z irracional.

Sea r_z la rotación con $\text{rot } r_z = z$

Entonces

f es semiconjugado a r_z , la semiconjugación es a lo más 2:1 en $\mathcal{R}(f)$ y ésta manda a la cerradura de cada componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ en un punto.

Demostración.

Sea Q una órbita de f y O una de r_z , como $\text{rot } f = \text{rot } r_z$

entonces la biyección

$$\varphi: Q \rightarrow O$$

determinada por

$$\varphi \circ f(q) = r_z \circ \varphi(q) \quad \text{para } q \in Q$$

conserva la orientación.

Aplicando el lema técnico para $X = Q$, $Y = O$ tenemos que φ se extiende a S^1 , de forma continua sobre y sin cambiar la orientación, $\varphi \circ f$ y $r_z \circ \varphi$ son continuas y coinciden en Q .

Además $\varphi \circ f(Q) = r_z \circ \varphi(Q) = O$

y O es un denso en S^1 , de donde

$$\varphi \circ f \equiv r_z \circ \varphi$$

Que la semiconjugación, φ , tenga las propiedades enunciadas lo garantiza el lema técnico, ya que $Q^* = \mathcal{R}(f)$

Para demostrar el teorema 8 se demostrará primero:

Lema 9.

Sea \mathcal{R} un conjunto de Cantor contenido en S^1 . Sea Q el conjunto formado escogiendo un punto en cada componente conexa de \mathcal{R}^c .

Entonces

- a) $Q^a = \mathcal{R}$
- b) Q es denso en orden.

Demostración.

- a) Claramente $Q^a \subset \mathcal{R}$ pues Q consta de un punto por cada componente conexa de \mathcal{R}^c . Veremos la otra contención.

Sea $q \in \mathcal{R}$, Sea V una vecindad de q .

Como $\mathcal{R} = \mathcal{R}^a$, existe q' tal que

$$q' \in V \cap \mathcal{R} \text{ y } q' \neq q$$

Como \mathcal{R}^c es denso, existe q'' tal que

$$q'' \in (q, q') \cap \mathcal{R}^c$$

Sea $I(q'')$ la componente conexa de \mathcal{R}^c que contiene a q'' .

Claramente $I(q'') \subset (q, q') \subset V$

Sea q_0 tal que $I \cap Q = \{q_0\}$

$$q_0 \in Q \cap V$$

\square sea $\mathcal{R} \subset Q^a$

- b) Sean $q_1, q_2 \in Q$ tales que $q_1 \neq q_2$
Como q_1 y q_2 pertenecen a distintas componentes conexas de \mathcal{R}^c , existe q_0 tal que

$$q_0 \in (q_1, q_2) \cap \mathcal{R}$$

y como $\mathcal{R} = Q^a$, existe q tal que $q \in (q_1, q_2) \cap Q$

Teorema 8.

Sea Ω un conjunto de Cantor contenido en el círculo, sea τ un número irracional entre cero y uno.

Entonces

Existe f un homeomorfismo que conserva la orientación tal que

$$\text{rot } f = \tau \quad , \quad \Omega(f) = \Omega$$

Es más, si $\{r_n\}$ es una familia a lo más numerable de órbitas de r_τ (la rotación de un ángulo $2\pi\tau$) se puede escoger f tal que para alguna semiconjugación $\bar{\varphi}$, de f a r_τ se cumpla que

$$\bar{\varphi}(\Omega^c) = \cup \cup \cup$$

Demostración.

1) Definición de la semiconjugación.

Sea Q un conjunto formado por un punto de cada componente conexa de Ω^c y sea $O = \cup \cup \cup$

Q y O son conjuntos densos en orden y numerables (esto lo garantiza el lema 9).

Por lo que se puede definir una biyección:

$$\varphi: Q \rightarrow O$$

que conserva la orientación (ver lema 2).

Como O es denso, aplicando el lema técnico tenemos que φ se extiende a S^1 de forma continua, sobre y sin cambiar la orientación; a esta extensión la denotaremos $\bar{\varphi}$.

ii) Definición del homeomorfismo.

Sea $f_Q: Q \rightarrow O$ definida por

$$f_Q(q) = \varphi^{-1} \circ r_\tau \circ \varphi(q) \quad \text{para } q \in Q$$

Para cada $q \in \mathcal{R}^c$ denotaremos por $I(q)$ la componente conexa de \mathcal{R}^c que contiene a q .

Sea $f_{\mathcal{R}^c} : \mathcal{R}^c \rightarrow \mathcal{R}^c$

un homeomorfismo que conserve la orientación y que cumpla

$$a) f_{\mathcal{R}^c}|_Q = f_Q$$

$$b) f_{\mathcal{R}^c}(I(q)) = I(f_Q(q))$$

$$\text{donde } \{q\} = Q \cap I(q)$$

Esto es posible ya que las componentes son intervalos.

$f_{\mathcal{R}^c}$ globalmente conserva la orientación pues f_Q lo hace.

Aplicando el lema técnico a $f_{\mathcal{R}^c}$ y observando que X^1 en nuestro caso es S^1 obtenemos una extensión de

$$f_{\mathcal{R}^c} \text{ a un homeomorfismo } f: S^1 \rightarrow S^1$$

que conserva la orientación.

iii) Afirmación: $\bar{\varphi} \circ f = r_2 \circ \bar{\varphi}$

Basta checarlo en \mathcal{R}^c pues $\bar{\varphi} \circ f$ y $r_2 \circ \bar{\varphi}$ son continuas y \mathcal{R}^c es denso.

Sea $q \in \mathcal{R}^c$

Por (b) tenemos $f(q) \in I(f_Q(q))$

Por el lema técnico sabemos que $\bar{\varphi}$ es constante en cada componente conexa de \mathcal{R}^c , de donde usando (a) se obtiene:

$$\bar{\varphi} f(q) = \varphi f_q(\tilde{q}) = r_{\mathcal{L}} \varphi(\tilde{q}) = r_{\mathcal{L}} \bar{\varphi}(q)$$

iv) Afirmación: $\text{rot } f = \mathcal{L}$

Esto es inmediato, pues por definición de f_q se tiene que $f \stackrel{\sim}{=} \mathcal{L} r_{\mathcal{L}}$.

v) Afirmación: $\mathcal{R}(f) = \mathcal{L}$

Sea Q_m una órbita de f contenida en \mathcal{Q} entonces

$$Q_m^a \subset \mathcal{Q}^a$$

Por el lema 9 $Q_m^a = \mathcal{L}$ y ya habíamos obtenido que $Q_m^a = \mathcal{R}(f)$

$$\therefore \mathcal{R}(f) \subset \mathcal{L}$$

Sea C una componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$. Como \mathcal{R}^c es denso en S^1 , existe $q \in C \cap \mathcal{R}^c$

Sea $p = \bar{\varphi}(q)$

Por la construcción de $\bar{\varphi}$ tenemos que

$$\bar{\varphi}^{-1}(p) = \overline{I(q)}$$

Pero por el teorema 9.4, como $\bar{\varphi}$ es una semiconjugación, se obtiene que

$$\bar{\varphi}^{-1}(p) = \bar{C}$$

De donde

$$I(q) = C$$

O sea, cualquier componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ es una componente conexa de \mathcal{R}^c , de donde

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(f)$$

Proposición 10.

Si $f \simeq g$ y ξ es una conjugación de f a g , entonces:

a) $\text{rot } f = \text{rot } g$

b) $\xi(\Omega(f)) = \Omega(g)$

c) $M(f) = M(g)$

Demostración.

- a) Sea $z = \text{rot } f$ y φ una semiconjugación de f a r_z . $\varphi \circ \xi^{-1}$ no cambia la orientación y es una semiconjugación de g a r_z ya que

$$\varphi \circ \xi^{-1} \circ g = \varphi \circ f \circ \xi^{-1} = r_z \circ \varphi \circ \xi^{-1}$$

Por lo que $\text{rot } f = z = \text{rot } g$

- b) Sean Q_f y Q_g órbitas de f y g

tales que

$$\xi(Q_f) = Q_g$$

entonces

$$\Omega(g) = Q_g^a = \xi(Q_f)^a = \xi(Q_f^a) = \xi(\Omega(f))$$

la tercera igualdad es porque ξ es continua y está definida en un cerrado.

- c) $M(f) =$ número de órbitas de r_z contenidas en $\varphi(\Omega(f)^c)$

Por (b) $\varphi(\Omega(f)^c) = \varphi(\xi^{-1}(\Omega(g)^c))$

y en la demostración de (a) se vió que $\varphi \circ \xi^{-1}$ es una semiconjugación de g a r_z de donde

$$M(g) = \text{número de órbitas de } r_z \text{ contenidas en } \varphi(\xi^{-1}(\Omega(g)^c))$$

o sea $M(f) = M(g)$

Para demostrar el teorema 11 se demostrarán primero los siguientes lemas:

Lema 12. Si f y g son homeomorfismos con número rotacional irracional, entonces

$$f \simeq g \quad \text{si y solo si} \quad f \simeq_{\mathcal{R}(f)} g$$

Demostración.

Supongamos que $f \simeq_{\mathcal{R}(f)} g$. Sea $\xi_{\mathcal{R}}: \mathcal{R}(f) \rightarrow \mathcal{R}(g)$ una \mathcal{R} -conjugación.

Sea $\{I_1, I_2, \dots, I_{M(f)}\}$ un generador de $\mathcal{R}(f)^c$

Sean q_m y q'_m tales que $I_m = (q_m, q'_m)$

Sean $J_m = (\xi_{\mathcal{R}}(q_m), \xi_{\mathcal{R}}(q'_m))$

1) Aseguramos que $\{J_1, \dots, J_{M(f)}\}$ es un generador de $\mathcal{R}(g)^c$:

$$\xi_{\mathcal{R}}(q_m) \in \mathcal{R}(g), \quad \xi_{\mathcal{R}}(q'_m) \in \mathcal{R}(g)$$

$$\therefore J_m \cap \mathcal{R}(g) = \emptyset$$

ya que ξ conserva la orientación y $(q_m, q'_m) \cap \mathcal{R}(f) = \emptyset$

De donde J_m es una componente conexa de $\mathcal{R}(g)^c$.

Veremos ahora que

$$\mathcal{R}(g)^c = \bigcup_{\substack{M=1 \\ n \in \mathbb{Z}}}^{M(f)} g^n(J_M) \quad (1)$$

Ver que la demostración de 10 (b) se puede aplicar en este caso.

Sea $V = (P, P')$ una componente conexa de $\mathcal{R}(g)^c$

Como ξ^n es una \mathcal{R} -conjugación de g a f , por el razonamiento anterior se obtiene que $I = (f^n(P), \xi^n(P'))$ es componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ y como $\{I_1, \dots, I_{M(f)}\}$ es un generador de $\mathcal{R}(f)^c$ entonces existen un entero N y $m \in \{1, \dots, M(f)\}$ tales que

$$I = f^N(I_m)$$

de donde

$$V = g^N(V_m)$$

Por lo que queda demostrado (1).

Además

$$g^N(V_m) \cap V_m = (\xi_x(f^n(q_m)), \xi_x(f^n(q'_m))) \cap (\xi_x(q_m), \xi_x(q'_m))$$

Y como ξ_x conserva la orientación y $f^n(I_m) \cap I_m = \emptyset$

se obtiene que $g^N(V_m) \cap V_m = \emptyset$

Con esto queda demostrado que $\{V_1, \dots, V_{M(f)}\}$ es un generador de $\mathcal{R}(g)^c$

ii) Extensión de ξ_x a S^1

Definamos para cada $m \in \{1, \dots, M(f)\}$

$$\xi_m: I_m \rightarrow V_m$$

como cualquier homeomorfismo que conserva la orientación y

$$\begin{aligned} \xi_m^n: I_m^n &\rightarrow V_m^n \\ \xi_m^n &= g^n \circ \xi_m \circ f^{-n} \end{aligned}$$

donde $I_m^n = f^n(I_m)$ y $V_m^n = g^n(V_m)$

Finalmente definamos $\xi: S^1 \rightarrow S^1$

como la extensión común de ξ_x, ξ_m^n, ξ_m

ξ conserve la orientación, ya que f_m^n , $f_m \vee f_{\Sigma}$ lo hacen (piénsese en el levantamiento y es inmediato).

ξ es sobre ya que

$$\xi(S^1) = \xi_{\Sigma}(\mathcal{Q}(f)) \cup \xi(UI_m^n) = \mathcal{Q}(g) \cup UI_m^n = S^1$$

ξ es un homeomorfismo, por ser sobre y conservar la orientación.

Finalmente veremos qué es una conjugación.

Basta checkarlo en $\mathcal{Q}(f)^c$

Sea $q \in I_m^n$, $f(q) \in I_m^{n+1}$ de donde

$$\xi(f(q)) = g^{n+1}(\xi_m(f^{-n-1}(f(q)))) = g(g^n(\xi_m(f^{-n}(q)))) = g(\xi(q))$$

Con esto queda demostrado el lema 12.

Otro lema que demostraremos antes del teorema 11 es el siguiente:

Lema técnico.

Sea $\xi : A \rightarrow B$ una biyección creciente.

Denotemos por $A^+ = \{x \in A \mid \exists \{x_n\} \subset A, x_n \downarrow x, x_n \neq x\}$

$$A^- = \{x \in A \mid \exists \{x_n\} \subset A, x_n \uparrow x, x_n \neq x\}$$

Si $A = A^+ \cap A^-$ y $B = B^+ \cap B^-$ y A y B no estén acotados

Entonces:

a) ξ es continua.

b) ξ se puede extender a

$$\bar{\xi} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$$

donde $\bar{\xi}$ es un homeomorfismo creciente.

Demostración.

- a) Como f es creciente las únicas posibles discontinuidades son de salto, pero estas no se pueden dar pues $B = B^+ \cap B^-$
- b) Sea $x \in \bar{A} - A$. Sea $\{x_n\} \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; $\{x_n\}$ existe pues $\bar{A} = A^{\alpha}$).

$$\text{Definimos } \bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Nótese que \bar{f} está definida de forma univalueada pues $x \notin A^+ \cap A^-$ y f es creciente.

Definimos $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in A$. Se puede ver que \bar{f} sigue siendo univalueada.

b) \bar{f} es creciente:

Sean $x, y \in \bar{A}$ tales que $x < y$

Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\} \subset A$ sucesiones monótonas tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

Para n suficientemente grande, tenemos que $x_n < y_n$

y como f es creciente $f(x_n) < f(y_n)$

Además $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \bar{f}(x)$ (En el caso que $x \in \bar{A} - A$ por definición, y en el caso que $x \in A$ por continuidad de f).

De donde $\bar{f}(x) \leq \bar{f}(y)$

O sea \bar{f} es no decreciente.

Veremos que es creciente.

caso 1) $[x, y] \cap A \neq \emptyset$. Como $A = A^+ \cap A^-$, existen $z_1, z_2 \in A$ tales que $x < z_1 < z_2 < y$

Como f es creciente y \bar{f} no decreciente, entonces $\bar{f}(x) \leq f(z_1) < f(z_2) < \bar{f}(y)$

caso 2) $[x, y] \cap A = \emptyset$

Esto implica que $x \in A^-$ y $y \in A^+$

Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\} \subset A$ sucesiones tales que $x_n \uparrow x$ y $y_n \downarrow y$

Como f es creciente y por definición de \bar{f} se tiene que $f(x_n) \uparrow \bar{f}(x)$ y $f(y_n) \downarrow \bar{f}(y)$

Supongamos que $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$, entonces $\bar{f}(x) \in B^+ \cap B^- = B$

Pero $B = f(A)$, de donde existe $z \in A$ tal que

$$f(z) = \bar{f}(x) = \bar{f}(y)$$

Esto es una contradicción, pues se puede aplicar el caso 1) a $[z, x]$ ó a $[y, z]$.

Por lo que

$$\bar{f}(x) < \bar{f}(y)$$

(i) \bar{f} es sobre:

Sea $y \in \bar{B} = B^c$. Sea $\{y_n\} \subset B$ una sucesión monótona tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Sea $x_n = f^{-1}(y_n) \in A$

Como f es creciente, entonces x_n es monótona, además es acotada, pues la imagen inversa bajo f de una cota de y es cota de x . (recuerdase que y se puede acotar

por elementos de B , pues B no está acotada).

Entonces existe $x \in \bar{A}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Por continuidad de f ó por definición de \bar{f} obtenemos que

$$f(x) = y$$

Por lo que

$$\bar{f}(\bar{A}) = \bar{B}$$

(ii) \bar{f} es un homeomorfismo.

Como \bar{f} es creciente basta que la imagen sea cerrada en \mathcal{R} para que \bar{f} sea continua.

Esto lo es pues $\bar{f}(\bar{A}) = \bar{B}$

\bar{f}^{-1} es continua por la misma razón.

Teorema 11. Si f y g tienen rotacional irracional y ψ y φ son semiconjugaciones de f y g a las rotaciones correspondientes, entonces

$$f \simeq g$$

Si y sólo si se cumplen las condiciones

1) $\text{rot } f = \text{rot } g$

ii) Existe una rotación r tal que $r(\psi(\mathcal{R}(f)^c)) = \varphi(\mathcal{R}(g)^c)$

Demostración.

Se demostrará que (i y ii) implican que $f \simeq_{\mathcal{R}(f)} g$, por lo que usando el lema 12 obtenemos que $f \simeq g$ (la otra implicación se demostró en el texto).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\psi(\mathcal{R}(f)^c) = \varphi(\mathcal{R}(g)^c)$$

ya que $r \circ \psi$ es una semiconjugación de f a la rotación correspondiente.

$$\text{Sea } E(f) = \bigcup_{\substack{I \text{ comp.} \\ \text{conexa de } \mathcal{R}(f)^c}} \text{frontera } I$$

$$\text{Sea } \xi: \mathcal{R}(f) - E(f) \rightarrow \mathcal{R}(g) - E(g)$$

$$\xi(q) = \psi^{-1}(\varphi(q))$$

Nótese que

$$\varphi(\mathcal{R}(f) - E(f)) = S' - \varphi(\mathcal{R}(f)^c)$$

• Para esto basta chequear:

$$i) \varphi(\mathcal{R}(f) - E(f)) \cap \varphi(\mathcal{R}(f)^c) = \emptyset$$

$$ii) \varphi(\mathcal{R}(f) - E(f)) \cup \varphi(\mathcal{R}(f)^c) = S'$$

Antes observemos que

$$\varphi(\mathcal{R}(f)^c) = \varphi(E(f))$$

Esto se debe a que φ manda la cerradura de cada componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ en un punto.

i) Supongamos que no es cierto. Sean $q_1 \in E(f)$ y $q_2 \in \mathcal{R}(f) - E(f)$ tales que $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$. Sea I la componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ tal que $q_1 \in I$. Sea q_3 el otro punto de la frontera de I .

Entonces tenemos que $\varphi(q_1) = \varphi(q_2) = \varphi(q_3)$ y $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{R}(f)$ y son distintos. Esto es una contradicción ya que φ es a lo más 2:1 en $\mathcal{R}(f)$.

ii) Como φ es sobre se tiene que:

$$S' = \varphi(\mathcal{R}(f) - E(f)) \cup \varphi(\mathcal{R}(f)^c) \cup \varphi(E(f))$$

y por la observación anterior se tiene que (ii) es válido.

de donde, como $\psi(\mathcal{R}(f)^c) = \psi(\mathcal{R}(g)^c)$

Se obtiene que $\psi(\mathcal{R}(f) - E(f)) = \psi(\mathcal{R}(g) - E(g))$

Además para todo $p \in \psi(\mathcal{R}(g) - E(g))$

$$\# \{ \psi^{-1}(p) \} = 1$$

Por lo que

ξ queda univalentemente definida y es una biyección de $\mathcal{R}(f) - E(f)$ sobre $\mathcal{R}(g) - E(g)$.

ξ conserva la orientación, puesto que ψ y ψ^{-1} lo hacen.

Usando el lema técnico para un levantamiento de ξ y tomando A como las coordenadas de $\mathcal{R}(f) - E(f)$ y B como las coordenadas de $\mathcal{R}(g) - E(g)$ obtenemos que ξ se puede extender a un homeomorfismo que conserva la orientación

$$\bar{\xi}: \mathcal{R}(f) \rightarrow \mathcal{R}(g)$$

Aseguramos que $\bar{\xi}$ es una Ω -conjugación de f a g :

En $\mathcal{R}(f) - E(f)$ tenemos que

$$\bar{\xi} \circ f = \psi^{-1} \circ \psi \circ f = \psi^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f = g \circ \psi^{-1} \circ \psi = g \circ \bar{\xi}$$

Sea $q \in E(f)$ y sea $\{q_n\} \subset \mathcal{R}(f)^c$ una sucesión que converge a q , entonces

$$\bar{\xi} \circ f(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi} \circ f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g \circ \bar{\xi}(q_n) = g \circ \bar{\xi}(q)$$

Con esto queda demostrado que

$$f \stackrel{\Omega}{\sim} g$$

Proposición 13.

Sean $\{O_m\}_{m=1}^M$ y $\{O'_m\}_{m=1}^M$ familias a lo más numerables de órbitas de $\Gamma_\mathbb{Z}$.

Existe una rotación r tal que

$$r(O_m) = O'_m$$

si y sólo si

existe una permutación de $\{1, \dots, M\}$ $m \mapsto k_m$ tal que

$$\# \{O_i, O_m\} = \# \{O'_{k_i}, O'_{k_m}\}$$

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $m \mapsto k_m$ la permutación de $\{1, \dots, M\}$ definida por $r(O_m) = O'_{k_m}$

Veremos que $\# \{O_i, O_m\} = \# \{r(O_i), r(O_m)\}$

Sea $R(x) = x + \alpha$ un levantamiento de r

Las coordenadas de O_i son de la forma

$$O_i = \{x_i + n_1 z + n_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Entonces

$$\# \{O_i, O_m\} = [x_i - x_m]_{\mathbb{Z}}$$

Las coordenadas de $r(O_m)$ son de la forma

$$O'_i = \{x_i + \alpha + n_1 z + n_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Por lo que

$$\# \{r(O_i), r(O_m)\} = [x_i - x_m]_{\mathbb{Z}}$$

(\Leftarrow) Sea r una rotación tal que

$$r(O_i) = O'_{k_i}$$

Tenemos que

$$\# \{r(O_m), O'_{k_m}\} = \# \{r(O_m), r(O_i)\} + \# \{r(O_i), O'_{k_m}\}$$

$$= \# \{O_m, O_i\} + \# \{O'_{k_i}, O'_{k_m}\}$$

$$= -\# \{O_i, O_m\} + \# \{O'_{k_i}, O'_{k_m}\} = [0]_{\mathbb{Z}}$$

$$\therefore r(O_m) = O'_{k_m}$$

Proposición 14.

γ' tiene las siguientes propiedades.

- i) $\gamma'(z_1, z_2) + \gamma'(z_2, z_3) = \gamma'(z_1, z_3)$
- ii) $\gamma'(z_1, z_2) = -\gamma'(z_2, z_1)$
- iii) $\gamma'(z_1, z_2 + m) = \gamma'(z_1, z_2) + m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$
- a) $\gamma'(z_1, F^k(z_2)) = \gamma'(z_1, z_2) + k z_2 + m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$
- b) $\gamma'(F^k(z_1), F^l(z_2)) = \gamma'(z_1, z_2) + (l-k) z_2 + m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$
- c) Si F' es otro levantamiento de f , entonces

$$\gamma'(F'^l(z_1), F'^k(z_2)) = \gamma'(F^l(z_1), F^k(z_2))$$
 para algún $m \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

(i), (ii) y (iii) son inmediatas.

a) Lo demostraremos por inducción sobre k .
Para $k=1$

$$\gamma'(z_1, F(z_2)) = \gamma'(z_1, z_2) + \gamma'(z_2, F(z_2)) \quad (1)$$

como

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n F^i(z_2) - F^{i+1}(z_2) = \frac{1}{n+1} (F^{n+1}(z_2) - z_2)$$

Recordando la definición de número rotacional obtenemos:

$$\gamma(z_2, F(z_2)) = z_2 + m \quad \text{para algún entero } m$$

De donde usando (1) tenemos que

$$\gamma(z_1, F(z_2)) = \gamma(z_1, z_2) + z_2 + m$$

Supongamos que es cierto:

$$\gamma(z_1, F^k(z_2)) = \gamma(z_1, z_2) + kz + m$$

Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(z_1, F^{k+1}(z_2)) &= \gamma(z_1, F(F^k(z_2))) = \gamma(z_1, F^k(z_2)) + z_2 + m = \\ &= \gamma(z_1, z_2) + (k+1)z + m' \\ &\quad \text{para algún entero } m' \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado (a) para el caso $k \in \mathbb{N}$.

De forma análoga se hace para los enteros negativos.

$$\begin{aligned} \text{b) } \gamma(F^l(z_1), F^k(z_2)) &= \\ &= \gamma(F^l(z_1), z_1) + \gamma(z_1, z_2) + \gamma(z_2, F^k(z_2)) \\ &= \gamma(z_1, z_2) - \gamma(z_1, F^l(z_1)) + \gamma(z_2, F^k(z_2)) \\ &= \gamma(z_1, z_2) + (k-l)z + m \quad \text{para algún entero } m. \end{aligned}$$

c) Como F' y F son levantamientos de f , entonces existe un entero n tal que

$$F'(z) = F(z) + n$$

Además

$$F'^k(z) = F^k(z) + kn$$

De donde usando (iii) se obtiene que

$$\gamma(F'^k(z_1), F'^l(z_2)) = \gamma(z_1, z_2) + (l-k)z + (k-l)n$$

Teorema 15. Equipartición módulo 1 (Bohl, Sierpinski, Weyl)*

Sea $\Lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de periodo 1 e integrable.

ζ un número irracional.

Entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(x_0 + n\zeta) = \int_0^1 \Lambda(x) dx$$

Demostración.

Caso I $\Lambda(x) = \sin 2\pi k x$ $\Gamma(x) = \cos 2\pi k x$ $k \in \mathbb{Z}$

Para facilitar los cálculos se trabajará con complejos.

Sean las funciones

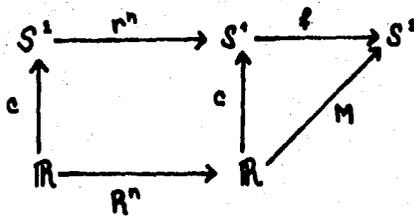
$$f(z) = z^k \quad M(x) = M(x) + i \Lambda(x)$$

$$r(z) = e^{2\pi i z} \quad R(x) = x + \zeta$$

$$e(x) = e^{2\pi i x}$$

z denota un número complejo y x uno real.

El siguiente diagrama conmuta



$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$$

* Se sigue la demostración que se da en [A2]

Por lo que $M(R^n(x)) = f(r^n(z))$ donde $z = c(x)$

Nos interesa calcular:

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N M(R^n(x_0)) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(r^n(z_0))$$

Tenemos que

$$f(r^n(z_0)) = f(e^{2\pi i k n} z_0) = \omega^n z_0^k$$

donde $\omega = e^{2\pi i k z}$

De donde

$$\frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^N M(R^n(x_0)) = \frac{z_0^k}{N+1} \sum_{n=0}^N \omega^n = \begin{cases} \frac{z_0^k}{N+1} \frac{\omega^{N+1} - 1}{\omega - 1} & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Para calcular el límite cuando N tiende a infinito usamos que $\|\omega^{N+1} - 1\| \leq 2$ ya que $\|\omega\| = 1$, y obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N M(R^n(x_0)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Regresando a las funciones $M = \operatorname{Re} M$, $\Lambda = \operatorname{Im} M$

se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N M(R^n(x_0)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(R^n(x_0)) = 0$$

- * Como z irracional, entonces
- si $k \neq 0$ $\omega = e^{2\pi i k z} \neq 1$
 - si $k = 0$ $\omega = 1$

Se pueden calcular directamente las integrales deseadas obteniendo que

$$\int_0^1 \Gamma(x) dx = \int_0^1 \cos 2\pi k x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \Lambda(x) dx = \int_0^1 \sin 2\pi k x dx = 0$$

con lo que queda demostrado el caso I.

Caso II

Λ es un polinomio trigonométrico o sea de la forma

$$\Lambda(x) = \sum_{k=0}^M a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x$$

Usando el caso anterior se obtiene de forma inmediata que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(R^n(x)) = a_0 = \int_0^1 \Lambda(x) dx$$

Caso III

Λ periódica de período 1 e integrable.

Sea $\epsilon > 0$. Sean P_ϵ^- y P_ϵ^+ dos polinomios trigonométricos tales que

$$P_\epsilon^-(x) < \Lambda(x) < P_\epsilon^+(x) \quad (1)$$

$$\int_0^1 P_\epsilon^+(x) - P_\epsilon^-(x) dx < \epsilon \quad (2)$$

De (1) obtenemos

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N P_\epsilon^-(R^n(x)) \leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(R^n(x)) \leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N P_\epsilon^+(R^n(x)) \quad (3)$$

$$\int_0^1 P_\epsilon^-(x) dx \leq \int_0^1 \Lambda(x) dx \leq \int_0^1 P_\epsilon^+(x) dx \quad (4)$$

Usando el caso II y (3) tenemos

$$\int_0^1 P_\epsilon^-(x) dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(R^n(x)) \leq \int_0^1 P_\epsilon^+(x) dx \quad (5)$$

Finalmente, usando (2), (4) y (5)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Lambda(R^n(x)) = \int_0^1 \Lambda(x) dx$$

Lema 16.

Si $\text{rot } f = \tau$ es irracional y φ es una semiconjugación de f a τ entonces

$$\chi \{Q_1, Q_2\} = \chi \{\varphi(Q_1), \varphi(Q_2)\}$$

donde Q_1 y Q_2 son órbitas de f .

Demostración.

Caso I.

f es intransitiva y Q_1 y Q_2 son órbitas tales que $Q_j \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ para alguna I componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$.

Se demostró en el texto.

Caso II.

f es intransitiva y Q_1 y Q_2 son dos órbitas tales que para toda I componente conexa de $\mathcal{R}(f)^c$ se cumple que:

$$Q_1 \cap \bar{I} \neq \emptyset \Rightarrow Q_2 \cap \bar{I} = \emptyset \quad (1)$$

Se restringirá a φ de tal forma que φ^{-1} sea univaluada y que $Q_1 \cup Q_2$ esté en la imagen de φ^{-1} .

Sea $\{I_m\}_{m=1}^{M(f)}$ un generador de $\mathcal{R}(f)^c$

Para cada $m \in \{1, \dots, M(f)\}$ escogemos q_m en S^1 tal que

$$q_m \in \bar{I}_m \quad \text{si} \quad (Q_1 \cup Q_2) \cap \bar{I}_m = \emptyset$$

$$q_m \in Q_j \cap \bar{I}_m \quad \text{si} \quad Q_j \cap \bar{I}_m \neq \emptyset$$

Nótese que estamos escogiendo un sólo punto en cada \bar{I}_m
(esto lo garantiza (1))

$$\text{Sea } X = (R(f) - E(f)) \cup \bigcup_{\substack{m \in \{1, \dots, M(f)\} \\ n \in \mathbb{Z}}} f^n(q_m)$$

Claramente $\varphi|_X$ es una biyección de X sobre S^1 y
 $Q_1 \cup Q_2 \subset X$

$$\text{Sea } \varphi^{-1} = (\varphi|_X)^{-1}$$

Tenemos que para cada i entero

$$f^i|_X = \varphi^{-1} \circ r_c^i \circ \varphi|_X$$

ya que X es invariante bajo f .

Tomando levantamientos adecuados, tenemos que

$$F^i(z_j) = \Phi^{-1}(R^i(\Phi(z_j)))$$

donde z_j es una coordenada de algún punto de Q_j

$$\text{Sea } x_j = \Phi(z_j)$$

$$\text{Sea } \Lambda(x) = \Phi^{-1}(x + x_1) - \Phi^{-1}(x + x_2)$$

En estos términos

$$Y(z_1, z_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \Lambda(i z)$$

Veremos que Λ cumple las hipótesis del teorema de equipartición módulo 1.

Claramente Λ es una función periódica con período 1.
Veremos que es Riemann integrable.

Φ^{-1} es discontinua en las coordenadas de $\varphi(R(f)^n)$, este es un conjunto numerable, por lo que Λ será discontinua

a lo más en un conjunto numerable, de donde es Riemann integrable.

Aplicando el teorema mencionado obtenemos que

$$Y(z_1, z_2) = \int_0^1 \Lambda(x) dx$$

Calculemos esta integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi^{-1}(x+z_1) - \Phi^{-1}(x+z_2) dx &= \int_{x_1}^{x_1+1} \Phi^{-1}(x) dx - \int_{x_2}^{x_2+1} \Phi^{-1}(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1+1} \Phi^{-1}(x) dx + \int_{x_2+1}^{x_2} \Phi^{-1}(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Phi^{-1}(x) dx - \int_{x_1+1}^{x_2+1} \Phi^{-1}(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(x+1) dx = \int_{x_1}^{x_2} -1 dx = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Como $x_j = \Phi(z_j)$ es una coordenada de algún punto de $\varphi(Q_j)$

$$x \{Q_1, Q_2\} = x \{\varphi(Q_1), \varphi(Q_2)\}$$

* Obsérvese que las únicas propiedades que usamos fueron:

$$\int_a^b h = \int_a^c h + \int_c^b h \quad ; \quad \int_a^b h(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} h(x+c) dx$$

$$\int_a^b h_1 + h_2 = \int_a^b h_1 + \int_a^b h_2$$

Estas son válidas para cualquier función integrable.

Con esto queda demostrado que:

$$\chi \{ Q_1, Q_2 \} = \chi \{ \varphi(Q_1), \varphi(Q_2) \}$$

Caso III

\neq transitiva

La demostración es un caso particular del caso II.

B I B L I O G R A F I A.

- [A1] Arnold, V.I. Ordinary Differential Equations. The M.I.T. Press 1980.
- [A2] Arnold, V.I., Avez, A. Ergodic Problems of classical Mechanics. W.A. Benjamin, Inc. 1968.
- [N] Nitecki, Zbigniew. Differentiable Dynamics. Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms The M.I.T. Press. 1971.
- [P] Poincaré, H. Sur les Courbes Définies par des Équations Différentielles. Chapitre XV Étude Particulière du tore.
- [S] Sternberg Shlomo. Celestial Mechanics. W.A. Benjamin, Inc. 1969.
- H Hirsh, M. W., Smale, S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.