Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

COHOMOLOGIA DE GRUPOS Y EXTENSIONES CRUZADAS

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a:

PEDRO GURROLA PEREZ

México, D. F. 1985

INDICE

INTRODUCCION.

El objeto central de este trabajo es el de presentar, en el contexto de la cohomología de grupos, los resultados que han permitido recientemente encontrar una interpretación de los grupos de cohomología $H^n(Q,A)$ (donde Q es un grupo y A un Q-módulo), en términos de cierto tipo de extensiones de grupos. Como señala Saunders Mac Lane en su nota histórica ([M-5]), tuvieron que transcurrir casi treinta años para que se diera una solución satisfactoria al problema de encontrar una interpretación de $H^n(Q,A)$. En su desarrollo de la cohomología de grupos, Eilenberg y Mac Lane ([E-M]) habían encontrado que, si Q es un grupo y A un Q-módulo, entonces el segundo grupo de cohomología, $H^2(Q,A)$, está en correspondencia biyectiva con el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de A por Q, denotado Opext(Q,A). Este resultado es de sobra conocido (véase [Br] , [Ro], [Hi-St], [M-2]) y se obtiene mediante el cálculo directo de cociclos y cofronteras. En particular, si se considera la extensión de grupos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \rtimes Q \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

(donde $A \rtimes Q$ denota al producto semidirecto de A y Q ;

véase [Br, p. 87]), resulta ser que ciertas clases de equivalencia de homomorfismos de Q en $A \ltimes Q$ están en correspondencia biyectiva con los elementos de $H^1(Q,A)$. Asimismo, Eilenberg y Mac Lane encontraron una interpretación de $H^3(Q,A)$ en términos de obstrucciones a la construcción de extensiones de A por Q en el caso en que A no es abeliano, pero desafortunadamnete esta correspondencia no fué biyectiva. Para el caso $n \geqslant 3$, propusieron una interpretación de $H^n(Q,A)$ a través de multiplicaciones no asociativas, sin embargo, este resultado no tuvo ninguna utilidad.

En los años cincuenta, Gruenberg estudió la cohomología de grupos desde un punto de vista diferente ([Gr]), pero el problema de encontrar una interpretación adecuada de los grupos de cohomología de grupos $H^n(Q,A)$ para $n \geqslant 3$ permaneció sin solución durante varios años más. Se intuía que los elementos de $H^3(Q,A)$ estaban relacionados con los "módulos cruzados" definidos por Whitehead en 1944 ([W]), pero el teorema preciso no fue esbozado sino hasta 1966 por Gerstenhaber ([G-1], [G-2]), quien no sólo lo plantea para el caso de la cohomología de grupos, sino también para álgebras asociativas y de Lie.

En 1977, Ratcliffe ([R-1]) demuestra el teorema para $n = 3$, haciendo uso de la "extensiones cruzadas" (introducidas por Whitehead como "sistemas de homotopía n-dimensionales" ; véase [W]), es decir, demuestra que existe una biyección entre los elementos de $H^3(Q,A)$ y las clases de equivalencia de sucesiones exactas de grupos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde C es un G-módulo cruzado y A es abeliano. También Garfinkel y Wu ([Ga-W]) así como otros autores (véase [M-5]), encontraron simultáneamente este resultado. La correspondencia dada, además de ser biyectiva, resulta más natural que la propuesta anteriormente por Eilenberg y Mac Lane, en tanto que la cohomología de grupos había sido motivada precisamente por el estudio de las extensiones de grupos. Por otra parte, la demostración publicada por Wu ([Wu-1],[Wu-2]) es de carácter funtorial y evita completamente los cálculos de cociclos y cofronteras.

Todo lo anterior llevó, finalmente, a la generalización, para $n \geqslant 3$, de la interpretación de $H^n(Q,A)$. En 1978, Huebschmann ([Hu-1]), siguiendo a Whitehead, generaliza la noción de módulo cruzado a la de "complejo cruzado de longitud finita", interpretando a este último como una "n-extensión cruzada de A por Q", es decir, una sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde A y C_k $(1 < k < n)$ son Q-módulos, y C_1 es un G-módulo cruzado. Después, construye ciertas resoluciones cruzadas proyectivas y, evitando completamente los cálculos con cociclos, demuestra que, bajo una relación de equivalencia similar a la usada por Yoneda en su interpretación de los elementos de $\mathrm{Ext}^n(Q,A)$ (véase [M-2]), las clases de equivalencia de n-extensiones cruzadas de A por Q constituyen un grupo abeliano (denotado $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$), naturalmente isomorfo al grupo $H^{n+1}(Q,A)$. De esta manera, generaliza la interpretación dada por Mac Lane para $H^2(Q,A)$ al caso $H^n(Q,A)$ para $n \geqslant 3$.

En forma independiente, D.F.Holt también demostró el teorema ([Ho]), pero su demostración no es tan clara y directa como la de Huebschmann. Por su parte, Richard O. Hill Jr., conociendo el resultado de Ratcliffe para $n = 3$, demuestra el teorema para el caso $n \geqslant 4$, aunque su demostración no se publicó.

En el presente trabajo, nos pareció conveniente presentar primero la demostración "tradicional" (en términos de cociclos y cofronteras) de los casos $H^1(Q,A)$ y $H^2(Q,A)$. Esta demostración es la obtenida por Mac Lane ([M-2]) y aunque es de sobra conocida, tiene la ventaja de proporcionarnos una idea precisa de la motivación de los conceptos estudiados. Asimismo, en el primer capítulo introducimos la suma de extensiones definida por Baer en 1934 y estudiamos algunas propiedades funtoriales de Opext(Q,A).

En el capítulo II, exponemos en forma detallada la demostración ([Hu-1]) de la existencia de un isomorfismo entre $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$ y $H^{n+1}(Q,A)$ $(n \geqslant 1)$, generalizando así los resultados del capítulo anterior.

Las n-extensiones cruzadas aparecen en el estudio de núcleos abstractos, en el de CW-complejos en un cierto rango de dimensiones y en K-teoría algebraica (véase [Hu-1]), por lo que es de esperarse que los resultados aquí presentados tendrán diversas aplicaciones. En particular, en el capítulo III, presentamos algunas aplicaciones a la teoría de p-grupos y al estudio de las extensiones de grupos

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

en el caso en que N no es abeliano.

Finalmente, quisiéramos expresar nuestra gratitud al Dr. Emilio Lluis Puebla, quien asesoró y apoyó la elaboración de esta tesis.

CAPITULO I

EXTENSIONES DE GRUPOS

I.1 Consideraciones generales.

En el estudio de grupos, como en el de otras estructuras algebraicas, con frecuencia se obtiene información sobre un grupo G analizando los subgrupos N de G y los correspondientes grupos cociente G/N ; así, el problema de las extensiones de grupos surge en forma natural: dados dos grupos Q y N , ¿de cuántas maneras se puede construir un grupo G de modo que N sea subgrupo normal de G y Q sea el respectivo cociente G/N ? Se trata, pues, de dar una clasificación de todas las posibles sucesiones exactas de la forma

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde N y Q son conocidos.

1.1 DEFINICION. Una extensión de N por Q es una sucesión exacta de grupos

$$(G,\iota):\ 1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1 .$$

1.2 Observación. Si, dada otra extensión de N por Q

$$(G',\iota'):\ 1 \longrightarrow N \longrightarrow G' \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

existe un homomorfismo $\alpha: G \to G'$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & G \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "\alpha"] & & \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q \arrow[r] & 1 \\ & & G' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

entonces α es necesariamente un isomorfismo (véase [Mi-Mu,p.29]) por lo que consideraremos a ambas extensiones como equivalentes.

1.3 DEFINICION. Dos extensiones (G,ι) y (G',ι') de N por Q son <u>equivalentes</u> si existe un homomorfismo $\alpha: G \to G'$ que haga conmutar el diagrama de 1.2. En tal caso escribiremos $(G,\iota) \equiv (G',\iota')$.

<u>1.4 PROPOSICION.</u> "$\equiv$" <u>es una relación de equivalencia.</u>

Demostración. El resultado es inmediato en virtud de que, por 1.2, α es isomorfismo. ///

Como en la extensión de 1.1 π es un epimorfismo, suponiendo el Axioma de Elección podemos definir una función que "escoja" representantes de elementos de Q en G :

1.5 DEFINICION. Considérese la extensión de N por Q dada en 1.1. Una <u>sección</u> de π es una función $s: Q \to G$ tal que $\pi s = id_Q$ y además está normalizada, es decir que $s(1) = 1$.

El caso de las extensiones en que N es abeliano presenta ventajas particulares en el estudio de las extensiones de N por Q, por lo que será el caso que consideraremos primero, dejando para el último capítulo el estudio del caso no abeliano.

I.2 Extensiones con núcleo abeliano.

2.1 DEFINICION. Una extensión cruzada de A por Q es una extensión de N por Q donde $N = A$ es un grupo abeliano que escribiremos aditivamente.

La ventaja de este tipo de extensiones está dada por la siguiente proposición.

2.2 PROPOSICION. Una extensión cruzada de A por Q induce una acción $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(A)$ de Q sobre A que hace de A un Q-módulo. (Aut(A) representa al grupo de automorfismos de A).

Demostración. Considérese la extensión cruzada

$$(G,i): \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

Sea $q \in Q$ y $s: Q \to G$ una sección de π, de tal manera que $s(q)$ es un representante de q en G. Como A es normal en G, G actúa sobre A por conjugación. Considérese entonces la función $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(A)$ dada por $\varphi(q) = \varphi_{s(q)}$ donde $\varphi_{s(q)}$ es un automorfismo interior de A, es decir que, para toda $a \in A$, $\varphi_{s(q)}(a) = s(q)\, a\, s(q)^{-1}$.

Veamos primero que φ está bien definida, o sea que no depende de la elección de la sección s: Supongamos que s_1 y s_2 son dos secciones distintas de π ; entonces , por 1.5,

$$\pi s_1(q) = \pi s_2(q) = q$$

de manera que

$$\pi(s_1(q)^{-1}\, s_2(q)) = \pi s_1(q)^{-1}\, \pi s_2(q) = 1$$

Por lo tanto, $(s_1(q)^{-1}s_2(q)) \in \ker \pi = \operatorname{im}(\iota)$, y , como A es abeliano,

$$(s_1(q)^{-1}s_2(q))\, a = a\, (s_1(q)^{-1}s_2(q))$$

para toda $a \in A$. Entonces

$$s_2(q)\, a\, (s_2(q)^{-1}) = s_1(q)\, a\, s_1(q)^{-1}$$

de manera que

$$\varphi_{s_2(q)} = \varphi_{s_1(q)}$$

lo que implica que φ no depende de la sección elegida.

Veamos que φ es homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_{s(q)s(h)}(a) &= s(q)s(h)\, a\, (s(q)s(h))^{-1} \\ &= s(q)s(h)\, a\, s(h)^{-1}s(q)^{-1} \\ &= \varphi_{s(q)}(\varphi_{s(h)}(a)) \end{aligned}$$

Entonces

$$\varphi(qh) = \varphi(q)\,\varphi(h) \quad .$$

///

2.3 Notación. La acción de Q sobre A inducida por la extensión cruzada (G,ι) será denotada ${}^{q}a$, es decir

$$(\varphi(q))(a) = s(q)(a)s(q)^{-1} = {}^{q}a \quad .$$

2.4 Notación. A la colección de todas las extensiones cruzadas de A por Q la denotaremos $\operatorname{Xext}(Q,A)$. A la clase de equivalencia de la extensión cruzada $(G,\iota) \in \operatorname{Xext}(Q,A)$ la denotaremos $[(G,\iota)]$, mientras que $\operatorname{Opext}(Q,A)$ es el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de $\operatorname{Xext}(Q,A)$.

Sea $Z(G)$ el centro de G, es decir

$$Z(G) = \{ g \in G \mid gg' = g'g \text{ , para toda } g' \in G \}$$

y sea $(G, \iota) \in Xext(Q,A)$; entonces

<u>2.5 PROPOSICION.</u> $A \subseteq Z(G)$ <u>si y sólo si la acción de Q sobre A es trivial.</u>

Demostración. Sea $A \subseteq Z(G)$. Tenemos que, si $a \in A$,

$$^{q}a = s(q)(a)s(q)^{-1} = s(q)s(q)^{-1}a = a$$

es decir que la acción de Q sobre A es trivial.

Inversamente, si la acción de Q sobre A es trivial, entonces

$$^{q}a = a \qquad \text{para toda } a \in A.$$

Esto significa que

$$s(q)(a)s(q)^{-1} = a$$

y $$s(q)(a) = (a)\, s(q)$$

lo cual implica que $a \in Z(G)$.

///

2.6 DEFINICION. A la extensión cruzada de 2.5 la llamaremos <u>extensión cruzada central</u> cuando $A \subseteq Z(G)$.

Como cada extensión cruzada de A por Q induce una estructura de Q-módulo en A (por 2.2), nuestro siguiente paso será, dado un Q-módulo A, tratar de clasificar todas las extensiones cruzadas de A por Q que inducen la acción de Q sobre A dada.

Es importante observar que la sección s definida en 1.5 no es necesariamente un homomomorfismo, sin embargo, el que s sea función indica que la imagen de s (denotada $im(s)$) es una <u>transversal de A en G</u>, es decir, un conjunto completo de representantes de clases laterales. Por otra parte,

$$\pi(s(q)s(r)) = \pi s(q)\pi s(r) = \pi s(qr) \qquad (q,r \in Q)$$

de manera que, aunque $s(qr)$ y $s(q)s(r)$ no necesariamente son iguales, al menos deben estar en la misma clase lateral. Esto implica que existe una $a \in A$ tal que

$$s(q)s(r) = \iota(a)s(qr)$$

Podemos entonces definir una función $f\colon Q \times Q \longrightarrow A$ que "mida" cuánto le falta a la sección s para ser homomorfismo:

2.7 DEFINICION. Sea $(G,\iota) \in Xext(Q,A)$ y sea $s\colon Q \longrightarrow G$ una sección de (G,ι). La <u>función factor asociada a s</u> es la función $f\colon Q \times Q \longrightarrow A$ que, a cada pareja (q,r) le asocia el elemento $f(q,r) \in A$ tal que

$$s(q)s(r) = \iota(f(q,r))s(qr).$$

2.8 Observación. La función f depende de la sección s escogida. Más adelante veremos qué relación existe entre las funciones factor de dos secciónes distintas de (G,ι) (ver 2.12).

Veamos cómo la extensión $(G,\iota) \in Xext(Q,A)$ queda determinada completamente (salvo equivalencia) si conocemos la estructura de A (como Q-módulo) y la función f asociada a alguna sección s.

2.9 PROPOSICION. Sea $(G,i) \in Xext(Q,A)$ y sea $f: Q \times Q \to A$ la función factor asociada a alguna sección s. La acción de Q sobre A y la función f determinan al grupo G de manera única (salvo isomorfismo).

Demostración. Sea $(G,i) \in Xext(Q,A)$ y sea $s: Q \to G$ una sección. Considérese el producto cartesiano $A \times Q$ y sea $\Upsilon: A \times Q \to G$ la función definida por $\Upsilon(a,q) = a\,s(q)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \Upsilon} & & & & \\ & & & & A \times Q & & & & \end{array}$$

Mostraremos primero que Υ es una biyección. Como im(s) es una transversal de A en G, entonces toda $g \in G$ puede expresarse en la forma

$$g = a\,s(q)$$

para alguna $a \in A$ y alguna $q \in Q$ tal que $\pi(g) = q$, por lo tanto, Υ es suprayectiva. Además, si

$$a_1 s(q_1) = a_2 s(q_2)$$

entonces

$$\pi(a_1 s(q_1)) = \pi(a_2 s(q_2))$$

y
$$\pi(a_1)\,\pi s(q_1) = \pi(a_2)\,\pi s(q_2)$$

lo que implica, por 1.5, que $q_1 = q_2$ puesto que $a \in \ker \pi$. En conclusión

$$(a_1,q_1) = (a_2,q_2)$$

de manera que Υ es inyectiva.

Veamos ahora cómo podemos hacer de Υ un homomorfismo: Debemos definir en $A \times Q$ una operación tal que

$$\Upsilon((a,q)(b,r)) = \Upsilon(a,q)\,\Upsilon(b,r)$$

para toda $a,b \in A$, $q,r \in Q$. Por la definición de Υ tenemos que

$$\begin{aligned}
\Upsilon(a,q)\,\Upsilon(b,r) &= i(a)s(q)\ i(b)s(r) \\
&= i(a)s(q)\ i(b)s(q)^{-1}s(q)s(r) \\
&= i(a)(^{q}b)s(q)s(r) && \text{(por 2.3)} \\
&= i(a + {}^{q}b)\ i(f(q,r))s(qr) && \text{(por 2.7)} \\
&= i(a + {}^{q}b + f(q,r))s(qr) \\
&= \Upsilon(a + {}^{q}b + f(q,r)\ ,\ qr\ )
\end{aligned}$$

(Observar cómo, al aplicar 2.3 y 2.7, estamos suponiendo que conocemos la acción de Q sobre A y la función f).
Por lo tanto, para que Υ sea un homomorfismo debemos definir el siguiente producto en $A \times Q$:

$$(a,q)(b,r) = (a + {}^{q}b + f(q,r)\ ,\ qr)$$

Al conjunto $A \times Q$ junto con la operación así definida lo denotaremos G_s . Evidentemente G_s es un grupo y además, $\Upsilon : G_s \to G$ es un isomorfismo.

///

2.10 COROLARIO. La extensión cruzada

$$(G_s, i_s):\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_s} G_s \xrightarrow{\pi_s} Q \longrightarrow 1$$

(donde i_s y π_s son la inclusión y proyección canónicas respectivamente) es equivalente a la extensión (G, i).

Demostración. Tenemos que demostrar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & G_s \arrow[r] \arrow[u, "\Upsilon"'] & Q \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Puesto que $i_s(a) = (a,1)$ y $\pi_s(a,q) = q$, entonces

$$\Upsilon i_s(a) = \Upsilon(a,1) = i(a)s(1) = i(a) \qquad (a \in A)$$

y, por otra parte, por 1.5 y la exactitud de (G,i), tenemos que

$$\pi \Upsilon(a,q) = \pi(i(a)s(q)) = \pi i(a)\pi s(q) = (1)id_Q(q) = q \,.$$

///

Así pues, la extensión (G,i) es equivalente a una extensión $(G_s, i_s) \in Xext(Q,A)$ definida completamente en términos de A, Q y f. Podríamos ahora preguntarnos si a partir de una función arbitraria $f\colon Q \times Q \to A$ podemos definir un grupo G_s que coincida con el definido en 2.9, de tal manera que f sea la función factor asociada a s. La siguiente proposición muestra que esto es posible si y sólo si establecemos ciertas condiciones sobre f .

<u>2.11 PROPOSICION.</u> <u>Sea A un Q-módulo. Una función</u> $f\colon Q \times Q \to A$ <u>es una función factor asociada a una sección</u> $s\colon Q \to G$ <u>si y sólo si cumple con las siguientes condiciones</u>:

i) $f(q,1) = 0 = f(1,r)$

ii) ${}^{q}f(q,r) - f(qp,r) + f(q, pr) - f(q, p) = 0$

<u>para toda</u> $q,p,r \in Q$.

Demostración. Supongamos que la función $f: Q\times Q\rightarrow A$ es la función factor asociada a alguna sección $s: Q\rightarrow G$. Entonces

$$s(q)s(1) = \iota(f(q,1))s(q) \qquad \text{(por 2.7)}$$

y, por 1.5, esto implica que

$$s(q) = \iota(f(q,1))s(q)$$

de modo que

$$1 = \iota(f(q,1))$$

y, en consecuencia, como ι es inyectivo,

$$0 = f(q,1)$$

Similarmente obtenemos que $f(1,r) = 0$, con lo cual queda demostrado que f cumple con la condición (i).

La condición (ii) es consecuencia de la asociatividad en G, porque, si

$$s(q)(s(p)s(r)) = (s(q)s(p))s(r)$$

entonces, aplicando 2.7 obtenemos las siguientes igualdades:

$$s(q)(\iota(f(p,r))s(pr)) = (\ \iota(f(q,p))\, s(qp)\ )\ s(r)$$

$$s(q)\ \iota f(p,r)s(q)^{-1} = \iota(f(q,p))\,(s(qp)s(r))\ s(pr)^{-1}s(q)^{-1}$$

y ésto significa, aplicando 2.3, que

$${}^{q}f(p,r) = \iota(f(q,p))\,(\iota(f(qp,r))\, s(qpr)\ )\ s(pr)^{-1}s(q)^{-1}$$

$${}^{q}f(p,r)\ s(q)\ s(pr) = \iota(\ f(q,p) + f(qp,r)\ )\ s(qpr)$$

$${}^{q}f(p,r)\ (\iota(f(q,pr))\, s(qpr)\ ) = \iota(f(q,p) + f(qp,r)\ )\ s(qpr)$$

$$\iota({}^{q}f(p,r) + f(q,pr)\ ) = \iota(\ f(q,p) + f(qp,r)\ )$$

y, como ι es inyectivo, ésto implica que

$${}^{q}f(p,r) + f(q,pr) = f(q,p) + f(qp,r)$$

que es precisamente la condición (ii).

Inversamente, sea $f: Q \times Q \longrightarrow A$ una función arbitraria que cumple con las condiciones (i) y (ii). Sea G' el conjunto $A \times Q$ junto con la operación definida así:

$$(a,q)(b,r) = (a + {}^{q}b + f(q,r) \ , \ qr \ )$$

Demostraremos primero que G', junto con esta operación, tiene estructura de grupo. Tenemos que

$$\begin{aligned}((a,q)(b,p)) \ (c,r) &= (a + {}^{q}b + f(q,p) \ , \ qp) \ (c,r) \\ &= (a + {}^{q}b + f(q,p) + {}^{qp}c + f(qp,r), \ qpr) \\ &= (a + {}^{q}b + {}^{qp}c + {}^{q}f(p,r) + f(q,pr), qpr)\end{aligned}$$

(ésta última igualdad es consecuencia de (ii)). Aplicando nuevamente la definición de la operación en G' tenemos que

$$\begin{aligned}((a,q)(b,p)) \ (c,r) &= (a,q) \ (b + {}^{p}c + f(p,r) \ , \ pr \ ) \\ &= (a,q)(\ (b,p)(c,r) \ )\end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la asociatividad.

Por otra parte, $(0,1) \in A \times Q$ opera como elemento idéntico, puesto que

$$\begin{aligned}(a,q)(0,1) &= (a + {}^{q}0 + f(q,1) \ , \ q) \\ &= (a,q) \qquad\qquad (\ f(q,1) = 1, \text{ por (i).})\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$(0,1)(a,q) = (0 + {}^{1}a + f(1,q) \ , \ q) = (a,q) \ .$$

Finalmente, existe el elemento inverso derecho de (a,q):

$$(a,q)^{-1} = (\ - {}^{q^{-1}}a \ - \ {}^{q^{-1}}f(q,q^{-1}) \ , \ q^{-1} \ )$$

pues

$$(a,q)(a,q)^{-1} = \ (a + {}^{q}(-{}^{q^{-1}}a - \ {}^{q^{-1}}f(q,q^{-1})) + f(q,q^{-1}), \ qq^{-1})$$

y, por lo tanto, $(a,q)(a,q)^{-1} = (0,1)$. Asimismo, existe elemento inverso izquierdo, a saber:

$$(a,q)^{-1} = (-{}^{q^{-1}}a - f(q^{-1},q) \quad , q^{-1})$$

de modo que

$$\begin{aligned}(a,q)^{-1}(a,q) &= (-{}^{q^{-1}}a - f(q^{-1},q) + {}^{q^{-1}}a + f(q^{-1},q) \ , \ qq^{-1}) \\ &= (0,1)\end{aligned}$$

Sabemos además, por la asociatividad de G', que ambos inversos deben ser iguales. En conclusión, hemos demostrado que G' es un grupo.

Ahora verificaremos que la inclusión y proyección canónicas son homomorfismos de grupos (con respecto a G') y hacen de la siguiente una sucesión exacta:

$$(G',\iota'): \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} Q \longrightarrow 1 .$$

1) La inclusión $\iota': A \longrightarrow G'$ dada por $\iota'(a) = (a,1)$ es un homomorfismo de grupos, pues

$$\begin{aligned}\iota'(a)\,\iota'(b) &= (a,1)(b,1) \\ &= (a + {}^{1}b + f(1,1) \ , \ 1) \\ &= (a + b, \ 1\ ) \qquad\qquad \text{(por (i)).} \\ &= \iota'(a + b)\end{aligned}$$

2) La proyección $\pi': G' \longrightarrow Q$ dada por $\pi'(a,q) = q$ es un homomorfismo de grupos, pues

$$\begin{aligned}\pi'((a,q)(b,r)) &= \pi'(a + {}^{q}b + f(q,r) \ , \ qr\ ) \\ &= qr \\ &= \pi'(a,q)\,\pi'(b,r)\end{aligned}$$

3) $im(\iota') = ker(\pi')$ puesto que, si $(a,q) \in ker(\pi')$, entonces

$$\pi'(a,q) = q = 1$$

y, por lo tanto

$$(a,q) = (a,1) = i'(a)$$

lo que implica que $(a,q) \in \mathrm{im}(i')$.

Inversamente, si $(a,q) \in \mathrm{im}(i')$, entonces

$$(a,q) = i'(a) = (a,1)$$

es decir que $q = 1$. En consecuencia, $\pi'(a,q) = 1$,

de modo que $(a,q) \in \ker(\pi')$.

Para terminar, sólo falta comprobar que, en la extensión cruzada (G', i') que hemos construido, la función f es precisamente la función factor asociada a alguna sección s.

Considérese la sección canónica

$$s(q) = (0,q)$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} s(q)s(r) &= (0,q)(0,r) \\ &= (0 + {}^{q}0 + f(q,r) , qr) \\ &= (f(q,r) , qr) \end{aligned}$$

y, como $s(qr) = (0,qr)$, entonces

$$\begin{aligned} s(q)s(r) &= (f(q,r) , 1)(0,qr) \\ &= i(f(q,r))\, s(qr) \end{aligned}$$

y ésta es la condición que define a la función factor asociada a la sección s (ver 2.7) .

///

<u>2.12 LEMA.</u> <u>Sea</u> (G,ι): $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$ <u>una extensión cruzada y sean</u> $s,s'\colon Q \to G$ <u>dos secciones de</u> π. <u>Si</u> f <u>y</u> f' <u>son las funciones factor correspondientes, entonces existe una función</u> $\gamma\colon G \to A$ <u>que satisface</u>

i) $\gamma(1) = 0$

ii) $f'(q,r) - f(q,r) = {}^{q}\gamma(r) - \gamma(qr) + \gamma(q)$.

Demostración. Sean $q,r \in Q$. Como $s(q)$ y $s'(q)$ están en la misma clase lateral de A, existe un elemento $\gamma(q) \in A$ tal que

$$s'(q) = \iota(\gamma(q))s(q)$$

entonces

$$\begin{aligned} s'(q)s'(r) &= \iota(\gamma(q))s(q)\,\iota(\gamma(r))s(r) \\ &= \iota(\gamma(q))\,\iota({}^{q}\gamma(r))s(q)s(r) \\ &= \iota(\gamma(q) + {}^{q}\gamma(r))\,\iota(f(q,r))s(qr) \\ &= \iota(\gamma(q) + {}^{q}\gamma(r) + f(q,r) - \gamma(qr))s'(qr) \end{aligned}$$

pero, por 2.7, como ι es inyectivo, tenemos que

$$f'(q,r) = \gamma(q) + {}^{q}\gamma(r) + f(q,r) - \gamma(qr)$$

de donde se sigue la relación (ii), pues todos los términos están en el grupo abeliano A. Por otra parte, como

$$s(1) = 1 = s'(1) \qquad \text{(por 1.5)}$$

entonces $\gamma(1) = 0$.

///

2.13 Observación. Lo que esencialmente hemos establecido a través de 2.11 es la correspondencia biyectiva siguiente

$$\begin{pmatrix}\text{extensiones cruzadas (2.1)}\\ \text{con una sección normaliza-}\\ \text{da } s \text{ (1.5) .}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\text{funciones } f:G\times G \longrightarrow A\\ \text{que satisfacen las con-}\\ \text{diciones de 2.11 .}\end{pmatrix}$$

En base a esta correspondencia, podremos relacionar el conjunto $\mathrm{Opext}(Q,A)$ con el grupo de cohomología $H^2(Q,A)$.

Sea

$$\mathcal{B}: \ldots \longrightarrow B_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\partial_1} B_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

la resolución barra normalizada de $\mathbb{Z}$, ([Ro.p.285], [Hi-St.p.215]), donde B_n $(n \geq 0)$ es el Q-módulo libre sobre los elementos de la forma $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ con $x_i \in Q$ $(1 \leq i \leq n)$, (B_0 es libre sobre el generador ()). Además, si $x_i = 1$ para alguna i, entonces $(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$. Los homomorfismos ∂_n $(n \geq 0)$ están dados por

$$\begin{aligned}\partial_n(x_1,\ldots,x_n) = {}& {}^{x_1}(x_2,\ldots,x_n) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (x_1,x_2,\ldots,x_i x_{i+1},\ldots,x_n) + \\ & + (-1)^n (x_1,\ldots,x_{n-1}).\end{aligned}$$

2.14 Observación. En particular, en la resolución $\mathcal{B}$, tenemos que

$$\partial_1(x_1) = {}^{x_1}() - ()$$

$$\partial_2(x_1,x_2) = {}^{x_1}(x_2) - (x_1 x_2) + (x_1)$$

y $$\partial_3(x_1,x_2,x_3) = {}^{x_1}(x_2,x_3) - (x_1x_2,x_3) + (x_1,x_2x_3) - (x_1,x_2) .$$

La resolución $\mathcal{B}$ es una resolución Q-libre de $\mathbb{Z}$ y, aplicando $\mathrm{Hom}_G(\_,A)$ obtenemos el complejo

$$\mathrm{Hom}_Q(\mathcal{B},A):\ \mathrm{Hom}_Q(B_0,A) \xrightarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}_Q(B_1,A) \xrightarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}_Q(B_2,A) \xrightarrow{\partial^*} \cdots$$

y, por definición ([Hi-St.p.188]),

$$H^n(Q,A) = H^n(\mathrm{Hom}_Q(\mathcal{B},A))$$

de manera que, en particular,

$$H^2(Q,A) = \ker(\partial_3^*)/\ \mathrm{im}(\partial_2^*)$$

donde, si $f:B_2 \longrightarrow A$ es un elemento de $\mathrm{Hom}_Q(B_2,A)$,

$$\partial_3^*(f) = f\partial_3 .$$

Como sabemos ([Hi-St.p.118]) , los elementos de $\ker(\partial_3^*)$ se llaman 2-cociclos, mientras que los elementos de $\mathrm{im}(\partial_2^*)$ se conocen como 2-cofronteras .

<u>2.15 LEMA.</u> $f: B_2 \longrightarrow A$ <u>es un 2-cociclo si y sólo si satisface las condiciones de 2.11</u> .

Demostración. Sea $f: B_2 \longrightarrow A$ un 2-cociclo, es decir, $f \in \ker(\partial_3^*)$. Entonces

$$\partial_3^*(f) = f\partial_3 = 0$$

pero esto sucede si y sólo si

$$0 = f\partial_3(x_1,x_2,x_3) =$$

$$= f({}^{x_1}(x_2,x_3) - (x_1x_2,x_3) + (x_1,x_2x_3) - (x_1,x_2))$$

$$= {}^{x_1}f(x_2,x_3) - f(x_1x_2,x_3) + f(x_1,x_2x_3) - f(x_1,x_2)$$

de modo que se cumple la condición (ii) de 2.11 . Además, por la definición de B_2 ,

$$(1,x) = 0 = (x,1)$$

y entonces

$$f(1,x) = 0 = f(x,1)$$

Por lo tanto, f es una función factor, según se estableció en 2.11 .

///

De esta manera, hemos establecido la biyección

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}\text{extensiones cruzadas (2.1)}\\ \text{con sección normalizada s}\\ \text{(1.5)}\end{pmatrix} \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "(2.11)"'] & & \begin{pmatrix}\text{2-cociclos normalizados}\\ \text{de G con coeficientes}\\ \text{en A .}\end{pmatrix} \arrow[dl, leftrightarrow, "(2.15)"] \\
& \begin{pmatrix}\text{funciones } f:Q\times Q \to A\\ \text{que satisfacen las con-}\\ \text{diciones de 2.11}\end{pmatrix} &
\end{tikzcd}$$

Por último, tenemos que

<u>2.16 LEMA. Dos extensiones</u> $(G,i),(G',i')\in \mathrm{Xext}(Q,A)$ <u>son equivalentes si y sólo si, dadas dos secciones</u> $s: Q\to G$ <u>y</u> $s': Q\to G'$ <u>y las funciones factor respectivas f y f', entonces</u> $f - f'$ <u>es una 2-cofrontera</u> .

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{array}{lccccccccc}
(G,\iota): & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \underset{s}{\overset{\longrightarrow}{\dashleftarrow}} & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & & \| & & \uparrow & & \| & & \\
(G',\iota'): & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G' & \underset{s'}{\overset{\longrightarrow}{\dashleftarrow}} & Q & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

de extensiones cruzadas, donde s y s' son las secciones respectivas. Dada la conmutatividad del diagrama, s' también es una sección de (G,ι), de manera que, por 2.12, existe una función $g: Q \to A$ tal que

I) i) $g(1) = 0$

ii) $f'(q,r) - f(q,r) = {}^{q}g(r) - g(qr) + g(q)$

pero, por 2.14,

$${}^{q}g(r) - g(qr) + g(q) = g\partial_2(q,r)$$

y

$$\partial_2^*(g) = g\partial_2$$

por lo tanto, $g\partial_2 \in \operatorname{im}(\partial_2^*)$.

Inversamente, si $f - f'$ es una 2-cofrontera, entonces

$$(f - f') \in \operatorname{im}(\partial_2^*)$$

entonces, existe alguna $g \in \operatorname{Hom}_Q(B_1, A)$ tal que

$$\partial_2^*(g) = f - f'$$

por 2.14 tenemos que $g\partial_2(q,r) = {}^{q}g(r) - g(qr) + g(q)$.
Siguiendo la construcción dada en 2.9, defínase $\lambda: G \to G'$ mediante $\lambda(a\, s(q)) = (a + g(q))s(q)$.

Es inmediata la verificación de que λ es un homomorfismo y de que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

///

De esta manera hemos demostrado el teorema siguiente:

2.17 TEOREMA. Sea A un Q-módulo y sea $\mathrm{Opext}(Q,A)$ el conjunto de clases de equivalencia de extensiones cruzadas de A por Q que inducen la acción de Q sobre A dada. Entonces existe una biyección

$$\Phi : \mathrm{Opext}(Q,A) \longrightarrow H^2(Q,A)$$

Veamos ahora algunas propiedades de $\mathrm{Opext}(Q,A)$:

2.18 PROPOSICION. Cada homomorfismo de grupos $\varphi: Q' \longrightarrow Q$ induce una función

$$\varphi^* = \mathrm{Opext}(\varphi,A): \mathrm{Opext}(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}(Q',A)$$

Demostración. Sea $[(G,\iota)] \in \mathrm{Opext}(Q,A)$ y sea $\varphi: Q' \longrightarrow Q$ un homomorfismo de grupos. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & A \arrow[r, dashed, "\iota'"] \arrow[d, equal] & G \wedge Q' \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & Q' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & G \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $G \wedge Q'$ denota al <u>producto fibrado</u> (o "pullback", véase [Ro,p.51] , [M-3,p.71]) de G y Q' sobre Q ; explícitamente,

$$G \wedge Q' = \left\{ (g,r) \in G \times Q' \;\middle|\; \pi(g) = \varphi(r) \right\}$$

junto con las proyecciones

$$\rho(g,r) = r$$
$$\alpha(g,r) = g$$

Asimismo, sea ι' la inclusión $\iota'(a) = (\iota(a), 1)$. Es evidente que el diagrama conmuta, y el renglón superior es exacto. De esta manera, a la extensión (G,ι) le hemos asociado la extensión $(G \wedge Q', \iota') \in \mathrm{Xext}(Q',A)$ junto con los homomorfismos α y φ . Por la propiedad universal del producto fibrado ([M-3,p.71]) sabemos además que la extensión $(G \wedge Q', \iota')$ que hace conmutar el diagrama anterior, es única salvo equivalencia, de tal manera que tenemos una función

$$\varphi^* = \mathrm{Opext}(\varphi,A) \colon \mathrm{Opext}(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}(Q',A)$$

definida mediante

$$\varphi^*([(G,\iota)]) = [(G \wedge Q', \iota')]$$

///

<u>2.19 PROPOSICION. Cada homomorfismo de Q-módulos</u> $\alpha: A \rightarrow A'$ <u>induce una función</u>

$$\alpha_* = \mathrm{Opext}(Q,\alpha): \mathrm{Opext}(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}(Q,A') .$$

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G,\iota): & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
& 0 \arrow[r, dashed] & A' \arrow[r, dashed, "\beta"] & (A' \vee G) \arrow[r, dashed, "\pi'"] & Q \arrow[r, dashed] & 1
\end{tikzcd}$$

donde (G,ι) es un elemento de $\mathrm{Xext}(Q,A)$ y $A' \vee G$ denota a la <u>suma fibrada</u> (o "pushout" [M-3,p.65]) de A' y G sobre A ; explícitamente,

$$A' \vee G = A' \ltimes G / N$$

donde $A' \ltimes G$ denota al producto semidirecto de A' y G (véase I.3.2) y $N = \{ (\alpha(a), \iota(-a)) \mid a \in A \}$ (de hecho, $A' \vee G$ está construido de manera de ser el mayor cociente que hace conmutar el diagrama). Sean, además, γ y β las inclusiones

$$\gamma(g) = (0,g)$$
$$\beta(a') = (a',1)$$

y π' el homomorfismo $\pi'(a',g) = \pi(g)$.

Es evidente que el diagrama conmuta y el renglón inferior es exacto. De esta manera, a la extensión (G,ι) le hemos asociado la extensión $(A'\vee G,\beta) \in Xext(Q,A')$. Esta extensión es única salvo equivalencia (por la propiedad universal de la suma fibrada; véase [M-3,p.65]), de tal manera que tenemos una función

$$\alpha_* = Opext(Q,\alpha): Opext(Q,A) \longrightarrow Opext(Q,A')$$

definida mediante

$$\alpha_*(\ [(G,\iota)]\ ) = [(A'\vee G,\beta)]$$

(es fácil ver que esta función está bien definida, es decir, no depende de los representantes elegidos).

///

2.20 PROPOSICION. Opext(_,_) es un funtor contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.

Demostración. Veamos primero que Opext(_,A) es un funtor contravariante; sean $\Upsilon: Q'' \longrightarrow Q'$, $\varphi: Q' \longrightarrow Q$ homomorfismos de grupos y considérese el diagrama inducido por la composición $\varphi\Upsilon$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota'} & G\wedge Q'' & \longrightarrow & Q'' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\Upsilon} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Es decir que

$$(\varphi\gamma)^{*}([(G,i)]) = [(G \wedge Q'', \gamma')]$$

para toda $[(G,i)] \in \mathrm{Opext}(Q,A)$. Por otra parte, si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i''"] \arrow[d, equal] & (G \wedge Q') \wedge Q'' \arrow[r, "\gamma''"] \arrow[d] & Q'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 1 \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & G \wedge Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\
(G,i): & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & G \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde

$$\varphi^{*}([(G,i)]) = [(G \wedge Q', i')]$$

y

$$\gamma^{*}([(G \wedge Q', i')]) = [((G \wedge Q') \wedge Q'', i'')]$$

(φ^{*} y γ^{*} son las funciones inducidas por φ y γ respectivamente), observamos que, por la propiedad universal del producto fibrado, existe un homomorfismo $h : (G \wedge Q') \wedge Q'' \to G \wedge Q''$ que hace conmutar al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
(G\wedge Q')\wedge Q'' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "\pi''"] \arrow[ddr] & & \\
& G\wedge Q'' \arrow[r] \arrow[d] & Q'' \arrow[d, "\varphi\gamma"] \\
& G \arrow[r, "\pi"] & Q
\end{tikzcd}$$

de tal manera que

$$\left[(G\wedge Q'' \,,\, \gamma'')\right] = \left[((G\wedge Q')\wedge Q'' \,,\, \iota'')\right]$$

y, en consecuencia,

$$(\varphi\gamma)^* = \gamma^*\varphi^* \;.$$

Por último, es inmediato verificar que

$$(id_Q)^* = id_{Opext(Q,A)}$$

con lo que queda demostrado que Opext(_,A) es un funtor contravariante. La demostración para la parte covariante es similar.

///

Veamos ahora cómo podemos darle a Opext(Q,A) una estructura de grupo. Si consideramos dos elementos $[(G,\iota)]$, $[(G',\iota')]$ de Opext(Q,A) , podemos definir su suma directa como la clase de equivalencia de la extensión

$$(G\oplus G',\ \iota\oplus\iota'):\quad 0 \longrightarrow A\oplus A \longrightarrow G\times G' \longrightarrow Q\times Q' \longrightarrow 1$$

2.21 DEFINICION. El <u>homomorfismo diagonal Δ</u> es el homomorfismo de grupos $\Delta = \Delta_Q : Q \longrightarrow Q\times Q$ definido mediante la regla

$$\Delta_Q(q) = (q,q)$$

mientras que el <u>homomorfismo codiagonal ∇</u> es el homomorfismo de Q-módulos $\nabla = \nabla_A : A\oplus A \longrightarrow A$ definido mediante la regla

$$\nabla_A(a_1,a_2) = a_1 + a_2 \quad .$$

Definiremos ahora lo que se conoce como suma de Baer:

2.22 DEFINICION. Si $[(G,\iota)],\ [(G',\iota')] \in \mathrm{Opext}(Q,A)$, definimos la <u>suma de Baer</u> de $[(G,\iota)]$ y $[(G',\iota')]$ como

$$[(G,\iota)] + [(G',\iota')] = \nabla_{A_*}\Delta_Q^*(\ [(G\oplus G',\ \iota\oplus\iota')]\ ) .$$

Dado que en $\mathrm{Xext}(Q,A)$ dos extensiones son equivalentes si y sólo si son isomorfas (véase 1.2) es inmediato verificar que la suma de elementos de $\mathrm{Opext}(Q,A)$ definida en 2.22 no depende de los representantes elegidos.

Por último, enunciamos, sin demostrarlo, el siguiente resultado ([Ho,p.316]):

2.21 PROPOSICION. Si $\alpha, \beta: A \longrightarrow A'$ son homomorfismos de Q-módulos, y α_*, β_* : Opext(Q,A) $\longrightarrow$ Opext(Q,A') son los respectivos morfismos inducidos, entonces

$$(\alpha_* + \beta_*) = (\alpha + \beta)_*$$

Es decir que Opext(Q,_) es un funtor aditivo.

I.3 Extensiones escindibles

3.1 DEFINICION. La extensión cruzada

$$(G,\iota):\quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

se escinde si existe un homomorfismo $s: Q \to G$ tal que $\pi s = id_Q$.

Es decir que la extensión (G,ι) se escinde si existe alguna sección s (como se definió en 1.5), que sea homomorfismo de grupos, en cuyo caso diremos que s es una escisión. Obsérvese que, si (G,ι) se escinde, la función factor f asociada a la escisión s resulta ser trivial, pues

$$s(q)s(h) = s(qh)$$

para toda $q,h \in Q$.

3.2 PROPOSICION. Sea $(G,\iota) \in Xext(Q,A)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) (G,ι) se escinde a través de algún homomorfismo s .

ii) G contiene a un subgrupo H tal que $\pi(H) = Q$, $G = \iota(A)\,H$ y $\iota(A) \cap H = \{1\}$

iii) G contiene a un subgrupo H tal que todo elemento $g \in G$ se expresa de manera única en la forma $g = \iota(a)\,h$ para alguna $a \in A$, $h \in H$.

iv) (G,ι) es equivalente a la extensión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\gamma} A \ltimes Q \xrightarrow{\rho} Q \longrightarrow 1$$

donde $A \ltimes Q$ denota al <u>producto semidirecto</u> de A y Q con respecto a la acción (de Q sobre A) dada. (véase [Br,p.88],[Hi-St,p.195]); γ y ρ son la inclusión y proyección canónicas respectivamente.

Demostración. Verifiquemos primero la equivalencia de (i) y (ii) : Supongamos que (G,ι) se escinde. Sea $H = \mathrm{im}(s)$. Como $\pi s = id_Q$, es evidente que H es isomorfo a Q. Además, im(s) es una transversal de A en G ([Ro,p.152]), de manera que $G = \iota(A)\,H$ (es decir, todo elemento de G se expresa como producto de algún elemento de $\iota(A)$ multiplicado por algún elemento de H.). Inversamente, si existe un grupo H como en (ii), defínase $s\colon Q \longrightarrow G$ como la inversa de π restringida a H . Es evidente entonces que s es un homomorfismo y que $\pi s = id_Q$.

La equivalencia de (ii) y (iii) es trivial. Veamos la equivalencia entre (i) y (iv) : Por 2.9 y 2.10, sabemos que, dada la extensión (G,ι) junto con la función factor f asociada a alguna sección s , queda determinada la extensión $(G_s,\iota_s) \in \mathrm{Xext}(Q,A)$ tal que $(G,\iota) \cong (G_s,\iota_s)$. Si s es homomorfismo, entonces f es trivial y G_s es el conjunto de elementos de $A \times Q$ junto con la operación

$$(a,q)(b,r) = (\ a + {}^{q}b\ ,\ qr\ )\ .$$

Pero $A \ltimes Q$ se define precisamente como el conjunto $A \times Q$ junto con esta operación, de manera que $G_s = A \ltimes Q$.

Inversamente, supóngase que existe un homomorfismo α que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\gamma} & A \ltimes Q & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Si se considera la sección canónica $s\colon Q \longrightarrow A \ltimes Q$,

$$s(q) = (0,q)$$

resulta que s es homomorfismo, pues

$$\begin{aligned} s(qr) &= (0,\ qr) \\ &= (0 + {}^{q}0,\ qr) \\ &= s(q)s(r)\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A \ltimes Q, \gamma) \in Xext(Q,A)$ se escinde a través de s . Défínase entonces el homomorfismo

$$s' = \alpha s\colon Q \rightarrow G\ .$$

Es evidente que $s'(1) = 1$ y $\pi s' = id_Q$, de modo que (G,ι) se escinde a través de s'.

///

La proposición anterior afirma que, salvo equivalencia, sólo existe una extensión cruzada escindible.

3.3 PROPOSICION. La clase de equivalencia de la extensión cruzada escindible $(A \ltimes Q, \gamma)$ es el elemento neutro en Opext(Q,A) (con respecto a la suma de Baer).

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G,i): & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "0_A"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "v"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(A \ltimes Q, \gamma): & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\gamma"] & A \ltimes Q \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend right, "s"'] & 1
\end{tikzcd}$$

(G,i) es un elemento de Xext(Q,A) y v es el homomorfismo definido a través de la escisión s, es decir, $v = s\pi$. Como el diagrama conmuta, entonces, por la unicidad en 2.19,

$$0_{A*}[(G,i)] = [(A \ltimes Q, \gamma)]$$

Además,

$$(id_A)_* [(G,i)] = [(G,i)]$$

de manera que

$$\begin{aligned}
[(G,i)] + [(A \ltimes Q, \gamma)] &= (id_A)_* [(G,i)] + 0_{A*} [(G,i)] \\
&= (id_A + 0_A)_* [(G,i)] \\
&= [(G,i)]
\end{aligned}$$

///

Consideraremos ahora otro problema: dada la extensión escindible

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Q \longrightarrow 1$$

dar una clasificación de los posibles homomorfismos s .

3.4 DEFINICION. Una <u>derivación del grupo Q en el Q-módulo A</u> es una función $d\colon Q \longrightarrow A$ tal que

$$d(qr) = d(q) + {}^{q}d(r).$$

Es importante observar que las derivaciones no son homomorfismos, sino tan sólo funciones. El término "derivación" tiene una razón de ser: si pensamos que Q actúa trivialmente por la derecha sobre A (además de la acción por la izquierda que hace de A un Q-módulo izquierdo), entonces la expresión de 3.4 puede escribirse

$$d(qr) = d(q)^{r} + {}^{q}d(r)$$

expresión que, a su vez, recuerda la regla de derivación de un producto en el Cálculo Elemental. La importancia de las derivaciones (y la motivación de su definición) está en el hecho de que existe una correspondencia biyectiva entre las escisiones $s\colon Q \to G$ y las derivaciones $d\colon Q \to A$:

<u>3.5 PROPOSICION.</u> <u>Sea</u> $s\colon Q \to A \rtimes Q$ <u>una sección de la extensión escindible</u> $(A \rtimes Q, \gamma)$. <u>Entonces,</u> s <u>es un homomorfismo si y sólo si la función</u> $d\colon Q \to A$ <u>definida mediante</u>

$$s(q) = (d(q),q)$$

es una derivación.

Demostración. La sección $s\colon Q \to A \ltimes Q$ es un homomorfismo si y sólo si

$$s(q)s(r) = s(qr)$$

es decir, si y sólo si

$$(d(q),q)(d(r),r) = (d(qr),r) \ .$$

Pero, por la definición del producto en $A \ltimes Q$, esto sucede si y sólo si

$$(d(q) + {}^{q}d(r) \ , \ qr \ ) = (d(qr), \ r \ )$$

lo cual significa que d es una derivación .

///

3.6 Observación. Cuando Q actúa trivialmente sobre A, entonces $A \ltimes Q = A \times Q$. Además, al ser la acción trivial, las derivaciones $d\colon Q \to A$ son homomorfismos, por lo que, en la extensión

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times Q \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

los homomorfismos $s\colon Q \longrightarrow A \times Q$ están en correspondencia biyectiva con los homomorfismos $d\colon Q \to A$.

3.7 PROPOSICION. Sea $Der(Q,A)$ el conjunto de derivaciones de Q en el Q-módulo A. Entonces $Der(Q,A)$ junto con la suma de funciones, constituye un grupo abeliano.

Demostración. Sean $d, d' \in Der(Q,A)$. Aplicando las propiedades de la acción de Q sobre A obtenemos las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(d + d')(qr) &= d(qr) + d'(qr) \\
&= {}^{q}d(r) + d(q) + {}^{q}d'(r) + d'(q) \\
&= {}^{q}(d(r) + d'(r)\ ) + d(q) + d'(q) \\
&= {}^{q}(d + d')(r) \ + \ (d + d')(q)
\end{aligned}
$$

es decir, la suma de derivaciones es una derivación. Las propiedades de grupo abeliano son inmediatas.

///

3.8 DEFINICION. Dos escisiones s y s' se llaman <u>A-conjugadas</u> si existe un elemento $a \in A$ tal que

$$s(q) = \iota(a)s'(q)\,\iota(a)^{-1} \qquad \text{para toda } q \in Q.$$

3.9 DEFINICION. Una <u>derivación principal</u> $d\colon Q \longrightarrow A$ es una derivación tal que

$$d(q) = {}^{q}(a_0) - (a_0)$$

para alguna $a_0 \in A$ dada.

<u>3.10 PROPOSICION</u>. <u>Dos derivaciones d_1 y d_2 (de Q en A) corresponden a escisiones s_1 y s_2 A-conjugadas si y sólo si $(d_2 - d_1)$ es una derivación principal</u>.

Demostración. Sean $d_1, d_2\colon Q \rightarrow A$ derivaciones tales que

$$s_1(q) = (d_1(q),q) \qquad s_2(q) = (d_2(q),q)$$

Si s_1 y s_2 son A-conjugadas, entonces existe una $a \in A$ tal que

$$s_1(q) = i(a)s_2(q)i(a)^{-1} \quad \text{para toda } q \in Q .$$

Esto significa que

$$\begin{aligned}(d_1(q),q) &= i(a)(d_2(q),q)i(a)^{-1}\\ &= (a + d_2(q),\ q)(a,1)^{-1}\\ &= (a + d_2(q) - {}^{q}a\ ,\ q)\ .\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_1(q) = a + d_2(q) - {}^{q}a$$

y

$$d_2(q) - d_1(q) = {}^{q}a - a \quad .$$

De manera que d_2-d_1 es una derivación principal.

La implicación inversa es inmediata.

///

<u>3.11 PROPOSICION.</u> <u>La relación de A-conjugación definida en 3.8 es una relación de equivalencia.</u>

Demostración. La simetría y la reflexividad son inmediatas. Verificaremos la transitividad. Sean s_1 y s_2 escisiones A-conjugadas, entonces existe una $a \in A$ tal que

$$s_1(q) = i(a)s_2(q)i(a)^{-1}.$$

De la misma manera, si s_2 y s_3 son A-conjugadas, existe $a' \in A$ tal que

$$s_2(q) = i(a')s_3(q)i(a')^{-1}$$

entonces

$$\begin{aligned}s_1(q) &= i(a)(\ i(a')s_3(q)i(a')^{-1}\ )i(a)^{-1}\\ &= i(aa')s_3(q)i(aa')^{-1}\end{aligned}$$

$$= \iota(aa')s_3(q)\,\iota(aa')^{-1}$$

de manera que s_1 y s_3 son A-conjugadas.

///

3.12 Notación. Al conjunto de escisiones $s\colon Q \to A$ de la extensión cruzada $(A \ltimes Q, \iota) \in Xext(Q,A)$ lo denotaremos $S(Q,A)$, mientras que al conjunto de clases de equivalencia de escisiones A-conjugadas lo denotaremos $S_A(Q,A)$.

<u>3.13 COROLARIO.</u> <u>Existe una correspondencia biyectiva</u>

$$Der(Q,A)/_{PDer(Q,A)} \longrightarrow S_A(Q,A)$$

<u>donde PDer(Q,A) representa al conjunto de derivaciones principales de Q en A.</u>

Demostración. Es una consecuencia inmediata de 3.5 y 3.10.

///

Por último, observamos que, si d es una derivación, entonces

$$d(1) = 0$$

puesto que

$$\begin{aligned} d(1) &= d(1) + {}^{1}d(1) \\ &= d(1) + d(1) \end{aligned}$$

lo cual implica que $d(1) = 0$. Por otra parte, si consideramos la resolución barra normalizada $\mathcal{B}$, y si $d \in Hom_Q(Q,A)$ tenemos que

$$\partial_2^*(d) = d\partial_2$$

y

$$d\partial_2(q,r) = {}^{q}d(r) - d(qr) + d(q)$$

en virtud de 2.14, de tal manera que $d \in ker(\partial_2^*)$ si y sólo si

$$0 = {}^{q}d(r) - d(qr) + d(q) \quad .$$

Es decir, $d \in \ker(\partial_2^*)$ si y sólo si $d \in \mathrm{Der}(Q,A)$.

De la misma manera se comprueba que $d_2 - d_1$ es una derivación principal si y sólo si d es una 1-cofrontera, esto es , si y sólo si $d_2 - d_1 \in \mathrm{im}(\partial_1^*)$.

De esta manera, a partir de 3.13, hemos demostrado que

<u>3.14 TEOREMA.</u> <u>Para todo Q-módulo</u> A, <u>existe una biyección</u>

$$\chi : S_A(Q,A) \longrightarrow H^1(Q,A) \quad .$$

///

Veamos algunas propiedades de Der(Q,A):

3.15 DEFINICION. Sean A y B dos Q-módulos, $d_Q \in \mathrm{Der}(Q,A)$ y $\rho : A \longrightarrow B$ un Q-homomorfismo. El <u>producto fibrado mixto de A y Q sobre B</u> es un grupo P junto con una derivación $d_P : P \longrightarrow A$ y un homomorfismo de grupos $\bar{\rho} : P \longrightarrow Q$ que hacen conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \overset{\bar{\rho}}{\dashrightarrow} & Q \\ {\scriptstyle d_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_Q} \\ A & \xrightarrow{\rho} & B \end{array}$$

y poseen la siguiente propiedad universal: dado cualquier otro grupo P' junto con $d_{P'} \in \mathrm{Der}(P',A)$ y $\bar{\rho}' \in \mathrm{Hom}(P',Q)$ tales que $d_Q \bar{\rho}' = \rho\, d_{P'}$, entonces existe un único homomorfismo $h : P' \longrightarrow P$ tal que $d_P h = d_{P'}$ y $\bar{\rho} h = \bar{\rho}'$.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[drr, "\bar{\rho}'"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, "d_{P'}"'] & & \\
& P \arrow[r, "\bar{\rho}"] \arrow[d, "d_P"] & Q \arrow[d, "d_Q"] \\
& A \arrow[r, "\rho"] & B
\end{tikzcd}$$

3.16 Observación. Tiene sentido hablar de una derivación $d_P: P \longrightarrow A$, puesto que A adquiere estructura de P-módulo a través de $\bar{\rho}$, es decir, definimos la acción de P sobre A mediante $^{p}a = {}^{\bar{\rho}(p)}a$.

3.17 PROPOSICION. Dados A y B (Q-módulos) , $d_Q \in \mathrm{Der}(Q,A)$ y $\rho \in \mathrm{Hom}_Q(A,B)$ existe el producto fibrado mixto de A y Q sobre B .

Demostración. Sea $A \ltimes Q$ el producto semidirecto de A y Q y sea $P = \{(a,q) \in A \ltimes Q \mid \rho(a) = d_Q(q)\}$

Sean d_P y $\bar{\rho}$ las proyecciones canónicas; entonces $\bar{\rho}$ es un homomorfismo de grupos, pues

$$\begin{aligned}\bar{\rho}((a,q)(b,h)) = \bar{\rho}(a + {}^{q}b,\ qh) &= qh \\ &= \bar{\rho}(a,q)\,\bar{\rho}(b,h)\end{aligned}$$

Además, d_P es una derivación, pues

$$d_P((a,q)(b,h)) = d_P(a + {}^{q}b,\ qh) = a + {}^{q}b$$

y, por 3.16, tenemos que

$$a + {}^{q}b = d_P(a,q) + {}^{\bar\rho(a,q)}d_P(b,h)$$

Por último, es evidente que $\rho d_P = d_Q \bar\rho$ y P cumple con la propiedad universal de productos fibrados mixtos (de hecho, P resulta ser el producto fibrado desde el punto de vista de conjuntos).

///

3.18 PROPOSICION. Si P es el producto fibrado mixto de A y Q sobre B,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\bar\rho"] \arrow[d, "d_P"'] & Q \arrow[d, "d_Q"] \\ A \arrow[r, "\rho"] & B \end{tikzcd}$$

entonces $\ker\rho \doteq \ker\bar\rho$.

Demostración. Sea $K = \ker\rho$. Defínase $i : K \longrightarrow P$ mediante $i(a) = (a,1)$. Evidentemente i es un homomorfismo pues $i(a + b) = (a+b,1) = i(a)\, i(b)$. Además $\bar\rho i = 0$ Por otra parte, si $(a,q) \in \ker\bar\rho$, entonces $q = 1$ y

$$d_Q(1) = 0 = \rho(a)$$

por lo que $a \in K$, con lo que queda demostrado que $K = \ker\bar\rho$.

///

3.19 PROPOSICION. Sea $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de Q-módulos. Cada elemento $d_Q \in Der(Q,A'')$

induce, de manera única, un elemento de Opext(Q,A').

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \overset{\iota}{\dashrightarrow} & P & \overset{\bar{\rho}}{\dashrightarrow} & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \Big\downarrow{\scriptstyle d_P} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d_Q} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\rho} & A'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde P es el producto fibrado mixto sobre A" y $\bar{\rho}$ es suprayectiva (pues ρ es suprayectiva) . La identidad en A' se sigue de 3.18 y es evidente que el renglón superior es un elemento de Opext(Q,A') que, por la propiedad universal de P, está determinado de manera única.

///

Así pues, hemos establecido una función

$$\Omega: \mathrm{Der}(Q,A'') \longrightarrow \mathrm{Opext}(Q,A') .$$

CAPITULO II

$H^n(Q,A)$

II.1 Módulos cruzados.

Nuestro siguiente paso será generalizar la interpretación de $H^2(Q,A)$ dada en el capítulo anterior, al caso $H^n(Q,A)$, para cualquier entero positivo n. Comenzaremos definiendo los "módulos cruzados", introducidos por Whitehead en su estudio de los grupos de homotopía ([W]).

1.1 DEFINICION. Sean G y C grupos y sea $\varphi: G \to Aut(C)$ una acción de G sobre C denotada ${}^{g}c$ (es decir ${}^{g}c = \varphi(g)(c)$). Supongamos que existe un homomorfismo $\partial: C \to G$ que satisface

i) ${}^{\partial(c)}b = cbc^{-1}$ $(c,b \in C)$.

ii) $\partial({}^{g}c) = g(\partial(c))g^{-1}$ $(c \in C, g \in G)$.

Diremos entonces que el grupo C (junto con la acción φ y el homomorfismo ∂) es un <u>G-módulo cruzado</u>, que denotaremos (C,G,∂) .

Con respecto a la definición 1.1 , algunas observaciones son pertinentes:

1) Por definición, que G actúe sobre C (o, lo que es lo mismo, que C admita a G como grupo de operadores) , significa que existe un homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(C)$. Pero ésto, a su vez, equivale a pedir que

(M1) $\quad {}^{g}({}^{g'}c) = {}^{(gg')}c$

(M2) $\quad {}^{1}c = c$

(M3) $\quad {}^{g}(c + b) = {}^{g}c + {}^{g}b$

(ó ${}^{g}(cb) = {}^{g}c\ {}^{g}b$ en el caso que C sea multiplicativo).

($g,g' \in G.\ c,b \in C$). (M1) expresa el hecho de que φ es un homomorfismo, mientras que (M2) y (M3) expresan que $\varphi(g) \in \mathrm{Aut}(C)$.

2) La condición (ii) de la Definición 1.1 significa que ∂ es un homomorfismo de G-grupos, con G actuando sobre sí mismo por conjugación.

3) A diferencia de un G-módulo, un G-módulo cruzado C no necesariamente es abeliano.

A continuación, damos tres ejemplos de módulos cruzados; los dos primeros muestran como el concepto de módulo cruzado resulta ser una generalización de los conceptos de módulo y subgrupo normal.

1.2 Ejemplo. Sea G un grupo. Todo subgrupo normal N de G es un G-módulo cruzado, con G actuando sobre N por conjugación y con ∂ como la inclusión. Es decir, la acción $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(N)$ está dada por: ${}^{g}n = gng^{-1}$
de tal manera que

$$\text{i)}\quad {}^{\partial(n)}n' = {}^{n}n' = nn'n^{-1}$$

$$\text{ii)}\quad \partial({}^{g}n) = {}^{g}n = gng^{-1} = g(\partial(n))g^{-1}$$

como se pide en 1.1 .

1.3 Ejemplo. Todo G-módulo es un G-módulo cruzado a través del homomorfismo trivial $\partial = 1_G$. La comprobación de esto es sencilla: si A es un G-módulo cualquiera y denotamos a la acción de G sobre A como en 1.1, entonces

$$\text{i)}\quad {}^{\partial(a)}a' = {}^{1}a' = a + a' - a \qquad \text{(pues A es abeliano).}$$

y

$$\text{ii)}\quad \partial({}^{g}a) = 1 = gg^{-1} = g(\partial(a))g^{-1}$$

y, por lo tanto, $(A,G,1_G)$ constituye un módulo cruzado.

1.4 Ejemplo. Sea C un grupo y sea $G = \mathrm{Aut}(C)$. Definamos la acción $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(C)$ mediante

$$\varphi(\gamma)(c) = {}^{\gamma}c = \gamma(c) \qquad \gamma \in G,\ c \in C .$$

Por otra parte, sea $\partial : C \longrightarrow G = \mathrm{Aut}(C)$ el homomorfismo dado por

$$\partial(c) = \partial_c \qquad \text{donde} \qquad \partial_c(c') = cc'c^{-1} .$$

Entonces

$$\text{i)} \quad {}^{\partial(c)}c' = \partial_c(c') = cc'c^{-1}$$

Además,

$$\partial({}^{\gamma}c) = \partial(\gamma(c)) = \partial_{\gamma(c)}$$

pero

$$\begin{aligned}
\partial_{\gamma(c)}(c') &= \gamma(c)\ c'\ (\gamma(c))^{-1} \\
&= \gamma(c)\ c'\ \gamma(c^{-1}) \\
&= \gamma(c)\ \gamma\gamma^{-1}(c')\ \gamma(c^{-1}) \\
&= \gamma(c\ \gamma^{-1}(c')\ c^{-1}) \\
&= \gamma(\partial_c(\ \gamma^{-1}(c'))) \\
&= (\gamma\,\partial_c\,\gamma^{-1})\ (c') \\
&= (\gamma\,\partial(c)\gamma^{-1})\ (c') .
\end{aligned}$$

Luego

$$\partial({}^{\gamma}c) = \gamma\,\partial(c)\gamma^{-1} .$$

Por lo tanto, $(C, \mathrm{Aut}(C), \partial)$ es un módulo cruzado.

De la definición de módulo cruzado se desprenden las siguientes propiedades:

1.5 PROPOSICION. *Si* (C,G,∂) *es un módulo cruzado, entonces*

i) *C es un subgrupo normal de G.*

ii) ker $\subseteq Z(C)$ *(Z(C) representa al centro de C).*

iii) *La acción de G en C induce una estructura natural de Q-módulo sobre Z(C), donde* $Q = G/\partial C$. *Además,* $\ker\partial$ *es un submódulo de Z(C) .*

iv) *La acción de G sobre C induce una estructura natural de Q-módulo* $(Q = G/\partial C)$ *sobre el grupo factor conmutador* $C^{ab} = C/[C,C]$.

Demostración. Sean $g \in G$ y $c \in C$. Por la definición de módulo cruzado, tenemos que

$$g(\partial(c))g^{-1} = \partial({}^{g}c)$$

por lo tanto

$$g(\partial(c))g^{-1} \in \partial C \ .$$

De manera que ∂C es normal en G, como se establece en (i). Para demostrar que $\ker\partial \subseteq Z(C)$, sea $a \in \ker\partial$. Entonces, por 1.1.(i),

$$aca^{-1} = c \qquad \text{para toda } c \in C.$$

Luego $a \in Z(C)$.

Para demostrar (iii), consideremos la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow C \xrightarrow{\partial} G \xrightarrow{\rho} Q \longrightarrow 1$$

donde $A = \ker\partial$. Definamos la acción de Q sobre $Z(C)$ a través de la acción de G sobre C, es decir, si $q \in Q$ y $b \in Z(C)$, entonces

$$^{q}b = {}^{s(q)}b$$

(s es una sección cualquiera de ρ). Como , para toda $b \in Z(C)$, se cumple que

$$^{\partial(c)}b = cbc^{-1} = b \qquad (c \in C)$$

entonces los elementos de ∂C operan trivialmente sobre $Z(C)$, lo cual implica que la acción de Q sobre $Z(C)$ antes definida no depende de la sección s.

Por otra parte, $A \subseteq Z(C)$ (por (i)), además, si $a \in A$, entonces

$$\partial({}^{s(q)}a) = s(q)\partial(a)\, s(q)^{-1}$$

$$= s(q)s(q)^{-1} = 1 \quad .$$

De manera que $^{q}a \in \ker\partial = A$ y , por lo tanto, A es un submódulo de $Z(C)$.

Por último, para demostrar (iv), sea $h : C \longrightarrow C^{ab}$ la proyección natural

$$h(c) = c[C,C]$$

y consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow [C,C] \longrightarrow C \xrightarrow{h} C^{ab} \longrightarrow 1$$

Definamos entonces la acción de Q sobre C^{ab} mediante

$$ {}^{q}(\hbar(a)) = \hbar({}^{s(q)}a) $$

Es evidente que la función $\varphi_q: C^{ab} \to C^{ab}$ dada por

$$ \varphi_q(\hbar(a)) = {}^{q}(\hbar(a)) $$

es un homomorfismo, pues

$$ \begin{aligned} {}^{q}(\hbar(a)\hbar(b)) &= {}^{q}(\hbar(ab)) \\ &= \hbar({}^{s(q)}ab) \\ &= \hbar({}^{s(q)}a\ {}^{s(q)}b) \\ &= \hbar({}^{s(q)}a)\,\hbar({}^{s(q)}b) \\ &= {}^{q}(\hbar(a))\,{}^{q}(\hbar(b)) \end{aligned} $$

Además, como s está normalizada, ${}^{1}(\hbar(a)) = \hbar(a)$. Por último,

$$ \begin{aligned} {}^{q}({}^{q'}\hbar(a)) &= {}^{q}(\hbar({}^{s(q')}a)) \\ &= \hbar({}^{s(q)}({}^{s(q')}a)) \\ &= {}^{(qq')}(\hbar(a)) \end{aligned} $$

con lo que queda demostrado que C^{ab} es un Q-módulo y que φ es un homomorfismo de Q-módulos.

///

1.6 DEFINICION. Un <u>morfismo</u> $(\alpha,\beta): (C,G,\partial) \longrightarrow (C',G',\partial')$ <u>de módulos cruzados</u> consiste de una pareja de homomorfismos de grupos α, β que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[d, "\beta"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"] & G' \end{tikzcd}$$

y preservan la estructura de módulo cruzado, es decir que

$$\alpha({}^{g}c) = {}^{\beta(g)}\alpha(c) .$$

1.7 PROPOSICION. <u>La clase cuyos objetos son módulos cruzados junto con los morfismos de módulos cruzados y la regla de composición</u>

$$(\alpha,\beta)(\sigma,\gamma) = (\alpha\sigma,\beta\gamma)$$

<u>constituyen una categoría que denotaremos XMod .</u>

Demostración. Evidentemente la composición es cerrada, pues

$$\begin{aligned} \alpha\sigma({}^{g}c) &= \alpha({}^{\gamma(g)}\sigma(c)) \\ &= {}^{\beta\gamma(g)}\alpha\sigma(c) . \end{aligned}$$

La asociatividad se sigue de la asociatividad de la composición de homomorfismos de grupos. Asimismo, es inmediato verificar que (id_C, id_G) es el morfismo identidad.

///

1.8 DEFINICION. Sea G_0 un grupo dado. Un <u>morfismo de</u> G_0<u>-módulos cruzados</u> es un morfismo (α, id_{G_0}) de módulos cruzados.

Dicho de otra manera, un morfismo de G_0-módulos cruzados es simplemente un homomorfismo de grupos α que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"'] & G_0 \arrow[d, equal] \\ C' \arrow[r, "\partial'"] & G_0 \end{tikzcd}$$

y preserva la estructura de G_0-módulo cruzado.

De la misma manera que en 1.7, obtenemos el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata:

<u>1.9 PROPOSICION.</u> <u>Dado un grupo</u> G_0 , <u>la clase de los</u> G_0<u>-módulos cruzados</u> (C,G_0,∂) <u>junto con los morfismos de</u> G_0<u>-módulos cruzados constituyen una subcategoría plena de XMod que denotaremos</u> G_0-XMod .

II.2 Extensiones cruzadas

Ahora generalizaremos la noción de módulo cruzado a la de "n-extensión cruzada" :

2.1 DEFINICION. Sea Q un grupo y A un Q-módulo. Una <u>n-extensión cruzada de A por Q</u> $(n \geqslant 1)$ es una sucesión exacta de grupos

$$(G,\partial):\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\gamma} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

con las siguientes propiedades:

E1) (C_1, G, ∂_1) es un módulo cruzado.

E2) Para toda k $(1 < k < n)$, C_k es un Q-módulo y ∂_k y γ son Q-homomorfismos.

Es importante observar que la definición I.2.1 coincide con la definición de n-extensión cruzada para el caso particular $n = 1$. Además,

2.2 Observación. A pesar de que C_2 tiene estructura de Q-módulo y C_1 tiene estructura de G-módulo cruzado, tiene sentido pedir que ∂_2 sea Q-lineal, pues $\operatorname{im}(\partial_2) = \ker(\partial_1)$ y $\ker(\partial_1)$ tiene estructura de Q-módulo, según se vió en 1.5 .

2.3 Observación. Otras consecuencias de 2.1 son:

i) C_k es abeliano $(k > 1)$, por el hecho de ser Q-módulo; en cambio, ¡ C_1 no necesariamente es abeliano!

ii) Como $\operatorname{im}(\partial_2) = \ker(\partial_1)$, entonces $\partial_2 C_2 \subseteq Z(C_1)$ ($Z(C_1)$ denota al centro de C_1).

2.4 DEFINICION. Un <u>morfismo</u> (σ,α,φ): (G,∂) $\quad$ (G',∂') <u>de n-extensiones cruzadas</u> consiste de homomorfismos de grupos

$$\varphi : Q \longrightarrow Q'$$

$$\alpha_0 : G \longrightarrow G'$$

$$\alpha_k : C_k \longrightarrow C'_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

$$\sigma : A \longrightarrow A'$$

que hacen conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G,\partial): 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\
(G',\partial'): 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

y, además, preservan las estructuras, es decir que (α_1,α_0) es un morfismo de módulos cruzados y

$$\alpha_k({}^q c) = {}^{\varphi(q)}\alpha_k(c) \qquad (1 < k < n)$$

$$\sigma({}^q a) = {}^{\varphi(q)}\sigma(a) \qquad (q \in Q,\ a \in A).$$

2.5 Observación. G actúa sobre C'_1 a través de α_0 , es decir que podemos definir la acción de G sobre C'_1 mediante

$${}^g x = {}^{\alpha_0(g)}x \quad .$$

De la misma manera, a través de φ , A' y C'_k $(1 < k < n)$ adquieren estructura de Q-módulo.

2.6 Notación. A la clase de todas las n-extensiones cruzadas de A por Q la denotaremos $Xext^n(Q,A)$.

2.7 DEFINICION. Un <u>morfismo de n-extensiones cruzadas de A por Q</u> (es decir, un morfismo en $Xext^n(Q,A)$), es un morfismo (σ,α,φ) de n-extensiones cruzadas donde

$$\sigma = id_A \qquad y \qquad \varphi = id_Q \quad .$$

A continuación, veamos algunos ejemplos de n-extensiones cruzadas.

2.8 Ejemplo. Sea Q un grupo y A un Q-módulo. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{id_A} A \longrightarrow Q \xrightarrow{id_Q} Q \longrightarrow 1$$

donde $\partial = 0$ es el homomorfismo trivial y (A,Q,∂) es un módulo cruzado (como se vió en 1.3), constituye un elemento de $Xext^2(Q,A)$. En general, para cualquier $n > 1$, tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow A = A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Q = Q \longrightarrow 1$$

que evidentemente es un elemento de $Xext^n(Q,A)$.

2.9 Ejemplo. Dado un grupo K cualquiera, vimos en II.1.4 que $(K,Aut(K),\partial)$ es un módulo cruzado, donde $\partial : K \longrightarrow Aut(K)$ le asocia a cada elemento k de K el automorfismo interior de K ∂_k ($\partial_k(k') = kk'k^{-1}$).

Considérese la sucesión

$$(Aut(K),\partial):\ 0 \longrightarrow Z(K) \xrightarrow{\iota} K \xrightarrow{\partial} Aut(K) \xrightarrow{\gamma} Out(K) \longrightarrow 1$$

donde $Out(K) = Aut(K)/In(K)$ ($In(K)$ es el subgrupo de automorfismos interiores de K). Es evidente que esta sucesión es exacta, pues

$$im\,\partial = In(K) = ker\,\gamma$$

además, $im\,\iota \subseteq ker\,\partial$ puesto que, si $k \in im\,\iota$, entonces

$$\partial(k) = \partial_k$$

y

$$\partial_k(k') = kk'k^{-1} = k'$$

ya que $k \in Z(K)$, de manera que

$$\partial_k = id_K \in Aut(K).$$

Inversamente, si $k \in ker\,\partial$, entonces

$$\partial(k) = \partial_k = id_K \in Aut(K)$$

por lo tanto $\partial_k(k') = kk'k^{-1} = k$

para toda $k \in K$, es decir que $kk' = k'k$, lo cual implica que $k \in Z(K)$. Queda sólo verificar que $Z(K)$ es un Q-módulo ($Q = Out(K)$), pero esto se cumple en virtud de 1.5.(iii) , de manera que queda demostrado que $(Aut(K),\partial)$ es un elemento de $Xext^2(Out(K),Z(K))$. ///

II.3 Módulos cruzados libres y proyectivos.

Denotemos por Grp(2) a la categoría cuyos objetos son homomorfismos de grupos y cuyos morfismos son cuadrados conmutativos en la categoría de grupos. El funtor "olvidadizo" $V: XMod \to Grp(2)$ es aquél que, al módulo cruzado (C,G,∂) le asocia el homomorfismo de grupos $\partial: C \to G$, es decir, V "olvida" la acción de G sobre C.

3.1 PROPOSICION. Cada homomorfismo de grupos $\lambda: H \to G$ ($\lambda \in Grp(2)$) induce un módulo cruzado (D,G,∂) definido así:

i) D es el grupo generado por los elementos del conjunto $H \times G$ sujetos a las siguientes relaciones:

$$(h,g)(h',g) = (hh',g)$$
$$(h,g)(h',g')(h,g)^{-1} = (h', g(\lambda h)g^{-1}g')$$

ii) ∂ es el homomorfismo de grupos definido mediante

$$\partial(h,g) = g(\lambda h)g^{-1}$$

iii) La acción de G sobre D está dada por

$$^{g}(h,g') = (h,gg')$$

$(h,h' \in H;\ g,g' \in G)$.

Demostración. Sea $F[H \times G]$ el grupo libre generado por los elementos (h,g) $(h \in H, g \in G)$, y sea $\overline{W}$ la cerradura normal del conjunto de relatores $W = \{r_1,r_2\}$ donde

$$r_1 = (h,g)(h',g)(hh',g)^{-1}$$
$$r_2 = (h,g)h',g')(h,g)^{-1}(h',\ g(\lambda h)g^{-1}g')^{-1}$$

entonces, por (i), tenemos que $D = F[H \times G] / \overline{W}$ .Además, si $h,h' \in H$ y $g,g' \in G$,

$$\begin{aligned} \partial(h,g)_{(h',g')} &= {}^{g(\lambda h)g^{-1}}(h',g') \\ &= (h',\ g(\lambda h)g^{-1}g') \\ &= (h,g)(h',g')(h,g)^{-1} \qquad \text{(pues } r_1 = 1 \text{ en D).} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \partial({}^{g}(h,g')) &= \partial(h,gg') \\ &= gg'(\lambda h)(gg')^{-1} \qquad \text{(por (ii)).} \\ &= g(\partial(h,g'))g^{-1} \end{aligned}$$

con lo que quedan demostradas las condiciones (i) y (ii) de la definición de módulo cruzado (ver 1.1).Sólo falta verificar que la acción está bien definida; evidentemente ${}^{1}(h,g) = (h,g)$ y además

$${}^{gg'}(h,g'') = (h,gg'g'') = {}^{g}({}^{g'}(h,g'')) .$$

Por último,

$$\begin{aligned} {}^{g''}((h,g)(h',g')(h,g)^{-1}) &= {}^{g''}(h',\ g(\lambda h)g^{-1}g') \\ &= (H',\ g''\, g(\lambda h)g^{-1}(g'')^{-1}g''\, g') \\ &= (h,g''\, g)(h',g''\, g')(h,g''\, g)^{-1} \\ &= {}^{g''}(h,g)\ {}^{g''}(h',g')\ {}^{g''}(h,g)^{-1} \end{aligned}$$

y del mismo modo tenemos que

$$\begin{aligned} {}^{g'}((h,g)(h',g)) &= (hh',gg') \\ &= {}^{g}(h,g')^{g}(h',g'). \end{aligned}$$

///

3.2 COROLARIO. Dado un homomorfismo de grupos $\lambda: H \to G$ y el correspondiente módulo cruzado inducido (D,G,∂), existe un morfismo $(v,\lambda): (H,H,id_H) \to (D,G,\partial)$ de módulos cruzados.

Demostración. Consideremos al grupo H como H-módulo cruzado a través de la acción por conjugación (véase ejemplo 1.2). Si $v: H \to D$ es la inclusión $v(h) = (h,1)$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "id_H"] \arrow[d, "v"'] & H \arrow[d, "\lambda"] \\ D \arrow[r, "\partial"] & G \end{tikzcd}$$

conmuta, dado que $\partial v(h) = \partial(h,1) = \lambda(h)$. Por otra parte, como $r_1 = 1$ (véase 3.1), entonces

$$(h,1)^{-1} = (h^{-1},1) .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v({}^{h}h') &= v(hh'h^{-1}) \\ &= (h,1)(h',1)(h,1)^{-1} \\ &= {}^{\lambda(h)}v(h') \qquad \text{(aplicando que } r_2 = 1\text{).} \end{aligned}$$

En conclusión, (v,λ) cumple con las condiciones de 1.6 .

///

Si denotamos por $U: Grp(2) \rightarrow XMod$ a la función que a cada homomorfismo $\lambda: H \longrightarrow G$ le asocia el módulo cruzado inducido (D,G,∂), tenemos que

<u>3.3 PROPOSICION.</u> $U: Grp(2) \rightarrow XMod$ <u>es un funtor y es adjunto izquierdo del funtor olvidadizo</u> $V: XMod \rightarrow Grp(2)$.

Demostración. Sea (α,β) un morfismo en $Grp(2)$. Tenemos entonces el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\lambda} & G \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ H' & \xrightarrow{\lambda'} & G' \end{array} \qquad \text{donde} \quad \lambda, \lambda' \in Grp(2).$$

Si $U(\lambda) = (C,G,\partial)$ y $U(\lambda') = (C',G',\partial')$, entonces , por 3.2 ,

$$\begin{array}{ccc} H & = & H \\ v \downarrow & & \downarrow \lambda \\ C & \xrightarrow{\partial} & G \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} H' & = & H' \\ v' \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ C' & \xrightarrow{\partial'} & G' \end{array}$$

son cuadrados conmutativos donde (v,λ) y (v',λ') son morfismos en XMod. Definimos $U((\alpha,\beta)) = (\alpha\times\beta,\beta): U(\lambda) \longrightarrow U(\lambda')$. Evidentemente $U((\alpha,\beta))$ es un morfismo en XMod, pues , si $(h,g) \in C$, entonces

$$\begin{aligned} \beta\partial(h,g) &= \beta(g(\lambda h)g^{-1}) \\ &= \beta(g)\ \beta(\lambda h)\ \beta(g)^{-1} \\ &= \beta(g)\ \lambda'\alpha(h)\ \beta(g)^{-1} \\ &= \partial'(\alpha(h), \beta(g)) \end{aligned}$$

$$= (\partial'(\alpha\times\beta))\ (h,g)\ .$$

Entonces, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\partial} & G \\ {\scriptstyle \alpha\times\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ C' & \xrightarrow{\partial'} & G' \end{array}$$

donde, además

$$\begin{aligned}(\alpha\times\beta)({}^{g'}(h,g)\ ) &= (\alpha\times\beta)(h,g'g) \\ &= (\,\alpha(h),\ \beta(g'g)\ ) \\ &= {}^{\beta(g')}(\alpha\times\beta)(h,g)\ .\end{aligned}$$

Finalmente, resulta inmediato que $U(id_{\lambda}) = id_{U(\lambda)}$, y , si (α',β') es un morfismo en XMod tal que la composición

$$(\alpha',\beta')(\alpha,\beta)$$

está bien definida, entonces

$$U((\alpha',\beta')(\alpha,\beta)) = U((\alpha',\beta'))\ U((\alpha,\beta))\ .$$

Verifiquemos ahora la adjunción: Sean $(C',G',\partial') \in$ XMod , $(\gamma,\rho) \in \mathrm{Hom}_{XMod}(\ U(\lambda)\ ,\ (C',G',\partial'))$, y

$$\eta : \mathrm{Hom}_{XMod}(U(\lambda),(C',G',\partial')) \rightarrow \mathrm{Hom}_{Grp(2)}(\ \lambda,\ V(C',G',\partial'))$$

la función definida mediante $\eta((\gamma,\rho)) = (\gamma\upsilon,\rho)$.

$$\begin{array}{ccc} H & = & H \\ {\scriptstyle \upsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ C & \longrightarrow & G \\ {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ C' & \xrightarrow{\partial'} & G' \end{array} \quad \overset{\eta}{\frown} \quad \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & G \\ {\scriptstyle \gamma\upsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ C' & \longrightarrow & G' \end{array}$$

Inversamente, dado un morfismo $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Hom}_{Grp(2)}(\lambda, V(C',G',\partial'))$, definimos una función

$$\eta' : \mathrm{Hom}_{Grp(2)}(\lambda, V(C',G',\partial')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{XMod}(U(\lambda),(C',G',\partial'))$$

mediante $\qquad \eta'((\alpha,\beta)) = (\Upsilon,\beta)$

donde $\Upsilon : C \longrightarrow C'$ está dado por

$$\Upsilon(h,g) = {}^{\beta(g)}\alpha(h) \quad .$$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[d, "\beta"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"] & G' \end{tikzcd} \qquad \xrightarrow{\ \eta'\ } \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, equal] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Upsilon"'] & G \arrow[d, "\beta"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"] & G' \end{tikzcd}$$

Como
$$\begin{aligned} \partial'\Upsilon(h,g) &= \partial'({}^{\beta(g)}\alpha(h)) \\ &= \beta(g)\,\partial'\alpha(h)\,\beta(g)^{-1} \\ &= \beta(\, g\,(\lambda h\,)\, g^{-1}) \quad = \beta\partial(h,g) \end{aligned}$$

y, además
$$\begin{aligned} \Upsilon({}^{g'}(h,g)\,) &= \Upsilon(h,\, g'g) \\ &= {}^{\beta(g')\beta(g)}\alpha(h) \;=\; {}^{\beta(g')}(\Upsilon(h,g)) \end{aligned}$$

entonces (Υ,β) es un morfismo en XMod.

Finalmente, η' es inversa de η, ya que

$$(\eta'\eta)(\gamma,\rho) = \eta'((\gamma\upsilon,\rho)) = (\Upsilon,\rho) \quad .$$

Pero, en este caso, $\Upsilon = \gamma'$, dado que

$$\Upsilon(h,g) = {}^{\rho(g)}\gamma\upsilon(h) = \gamma({}^{g}(h,1)) = \gamma'(h,g) \quad .$$

Similarmente, $(\eta\eta')(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)$, con lo que queda demostrado que η es una biyección. La naturalidad de η es también inmediata.

///

3.4 DEFINICION. Si $(C,G,\partial) \in$ XMod y $\{c_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de elementos de C con índices en I, entonces diremos que C es un <u>módulo cruzado libre con base</u> $\{c_i\}$ si, dado cualquier otro módulo cruzado (C',G',∂') junto con un conjunto $\{c_i'\}_{i\in I}$ de elementos de C' y un homomorfismo $\beta: G \to G'$ tal que $\beta(\partial(c_i)) = \partial'(c_i')$ existe un único homomorfismo $\alpha: C \to C'$ tal que $\alpha(c_i) = c_i'$ y (α,β) es un morfismo en XMod.

$$\begin{array}{ccc} \{c_i\} & \qquad & C \xrightarrow{\partial} G \\ \downarrow & & \alpha \downarrow \qquad \downarrow \beta \\ \{c_i'\} & & C' \xrightarrow{\partial'} G' \end{array}$$

<u>3.5 PROPOSICION.</u> <u>Si</u> $(\lambda: H \to G) \in$ Grp(2) <u>y H es un grupo libre sobre un conjunto</u> S, <u>entonces</u> $U(\lambda) = (C,G,\partial)$ <u>es precisamente un módulo cruzado libre con base el conjunto</u> $\nu(S)$.

Demostración. Sea H un grupo libre sobre un conjunto de generadores $S = \{s_i\}_{i\in I}$, y sea $g_i = \lambda(s_i)$. Si $U(\lambda) = (C,G,\partial)$, entonces sea

$$\nu(s_i) = (s_i,1) = c_i$$

de manera que todo elemento de C es un producto de elementos de la forma

$$(s_{i_k},\, g_k) = {}^{(g_k)}c_{i_k} \qquad\qquad (\,[W]\,)\,.$$

Si $(C',G',\partial') \in \mathrm{XMod}$, $\{c_i'\}_{i \in I}$ es un conjunto de elementos de C' y $\beta\colon G \to G'$ es un homomorfismo de grupos tal que

$$\beta(\partial(c_i)) = \partial'(c_i')$$

definamos la función $\alpha\colon C \to C'$ a través de los generadores c_i . Es decir

$$\alpha({}^{g}c_i) = {}^{\beta(g)}c_i'$$

$$\begin{tikzcd}
s_i \arrow[d, mapsto] & & H \arrow[r, equal] \arrow[d, "\nu"'] & H \arrow[d, "\lambda"] & \{s_i\} \arrow[l, tail] \\
c_i \arrow[d, mapsto] & U(\lambda) = & (C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"'] & G) \arrow[d, "\beta"] & \{g_i\} \arrow[l] \\
c_i' & & C' \arrow[r, "\partial'"] & G' &
\end{tikzcd}$$

Veamos que α es homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\alpha((s_i,g)(s_j,g')(s_i,g)^{-1}) &= \alpha((s_j,\, g(\lambda s_i)g^{-1}g')) \\
&= \alpha(\,{}^{g(\lambda s_i)g^{-1}g'}(s_j,1)\,) \\
&= \alpha(\,{}^{gg_ig^{-1}g'}c_j\,) \\
&= {}^{\beta(gg_ig^{-1}g')}c_j' \quad .
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\alpha(s_i,g)\alpha(s_j,g')\alpha(s_i,g)^{-1} = \alpha({}^{g}c_i)\alpha({}^{g'}c_j)\alpha({}^{g}c_i)^{-1}$$

$$= \partial'({}^{\beta(g)}c_i')({}^{\beta(g')}c_j').$$

Pero $\partial'(c_i') = \rho\partial(c_i) = \beta(g_i)$ (por la conmutatividad de los diagramas), de manera que el producto anterior es igual a

$$= {}^{\beta(g)\beta(g_i)\beta(g)^{-1}\beta(g')}(c_j')$$

$$= {}^{\beta(gg_ig^{-1}g')}c_j' \quad .$$

Por lo tanto

$$\alpha((s_i,g)(s_j,g')(s_i,g)^{-1}) = \alpha(s_i,g)\alpha(s_j,g')\alpha(s_i,g)^{-1} .$$

De la misma forma se comprueba que

$$\alpha((s_i,g)(s_j,g)) = \alpha(s_i,g)\alpha(s_j,g) \quad .$$

Además, $\alpha(c_i) = c_i'$ de modo que

$$\alpha({}^{g}c_i) = {}^{\beta(g)}c_i' = {}^{\beta(g)}\alpha(c_i)$$

con lo que queda demostrado que (α,β) es un morfismo en XMod. (la conmutatividad es inmediata). Finalmente, α está determinado de manera única por la condición

$$\alpha(c_i) = c_i' \quad .$$

///

3.6 Observación. Al módulo cruzado $U(\lambda) = (C,G,\partial)$ se le llama <u>módulo cruzado libre sobre λ</u> ([B-H,p.207]).Como indica la proposición anterior, si H es un grupo libre, $U(\lambda)$ coincide con la definición de módulo cruzado libre dada por Whitehead ([W]) y cuya construcción está dada en 3.1 .

3.7 LEMA. Si C es un G-módulo cruzado libre con base $S = \{c_i\}_{i \in I}$, y $Q = G/\partial C$, entonces C^{ab} es un Q-módulo libre sobre los elementos $c_i[C,C]$.

Demostración. C^{ab} es un Q-módulo (por 1.5(iv)), de manera que sólo falta verificar que es libre . Sea C un G-módulo cruzado libre con base S y sea $\hbar : C \to C^{ab}$ la proyección natural. Consideremos el conjunto $S' = \hbar(S) = \{\hbar(c_i)\}$ junto con la inclusión $j : S' \longrightarrow C^{ab}$. Sea K un Q-módulo y $f : S' \longrightarrow K$ una función. C^{ab} es un Q-módulo libre sobre S' si existe un homomorfismo único $\phi : C^{ab} \longrightarrow K$ que haga conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & C^{ab} \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Como K es un Q-módulo cruzado (en virtud de 1.3), y como $\rho\partial(c_i) = 0$, entonces, aplicando 3.4

$$\begin{tikzcd} \{c_i\} \arrow[r, tail] & C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed] & G \arrow[d, "\rho"] \\ \{f(c_i)\} \arrow[r, tail] & K \arrow[r, "\alpha_K"] & Q \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo único $\alpha : C \to K$ tal que $\alpha(c_i) = f(c_i)$

y, como h es suprayectivo, definimos el homomorfismo $\phi : C^{ab} \to K$ mediante

$$\phi(c_i[C,C]) = \phi(h(c_i)) = \alpha(c_i).$$

Es evidente que ϕ es el homomorfismo buscado, de manera que C^{ab} es un Q-módulo libre sobre el conjunto S' .

///

Supongamos ahora que (X;R) es una presentación del grupo Q. Sea N_0 el grupo libre sobre el conjunto R' , cuyos elementos están en correspondencia uno a uno con los elementos $r \in R$ ($r \mapsto r'$) y sea $\lambda : N_0 \to F$ el morfismo inducido por los relatores, donde F es libre sobre X; denotemos, además, a la cerradura normal de R en F por N.

3.8 PROPOSICION. Cualquier presentación (X;R) de un grupo Q determina un módulo cruzado (C,F,∂) que es único (salvo isomorfismo), donde F es (como grupo) libre sobre X y C es el F-módulo cruzado libre con base R.

Además

i) Si F tiene al menos dos generadores libres, entonces $Z(C) = \ker\partial$.

ii) Los elementos $r'[C,C]$ constituyen una Q-base de C^{ab} ,

iii) El morfismo inducido $\ker\partial \to C^{ab}$ es inyectivo y la sucesión $0 \to \ker\partial \to C^{ab} \to N^{ab} \to 0$ es una presentación Q-libre de N^{ab}.

Demostración. Sea $(X:R)$ una presentación del grupo Q, $F[X] = F$ el grupo libre sobre X y N la cerradura normal de R $(R \subseteq F)$. Sea N_0 el grupo libre sobre el conjunto R' (R' es el conjunto de símbolos r_i' que están en correspondencia biyectiva con los elementos de R). Por las propiedades de grupos libres, dada la función $f: R' \longrightarrow N_0$ (inclusión) y la función $g: R' \longrightarrow F$

$$r_i' \mapsto r_i$$

existe un único homomorfismo $\lambda: N_0 \longrightarrow F$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, leftrightarrow] & R' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & N_0 \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & & F \end{tikzcd}$$

Y, por 3.5, λ determina un módulo cruzado libre (C,F,∂) con base R cuya construcción está dada en 3.1 .

Por otra parte, si F tiene más de un generador libre, entonces no puede ser abeliano, de donde se sigue (i).

(ii) es una consecuencia de 3.7 . Por último, como $\ker\partial$ es central en C, (y N es un grupo libre) entonces

$$(\ker\partial \times N) \cong C$$

Aplicamos ahora el funtor abelianizador $\mathrm{Abel}(\_) = \_/[\_,\_] = (\_)^{ab}$ a la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \ker\partial \longrightarrow C \longrightarrow N \longrightarrow 1$$

y obtenemos la presentación Q-libre de N^{ab}

$$1 \longrightarrow \ker\partial \longrightarrow C^{ab} \longrightarrow N^{ab} \longrightarrow 1 \quad .$$

///

Consideremos ahora un grupo fijo G. La noción de G-módulo cruzado libre se puede generalizar en G-XMod.

3.9 DEFINICION. Un G-módulo cruzado P se llama <u>proyectivo</u> si es un objeto proyectivo en la categoría G-XMod.

Es decir, P es un G-módulo cruzado proyectivo si , dados α y γ morfismos en G-XMod tales que γ es un epimorfismo, existe un morfismo ψ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} & & (P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dll, dashed, "\psi"'] & G) \arrow[d, equal] \\ (C' \arrow[r] & G) \arrow[r, "\gamma"] & (C'' \arrow[r] & G) \end{tikzcd}$$

3.10 Ejemplo. Así como un G-módulo cualquiera es un G-módulo cruzado (véase 1.3), así los G-módulos proyectivos son ejemplos de G-módulos cruzados proyectivos.

<u>3.11 LEMA.</u> <u>Si</u> (C,G,∂) <u>es un módulo cruzado libre, entonces es un módulo cruzado proyectivo en G-XMod.</u>

Demostración. Similar a la demostración de que todo G-módulo libre es proyectivo. ///

II.4 Complejos cruzados y resoluciones cruzadas libres.

4.1 DEFINICION. Un <u>complejo cruzado $\mathcal{C}$</u> (sobre un grupo G), es una sucesión de grupos

$$\mathcal{C}: \ldots \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} G$$

con las siguientes propiedades:

(C1) (C_1, G, ∂_1) es un módulo cruzado.

(C2) Para $k \geqslant 2$, si $Q = G/\partial_1 C$, entonces C_k es un Q-módulo y ∂_k un Q-homomorfismo.

(C3) $\partial\partial = 0$.

4.2 Observaciones.

i) Para $k = 2$, la condición (C2) tiene sentido, ya que, aunque C_1 no es un Q-módulo, $\partial_2(C_2) \subseteq \ker(\partial_1)$, por (C3) . A su vez, $\ker(\partial_1) \leq Z(C_1)$ (por 1.5(iii)), y $\ker(\partial_1)$ es un Q-módulo .

ii) Si $\partial_0 : G \to Q$ es la proyección natural, podemos definir una acción de G sobre C_k $(k \geqslant 2)$ mediante la regla $\quad {}^{g}x = {}^{\partial_0(g)}x \quad (x \in C_k)$.

4.3 DEFINICION. Un <u>complejo cruzado libre (proyectivo)</u> es un complejo cruzado que cumple (además de (C1),(C2) y (C3)) con las siguientes condiciones:

(P1) G es un grupo libre.

(P2) C_1 es un G-módulo cruzado libre

(P3) Para $k \geqslant 2$, cada C_k es un Q-módulo libre (proyectivo).

Nos interesa en particular el caso en que el grupo Q está dado de antemano y el complejo cruzado es exacto:

4.4 DEFINICION. Una <u>resolución cruzada de Q</u> es un complejo cruzado exacto $\mathcal{R}$ donde $Q = G/\partial C_1 = \operatorname{coker} \partial_1$.

4.5 DEFINICION. Una <u>resolución cruzada libre (proyectiva) de un grupo</u> Q es una resolución cruzada de Q donde el complejo cruzado $\mathcal{R}$ es libre (proyectivo).

4.6 DEFINICION. Un <u>morfismo</u> $\alpha: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ <u>de complejos cruzados</u> consiste de homomorfismos de grupos

$$\alpha_0: G \longrightarrow G'$$

$$\alpha_k: C_k \longrightarrow C'_k \qquad (k \geqslant 1)$$

que hacen conmutar al diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathcal{C}: & \cdots & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & G \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_k} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{k-1}} & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} \\
\mathcal{C}': & \cdots & \longrightarrow & C'_k & \longrightarrow & C'_{k-1} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & G'
\end{array}$$

y se preservan las estructuras, es decir que (α_1, α_0) es un morfismo de módulos cruzados y α_k $(k \geqslant 2)$ es un Q-homomorfismo.

4.7 Observación. Las n-extensiones cruzadas (y sus morfismos) son casos particulares de resoluciones cruzadas (y sus morfismos) para las cuales $C_k = 0$ si $k > n$.

4.8 Observación. Como C_k $(k \geqslant 2)$ es un Q-módulo, entonces es abeliano, por lo que lo escribiremos aditivamente. En cambio, C_1 no necesariamente es abeliano, y lo escribiremos multiplicativamente. Por otra parte, tiene sentido pedir que α_k $(k \geqslant 2)$ sea Q-homomorfismo, pues α_0 induce una estructura de Q-módulo en C'_k .

Los complejos cruzados aparecen en [B] con el nombre de "sistemas de grupos", mientras que Whitehead ([W]) denomina "sistemas de homotopía" a los complejos cruzados libres.

Una resolución libre de un módulo M es una sucesión exacta

$$\mathcal{L}: \ \cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M$$

donde cada módulo F_k es libre ([Ro,p.60]). La siguiente proposición es muy conocida:

<u>4.9 PROPOSICION.</u> <u>Sea</u> Q <u>un grupo y</u> M <u>un Q-módulo. Entonces existe una resolución libre (proyectiva) de</u> M.

Demostración. Dado que todo módulo es cociente de un módulo libre ([Ro. p.58]), tenemos la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 1$$

donde L_0 es un módulo libre. Pero M_0 es, a su vez, cociente de un módulo libre, por lo que debe existir un módulo libre L_1 y una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 1$$

Continuando este proceso, obtenemos por inducción una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} L_n \xrightarrow{\eta_n} M_{n-1} \longrightarrow 1$$

y, combinando estas sucesiones, obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} : \cdots \arrow[r] & L_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr, "\eta_3"'] & & L_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & & L_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & L_0 \arrow[r] & M \\
\cdots \arrow[ur] & & M_2 \arrow[ur, "\mu_2"'] \arrow[dr] & & M_1 \arrow[ur, "\mu_1"'] \arrow[dr] & & M_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\cdots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $d_0 = \eta_0$ y $d_n = \mu_{n-1}\eta_n$ $(n \geqslant 1)$.
Además,

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(d_{n+1}) &= \mathrm{im}(\mu_n \eta_{n+1}) \\ &= \ker(\partial_n) \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado que $\mathcal{L}$ es exacta y, por lo tanto, es una resolución libre (proyectiva) de M.

///

4.10 PROPOSICION. Todo grupo Q tiene una resolución cruzada libre (proyectiva) .

Demostración. Sea Q un grupo y sea (X:R) una presentación de Q. Por 3.8 sabemos que existe un módulo cruzado inducido (C_1,F,∂) libre sobre R. Tenemos entonces la siguiente sucesión exacta: $1 \longrightarrow \ker\partial \longrightarrow C_1 \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$.
Pero, por 1.5(iii) , $\ker\partial$ es un Q-módulo, por lo que, según se vió en 4.9, existe una resolución libre (proyectiva)de $\ker\partial$,

$$\mathcal{L} : \ldots \longrightarrow L_3 \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow \ker\partial$$

que, junto con la sucesión exacta anterior, induce una resolución cruzada libre (proyectiva) de Q

$$\mathcal{R} : \ldots \longrightarrow C_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_3 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow F \longrightarrow Q$$

donde $C_k = L_{k-2}$ $(k \geqslant 2)$ es un Q-módulo libre y C_1 es un F-módulo cruzado libre.

///

4.1 1 LEMA. <u>Dado el diagrama conmutativo de Q-módulos</u>

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\partial'"] & L \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "g"] & C'' \end{tikzcd}$$

con P un Q-módulo proyectivo, $\partial\partial' = 0$ y el renglón inferior exacto, existe un Q-homomorfismo $\varphi : P \to C$ que conmuta con el resto del diagrama.

Demostración. Por hipótesis sabemos que

$$g\alpha\partial' = \beta\partial\partial'$$

pero $\partial\partial' = 0$, por lo que entonces $g\alpha\partial' = 0$. Esto signi--fica que

$$\alpha\partial'(P) \subseteq \ker(C' \longrightarrow C'') = \mathrm{im}(C \longrightarrow C')$$

y tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\alpha\partial'"] & \\ C \arrow[r] & \mathrm{im}(g') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $h : C \longrightarrow \mathrm{im}(g')$ es un epimorfismo. Entonces, como P es proyectivo, existe un homomorfismo $\varphi : P \longrightarrow C$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ C \arrow[r] & C' \arrow[r] & C'' \end{tikzcd} .$$

///

4.12 PROPOSICION. Sea $\mathcal{C}$ un complejo cruzado libre (proyectivo) con $Q = \mathrm{coker}(\partial_1)$, y sea $\mathcal{R}$ una resolución cruzada de un grupo Q'. Cualquier homomorfismo de grupos $\varphi: Q \to Q'$ induce un morfismo $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{R}$ de complejos cruzados.

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathcal{C}: & \cdots \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\partial_0} & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
\mathcal{R}: & \cdots \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & C'_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Como F es libre (por 4.3), es proyectivo, de manera que existe un homomorfismo de grupos $\alpha_0: F \longrightarrow G'$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dashed, "\alpha_0"'] \arrow[d, "\varphi\partial_0"] & \\
G' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, como C_1 es un F-módulo cruzado libre, entonces, dado el homomorfismo α_0 , existe un homomorfismo α_1 tal que (α_1, α_0) es un morfismo de módulos cruzados (véase 3.4).

Por último, para $n \geqslant 2$, definiremos α_n inductivamente:

Supóngase que se tiene el diagrama conmutativo de Q-módulos siguiente

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-2} \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-2}} \\ C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & C'_{n-2} \end{array}$$

donde el renglón superior es semiexacto (por 4.3), el renglón inferior es exacto (por 4.4) y C_n es un Q-módulo libre (proyectivo). C'_n , C'_{n-1} y C'_{n-2} son Q-módulos a través de φ . Aplicando 4.11, obtenemos el Q-homomorfismo $\alpha_n: C_n \longrightarrow C'_n$ que hace conmutar al diagrama, completando así la demostración.

///

4.13 Notación. Si $\mathcal{R}$ es una resolución cruzada libre (proyectiva) de Q, denotaremos por $\mathcal{R}^n$ al complejo cruzado

$$\mathcal{R}^n: \; 0 \to J_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_1 \to F \to Q \to 1$$

obtenido a partir de $\mathcal{R}$, de manera que

i) $J_n = \ker(C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2})$

ii) $C_0 = F$ y $C_{-1} = Q$.

Nos referiremos a $\mathcal{R}^n$ como la <u>n-extensión cruzada libre (proyectiva)</u> .

4.14 Observaciones.

i) Dado un grupo Q , podemos construir la correspondiente n-extensión cruzada libre $\mathcal{R}^n$ para cualquier $n > 1$ (en virtud de 4.9).

ii) $\mathcal{R}^n \in Xext^n(Q,J_n)$.

iii) Según 4.13, para $n = 1$ tendríamos el complejo

$$\mathcal{R}^n:\ 0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

que no es elemento de $Xext(Q,J_1)$, pues J_1 no es un Q-módulo. Sin embargo, podemos reemplazar esa extensión por la extensión cruzada

$$0 \longrightarrow N^{ab} \longrightarrow F/[N,N] \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

($J_1 = N = \ker(F \to Q)$), generalizando así la definición 4.13 al caso $n = 1$.

<u>4.15 COROLARIO.</u> <u>Si</u> $(G',\partial) \in Xext(Q',A)$, <u>entonces el homomorfismo de grupos</u> $\varphi: Q \to Q'$ <u>induce un morfismo</u>

$$(\sigma,\alpha,\varphi):\ \mathcal{R}^n \longrightarrow (G',\partial)$$

<u>de n-extensiones cruzadas.</u>

Demostración. Como $\mathcal{R}^n$ es un caso particular de 4.5 y (G',∂) es un complejo cruzado, entonces basta aplicar 4.12 para obtener los morfismos inducidos α_k y σ.

///

II.5 Homotopía.

5.1 DEFINICION. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ dos complejos cruzados con $Q = \operatorname{coker}\partial_1$ y $Q' = \operatorname{coker}\partial_1'$ respectivamente. Sean $\alpha, \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ morfismos de complejos cruzados. La familia de funciones

$$\Sigma = \{ \Sigma_k \; ; \; k \geqslant 0 \}$$

donde $\Sigma_0 : G \longrightarrow C_1'$ y $\Sigma_k : C_k \longrightarrow C_{k+1}'$ $(k \geqslant 1)$

es una <u>homotopía entre α y β</u> (denotada $\Sigma : \alpha \simeq \beta$) si cumple que

(H1) $\Sigma_0 : G \longrightarrow C_1'$ es una derivación asociada a β_0 tal que

$$\partial_1' \Sigma_0(x) = \alpha_0(x)\, \beta_0(x)^{-1} \qquad (x \in G).$$

(H2) $\Sigma_1 : C_1 \longrightarrow C_2'$ es un G-homomorfismo tal que

$$\partial_2' \Sigma_1(x) = \beta_1(x)^{-1} (\Sigma_0 \partial_1(x))^{-1} \alpha_1(x) \qquad (x \in C_1).$$

(H3) Para $k \geqslant 2$, $\Sigma_k : C_k \longrightarrow C_{k+1}'$ es un Q-homomorfismo tal que

$$\partial_{k+1}' \Sigma_k + \Sigma_{k-1} \partial_k = \alpha_k - \beta_k \; .$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}: \cdots \arrow[r] & C_k \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\Sigma_k"'] \arrow[d, shift right, "\alpha_k"'] \arrow[d, shift left, "\beta_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\Sigma_{k-1}"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, shift right, "\alpha_1"'] \arrow[d, shift left, "\beta_1"] & G \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\Sigma_0"'] \arrow[d, shift right, "\alpha_0"'] \arrow[d, shift left, "\beta_0"] & Q \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 1 \\
\mathcal{C}': \cdots \arrow[r] & C'_k \arrow[r] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

5.2 Observaciones.

i) G actúa sobre C'_1 a través de β_0 y de la acción de G' sobre C'_1 (C'_1 es un G'-módulo cruzado), es decir que

$$ {}^{g}x = {}^{\beta_0(g)}x \qquad\qquad g \in G,\ x \in C'_1 .$$

Por lo tanto, Σ_0 es la derivación asociada a β_0 es decir,

$$\Sigma_0(xy) = \Sigma_0(x)\ (\,{}^{\beta_0(x)}\Sigma_0(y)\,)$$

(véase I.3.4).

ii) G actúa sobre C'_2 a través de α_0 , por lo que tiene sentido pedir que Σ_1 sea un G-homomorfismo. Hay que notar, además, que C'_1 es un grupo multiplicativo no necesariamente abeliano, por lo que los factores que aparecen en (H3) no necesariamente conmutan.

iii) Como $Q = G/\partial_1 C_1$, $Q' = G'/\partial'_1 C'_1$ y $\alpha_0 \partial_1 C_1 \subseteq \partial'_1 C'_1$ entonces $\alpha_0 : G \to G'$ induce un homomorfismo $\varphi : Q \to Q'$

definido mediante

$$\varphi(\partial_o(x)) = \partial_o'(\alpha_o(x)) .$$

A través de φ , C_k' adquiere estructura de Q-módulo, es decir que

$$^q x = {}^{\varphi(q)} x \qquad (q \in Q,\ x \in C_k') .$$

5.3 LEMA. La homotopía de complejos cruzados es una relación de equivalencia.

Demostración. Sean $\alpha, \beta, \gamma : C \to C'$ morfismos de complejos cruzados. Para demostrar que existe una homotopía $\Sigma : \alpha \simeq \alpha$ considérese la familia $\Sigma = \{ \Sigma_k ; k \geqslant 0 \}$ de funciones triviales

$$\Sigma_o = 1_G \quad , \qquad \Sigma_k = 0_{C_k} \quad (k \geqslant 1) .$$

Es inmediato que Σ cumple con (H1),(H2) y (H3) .

Supongamos ahora que existe una familia $\Sigma = \{ \Sigma_k : k \geqslant 0 \}$ tal que $\Sigma : \alpha \simeq \beta$. Consideremos entonces la familia

$$-\Sigma = \{ -\Sigma_k ; k \geqslant 0 \} .$$

Es evidente que $-\Sigma_o$ es una derivación, además, como

$$\partial_1' \Sigma_o(x) = \alpha_o(x)\, \beta_o(x)^{-1}$$

entonces,
$$\partial_1'(-\Sigma_o)(x) = \beta_o(x)\, \alpha_o(x)^{-1} .$$

Similarmente, a partir de la condición (H2) en Σ_1, obtenemos que $-\Sigma_1$ es un G-homomorfismo tal que

$$\partial_2'(-\Sigma_1)(x) = \alpha_1(x)^{-1}((-\Sigma_0)\,\partial_1(x))^{-1}\,\beta_1(x) \quad .$$

Por último, (H3) también se cumple para $-\Sigma$, pues por hipótesis

$$\partial_{k+1}'\Sigma_k + \Sigma_{k-1}\,\partial_k = \alpha_k - \beta_k$$

entonces

$$\partial_{k+1}(-\Sigma_k) + (-\Sigma_{k-1})\partial_k = \beta_k - \alpha_k \quad .$$

Finalmente, sólo queda demostrar que la relación de homotopía es transitiva. Supongamos que existen dos familias Σ y T de funciones tales que

$\Sigma : \alpha \simeq \beta$ y $T: \beta \simeq \gamma$ son homotopías. Consideremos entonces la familia

$$Y = \{\Sigma_k + T_k : k \geqslant 0\}$$

demostraremos que $Y: \alpha \simeq \gamma$ es una homotopía.

Es inmediato que $Y_0 = \Sigma_0 + T_0$ es una derivación de G en C_1'. Además

$$\partial_1'\Sigma_0(x) = \alpha_0(x)\,\beta_0(x)^{-1}$$

y

$$\partial_1'T_0(x) = \beta_0(x)\,\gamma_0(x)^{-1}$$

multiplicando ambas expresiones obtenemos

$$\partial_1'(\Sigma_o + T_o)(x) = \alpha_o(x)\, \gamma_o(x)^{-1}$$

(pues $(\Sigma_o + T_o)(x) = \Sigma_o(x)\, T_o(x)$ en el grupo multiplicativo C_1').

Para verificar que Y cumple con (H2), considérense las expresiones correspondientes a Σ_1 y T_1, a partir de ellas obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_2(Y_1)(x) &= \gamma_1(x)^{-1}(T_o\partial_1(x))^{-1}\beta_1(x)\beta_1(x)^{-1}(\Sigma_o\partial_1(x))^{-1}\alpha_1(x)\\ &= \gamma_1(x)^{-1}(T_o\partial_1(x))^{-1}(\Sigma_o\partial_1(x))^{-1}\alpha_1(x)\\ &= \gamma_1(x)^{-1}(\Sigma_o\partial_1(x)\, T_o\partial_1(x)\,)^{-1}\alpha_1(x)\\ &= \gamma_1(x)^{-1}(\,(\Sigma_o + T_o)\,\partial_1(x)\,)^{-1}\alpha_1(x)\\ &= \gamma_1(x)^{-1}(\,Y_o\partial_1(x)\,)^{-1}\alpha_1(x)\ .\end{aligned}$$

(Obsérvese que no hemos supuesto la conmutatividad). Por último, sumando ambos miembros de las ecuaciones

$$\partial_{k+1}'\Sigma_k + \Sigma_{k-1}\partial_k = \alpha_k - \beta_k$$

$$\partial_{k+1}' T_k + T_{k-1}\partial_k = \beta_k - \gamma_k$$

obtenemos que
$$\partial_{k+1}' Y_k + Y_{k-1}\partial_k = \alpha_k - \gamma_k$$

por lo tanto, Y_k cumple con (H3) .
Queda así demostrado que la relación de homotopía es una relación de equivalencia.

///

5.4 PROPOSICION. Sea $\mathcal{C}$ un complejo cruzado libre (proyectivo) con $Q = \operatorname{coker}\partial_1$, y sea $\mathcal{R}$ una resolución cruzada de Q'. Si $\alpha, \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{R}$ son morfismos de complejos cruzados e inducen el mismo homomorfismo $\varphi : Q \longrightarrow Q'$, entonces existe una homotopía $\Sigma : \alpha \simeq \beta$.

Demostración. Sean α y β morfismos de complejos cruzados que inducen el mismo homomorfismo φ . Esto significa, por 5.2(iii), que

$$\partial'_0 \alpha_0 - \partial'_0 \beta_0 = \varphi \partial_0 - \varphi \partial_0 = 0$$

por lo tanto,

$$(\alpha_0 - \beta_0)(x) = \alpha_0(x)\, \beta_0(x)^{-1} \in \ker\partial_0 \quad .$$

Considérese entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "\Sigma_0"'] \arrow[d, "\alpha_0 - \beta_0"] & \\ C'_1 \arrow[r] & \operatorname{im}\partial_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

($\operatorname{im}\partial_1 = \ker\partial_0$, por la exactitud de $\mathcal{R}$). Como G es proyectivo, existe una función $\Sigma_0 : G \longrightarrow C_1'$ tal que

$$\partial_1 \Sigma_0 = \alpha_0 - \beta_0$$

es decir que

$$\partial_1 \Sigma_0(x) = \alpha_0(x)\, \beta_0(x)^{-1}$$

(pues G' es multiplicativo). Además, Σ_0 es una derivación, dado que

$$\partial_1' \Sigma_0(xy) = \alpha_0(x)\, \alpha_0(y)\, \beta_0(y)^{-1}\, \beta_0(x)^{-1}$$

mientras que,por otra parte,

$$\partial_1'(\Sigma_0(x) \, ({}^{\beta_0(x)}\Sigma_0(y))) = \partial_1' \Sigma_0(x)\, \partial_1'({}^{\beta_0(x)} \Sigma_0(y)))$$
$$= \alpha_0(x)\alpha_0(y)\, \beta_0(y)^{-1}\beta_0(x)^{-1}$$

aplicando la definición de módulo cruzado (1.1).

Considérese ahora el caso $k > 1$. (el caso $k = 1$ es similar, en tanto que C_1 es un G-módulo cruzado libre). Supongamos que se ha definido Σ_k para $0 < k \leqslant n-1$, tenemos entonces un diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & C_{n-1} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "\Sigma_{n-1}"'] \\
C'_{n+1} \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

donde

$$\partial_n'(\alpha_n - \beta_n - \Sigma_{n-1}\partial_n) = \partial_n'\alpha_n - \partial_n'\beta_n - \partial_n'\Sigma_{n-1}\partial_n$$

$$= \alpha_{n-1}\partial_n - \beta_{n-1}\partial_n - \partial_n'\Sigma_{n-1}\partial_n$$

$$= (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - \partial_n'\Sigma_{n-1})\partial_n$$

$$= (\Sigma_{n-2}\partial_{n-1})\partial_n = 0$$

puesto que, por hipótesis:

$$\Sigma_{n-2}\partial_{n-1} = \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - \partial_n'\Sigma_{n-1} .$$

Lo anterior significa que

$$(\alpha_n - \beta_n - \Sigma_{n-1}\partial_n) \in \ker\partial_n'$$

y $\ker\partial_n = \mathrm{im}\partial_{n+1}'$ (por la exactitud de $\mathcal{R}$). Considérese entonces el diagrama de Q-módulos

$$\begin{tikzcd} & C_n \arrow[dl, dashed, "\Sigma_n"'] \arrow[d, "h"] & \\ C_{n+1}' \arrow[r] & \mathrm{im}\partial_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $h = \alpha_n - \beta_n - \Sigma_{n-1}\partial_n$. Como C_n es libre (proyectivo), existe un homomorfismo $\Sigma_n\colon C_n \longrightarrow C_{n+1}'$ tal que $\partial_{n+1}'\Sigma_n = \alpha_n - \beta_n - \Sigma_{n-1}\partial_n$

completando así la demostración por inducción sobre k .

///

Es evidente que el concepto de homotopía de complejos cruzados dado en 5.1 se puede particularizar al de homotopía de n-extensiones cruzadas:

5.5 DEFINICION. Sean (G,∂) y (G',∂') elementos de $\mathrm{Xext}^n(Q,A)$ y de $\mathrm{Xext}^n(Q',A')$, respectivamente. Dados dos morfismos $(\sigma,\alpha,\varphi),(\gamma,\beta,\varphi)\colon (G,\partial) \longrightarrow (G',\partial')$ con el mismo homomorfismo φ en el extremo derecho, definimos una <u>homotopía de n-extensiones cruzadas</u> como una familia de funciones

$$\Sigma = \left\{ \Sigma_k ;\ 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

que satisfacen las propiedades (H1),(H2) y (H3) de 5.1 .

Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n: & 0 \arrow[r] & J_n \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\sigma"'] \arrow[d, shift left, "\gamma"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & F \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha_0"'] \arrow[d, shift left, "\beta_0"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\
(G,\partial): & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & G_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{R}^n$ es una n-extensión cruzada libre (proyectiva) y $(G,\partial) \in \mathrm{Xext}^n(Q',A)$, tenemos entonces que

5.6 PROPOSICION. Sea $\mathcal{R}^n$ una n-extensión cruzada libre (proyectiva) con $Q = \operatorname{coker}\partial_1$, y sea $(G,\partial) \in \operatorname{Xext}^n(Q',A)$. Si $(\sigma,\alpha,\varphi),(\tau,\beta,\varphi)\colon \mathcal{R}^n \longrightarrow (G,\partial)$ son morfismos de n-extensiones cruzadas con el mismo homomorfismo $\varphi\colon Q \longrightarrow Q'$, entonces existe una homotopía

$$\Sigma\colon (\sigma,\alpha,\varphi) \simeq (\tau,\beta,\varphi) \ .$$

Demostración. Dado que $\mathcal{R}^n$ es un caso particular de complejo cruzado libre y (G,∂) es un caso particular de resolución cruzada, entonces basta aplicar la Proposición 5.4 .

///

5.7 PROPOSICION. El conjunto $\operatorname{Hom}(Q,Q')$ clasifica las clases de homotopía de morfismos de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{R}$ con el mismo homomorfismo inducido $\varphi\colon Q \longrightarrow Q'$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de 4.12 y 5.4 .

///

Asimismo, para el caso particular de n-extensiones cruzadas, tenemos que

5.8 PROPOSICION. El conjunto $\mathrm{Hom}(Q,Q')$ clasifica las clases de homotopía de morfismos $(\sigma,\alpha,\varphi)\colon \mathcal{R}^n \longrightarrow (G,\partial)$ con el mismo homomorfismo $\varphi\colon Q \to Q'$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de 4.15 y 5.6 .

///

Introduciremos ahora el concepto de equivalencia homotópica de complejos cruzados :

5.9 DEFINICION. Dos complejos cruzados $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son homotópicamente equivalentes si existen morfismos

$$\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \qquad \text{y} \qquad \beta : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$$

tales que

$$\beta\alpha \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \qquad \text{y} \qquad \alpha\beta \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \quad .$$

5.10 PROPOSICION. Cualesquiera dos resoluciones cruzadas libres (proyectivas) de un grupo Q son homotópicamente equivalentes.

Demostración. Es consecuencia inmediata de 4.15 y 5.6 .

///

II.6 El grupo $Opext^n(Q,A)$.

Estableceremos ahora en $Xext^n(Q,A)$ una relación de equivalencia similar a la usada por Yoneda en su interpretación de los elementos de $Ext^n(C,A)$ (véase [M-1]), esta relación no es sino una generalización de la equivalencia definida en I.1.3.

6.1 DEFINICION. Decimos que dos n-extensiones cruzadas (G,∂) y (G',∂') estan <u>conectadas</u> si existe un morfismo

$$(id_A, \alpha, id_Q): (G,\partial) \longrightarrow (G',\partial')$$

de n-extensiones cruzadas. En tal caso escribiremos $(G,\partial) \rightsquigarrow (G',\partial')$.

6.2 Observación. Sólo para el caso $n < 2$ la relación definida en 6.1 es simétrica y, por lo tanto, sólo en este caso "$\rightsquigarrow$" es una relación de equivalencia (que coincide además con la definida en I.1.3), sin embargo, "$\rightsquigarrow$" nos sirve para generar una relación de equivalencia:

6.3 DEFINICION. Diremos que dos n-extensiones cruzadas (G,∂) y (G',∂') son <u>equivalentes</u> si existe una colección finita $\{(G_i,\partial_i) \in Xext^n(Q,A)\ ;\ 1 \leq i \leq r\}$ tal que

i) $(G,\partial) = (G_1,\partial_1)$ y $(G',\partial') = (G_r,\partial_r)$

ii) Para todo número natural par k, tal que $2 \leq k \leq r-1$, se tiene que

$$(G_{k-1}, \partial_{k-1}) \rightsquigarrow (G_k, \partial_k)$$

$$(G_{k+1}, \partial_{k+1}) \rightsquigarrow (G_k, \partial_k)$$

Si (G,∂) y (G',∂') son equivalentes, escribiremos $(G,\partial) \equiv (G',\partial')$.

6.4 Observación. La condición (ii) de la definición anterior sólo tiene sentido si r es impar, sin embargo, aún cuando r sea par, basta agregar al morfismo identidad

$$(G_{r+1}, \partial_{r+1}) \xrightarrow{id} (G_r, \partial_r)$$

para obtener una colección impar de n-extensiones cruzadas.

<u>6.5 PROPOSICION.</u> " $\equiv$ " <u>es una relación de equivalencia.</u>

Demostración. Sean $(G,\partial),(G',\partial'),(G'',\partial'') \in Xext^n(Q,A)$. Si consideramos el morfismo identidad en $Xext^n(Q,A)$ obtenemos que $(G,\partial) \equiv (G,\partial)$ y por lo tanto se cumple la reflexividad. Asimismo, la simetría y la transitividad son inmediatas.

///

6.6 Notación. A la clase de equivalencia de $(G,\partial) \in Xext^n(Q,A)$ la denotaremos $[(G,\partial)]$, mientras que al conjunto cuyos elementos son clases de equivalencia de n-extensiones cruzadas de A por Q lo denotaremos por $Opext^n(Q,A)$.

A continuación, generalizaremos las Proposiciones I.2.18 y I.2.19 .

6.7 PROPOSICION. *Sea* $\varphi : Q' \longrightarrow Q$ *un homomorfismo de grupos y sea* $(G,\partial) \in \mathrm{Xext}^n(Q,A)$. *Entonces existe un elemento de* $\mathrm{Xext}^n(Q',A)$ *(denotado* $(G,\partial)_\varphi$ *) y un morfismo*

$$(\mathrm{id}_A, \alpha, \varphi) : (G,\partial) \longrightarrow (G,\partial)_\varphi \quad .$$

Además la extensión $(G,\partial)_\varphi$ *así definida es única (salvo equivalencia) y , por lo tanto,* φ *induce una función*

$$\varphi^* = \mathrm{Opext}^n(\varphi, A) : \mathrm{Opext}^n(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q',A) \ .$$

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G,\partial)_\varphi : & 0 \arrow[r, dashed] & A \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, dashed] & C_2 \arrow[r, dashed, "\partial_2'"] \arrow[d, equal] & C_1 \arrow[r, dashed, "\partial_1'"] \arrow[d, equal] & G \wedge Q' \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & Q' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\
(G,\partial) : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & G \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $G \wedge Q'$ denota al producto fibrado (ver I.2.18) y

$$\partial_1'(c) = (\ \partial_1(c),\ 1\ ) \qquad c \in C_1 \ .$$

Además, C_k $(k > 1)$ y A adquieren estructura de Q'-módulos a través de φ , y la acción de $G \wedge Q'$ sobre C_1 está dada por

$$(g,q)_c = g_c \qquad (g \in G, c \in C_1,\ q \in Q).$$

Por lo tanto $(G,\partial)_\varphi \in \mathrm{Xext}(Q',A)$ y $(\mathrm{id}_A, \alpha, \varphi)$ es un morfismo en $\mathrm{Xext}^n(Q,A)$. Además, por la propiedad universal del producto fibrado, $(G,\partial)_\varphi$ es única salvo equivalencia de manera que φ induce una función

$$\varphi^{*}: \mathrm{Opext}^{n}(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^{n}(Q',A)$$

definida mediante

$$\varphi^{*}\left[(G,\partial)\right] = \left[(G,\partial)_{\varphi}\right]$$

///

<u>6.8 PROPOSICION.</u> <u>Sea</u> $\sigma: A \longrightarrow A'$ <u>un homomorfismo de Q-módulos y sea</u> $(G,\partial) \in \mathrm{Xext}^{n}(Q,A)$. <u>Entonces existe un elemento de</u> <u>$\mathrm{Xext}^{n}(Q,A')$ (denotado</u> $_{\sigma}(G,\partial)$) <u>junto con un morfismo de n-extensiones cruzadas</u>

$$(\sigma, \alpha, id_Q): (G,\partial) \longrightarrow {}_{\sigma}(G,\partial)$$

$_{\sigma}(G,\partial)$ <u>está determinada en forma única (salvo equivalencia),</u> <u>y</u> σ <u>induce una función bien definida</u>

$$\sigma_{*} = \mathrm{Opext}^{n}(Q,\sigma): \mathrm{Opext}^{n}(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^{n}(Q,A') \quad .$$

Demostración. Considérese el diagrama

$$\begin{array}{llllllllllllll}
(G,\partial): & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q \dashrightarrow 1 \\
 & & & \downarrow{\sigma} & & \downarrow{\alpha} & & \| & & & & \| & & \| \\
{}_{\sigma}(G,\partial): & 0 & \dashrightarrow & A' & \overset{\beta}{\dashrightarrow} & A' \vee C_{n-1} & \overset{\partial'_{n-1}}{\dashrightarrow} & C_{n-2} & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & G & \dashrightarrow & Q \dashrightarrow 1
\end{array}$$

donde $A \vee C_{n-1}$ es la suma fibrada de A y C_{n-1} (véase I.2.19), α y β son las inclusiones definidas mediante

$$\alpha(c) = (0,c) \qquad \text{y} \qquad \beta(a') = (a',1)$$

y ∂'_{n-1} es el homomorfismo dado por

$$\partial'_{n-1}(a',c) = \partial_{n-1}(c)$$

de manera que $_{\sigma}(G,\partial)^{*} \in \mathrm{Xext}^n(Q,A')$ y (σ,α,id_Q) es un morfismo de n-extensiones cruzadas. Además, por la propiedad universal de la suma fibrada, (G,∂) es única salvo equivalencia. Por último, es inmediato verificar que la función

$$\sigma_* : \mathrm{Opext}^n(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q,A')$$

dada por

$$\sigma_*\big[(G,\partial)\big] = \big[{}_{\sigma}(G,\partial)\big]$$

no depende de los representantes elegidos, de manera que está bien definida.

///

Ahora, aplicando 6.7 y 6.8, generalizaremos la suma de Baer definida en I.2.22 . Para esto, definimos primero la suma directa de dos elementos $[(G,\partial)]$ y $[(G',\partial')]$ de $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$ como la clase de equivalencia de la extensión

$$(G \oplus G', \partial\oplus\partial'): 0 \to A\oplus A' \to C_{n-1}\oplus C'_{n-1} \to \dots \to G\times G' \to Q\times Q' \to 1$$

6.9 DEFINICION. Si $[(G,\partial)]$, $[(G',\partial')] \in \mathrm{Opext}^n(Q,A)$, definimos la <u>suma de Baer de $[(G,\partial)]$ y $[(G',\partial')]$</u> mediante

$$\big[(G,\partial)\big] + \big[(G',\partial')\big] = \nabla_{A_*}\Delta_Q^*\big[(G\oplus G',\partial\oplus\partial')\big]$$

es decir, como la clase de equivalencia de la extensión

$$\nabla_A(G\oplus G',\partial\oplus\partial')\Delta_Q$$

(Δ_Q y ∇_A denotan a los homomorfismos diagonal y codiagonal respectivamente; véase I.2.21).

Es cuestión de rutina verificar que la suma de Baer está bien definida, es decir, no depende de los representantes elegidos. A grandes rasgos, si $(G,\partial) \equiv (H,\partial)$ a través de una colección finita de morfismos $\alpha_i = (id_A, \alpha_i, id_Q)$ (como en 6.2) y $(G',\partial') \equiv (H',\partial')$ a través de una colección finita de morfismos $\beta_i = (id_A, \beta_i, id_Q)$ (agregando el morfismo identidad podemos asegurar que los índices i coinciden; ver 6.4), entonces

$$(G \oplus G', \partial \oplus \partial') \equiv (H \oplus H', \partial \oplus \partial')$$

a través de la colección de morfismos $(id_A, \alpha_i \oplus \beta_i , id_Q)$, de manera que la suma directa está determinada en forma única (salvo equivalencia). Por la unicidad en 6.7 y 6.8 se sigue que

$$\nabla_A (G \oplus G', \partial \oplus \partial') \Delta_Q$$

es también única, salvo equivalencia. Por lo tanto, la suma de Baer en $\mathrm{Xext}^n(Q,A)$ induce una suma bien definida en $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$, como se definió en 6.9 .

6.10 Notación. Denotaremos por (0) a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A = A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Q = Q \longrightarrow 1 .$$

Según se vió en 2.8, $(0) \in \mathrm{Xext}^n(Q,A)$.

Las siguientes proposiciones revelan algunas propiedades de la suma de Baer en $Opext^n(Q,A)$, y su demostración es rutinaria ([Ho,p.314], [M-2,p.113]), por lo que aquí nos limitaremos a enunciarlas para futura referencia.

<u>6.11 PROPOSICION.</u> **(0)** <u>**representa al elemento neutro en $Opext^n(Q,A)$.**</u>

<u>6.12 PROPOSICION.</u> **Si $\alpha_1, \alpha_2 : A \longrightarrow A'$** <u>**son homomorfismos de Q-módulos y**</u> **$(G,\partial) \in Xext^n(Q,A)$,** <u>**entonces**</u>

i) $\alpha_1(G,\partial) \oplus \alpha_2(G,\partial) \equiv (\alpha_1 \oplus \alpha_2)((G,\partial) \oplus (G,\partial))$

ii) $((G,\partial) \oplus (G,\partial))\Delta_Q \equiv \Delta_A(G,\partial)$

<u>**En particular,**</u>

$$\Delta_{Q_*}[\mathcal{R}^n \oplus \mathcal{R}^n] = \Delta_{J_n*}[\mathcal{R}^n]$$

<u>**en $Opext^n(Q,A)$.**</u>

II.7 El isomorfismo $\mathrm{Opext}^n(Q,A) \xrightarrow{\simeq} H^{n+1}(Q,A)$.

Sea Q un grupo y $\mathcal{R}$ una resolución cruzada libre (proyectiva) de Q

$$\mathcal{R}: \ldots \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

Si A es un Q-módulo cualquiera, entonces (considerando que $\mathrm{Hom}(\_,A)$ es un funtor contravariante), obtenemos el complejo

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{R},A): \quad \mathrm{Der}(Q,A) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathrm{Der}(F,A) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}_F(C_1,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Q(C_2,A) \longrightarrow \ldots$$

Veamos esto con más detalle: si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, dashed] & Q \arrow[r] \arrow[d, "d_Q"] & 1 \\ A \arrow[r, equal] & A & \end{tikzcd}$$

(donde d_Q es una derivación y ∂_0 un epimorfismo de grupos), tenemos que A adquiere estructura de F-módulo a través de ∂_0, y como

$$d_Q\, \partial_0(gh) = {}^{\partial_0(g)}d_Q(\partial_0(h)) + d_Q(\partial_0(g))$$

entonces $(d_Q\, \partial_0)$ es , a su vez, una derivación (de F en A), y podemos definir el homomorfismo de grupos abelianos

$$\partial_0^*: \mathrm{Der}_Q(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Der}_F(F,A)$$

mediante

$$\partial_0^*(d_Q) = d_Q\, \partial_0 = d_F \;.$$

Por otra parte, considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
C_1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \omega} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d_F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d_Q} & & \\
A & = & A & = & A & &
\end{array}$$

Definimos la función

$$\partial_1^*: \mathrm{Der}(F,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(C_1,A)$$

mediante

$$\partial_1^*(d_F) = d_F\,\partial_1 = \omega \quad .$$

En este caso, la derivación ω es un homomorfismo, puesto que

$$d_F\,\partial_1(xy) = {}^{\partial_1(x)}d_F(\partial_1(y)) + d_F(\partial_1(x)) \ .$$

Pero $\partial_1(x) \in F$, y la acción de F sobre A está inducida por Q, de modo que

$$\begin{aligned} {}^{\partial_1(x)}d_F(\partial_1(y)) &= {}^{\partial_0\partial_1(x)}d_F(\partial_1(y)) \\ &= d_F(\partial_1(y)) \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_F\,\partial_1(xy) = d_F\,\partial_1(x) + d_F\,\partial_1(y) \ .$$

Como, para $k \geqslant 2$, C_k es un Q-módulo y ∂_k un Q-homomorfismo, el resto de la construcción de $\mathrm{Hom}(\mathcal{K},A)$ es inmediato. Tenemos entonces la siguiente Proposición:

<u>7.1 PROPOSICION.</u> <u>Sea</u> Q <u>un grupo y</u> $\mathcal{R}$ <u>una resolución cruzada libre (proyectiva) de</u> Q. <u>Entonces</u>

$$H^{0}(\mathrm{Hom}(\mathcal{R},A)) = \mathrm{Der}(Q,A)$$

$$H^{m}(\mathrm{Hom}(\mathcal{R},A)) = H^{m+1}(Q,A) \qquad \underline{\text{si}} \quad m \geqslant 1 .$$

Demostración. Considérese la resolución cruzada libre (proyectiva) de Q

$$\mathcal{R} : \ldots \longrightarrow C_k \longrightarrow C_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} F \xrightarrow{\partial_0} Q \longrightarrow 1$$

donde F es un grupo libre, por lo que, si $N = \ker\partial_0$, entonces la sucesión

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\partial_0} Q \longrightarrow 1$$

es una presentación libre de Q. Esta presentación, a su vez, induce una presentación Q-libre de IQ (véase [Hi-St,p.199])

$$1 \longrightarrow N^{ab} \xrightarrow{k} ZQ \otimes_F IF \xrightarrow{\ell} IQ \longrightarrow 1$$

(IQ denota al ideal de aumentación de Q; véase [Hi-St,p.187]). En esta presentación, $k : N^{ab} \longrightarrow ZQ \otimes_F IF$ está dado por

$$k(n[N,N]) = 1_Q \otimes (n-1)$$

Al ser C_1 un F-módulo cruzado libre (proyectivo), entonces C_1^{ab} es un Q-módulo libre (3.8(ii)), y la sucesión

$$1 \longrightarrow \ker\partial_1 \xrightarrow{k_1} C_1^{ab} \xrightarrow{\ell_1} N^{ab} \longrightarrow 1$$

es una presentación Q-libre de N^{ab} (3.8(ii)). Reuniendo ambas presentaciones obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & C_k \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_3 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & \mathrm{im}\partial_2 \arrow[r] \arrow[dl, equal] & 1 & & \\
& & & 1 \arrow[r] & \ker\partial_1 \arrow[r, "k_1"] & C_1^{ab} \arrow[r, "l_1"] & N^{ab} \arrow[r] \arrow[dl, equal] & 1 & \\
& & & & 1 \arrow[r] & N^{ab} \arrow[r, "k"'] & ZQ \otimes_F IF \arrow[r, "l"'] & IQ \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

($\mathrm{im}\partial_2 = \ker\partial_1$) y construimos el complejo

$$\hat{R}: \quad \ldots \to C_k \to \ldots \to C_2 \longrightarrow C_1^{ab} \longrightarrow ZQ \otimes_F IF \longrightarrow IQ \longrightarrow 1$$

donde $\qquad kl_1 : C_1^{ab} \longrightarrow ZQ \otimes_F IF \qquad$ está dado por

$$kl_1(x[C_1,C_1]) = 1_Q \otimes (\partial_1 x - 1) \qquad (x \in C_1).$$

La verificación de la exactitud de $\hat{R}$ es inmediata. Además, C_k y C_1^{ab} son Q-módulos libres para $k \geqslant 2$ (véase 3.8(ii) y 4.5). Como F es un grupo libre sobre un conjunto S, entonces IF es el F-módulo libre sobre el conjunto

$$S - 1 = \{ s-1 \; ; \; s \in S \}$$

([Hi-St,p.199]) y, por lo tanto, $ZQ \otimes_F IF$ es Q-libre, de tal manera que $\hat{R}$ es una resolución libre (proyectiva) de IQ. Aplicando el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_Q(\_,A)$ a $\hat{R}$ obtenemos el complejo

$$\mathrm{Hom}(\hat{R},A): \quad \mathrm{Hom}_Q(ZQ \otimes_F IF,A) \to \mathrm{Hom}_Q(C_1^{ab},A) \to \mathrm{Hom}_Q(C_1,A) \longrightarrow \ldots$$

donde $$H^0(\,Hom(\hat{\mathcal{R}},A)) = Hom_Q(IQ,A) \quad .$$

Por otra parte, existe un isomorfismo natural

$$\eta : Der(Q,A) \xrightarrow{\sim} Hom_Q(IQ,A)$$

definido mediante

$$\eta(d_Q)(y - 1) = d_Q(y) \qquad (\, y \in Q).$$

(véase [Hi-St,p.194]). Entonces

$$H^0(Hom(\hat{\mathcal{R}},A)) = Der(Q,A)$$

y tenemos un isomorfismo de complejos :

$$\begin{array}{ccccccccc}
Hom_Q(IQ,A) & \longrightarrow & Hom_Q(ZQ \otimes_F IF,A) & \longrightarrow & Hom_Q(C_1^{ab},A) & \longrightarrow & Hom_Q(C_2,A) & \rightarrow & \dots \\
\downarrow \eta & & \| & & \| & & \| & & \\
Der_Q(Q,A) & \longrightarrow & Der_F(F,A) & \longrightarrow & Hom_F(C_1,A) & \longrightarrow & Hom_Q(C_2,A) & \rightarrow & \dots
\end{array}$$

(véase [Wu-1,p.199]) . Además, sabemos que

$$H^{m+1}(Q,A) = Ext_Q^m(IQ,A) = H^m(Hom_Q(\hat{\mathcal{R}},A))$$

para $m \geqslant 1$ ([Hi-St,p.199]) . Luego , considerando el isomorfismo entre $Hom(\mathcal{R},A)$ y $Hom(\hat{\mathcal{R}},A)$, tenemos como resultado que

$$H^{m+1}(Q,A) = H^m(Hom(\mathcal{R},A))$$

///

Consideremos ahora una extensión cruzada $(G,\partial) \in Xext^n(Q,A)$. Si $\mathcal{R}$ es una resolución cruzada libre (proyectiva) de Q, entonces, por 4.11, tenemos que la identidad id_Q induce un levantamiento $\alpha : \mathcal{R} \longrightarrow (G,\partial)$

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
\mathcal{R}: & \dots & \rightarrow & C_n & \rightarrow & C_{n-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & F & \rightarrow & Q & \rightarrow & 1 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \| & & \\
(G,\partial): & 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A_{n-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & A_1 & \rightarrow & G & \rightarrow & Q & \rightarrow & 1
\end{array}$$

De la misma manera, si reemplazamos $\mathcal{R}$ por $\mathcal{R}^n$ (ver 4.12) obtenemos que

<u>7.2 COROLARIO.</u> <u>Dada</u> $(G,\partial) \in Xext^n(Q,A)$, <u>existe un morfismo inducido</u> $(v,\alpha,id_Q): \mathcal{R}^n \longrightarrow (G,\partial)$ <u>que es único salvo homotopía</u>.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de 4.14 y 5.6 .

///

Es decir que, dada la extensión cruzada $(G,\partial) \in Xext^n(Q,A)$, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\mathcal{R}^n: & 0 & \rightarrow & J_n & \rightarrow & C_{n-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & F & \rightarrow & Q & - & 1 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \| & & \\
(G,\partial): & 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A_{n-1} & - & \dots & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{\partial_1} & G & \rightarrow & Q & - & 1
\end{array}$$

Como $\mathcal{R}^n \in \mathrm{Xext}^n(Q,J_n)$ y $\upsilon : J_n \longrightarrow A$ es un homomorfismo de Q-módulos, entonces, aplicando 6.8, obtenemos una función inducida $\upsilon_*: \mathrm{Opext}^n(Q,J_n) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q,A)$ definida mediante

$$\upsilon_*[\mathcal{R}^n] = [\upsilon\mathcal{R}^n]$$

donde $\upsilon\mathcal{R}^n$ es la n-extensión cruzada de A por Q siguiente:

$$\upsilon\mathcal{R}^n:\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \vee C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2} \longrightarrow \ \dots\ \longrightarrow C_1 \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 1\ .$$

Además, $\upsilon\mathcal{R}^n$ es única salvo equivalencia.

<u>7.3 PROPOSICION.</u> <u>Cada clase de equivalencia</u> $[(G,\partial)] \in \mathrm{Opext}^n(Q,A)$ <u>tiene un representante de la forma</u> $\upsilon\mathcal{R}^n$.

Demostración. Sea $[(G,\partial)] \in \mathrm{Opext}^n(Q,A)$; sea $\mathcal{R}$ una resolución libre (proyectiva) de Q ($\mathcal{R}$ es única salvo equivalencia homotópica) y sea $\mathcal{R}^n$ la n-extensión cruzada respectiva. Considérese el morfismo inducido $(\upsilon,\alpha,\mathrm{id}_Q): \mathcal{R}^n \longrightarrow (G,\partial)$ (ver 7.2). Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n: & 0 \arrow[r] & J_n \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(G,\partial): & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\partial_n"] & A_{n-1} \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\partial_1"] & G \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Por 6.8, existe también el morfismo $(\upsilon,\varphi,id_Q): \mathcal{R}^n \rightarrow \upsilon\mathcal{R}^n$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n: 0 \arrow[r] & J_n \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
\upsilon\mathcal{R}^n: 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] & A \vee C_{n-1} \arrow[r] & C_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

de manera que existe un morfismo $(id_A,\alpha',id_Q): \upsilon\mathcal{R}^n \rightarrow (G,\partial)$

$$\begin{tikzcd}
\upsilon\mathcal{R}^n: 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \vee C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'_{n-2}"] & \cdots \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(G,\partial): 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\partial_n"] & A_{n-1} \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G \arrow[r] & Q \arrow[r, dash] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha'_i = \alpha_i$ $(n-2 \leq i \leq 0)$, y α'_{n-1} es el homomorfismo que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
J_n \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, "\alpha_{n-1}"] & \\
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, dotted, "\partial_n"'] & A \vee C_{n-1} \arrow[dr, dashed, "\alpha'_{n-1}"] & \\
 & & A_{n-1}
\end{tikzcd}$$

(α'_{n-1} existe y es único, en virtud de la propiedad universal de la suma fibrada).

En conclusión, existe un morfismo $(id_A,\alpha',id_Q): \upsilon\mathcal{R}^n \longrightarrow (G,\partial)$

de n-extensiones cruzadas; por lo tanto $\upsilon\mathfrak{R}^n \equiv (G,\partial)$.

///

<u>**7.4 PROPOSICION.**</u> <u>**La función**</u> $\phi : \mathrm{Hom}_F(J_n,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q,A)$ <u>**definida mediante**</u>

$$\phi(\upsilon) = \left[\upsilon\mathfrak{R}^n\right]$$

<u>**es suprayectiva.**</u>

Demostración. Es consecuencia de 7.3 . ///

7.5 Observaciones.

i) Si $n \geqslant 2$, entonces $\mathrm{Hom}_F(J_n,A) = \mathrm{Hom}_Q(J_n,A)$.

ii) Si Q es un grupo, J_n y A son Q-módulos, y $\upsilon : J_n \to A$ es un Q-homomorfismo, entonces la n-extensión cruzada libre (proyectiva)

$$\mathfrak{R}^n:\ 0 \longrightarrow J_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

está determinada en forma única. Además, por 6.8, υ induce una función bien definida

$$\upsilon_* : \mathrm{Opext}^n(Q,J_n) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q,A)$$

de modo que la función ϕ definida en 7.4 está, a su vez, bien definida.

<u>7.6 PROPOSICION. Con respecto a la suma de Baer, la función $\phi : \mathrm{Hom}_F(J_n,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q,A)$ definida mediante</u>

$$\phi(v) = \left[v\mathcal{R}^n\right]$$

<u>es un epimorfismo de grupos abelianos.</u>

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in \mathrm{Hom}_F(J_n,A)$ y sea $\mathcal{R}^n$ la n-extensión cruzada libre (proyectiva)

$$\mathcal{R}^n : 0 \longrightarrow J_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \rightarrow F \rightarrow Q \rightarrow 1 \ .$$

Por definición,

$$\begin{aligned}\left[v_1\mathcal{R}^n\right] + \left[v_2\mathcal{R}^n\right] &= \nabla_{A_*} \Delta^*_Q(v_1\mathcal{R}^n \oplus v_2\mathcal{R}^n) \\ &= \left[\nabla_A(v_1\mathcal{R}^n \oplus v_2\mathcal{R}^n)\Delta_Q\right] .\end{aligned}$$

Pero

$$\nabla_A(v_1\mathcal{R}^n \oplus v_2\mathcal{R}^n)\Delta_Q \equiv \nabla_A(v_1 \oplus v_2)(\mathcal{R}^n \oplus \mathcal{R}^n)\Delta_Q$$

y

$$(\mathcal{R}^n \oplus \mathcal{R}^n)\Delta_Q \equiv \Delta_{J_n}(\mathcal{R}^n) \qquad \text{(por 6.12).}$$

De manera que

$$\nabla_A(v_1\mathcal{R}^n \oplus v_2\mathcal{R}^n)\Delta_Q \equiv \nabla_A(v_1 \oplus v_2)\Delta_{J_n}\mathcal{R}^n \ .$$

Por otra parte, si $t \in J_n$,

$$\nabla_A(v_1 \oplus v_2)\Delta_{J_n}(t) = \nabla_A(v_1 \oplus v_2)(t,t)$$

$$= \quad \upsilon_1(t) \quad + \quad \upsilon_2(t)$$

$$= \ (\ \upsilon_1 \ + \ \upsilon_2 \ )(t) \ .$$

Asimismo, es inmediato verificar que $\nabla_A(\ \upsilon_1 \oplus \upsilon_2)\,\Delta_{J_n}$ es un F-homomorfismo, de modo que

$$\nabla_A(\ \upsilon_1 \oplus \upsilon_2)\,\Delta_{J_n} \ = (\ \upsilon_1 + \upsilon_2\ ) \ \in \ \mathrm{Hom}_F(J_n,A) \ .$$

Entonces

$$\nabla_A(\upsilon_1 \mathcal{R}^n \oplus \upsilon_2 \mathcal{R}^n)\,\Delta_Q \quad \equiv \quad (\ \upsilon_1 + \upsilon_2\ )\,\mathcal{R}^n$$

lo que significa que

$$\left[\upsilon_1 \mathcal{R}^n\right] \quad + \quad \left[\upsilon_2 \mathcal{R}^n\right] \quad = \quad \left[(\ \upsilon_1 + \upsilon_2\ )\,\mathcal{R}^n\right]$$

y, en consecuencia, $\emptyset(\upsilon_1) \ + \ \emptyset(\upsilon_2) \ = \ \emptyset(\ \upsilon_1 + \upsilon_2\ )$. Como además, $\mathrm{Hom}_F(J_n,A)$ es un grupo abeliano y $\emptyset$ es suprayectivo (por 7.5), entonces $\emptyset$ es un epimorfismo de grupos abelianos.

///

Así pues, $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$ constituye un grupo abeliano con respecto a la suma de Baer. Si $0\,\mathcal{R}^n$ es la imagen bajo $\emptyset$ del homomorfismo trivial $0\colon J_n \longrightarrow A$, tenemos que, en virtud de 6.11 y 7.4,

$$\emptyset(0) = \left[0\ \mathcal{R}^n\right] \quad = \quad \left[(0)\right]$$

es el elemento neutro en $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$.

7.7 LEMA. Sea $\upsilon \in \mathrm{Hom}_F(J_n, A)$ un morfismo que puede extenderse sobre C_{n-1} a

i) Una derivación $d_F\colon F \longrightarrow A$ si $n = 1$.

ii) Un F-homomorfismo $\omega\colon C_1 \longrightarrow A$, si $n = 2$.

iii) Un Q-homomorfismo $\Upsilon\colon C_{n-1} \longrightarrow A$, si $n \geqslant 3$.

Entonces, la extensión

$$\mathcal{E}:\quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow C_{n-1} \vee A \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow 1$$

se escinde. ($J_1 = N$, $J_0 = Q$).

Demostración. Sea $n=1$. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\upsilon"'] & F \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] & A \vee F \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

con $d_F\colon F \longrightarrow A$ una derivación que extiende a υ , es decir que $d_F i = \upsilon$. Se tiene que

$$\psi\upsilon = \psi d_F i = \varphi i$$

por lo tanto,

$$(\varphi - \psi d_F)i = 0$$

pero, como $Q = F/iN$, esto significa, por las propiedades del conúcleo ([Hi-Wu,p.19]) que existe un único homomorfismo $s\colon Q \longrightarrow A \vee F$ que hace conmutar al diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varphi-\psi d_F"'] & Q \arrow[r, dashed] \arrow[d, "s"] & 1 \\
& & & A \vee F &
\end{tikzcd}
$$

es decir que $\varphi - \psi d_F = s\partial_0$, por lo tanto, $\hbar\varphi = \hbar s \partial_0$
y, como $\hbar\varphi = \partial_0$ entonces $\hbar s = id_Q$.
Para el caso $n = 2$, tenemos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\upsilon"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi"] & F \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] & A \vee C_1 \arrow[r] & F \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

donde A adquiere estructura de F-módulo a través de ∂_0 ,
es decir que, si $x \in F$,

$$ {}^{x}a = {}^{\partial_0(x)}a \qquad (a \in A). $$

Si $\omega : C_1 \longrightarrow A$ preserva las acciones y además $\omega i = \upsilon$
entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\upsilon"'] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "\omega"'] & J_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] & A \vee C_1 \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

y, al igual que en el caso anterior, por las propiedades del conúcleo ([Hi-Wu,p.77]) $\varphi - \psi\omega$ se factoriza a través de un homomorfismo $s: J_1 \longrightarrow A \vee C_1$. El caso $n \geqslant 3$ es similar (véase 7.5(i)).

///

<u>7.8 PROPOSICION.</u> <u>Sea</u> $n \geqslant 2$. <u>Si, dado</u> $\tau \in Hom_F(J_n, A)$, <u>la extensión</u>

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} A \vee C_{n-1} \xrightarrow{h} J_{n-1} \longrightarrow 1$$

<u>se escinde, entonces</u> $\tau \mathcal{R}^n \equiv (0)$.

Demostración. $\mathcal{E}$ es una extensión cruzada de A por J_{n-1} (según se definió en I.2.1), de manera que, si $\mathcal{E}$ se escinde, entonces (por I.3.2),

$$A \vee C_{n-1} \xrightarrow{\simeq} A \ltimes J_{n-1} \quad .$$

Además, $\psi(A) \in Z(A \vee C_{n-1})$, y por lo tanto, (por I.2.5),

$$A \ltimes J_{n-1} = A \times J_{n-1} \quad .$$

En consecuencia, $\mathcal{E}$ es equivalente a la extensión

$$\mathcal{E}_0 : 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times J_{n-1} \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow 1$$

que se escinde por la izquierda, es decir, existe un homomorfismo $s' : A \vee C_{n-1} \xrightarrow{\simeq} A \times J_{n-1} \longrightarrow A$

que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau\mathcal{R}^n : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & A \vee C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "s'"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(0) : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, equal] & A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, equal] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

de manera que $\tau \mathcal{R}^n \equiv (0)$. ///

7.9 Observación. Sea $\quad res: Hom_F(C_{n-1},A) \longrightarrow Hom_Q(J_n,A)$
la función restricción, es decir que, dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} J_n \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\vartheta"'] & C_{n-1} \arrow[dl, "\omega"] \\ A & \end{tikzcd}$$

$$res(\omega: C_{n-1} \to A) = (\vartheta = \omega i : J_n \to A) \ .$$

Evidentemente, un homomorfismo $\vartheta: J_n \longrightarrow A$ puede extenderse a $\omega: C_{n-1} \to A$ como en 7.7 si y sólo si $\vartheta \in res(Hom_F(C_{n-1},A))$.
Por lo tanto, recapitulando los resultados anteriores, tenemos las siguientes implicaciones

$$\left[\ \vartheta \in res(Hom_F(C_{n-1},A))\ \right] \iff \left[\begin{array}{l} \vartheta \text{ puede extenderse a} \\ \omega : C_{n-1} \to A \end{array}\right]$$

$$\Big\Downarrow \ \text{LEMA 7.7}$$

$$\left[\begin{array}{l} [\vartheta\mathfrak{R}^n] = [(0)] \\ \text{en } Opext^n(Q,A)\ . \end{array}\right] \overset{\text{PROP. 7.8}}{\Longleftarrow} \left[\begin{array}{l} \text{La sucesión} \\ 0 \to A \to A \vee C_{n-1} \to J_{n-1} \to 1 \\ \text{se escinde .} \end{array}\right]$$

<u>**7.10 PROPOSICION.** El epimorfismo</u> ϕ <u>induce un epimorfismo de grupos abelianos</u>

$$\Phi : H^{n+1}(Q,A) \longrightarrow Opext^n(Q,A)\ .$$

Demostración. Según vimos al principio de esta sección, si consideramos la n-extensión cruzada libre (proyectiva)

$$\mathcal{R}^n: \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow J_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

obtenemos el complejo

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{R}^n,A): \quad \mathrm{Der}(F,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(C_1,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Q(C_2,A) \longrightarrow \quad \dots$$

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Hom}_Q(J_n,A) \longrightarrow 0$$

donde, por definición,

$$H^n(\ \mathrm{Hom}(\mathcal{R}^n,A)\ ) = \mathrm{Hom}_Q(J_n,A) \ / \ \mathrm{res}(\mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A)$$

$$= \mathrm{coker}(\mathrm{res})$$

y, por 7.1,

$$H^m(\mathrm{Hom}(\mathcal{R}^n,A)) = H^{m+1}(Q,A) \qquad \text{para} \quad m \geqslant 1 \ .$$

En particular, si $m = n$, la regla $v \longmapsto v\mathcal{R}^n$ induce una función

$$H^{n+1}(Q,A) = \left(\mathrm{Hom}_Q(J_n,A) \Big/ \mathrm{res}(\mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A) \right) \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathrm{Opext}^n(Q,A)$$

definida mediante ϕ , es decir que

$$v + \mathrm{res}(\mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A)\ ) \longmapsto \phi(v) = \left[v\mathcal{R}^n \right].$$

La función Φ está bien definida, puesto que

$$\phi(\mathrm{res}(\mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A)) = [(0)] \ .$$

Es evidente que Φ es un homomorfismo con respecto a la suma de Baer en $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$ (por 7.6) y además es supra-yectiva, pues ϕ lo es.

///

7.11 Observación. Visto de otra manera, la existencia del epimorfismo Φ puede demostrarse a partir de las propiedades del conúcleo en la categoría de grupos abelianos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Hom}_Q(J_n,A) \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathrm{Hom}_Q(J_n,A)/\mathrm{res}(\mathrm{Hom}_Q(C_{n-1},A)) \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\
 & & \mathrm{Opext}^n(Q,A)
\end{tikzcd}$$

Como $\phi(\mathrm{res}) = 0$ y ρ es la proyección natural,entonces existe un homomorfismo Φ que hace conmutar al diagrama. Además ϕ es epimorfismo y, en consecuencia, Φ también lo es.

///

7.12 TEOREMA. El morfismo $\Phi: H^{n+1}(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Opext}^n(Q,A)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Por 7.10 sabemos que Φ es un epimorfismo, por lo que sólo resta demostrar la inyectividad.
Sean $\mu\mathcal{R}^n$ y $\nu\mathcal{R}^n$ los representantes de cualesquiera dos elementos en $\mathrm{Opext}^n(Q,A)$ y supongamos que $\mu\mathcal{R}^n \equiv \nu\mathcal{R}^n$ entonces, por 6.3, existe una colección finita

$$\left\{(G_i,\partial_i) \in \mathrm{Xext}^n(Q,A) \ ; \ 1 \leq i \leq r\right\}$$

donde

$$\mu\mathcal{R}^n = (G_1,\partial_1) \qquad \text{y} \qquad \nu\mathcal{R}^n = (G_r,\partial_r)$$

junto con morfismos de extensiones cruzadas

$$\alpha_{k-1} = (id_A, \alpha_{k-1}, id_Q) : (G_{k-1},\partial_{k-1}) \to (G_k,\partial_k)$$

$$\alpha_k = (id_A, \alpha_k, id_Q) : (G_{k+1},\partial_{k+1}) \to (G_k,\partial_k)$$

para todo número natural par k, tal que $2 \leq k \leq r-1$.
Por 4.14, para cada (G_i,∂_i), $(1 \leq i \leq r)$, la identidad $id_Q : Q \to Q$ induce un morfismo

$$(\gamma_i, \beta_i, id_Q) : \mathcal{R}^n \longrightarrow (G_i,\partial_i)$$

de n-extensiones cruzadas. Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n \arrow[rr, "{(\vartheta_1,\beta_1,\mathrm{id}_Q)}"] \arrow[dd, equal] & & \mu\mathcal{R}^n \arrow[d, "\alpha_1"] \\
 & & (G_2,\partial_2) \\
\mathcal{R}^n \arrow[rr, "{(\vartheta_3,\beta_3,\mathrm{id}_Q)}"] \arrow[d, equal] & & (G_3,\partial_3) \arrow[u, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\alpha_3"] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{R}^n \arrow[u, equal] \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & (G_{r-3},\partial_{r-3}) \arrow[u] \arrow[d] \\
 & & (G_{r-2},\partial_{r-2}) \\
\mathcal{R}^n \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & (G_{r-1},\partial_{r-1}) \arrow[u] \arrow[d, "\alpha_{r-1}"] \\
\mathcal{R}^n \arrow[rr, "{(\vartheta_r,\beta_r,\mathrm{id}_Q)}"] & & \nu\mathcal{R}^n
\end{tikzcd}$$

(para los casos $i = 1$, $i = r$, tenemos que $\upsilon_1 = \mu$ y $\upsilon_r = \upsilon$). Entonces, para toda k par $(2 \leq k \leq r-1)$ mediante las composiciones

$$\alpha_{k-1}(\upsilon_{k-1}, \beta_{k-1}, id_Q)$$
$$\alpha_k(\upsilon_{k+1}, \beta_{k+1}, id_Q)$$

obtenemos los morfismos

$$(\upsilon_{k-1}, \alpha_{k-1}\beta_{k-1}, id_Q) \colon \mathcal{R}^n \longrightarrow (G_k, \partial_k)$$
$$(\upsilon_{k+1}, \alpha_k\beta_{k+1}, id_Q)) \colon \mathcal{R}^n \longrightarrow (G_k, \partial_k) .$$

Además, por 5.6 , sabemos que estos morfismos son homotópicos, de manera que, para cada k tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n \colon & 0 \arrow[r] & J_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right, "\upsilon_{k-1}"'] \arrow[d, shift left, "\upsilon_{k+1}"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "(\Sigma_k)_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & F \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal, "id_Q"] & 1 \\
(G_k, \partial_k) \colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & (A_k)_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_k \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde, por 5.1(H3),

$$\upsilon_{k-1} - \upsilon_{k+1} = (\Sigma_k)_{n-1}\,\partial_n + \partial_{n+1}(\Sigma_k)_n .$$

Pero $\partial_{n+1}(\Sigma_k)_n = 0$, entonces

$$\upsilon_{k-1} - \upsilon_{k+1} = (\Sigma_k)_{n-1}\,\partial_n .$$

Por otra parte,

$$\mu - \nu = \nu_1 - \nu_r = \nu_1 - \nu_3 + \nu_3 - \dots - \nu_{r-2} + \nu_{r-2} - \nu_r$$

$$= (\Sigma_2)_{n-1}\partial_n + (\Sigma_4)_{n-1}\partial_n + \dots + (\Sigma_{r-1})_{n-1}\partial_n$$

$$= \left((\Sigma_2)_{n-1} + (\Sigma_4)_{n-1} + \dots + (\Sigma_{r-1})_{n-1}\right)\partial_n \,.$$

como ∂_n es la inclusión, esto significa que $\mu - \nu$ puede extenderse a un homomorfismo $\omega : C_{n-1} \longrightarrow A$ dado por

$$\omega = (\Sigma_2)_{n-1} + (\Sigma_4)_{n-1} + \dots + (\Sigma_{r-1})_{n-1}$$

es decir,

$$\omega = \sum_{k=2}^{r-1} (\Sigma_k)_{n-1} \qquad (k \text{ par}).$$

Por lo tanto, $\mu - \nu \in \operatorname{res}(\operatorname{Hom}_Q(C_{n-1}, A))$

lo que significa que $\mu = \nu$ en $H^{n+1}(Q,A)$, como se quería demostrar.

///

CAPITULO III

APLICACIONES

III.1 Núcleos abstractos y extensiones con núcleo no abeliano.

Estudiaremos ahora, como una aplicación de los resultados obtenidos, las extensiones de grupos

$$(G,\partial): \quad 1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde K no es abeliano. Como se señaló al principio (véase I.2), el caso en que K es un grupo abeliano tiene la ventaja de que la extensión (G,∂) induce una acción $\theta\colon Q \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$, lo que nos permitió dar una clasificación de las extensiones de K por Q (I.2.17). Pensando en esto, podríamos tratar de estudiar en forma similar el caso no abeliano, sin embargo, nos encontramos con diferencias importantes; por ejemplo: como K no es abeliano, no disponemos del producto semidirecto $K \ltimes Q$, y no sabemos siquiera si, dados Q y K, existe alguna extensión de K por Q que induzca una acción dada. Además Q actúa sobre K a través de automorfismos exteriores (como se verá en 1.1). Sin embargo, mostraremos cómo se establece una relación entre las extensiones con núcleo no abeliano y los elementos de $H^3(Q,A)$.

1.1 PROPOSICION. La extensión

$$(G,\partial): \quad 1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

induce una acción exterior de Q sobre K, es decir, un homomorfismo $\theta : Q \longrightarrow Out(K)$.

(Recordamos que $Out(K) = Aut(K)/In(K)$ representa el grupo de automorfismos exteriores de K).

Demostración. Considérese la extensión

$$(G,\partial): \quad 1 \to K \to G \to Q \to 1 \ .$$

Como K es normal en G, cada $g \in G$ determina un automorfismo α_g de K, definido mediante

$$\alpha_g(k) = gkg^{-1} \qquad\qquad (k \in K).$$

Asimismo, cada $k \in K$ determina un automorfismo interior c_k de K, definido mediante

$$c_k(k') = kk'k^{-1}$$

(es decir, $c_k \in In(K)$). Como $In(K)$ es subgrupo normal de Aut(K), podemos formar el grupo cociente

$$Out(K) = Aut(K)/In(K)$$

(llamado grupo de "automorfismos exteriores de K") . Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] & G \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] & Q \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\theta"] & 1 \\
1 \arrow[r] & In(K) \arrow[r, "i"] & Aut(K) \arrow[r, "\rho"] & Out(K) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde

$$\beta(k) = c_k \in In(K) \qquad y \qquad \alpha(g) = \alpha_g \in Aut(K) .$$

Evidentemente $\alpha\partial = i\beta$ y $\theta : Q \longrightarrow Out(K)$ es el homomorfismo inducido por α y β , es decir que si $x \in Q$,

$$\theta(x) = \alpha_{s(x)} In(K)$$

donde $s(x)$ es un representante de x en G (véase I.1.5). Sólo queda verificar que θ esta bien definido, es decir, no depende de los representantes escogidos:

Sean $s_1(x)$ y $s_2(x)$ dos representantes distintos de $x \in Q$. Como

$$\partial s_1(x) = \partial s_2(x) = x \qquad \text{(véase I.1.5)}$$

debe existir algúna $m \in Q$ tal que

$$s_1(x) = s_2(x)\, m \quad .$$

Entonces,

$$\alpha_{s_1(x)}(k) = s_1(x)\, k\, s_1(x)^{-1}$$

$$= s_2(x) \;\; m\, k\, (s_2(x)\; m)^{-1}$$

$$= s_2(x)\; m\; k\; m^{-1}\; s_2(x)^{-1}$$

$$= s_2(x)(c_m(k))s_2(x)^{-1}$$

$$= (\,\alpha_{s_2(x)}\; c_m)\;(k)$$

y esto significa que $\alpha_{s_1(x)}$ y $\alpha_{s_2(x)}$ están en la misma clase de equivalencia (módulo $In(K)$).

///

1.2 Observación. Cuando K es abeliano,

$$c_k(k') = kk'k^{-1} = k'$$

por lo que todo automorfismo interior es trivial, es decir que $In(K) = 0$, de manera que $Aut(K) = Out(K)$ y (G,∂) induce una acción $\theta : Q \longrightarrow Aut(K)$ como en I.2.1 .

Tenemos, por lo tanto, que el núcleo del homomorfismo $\partial : G \longrightarrow Q$ involucra, de hecho, a dos elementos: el subgrupo normal K y el homomorfismo $\theta : Q \longrightarrow Out(K)$.

1.3 DEFINICION. Un <u>Q-núcleo abstracto</u> (ó "Q-núcleo" simplemente) es una pareja (K,θ) donde K es un grupo y $\theta : Q \longrightarrow Out(K)$ es un homomorfismo.

Entonces, podemos reescribir 1.1 así:

1.4 PROPOSICION. *Cada extensión*

$$(G,\partial):\ 1 \to K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

induce un Q-núcleo (K,θ) (llamado *Q-núcleo asociado a (G,∂)*).

Consideremos ahora el problema inverso: dado un Q-núcleo (K,θ), si denotamos por $\mathcal{E}(Q,K,\theta)$ al conjunto de extensiones que inducen a (K,θ), ¿qué podemos decir acerca de $\mathcal{E}(Q,K,\theta)$? Por lo pronto, no sabemos siquiera si $\mathcal{E}(Q,K,\theta) \neq \emptyset$ (no disponemos del producto semidirecto $K \rtimes Q$, a menos que exista un levantamiento $\varphi: Q \longrightarrow Aut(K)$ de θ). Sin embargo, tenemos la siguiente proposición:

1.5 PROPOSICION. *A cada Q-núcleo* (K,θ) *le corresponde un elemento de* $H^3(Q,A)$, *donde A es el centro de K* ($A = Z(K)$).

Demostración. Sea (K,θ) un Q-núcleo. Considérese la 2-extensión cruzada del ejemplo II.2.9 :

$$(Aut(K),\beta):\ 0 \to A \to K \xrightarrow{\beta} Aut(K) \longrightarrow Out(K) \longrightarrow 1$$

(donde $A = Z(K)$ y $\beta(k) = c_k \in In(K)$).
Como $(Aut(K),\beta) \in Xext^2(Q,A)$, entonces, por II.6.7 , $\theta: Q \to Out(K)$ induce una función

$$\theta^*: Opext^2(Out(K),A) \longrightarrow Opext^2(Q,A)$$

que a $(Aut(K),\beta)$ le asocia la clase de equivalencia de la extensión

$$(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta \;:\quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow K \xrightarrow{\beta^\theta} G^\theta \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde $G^\theta = \mathrm{Aut}(K) \wedge Q$ (véase II.6.7).
Por II.7.12 , $[(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta]$ corresponde a un elemento de $H^3(Q,A)$.

///

1.7 Observación. A través de 1.6 hemos construido una función

$$\chi : \{\text{Q-núcleos } (K,\theta)\} \longrightarrow H^3(Q,A)$$

donde

$$\chi((K,\theta)) = [(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta] \in \mathrm{Opext}^2(Q,A)$$

y $A = Z(K)$. Al elemento $\chi((K,\theta))$ se le conoce como la <u>clase de obstrucción</u> del Q-núcleo (K,θ).

<u>1.8 PROPOSICION. La función</u>

$$\chi : \{\text{Q-núcleos } (K,\theta)\} \longrightarrow H^3(Q,A)$$

<u>definida en 1.6 , es suprayectiva.</u>

Demostración. Sea $[(G,\partial)] \in \mathrm{Opext}^2(Q,A)$

$$(G,\partial) : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

Por II.7.3 , existe un representante de $[(G,\partial)]$ de la forma

$$v\mathcal{R}^2 : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

(F libre). Considérese el caso en que F tiene más de dos generadores libres, de manera que, por II.3.8(i), $A = Z(K)$. Es evidente entonces que existe un homomorfismo inducido $\theta : Q \longrightarrow \mathrm{Out}(K)$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
v\mathcal{R}^2 : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d, "\Upsilon"] & Q \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\theta"] & 1 \\
& 0 \arrow[r] & Z(K) \arrow[r] & K \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Aut}(K) \arrow[r] & \mathrm{Out}(K) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $\Upsilon(g) = \Upsilon_g$ es el automorfismo de K inducido por la acción de F en K (K es un F-módulo cruzado). Considérese ahora la extensión asociada a θ :

$$(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta : \quad 0 \longrightarrow Z(K) \longrightarrow K \longrightarrow G^\theta \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

como F es libre, existe un homomorfismo $\zeta : F \longrightarrow G$, por lo tanto,

$$\left[v\mathcal{R}^2\right] = \left[(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta\right]$$

y queda demostrado que existe un Q-núcleo (K,θ) cuya clase de obstrucción de $[(Aut(K),\beta)_\theta]$ es $[(G,\partial)]$.

///

1.9 DEFINICION. Un Q-núcleo (K,θ) se llama <u>extensible</u> si es el Q-núcleo inducido por alguna extensión de grupos

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1 .$$

Aplicando 1.4 y 1.5, y las propiedades del producto fibrado $G^\theta = Aut(K) \wedge Q$, es inmediato comprobar que

1.10 LEMA. <u>Un Q-núcleo (K,θ) es inducido por una extensión de grupos</u>

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

<u>si y sólo si existe un morfismo $(id_K,\psi): (K,G,\partial) \longrightarrow (K,G^\theta,\beta^\theta)$ de módulos cruzados que hace conmutar al diagrama</u>

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & & \| & & \downarrow{\psi} & & \| & & \\ (Aut(K),\beta)_\theta : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & & K & \xrightarrow{\beta^\theta} & G^\theta & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \end{array} .$$

1.11 TEOREMA . <u>Un Q-núcleo (K,θ) es extensible si y sólo si su clase de obstrucción es cero.</u>

Demostración.

Supongamos primero que (K,θ) es un Q-núcleo tal que

$$\chi(\,(K,\theta)\,) = \left[(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta\right] = 0 \;\in\; \mathrm{Opext}^2(Q,A).$$

Considérese una resolución cruzada libre $\mathcal{R}$ de Q y la correspondiente n-extensión cruzada libre $\mathcal{R}^n$. Por II.7.2 existe un morfismo $(\upsilon,\alpha,\mathrm{id}_Q)$ de n-extensiones cruzadas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^2: & 0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & K \arrow[r] & G^\theta \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

como $\left[(\mathrm{Aut}(K),\beta)_\theta\right] = 0$ por hipótesis, entonces

$$\upsilon \in \mathrm{res}(\mathrm{Hom}_F(J_2,A))$$

es decir que υ se extiende sobre C como en II.7.7(ii), y, por lo tanto, la sucesión

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \vee C \longrightarrow N \longrightarrow 1$$

($N = J_1 = \ker(F \to Q)$) se escinde a través de un homomorfismo $\mu : N \longrightarrow A \vee C$. Por otra parte, por la propiedad universal del producto fibrado, existe un homomorfismo h que hace conmutar al diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
A \arrow[r] \arrow[drr] & A \vee C \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}$$

de manera que, si $\omega = h\mu : N \longrightarrow K$, tenemos un morfismo (ω,α_1) de módulos cruzados

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\omega"'] & F \arrow[d, "\alpha_1"] \\
K \arrow[r, "\beta^{\theta}"] & G^{\theta}
\end{tikzcd} .$$

Si consideramos la suma fibrada $K \vee F$ (como en I.2.19) obtenemos la sucesión exacta

$$(\#): \quad 1 \longrightarrow K \longrightarrow K \vee F \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde F actúa sobre K a través de α_1 . Es inmediato verificar que la extensión (#) cumple con las condiciones de 1.10, y en consecuencia, (K,θ) es extensible.

Para demostrar la implicación inversa, véase [Wu-1] .

///

III.2 Aplicaciones a la teoría de p-grupos.

Como un ejemplo de aplicaciones de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores a la teoría de p-grupos, demostraremos un teorema de clasificación de p-grupos que contengan un subgrupo cíclico de índice p (p primo).

Recordamos que un grupo G es un p-grupo si todo elemento de G, excepto la identidad, tiene como orden una potencia del primo p ([Ha,p.56]) . Los siguientes son ejemplos de p-grupos que contienen subgrupos cíclicos de índice p ([Br,p.98]):

2.1 Ejemplos.

(a) $\mathbb{Z}_q$, ($q = p^n$, $n \geq 1$). Por el teorema de Sylow ([Fr,p.124]), sabemos que este p-grupo contiene un subgrupo cíclico de índice p.

(b) $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$, ($q = p^{n-1}$, $n \geq 2$) . $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$ está caracterizado por las relaciones

$$a^q = 1 \ , \ b^p = 1 \ , \ ab = ba \ .$$

(c) $\mathbb{Z}_q \ltimes \mathbb{Z}_p$, ($q = p^{n-1}$, $n \geq 3$) . En este caso, la acción $\varphi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q)$ equivale a la multiplicación por $1 + p^{n-2}$ en $\mathbb{Z}_q$ ([Br, p.98]) y $\mathbb{Z}_q \ltimes \mathbb{Z}_p$ está definido por las relaciones

$$a^q = 1 \ , \ b^p = 1 \ . \ bab^{-1} = a^{1+p^{n-2}}$$

([Ha, p.199]).

En el caso particular en que $p = 2$, tenemos también los ejemplos :

d) 2-grupo diedro . Recordemos que, para todo entero $m \geq 2$, el grupo diedro D_{2m} se define como $\mathbb{Z}_m \ltimes \mathbb{Z}_2$, donde el generador de $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre $\mathbb{Z}_m$ como la multiplicación por -1 . En el caso en que m es una potencia 2^{n-1}, D_{2m} es un 2-grupo definido por las relaciones

$$a^m = 1 \quad , \quad b^2 = 1 \quad , \quad bab^{-1} = a^{-1}$$

([Ha.p.199]) .

e) 2-grupo cuaternio generalizado. Sea $\mathbb{H}$ el álgebra de cuaternios $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ .Para cualquier entero $m \geq 2$, el grupo cuaternio generalizado Q_{4m} se define como el subgrupo del grupo multiplicativo $\mathbb{H}$ generado por

$$a = e^{\pi i/m} \quad , \quad b = j \quad .$$

Observamos que a es de orden $2m$, pues $a^{2m} = e^{2\pi i} = 1$ y que tenemos las relaciones

$$b^2 = a^m \quad , \quad bab^{-1} = a^{-1}$$

por lo que el subgrupo cíclico generado por a resulta ser normal en Q_{4m} y de índice 2,de manera que el orden de Q_{4m} es $4m$. Si $m = 2^{n-2}$ $(n \geq 3)$, Q_{4m} es un 2-grupo definido por las relaciones

$$a^{n-1} = 1 \;, \quad b^2 = a^{2^{n-2}} \quad , \quad bab^{-1} = a^{-1} \;.$$

f) $\mathbb{Z}_q \ltimes \mathbb{Z}_2$,($q = 2^{n-1}$, $n \geq 4$) , donde el generador de $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre $\mathbb{Z}_q$ como la multiplicación por $-1 + 2^{n-2}$, es decir, las relaciones en los generadores son

$$a^q = 1 \quad , \quad b^2 = 1 \quad , \quad bab^{-1} = a^{-1+2^{n-2}}$$

([Ha.p.199]) .

Con respecto al 2-grupo del ejemplo 2.1.(c) , tenemos el siguiente resultado:

<u>2.2 LEMA. Si</u> Q_{4m} <u>es un 2-grupo cuaternio generalizado y</u> C <u>es el subgrupo cíclico generado por</u> $a = e^{\pi i/m}$, <u>entonces</u>

a) <u>En la extensión</u>

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q_{4m} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

$\mathbb{Z}_2$ <u>actúa sobre</u> C <u>como la multiplicación por</u> -1.

b) <u>Todo elemento de</u> $Q_{4m} - C$ <u>es de orden 4.</u>

c) Q_8 <u>tiene exactamente tres subgrupos cíclicos de índice 2, y en general,</u> Q_{4m} $(m>2)$ <u>tiene un único subgrupo cíclico de índice 2.</u>

d) Q_{4m} <u>tiene un único elemento de orden 2.</u>

e) <u>La extensión</u>

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q_{4m} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

<u>no se escinde, y en consecuencia</u> $Q_{4m} \not\cong C \rtimes \mathbb{Z}_2$ (por I.3.1)

Para demostrar el teorema principal de esta sección, necesitaremos el siguiente resultado de la teoría de números ([Br.p.199]):

<u>2.3 LEMA. Sea</u> x <u>un entero tal que</u> $x^p \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$ <u>para alguna</u> $n \geq 3$. <u>Si p es impar, entonces</u> $x \equiv 1 \pmod{p^{n-2}}$. <u>Si p = 2, entonces</u> $x \equiv \pm 1 \pmod{2^{n-2}}$.

2.4 Observación. Sea G un p-grupo y C un subgrupo cíclico de G de índice p. Entonces, si el orden de G ($|G|$) es p^n tenemos que

$$|C| = p^{n-1} = q \quad .$$

Es decir que $C \cong \mathbb{Z}_q$, Sabemos, además, que todo subgrupo maximal M de G es normal en G, de manera que C es subgrupo normal de G. Entonces, por II.1.2, (C,G,∂) es un módulo cruzado (∂ es la inclusión y G actúa sobre C por conjugación). Tenemos entonces la extensión cruzada

$$(G,\partial):\; 0 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

donde $Q = G/\partial C$ es un grupo abeliano de orden p .

<u>2.5 PROPOSICION. Dada la extensión cruzada</u> (G,∂) <u>considerada en 2.4, si</u> Q <u>actúa trivialmente sobre</u> C, <u>entonces</u> G <u>es isomorfo a un grupo del ejemplo 2.1(a) ó 2.1(b) .</u>

Demostración. Si Q actúa trivialmente sobre C, entonces, por I.2.5, $C \subseteq Z(G)$ y, en consecuencia, G está generado por elementos que conmutan. Por lo tanto, G es abeliano, y, por el teorema fundamental de grupos abelianos ([Fr,p.75]), concluimos que

$$G \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$$

o bien

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$$

($\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p \not\cong \mathbb{Z}_{p^n}$, pues p y p^{n-1} no son primos relativos).

///

Consideremos ahora el caso en que Q no actúa trivialmente sobre C, es decir, se trata de estudiar las extensiones $(G,\partial)\in Xext(Q,C)$ que inducen una acción de Q sobre C dada; pero esto significa estudiar los elementos de Opext(Q,A) y por lo tanto , considerando el resultado I.2.17 , lo primero que haremos será estudiar el grupo $H^2(Q,C)$.

Sea $\mathcal{W}$ la resolución libre de $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{W}: \ldots \longrightarrow \mathbb{Z}Q \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{Z}Q \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde, si t es el generador de Q, $\mathcal{N}$ es la multiplicación por

$$\sum_{i=0}^{p-1} t^i = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^{p-1}$$

y $\mathcal{D}$ es la multiplicación por (t-1) (ver [Br.p.58]).
Tenemos entonces que

<u>2.6 PROPOSICION. Dado un grupo cíclico</u> Q <u>de orden</u> r <u>y dado un Q-módulo</u> A, <u>si consideramos la resolución libre</u> $\mathcal{W}$ <u>de</u> $\mathbb{Z}$ <u>tenemos que</u>

$$H^i(Q,A) = \begin{cases} A^Q & \text{si } i = 0 \\ \ker(\mathcal{N})/\mathcal{D}(A) & \text{si } i = 2h-1 \quad (h=1,2,\ldots) \\ \ker(\mathcal{D})/\mathcal{N}(A) & \text{si } i = 2h \quad (h=1,2,\ldots) \end{cases}$$

(donde A^Q representa al grupo de invariantes, es decir, el mayor submódulo de A en el cual Q actúa trivialmente ([Br.p.34]).

Demostración. Aplicando el funtor contravariante $Hom_{ZQ}(\_,A)$ a la resolución $\mathcal{W}$, y después aplicando el funtor de cohomología $H^*(\_)$, obtenemos el resultado buscado (véase [Br,p.58]). ///

2.7 COROLARIO. $H^2(Q,C) = C^Q/\mathcal{N}(C) \qquad (C = Z_q)$.

Para calcular $C^Q/\mathcal{N}(C)$ necesitaremos algunos resultados:

2.8 PROPOSICION. Si t' es un generador de Q, entonces la acción de t' sobre C equivale a la multiplicación por $1 + p^{n-2}$, siempre que p sea impar ($C = Z_q$).

Demostración. Sea a un generador de C. Como $|C| = p^{n-1}$,

$$(p^{n-1})a \equiv 0 \pmod{p^{n-1}} .$$

Sea t un generador de Q y s una sección tal que s(t) es un representante de t en G (véase I.1.5). Evidentemente $s(t) \notin Z_q$, y

$$^{t}a = s(t)a(s(t))^{-1} \qquad \text{(por I.2.3)} .$$

Como C es normal en G (2.4), $s(t)a(s(t))^{-1} \in C$. Luego

$$s(t)a(s(t))^{-1} = ra$$

para alguna $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r \not\equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

Nótese que, si $r \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$, tendríamos que

$$s(t)a(s(t))^{-1} = a \pmod{p^{n-1}} \qquad y$$

la acción de Q sobre C sería trivial y estaríamos de nuevo en el caso considerado en 2.5 . Por la definición de acción de Q sobre C tenemos que

$$t({}^{t}a) = tt_a = t_a^2 \quad .$$

Tenemos entonces que

$$s(t)(s(t)a\ s(t)^{-1})s(t)^{-1} = (s(t))^2\ a\ (s(t))^{-2} .$$

Pero $s(t)a(s(t))^{-1} = ra$, entonces

$$t_a^2 = s(t)(ra)s(t)^{-1} = r^2a .$$

Procediendo inductivamente, obtenemos que

$$t_a^i = r^i a$$

de tal forma que la acción de Q sobre C está dada por un homomorfismo $\varphi : Q \to C^*$, donde $C^* = \mathbb{Z}_q^*$ representa al grupor de unidades del anillo $\mathbb{Z}_q$ y φ se define mediante

$$\varphi(t^i) = r^i \quad .$$

Dado que

$$\varphi(t^i t^j) = \varphi(t^{i+j}) = r^{i+j} = r^i r^j$$

es claro que φ es un homomorfismo.

Por otra parte, tenemos que

$$|\mathbb{Z}_q^*| = \phi(p^{n-1}) = p^{n-2}(p-1)$$

donde ϕ es la función de Euler (véase [N-Z,p.32]). Además, para $n \geq 3$, tenemos que $p^{n-2}(p-1) \geq p$, de modo que $|\mathbb{Z}_q^*| \geq p$. Cuando $p = i$,

$$t_a^p = r^p a$$

pero $t^p = 1$, entonces

$$a \equiv r^p a \quad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

y, en consecuencia

$$r^p \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

lo cual implica, aplicando 2.3, que

$$r \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p^{n-2}) .$$

Además, por el teorema del binomio

$$(1 + kp^{n-2})^p \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

de manera que

$$r \equiv 1 + kp^{n-2} \quad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

donde k es un entero tal que

$$k \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

pues, de lo contrario $k = bp$ para alguna $b \in \mathbb{Z}$ y tendríamos que

$$r \equiv 1 + (bp)p^{n-2} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

lo cual según vimos, no es posible. Por lo tanto, como $k \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$, k tiene inverso multiplicativo y debe existir alguna $c \in Q = \mathbb{Z}_p$ tal que

$$ck \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p) .$$

Consideremos entonces al elemento t^c . Como $|Q| = p$, t^c debe generar a Q. Además

$$\begin{aligned} r^c \equiv (1 + kp^{n-2})^c &\equiv (1 + ckp^{n-2}) \\ &\equiv 1 + p^{n-2} \qquad (\mathrm{mod}\ p^{n-1}) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$t^c_a = s(t)^c(a)s(t)^{-c} = r^c a = (1 + p^{n-2})\, a$$

Con lo que queda demostrado que el generador $t' = t^c$ actúa sobre C como la multiplicación por $(1+p^{n-2})$. ///

<u>2.9 PROPOSICION. Dado el módulo cruzado (C,G,∂) considerado en 2.4, si Q no actúa trivialmente sobre C y p es un primo impar, entonces G es isomorfo a un grupo del caso 2.1.(c)</u> .

Demostración. Por 2.8, si t' es un generador de Q,

$$(t')^i_a = a$$

significa que

$$r^{ci}a \equiv (1 + ip^{n-2})\, a \equiv a \qquad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

y esto sucede si y sólo si

$$ip^{n-2}a \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^{n-1}).$$

Como i no puede ser múltiplo de p, entonces a tiene que ser múltiplo de p, de tal manera que $a \in p\mathbb{Z}_q$. Pero, por definición

$$C^Q = \mathbb{Z}_q^Q = \left\{ a \in C \;\middle|\; {}^{t}a = a \text{ , para toda } t \in Q \right\}$$

y, entonces

$$C^Q = \left\{ a \in C \;\middle|\; ip^{n-2}a = 0 \right\} = p\mathbb{Z}_q \ .$$

Por otra parte, si t' es un generador de Q, aplicar el operador $\mathcal{N}$ dado en 2.6 equivale a multiplicar por

$$\sum_{j=0}^{p-1} (1 + p^{n-2})^j$$

en virtud de 2.8. Entonces, por el teorema del binomio

$$(1 + p^{n-2})^j \equiv (1 + jp^{n-2}) \qquad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

y

$$\sum_{j=0}^{p-1} (1 + p^{n-2})^j \equiv \sum_{j=0}^{p-1} (1 + jp^{n-2}) \qquad (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} 1 \quad + \quad p^{n-2} \sum_{j=0}^{p-1} j$$

$$= p \quad + \quad p^{n-2} \left(\frac{(p-1)p}{2} \right)$$

y, como p es impar, $(p-1)$ es par, de modo que $\frac{(p-1)}{2} = m$ para algún natural m. Entonces

$$\sum_{j=0}^{p-1} (1 + p^{n-2})^j = p + p^{n-2}mp \equiv p \qquad (\text{mod } p^{n-1}) .$$

Por lo tanto, aplicar $\mathcal{N}$ equivale a multiplicar por p. Luego

$$\mathcal{N} Z_q = pZ_q = C^Q \; .$$

Esto significa (por 2.6) que $H^2(Q,C)$, por lo tanto,

$$\text{Opext}^1(Q,C) = 0 \qquad \text{en virtud de II.7.12 .}$$

De ésto se deduce que la única clase de equivalencia de extensiones cruzadas de C por Q es la clase de la extensión trivial

$$0 \longrightarrow Z_q \longrightarrow Z_q \ltimes Z_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow 1$$

(donde $Q = Z_p$ y $C = Z_q$). Entonces $G \cong Z_q \ltimes Z_p$ y el generador de Z_p actúa sobre Z_q como la multiplicación por $(1 + p^{n-2})$.

///

Veamos ahora lo que sucede si $p = 2$. Sea a un generador de C (en este caso $C = Z_q$ y $q = 2^{n-1}$ con $n \geqslant 3$). Sea $t \in Q$ .Entonces

$${}^t a = s(t)a(s(t))^{-1} = ra \qquad \text{para alguna } r \text{ , y}$$

como t es de orden 2, ${}^t({}^t a) = {}^{t^2} a = a$, de manera que $\quad {}^{t}a = a = {}^{r^2}a$

y , por lo tanto,
$$r^2 \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$$

($r \not\equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$ pues la acción sería trivial). Aplicando 2.3 obtenemos que
$$r \equiv \pm 1 \qquad \pmod{2^{n-2}}$$

y, entonces
$$r \equiv \pm 1 + k2^{n-2} \pmod{2^{n-1}}$$

para alguna $k \in Z_2$. Esto significa que hay tres posibilidades:
$$r = -1$$
$$r = 1 + 2^{n-2}$$
$$r = -1 + 2^{n-2}$$

Consideremos cada posibilidad por separado:

<u>2.10 PROPOSICION. Dado el módulo cruzado</u> (C,G,∂) <u>considerado en 2.4, si</u> Q <u>actúa sobre</u> C <u>como multiplicación por</u> -1 <u>y</u> $p = 2$, <u>entonces</u> G <u>es isomorfo a un grupo de los casos 2.1.(d) ó 2.1.(e)</u> .

Demostración. Si $\quad {}^{t}a = (-1)a$, es decir, si $r = -1$,
$$C^Q = Z_q^Q = \left\{a \in C \;\middle|\; {}^{t}a = a \text{ para toda } t \in Q\right\}$$
$$= \left\{a \in C \;\middle|\; a = (-1)a\right\} .$$

Es decir que $\quad a \in C^Q$ si y sólo si
$$a \equiv (-1)a \pmod{2^{n-1}} \text{ . Esto es,}$$

si y sólo si
$$2a \equiv 0 \qquad \pmod{2^{n-1}}$$

lo que equivale a pedir que a sea múltiplo de 2^{n-2}, o sea que
$$a \in 2^{n-2}\, Z_q$$

de manera que $$C^Q = (2^{n-2})\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}_2 .$$

Por otra parte, aplicar el operador $\mathcal{N}$ equivale a multiplicar por

$$\sum_{j=0}^{1} (-1)^j = (-1)^0 + (-1) = 0$$

por lo que $\mathcal{N}\mathbb{Z}_q = 0$ y, en consecuencia, aplicando 2.6 y II.7.12 , tenemos que

$$\mathrm{Opext}^1(Q,C) = \mathbb{Z}_2 .$$

Esto significa que existen dos clases de equivalencia de extensiones cruzadas de C por Q donde p=2 y Q actúa sobre C como multiplicación por (-1) , una de estas clases debe ser la de la extensión trivial

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_q \longrightarrow \mathbb{Z}_q \ltimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

y, por lo tanto, G debe ser isomorfo al 2-grupo diedro del ejemplo 2.1.(d). La otra clase de equivalencia debe ser, en virtud de 2.2, la clase de la extensión cruzada no escindible

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_q \longrightarrow Q_{4m} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

en cuyo caso G es isomorfo al 2-grupo cuaternio generalizado del ejemplo 2.1.(e) .

///

2.11 PROPOSICION. Dado el módulo cruzado (C,G,∂) considerado en 2.4, si Q actúa sobre C como multiplicación por $1 + 2^{n-2}$ $(p = 2)$, entonces G es isomorfo a un grupo del caso 2.1.(c).

Demostración. Procediendo como en los casos anteriores, tenemos que $t_a = a$ si y sólo si $2^{n-2}a \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$.

Es decir que

$$C^Q = 2\mathbb{Z}_q \ .$$

Por otra parte, aplicar $\mathcal{N}$ equivale a multiplicar por

$$\sum_{j=0}^{1} (1 + j2^{n-2}) = 2 + 2^{n-2}$$

y al igual que en 2.9, $H^2(Q,C) = 0$.

///

2.12 PROPOSICION. Dado el módulo cruzado (C,G,∂) considerado en 2.4, si Q actúa sobre C como multiplicación por $-1 + 2^{n-2}$ $(p=2)$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

se escinde y G es isomorfo a un grupo del caso 2.1.(f).

Demostración. Si $r = -1 + 2^{n-2}$ y $n \geq 4$,

$$(-1 + 2^{n-2})a \equiv a \pmod{2^{n-1}}$$

si y sólo si

$$a \in (2^{n-2})\mathbb{Z}_q \ .$$

Entonces

$$C^Q = (2^{n-2})C$$

además,

$$\sum_{j=0}^{1} t^j = t^0 + t = 1 + t$$

de manera que

$$\mathcal{N}\mathbb{Z}_q = (2^{n-2})\mathbb{Z}_q$$

y, en consecuencia

$$H^2(Q,C) = 0 \ .$$

///

De esta manera, a través de las proposiciones 2.4, 2.5, 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 hemos demostrado el siguiente teorema

2.13 TEOREMA. Si G es un p-grupo y C es un subgrupo cíclico de índice p (p primo), entonces G es isomorfo a alguno de los grupos descritos en 2.1.(a)-(f) .

BIBLIOGRAFIA.

[B] Blakers, A.L., Some relations between homology and homotopy groups. Ann. of Math. 49 (1948),428-461.

[Br] Brown,K.S., Cohomology of Groups . Graduate Texts in Math. Vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.

[B-H] Brown,R. y Higgins,P.J., On the connection between the second relative homotopy groups and some related spaces. Proc. London Math. Soc.(3),36 (1978),193-212.

[E-M] Eilenberg,S. y Mac Lane,S., Cohomology theory in abstract groups II. Group extensions with a non abelian kernel., Ann. of Math. 48 (1947),326-341.

[F] Fraleigh,J.B., A First Course in Abstract Algebra. Addison Wesley, New York, 1966 .

[Ga-W] Garfinkel,G.S. y Wu, Y.-C, Cohomology and special extensions of groups. Czech. Math. J.(29),104 (1979),1-10.

[G-1] Gerstenhaber,M., A uniform cohomology theory for algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. 51 (1964), 626-629.

[G-2] _______, On the deformation of rings and algebras II. Ann. of Math. 84 (1966),1-19.

[Gr] Gruenberg,K.W., Cohomological Topics in Group Theory. Lecture Noetes in Math., Vol.143, Springer-Verlag Berlin, 1970.

[Ha] Hall,M. Jr., The Theory of Groups . The Macmillan Company, New York, 1967 .(tr. al español, Teoría de Grupos, Ed. Trillas, México, 1971).

[Hi-St] Hilton,P. y Stammbach,U., A Course in Homological Algebra., Graduate Texts in Math.,Vol.4, Springer-Verlag, New York, 1971.

[Hi-Wu] Hilton,P. y Wu Y.-C , A Course in Modern Algebra., John Wiley & Sons Inc.,New York, 1974.

[Ho] Holt,D.F., An interpretation of the cohomology groups $H^n(G,M)$., J. of Algebra 60 (1970), 307-318.

[Hu-1] Huebschmann,J., Crossed n-fold extensions (preliminary report)., Notic. Amer. Math. Soc.25 (1978),A-6.

[Hu-2] ________, Crossed n-fold extensions of groups and cohomology. , Comment. Math. Helv. 55 (1980), 302-314.

[Hu-3] ________, The first K-invariant, Quillen's space BG^+ and the construction of Kan and Thurston., Comment. Comment. Math. Helv. 55 (1980),315-321.

[M-1] Mac Lane, S., Cohomology theory in abstract groups III. Operator homomorfisms of kernels., Ann. of Math. 50 (1949),736-761.

[M-2] ________, Homology., Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[M-3] ________, Categories for the Working Mathematician., Springer-Verlag, New York, 1971.

[M-4] ________, Origins of the cohomology of groups., L'Enseignement Math.(2) 24 (1978),fasc.1-2,1-29.

[M-5] ________, Historical Note., J. of Algebra 60 (1979) 319-320. Apéndice a [Ho] .

[N-Z] Niven, I. y Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers., John Wiley & Sons,New York,1966.

[R-1] Ratcliffe,J.G., Crossed extensions., Trans. Amer. Math. Soc. 257 (I),(1980),73-89 .

[R-2] _____, Free and proyective crossed modules. J. London Math. Soc.II,Ser.22 (1980),66-74.

[Ro] Rotman,J.J., An Introduction to Homological Algebra., Academi Press, London, 1979.

[W] Whitehead,J.H.C., Combinatorial homotopy II., Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 453-496.

[Wu-1] Wu, Y.-C., $H^3(G,A)$ and obstructions of group extensions., J. Pure Appl. Algebra 12 (1978), 93-100 .

[Wu-2] _____, Corrections to "$H^3(G,A)$ and obstructions of group extensions"., J.Pure Appl. Algebra 20, (1981),103-105.

INDICE ANALITICO.

INDICE DE SIMBOLOS.

Además de los símbolos de uso general, hacemos uso de la siguiente notación:

(G,∂)	n-extensión cruzada de A por Q, 1,49
$Xext^n(Q,A)$	conjunto de n-extensiones cruzadas de A por Q, 4,51
$Opext^n(Q,A)$	conjunto de clases de equivalencia de elementos de $Xext^n(Q,A)$, 4, 87
f	función factor asociada a alguna sección s, 6
$G \wedge Q$	producto fibrado de G y Q, 20
$A \vee Q$	suma fibrada de A y Q, 21
$A \ltimes Q$	producto semidirecto de A y G, 28, 29
$\equiv$	equivalencia de n-extensiones cruzadas, 2, 86
$\rightsquigarrow$	conexidad de n-extensiones cruzadas, 86
(K,θ) ,	Q-núcleo abstracto, 117
(C,G,∂)	G-módulo cruzado C , 40
${}^q a$	acción del elemento $q \in Q$ sobre $a \in A$, 4
$[(0)]$	elemento neutro en $Opext^n(Q,A)$, 30,92
$\overline{W}$	cerradura normal de W ,53
$\simeq$	homotopía de complejos cruzados, 75,83
res	función restricción , 107
$\mathcal{R}$	resolución cruzada , 67
$\mathcal{X}^n$	n-extensión cruzada libre (proyectiva), 73
XMod	categoría de módulos cruzados , 47
G-XMod	categoría de G-módulos cruzados , 48
Grp(2)	categoría de homomorfismos de grupos, 53