UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL AXIOMA DE ELECCION.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

MARIA RAQUEL GUTIERREZ AGUILAR

CIUDAD UNIVERSITARIA D.F. 1985

INDICE

Introducción.

El presente trabajo está motivado básicamente por la carencia de información que a lo largo de toda la carrera se tiene respecto al axioma de elección, al cuál solamente se hace referencia velada (y ésto todavía, sólo en algunos casos) y generalmente se tiende simplemente a "aplicar", a "utilizar", ocultando (por desconocimiento o sencillamente por desprecio) toda la importancia del axioma, primero como un principio fundamental en todo el quehacer matemático y segundo como un ejemplo muy claro de la discusión filosófica acerca del carácter y del sentido de la matemática misma.

Sin embargo, no pretendo ni siquiera imaginarme que la presente tesis puede llenar ese vacío; solamente intenta ser un rescate de la importancia del axioma de elección, mostrando sus diferentes aspectos, relaciones y aplicaciones.

Por ser este el fin que se persigue, he dividido la tesis en cinco capítulos. Los dos primeros pueden ser vistos como unidades, esto es, no guardan una relación fundamental con los otros tres; mientras que estos últimos si están ligados íntimamente y tienen un hilo de continuidad basado en la importancia y utilización concreta del axioma en diversos campos de la Matemática.

El primer capítulo da algunos elementos acerca del surgimiento del Axioma de elección y en ese sentido puede ser considerado como una breve introducción histórica; el segundo se refiere a la axiomatización de la teoría de conjuntos y a la relación de esta axiomatización con elección (consistencia e independencia); el tercero trata de las diversas equivalencias lógicas del axioma con distintos principios ó proposiciones. En el cuarto se habla de las aplicaciones en Matemáticas y en Teoría de Conjuntos del axioma de elección en sus distintas versiones; y por último, en el capítulo cinco se mencionan algunos de los debilitamientos del axioma y se muestran también aplicaciones de ellas.

No me queda ya mas que expresar mi mas sincero y profundo agradecimiento a Rafael Rojas quién además de haber sido un excelente director de tesis en cuanto a orientaciones, sugerencias, correcciones, etc. me ha colaborado y apoyado en todo momento. Honestamente dudo que sin su constante ayuda este trabajo hubiera sido realizado.

Lista de Símbolos.

ω cardinal de los números naturales

$\mathfrak{c}$ cardinal de los números reales

$\aleph_\alpha$ α-ésimo cardinal.

$\emptyset$ conjunto vacío

$a, b, c, d, u, v, w, x, y, z$ variables para conjuntos

$\in$ pertenencia

$\notin$ no pertenencia

$\subseteq$ inclusión

$\subsetneq$ inclusión propia

$\{a\}$ conjunto unitario de a

$<, \leq, \prec, \preceq, \rho$ relaciones binarias de orden

$\wedge$ y

$\vee$ ó

$\sim$ negación

$\rightarrow$ implicación

$\leftrightarrow$ doble implicación, equivalencia.

$\exists$ cuantificador existencial

$\forall$ cuantificador universal

$\gamma, \varphi, \phi, \sigma$ fórmulas del lenguaje

$\bigcup a$ unión de a

$\bigcap a$ intersección de a

$\mathcal{P}(a)$ potencia de a

$-$ diferencia de conjuntos (eg. $a-b$)

$\underset{i\in I}{\times} a_i$ producto cartesiano de a_i s

$\langle , \rangle$ pareja ordenada

$\mathcal{B}$ álgebra booleana

$\mathcal{I}$ ideal

$\mathcal{V}$ universo de los conjuntos
L universo constructible
OR clase de los ordinales
α, β, γ variables para ordinales
CAR clase de los cardinales
κ, λ, μ variables para cardinales
$|x|$ la cardinalidad de x
$\mathbb{R}$ conjunto de los números reales
Σ, Γ conjuntos de enunciados del lenguaje
$\Sigma \vdash \varphi$ Desde Σ se prueba φ
$\Sigma \models \varphi$ Σ es modelo de φ
$p \Vdash \varphi$ p fuerza a φ
$con(\Sigma)$ Σ es consistente
φ^M relativización de φ a M
f, g, h letras para designar funciones
F funcional
$f: a \to b$ función de a en b
f/a_0 restricción de la función f a a_0
$dom(f)$ dominio de f
$ran(f)$ rango de f
$f(\beta)$ valor de la función f en β
$f[\beta], f[a]$, conjunto de valores de la función f en elementos menores que β ó en puntos de a.
$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{D}$ letras para clases, familias ó cadenas
$\prod_{i \in I} X_i$ producto topológico de X_i s
$\sum_{i \in I} X_i$ sumatoria de X_i's
π_i proyección i-ésima
$\bar{X}$ la cerradura de X.

CAPITULO I

ALGUNOS ELEMENTOS ACERCA DEL CONTEXTO EN EL CUAL ES PLANTEADO EL AXIOMA DE ELECCION Y DE LA POLEMICA QUE SUSCITA.

En 1874 Georg Cantor publica su primer trabajo acerca de la teoría de conjuntos; en él establece sus ideas iniciales acerca de lo que es un conjunto y toma una posición distinta a la generalmente aceptada en la época con respecto al infinito. Tiempo después Cantor define lo que es un conjunto infinito como aquel que puede ponerse en correspondencia uno a uno con una de sus partes propias. El sostiene que se equivocan aquellos que solo aceptan la existencia del infinito potencial, ya que para él es válido considerar conjuntos infinitos de una manera actual, es decir, como "terminados", como "ya dados".

Durante su trabajo con el infinito actual uno de los problemas mas interesantes que Cantor encuentra es la cuestión de lo que ahora se conoce como equipotencia ó equivalencia de conjuntos, esto es, determinar cuales conjuntos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca. Cantor se da cuenta que una gran cantidad de los conjuntos de números conocidos entonces (racionales, algebraicos, etc.) tienen el mismo número de elementos (son equivalentes) al conjunto de los números naturales, y demuestra tambien que hay conjuntos, (como el de los números reales) que no pueden ser biyectados con los naturales y que tambien son infinitos, por lo que debe ser un infinito "mayor" al de los números naturales.

Todo este desarrollo de la teoría de conjuntos, Cantor lo lleva a cabo A PESAR, de la gran oposición y las objeciones que presentaban algunos matemáticos famosos de la época. En particular Kronecker había atacado a Cantor visceralmente desde que éste último había comenzado a publicar acerca de su nueva teoría. Henri Poincaré, sin criticar el trabajo de Cantor tan drasticamente, tampoco sentía ninguna simpatía por él, teniéndole mas bien una gran desconfianza.

La raiz de la discusión y de la desconfianza de diversos matemáticos contemporaneos a Cantor acerca de su trabajo, esta en la concepción particular que se tiene sobre lo que significa la EXISTENCIA de un objeto matemático. Pero plantearemos esta discusión mas adelante, en el caso particular del axioma de elección defendido por Zermelo.

Georg Cantor había llegado en su trabajo sobre la teoría de conjuntos a la pregunta siguiente:

1. Por un lado, sabía que dado un conjunto a cualquiera, el conjunto de los subconjuntos de a, es 'mayor que' a, en el sentido de que puede definirse una función inyectiva del segundo en el primero, pero no pueden ponerse en correspondencia biunívoca.

Por tanto sabía que si ω representaba el número de elementos del conjunto de naturales y 2^{ω} era el número de elementos que contenía la "potencia de ω", es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de naturales. Entonces se tenía la siguiente relación:

$$\omega < 2^{\omega}$$

2. Por otro lado, Cantor sabía que

$$2^{\omega} = C$$

dónde C es el cardinal del continuo, es decir, el número de elementos que contiene el conjunto de los reales.

Ahora, introduciendo la notación de los alephs, donde $\aleph_0$ es el cardinal de ω ó de cualquier conjunto numerable y pensando que $\aleph_1$ es el siguiente número cardinal despues de $\aleph_0$, se tenía:

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$$

es decir, $\aleph_1 \leq C$

La pregunta, que se conoce como hipótesis del continuo, es entonces si efectivamente

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

ó mas en general, la hipótesis generalizada del continuo, si para cualquier α

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

Cantor intentó probar la validez de la hipótesis del continuo durante muchos años sin conseguirlo. Esto, no por falta de habilidad ó ingenio sino porque como se demostró despues (ver capítulo II), la hipótesis del continuo resultó indecidible dentro de la teoría de conjuntos.

Ahora bien, Cantor y Hilbert creían que este problema estaba relacionado con lograr dar un buen orden (1) a cualquier conjunto infinito, en particular para los reales, es decir, lograr "ordenar" los reales de manera que cada subconjunto no vacío tuviera un primer elemento. Cantor no logra demostrar satisfactoriamente que todo conjunto puede bien ordenarse y Hilbert en el Congreso de París en 1900, dentro de su famosa lista de problemas y como el primero de ellos, propone lo siguiente:

Despues de esbozar en que consiste la hipótesis del continuo (a la cual ya llama teorema y dice que lo que hace falta es demostrarlo) de Cantor, plantea lo siguiente:

> Citemos aún una muy notable afirmación del Sr. Cantor que tiene una relación de las mas íntimas con el teorema precedente y que sería quizas la llave de la demostración.... ¿El conjunto de todos los números no podría ser ordenado de alguna manera tal que todo conjunto parcial tenga un elemento precediendo a todos los otros? Dicho de otra forma, ¿el continuo puede ser concebido como conjunto bien ordenado? A esta pregunta el Sr. Cantor creía que se podía responder por la afirmativa. Me parece extremadamente deseable obtener una demostración directa de esta notable afirmación del Sr. Cantor, asignando por ejemplo efectivamente un orden de los números tal que en todo conjunto parcial se pueda asignar un número precediendo todos los otros. [1]

Hasta aquí hemos visto como se había llegado hasta un cierto punto en el desarrollo de la teoría de conjuntos, donde se encontraban una serie de problemas abiertos: la hipótesis del continuo, el teorema del buen orden (es decir, el hecho de poder bien ordenar o no a todo conjunto), etc. Sin embargo habían surgido otra serie de problemas dentro de la teoría de conjuntos por el hecho de haber sido encontradas "paradojas" (2) es decir contradicciones dentro de la misma teoría, como la paradoja de Burali-Forti y la de Zermelo-Russell Estas paradojas de la teoría de conjuntos abrieron una dirección mas a la investigación y el trabajo matemáticos: la necesidad de revisar y fundamentar la teoría de conjuntos para excluir de ella las paradojas y tambien para avanzar sobre la fundamentación de las matemáticas en general.

Surge aquí la figura de Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), matemático alemán, discípulo de Hilbert que se interesa por estas tareas.

1. Por un lado Morris Kline afirma que Zermelo se plantea inicialmente la tarea de axiomatizar la teoría de conjuntos y de precisar sobre todo el concepto de conjunto ya que según el (Kline), Zermelo consideraba las paradojas como algo que surgía porque el concepto cantoriano de conjunto era muy vago y ambiguo, por lo que había necesidad de restringirlo, precisándolo.

2. Tanto Fraenkel como G.H Moore [2,3] plantean que Zermelo estaba en un principio preocupado por el problema del buen orden, de la buena ordenación del conjunto de los reales, que parecía ser la llave para resolver la hipótesis del

continuo; y que despues, por la amplia polémica y discusión generada tanto por su prueba de que "todo conjunto puede ser bien ordenado", como por el uso del axioma de elección en dicha prueba, es que decide axiomatizar la teoría de conjuntos.

Veamos ahora qué es lo que sucede entre 1904 año en que Zermelo realiza su primera prueba de que "todo conjunto puede bien ordenarse" y 1908 cuando propone una segunda prueba de ello y da una axiomatización para la teoría de conjuntos. Esto mostrará como la afirmación de Kline es falsa ya que a Zermelo no le preocupaban en lo mas mínimo las paradojas de la teoría de conjuntos.

En septiembre de 1904, Zermelo da una demostración a la proposición "Todo conjunto puede bien ordenarse" basada en el axioma de elección formulado de la siguiente forma:

> ..imagine que con cada subconjunto M'
> esta asociado un elemento arbitrario
> m', que ocurre (que esté) en M' al
> cual llamo "elemento distinguido" de M' [4]

La diferencia entre la demostración que ofrece Zermelo y la bosquejada por Cantor (3) años antes es muy sutil pero muy importante y en realidad este último nunca logró dar una demostración efectiva de la buena ordenación.

Veamos:

Cantor afirmaba que para bien ordenar un conjunto se podía hacer lo siguiente:

Dado el conjunto a se escogía un elemento x_1 de a

Se consideraba despues el conjunto $a_1 = a - \{x_1\}$ que resultaba un subconjunto de a

En el conjunto a_1 se escogía un elemento x_2

Se consideraba despues el conjunto $a_2 = a_1 - \{x_2\} = a - \{x_1, x_2\}$ y se escogía en él un elemento x_3..... y así sucesivamente.

Cantor consideraba que repitiendo este acto de elección una infinidad de veces se lograba "cubrir ó agotar" al conjunto de manera que todos sus elementos hubieran sido ya escogidos y se encontraban "ordenados" mediante el orden que había inducido la elección; es decir, el primer elemento escogido resultaba el primer elemento, el segundo el sucesor de aquel, etc. Es claro que este procedimiento ideado por Cantor no siempre puede dar una buena ordenación para cualquier conjunto; es posible exhibir un conjunto que nunca se terminaría de ordenar siguiendo este método. (4)

La diferencia de la modalidad de elección considerada por Zermelo con respecto a Cantor, está en que éste último considera elecciones dependientes, es decir, una vez que ha elegido un cierto x_1, despues escoge un x_2, etc. Mientras que en la demostración de Zermelo se asume que existe una asociación de cada subconjunto M' con un elemento m' que está en el primero, y que esta elección YA HA SIDO HECHA EN UN SOLO MOMENTO Y ARBITRARIAMENTE, sin que ninguna elección dependa de anteriores.

No vamos a exponer aquí la demostración dada por Zermelo, sino que vamos a analizar algunos aspectos de la polémica suscitada por dicha prueba. Decimos "algunos aspectos" porque la polémica es sumamente extensa y hubo matemáticos que aceptaban o que rechazaban el axioma de elección en casi todas las universidades europeas. Nosotros vamos a discutir solamente la polémica que hubo entre los matemáticos franceses ya que en ella quedan muy claros los distintos puntos de vista acerca del axioma y de otra serie de problemas como la definición en matemáticas ó la existencia de objetos matemáticos, que comenzaban a ser cuestiones de primer orden.

La polémica francesa acerca de la prueba del Teorema del Buen Orden de Zermelo giro basicamente en torno al uso que éste hace del axioma de elección en la demostración. Al axioma de elección se le critica y se le rechaza por no ser constructivo. (5)

La primera objeción es hecha por Emile Borel. El plantea en un artículo en 1904 que lo que se ha demostrado es que puede darse una buena ordenación para un conjunto x, siempre y cuando SEA POSIBLE llevar a cabo la elección (postulada por el axioma) de un elemento distinguido de cada subconjunto no vacío de x.

La crítica de Borel es entonces estrictamente al axioma de elección; pero lo curioso es que él solo lo objeta cuando se trata de un número no numerable de elecciones.

Borel dice:

> cualquier argumento donde uno supone una elección arbitraria por hacer, un número no numerable de veces... (está) fuera del dominio de las matemáticas [5]

En realidad a Borel lo que le molesta es el hecho de pensar que la función de elección (como podemos llamar a la asociación de cada subconjunto con su elemento distinguido) no esté definida explícitamente, o bien no esté totalmente descrita; y esto sucede debido a la muy particular concepción que tiene Borel acerca de la EXISTENCIA de un objeto matemático.

Mas adelante Jacques Hadamard escribe una carta a Borel donde le critica y le cuestiona sus posiciones. La carta es circulada por Borel a Henri Lebesgue y a Rene Baire quienes tambien se escriben entre sí intercambiando sus opiniones. Veamos que opina cada uno de ellos.

Primeramente Baire que tiene todavía mas desconfianza al axioma de elección que Borel, dice en una carta a Hadamard:

> Es esta (el axioma de elección) una concepción que no tiene nada de contradictoria, de acuerdo. Tambien lo que demuestra para mí, es que nosotros no percibimos contradicción al concebir que en todo conjunto que se

nos define, los elementos tienen entre ellos relaciones de posición idénticas a aquellas que tienen los elementos de los conjuntos bien ordenados. [6]

Dice tambien que 'hay que delimitar el dominio de eso que es definible', porque si no se cae en abusos como por ejemplo hablar de infinito actual o de un conjunto infinito dado, que en su opinión no tiene ningún sentido.

En Borel es muy claro notar, como él mismo lo muestra al pedir que se restrinja el dominio de lo definible, que para él, lo definible es lo constructible; es decir, no basta con postular la existencia de un objeto matemático dando algunas características o propiedades que cumple, sino que hay que dar una forma efectiva de construirlo.

Henri Lebesgue es quien en mi opinión va a la verdadera raíz del problema: ¿ se puede demostrar la existencia de un ser matemático sin definirlo? se pregunta Lebesgue, y ve que la diferencia está en lo que se entienda por existencia.

El se ubica en los que aceptan la existencia en el sentido Kroneckeriano, es decir, constructible, efectiva, completa y precisa.
Sin embargo ve que Zermelo tiene otra idea de lo que es definir que no es propiamente DESCRIBIR aquello que se define; por ejemplo en el caso de la elección infinita de elementos distinguidos, a Zermelo le basta PENSAR EN el objeto que puede

ser elegido, sin preocuparse por elegirlo y mostrarlo efectivamente, esto es, en palabras de Lebesgue, de nombrar al elegido.

Lebesgue afirma que en realidad lo demostrado por Zermelo es que en caso de poderse llevar a cabo la elección en cuestión, sería posible bien ordenar cualquier conjunto, en lo que está de acuerdo con Borel. Aún mas, al comprender que la afirmación de la posibilidad de bien ordenar cualquier conjunto es meramente existencial. en tanto que indica la posibilidad de bien ordenar cualquier conjunto sin decir COMO es que debe realizarse esta buena ordenación, da un paso hacia superar la discusión existente acerca del axioma de elección.

Finalmente Hadamard, como matemático algo mas cercano al pensamiento formalista de Hilbert, aunque no totalmente de acuerdo con él, en el sentido de que Hadamard no identifica la noción de existencia con la de "no contradicción", por ser ésta última según él una noción que tiene relación con la psicología, está de acuerdo con los anteriores en que Zermelo ha dado la demostración de la posibilidad de bien ordenar cualquier conjunto, pero no ha brindado un procedimiento para "ejecutar efectivamente" la elección que postula como base de la prueba.

Sin embargo, ésto a él no le preocupa y le muestra a Borel como él tambien en algunos de sus resultados ha definido la existencia de objetos sin describirlos.

Tanto Lebesgue como Hadamard no aceptan una de las críticas originales de Borel, en el sentido de que se hace un número no numerable de elecciones, ya que si se piensa así, es igualmente inaceptable hacer un número numerable de elecciones. Ambos postulan la posibilidad de hacer una elección infinita, que es el punto problemático.

Ajena a esta polémica sobre el Axioma de Elección, pero también como una crítica a la prueba del teorema del buen orden de Zermelo, debemos mencionar la posición de Henri Poincaré.

Poincaré acepta el axioma de elección al cual considera como un juicio sintético a priori (6) y por tanto puede ser concebido como una verdad matemática. Pero el objeta la prueba de Zermelo por hacer uso de definiciones "no predicativas" (7), es decir, de definiciones que contienen un círculo vicioso. La causa de su objeción no es, sin embargo, un particular interes por participar en la polémica sobre el axioma de elección y el teorema de Zermelo sino que es un aspecto de su discusión con Russell y con el logicismo principalmente.

Zermelo contesta a las objeciones de Poincaré en 1908 cuando da una nueva prueba del teorema del buen orden y dice que la objeción de Poincaré podría hacerse a muchas otras definiciones de objetos matemáticos. Le critica por no entender lo que puede ser una equivalencia entre definiciones y por no comprender la relación que hay entre lo que va a definirse y la definición.

Todavía en 1910 a dos años de haber sido publicada la segunda prueba del teorema del buen orden, continuaba la desconfianza de algunos respecto al axioma de elección. Steinitz respondiendo a ello, escribe en la introducción a su artículo sobre la fundamentación del álgebra:

> Muchos matemáticos guardan todavía una actitud negativa frente al axioma de elección. Sin embargo cuanto mas claro es que hay problemas matemáticos que no pueden resolverse sin el uso de este axioma, tanto mas esta destinada a debilitarse la oposición. [7]

La predicción de Steinitz resultó cierta, sin embargo el debilitamiento de la oposición no sólo se debe a las múltiples y diversas aplicaciones del axioma de elección en matemáticas sino también a los resultados de consistencia e independencia del axioma respecto a los otros axiomas de la teoría de conjuntos.

Nosotros en lo que respecta a toda esta polémica del axioma de elección, estamos de acuerdo con lo que dice Fraenkel:

> Muchas objeciones contra el axioma de elección se basan en incomprensiones y son por tanto inválidas puesto que ignoran la naturaleza puramente existencial de lo que se afirma... Sólo aquellos matemáticos y filósofos que en principio nada mas reconocen procedimientos constructivos, no existenciales,

> tienen derecho a rechazar el axioma de elección por tal razón. [8]

Hemos vuelto al problema que había quedado planteado al principio respecto a las críticas de Kronecker al trabajo de Cantor sobre el infinito actual. Lo que subyace a estas críticas, del mismo modo que está en el fondo del debate acerca del axioma de elección, es la cuestión de la EXISTENCIA de objetos matemáticos.

¿Debemos dar procedimientos constructivos para poder afirmar que algo existe, o podemos hacerlo si solo mostramos que su no existencia nos lleva a una contradicción? ¿Se DESCUBREN ó se INVENTAN los objetos matemáticos, los axiomas, los teoremas etc.?

Respecto al problema del axioma de elección Fraenkel da una opinión que arroja mucha luz al asunto, sobre todo porque muestra que no es un problema dentro de las matemáticas sino que está en el terreno de la filosofía:

> Cualquiera que acepte la doctrina platónica de la pre-existencia de los conceptos matemáticos, ciertamente no verá razón alguna de porqué, entre los subconjuntos de la unión de todos los elementos de (un conjunto) S, sólo aquellos subconjuntos que se distinguen por tener un solo elemento en S deben estar ausentes; Si no estan ausentes, solamente los descu

brimos enunciando una propiedad distintiva. Sin embargo, si la existencia de un concepto significa inventarlo ó construirlo, entonces la existencia de conjuntos de elección permanece dudosa, mientras se carezca de un procedimiento para construir tales conjuntos, aún cuando sin éllos una parte considerable de las matemáticas resulte cuestionable [9]

Notas y Referencias

(1) El problema de la buena ordenación de los reales, en el sentido de dar efectivamente la buena ordenación, tiene relación con la hipotesis del continuo. Sin embargo, el teorema de Zermelo, como solamente postula la existencia de dicho buen orden, no ayuda para decidir la hipótesis del continuo; posteriormente ha sido demostrado q. ambos problemas no tienen relación entre sí.

(2) Acerca de las paradojas puede revisarse:
Alejandro Garciadiego Dantán; "La teoría de conjuntos sus orígenes desarrollo y consecuencias". Tesis profesional, UNAM. 1977.

(3) La idea de Cantor acerca de como bien ordenar un conjunto infinito había sido enviada a Hilbert en 1896 y a Dedekind en 1899, siempre con la promesa de formalizar la prueba y revisarla en detalle. Cantor sin embargo nunca la publica y cuando en 1903 Jourdain le propone publicar dicha prueba; Cantor le dice que lo haga sólo, porque él no está totalmente satisfecho con ella.

(4) Consideremos el conjunto $\omega + \omega$, esto es, el conjunto de los naturales dos veces; y supongamos que el órden en el que vamos escogiendo los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ es el orden natural del primer conjunto ω, es decir, $1, 2, 3, \ldots$ Así, pese a considerar un número infinito de elecciones no lograríamos cubrir todo el conjunto ya que no "terminaríamos" de ordenar la primera parte.

(5) Para una comprensión mas clara acerca del constructivismo se puede revisar: Stephan Korner: "Introducción a la filosofía de las matemáticas" Siglo XXI, 1969.

En dicho libro, Körner afirma que los constructivistas identifican la existencia matemática con la constructibilidad real, y agrega:

> Qué sea lo que deba considerarse por constructibilidad real, ésto nunca se define de modo preciso en términos generales, pero se aclara en la práctica. (p. 159).

(6) La noción de juicio sintético a priori, es tomada por Poincaré de Kant. Körner afirma, explicando las ideas de Kant, que los juicios sintéticos a priori son aquellos que no dependen de la percepción sensorial. Las proposiciones sintéticas a priori, dice, son condiciones necesarias de la posibilidad de la experiencia objetiva.

(7) Definiciones no predicativas son aquellas que contienen un círculo vicioso, esto es, que encierran una contradicción que no es posible superar.

[1] Eduardo López Aceves
1981. Algunos aspectos del debate matemático entre las escuelas intui-
cionista y formalista. Pág. 57.

[2] Abraham A. Fraenkel
Teoría de los Conjuntos y Lógica. (UNAM, 1969. Trad. Roberto Caso)

[3] G. H Moore
1979 Zermelo's Axiom of Choice, its origins and role in the development
of Mathematics.

[4] López Aceves, 1981; pág. 59

[5] G. H. Moore, 1979; pág. 158-159

[6] G. H Moore, 1979; pág 161

[7] Fraenkel, pág. 55

[8] Fraenkel, pág. 55

[9] Fraenkel, pág. 56.

CAPITULO II

UNA AXIOMATIZACION PARA LA TEORIA DE CONJUNTOS

Mencionamos en el capítulo anterior el hecho del surgimiento de paradojas y contradicciones dentro de la teoría de conjuntos (Burali-Forti, Zermelo-Russell) y expusimos un poco mas detalladamente la polémica surgida por el uso del axioma de elección.

Estos dos hechos, pero sobre todo el primero de éllos motivaron que a principios de siglo una de las tareas fundamentales que se plantearan los matemáticos (o al menos algunos de éllos) fuera la de fundamentar la teoría de conjuntos, para excluir de élla las paradojas y contradicciones y para delimitar sus dominios.

La corriente o escuela matemática que puso mas empeño en la solución de esta tarea fué la formalista. Los formalistas discípulos de Hilbert veían grandes posibilidades de avanzar sobre la fundamentación de las matemáticas através de la fundamentación de la teoría de conjuntos ya que de la noción de conjunto podría generarse la noción de número natural y de ahí, cualquier otra podría ser obtenida.

Zermelo es el primero en asumir esta tarea y comienza a trabajar en la axiomatización de la teoría de conjuntos siguiendo el ejemplo que Hilbert había dado con la axiomatización de la geometría euclideana.

En 1908, en su trabajo "Untersungen über die Grundlagen der Mengenlehre", Zermelo propone una axiomatización para la teoría de conjuntos que incluye el axioma de elección.

Muchos otros matemáticos (Fraenkel, Von Neumann, etc) continuaron trabajando sobre la axiomatización de la teoría de conjuntos, modificando y precisando los axiomas inicialmente propuestos por Zermelo.

La axiomatización mas conocida y utilizada es la de Zermelo-Fraenkel, esto es la que comprende los axiomas de Zermelo con las modificaciones que introdujo Fraenkel en 1925.

En este capítulo expondremos los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZFE de ahora en adelante) e intentaremos bosquejar la solución de un problema que continuaba planteando el axioma de elección:

¿Es el axioma de elección consistente con todos los demas axiomas del sistema formal? esto es, ¿No es posible deducir contradicciones de los axiomas de ZF y el axioma de elección?

¿Es en realidad independiente el axioma de elección de los demas axiomas de la teoría? ¿ó será posible deducir dicho axioma dentro del sistema formal, de los demas axiomas?

A estas preguntas dieron respuesta Gödel en 1938 y Cohen en 1963; el como lo hicieron lo bosquejaremos en este capítulo.

La axiomatización de Zermelo-Fraenkel.

La axiomatización de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos consta de nueve axiomas. Dos de ellos son esquemas para construir axiomas y el noveno es el axioma de elección.

Convencionalmente a la axiomatización de Zermelo-Fraenkel sin tomar en cuenta el axioma de elección se le denomina ZF. Cuando se está haciendo referencia a la axiomatización completa, esto es, incluyendo el axioma de elección, se le denota ZFE, es decir ZF con elección.

No cabe duda que este convencionalismo no respeta la historia de la axiomatización de la Teoría de Conjuntos ya que el axioma de elección siempre estuvo considerado dentro de los axiomas (incluso dentro de los de Zermelo). Así que considerar ZF como la axiomática de la teoría de conjuntos y no pensar que ahí está incluido el axioma de elección es contrario a la idea que Ernst Zermelo y Fraenkel tenían al proponer una lista de axiomas para la teoría.

Sin embargo, esta notación y esta forma de "clasificar" los axiomas es la mas ampliamente utilizada y es la que se encuentra en cualquier texto de Teoría de Conjuntos. Nosotros vamos a enlistar a continuación los nueve axiomas de Zermelo-Fraenkel y de aquí en adelante vamos a considerar, como generalmente se hace, a los ocho primeros como la teoría axiomática ZF, y cuando nos estemos refiriendo a.

todos los axiomas incluyendo elección diremos que trabajamos con ZFE.

Axiomas de ZFE.

1. Axioma de extensionalidad
Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

2. Axioma del conjunto vacío.
Existe un conjunto que no tiene elementos

3. Axioma de regularidad.
Si x es un conjunto distinto del vacío existe un elemento y de x que es mínimo en x respecto a la pertenencia.

4. Esquema de comprensión.
Si x es un conjunto y P es una propiedad, existe un conjunto cuyos elementos son todos los elementos de x que tienen la propiedad P

5. Axioma de la unión
Si x es un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente los elementos de elementos de x.

6. Axioma del conjunto potencia
Si x es un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de x.

7. Axioma del infinito.

Existe un conjunto x, tal que el conjunto vacío pertenece a x y tal que $a \cup \{a\}$ pertenece a x siempre que a esté en x

8. Esquema de reemplazo.

Si x es un conjunto y F una funcional, la imagen de x bajo F es un conjunto.

9. Axioma de elección.

Para todo conjunto a hay una función f tal que el dominio de f es el conjunto de los subconjuntos no vacíos de a y tal que $f(b) \in b$ para $b \neq \emptyset$, $b \subseteq a$.

Es importante para poder despues bosquejar las pruebas de consistencia e independencia del axioma de elección de los demas axiomas de ZF, introducir un lenguaje formal para la teoría de conjuntos.

Denotaremos $\mathcal{L}$ al lenguaje formal para la teoría de conjuntos que está formado por:

i) variables para conjuntos; necesitamos un número numerable de variables $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pero para facilidad en la lectura utilizaremos las metavariables $a, b, c, d, v, u, w, x, y, z$ para designar conjuntos y sólo usaremos subíndices en casos necesarios.

ii) Símbolo de pertenencia $\in$, que es la única letra predicativa del lenguaje

iii) Símbolo de igualdad: $=$

iv) Conectivos lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

v) Símbolo de negación: $\sim$

vi) Cuantificadores: $\exists$ $\forall$

vii) Símbolos de puntuación:), (.

Una expresión es una sucesión finita de los símbolos enlistados en i) - vii). Dentro de ellos distinguimos a las fórmulas bien formadas generadas como sigue:

I. fórmulas atómicas

Si x, y son variables entonces

$(x \in y)$, $(x = y)$ son fórmulas atómicas

II. fórmulas bien formadas (f.b.f.)

1. Las fórmulas atómicas son f.b.f.
2. Si ϕ y ψ son fórmulas de $\mathcal{L}$ y x una variable, entonces tambien son fórmulas:

i) $(\phi \wedge \psi)$

ii) $(\phi \vee \psi)$

iii) $(\sim \phi)$

iv) $(\phi \rightarrow \psi)$

v) $(\phi \leftrightarrow \psi)$

vi) $(\forall x\, \phi)$

vii) $(\exists x\, \phi)$

Generalmente para facilitar la comprensión del lenguaje formal $\mathcal{L}$, éste se amplía y se introducen constantes (como $\emptyset$, ω, etc.), letras funcionales (cómo $\cup$, $\mathcal{P}$, etc.) y otros predicados (como func(x), OR, CAR, etc.) definiéndolos a partir de los axiomas.

Ahora con este lenguaje podemos escribir los axiomas de ZFE formalmente.

1. Axioma de extensionalidad.
   $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$
2. Axioma del conjunto vacío
   $\exists x \forall y (y \notin x)$

Notación: para la x definida por el axioma se usa el símbolo $\emptyset$

3. Axioma de regularidad.
   $\forall x ((x \neq \emptyset) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in x \rightarrow z \notin y)))$
4. Esquema de comprensión.
   Sea $\psi(w)$ una fórmula con w libre y tal que la variable y no aparece.
   $\forall x \exists y \forall w (w \in y \leftrightarrow w \in x \wedge \psi(w))$

Notación: generalmente se abrevia $y = \{w \mid w \in x \wedge \psi(w)\}$

5. Axioma de la unión.
   $\forall x \exists y \forall w (w \in y \leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge w \in z))$

Notación: a y se le denomina $\bigcup x$

6. Axioma del conjunto potencia
   $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ dónde $z \subseteq x$ es una abreviatura de $\forall w (w \in z \rightarrow w \in x)$

Notación: a y se le denomina $\mathcal{P}(x)$

7. Axioma del infinito
   $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
8. Esquema de reemplazo
   Sea φ con dos variables libres.
   $\forall u (\forall x \forall y \forall z (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists v \forall w (w \in v \leftrightarrow \exists a (a \in u \wedge \varphi(a,w))))$
9. Axioma de elección
   $\forall u \exists x (x : \mathcal{P}(u) \rightarrow u \wedge \forall y (y \in \mathcal{P}(u) - \{\emptyset\} \rightarrow x(y) \in y))$

Nota: $a : b \rightarrow c$ denota 'a es una función con dominio b y rango un subconjunto de c.

la consistencia del axioma de elección con los demas axiomas ZF.

La demostración de la consistencia del axioma de elección con ZF fué hecha por K. Gödel en 1938.

Gödel ocupo para la prueba la siguiente herramienta:

i) la jerarquía constructiva y el axioma de constructibilidad.

ii) teorema de la consistencia relativa.

Vamos a discutir un poco estos dos puntos para poder dar finalmente la idea de la prueba de consistencia de Gödel.

i) La jerarquía constructiva.

Definimos la jerarquía constructiva como

$$L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha$$

dónde:

$L_0 = \phi$

$L_{\alpha+1}$ = toda la colección de elementos descriptibles (*) de L_α mediante $\mathcal{L}$

$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ si $\lim(\alpha)$

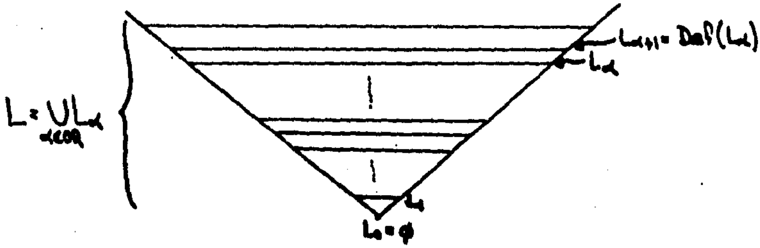
Dar una definición rigurosa de (*) sería algo que nos desviaría de los objetivos del presente trabajo, pero para dar una idea pensemos lo siguiente:

Sea $Def: V \to V$

$\forall \alpha \quad Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$

y $Def(L_\alpha)$ es el conjunto de todos los subconjuntos definibles de L_α; dónde definible significa "definible sobre el universo parcial L_α mediante el uso de fórmulas de $\mathcal{L}$ con una variable libre cuyo nombre se refiere sólamente a conjuntos en L_α".

Así si pensamos en la jerarquía constructiva L, tenemos algo de ésta forma:



L tiene las siguientes propiedades:

1) $L \subseteq V$
2) L es una clase transitiva, es decir $\bigcup L \subseteq L$
3) $OR \subseteq L$

Una pregunta natural es qué si $L \subsetneq V$ ó $L = V$ es decir, si hay conjuntos que no sean definibles o bien todos lo son. Gödel mismo prueba que $V = L$ es consistente con ZF como veremos mas adelante; además L es el modelo que usa para probar la consistencia del axioma de elección.

Así pues tenemos el axioma de constructibilidad:

$$V = L$$

Toda la idea de Gödel se basa en el teorema de la consistencia relativa.

ii) Teorema de la Consistencia Relativa.

Sean Γ, Σ conjuntos de enunciados de la teoría de conjuntos, esto es, $\Gamma, \Sigma \subseteq \mathcal{L}$; y sea M una clase tal que:

i) $\Gamma \vdash \exists x (x \in M)$

ii) $\Gamma \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$

Entonces $\quad con(\Gamma) \rightarrow con(\Sigma)$

Aclaremos ahora dos puntos del enunciado:

1. Si Γ es un subconjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$ y φ es una fórmula, $\Gamma \vdash \varphi$ denotará que hay una demostración de φ a partir del conjunto de fórmulas de Γ.

2. Sea M una clase entonces para toda fórmula ϕ definimos ϕ^M, la relativización de ϕ a M, por recursión sobre ϕ como:

i) $(x = y)^M$ es $x = y$

ii) $(x \in y)^M$ es $x \in y$

iii) $(\phi \wedge \psi)^M$ es $\phi^M \wedge \psi^M$

iv) $(\phi \vee \psi)^M$ es $\phi^M \vee \psi^M$

v) $(\sim \phi)^M$ es $\sim(\phi^M)$

vi) $(\phi \rightarrow \psi)^M$ es $(\sim \phi \vee \psi)^M$

vii) $(\exists x\, \phi)^M$ es $\exists x (x \in M \wedge \phi^M)$

viii) $(\forall x\, \phi)^M$ es $\forall x (x \in M \rightarrow \phi^M)$

El teorema entonces significa que si podemos probar cualquier fórmula σ de Σ relativizada a M, desde Γ, siendo M una clase no vacía, entonces si Γ es consistente también lo es Σ.

Generalmente se escribe $\Gamma \vdash \Sigma^M$ cuando $\Gamma \vdash \sigma^M$ para cualquier $\sigma \in \Sigma$.

En nuestro caso, si sustituimos Γ por ZF y Σ por ZFE no vamos a dar la prueba de la consistencia de ZFE, pero vamos a probar que si ZF no es contradictorio (de hecho esta prueba no podemos darla por el 2° Teorema de Gödel), tampoco lo es ZFE, es decir, el axioma de elección no crea contradicciones al añadirse a ZF; si es que ZFE fuera inconsistente, las contradicciones no surgirían por aumentar elección como un axioma más.

Una vez con esta herramienta discutida veamos sobre la idea de Gödel.

Inicialmente el demostró que:

$$con(ZF) \rightarrow con(ZF + V=L)$$

es decir, usando el teorema de consistencia relativa, probó que si ZF es consistente es tambien consistente ZF más el axioma de constructibilidad.

Para ello utilizó el siguiente:

Metateorema: $ZF \vdash (ZF + V=L)^L$

La clase M del teorema de consistencia relativa es el mismo universo constructible L; primeramente se puede probar:

1. $ZF \vdash (ZF)^L$
2. $ZF \vdash (V=L)^L$

y así, $con(ZF) \rightarrow con(ZF + V=L)$

Una vez con este resultado probó que en L todo conjunto está bien ordenado, ya que cada conjunto debe estar en algún L_α, $\alpha \in OR$ y cada L_α puede bien ordenarse.

Así, tenemos
$$(ZF + V{=}L) \vdash PBO$$

y como es el caso que:
Si $con(\Gamma) \rightarrow con(\Sigma)$ y $\Sigma \vdash \sigma$
entonces $con(\Gamma) \rightarrow con(\Sigma + \sigma)$

Veamos que tenemos:
$$con(ZF) \rightarrow con(ZF + V{=}L + PBO)$$
por tanto,
$$con(ZF) \rightarrow con(ZFE)$$

Antes de hablar de la prueba de independencia del axioma de elección de ZF, veamos porqué la técnica de Gödel se agota aquí, esto es, porque no es posible probar, con una clase M adecuada y el método antes expuesto que ZF es consistente con la negación del axioma de elección.

Si $ZF \vdash ((ZF)^M \wedge M \text{ transitiva} \wedge OR \subseteq M)$
entonces $ZF \vdash L \subseteq M \subseteq V$

Esto es, L es la menor clase respecto a la contención que tiene como características:

i) ser modelo de ZF
ii) ser transitiva i.e, L transitiva
iii) contener a los ordinales i.e, $OR \subseteq L$

Debido a este hecho se prueba que:
Si $ZF \vdash \sigma^L$ entonces $ZF \vdash \sigma^M$

Así, como en L la proposición "todo conjunto es bien ordenado" puede probarse usando $ZF + V=L$; en cualquier otra clase M que cumpla i)–iii) también será posible dar la prueba del PBO.

La independencia del Axioma de Elección respecto a ZF.

Mencionamos más arriba como es que el modelo del universo constructible de Gödel no es útil para demostrar la consistencia de la negación del axioma de elección con ZF, con lo cual se habría probado la independencia del axioma de dicho sistema.

La prueba de la independencia de elección respecto a ZF fué dada por Cohen hasta 1963 y se basa en una técnica conocida con el nombre de FORCING. Esta técnica es muy complicada, estudiarla detalladamente rebasa las espectativas de este trabajo. Así, a continuación pasaremos a exponer brevemente en que consiste el forcing en términos generales sin dar la demostración de la independencia del axioma de elección formalmente.

P. Cohen ideó un procedimiento para demostrar la consistencia de diversas proposiciones con ZF (proposiciones tales como la negación del axioma de elección, la negación de la hipótesis del continuo, etc.) que consiste basicamente en modificar el lenguaje de ZF enriqueciéndolo con nuevas constantes, correspondiendo esto a la idea intuitiva de agregar "nuevos" conjuntos al universo, y extender la definición de satisfabilidad o mejor dicho, modificar la semantica a este nuevo lenguaje.

Ahora bien, estos nuevos conjuntos deben tener cierta "interacción" con los "conjuntos viejos", por ejemplo, uno puede preguntarse que resulta de la intersección de un conjunto viejo con un conjunto nuevo. La respuesta a esto no es inmediata, en realidad depende del "significado" que tengan los conjuntos nuevos. Por supuesto, el "significado" de los conjuntos nuevos no puede estar dado solamente por los axiomas ni tampoco por las fórmulas del lenguaje porque, de ser así, no serían nuevos. El hecho de que una fórmula no pueda determinar un conjunto nuevo, no puede estar dado completamente por una propiedad expresable en el lenguaje de ZF.

Fué quizá esto, lo que motivó que Cohen pensara en conjuntos nuevos cuyo significado o descripción estuviera dado parcialmente, es decir, conjuntos cuyo descripción no está dado por una fórmula sino por cierta información parcial.

Un mecanismo que sirve para formalizar la idea de "dar información parcial del conjunto" es el siguiente:

Podemos considerar que una sucesión finita de unos y ceros nos da información acerca de que números naturales pertenecen a un conjunto nuevo X. Por ejemplo, la sucesión finita $(1,0,1,1,0)$ nos dice: $0 \in X$, $1 \notin X$, $2 \in X$, $3 \in X$, $4 \notin X$ y no nos dice nada acerca de los demas números naturales. En general, la sucesión finita

$S = \langle S_i \rangle_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$, $S_i \in \{0,1\}$ nos dice que $K \in X$ si $S_K = 1$ y que $K \notin X$ si $S_K = 0$

De manera muy informal (insistimos en esto) si P es una propiedad (una fórmula de ZF) y s una sucesión finita, decimos que "s forza a P", denotado por $s \Vdash P$, si s contiene suficiente información para concluir que P es cierto. Por ejemplo, si $s = (1,0,1,1,0)$ entonces $s \Vdash (0 \in X)$, $s \Vdash ((1985,3) \in (\omega \times X))$

pero, $s \nVdash (5 \in X)$ y $s \nVdash (5 \notin X)$

Hagamos ahora algunas observaciones acerca de todas estas ideas:

i) Si $s = (1,0,1,1,0)$ y $t = (1,0,1,1,0,t_5,t_{5+1},\dots,t_n)$ entonces si $s \Vdash P$ entonces $t \Vdash P$

ya que "t tiene mas información que s"

A lo que nos lleva directamente esto, es que podemos definir un órden parcial entre todas las sucesiones finitas de unos y ceros de la siguiente manera:

Si $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ y $t = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ entonces
$s < t$ sii ($n < m$ y $s_k = t_k$ $\forall k \leq n$)

De esta manera tenemos que:

Si $s \leq t$ y $s \Vdash p$ entonces $t \Vdash p$

A las sucesiones finitas de unos y ceros y en general, a los elementos de un orden parcial, se les conoce como condiciones de forcing.

ii) Pueden existir condiciones de forcing incompatibles por ejemplo si $s=(10110)$ y $t=(10111)$ entonces $s \Vdash (4 \notin x)$ y $t \Vdash (4 \in x)$. Este hecho no es motivo de preocupación ni va contra la idea intuitiva de forcing ya que pensemos en $s \Vdash P$ como el siguiente enunciado condicional:
"si la condición s describe a x entonces se cumple P."

Así, podemos dar la siguiente definición:
Si $(P, \leq)$ es un COPO y $s, t \in P$ entonces,
s y t son compatibles sii existe $r \in P$ con $(s \leq r)$ y $(t \leq r)$

Todo lo dicho hasta aquí respecto a la idea de agregar un conjunto nuevo es intuitivamente cierto, pero tiene el siguiente problema técnico: Si x es un conjunto nuevo que estamos agregando al modelo $\mathcal{M}$ de ZF, no podemos agregar solamente x sino que hay que agregar los conjuntos "construibles en $\mathcal{M}$" a partir de x.

Para resolver este problema se utiliza el método de Scott-Solovay de modelos booleano-valuados y extensiones H-genéricas. Aquí es donde hay un cambio en la semántica.

De manera breve diremos, que el método de Scott-Solovay consiste en lo siguiente:

Dados $\mathcal{M}$ un modelo transitivo de ZF, y un enunciado φ en el lenguaje de ZF, encontrar una extensión $\mathcal{M}_\varphi$, esto es $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\varphi$ tal que $\mathcal{M}_\varphi \models \varphi$

La forma de lograr esta extensión de un modelo $\mathcal{M}$ es a grandes rasgos la siguiente:

i) Comenzamos con un conjunto parcialmente ordenado P (conjunto de condiciones de forcing)

ii) "Completar" P a un álgebra booleana completa $\mathcal{B}$

iii) Tomar $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}/\mathcal{U}$ esto es $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$ módulo un ultrafiltro $\mathcal{M}$-genérico adecuado $\mathcal{U}$.

Luego $\langle \mathcal{M}^{\mathcal{B}}/\mathcal{U}, \in^{\mathcal{U}}, =^{\mathcal{U}} \rangle$ donde $=^{\mathcal{U}}$ y $\in^{\mathcal{U}}$ son la igualdad y la pertenencia definidas en $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}/\mathcal{U}$ en forma adecuada. Así, resulta $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}/\mathcal{U}$ ser un modelo de ZFE.

iv) Finalmente empleando el Lema de Mostowski se obtiene un modelo $\in$-transitivo $\mathcal{M}[\mathcal{U}]$, isomorfo a $\langle \mathcal{M}^{\mathcal{B}}/\mathcal{U}, \in^{\mathcal{U}}, =^{\mathcal{U}} \rangle$

De esta forma, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[\mathcal{U}]$ es decir $\mathcal{M}[\mathcal{U}]$ es la extensión buscada de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}[\mathcal{U}] \models \varphi$

Mediante un diagrama pueden apreciarse los pasos descritos en i)-iv) mas claramente.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "j"'] & \mathcal{M}^{\mathcal{B}} \arrow[r, "w"] \arrow[d] & \mathcal{M}^{\mathcal{B}}/\mathcal{U} \arrow[dl, "f"] \\
& \mathcal{M}[\mathcal{U}] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, una característica del modelo genérico $\mathcal{M}[\mathcal{U}]$, es el hecho de ser un modelo transitivo de ZFE que además es el "menor" modelo, respecto a la contensión, donde $\mathcal{U} \in \mathcal{M}[\mathcal{U}]$

Así, si nuestro interes es demostrar la consistencia de la negación del axioma de elección con ZF, una extensión genérica de un modelo $\mathcal{M}$ transitivo, construida con el método de Scott-Solovay no nos es útil ya que dicha extensión será modelo de ZFE. Sin embargo el método de Scott-Solovay es muy utilizado para demostrar la independencia de una gran cantidad de proposiciones (hipótesis del continuo, recta de Souslin, etc).

Para la prueba de la independencia del axioma de elección respecto a ZF, se utiliza una extensión de un modelo transitivo $\mathcal{M}$ de ZF, que no es un modelo genérico. Al modelo adecuado se le conoce con el nombre de HOD* (ordinales hereditariamente definibles) y es tal que

$$\mathcal{M} \subseteq HOD \subseteq \mathcal{M}[\mathcal{U}]$$

$\mathcal{U} \notin HOD$ y HOD es un modelo de ZF mas no de elección.

* para obtener mas información acerca del modelo HOD puede revisarse: Kunen: 'Set Theory'; North Holland, 1980.

CAPITULO III

ALGUNAS EQUIVALENCIAS DEL AXIOMA DE ELECCION.

Dentro de la lógica, de la topología y de la misma teoría de conjuntos, son utilizados una serie de principios, lemas ó teoremas que resultan ser equivalentes al axioma de elección.

Por equivalencia entre dos proposiciones entendemos que desde los axiomas del sistema que estemos considerando, (en este caso ZF), podemos deducir que las dos proposiciones se implican mutuamente. Es decir, si σ es una proposición, entonces es equivalente al axioma de elección si:

$$ZF \vdash AE \leftrightarrow \sigma$$

Vamos a presentar a continuación una serie de equivalencias al axioma de elección que van a estar divididas en dos grupos:

A. Equivalencias obvias del axioma de elección, en las que es muy claro que se está manejando la misma idea y que son solamente distintas formas de explicar lo mismo. Estas equivalencias se dejaron solamente enunciadas, ya que las demostraciones resultan sumamente sencillas.

B. Equivalencias no tan directas del axioma de elección, de las cuales daremos la demostración de la equivalencia.

A.

1. Axioma de elección de Zermelo.

Para todo conjunto a hay una función f tal que el dominio de f es el conjunto de subconjuntos no vacíos de a y tal que $f(b) \in b$ para $b \neq \emptyset$, $b \subseteq a$,
es decir, $f : \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\} \to a$ y $f(b) \in b$ para todo $b \subseteq a$ con $b \neq \emptyset$

2. El producto cartesiano de conjuntos no vacíos es siempre un conjunto no vacío, es decir,

Si $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$; o más precisamente: Si $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces existe una función $f : I \to \prod_{i \in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.

3. Todo conjunto distinto de $\{\emptyset\}$ tiene una función de elección
Donde f es una función de elección para el conjunto a sii

i) $f : a \to \bigcup a$

ii) $(\forall x \in a)(x \neq \emptyset \to f(x) \in x)$

4. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto tal que

a) cada elemento de $\mathcal{S}$ es un conjunto no vacío

b) cualesquiera dos elementos de $\mathcal{S}$ son disjuntos

Entonces existe un conjunto C que contiene exactamente un elemento de cada elemento de $\mathcal{S}$, es decir,

$$(\forall b \in \mathcal{S})(\exists x \in b)(C \cap b = \{x\})$$

B. Ahora vamos a demostrar las equivalencias de las siguientes proposiciones.

1. Axioma de elección (AE)
2. Principio del Buen Orden (PBO)
3. Lema de Zorn (LZ)
4. Lema de Tukey (LT)
5. Principio Maximal de Hausdorff (PMH)
6. Dominancia Total (DT)

Para efectuar la demostración vamos a seguir la siguiente estrategia:

I. AE ⟷ PBO ⟷ LZ
II. LZ ⟶ LT ⟶ AE
III. AE ⟶ PMH ⟶ LZ
IV. LZ ⟶ DT ⟶ PBO

La estrategia completa es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
AE \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathrm{I}"] \arrow[dr, "\mathrm{III}"] & & PBO \arrow[dd, leftrightarrow, "\mathrm{I}"] & \\
& PMH \arrow[dr, "\mathrm{III}"] & & DT \arrow[ul, "\mathrm{IV}"'] \\
LT \arrow[uu, "\mathrm{II}"] & & LZ \arrow[ll, "\mathrm{II}"] \arrow[ur, "\mathrm{IV}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es importante notar que para la demostración de la equivalencia de las 6 proposiciones anteriores no necesitamos realizar todas las implicaciones que marcamos en la estrategia; sin embargo demostraremos todas ellas ya que las demostraciones resultan muy interesantes.

DEMOSTRACIONES.

AE : Todo conjunto tiene una función de elección.

PBO : Todo conjunto es bien ordenable.

Por demostrar: AE $\rightarrow$ PBO.

Recordemos primero que todo conjunto con una relación de orden $(a,<)$ es bien ordenado (ó podemos decir que $<$ bien ordena a a) si y solo si "$<$" es un orden total y además todo subconjunto b de a tiene un primer elemento. (1)

Demostración:

Sea a un conjunto y sea f una función de elección para $\mathcal{P}(a)-\{\phi\}$, es decir,

$$f: \mathcal{P}(a)-\{\phi\} \rightarrow a \text{ tal que } \forall x \subseteq a\ (x \neq \phi \rightarrow f(x) \in x)$$

Definimos $g: \mathcal{P}(a) \rightarrow a \cup \{a\}$ de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \phi \\ a & \text{si } x = \phi \end{cases}$$

Por el esquema general de recursión para ordinales (2) existe una funcional $F: OR \longrightarrow V$ tal que $\forall \alpha\ F(\alpha) = g(a - F[\alpha])$

Afirmamos:

1. $\alpha < \beta \wedge F(\alpha) = a \rightarrow F(\beta) = a$

es decir, a partir de un momento si α "alcanzó" el valor "a" bajo F, cualquier ordinal mayor toma ese mismo valor.

2. $\alpha < \beta \wedge F(\beta) \neq a \rightarrow F(\alpha) \neq F(\beta)$
3. $(\exists \alpha)(F(\alpha) = a)$

es decir, la función F en algun momento efectivamente toma el valor de a.

Demostremos ahora estas afirmaciones:

Recordemos que $\quad a = F(\alpha) = g(a - F[\alpha]) \leftrightarrow a - F[\alpha] = \phi \; \dots (*)$

1. Si $\alpha < \beta \rightarrow F[\alpha] \subseteq F[\beta]$; por hipótesis y $(*)$, $a - F[\alpha] = \phi$

$\therefore \; a - F[\beta] = \phi$

y por $(*)$, $F(\beta) = a$

$\dashv$

2. Si $\alpha < \beta$ tenemos que $F(\alpha) \in F[\beta] \quad (**)$

demostremos que $F(\beta) \notin F[\beta]$

Como $F(\beta) \neq a \rightarrow \forall \gamma < \beta \, , F(\gamma) \neq a \quad$ (por af. 1)

$F(\beta) = g(a - F[\beta]) \longrightarrow a - F[\beta] \neq \phi \; , \; a - F[\beta] \subseteq a$

$\therefore \; F(\beta) = f(a - F[\beta])$ pero f es de elección.

Así $\quad f(a - F[\beta]) \in (a - F[\beta])$

$\therefore \; F(\beta) \notin F[\beta]$

de lo anterior y $(**)$

$$F(\alpha) \neq F(\beta)$$

$\dashv$

3. Supongamos $\forall \alpha \; F(\alpha) \neq a$

De la suposición y de la af. 2. tenemos que F es inyectiva

Definimos $\quad F^{-1} : F[OR] \longrightarrow OR$ por

$$F^{-1}(x) = \alpha \longleftrightarrow F(\alpha) = x$$

F^{-1} esta bien definida por ser F inyectiva y además es sobre OR.

De nuestra suposición y de $(*)$ obtenemos

$$\forall \alpha \quad F(\alpha) = f(a - F[\alpha])$$

Así $\quad F[OR] \subseteq a$ y por esquema de comprensión $F[OR] \in V$

Ahora, por el esquema de substitución

$$OR = F^{-1}[F[OR]] \in V \;!$$

$\therefore \; (\exists \alpha)(F(\alpha) = a)$

$\dashv$

Ahora sí, con toda esta herramienta podemos probar que a es bien ordenable, encontrando una biyección entre un ordinal α_0 y a que le induzca su buen orden:

$$\text{Sea } \alpha_0 = \bigcap \{\alpha \mid F(\alpha) = a\}$$

α_0 existe por a1.3.; α_0 es el menor ordinal en donde ya se "terminó de cubrir" a a.

Consideremos la siguiente función: $F/_{\alpha_0}$

Observemos que si $\beta < \alpha_0$, por minimalidad de α_0, $F(\beta) \neq a$, así por $(*)$ $a - F[\beta] \neq \phi$ y por consiguiente.

$$F(\beta) = g(a - F[\beta]) = f(a - F[\beta])$$

y por lo tanto $F/_{\alpha_0}(\beta) \in a$.

Así $F/_{\alpha_0} : \alpha_0 \longrightarrow a$.

Ahora, $F/_{\alpha_0}$ es inyectiva por la afirmación 2. ya que:

$$(\alpha, \beta \in OR) \wedge (\alpha < \alpha_0) \wedge (\beta < \alpha_0) \wedge (\alpha \neq \beta)$$
$$\longrightarrow (F/_{\alpha_0}(\alpha) = F(\alpha) \neq F(\beta) = F/_{\alpha_0}(\beta))$$

Demostraremos por último que $F/_{\alpha_0}$ es sobre a, es decir, demostremos que $\forall x \in a \ \exists \beta < \alpha_0 \ \cdot\!\!\!\!\cdot\!\!\!|\ F(\beta) = x$.

Por $(*)$ $F(\beta) = g(a - F[\beta]) = f(a - F[\beta])$ para $\beta < \alpha_0$

Supongamos que $F/_{\alpha_0}$ no es sobre a, es decir, $F[\alpha_0] \subsetneq a$ entonces $a - F[\alpha_0] \neq \phi$ y por $(*)$ $F(\alpha_0) \neq a$ $\circ\!\!\!\triangleright$

$\therefore F/_{\alpha_0}$ es sobre a

Tenemos entonces una función biyectiva de un ordinal α_0 en a:

$$F/_{\alpha_0} : \alpha_0 \rightarrow a \text{ es biyectiva}$$

$\therefore a$ es bien-ordenable

Demostremos ahora PBO $\to$ AE

Demostración:

Sea a un conjunto. Por PBO a puede bien-ordenarse.
Sea $<$ un buen orden para a, i.e. $(a,<)$ es COBO

Si $x \neq \emptyset$ y $x \subseteq a$, definimos $f(x) = x_0$ donde x_0 es el primer elemento de x

$$\therefore f : a \to \bigcup a \ \wedge \ (\forall x \in a)(x \neq \emptyset \to f(x) \in x)$$

$\therefore$ f es una función de elección para a.

Comencemos ahora con la siguiente parte de la demostración: PBO $\leftrightarrow$ LZ

El Lema de Zorn dice lo siguiente:

Todo conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena está acotada superiormente tiene un elemento maximal.

Por demostrar: PBO $\to$ LZ

Demostración:

Sea $(a,\prec)$ un COPO tal que toda cadena está acotada superiormente. Por demostrar: a tiene un elemento maximal.

Por el principio del buen orden existe un buen orden para a; Sea $(a,<)$ un COBO.

Definimos $f: a \to \{0,1\}$ recursivamente como sigue:

$$\forall x \in a \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \forall y\,[y < x \wedge f(y) = 1 \to y \prec x] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $b = \{x \in a \mid f(x) = 1\}$

Observación: Si $x \in a$, $x \in b \leftrightarrow \forall y\,[y < x \wedge y \in b \to y \prec x]$

Afirmación 1: b es una $\prec$-cadena.

Sean $u, v \in b$; $<$ es un orden total, así $u = v$ ó $u < v$ ó $v < u$

Si $u = v$ entonces $u = v$

Si $u < v$ por la observación anterior tenemos $u \prec v$

Analogamente si $v \leq u$, tenemos $v \preccurlyeq u$

Asi, por hipótesis b tiene una α-cota superior, digamos x_0 es decir, $\forall x \in b \ (x \alpha x_0)$

Afirmación 2. x_0 es α-maximal de a

Sea $y_0 \in a \ \wedge \ x_0 \preccurlyeq y_0$ p.dem. $y_0 = x_0$

Si $x_0 \preccurlyeq y_0$ entonces $y_0 \in b$

pues si $y < y_0$ y $y \in b \to y \preccurlyeq x_0 \ \wedge \ x_0 \preccurlyeq y_0$

$\to y \preccurlyeq y_0$

$\therefore y_0 \in b$

Pero x_0 es cota superior de b

$\therefore x_0 = y_0$

$\therefore x_0$ es α-maximal de a.

$\dashv$.

Efectuemos ahora $LZ \to PBO$.

Demostración:

Sea a un conjunto

Consideremos las parejas (x, ρ) donde $x \subseteq a$ y ρ es un orden total para x.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de (x, ρ) tales que ρ bien-ordena a x.

Si $\langle x_1, \rho_1 \rangle$ y $\langle x_2, \rho_2 \rangle$ pertenecen a $\mathcal{S}$ definimos:

$\langle x_1, \rho_1 \rangle \leq \langle x_2, \rho_2 \rangle$ sii (a) $x_1 \subseteq x_2$

b) $\rho_1 \subseteq \rho_2$

(c) Si $y \in x_1$, $z \in x_2$ y $z \notin x_1 \to \langle y, z \rangle \in \rho_2$

Es claro que $\leq$ ordena parcialmente a $\mathcal{S}$.

Demostremos ahora que $\langle \mathcal{S}, \leq \rangle$ satisface la hipótesis del lema de Zorn, es decir, demostremos que toda cadena $\mathcal{S}$ esta acotada en $\mathcal{S}$.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena de $\mathcal{S}$. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$

Proponemos una cota superior para $\mathcal{C}$, $\langle x^*, \rho^* \rangle$ donde:

$$x^* = \bigcup \{x \mid \langle x, \rho \rangle \in \mathcal{C}\}$$

$$\rho^* = \bigcup \{\rho \mid \langle x, \rho \rangle \in \mathcal{C}\}$$

Tenemos que para toda $\langle x, \rho \rangle \in \mathcal{C}$, $\langle x, \rho \rangle \leq \langle x^*, \rho^* \rangle$ pues si $\langle x, \rho \rangle \in \mathcal{C}$: a) $x \subseteq x^*$

b) $\rho \subseteq \rho^*$

c) Sea $y \in x$ $\wedge$ $z \in x^* - x$; por demostrar: $\langle y, z \rangle \in \rho^*$

Como $\mathcal{C}$ es una $\leq$-cadena de $\mathcal{S}$, $\{x \mid \langle x, \rho \rangle \in \mathcal{C}\}$ es una $\subseteq$-cadena en $\mathcal{P}(a)$. De ésto y de que $z \in x^* - x$, hay un $\langle x_0, \rho_0 \rangle \in \mathcal{C}$ tal que $z \in x_0 - x$ (*). Como $\mathcal{C}$ es una cadena y $x \subsetneq x_0$ tenemos $\langle x, \rho \rangle \leq \langle x_0, \rho_0 \rangle$ (**).

De (*), (**) y de que $y \in x$, tenemos $\langle y, z \rangle \in \rho_0$

Finalmente, como $\rho_0 \subseteq \rho^*$, tenemos $\langle y, z \rangle \in \rho^*$

$\therefore$ $\mathcal{C}$ está acotada por $\langle x^*, \rho^* \rangle$

Debemos mostrar ahora que $\langle x^*, \rho^* \rangle \in \mathcal{S}$ es decir, hay que mostrar ahora que ρ^* bien ordena a x^*

El orden total de $\langle x^*, \rho^* \rangle$ es claro ya que es el heredado de cada $\langle x, \rho \rangle$ que pertenece a $\mathcal{C}$. Falta mostrar que ρ^* bien ordena a x^*, es decir,

$$\forall b \subseteq x^* \left[b \neq \phi \rightarrow \exists x_0 \in b \ \forall z \in b \ (\langle x_0, z \rangle \in \rho^*) \right]$$

Para $b \subseteq x^*$, existe $x_b \in x^*$ $\cdot\!\!\ni\!\cdot$ $b \cap x_b \neq \phi$

$b \cap x_b \subsetneq x_b \in x^*$ y $x_b \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, pero x_b esta bien ordenado por ρ_b

Luego existe $x_0 \in (b \cap x_b)$ $\cdot\!\!\ni\!\cdot$ $\forall z \in (b \cap x_b)$ $(x_b \rho_b z)$

Ahora $\forall z \in b$ existe $\langle x, \rho \rangle \in \mathcal{C}$ $\cdot\!\!\ni\!\cdot$ $z \in x$ y puede suceder porque $\mathcal{C}$ es cadena i) $x \subseteq x_b$

ii) $x_b \subseteq x$

Si $x \subseteq x_b \rightarrow \langle x_0, z \rangle \in \rho_0$

Si $X_b \subseteq X$, $\rho_b \subseteq \rho$ y

- $x_0 \in X_b \wedge z \in X_b \to x_0 \rho_b z$, i.e, $x_0 \rho z$
- $x_0 \in X_b \wedge z \in X - X_b \to x_0 \rho z$ (por definición de orden)

En ambos casos $x_0 \rho z$

Luego tanto en i) como en ii) tenemos. $x_0 \rho'' z$.

$\therefore$ b tiene primer elemento

$\therefore$ $\langle x'', \rho'' \rangle \in \mathcal{S}$

Hasta aquí tenemos la hipótesis del lema de Zorn porque hemos mostrado una cota para cada cadena $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ que también esta en $\mathcal{S}$, por tanto podemos afirmar que $\mathcal{S}$ tiene elemento maximal.

Sea $\langle x, \rho \rangle$ elemento maximal de $\mathcal{S}$

Queremos demostrar que $x = a$ y ahí concluimos la demostración puesto que del hecho que ρ es un buen orden para x, se sigue que a es COBO.

Supongamos que $x \neq a$

Sabemos que $x \subseteq a$ por tanto hay que considerar el caso $a \not\subseteq x$

Si $a \not\subseteq x \to \exists z \; (z \in a \wedge z \notin x)$

Consideremos $x \cup \{z\}$ y extendemos la relación ρ definiendo que: $\forall w \in x \; (w \rho z)$ es decir, z es mayor que todos los elementos de x.

El nuevo par $\langle x', \rho' \rangle$ donde $x' = x \cup \{z\}$

$\rho' = \rho \cup \{\langle w, z \rangle \mid w \in x\}$

es elemento de $\mathcal{S}$ ya que ρ' bien ordena a x'

Además $\langle x, \rho \rangle < \langle x', \rho' \rangle$ $\triangleright_0$

Contradiciendo la maximalidad de $\langle x, \rho \rangle$

$\therefore$ $x = a$

$\therefore$ a es bien ordenable.

Vamos ahora con la siguiente serie de implicaciones:

$LZ \to LT \to AE$

El lema de Tukey dice lo siguiente:

Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos. Si $\mathcal{F}$ tiene carácter finito entonces $\mathcal{F}$ tiene elemento maximal.

Nota: $\mathcal{F}$ tiene carácter finito sii para todo conjunto x, $x \in \mathcal{F}$ $\leftrightarrow$ todo subconjunto finito de x pertenece a $\mathcal{F}$

Por demostrar: $LZ \to LT$.

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos

Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene carácter finito. $\mathcal{F}$ está parcialmente ordenado por $\subseteq$.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{F}$

Sea $a = \bigcup\{x \mid x \in \mathcal{C}\}$ es decir, $a = \bigcup \mathcal{C}$

Demostremos primero que $a \in \mathcal{F}$ y así tendremos que a será una cota superior de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}$.

Veamos que todo subconjunto finito de a pertenece a $\mathcal{F}$.

Sea $a_0 \subseteq a$, a_0 finito.

Supongamos $a_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in a$ $\forall i = 1, \ldots, n$

Ahora, para cada x_i, hay $y_i \in \mathcal{C}$ tal que $x_i \in y_i$

Como $\mathcal{C}$ es cadena hay un n_0 tal que $y_i \subseteq y_{n_0}$ $\forall i = 1, \ldots, n$

así, $a_0 \subseteq y_{n_0}$ y como $y_{n_0} \in \mathcal{F}$, por la propiedad del carácter finito tenemos

$$a_0 \in \mathcal{F}$$

$$\therefore\ a \in \mathcal{F}$$

Ahora, como toda cadena de $\mathcal{F}$ está acotada superiormente, por el lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene elemento maximal, como aseguraba el lema de Tukey.

$\dashv$

Demostremos ahora $LT \to AE$

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos no vacíos.

Sea $\mathcal{J} = \{f \mid f$ es una función de elección para $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}\}$

Veamos que $\mathcal{J}$ es de carácter finito.

i) Sea $f \in \mathcal{J}$ con $\mathcal{G} = \operatorname{dom} f$ y sea $f' \subseteq f$ con $\mathcal{G}' = \operatorname{dom} f'$

Sea $x \in \mathcal{G}'$; por demostrar: $f'(x) \in x$

$\langle x, f'(x) \rangle \in f'$ y como $f' \subseteq f$

tenemos $f'(x) = f(x)$ y por ser f de elección $f'(x) \in x$

$\therefore$ f' es de elección

$\therefore$ $f' \in \mathcal{J}$, en particular todas las f finitas.

ii) Sea f tal que para todo $f' \subseteq f$, f' finito tenemos $f' \in \mathcal{J}$.

por demostrar: $f \in \mathcal{J}$.

Demostración: Sea $y = \{\{x\} \mid x \in f\} \subseteq \mathcal{P}(f)$

Veamos primero que $f = \bigcup y$.

Sea $z \in f \to \{z\} \in y \to z \in \{z\} \in y$

$\therefore z \in \bigcup y$

$\therefore f \subseteq \bigcup y$

Sea $z \in \bigcup y \to \exists\, w \in y \ \cdot\!\ni\!\cdot\ z \in w$ (*)

por definición $w = \{x\}$ con $x \in f$

$\to z \in \{x\}$ $\quad \therefore z = x$

$\therefore z \in f$

$\therefore \bigcup y \subseteq f$

$\therefore \bigcup y = f$.

Ahora, demostremos que f es de elección.

$\{x\} \subseteq f$, finito $\to \{x\} \in \mathcal{J}$; podemos escribir entonces a x como:

$x = (y, z)$

Si $(y,z) \in f$ y $(y,w) \in f \to \{(y,z),(y,w)\} \subseteq f$

$\therefore \{(y,z),(y,w)\} \in \mathcal{J}$ y por tanto es función

$\therefore\ Z = \omega$

$\therefore\ f$ es función.

Ahora, Sea $x \in \operatorname{dom} f$; por demostrar: $f(x) \in x$

$\{(x, f(x))\} \subseteq f$

$\therefore\ \{(x, f(x))\} \in \mathcal{S}$ $\therefore\ f(x) \in x$

$\therefore\ f$ es de elección

$\therefore\ f \in \mathcal{S}$.

$\therefore\ \mathcal{S}$ es de carácter finito.

Por el Lema de Tukey, $\mathcal{S}$ tiene un elemento maximal F.

Sea $\mathcal{D} = \operatorname{dom} F$, queremos mostrar que $\mathcal{D} = \mathcal{F}$

Supongamos $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{F}$

Sea $x \in \mathcal{F} - \mathcal{D}$, como $x \neq \emptyset$, sea $x_0 \in x$

Sea $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{x\} \to \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{F}$ (1)

Definimos $F' = F \cup \{\langle x, x_0 \rangle\}$ entonces F' es de elección (2)

Por (1) y (2) $F' \in \mathcal{S}$ y $F \subsetneq F'$!?

contradiciendo la maximalidad de F."

$\therefore\ \mathcal{D} = \mathcal{F}$

$\therefore\ F$ es una función de elección sobre $\mathcal{F}$.

$\dashv$

Continuemos con las siguientes explicaciones:

$AE \to PMH \to LZ$

El principio maximal de Hausdorff dice que:

Todo conjunto parcialmente ordenado incluye una cadena maximal, esto es, una cadena que no es subconjunto propio de ninguna otra cadena.

Demostremos $AE \to PMH$.

Demostración:

Sea $\langle p, \leq \rangle$ un COPO y supongamos que toda cadena es extensible (propiamente)

Sea $\mathcal{C} = \{ C \subseteq p \mid C \text{ es cadena} \}$

$\forall C \in \mathcal{C}, \quad a_C = \{ D \in \mathcal{C} \mid C \subsetneq D \}$

Por hipótesis, $\forall C \in \mathcal{C}, \; a_C \neq \phi$

Por el axioma de elección, hay una función f de elección en $\{ a_C \mid C \in \mathcal{C} \}$

$$f : \{ a_C \mid C \in \mathcal{C} \} \longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{t.q.} \quad f(a_C) \in a_C$$

Notemos que $f(a_C)$ es una cadena, por el hecho de pertenecer a a_C

Sea $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
$g(C) = f(a_C)$

Luego, $\forall C \in \mathcal{C}, \; g(C) = f(a_C) \in a_C$
así $C \subsetneq g(C) \quad (*)$

Como $\langle \mathcal{C}, \subseteq \rangle$ es un COPO tal que toda cadena tiene un supremo (a saber, su unión), y por $(*)$ tenemos que se satisfacen las hipótesis del siguiente lema (a)

Sea $a \neq \phi$, a COPO tal que toda cadena contenida en a tiene una mínima cota superior. Si $f : a \to a$ es tal que $f(x) \geq x \; \forall x \in a$
$\rightarrow \exists x \in a$ t.q. $f(x) = x$

Luego hay un $C_0 \in \mathcal{C}$ t.q. $g(C_0) = C_0$!
contradiciendo el que $g(C_0) = f(a_{C_0}) \in a_{C_0}$
$\therefore \; g(C_0) \subsetneq C_0$.

$\therefore$ Existe una cadena maximal en p.

Veamos ahora que PMH → LZ

Demostración:

Sea $\langle p, \leq \rangle$ un COPO tal que toda cadena está acotada superiormente. Por el PMH, existe un subconjunto maximal a de p bajo el orden $\leq$

Sea x una cota superior de a

Afirmamos: x es el máximo de p

Supongamos que $x < y$ para algún $y \in p$

luego $a \cup \{y\} \subseteq p \wedge a \subsetneq a \cup \{y\}$ contradiciendo la maximalidad de a.

$\therefore$ x es el máximo de p

Finalmente, vayamos a las demostraciones:

LZ → DT → PBO

Dominancia Total dice:

Para dos conjuntos c, d cualesquiera se tiene que $c \preccurlyeq d$ ó $d \preccurlyeq c$.

Demostraremos que LZ → DT.

Demostración:

Sean c, d dos conjuntos

Definamos $\mathcal{A} = \{f \mid f$ es biyectiva $\wedge$ dom $f \subseteq c \wedge$ ran $f \subseteq d\}$

Consideremos $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ COPO y una cadena $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Es claro que $\bigcup \mathcal{B}$ es función biyectiva ya que $\mathcal{B}$ es un sistema compatible de funciones, por ser COTO.

Además, como $\text{dom}(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup_{f \in \mathcal{B}} \text{dom } f \subseteq c$

$y \quad \operatorname{ran}(\bigcup\beta) = \bigcup_{f\in\beta} \operatorname{ran} f \subseteq d$

$\bigcup\beta \in A$ y es una cota superior de β

Ahora sí podemos usar el Lema de Zorn

Por LZ existe $\bar{f}$ maximal en $\mathcal{A}$.

Si el $\operatorname{dom}\bar{f} = c$ entonces $c \preccurlyeq d$

Si el $\operatorname{ran}\bar{f} = d$ entonces $d \preccurlyeq c$

Basta, pues, demostrar que $\operatorname{dom}\bar{f} = c$ ó $\operatorname{ran}\bar{f} = d$.

Supongamos que $\operatorname{dom}\bar{f} \neq c \ \wedge \ \operatorname{ran}\bar{f} \neq d$

luego existen elementos x, y tales que

$x \in c - \operatorname{dom}\bar{f} \quad \wedge \quad y \in d - \operatorname{ran}\bar{f}$

Sea $f' = \bar{f} \cup \{\langle x, y\rangle\}$

Así $f' \in \mathcal{A}$ y $\bar{f} \subseteq f'$!?

Contradiciendo la maximalidad de $\bar{f}$.

$\therefore \ c \preccurlyeq d \ $ ó $\ d \preccurlyeq c$.

Demostremos que DT → PBO.

Demostración: Sea a un conjunto.

Por el Teorema de Hartog (4) sabemos que $\forall a \exists \alpha (\alpha \not\preccurlyeq a)$

Sea $\alpha \in OR$ tal que $\alpha \not\preccurlyeq a$.

Por la dominancia total de α y a sabemos que

$a \preccurlyeq \alpha$ i.e, existe $f: a \to \alpha$ inyectiva

Con esta f, "inducimos" un buen orden en a:

$\forall s, t \in a \ (s < t \longleftrightarrow f(s) \in f(t))$

$\therefore$ a es bien ordenable.

Otra equivalencia del axioma de elección es el teorema de Tychonoff:

"El producto topológico de espacios compactos es compacto".

Sin embargo, por la importancia de este teorema en topología nos ha parecido adecuado hablar de él en el capítulo siguiente donde tratamos de las aplicaciones del axioma de elección.

Se demostrará allí que el Lema de Tukey implica el teorema de Tychonoff y como una nota al final del capítulo se mostrará que el teorema implica el axioma de elección en su versión multiplicativa, esto es: "el producto cartesiano de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío".

Notas.

(1). Definiciones:

a) Una relación binaria $<$ en A que es reflexiva, antisimétrica y transitiva es llamado un orden parcial de A.

El par $(A, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado por $<$, que se abrevia COPO.

b) Una relación parcial de orden $\leq$ es un orden total de A si cualesquiera dos elementos de A son comparables.

$(A, \leq)$ se denomina conjunto totalmente ordenado y se abrevia COTO.

c) Una relación total de orden $\leq$ en A se dice que es un buen orden si para todo subconjunto no vacío de A, existe un primer elemento. $(A, \leq)$ se denomina conjunto bien ordenado y se abrevia COBO.

(2) Esquema general de recursión para ordinales.

Si $G: V \to V$ entonces hay una única $F: OR \to V$ tal que $F(\alpha) = G(F/\alpha)$.

(3) Sea E un COPO distinto del vacío tal que toda cadena tiene una mínima cota superior en E. Si $f: E \to E$ es tal que $f(x) \geq x$ para toda $x \in E$. Entonces existe al menos una x en E tal que $f(x) = x$.

Demostración:

Sea a un elemento fijo de E.

Definimos: $A \subseteq E$, A es admisible sii

i) $a \in A$

ii) $f(A) \subseteq A$

iii) Si F es una cadena contenida en A entonces la mínima cota superior (m.c.s.) de F pertenece a A.

Claramente E es admisible y

$M = \bigcap\{A \mid A \text{ es admisible}\}$ también lo es. Notemos que M es el menor subconjunto admisible de E

Afirmamos:

I. a es el menor elemento de M

II. Definimos la propiedad $P(x)$ para elementos de E sii, $y \in M$ y $y < x$ implica $f(y) \leq x$.

Ahora la afirmación es la siguiente:

Si $x \in M$ y $P(x)$ entonces para toda $z \in M$, $z \leq x$ ó $z \geq f(x)$

III. $\forall x \in M$, $P(x)$.

Demostremos las afirmaciones:

I. Vamos a demostrar que

$A = \{x \in M \mid x \geq a\}$ es admisible y así por la minimalidad de M tendremos que a es el primer elemento de M.

Por demostrar: A admisible.

i) $a \in M$ y $a \geq a$ $\therefore a \in A$.

ii) Sea $x \in A$ p.dem. $f(x) \in A$

Dem. $x \in A \rightarrow x \in M$; como M admisible $f(x) \in M$

$x \in A \rightarrow x \geq a$ y $f(x) \geq x$ por hipótesis.

$\therefore f(x) \geq a$

$\therefore f(x) \in A$

$\therefore f(A) \subseteq A$.

iii) Sea $\mathcal{F}$ una cadena en A y $w = mcs(\mathcal{F})$

por demostrar: $w \in A$.

Dem. $A \subseteq M \wedge \mathcal{F} \subseteq A \rightarrow \mathcal{F} \subseteq M$

Como M admisible $w \in M$,

además $\mathcal{F} \subseteq A \rightarrow \forall x \in \mathcal{F},\ x \geq a$ $\therefore w \geq a$

$\therefore w \in A$.

II. Demostraremos la afirmación II, mostrando que:

$B = \{z \in M \mid z \leq x$ ó $z \geq f(x)\}$ es admisible y por minimalidad de M, tendremos que $B = M$.

i) $a \in M \wedge a \leq x$ (por I) $\therefore a \in B$

ii) Sea $z \in B$. p.dem. $f(z) \in B$.

Dem: $z \in B \rightarrow z \in M$; luego $f(z) \in M$ por ser M admisible.

$z \in B \rightarrow z \leq x$ ó $z \geq f(x)$

Si $z = x \rightarrow f(z) = f(x)$ luego $f(z) \in B$

Si $z < x$, como $P(x)$, $f(z) \leq x$. luego $f(z) \in B$

Si $z \geq f(x)$ por propiedades de f tenemos

$f(z) \geq z \geq f(x)$, luego $f(z) \in B$.

$\therefore f(z) \in B$ $\therefore f(B) \subseteq B$

iii) Sea F una cadena incluida en B y $w = mcs(F)$
por demostrar: $w \in B$.

Dem: $F \subseteq B$, $B \subseteq M \rightarrow F \subseteq M$

Como M admisible, $w \in M$.

$\forall z \in F$, $z \leq x$ ó $z \geq f(x)$

Si $z \leq x$ para todo $z \in F$ ent. x es una cota superior de F
luego $w \leq x$ $\therefore$ $w \in B$

Si hay $z \in F$ tal que $z \geq f(x)$, entonces
$w \geq z \geq f(x)$
$\therefore$ $w \in B$

III. Demostraremos que $C = \{x \in M \mid P(x)\}$ es admisible y análogamente a las demostraciones anteriores $C = M$.

i) $a \in M$ y por I, a es el mínimo elemento de M
así, por vacuidad, $P(a)$ $\therefore$ $a \in C$

ii) Sea $x \in C$. pdm: $f(x) \in C$, i.e. $\forall y \in M$ $(y < f(x) \rightarrow f(y) \leq f(x))$

$x \in C \rightarrow x \in M$; como M admisible, $f(x) \in M$.

$x \in C \rightarrow P(x)$ y por II sabemos que:
para todo $y \in M$, $y \leq x$ ó $y \geq f(x)$

$y \geq f(x)$ es imposible ya que estamos considerando $y < f(x)$.
luego $y \leq x$

Si $y < x \rightarrow f(y) \leq x$, ya que $P(x)$
además $x \leq f(x)$ $\therefore$ $f(y) \leq f(x)$

Si $y = x$, $f(y) \leq f(x)$

$\therefore$ $f(x) \in C$
$\therefore$ $f(C) \subseteq C$.

iii) Sea $\mathcal{F}$ una cadena en C y $w = \sup(\mathcal{F})$

por demostrar: $w \in C$ ie, $P(w) \wedge w \in M$.

Demostración: $\mathcal{F} \subseteq C$, $C \subseteq M \to \mathcal{F} \subseteq M$

y M admisible, luego $w \in M$.

Ahora necesitamos demostrar $P(w)$ ie, $y \in M$, $y < w \to f(y) \leq w$

Sea $y \in M$, $y < w$.

Veamos primero que existe $y_1 \in \mathcal{F}$ tal que $y \leq y_1$

Supongamos que no existe dicha y_1, entonces por II y como $P(y_1)$

$$y \geq f(y_1) \geq y_1 \quad \forall y_1 \in \mathcal{F}$$

Entonces y es una cota superior de $\mathcal{F}$ y por tanto

$$y \geq w \; !$$

Ahora, sea $y_1 \in \mathcal{F}$ tal que $y \leq y_1$

Si $y < y_1$ y por $P(y_1)$

$$f(y) \leq y_1 \leq w$$

$$\therefore f(y) \leq w$$

$$\therefore P(w) \quad \therefore w \in C$$

Si $y = y_1$ entonces $P(y)$ y por II

$$w \leq y \quad ó \quad f(y) \leq w$$

Como $w \leq y$ es imposible, tenemos

$$f(y) \leq w$$

$$\therefore P(w) \quad \therefore w \in C.$$

$\dashv$

Ahora con las tres afirmaciones vamos a continuar la demostración.

De II y III se sigue que:

Si $x, y \in M$ entonces $y \leq x$ ó $y \geq f(x) \geq x$

luego M es COTO.

Sea $x_0 = \mathrm{mcs}(M)$. Como M es admisible $x_0 \in M$

y $f(x_0) \in M$ $\therefore f(x_0) \leq x_0$

Pero sabemos por hipótesis que $x_0 \leq f(x_0)$

$$\therefore f(x_0) = x_0$$

(4) Teorema de Hartog.

$\forall a \exists \alpha (\alpha \not\preceq a)$

Demostración:

Sea $b = \{\beta \mid (\exists x \subseteq a)(\exists r \subseteq a \times a)(\mathrm{to}(\langle x, r\rangle)) = \beta\}$

P.dem: $\underline{b \in V}$. ; Sea $f: \mathcal{P}(a \times a) \longrightarrow OR$ tal que

$$f(r) = \begin{cases} \beta & \text{si } \exists x \subseteq a \, (r \subseteq (x \times x) \wedge \mathrm{to}(\langle x, r\rangle) = \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, $\mathrm{Im}(f) = b$ y por el esquema de sustitución. $b \in V$.

Luego, sea $\alpha > \beta, \forall \beta \in b$

afirmamos $\alpha \not\preceq a$. Pues en otro caso existe $c \subseteq a$ tal que $c \sim \alpha$ y $\alpha \in b$ ¡!

Contradiciendo el hecho de que $\forall \beta \in b \ \alpha > \beta$.

$\therefore \alpha \not\preceq a$.

CAPITULO IV

ALGUNAS APLICACIONES DEL AXIOMA DE ELECCION.

A lo largo del presente trabajo hemos mencionado en varias ocasiones las múltiples aplicaciones que tiene el axioma de elección en muy diversas ramas de las matemáticas.

En este capítulo vamos a referirnos a tales aplicaciones, entendiendo por "aplicación" diversos teoremas y proposiciones en cuya demostración resulta necesario utilizar el axioma. Primeramente enlistaremos algunas de ellas:

En Topología.

a) Teorema de Tychonoff

El producto topológico de espacios compactos es compacto

b) Teorema de Alexander

Si $\mathcal{S}$ es una sub-base de una topología del espacio X y si toda $\mathcal{S}$-cubierta de X tiene una sub-cubierta finita entonces X es compacto.

En Algebra.

c) Todo espacio vectorial tiene una base

d) Una función $\phi: S \to S$ es inyectiva si y solo si tiene inversa derecha; es sobreyectiva si y solo si tiene inversa izquierda.

e) Sea g un elemento de un grupo G y H un subgrupo de G que no contiene a g. Entonces hay un subgrupo M que contiene a H y es maximal respecto a la propiedad de no contener a g.

f) Sea G un grupo finitamente generado, y H un subgrupo propio de G, entonces existe un subgrupo maximal M de G que contiene a H.

g) Teorema de Nielsen- Schreier

i) Todo subgrupo de un grupo libre es un grupo libre

ii) Todo subgrupo de un grupo abeliano libre es abeliano libre.

En Análisis.

h) Teorema de Hahn Banach

En un espacio vectorial X, cualquier función lineal acotada en un subespacio de X se extiende a una función lineal acotada de la misma norma definida en todo X.

i) Teorema de Krein Milman

Sea X un espacio vectorial topológico en donde f separa puntos. Si K es un conjunto convexo y compacto en X entonces K es la corteza convexa cerrada del conjunto de sus puntos extremos.

En Lógica.

j) Sea ψ una forma normal de Skolem. Entonces para toda estructura $\mathfrak{A}$ existe una expansión $\mathfrak{B}$ tal que para toda asignación z para $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \psi(z) \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(z)$$

Hemos hecho hasta aquí una lista de proposiciones y teoremas para cuya demostración es necesario el axioma de elección. Veamos ahora en algunos de estos ejemplos como es que se utiliza el axioma.

Presentaremos a continuación la demostración de un problema de topología, uno de análisis y uno de álgebra utilizando en cada uno de ellos un equivalente diferente del axioma de elección.

Teorema de Tychonoff (1)

El producto cartesiano de una colección de espacios compactos es compacto.

Usaremos la siguiente caracterización de espacios compactos:
Un espacio topológico X es compacto si y solo si toda familia $\{F_j\}_{j\in J}$ de subconjuntos cerrados de X que verifica la propiedad de la intersección finita (P.i.f) (2), tiene intersección no vacía.

La demostración que daremos se basa en la prueba de Bourbaki, pero la nuestra estará dividida en tres partes para conseguir la mayor claridad posible:

1. Un lema en el que utilizando el Lema de Tukey (ver Cap. III)(4) afirmaremos la existencia de un cierto objeto maximal.
2. Algunas propiedades de dicho elemento maximal
3. Demostración del teorema, usando lo anterior y utilizando una vez más el axioma de elección.

Lema: Sea $\underline{X} = \prod X_i$ tal que para todo $i \in I$, X_i es compacto.
Sea $\mathcal{C} = \{A \subseteq P(X) \mid A$ tiene la P.i.f$\}$ entonces $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal M respecto a la inclusión.

Vamos a utilizar el Lema de Tukey por tanto debemos mostrar que $\mathcal{C}$ tiene carácter finito.

Demostración.
Sea $\mathcal{C} = \{A \in \underline{X} \mid A$ tiene la p.i.f$\}$

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$; veamos que todo subconjunto de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{G}$
Como $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ tiene la pif.
Sea $\bar{\mathcal{A}} = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$; por demostrar: $\bar{\mathcal{A}}$ tiene la pif.
Consideremos $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_s}\}$ cualquier subfamilia finita de $\bar{\mathcal{A}}$
Necesitamos demostrar que $\bigcap_{j=1} A_{i_j} \neq \phi$

Ahora, $\{A_{i_j}\}_{j\in\{1,\dots,s\}}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ tiene la pif,
Luego $\bigcap_{j=1}^{s} A_{i_j} \neq \phi$

$\therefore \{A_1, \dots, A_n\}$ tiene la pif.
$\therefore$ todo subconjunto finito de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{G}$

Supongamos ahora que para todo $\{A_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq \mathcal{A}$, $\{A_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{G}$; debemos mostrar que $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$ ie, que $\mathcal{A}$ tiene la pif.

Sea $\{A_j\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$

entonces $\bigcap_{j=1} A_j \neq \phi$ ya que $\{A_j\}_{j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{G}$

$\therefore$ $\mathcal{A}$ tiene la pif
$\therefore$ $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$

$\therefore$ $\mathcal{G}$ tiene carácter finito.

$\dashv$

La forma del Lema de Tukey que vamos a utilizar es la siguiente:

Todo elemento F en una familia de carácter finito $\mathcal{C}$ está contenido en un maximal en $\mathcal{C}$.

Hemos visto que $\mathcal{C}$ tiene carácter finito, entonces lo que necesitamos es una familia F, elemento de $\mathcal{C}$, adecuada para la demostración del teorema. Veamos.

Sea $F = \{F_j\}_{j\in J}$ una clase de subconjuntos cerrados de I con la propiedad de la intersección finita

Así, $F \in \mathcal{C}$ y como $\mathcal{C}$ es de carácter finito, por el Lema de Tukey tenemos:

Existe $\mathcal{M}$ elemento maximal de $\mathcal{C}$ tal que $F \subseteq \mathcal{M}$

Pasemos ahora a estudiar las propiedades de $\mathcal{M}$.

Afirmación: $\mathcal{M}$ tiene las siguientes propiedades.

i) Todo conjunto que contiene un elemento de $\mathcal{M}$ también pertenece a $\mathcal{M}$

ii) La intersección de un número finito de miembros de $\mathcal{M}$ pertenece a $\mathcal{M}$

iii) Si $A \cap M \neq \phi$ para todo $M \in \mathcal{M}$, entonces $A \in \mathcal{M}$.

Demostración:

i) Sea $M_0 \in \mathcal{M}$ y $M_0 \subseteq Y$; por demostrar $Y \in \mathcal{M}$

Consideremos $\mathcal{M}\cup\{Y\}$. Afirmamos que $\mathcal{M}\cup\{Y\}$ tiene la pif.
Tomemos una subfamilia finita $\{H_0, H_1, \dots, H_n\}$ de $\mathcal{M}\cup\{Y\}$

a) Si $H_i \in \mathcal{M}$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ entonces $\bigcap_{i=0}^{n} H_i \neq \phi$

b) Si $Y = H_i$ para alguna $i \in \{1,\dots,n\}$

Sabemos $\bigcap_{j \neq i} H_j \neq \phi$, $H_0 \in \mathcal{M}$, $H_0 \subseteq Y$

Luego $(\bigcap_{j \neq i} H_j) \cap H_0 \neq \phi$

Así, $\phi \neq [(\bigcap_{j \neq i} H_j) \cap H_0] \subseteq \bigcap_{j=0}^{n} H_j$ $\quad \therefore \bigcap_{j=0}^{n} H_j \neq \phi$

Por tanto $\mathcal{M}\cup\{Y\}$ tiene la pif, pero $\mathcal{M}$ es $\subseteq$-maximal

$\therefore Y \in \mathcal{M}$

Las demostraciones de los incisos ii) y iii) son análogas. Todas se basan en la maximalidad de $\mathcal{M}$.

Vayamos ahora a la tercera parte de la demostración.
Recordemos que el teorema queda demostrado si se prueba que $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \in J}$ tiene una intersección no vacía, es decir,
Existe $p \in \mathbb{X}$ tal que $p \in F_j$ para todo $F_j \in \mathcal{F}$.

Definamos $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{H_k}\}_{k \in K}$ y notemos que:

$$F_j \in \mathcal{F} \rightarrow F_j = \overline{F_j} \quad y \quad F_j \in \mathcal{M} \rightarrow F_j \in \overline{\mathcal{M}}$$

Luego si demostramos que $\overline{\mathcal{M}}$ tiene una intersección no vacía, entonces $\mathcal{F}$ tendrá también una intersección no vacía.
Recordemos que $\mathcal{M} = \{H_k\}_{k \in K}$ posee la pif, por tanto, para cada proyección $\pi_i : \mathbb{X} \rightarrow X_i$, la clase
$\{\pi_i[H_k]\}_{k \in K}$ de subconjuntos del espacio coordenado X_i también posee la pif.
De esto se sigue que la clase de las clausuras
$\{\overline{\pi_i[H_k]}\}_{k \in K}$ es una clase de subconjun-

tos cerrados de X_i con la pif.

Por hipótesis X_i es compacto y por tanto

$$\{\overline{\pi_i[M_k]}\}_{k\in K} \text{ tiene intersección no vacía.}$$

Es decir, existe $x_i \in X_i$ tal que $x_i \in \overline{\pi_i[M_k]}$ para todo $k\in K$.
ó equivalentemente:

existe $x_i \in X_i$ tal que $x_i \in G_i \rightarrow G_i \cap \pi_i[M_k] \neq \phi$ para todo $k \in K$.
dónde G_i es un subconjunto abierto cualquiera del espacio coordenado X_i (*)

Usando el axioma de elección, definamos

$$p = \langle x_i \rangle_{i\in I}$$

Vamos a demostrar que p verifica la siguiente condición:

$$p\in B \rightarrow B\cap M_k \neq \phi \quad \text{para todo } k\in K$$

donde B es un miembro de la base de definición de la topología producto de $X = \prod X_i$; de donde tendremos que $\mathcal{M}$. tiene intersección no vacía.

Sea $p\in B$, B miembro de la base de definición de la topología producto de X, es decir

$$B = \pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap \dots\dots \cap \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$$

donde G_{i_n} es un subconjunto abierto de X_{i_n}

Notemos que $p\in B$ implica que $\pi_{i_1}(p) = x_{i_1}$ pertenece a $\pi_{i_1}[B] = G_{i_1}$. Luego por (*)

$$G_{i_1} \cap \pi_{i_1}[M_k] \neq \phi \quad \text{para toda } k\in K.$$

y esto implica que:

$$\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap M_K = \left(\prod_{i \neq i_1} X_i \times G_{i_1}\right) \cap M_K \neq \phi \quad \text{para todo } M_K \in \mathcal{M}.$$

Ahora, por la propiedad (iii) de $\mathcal{M}$:

$$\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \in \mathcal{M}$$

Analogamente $\pi_{i_2}^{-1}[G_{i_2}], \ldots, \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$ pertenecen a $\mathcal{M}$.

Ahora bien, $\mathcal{M}$ posee la PIF, por tanto:

$$B \cap M_K = \pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap \ldots \cap \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}] \cap M_K \neq \phi \quad \text{para todo } K \in K.$$

$\therefore$ existe $p \in \underline{X}$ tal que $p \in \overline{M}_K$ para todo $K \in K$

$\therefore$ $\overline{\mathcal{M}}$ tiene intersección no vacia.

$\therefore$ $\overline{F}$ tiene intersección no vacia

$\therefore$ $\underline{X} = \prod X_i$ es compacto.

Hemos mostrado una aplicación del Lema de Tukey y del axioma de elección. La forma de aplicar elección en esta prueba es muy parecida a las distintas maneras en que se aplicaba el axioma antes de 1904 cuando Zermelo lo enuncia como un principio distinto ; no damos una función de elección, esto es, no la definimos explicitamente, solamente asumimos la elección como posible y afirmamos que la habiamos hecho.

Vayamos ahora con la demostración de la proposición "Todo espacio vectorial tiene una base" en la cual utilizaremos el Lema de Zorn.

Proposición: Todo espacio vectorial tiene una base.

Demostración:

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K

Sea $F = \{ I \subseteq V \mid I$ es linealmente independiente $\}$

F esta parcialmente ordenado por la inclusión $\subseteq$, es decir, $\langle F, \subseteq \rangle$ es COPO

$F \neq \phi$ ya que al menos los subconjuntos unitarios de elementos de V estan en F

Sea $\langle U, \leq \rangle$ COTO, $U \subseteq F$; $\langle U, \subseteq \rangle$ es una cadena en F, luego para poder aplicar el Lema de Zorn necesitamos probar que toda cadena en F esta acotada superiormente.

Afirmamos:

i) $\bigcup U$ es una $\subseteq$-cota superior de U

ii) $\bigcup U \in F$.

Es claro que i) ya que para todo $U_i \in U$, $U_i \subseteq \bigcup U$.
Ahora, para demostrar ii) es necesario probar que $\bigcup U$ es linealmente independiente.

Sean $x_1, \ldots, x_n \in \bigcup U$; $a_1, \ldots, a_n \in K$.
tal que $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$

Existe $U_i \in U$ tal que $x_1, \ldots, x_n \in U_i$ por ser U un órden total con la contención.

U_i es linealmente independiente

$\therefore\ a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$\therefore\ \bigcup U \in F$.

Ahora por el Lema de Zorn afirmamos que existe un elemento maximal en F.

Sea B maximal en F.

$B \subseteq V$ y B es linealmente independiente, así afirmamos:

B es una base para V, esto es, B genera todo V;

demostración: Sea $x \in V - B$

$$B \subsetneq B \cup \{x\} \longrightarrow B \cup \{x\} \notin F$$

luego, $B \cup \{x\}$ no es linealmente independiente

por tanto, existen $a_1, a_2, \dots, a_n$ con $a_i \neq 0$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$ y existen $x_1, \dots, x_n \in B \cup \{x\}$

tal que: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$

Ahora, $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$, pues si $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$

$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B$ linealmente dependiente !?

$\therefore\ x \in \{x_1, \dots, x_n\}$

$\therefore\ x = x_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$ con $a_i \neq 0$

$\therefore\ x = x_i = -\sum_{j \neq i} (a_j/a_i)\, x_j$

$\therefore$ B es una base para V

$\dashv$

Vamos ahora a demostrar el Teorema de Hahn-Banach. En su prueba utilizaremos el principio maximal de Hausdorff como equivalente de elección.

Teorema de Hahn-Banach

Sea V un espacio vectorial real y $U \leq V$ un subespacio de V.

Sea $p: V \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in V$, $t \in \mathbb{R}$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$
$$p(tx) = t\,p(x)$$

esto es, p es sub-lineal

Sea $f: U \to \mathbb{R}$ una función lineal y $\forall u \in U$, $f(u) \leq p(u)$

Entonces existe una función lineal

$$g: V \to \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$\forall u \in U$, $g(u) = f(u)$ y $g(u) \leq p(u)$ $\forall u \in V$ esto es, hay g lineal que extiende a f.

Demostración.

Sean V, U, p y f como en la hipótesis

Sea $\mathcal{S}$ la colección de pares $\langle U_i, f_i \rangle_{i \in I}$ donde:

i) U_i es un subespacio de V

ii) $U \leq U_i$

iii) f_i es una extensión lineal de f, esto es $\forall u \in U$, $f_i(u) = f(u)$

iv) $f_i(u) \leq p(u)$ para todo $u \in U_i$,

Definimos un orden parcial sobre $\mathcal{S}$ como sigue:

Si $(U_i, f_i) \in \mathcal{G}$ y $(U_j, f_j) \in \mathcal{G}$

$(U_i, f_i) \leq (U_j, f_j) \leftrightarrow U_i \subseteq U_j$ y $\forall u \in U_i$, $f_i(u) = f_j(u)$

Por el principio maximal de Hausdorff existe una subcolección de $\mathcal{G}$ totalmente ordenada, es decir una cadena, que es maximal.

Sea F dicha cadena maximal.

Consideremos $\mathcal{C} = \{U_i \mid (U_i, f_i) \in F\}$

$\cup\mathcal{C}$ es un subespacio de V ya que cada elemento de $\mathcal{C}$ lo es. y $\mathcal{C}$ es una cadena.

Definimos $g: \cup\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ como $g = \bigcup_{i \in I} f_i$

Notemos que, si $x \in \cup\mathcal{C}$ entonces hay $U_i \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U_i$; así, $g(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$ y $(U_i, f_i) \in \mathcal{G}$.

Observaciones.

i) g está bien definida en $\cup\mathcal{C}$ ya que el conjunto de funciones $\{f_i\}_{i \in I}$ es compatible

ii) g es lineal, por la linealidad de las f_j, $j \in I$.

iii) $\forall x \in \cup\mathcal{C}$, $g(x) \leq p(x)$ por la definición de g.

Así, si demostramos que $\cup\mathcal{C} = dom(g) = V$, habremos demostrado el teorema.

Sabemos que $\cup\mathcal{C} \subseteq V$

Supongamos $\cup\mathcal{C} \subsetneq V$, ie. es un subespacio propio de V

La idea ahora es extender a $\cup\mathcal{C}$ en un subespacio V_* y extender a g en g_* de tal forma que $(V_*, g_*) \in \mathcal{G}$ lo cual nos llevará a una contradicción con la maximalidad de $\mathcal{F}$.

Hemos supuesto $U_{\mathcal{C}} \subsetneq V$, consideremos entonces:

$v \in V - U_{\mathcal{C}}$

Definimos $V_* = \{x + tv \mid x \in U_{\mathcal{C}},\ t \in \mathbb{R}\}$

claramente V_* es un subespacio vectorial de V, con

$U_{\mathcal{C}} \subsetneq V_* \subseteq V$

Afirmamos que $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in U_{\mathcal{C}}\ (a \leq p(x-v) - g(x))$

Veamos, $\forall x \in U_{\mathcal{C}} \quad g(x) \leq p(x)$

$$\rightarrow \quad g(x) - p(x+v) \leq p(x) - p(x+v)$$
$$= p(x) + p(-x-v)$$
$$\leq p(x) - p(x) - p(v)$$
$$= -p(v)$$
$$\longrightarrow \quad p(v) \leq p(x-v) - g(x)$$

Así, si $p(v) = a$,
$$a \leq p(x+v) - g(x) \qquad (*)$$

Definimos $g_* : V_* \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$\forall x \in U_{\mathcal{C}},\ t \in \mathbb{R} \qquad g_*(x + tv) = g(x) + ta$

Observaciones: i) $\forall x \in U_{\mathcal{C}},\ g_*(x) = g(x)$

ii) g_* es lineal

iii) $\forall x \in V_*,\ g_*(x) \leq p(x)$

i) y ii) son inmediatos ya que si $t=0$, $g_*(x) = g(x)$ y g es lineal. Demostremos iii).

Sea pues $u \in V_x$ es decir, $u = x + tv$

Si $t = 0$ $\dashv$

Supongamos $t \neq 0$ y consideremos $t^{-1}x$ en $(*)$

$$g(t^{-1}x) + a \leq p(t^{-1}x + v)$$

$$\longleftrightarrow \quad g(x) + ta \leq p(x + tv)$$

así, por la definición de g_x

$$g_x(x + tv) \leq p(x + tv)$$

$$\therefore \forall u \in V_x \qquad g_x(u) \leq p(u)$$

Por tanto tenemos que $(V_x, g_x) \in \mathcal{G}$

además $\bigcup \mathcal{G} \leq V_x$ y $g \leq g_x$

por lo tanto $\mathcal{F} \cup \{(V_x, g_x)\}$ es una cadena en $\mathcal{G}$

pero $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F} \cup \{(V_x, g_x)\}$ ¡!

contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{F}$

$\therefore \bigcup \mathcal{G} = V$ y g es la función buscada.

$\dashv$

Hemos mencionado ya varias de las aplicaciones del axioma de elección en matemáticas y hemos mostrado tambien con algunos ejemplos la forma como se aplica. Ahora nos interesa señalar para finalizar este capítulo como es que el axioma de elección tambien se utiliza dentro de la Teoría de conjuntos.

Aplicaciones del axioma de elección a la teoría de conjuntos.

Una de las aplicaciones mas importantes de elección en la teoría de conjuntos, es la definición de cardinalidad.

Veamos primero que el axioma no es necesario para definir lo que es un número cardinal, ya que podemos pedir (en la misma definición) que todo cardinal sea un ordinal y así tomamos desde el inicio un conjunto bien ordenado.

Definición.

$$K \text{ es cardinal} \leftrightarrow K \in OR \wedge \forall \beta \in K \, (\beta \not\sim K)$$

Ahora, para hablar de la cardinalidad de cualquier conjunto el axioma de elección es necesario.

Un corolario del Principio del Buen Orden y del Teorema de Enumeración[3] es que:

Todo conjunto es equipotente a un ordinal.

Basándonos en ese corolario definimos una función.

$$f: V \longrightarrow OR$$

$$\forall x \in V \quad f(x) = \bigcap \{\alpha \mid \alpha \sim x\}$$

La importancia del corolario es que podemos afirmar que f esta bien definida

Generalmente a $f(x)$ se le denota $|x|$ y se le llama cardinalidad de x

Obsérvese que $|x|$ es un cardinal.

Pese a que la definición de cardinal no necesita de elección, ésta si se utiliza para definir las operaciones infinitas en la aritmética cardinal:

Primeramente recordemos algunas definiciones básicas de la aritmética de cardinales:

Definicion: Si $\kappa, \lambda \in CAR$

$$\kappa+\lambda = |(\kappa\times\{0\}) \cup (\lambda\times\{1\})|$$

$$\kappa\cdot\lambda = |\kappa\times\lambda|$$

En estas definiciones es claro que no necesitamos el axioma de elección ya que como κ y λ son ordinales, son conjuntos bien ordenados y en base a su buen orden es fácil dar un buen orden para su unión y su producto cartesiano sin necesidad de elección.

Sin embargo, para calcular sumas o productos infinitos si requerimos del axioma:

Definición:

Sea $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I}(\kappa_i\times\{i\})\right|$$

El axioma de elección se necesita aquí para dar un buen orden a $\bigcup_{i\in I}(\kappa_i\times\{i\})$ ya que este conjunto está bien ordenado por el buen orden de los κ_i, solamente si I (el conjunto de los índices) está bien ordenado

Una vez que proporcionemos (mediante PBO) un buen orden "$<_I$" para el conjunto I, ie, que $(I, <_I)$ sea COBO, podemos bien ordenar $\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})$ de la siguiente forma:

Sean $x, y \in \bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})$

$$x \prec y \leftrightarrow (x, y \in \kappa_i \wedge x <_{\kappa_i} y) \vee (x \in \kappa_i, y \in \kappa_j, i \neq j \rightarrow i <_I j)$$

Igualmente sucede para el producto infinito de cardinales.
Definición: Sea $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \left| \bigtimes_{i\in I} \kappa_i \right|$$

El mismo argumento que en la suma infinita es válido en este caso. Tambien necesitamos bien ordenar a I para dar luego un buen orden al producto.

Algunas otras proposiciones muy importantes y utilizadas en teoría de conjuntos, requieren de elección para su demostración; pero algunas de ellas solo necesitan una versión "mas débil" del axioma, como elección numerable ó dependiente.

De estos debilitamientos y de otras aplicaciones de elección a la teoría de conjuntos hablaremos en el capítulo siguiente.

Notas:

(1) Mencionamos al final del capítulo anterior que el Teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección, sin embargo lo incluimos en el capítulo de aplicaciones debido a que su importancia en Topología es mayor que la que tiene por ser equivalente a elección. Vamos a dar aquí una prueba de que el Teorema de Tychonoff implica el axioma de elección, para mostrar de todas formas la equivalencia.

La forma del axioma que vamos a utilizar es la del axioma multiplicativo: El producto cartesiano de conjuntos no vacíos es no vacío.

Proposición: El Teorema de Tychonoff implica el Axioma de elección.

Demostración: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos

Sea $\Lambda \notin \bigcup_{i\in I} X_i$

Definimos $Y_i = X_i \cup \{\Lambda\}$ $\forall i\in I$. y damos una topología de cerrados para cada Y_i como sigue:

$$\mathcal{Z}_i = \{\emptyset, Y_i, X_i, \{\Lambda\}\}$$

Claramente $\langle Y_i, \mathcal{Z}_i\rangle$ es compacto para toda $i\in I$.

Por el Teorema de Tychonoff $\prod_{i\in I} Y_i$ es compacto

Ahora, $\forall i\in I$, X_i es cerrado en $\langle Y_i, \mathcal{Z}_i\rangle$

Sea $A_i = \pi_i^{-1}[X_i] = X_i \times \prod_{j\neq i} Y_j$

así, A_i es cerrado.

Afirmamos: i) $\bigcap_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} X_i$

ii) $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados con la P.i.f, en particular cada A_i es diferente del vacío

Con estas dos afirmaciones y por ser $\prod_{i\in I} Y_i$ compacto tendremos: $\emptyset \neq \bigcap_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} X_i$

Demostremos entonces i) y ii)

i) $s \in \bigcap_{i \in I} A_i \longleftrightarrow \forall i \in I \ (s \in A_i)$

$\longleftrightarrow \forall i \in I \ (s(i) \in X_i)$

$\longleftrightarrow s \in \prod_{i \in I} X_i$

$\therefore \bigcap_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} X_i$.

ii) Sean $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \{A_i\}_{i \in I}$; por demostrar: $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} \neq \phi$

Sean $x_{i_1} \in X_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X_{i_n}$

Sea $x_j = \perp$ para todo $j \notin \{i_1, \ldots i_n\}$

Claramente $\langle x_j \rangle_{j \in I} \in \bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}$

$\therefore \{A_i\}_{i \in I}$ tiene la Pif.

Luego por ser $\prod_{i \in I} Y_i$ compacto sabemos que toda familia de subconjuntos cerrados de $\prod_{i \in I} Y_i$ que verifica la Pif tiene intersección no vacía. Así:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi$$

$$\therefore \prod_{i \in I} X_i \neq \phi$$

(2) Una familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de conjuntos posee la propiedad de la intersección finita si toda subclase $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}\}$ posée una intersección no vacía, es decir,

$$F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} \neq \phi.$$

(3) Teorema de Enumeración:

Todo buen órden es isomórfico a un único ordinal.

(4) En el capítulo anterior se dio la siguiente versión del lema de Tukey:

Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos. Si $\mathcal{F}$ tiene carácter finito entonces $\mathcal{F}$ tiene elemento maximal.

En la demostración del Teorema de Tychonoff vamos a usar la siguiente formulación:

Todo elemento C de una familia de carácter finito $\mathcal{F}$ está contenido en un maximal de $\mathcal{F}$.

La equivalencia de estas dos formulaciones no vamos a demostrarla ya que puede revisarse en el capítulo III que el lema de Zorn implica directamente cualquiera de las dos versiones.

CAPITULO V

DEBILITAMIENTOS DEL AXIOMA DE ELECCION.

Hemos visto ya que en Matemáticas hay una gran cantidad de problemas para cuya demostración ó solución es necesario utilizar el axioma de elección. Sin embargo, en una parte de ellas no es necesario (en el sentido de que no es indispensable, imprescindible) utilizar TODA LA FUERZA del axioma de elección. Basta muchas veces pedir que el axioma de elección sea válido solo para conjuntos numerables, o puede que no necesitemos pedir elecciones "tan arbitrarias" sino que podamos hacerlas depender de anteriores elecciones o de relaciones definidas en el mismo conjunto en el que trabajamos.

A estas distintas "variantes" de presentar el axioma de elección se les llama debilitamientos. Formalmente σ es un debilitamiento del axioma de elección si:

i) $ZF \nvdash \sigma$

ii) $ZF \vdash AE \rightarrow \sigma$

iii) $ZF \nvdash \sigma \rightarrow AE$

Es decir, es independiente de ZF, el axioma de elección los implica, pero desde ZF no es posible probar que estas proposiciones sean equivalentes al AE.

Las siguientes proposiciones son debilitamientos del axioma de elección:

- Principio de elección dependiente (ED)

Si ρ es una relación en un conjunto A no vacio tal que para toda $x \in A$, existe $y \in A$ con $x \rho y$, entonces hay una sucesión $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ de elementos de A tales que

$$x_0 \rho x_1, \quad x_1 \rho x_2, \; \dots, \; x_n \rho x_{n+1}, \dots$$

- Axioma de elección numerable (EN)

Toda familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

- Teorema del Ideal primo

En toda álgebra booleana, todo ideal puede extenderse a un ideal primo (i)

No vamos a demostrar aquí formalmente que estas proposiciones son debilitamientos del AE, ya que las demostraciones de los incisos (i), (iii) requieren de herramienta muy sofisticada (*). Vamos a demostrar solamente (ii), esto es, que en ZF el axioma de elección implica dichas proposiciones.

Como segunda parte de este capítulo vamos a discutir, con algunos ejemplos, la importancia en matemáticas de los debilitamientos del axioma.

(*) Los interesados en estas demostraciones pueden revisar Jech J. Thomas, "The axiom of choice" North Holland 1973.

Comencemos demostrando que el axioma de elección implica el principio de elección dependiente y sigamos con que éste implica el axioma de elección numerable, es decir,

$$AE \to ED \to EN.$$

i) $AE \to ED$

Sea $A \neq \phi$ y ρ una relación en A tal que para todo $x \in A$ hay $y \in A$ con $x \rho y$

Por demostrar: hay una sucesión $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ de elementos de A tales que $x_0 \rho x_1, \ldots, x_n \rho x_{n+1}, \ldots$

Demostración:

Sea $a_x = \{y \in A \mid x \rho y\}$

Por hipótesis, para todo $x \in A$, $a_x \neq \phi$

Sea $\mathcal{F} = \{a_x \mid x \in A\}$

Por el axioma de elección sabemos que hay una función de elección f en $\mathcal{F}$

Sea $f: \mathcal{F} \to \cup\mathcal{F}$ tal que $f(a_x) \in a_x$

Ahora construimos la sucesión $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ recursivamente como sigue:

Sea $x_0 \in A$, $x_1 = f(a_{x_0})$
$\vdots$
$x_{n+1} = f(a_{x_n})$

Así, por la definición de a_x y por ser f de elección,

$$x_0 \rho x_1,\ x_1 \rho x_2, \ldots, x_n \rho x_{n+1}, \ldots$$

ii) ED → EN

Sea $S = \{S_0, S_1, \ldots\ldots, S_n, \ldots\}$ una familia numerable de conjuntos no vacios

Por demostrar: S tiene una función de elección

Demostración:

Sea A el conjunto de sucesiones finitas

$\langle x_0, x_1, \ldots\ldots, x_k \rangle$ tal que $x_0 \in S_0, \ldots\ldots, x_k \in S_k$

es decir, $A = \bigcup_{n \in \omega} \left(\prod_{i=0} S_i \right)$

Definamos una relación sobre A:

Sean $r, t \in A$, $\quad r \rho t$ sii $r = \langle x_0, \ldots\ldots, x_k \rangle$

$t = \langle x_0, \ldots, x_k, x_{k+1} \rangle$

Usando el principio de elección dependiente, existe una sucesión $\langle r_n \rangle$ de elementos de A tales que:

$$r_0 \rho r_1 \;,\; r_1 \rho r_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; r_n \rho r_{n+1}$$

Podemos entonces construir una función para

$S = \{S_0, \ldots\ldots, S_n, \ldots\}$ como sigue:

$f : S \to \bigcup S$

$f(S_t) = x_t$ donde x_t es el t-ésimo elemento de la sucesión r_n, es decir,

$\langle x_0, \ldots\ldots, x_t \rangle$ con $x_0 \in S_0, \ldots\ldots, x_t \in S_t$

Luego,

$f(S_t) \in S_t$

$\therefore$ S tiene una función de elección

$\dashv$

Demostremos ahora que el axioma de elección implica el teorema del ideal primo. Vamos a basarnos en el lema de Zorn.

Demostración:

Sea $\mathcal{B} = \langle X, \leq \rangle$ un álgebra booleana

Sea $\mathcal{J}_0$ un ideal de $\mathcal{B}$

Sea $\mathcal{A} = \{ \mathcal{J} \mid \mathcal{J}$ es ideal de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J} \}$

Claramente $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ es COPO

Veamos ahora que toda cadena de $\mathcal{A}$ está acotada superiormente.

Sea $\{\mathcal{J}_j\}_{j \in J}$ una cadena

afirmamos que $\bigcup \mathcal{J}_j \in \mathcal{A}$.

Es claro que $\mathcal{J}_0 \subseteq \bigcup \mathcal{J}_j$; veamos entonces que $\bigcup \mathcal{J}_j$ es ideal.

i) Sea $u \in \bigcup \mathcal{J}_j$ y $v \in \mathcal{B}$ tal que $v \leq u$

Como $u \in \mathcal{J}_j$ para alguna $j \in J$ y $\mathcal{J}_j$ es ideal tenemos

$$v \in \mathcal{J}_j \subseteq \bigcup \mathcal{J}_j$$

$$\therefore v \in \bigcup \mathcal{J}_j$$

ii) Sean $u, v \in \bigcup \mathcal{J}_j$

Luego $u \in \mathcal{J}_j$; $v \in \mathcal{J}_i$ para algunas $i, j \in J$.

$\{\mathcal{J}_j\}_{j \in J}$ es cadena, así spg.

$\mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{J}_j$, por tanto $u, v \in \mathcal{J}_j$

Ahora como $\mathcal{J}_j$ es ideal, $u \vee v \in \mathcal{J}_j \subseteq \bigcup \mathcal{J}_j$

$$\therefore u \vee v \in \bigcup \mathcal{J}_j$$

$$\therefore \bigcup \mathcal{J}_j \in \mathcal{A}.$$

Así, toda cadena está acotada y por el lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal, digamos P.

Entonces, $\mathcal{J}_0 \subseteq P$ y P es ideal primo por la maximalidad.

$\dashv$

Principio de Elección Dependiente.

El principio de elección dependiente es importante en matemáticas ya que implica el axioma de elección numerable cuya utilidad e importancia veremos a continuación. Una de sus principales aplicaciones es la siguiente caracterización de los buenos órdenes.

Proposición. Un orden total $<$ sobre un conjunto P es un buen orden si y solo si P no tiene una sucesión descendente

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

Demostración:

i) Sea $(P,<)$ un buen orden.
Supongamos que existe una sucesión descendente

$$x_0 > x_1 \dots > x_n > \dots$$

Sea $P' = \{x_0, x_1, \dots x_n, \dots\} \subseteq P$ y P' no tiene primer elemento

$\therefore$ $(P,<)$ no es un buen orden $!?$

$\therefore$ P no tiene una sucesión descendente $x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots$

Es claro que hasta aquí no se ha utilizado ningún tipo de elección.

ii) La demostración se hará por contrapositiva.
Sea $\langle P,<\rangle$ un COTO que no es buen orden; por demostrar:
$\langle P,<\rangle$ tiene una sucesión descendente.

Demostración: Como $\langle P,<\rangle$ no es COBO, entonces existe $P' \subseteq P$ tal que $\langle P',<\rangle$ no tiene primer elemento.
Así, "$<$" es una elección sobre P que cumple las hipótesis del principio de elección dependiente, por lo tanto hay una sucesión $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ de elementos de P tal que:

$$x_0 > x_1, \quad x_1 > x_2, \dots, \quad x_n > x_{n+1}, \dots$$

$$\therefore x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots$$

$\therefore$ Si P no tiene una sucesión descendente entonces $\langle P,<\rangle$ es bien ordenado.

Axioma de elección numerable.

Es claro que en esta presentación del axioma no se está usando <u>toda la fuerza</u> del axioma de elección, pues se nos están "escapando" todos los conjuntos que son mas que numerables, de los cuales con esta proposición ya no podemos decir nada.

Curiosamente la escuela de los intuicionistas y neo-intuicionistas que tanto atacaron el axioma de elección, aceptaban al menos tacitamente el axioma de elección numerable. Decimos que lo aceptaban tácita ó implicitamente porque la elección numerable había sido usada desde mucho tiempo atras, por Cauchy por ejemplo en las demostraciones de algunas propiedades sobre funciones continuas. Y ellos mismos, como hemos visto, habian alguna vez utilizado la elección numerable en sus demostraciones, aunque sin enunciarlo como principio.

Esta "aceptación" de la elección numerable en contraposición con el axioma de elección que es la base del Teorema de Zermelo en 1904, no se basa en argumentos muy sólidos ya que como hemos visto (cap I y II), lo que se cuestionaba era la capacidad de efectuar una elección infinita, es decir se decía que la elección como método era poco fiable, por la imposibilidad de llevarla a cabo efectivamente. Sin embargo en la elección numerable tambien se esta hablando de llevar a cabo una elección infinita, pese a que sea en un "infinito numerable".

El argumento utilizado contra el axioma de elección, entonces, muy bien puede caber para atacar el axioma de elección numerable, tambien.

Los que sostenian esta posición contraria al axioma de elección, para ser coherentes con los argumentos que dan en su contra, debian ignorar gran parte del análisis, de la topologia, de la teoria de conjuntos y de todas las ramas de la Matemática donde el axioma de elección numerable juega un papel de primer orden.

Veamos ahora algunas aplicaciones del axioma de elección numerable.

Aplicaciones de AEN a la Teoría de Conjuntos:

Proposición: Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Recordemos inicialmente las siguientes definiciones:

i) Un conjunto S es <u>finito</u> si existe una función inyectiva, con dominio algun número natural K y ran $f = S$.

ii) S es infinito si no es finito

Demostración:

Sea S un conjunto infinito

Consideremos todas las sucesiones finitas de elementos distintos de S.

Sea $A_k = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_k\rangle \mid a_i \in S$ y $a_i \neq a_j \; \forall i \neq j \in \{1, \dots k\}\}$

A_k esta definido para todo $K \in \omega$ por ser S infinito.

Sea $F = \{A_k \mid K \in \omega\}$

Por el AEN y por ser $\mathcal{F}$ una familia numerable de conjuntos no vacíos, hay una función f de elección para $\mathcal{F}$, es decir,

$$f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \quad y \quad f(A_k) \in A_k$$

Ahora, $f(A_k)$ es una sucesión finita de elementos de S

luego $\quad Im\, f(A_k) \subseteq S, \quad Im\, f(A_k)$ finito

y usando nuevamente elección numerable

$$\bigcup_{k \in \omega} Im\, f(A_k) \text{ es numerable}$$

además, $\quad \bigcup_{k \in \omega} Im\, f(A_k) \subseteq S$

$\therefore$ S tiene un subconjunto numerable

Proposición: La unión numerable de conjuntos numerables es numerable

Sea $\mathcal{Q} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ una familia numerable de conjuntos numerables.

Por demostrar: $\bigcup \mathcal{Q}$ es numerable

Demostración:

Como $\mathcal{Q}$ numerable, existe $g : \omega \to \mathcal{Q}$

Sea $g(n) = a_n \quad \forall n \in \omega$

Como cada $g(n)$ es numerable, hay $f_n : \omega \times \{n\} \to g(n)$ esto es,

para toda $n \in \omega$, $f_n(m \times n) = (a_n)_m$

dónde $(a_n)_m$ es el m-ésimo elemento de a_n

Sea $F = \bigcup\{f_n \mid n\in\omega\}$

$F: \omega\times\omega \to \bigcup\mathcal{Q}$

Sabemos que $\omega\times\omega$ es numerable (2) y como mostramos al final de la demostración anterior, la imagen de un conjunto numerable bajo una función biyectiva es numerable

$\therefore$ $\bigcup\mathcal{Q}$ es numerable.

$\dashv$

El axioma de elección numerable se usó en la demostración cuando se eligió la función $f_n: \omega\times\{n\} \to g(n)$ ya que como $g(n) = a_n$ para todo $n\in\omega$, y por hipótesis a_n es numerable, podemos afirmar la existencia de dicha función f_n.

Sin embargo la función $f_n: \omega\times\{n\} \to a_n$ no es única, esto es, hay muchas funciones que pueden "enumerar" a a_n. De todas las que existen elegimos, por AEN, una de ellas por cada natural $n\in\omega$.

Veamos ahora otras aplicaciones de EN en Topología y Cálculo.

Aplicaciones del AEN en Topología y Cálculo.

Proposición: Todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Recordemos que un espacio métrico S es separable sii S tiene un subconjunto denso contable.

Demostración: la proposición es trivial si el espacio o el subespacio son finitos.

Sea S un espacio métrico separable infinito y sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ un subconjunto denso numerable de S.

Consideremos la familia

$\mathcal{V} = \{U_{mn} \mid m \in \omega, n \in \omega\}$ dónde U_{mn} es la vecindad de radio $1/m$ de x_n

$\mathcal{V}$ es una base numerable para S, pues $\mathcal{V} \sim (\omega \times \omega) \sim \omega$

Sea T un subespacio infinito de S

la familia $\mathcal{T} = \{U_{mn} \cap T \mid m \in \omega, n \in \omega\}$ es una base numerable para T

Por el axioma de elección numerable existe una función de elección $f : \mathcal{T} \to \bigcup \mathcal{T}$ tal que $f(U_{mn} \cap T) \in (U_{mn} \cap T)\ \forall m, n \in \omega$

Ahora, como $\operatorname{Im}(f) \subseteq \bigcup_{\substack{m \in \omega \\ n \in \omega}} (U_{mn} \cap T) \subseteq T$

y puesto que $f : \mathcal{T} \to \operatorname{Im}(f)$ es biyección

$\therefore$ T contiene un subconjunto numerable, a saber $\operatorname{Im}(f)$

Trivialmente $\operatorname{Im}(f)$ es denso en T

$\therefore$ T es separable

Proposición:

Son equivalentes las siguientes dos definiciones.

a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si existe una sucesión $\langle x_n | n \in \omega \rangle$ con valores en $A - \{a\}$, que converja a a.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si para todo real positivo ε, existe $x \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$

Recordemos la definición de convergencia: una sucesión de reales $\langle x_n | n \in \omega \rangle$ converge a a si para todo real $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \omega$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo natural $n > n_\varepsilon$.

Demostración

(a) $\Rightarrow$ (b) * en esta parte no se necesita del AEN.

Sea $\langle x_n | n \in \omega \rangle$ una sucesión con valores en $A - \{a\}$ que converja a a.

Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis hay $n_\varepsilon \in \omega$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ si $n > n_\varepsilon$

En particular $|x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$, $x_{n_\varepsilon} \in A$ y $x_{n_\varepsilon} \neq a$.

$\dashv$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sea $X_n = \{x \in A \,|\, x \neq a \wedge |x - a| < 1/n\}$, por (b) tenemos que $X_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$

Basándonos en AEN formamos la siguiente sucesión.

$\langle x_n | n \in \omega \rangle$ y $x_n \in X_n$, $\forall n \in \omega$.

Luego, $\forall n \in \omega$, $x_n \in A - \{a\}$

y es claro que $\langle x_n | n \in \omega \rangle$ converge a a.

$\dashv$

Los siguientes proposiciones tambien requieren de AEN para su demostración. Solamente las enunciaremos ya que la forma de aplicar la elección numerable es muy similar a la que ya mostramos.

Proposición: Son equivalentes las siguientes definiciones de continuidad:

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en a si para toda sucesión $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ que converge a a, la sucesión $\langle f(x_n)\rangle_{n\in\omega}$ converge a $f(a)$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en a, si para todo real $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ para todo x tal que $|x-a|<\delta$

Proposición:

Si $\langle p_n\rangle_{n\in\omega}$ es una sucesión en un espacio métrico (3) compacto X, entonces alguna subsucesión de $\langle p_n\rangle_{n\in\omega}$ converge hacia un punto de X

Proposición: Teorema de Tychonoff para familias numerables de espacios topológicos compactos.

El producto topológico de una familia numerable de espacios topológicos compactos es compacto.

Esta proposición es en realidad equivalente al AEN. La demostración de la equivalencia es idéntica a la que dimos en el capítulo anterior entre el AE y el Teorema de Tychonoff.

Teorema del Ideal Primo.

El teorema del ideal primo es equivalente a los siguientes teoremas de topología y lógica:

Teorema del Ultrafiltro
Todo filtro en un álgebra booleana se puede extender a un ultrafiltro. (4)

Teorema de Representación de Stone.
Todo álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos (5)

Teorema de Compacidad.
Sea E un conjunto de letras proposicionales y sea Σ un conjunto de E-fórmulas.
Si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible, entonces Σ es satisfacible (6)

Para finalizar vamos a demostrar la siguiente proposición que es una aplicación del Teorema de Compacidad.

Proposición: Todo orden parcial en un conjunto A se puede extender a un órden total.

Demostremos primero el siguiente lema:
Lema: Todo órden parcial finito se puede extender a un orden total.

Sea $\langle A, \leq \rangle$ COPO

La demostración es por inducción sobre el número de elementos de A.

Si A tiene un solo elemento, trivialmente $\leq$ es un órden total

Si A tiene $n+1$ elementos

Sea $a \in A$ un elemento minimal del órden $\leq$, que existe por ser A finito.

$A-\{a\}$ tiene n elementos; por hipótesis de inducción el órden parcial $\langle A-\{a\}, \leq \rangle$ se puede extender a un orden total $\leq^*$

Extendamos $\leq^*$ a A definiendo

$$\forall x \in A \quad a \leq^* x$$

Así,

$\langle A, \leq^* \rangle$ es un orden total que extiende $\langle A, \leq \rangle$

Teorema: Todo órden parcial se puede extender a un orden total.

Sea $\langle A, \leq \rangle$ un orden parcial.

Para cada par ordenado $\langle a, b \rangle$ de elementos de A, creamos un símbolo de enunciado P_{ab}.

Sea $E = \{P_{ab} \mid a, b \in A\}$

Sea Σ el siguiente conjunto de E-fórmulas:

$$\begin{aligned}\Sigma = &\{P_{ab} \mid a, b \in A,\ a \leq b\} \cup \{P_{aa} \mid a \in A\} \\ &\cup \{\sim(P_{ab} \wedge P_{ba}) \mid a, b \in A,\ a \neq b\} \\ &\cup \{P_{ab} \wedge P_{bc} \rightarrow P_{ac} \mid a, b, c \in A\} \cup \{P_{ab} \vee P_{ba} \mid a, b \in A\}\end{aligned}$$

Si v fuera una valuación que satisfaciera Σ, entonces si definimos $\leq'$ en A como:

$$\forall a, b \in A, \quad a \leq' b \quad \text{sii} \quad v(P_{ab}) = 1$$

tendríamos que $\langle A, \leq' \rangle$ es un orden total que extiende a $\langle A, \leq \rangle$ ya que:

i.) Sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b \rightarrow P_{ab} \in \Sigma$
$\therefore\ v(P_{ab}) = 1 \quad \therefore\ a \leq' b$

ii) Sea $a \in A$ entonces $P_{aa} \in \Sigma$
$\therefore\ v(P_{aa}) = 1 \quad \therefore\ a \leq' a$

iii) Supongamos $a \leq' b$ y $b \leq' a \rightarrow v(P_{ab}) = v(P_{ba}) = 1$
$\therefore\ v^{*}(P_{ab} \wedge P_{ba}) = 1$
así, si $a \neq b$, $\neg(P_{ab} \wedge P_{ba}) \in \Sigma$
$\therefore\ v^{*}(\neg(P_{ab} \wedge P_{ba})) = 1$ ¡!
$\therefore\ a = b$

iv) Supongamos $a \leq' b$ y $b \leq' c \rightarrow v(P_{ab}) = v(P_{bc}) = 1$
Pero $v^{*}(P_{ab} \wedge P_{bc} \rightarrow P_{ac}) = 1$ pues pertenece a Σ
$\therefore\ v^{*}(P_{ac}) = v(P_{ac}) = 1 \quad \therefore\ a \leq' c$

v) Sean $a, b \in A \quad \therefore\ v^{*}(P_{ab} \vee P_{ba}) = 1$, por estar en Σ
$v(P_{ab}) = 1$ ó $v(P_{ba}) = 1 \quad \therefore\ a \leq' b$ ó $b \leq' a$.

Sólo falta entonces probar la existencia de tal asignación v que satisfaga Σ

Demostrémoslo aplicando el teorema de Compacidad, así solo hay que probar que Σ es finitamente satisfacible.

Sea pues $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito
Sea $X = \{P_{ab} \mid a, b \in A \wedge P_{ab} \in \Gamma\}$
Sea $Y = \{a \in A \mid$ hay $b \in A$ tal que $P_{ab} \in X$ ó $P_{ba} \in X\}$
$Y \subseteq A$, $\langle Y, \leq \rangle$ es COPO finito y se puede extender a un orden total $\leq^{*}$ por el lema anterior

Sea u una valuación tal que:

$$u(P_{ab}) = 1 \quad \text{sii} \quad a, b \in Y \quad y \quad a \leq^* b$$

Entonces u satisface Γ, pues si $\varphi \in \Gamma$ entonces φ cumple alguno de los siguientes casos:

i) $\varphi = P_{ab}$ y $a \leq b$

ii) $\varphi = P_{aa}$

iii) $\varphi = \sim(P_{ab} \wedge P_{ba})$ y $a \neq b$

iv) $\varphi = (P_{ab} \wedge P_{bc} \to P_{ac})$

v) $\varphi = (P_{ab} \wedge P_{ba})$

En cada caso, es claro que $u(\varphi) = 1$ ya que $\leq^*$ es un orden total que extiende a $\leq$

Así u satisface Γ, Γ es satisfacible

$\therefore$ Σ es finitamente satisfacible

$\therefore$ Existe la valuación v que satisface Σ

$\therefore$ $\langle A, \leq' \rangle$ es COTO y extiende a $\leq$.

Notas.

(1) Una álgebra booleana es un conjunto $\mathcal{B}$ con dos operaciones binarias $\vee$, $\wedge$, y una operación unitaria $-$, y dos constantes $1, 0$; $\mathcal{B}$ cumple con lo siguiente:

i) $a \vee a = a$; $a \wedge a = a$

ii) $a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$

iii) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$; $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

iv) $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (c \wedge b)$; $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

v) $a \vee (-a) = 1$; $a \wedge (-a) = 0$

Además de las operaciones anteriores, se puede considerar un orden parcial $\leq$ introducido mediante "$\vee$" como sigue:

$$a \leq b \leftrightarrow a \vee b = b$$

Un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$ tal que:

i) $a \in \mathcal{I}$ y $b \leq a \rightarrow b \in \mathcal{I}$

ii) $a \in \mathcal{I}$ y $b \in \mathcal{I} \rightarrow a \vee b \in \mathcal{I}$.

Un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ es primo o maximal si para todo ideal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ tenemos $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

(2) Una demostración famosa de que $\omega \times \omega$ es numerable es la prueba de Cantor de que $\mathbb{Q}$ es numerable:

$$\begin{array}{llll}
(1,1) & (1,2) \rightarrow & (1,3) & (1,4) \rightarrow \ldots \\
\downarrow & & & \\
(2,1) \nearrow & (2,2) \swarrow & (2,3) \nearrow & \ldots \\
(3,1) \swarrow & (3,2) \nearrow & (3,3) \ldots & \\
\downarrow & & & \\
(4,1) \nearrow & \ldots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

(3) Espacio métrico.

Definición. Un conjunto X cuyos elementos llamaremos puntos se dice que es un espacio métrico, si a cada dos puntos $p \in X$ $q \in X$ hay asociado un número real $d(p,q)$ llamado distancia de p a q tal que:

i) $d(p,q) > 0$ si $p \neq q$; $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

ii) $d(p,q) = d(q,p)$

iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ para todo $r \in X$.

(4) Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ es un filtro maximal respecto a la contención.

Un filtro F de $\mathcal{B}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$ tal que:

i) $a \in F$ y $b \geq a \rightarrow b \in F$

ii) $a \in F$ y $b \in F \rightarrow a \wedge b \in F$.

iii) $\forall a \in F$, $a \neq \emptyset$

(5) Algebra de conjuntos.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto S es una álgebra de conjuntos si:

i) $S \in \mathcal{A}$

ii) Si $X, Y \in \mathcal{A}$ entonces $X \cap Y \in \mathcal{A}$ y $X \cup Y \in \mathcal{A}$

iii) Si $X \in \mathcal{A}$ entonces $S - X \in \mathcal{A}$.

(6) Una valuación es $v: E \rightarrow \{0,1\}$. Para cada valuación v hay una única función:

$$v^{*}: \{E\text{-fórmulas}\} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{t.q.}$$

i) $v^{*}(p) = v(p)$ para todo $p \in E$

ii) $v^{*}(\sim\alpha) = 1 - v^{*}(\alpha)$

iii) $v^{*}(\alpha \vee \beta) = \max\{v^{*}(\alpha), v^{*}(\beta)\}$

Se dice que una E-fórmula σ es satisfacible sii hay una valuación v t.q. $v^{\#}(\sigma)=1$

Se dice que un conjunto Σ de E-fórmulas es satisfacible sii hay una valuación que satisface a cada fórmula de Σ

También hay un teorema de compacidad para lógica de 1er orden el cual es equivalente al teorema del ideal primo:

Teorema de compacidad para lógica de primer orden.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y Σ el conjunto de enunciados de $\mathcal{L}$

Si todo subconjunto finito de Σ tiene modelo, entonces Σ tiene modelo.

Conclusiones.

A lo largo del presente trabajo se ha intentado dar algunas ideas acerca de la polémica acerca del axioma de elección, de su relación con los demas axiomas de la teoría de conjuntos y sobre todo de la importancia que tiene elección en Matemáticas.

Para concluir este trabajo quisiéramos mencionar algunas de las alternativas al axioma de elección que se han planteado a lo largo del presente siglo, entendiendo alternativas no como formulaciones distintas pero logicamente equivalentes al axioma (como el principio multiplicativo de Russell, por ejemplo), sino como principios diferentes que niegan o contradicen el axioma y que generan una Matemática distinta.

Uno de los primeros en proponer una alternativa (en realidad no propuso una, sino tres) al axioma de elección fue Alonzo Church en 1927. Las tres variantes alternativas propuestas por él, estan relacionadas con problemas de sucesiones de ordinales, de ordinales límites y de conjuntos mas que numerables. Algunas consecuencias de sus formulaciones alternativas son, el hecho de que el continuo no pueda bien ordenarse y diversos resultados contradiciendo la teoria de ordinales de Cantor.

G. H Moore afirma, en relación al trabajo de Church:

> Cantor había supuesto que existía una única teoría de conjuntos como solamente existe una única teoría de

> los números reales; en contraste Church se preguntaba si había dos o mas clases numéricas del segundo tipo en diferentes universos de discurso, tal y como existían diferentes geometrías, ambas consistentes como la hiperbólica y la euclideana.

El intento de Church, que dicho sea de paso no tuvo ningun éxito es el que mas coherentemente busca una alternativa al axioma de elección. Otros intentos de hallar alternativas fueron hechos por la escuela italiana (Levi, Viola, etc.) llegando a postular el llamado "principio de aproximación" que solamente fue discutido y empleado por la misma escuela italiana, y ésto ocasionalmente.

El primer intento de alternativa que ha sido tomado en cuenta por numerosos matemáticos es el axioma de determinación formulado en 1962 por Jan Mycielski y Hugo Steinhaus.

El axioma de determinación, que surge de la teoría de juegos dice lo siguiente:

En todo juego infinito de información perfecta hay una estrategia ganadora.

Este axioma tiene algunas consecuencias que concuerdan con resultados basados en el axioma de elección, pero excluye algunas otras consideradas como "desagradables" por ejemplo la paradoja de Banach-Tarski o el hecho de que no todo conjunto de reales sea Lebesgue-medible

Ahora, el axioma de determinación implica también el axioma de elección numerable restringido a conjuntos de reales y la importancia que tiene en Teoría de Conjuntos se basa principalmente en resultados relacionados con grandes cardinales.

Ya para finalizar este trabajo, vamos a citar una reflexión de Dana Scott acerca del axioma de elección que recoge elocuentemente los diversos aspectos que hemos venido discutiendo:

> No hay duda de que el axioma de elección siempre será deseable, no obstante el interés técnico de las diversas preguntas acerca de su independencia respecto a otros principios mas débiles, (Sin embargo) ¡ojalá pudiera ser deducido de principios mas sencillos!

Bibliografía.

1985 Carrillo Miguel y Oliart Alberto
Forcing y Teoría de Conjuntos. Tesis profesional UNAM

1979 Devlin J. Keith
Fundamentals of Contemporary Set Theory. Springer-Verlag

Enderton H. B
Elements of Set Theory

1969 Fraenkel Abraham
Teoría de Conjuntos y Lógica. Ed. UNAM.

1977 Garciadiego D. Alejandro
La Teoría de conjuntos, sus orígenes, desarrollo y consecuencias.
Tesis profesional UNAM.

Jech Tomas
1973 The Axiom of Choice; North Holland
1978 Set Theory; Academic Press

Jech Thomas y Karel Hrbacek
1978 Introduction to Set Theory; Pure and applied Mathematics.

Kamke
Set Theory. Dover

1968 Körner Stephan
Introducción a la filosofía de las matemáticas. Siglo XXI.

1980 Kunen K
Set Theory. North Holland.

1965 Lang Serge
Algebra. Traducción y Edición de Ed. Aguilar.

1981 López Aceves Eduardo
Algunos aspectos del debate entre las escuelas intuicionista y formalista. Tesis profesional UNAM.

1979 Moore Gregory H.
Zermelo's axiom of choice: its origins and role in the development of Mathematics. Institute for the History and Philosophy of Science and Technology.