UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

Facultad de Ciencias

El desarrollo de los modelos lineales a partir del problema de la transformación de valores en precios.

T E S I S

que para obtener el título de

M A T E M A T I C A

Presenta

Graciela Bernarda Cravioto Padilla

México D. F. 1985.

Contenido

Contenido

Agradecimientos

En primer lugar y de manera muy especial quiero agradecer a Paloma y a Sergio la dirección de este trabajo además de todo el tiempo que invirtieron en él. Si bien esta tesis aparece como un trabajo individual ha sido fundamental para su realización la labor de equipo realizada conjuntamente durante años. Además les agradezco su amistad, compañerismo y cuanto fue necesario en todo momento.

Quiero agradecer a Alberto la continua discusión que dio como fruto parte de este trabajo, así como la revisión del mismo, ya que en él siempre encontré plena disposición y constante estímulo.

Algo importante para la realización

de este trabajo fue la discusión con Pepe, a quien agradezco además de su valiosa amistad todo el apoyo brindado.

Les agradezco a Jesús López Estrada y Alejandro Mina el que formaron parte del jurado que revisó este trabajo.

Por otro lado, quiero agradecerles a Mari, Julio, María, Bilo y Paco con quienes comparto el cubículo y mucho mas que eso, el apoyo e impulso que me otorgaron durante la elaboración de esta tesis.

A Luis Briseño, Christian Lemaître y Artemisa de Montani les agradezco el que siempre estuvieron pendientes del desarrollo de este trabajo y fueron un constante estímulo para seguir adelante.

tambien agradezco a todos mis

compañeros y amigos de la facultad de ciencias, muy especialmente a todos los compañeros de la Bala por todos estos años compartidos.

Finalmente, desde luego a Ken.

introducción

A partir de un problema importante para la Economía como es el de la formación del precio de las mercancías y del planteamiento marxista de la transformación de los valores en precios, se desarrollan, vinculados a una polémica teórica sobre el problema, diversos modelos de precios, siendo ésta una de las motivaciones principales en el desarrollo de los modelos lineales y, en particular, de los modelos lineales con matrices no-negativas, que son de especial interés y acerca de los cuales existe abundante literatura.

En este trabajo vamos a exponer el modelo de Bortkiewicz y el de Leontief-Sraffa*, los cuales se ubican entre los modelos

---

* A pesar de que los modelos de Leontief y de Sraffa se conocen como dos modelos independientes, creemos que en realidad no lo son, pues si bien cada uno de ellos recalca aspectos distintos, tienen múltiples elementos en común, los cuales se reúnen en los modelos que aquí se presentan como de Leontief-Sraffa.

lineales antes referidos.

El objetivo de esta tesis consiste en exponer algunos resultados de la economía matemática en relación con esos modelos, desarrollando la argumentación matemática hasta donde se consideró necesario e interpretando las hipótesis económicas que en ellos subyacen.

Pensamos que este trabajo facilita la comprensión de los modelos señalados como un primer paso para su análisis y crítica, actitud necesaria hacia las formulaciones de la economía burguesa.

Diversos autores, en muchos de los planteamientos económicos que formulan en lenguaje matemático señalan únicamente los resultados de interés para ellos, omitiendo su deducción y dificultando con ello la comprensión de los mismos no sólo para el lector promedio, sino incluso para aquellos estudiantes interesados en cuestiones matemáticas.

Con esto, es frecuente que se oculten supuestos económicos discutibles, contradicciones y definiciones confusas que dificultan la crítica de esos autores. Por ello, en esta tesis, se intenta formular los aspectos matemáticos de la manera mas sencilla y explícita posible a fin de que estén al alcance de estudiantes de Economía que tengan conocimientos de Algebra Lineal básica.

Esta tesis está dividida en tres grandes partes. La parte "económica" abarca el primer capítulo; en el se hace un planteamiento de la funcionalidad del precio en la economía, se establece su importancia como categoría económica fundamental y se dan elementos sobre lo que dicen dos grandes corrientes de la economía acerca del precio: el enfoque convencional, vulgar o marginalista y el enfoque marxista. En este último enfoque se incluye el planteamiento de la transformación de los valores en precios.

Una vez planteado el problema de la transformación (el cual no se pretende resolver) se pasa a la segunda parte, la de "economía matemática", que incluye el segundo, tercer y cuarto capítulos. En esta parte se van desarrollando paralelamente, en la medida de lo posible, los aspectos matemáticos y económicos de los modelos de Bortkiewicz y de Leontief-Sraffa.

En el segundo capítulo se plantea en qué consiste la crítica de Bortkiewicz al planteamiento de Marx y la solución que da aquél, solución que, si bien en su origen tiene una preocupación por el valor, culmina en un modelo de precios. Finalmente, demostramos que este modelo es muy próximo a un caso particular del modelo cerrado de Leontief-Sraffa para n-sectores y que, por tanto, el modelo de Bortkiewicz contiene las ideas fundamentales que aquellos generalizan más tarde.

En el tercer capítulo se desarrollan los modelos cerrados de Leontief-Sraffa sin y con capital fijo, demostrándose algunos teoremas donde, según ciertos autores, se ubican algunos conceptos marxistas en el marco teórico de los modelos de Leontief-Sraffa. En este terreno, nos limitamos a exponer el tema y dejamos la crítica necesaria para más tarde.

En el cuarto capítulo se desarrollan los modelos abiertos de Leontief-Sraffa sin y con capital fijo.

Por último, en la tercera parte, la "matemática" que incluye solamente el apéndice, se demuestran los resultados matemáticos utilizados a lo largo de esta tesis.

En esta tesis se demuestra que los planteamientos de Bortkiewicz, Leontief y Sraffa son en gran medida comunes en lo que se refiere a la perspectiva con que abordan la problemática y las conclusiones a las que arriban, pues finalmente en los dos modelos se determinan los precios de las mercancías a partir de las condiciones técnicas de la producción, asumiendo un caracter fetichista sus planteamientos al dejar cada vez más de lado la problemática del valor y, consecuentemente, el carácter social de las relaciones de producción, así como de la determinación y función de los precios.

Estamos conscientes de las limitaciones de este trabajo, pues sólo avanza en la dirección de formular detalladamente los modelos de los autores referidos y de apuntar algunos de sus supuestos y limitaciones; sin embargo, cree_mos necesario insistir en que el mismo puede servir de base para trabajos futuros en los cuales se aborde la necesaria discusión de la validez de los supuestos en los que se fundamentan, el cuestionamiento de los modelos en sí mismos, así como se evidencie aún más el caracter social de los problemas abordados por la economía y el consecuente e inevitable caracter de clase de las formulaciones económicas, desarro_llando la crítica de la economía política.

Cap. 1

algunos elementos acerca del precio

En este capítulo se aborda desde el punto de vista de la economía, el papel que juega el precio; la intención de esto es mostrarlo como un elemento importante para comprender el funcionamiento de la economía, después, se plantean elementos de dos corrientes que se han contrapuesto a lo largo de la historia del pensamiento económico, en múltiples aspectos, en particular respecto al precio.

De esta manera se ubica el problema de la transformación de valores en precios en un contexto que nos ayuda a entenderlo más cabalmente; este problema, como lo mencionábamos en la introducción, creemos que fue un punto de partida del desarrollo de los modelos lineales en la economía.

§1.1 El Precio como categoría económica elemental fundamental

El proceso de producción capitalista como todo proceso de producción social es un proceso de producción y reproducción de las condiciones de existencia material de la vida humana, es un proceso que se desarrolla en condiciones histórico-económicas determinadas, que produce y reproduce sus relaciones de producción específicas y, en consecuencia, la forma de su sociedad.

Toda sociedad para reproducirse necesita transformar la naturaleza mediante su trabajo, producir la riqueza social, el conjunto de bienes que la sociedad consumirá. En la sociedad capitalista esta actividad la realizan hombres atomizados, independientes los unos de los otros, sin un plan emanado de las necesidades globales de la sociedad.

Veamos entonces qué papel

juega el precio en el contexto de una sociedad capitalista, en la cual simultáneamente se desarrollan las diversas esferas productivas un tanto independientes.

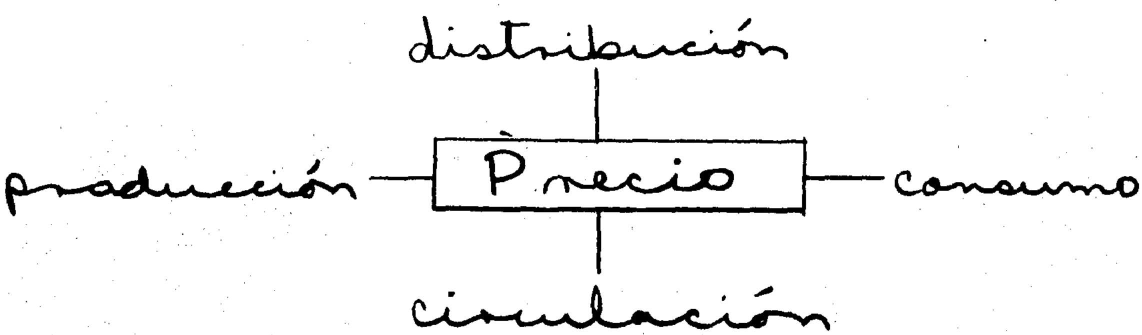
Si se piensa en la producción, los precios permiten asignar recursos, distribuir capacidades productivas, etc, esto es, permiten tomar decisiones relativas al qué, cuánto y cómo producir. Desde el punto de vista del consumo indican los costos de satisfacer las necesidades.

Es necesario que la sociedad produzca y consuma (nos referimos a consumo propiamente dicho, excluyendo al consumo productivo) y para esto se establece necesariamente una comunicación entre estas dos estructuras: la productiva y la del consumo. Esta comunicación se logra en el ámbito de la circulación mediante la realización de las mercancías, cuyo intercambio refleja el reconocimiento del trabajo individual como parte del trabajo social y el establecimiento de un criterio distributivo.

El precio es el lenguaje que ambas estructuras construyen para relacionarse; el precio permite además la confrontación de la oferta con la demanda, de la masa de los productos socialmente elaborados con la masa de necesidades sociales (en la medida en que existan las posibilidades económicas de satisfacerlas, i e, que se trate de necesidades solventes).

Por lo que el precio posibilita la unidad de la esfera productiva y de consumo, unidad necesaria para garantizar la sobrevivencia de la sociedad, su reproducción como tal.

Los productos elaborados por el hombre requieren ser realizados para su ulterior consumo, de ahí que se hable de una esfera de la circulación; asimismo, las ganancias emanadas del trabajo humano no pagado y los salarios que se reciben a cambio del trabajo pago refieren a la esfera de la distribución. La forma como se distribuya la ganancia global (entre interés, ganancia empresarial y renta) y el salario (entre sueldos y salarios), afectará la magnitud del consumo y, por ende, los ámbitos de la circulación y de la producción.



De esta manera, el precio se presenta como el principal indicador de la conducta económica de la sociedad, como un medio de comunicación elemental entre las diversas esferas, más aún, el precio se convierte en el motor de la economía, ya que los capitalistas orientarán su producción de acuerdo con las ganancias que esperan obtener en relación a los precios. Una vez que se ha producido, el precio devendrá en un sistema de premio o castigo a las decisiones antes tomadas y a la vez es un estímulo para mejorar estas decisiones.

Se han establecido, pues, algunos elementos que evidencian la importancia que para la economía tiene el estudio del precio, vinculadas sobre todo a su funcionalidad. Ahora bien, diversas corrientes han desarrollado teorías respecto al origen y significado de los precios, a su esencia. A continuación, se esbozarán los elementos más generales de dos de estas teorías: la convencional, vulgar o marginalista y la marxista.

§1.2 El enfoque convencional, vulgar o marginalista acerca del precio.

Desde el punto de vista de la economía vulgar y sus sucesores, la sociedad se encuentra dividida en tres agentes económicos no excluyentes entre sí: los consumidores, los productores y los dueños de los recursos productivos (la tierra y el trabajo); estos últimos proporcionan insumos necesarios para la producción del conjunto de bienes que se demandan, a cambio de lo cual sus propietarios reciben un ingreso. Los productores organizan la producción y determinan, en última instancia, la oferta de bienes y servicios, si sus decisiones fueron acertadas obtendrán un ingreso (el beneficio). Finalmente, todos los que obtienen ingresos pertenecen al grupo de agentes económicos llamados consumidores.

Consideran una economía en la que existe competencia perfecta, que se dan las circunstancias para que cada sujeto sea lo bastante pequeño respecto al conjunto del mercado para no poder influir ni con su oferta, ni con su demanda, sobre los precios del mercado. Esto significa, en otras palabras, que mientras los precios se forman como resultado del conjunto de las acciones y reacciones de todos los sujetos económicos, cada sujeto considerado individualmente debe aceptar los precios de mercado como dados, los cuales no son modificables con su acción.

Los expositores de la economía marginalista parten del siguiente problema: dados una cierta cantidad limitada de recursos productivos, determinadas técnicas de producción y el conjunto de preferencias de los sujetos económicos, determinar la cantidad de bienes producidos y cambiados, así como los precios a los cuales tales cambios tienen lugar en la configuración del equilibrio general.

El equilibrio en un mercado se alcanza cuando la oferta que llega al mercado a cualquier precio dado es igual a la demanda a ese mismo precio, pero tan sólo en el precio de equilibrio son iguales las cantidades que se desean comprar y vender, siendo compatibles las preferencias de los compradores con las de los vendedores.

Cuando hablan de equilibrio general se refieren a la posición de equilibrio referida a la totalidad del sistema económico, en cuya configuración son simultáneamente realizadas las posiciónes de equilibrio hacia las cuales, respectivamente, tienden los diversos sujetos económicos. Para el análisis del equilibrio general, consideran tres teorías que surgen por separado y que posteriormente (a fines del siglo XIX) confluyen; estas son:

- La teoría del consumidor, la cual trata de la determinación de las cantidades cambiadas y de los precios de los bienes de consumo
- La teoría de la producción, la cual se refiere a las cantidades cambiadas y a sus precios, ya sea de los servicios productivos de los capitales, ya sea de los bienes intermedios.
- La teoría de la empresa, la cual trata de las cantidades producidas de los bienes de capital propiamente dichos y de sus precios.

"La lógica del proceso con el que se alcanza una situación de equilibrio puede ser descrita así: Se supone que existe en forma totalmente casual, un cierto sistema de precios. Partiendo de la base de tales precios, cada sujeto procura comportarse de forma que pueda conseguir una posición de máxima satisfacción o de máximo rendimiento. Los sujetos individuales dueños de capitales procurarán vender los servicios de tales capitales mientras obtengan un beneficio suficiente para compensar el sacrificio que esto significa; buscarán, por lo tanto, la forma de distribuir de la manera más satisfactoria tal renta entre consumo y ahorro; intentarán distribuir la renta consumible entre los distintos bienes de forma que hagan máxima su utilidad, y de distribuir su propio ahorro en la adquisición de bienes de capital de forma que puedan obtener una renta máxima de tales bienes en el futuro. Los empresarios adquirirán los factores de la producción, ya sean servicios productivos o bienes intermedios, y los combinarán de tal forma que puedan producir a un coste mínimo; y determinarán cuáles bienes deben producir y en qué cantidad para obtener el máximo rendimiento. De este complejo de relaciones del sistema de precios tomado como hipótesis, deriva un conjunto de cantidades ofrecidas y demandadas que se confrontarán en el mercado. Naturalmente, puesto que el sistema de precios ha sido tratado como casual en la hipótesis, no se podrá suponer, en general, que la demanda y la oferta de cada bien sean iguales. Ocurrirá sin embargo, que respecto a los precios iniciales aparecerán aumentos de precios en todos los casos en los que la demanda supere a la oferta y disminuciones de precios en todos los casos en que la oferta supere a la demanda. A cada nueva configuración de los precios corresponderán otras demandas y otras ofertas. El proceso continuará hasta el punto en que se dé la igualdad entre las cantidades ofrecidas y demandadas. El equilibrio entonces, resultará verificarse por un doble orden de condiciones: una condición subjetiva, que consiste en la persecución de una posición de máximo por parte de cada sujeto económico; y una condición objetiva, la cual a través del equilibrio entre la oferta y la demanda para cada mercado, garantiza que la posición máxima conseguida por cada sujeto sea compatible con las conseguidas por todos los demás" (Napoleoni; El pensamiento económico en el siglo XX, pags 15-16)

Los precios de equilibrio vienen a configurarse como la medida de las relaciones de equivalencia técnica y psicológica del sistema (teóricamente determinables, al margen de si se verifica o no un acto de cambio en el mercado). Son el punto de igualación de la oferta y la demanda, las conciben como el pago a los factores de la producción tierra, trabajo y capital, factores a las que ubican como fuente de la renta, el salario y la ganancia, respectivamente.

Esta teoría surge de una problemática de tipo subjetivo; se centra en los individuos económicos y su psicología; consideran que la maximización de los comportamientos diferenciados contribuye a la maximización de la sociedad como suma de prácticas sociales; lo que es válido para el individuo es válido también para la Sociedad en su conjunto, esto es, la sociedad es la suma aritmética de individuos aislados, señalan que: " Es probable que la conducta de un agente compita en algún sentido con la de otro. Pero en una perspectiva más amplia, es la cooperación de agentes con metas encontradas lo que genera la producción de bienes y servicios económicos." (Ferguson; teoría Micro-económica pag 9-10)

Conciben el capitalismo como un sistema que tiene la apariencia de un orden natural y espontáneo y, por lo tanto, eterno; conciben un todo indiferenciado; reducen la sociedad a la existencia de consumidores, dejando de lado la existencia de clases sociales, pues si bien es cierto que capitalistas y trabajadores son consumidores, lo son de naturaleza muy diferente: los trabajadores solo pueden consumir cuando reproducen su propio valor y a la vez un valor superior (plusvalor), en cambio los capitalistas lo hacen incluso cuando no producen nada.

Consideran la producción como el producto de la cooperación que se establece entre los diversos "agentes" de la sociedad, sin importarle la relación social que entre ellos se establece, no importa que unos (los capitalistas) sean los dueños de los medios de producción y se apropian del valor producido por la fuerza de trabajo y los otros (los trabajadores) tengan que vender su fuerza de trabajo para poder subsistir.

Consideran el consumo como el aspecto esencial; no ven más allá de las relaciones de intercambio entre vendedores y compradores; se remiten a las cualidades físicas de las mercancías en la satisfacción de las necesidades, distorsionando la realidad al solo analizar los fenómenos según se presentan en el mercado; prescinden del proceso de producción, imposibilitando la comprensión de la sociedad capitalista.

En la sociedad capitalista lo principal es la producción, y ésta determina la distribución, circulación y consumo, siendo todos ellos etapas de un mismo proceso, el proceso de producción y reproducción capitalista.

En la producción social, el consumo es sólo una de las fases indispensables para continuar el proceso de producción, lo engendra en la medida en que un objeto adquiere realidad en el momento de ser consumido, además por haber sido consumido requiere ser remplazado por una nueva producción. Pero a la vez, la producción genera el consumo; pues no es sino mediante aquella que el producto existe como tal para ser consumido, crea además un consumidor específico, al determinar la forma y el modo de consumo y no sólo es el medio para satisfacer las diversas necesidades humanas, sino que también genera necesidades indispensables para la acumulación capitalista, es decir crea "un sujeto para el objeto"

La misma interrelación se encuentra entre producción y distribución, aunque la distribución aparezca como supuesto para el inicio de la producción es a la vez resultado de ésta, pues existe inicialmente una distribución de los medios de producción y de los diferentes miembros de la sociedad en el proceso de producción antes de la distribución del producto o del ingreso. La distribución del producto obtenido bajo la forma de salario, ganancia y renta es la expresión de unas determinadas relaciones sociales de producción.

Asimismo, la circulación de mercancías que finalmente serán consumidas presupone al mismo proceso de producción, el cual da lugar y es resultado de una determinada división social del trabajo que permita que las mercancías circulen o se intercambien entre los diversos productores o entre todos los miembros de la sociedad. Es decir, sin la existencia del intercambio de mercancías, los individuos no establecerían ninguna conexión de sus diversos trabajos productivos; pero a la inversa, sin el establecimiento de esas relaciones sociales tampoco habría intercambio de mercancías.

Por lo tanto, la producción es condición necesaria del consumo, distribución e intercambio y predomina sobre ellos.

En la concepción marginalista se pretende desconocer la forma en que el ingreso es obtenido por las diversas clases sociales y así justificar la ganancia capitalista, la cual para ellos no aparece como excedente, como residuo, sino como el pago justo al factor capital.

Es erróneo considerar a la oferta y la demanda como elementos explicativos del precio, ya que la divergencia entre ambas solo explica oscilaciones del precio de mercado alrededor del precio de producción, y cuando la oferta y la demanda se igualan, las mercancías se venden a su precio de producción; cuando la oferta y la demanda se igualan se anulan entre sí como "fuerzas del mercado", pero al anularse dejan de explicar porqué el precio se expresa precisamente en una suma de dinero determinada y no en otra suma de dinero distinta.

"Capital, tierra y trabajo aparecen respectivamente como fuentes de interés (en vez de ganancia), renta de la tierra y salario como sus productos, sus frutos; aquellos son el motivo, éstos la consecuencia; aquellos la causa, éstos el efecto, y ello de tal manera que cada fuente por separado es referida a su producto como lo segregado y producido por ella. Todos esos tres ingresos... son tres partes del valor del producto, o sea en general partes de valor, o expresado en dinero: ciertas partes de dinero, de precio." (Marx; el Capital, tomo III, pag 1040)

" Al capitalista se le manifiesta su capital, al terrateniente su suelo y al obrero su fuerza de trabajo, o más bien su trabajo mismo, en cuanto tres fuentes diferentes de sus réditos específicos: la ganancia, la renta de la tierra y el salario. De hecho lo son en el sentido que el capital es para el capitalista una perenne máquina extractora de plustrabajo; el suelo, un perenne imán que atrae para el terrateniente una parte del plusvalor succionado por el capital, y, finalmente el trabajo la condición que constantemente se renueva y el medio que siempre se renueva para adquirir, bajo el título de salario, parte del valor creado por el obrero y, por ende, una parte del producto social medido por esa parte de valor: los medios imprescindibles de subsistencia... pero sin crear la sustancia misma que se transforma en estas diferentes categorías. La distribución más bien presupone la existencia de esa sustancia, a saber: el valor global del producto anual, que es nada más que trabajo social objetivado" (Marx, el Capital, tomo III, pags 1046-1047)

Sin embargo, no es en esta forma como se presentan las cosas, sino más bien de una forma distorsionada, pero para la economía vulgar las cosas le parecen más evidentes cuanto más escondida está en ellas su conexión interna, pero más corresponden a la representación ordinaria.

Aparecen la tierra y el capital como valores de uso que producen valor, y el trabajo aparece asociado al salario como su único producto. "Así de fuentes mediante las cuales una parte del valor se transmuta en la forma de ganancia, una segunda parte en la forma de la renta y una tercera en la forma del salario, se convierten el capital, la tierra y el trabajo, en fuentes reales de las que surgen esas mismas partes de valor y las partes respectivas del producto en que aquellas existen o por las cuales son intercambiables, y en fuentes de las cuales, como manantial último, brota por consiguiente el valor mismo del producto." (Marx, El Capital, tomo III, pags 1051-1052).

De esta manera hemos esbozado y comentado los elementos más generales de esta teoría.

§1.3 Elementos de la teoría marxista acerca del precio

Marx desarrolla su punto de vista partiendo del análisis de las condiciones materiales de vida en una etapa concreta del desarrollo social: el modo de producción capitalista, demostrando que las fuerzas determinantes de la historia se basan en relaciones sociales de producción; a partir de esto, todas las categorías económicas son analizadas dentro de una concepción particular de la sociedad y de la historia: el materialismo histórico.

Marx concibe el movimiento social como un proceso histórico - natural regido por leyes que no solo son independientes de la voluntad, la conciencia y la intención de los hombres, sino que además determina su voluntad, conciencia e intenciones.

"En la producción social de su existencia, los hombres establecen determinadas relaciones, necesarias e independientes de su voluntad, relaciones de producción que corresponden a un determinado estadio evolutivo de sus fuerzas productivas materiales. La totalidad de esas relaciones de producción constituyen la estructura económica de la sociedad, la base real sobre la cual se alza un edificio jurídico y político, y a la cual corresponden determinadas formas de conciencia social. El modo de producción de la vida material determina el proceso social, político e intelectual de la vida en general. No es la conciencia de los hombres lo que determina su ser, sino por el contrario, es la existencia social lo que determina su conciencia". (Marx, Prólogo a la contribución a la crítica de la Eco Pol)

Al analizar Marx el modo de producción capitalista y las relaciones de producción e intercambio a él correspondientes, observa que la riqueza se presenta como un arsenal de mercancías, por lo que inicia el estudio por la mercancía individual, forma elemental, primaria y básica de la riqueza.

En el capitalismo es la mercancía la que incorpora las determinaciones y contradicciones básicas al modo de producción, es el único sistema económico en la historia de la humanidad basado en la producción generalizada de mercancías donde éstas no sólo aparecen a nivel de la circulación, sino que dominan el ámbito de la producción, distribución y consumo.

Así, la mercancía viene a ser el elemento más simple cuya producción requiere la existencia de relaciones sociales particulares y de los elementos técnico-materiales del proceso de trabajo.

La mercancía se presenta como unidad contradictoria de valor de uso y valor.

La mercancía, a primera vista, es una cosa producto del trabajo social que posee una utilidad, un valor de uso; además, ha sido producida no para satisfacer las necesidades de su productor, sino para ser útil a otros, la sociedad debe reconocerle esta utilidad al estar dispuesta a cambiarla por otras mercancías.

El valor de uso de la mercancía se refiere a sus cualidades en el sentido de su capacidad para satisfacer una determinada necesidad humana. En tanto solo expresa las propiedades físicas o naturales de las mercancías, no puede considerarse como su esencia o la propiedad que las haga intercambiables: para intercambiarlas deben ser comparables, y esto solo lo logramos haciendo de lado su valor de uso, pero al hacer esto les queda únicamente la propiedad de ser producto del trabajo, de trabajo abstractamente humano. Es en cuanto solidificación de ese algo común que son valores, es su valor el que se manifiesta en la relación de intercambio.

El valor es el producto del esfuerzo humano, es una propiedad social y no física de las cosas, por lo que las mercancías en cuanto valores resultan inasequibles, su objetividad como valor solo puede ponerse de manifiesto en la relación, en el vínculo y en la oposición entre diversas mercancías.

El valor de cambio es la forma de manifestación necesaria del valor, y su magnitud está determinada por la cantidad, el tiempo de trabajo socialmente necesario para la producción de la mercancía respectiva.

"Por ello, si en lo que se refiere al valor de uso el trabajo contenido en la mercancía sólo cuenta cualitativamente, en lo que tiene que ver con la magnitud del valor, cuenta solo cuantitativamente, una vez que ese trabajo se halla reducido a la condición de trabajo humano sin más cualidad que ésa. Allí se trataba del cómo y del qué del trabajo; aquí del cuánto, de su duración. Como la magnitud del valor de una mercancía solo representa la cantidad de trabajo en ella contenida, las mercancías, en cierta proporción, serán siempre, necesariamente, valores iguales". (Marx, El Capital, tomo I, pág 56)

"Todas las mercancías son no-valores de uso para sus poseedores, valores de uso para sus no-poseedores. Por eso tienen todas que cambiar de dueño. Pero este cambio de dueños constituye su intercambio, y su intercambio los relaciona recíprocamente como valores y las realiza en cuanto tales. Las mercancías, pues, tienen primero que realizarse como valores antes que puedan realizarse como valores de uso... Por otra parte, tienen que acreditarse como valores de uso antes de poder realizarse como valores, pues el trabajo humano empleado en ellas sólo cuenta si se lo emplea en forma útil para otros. Pero que sea útil para otros, que su producto satisfaga necesidades ajenas, es algo que solo su intercambio puede demostrar." (Marx, El Capital, tomo I, pag 105)

La sociedad mercantil es una sociedad atomizada: la producción de la sociedad recae en individuos mutuamente independientes y no existiendo una relación anterior que planifique, cada productor produce para la sociedad valores de uso que a través del intercambio por los valores de uso de los otros permitirá la satisfacción de las necesidades sociales. Las relaciones sociales entre los productores, al manifestarse en el intercambio, aparecen como relaciones entre las cosas; las relaciones de producción se cosifican y al enfrentarse unas cosas con otras reflejan las relaciones humanas como relaciones propias de las cosas. Tal parece que las cosas cobran vida y se vuelven contra el hombre, se le imponen como algo ajeno con movimiento propio.

"Lo misterioso de la forma mercantil consiste sencillamente, pues, en que la misma refleja ante los hombres el carácter social de su propio trabajo como caracteres objetivos inherentes a los productos del trabajo, como propiedades sociales naturales de dichas cosas, y, por ende, en que también refleja la relación social que media entre los productores y el trabajo global, como una relación social entre los objetos, existente al margen de los productores" (Marx, El Capital, tomo I, pág 88)

Lo que está en el fondo de esta fetichización es el desdoblamiento de las características inherentes a las mercancías: valor de uso - valor, trabajo concreto (útil) — trabajo abstracto, desdoblamiento del trabajo como esfuerzo físico transformador de la naturaleza y esfuerzo social productor de los vínculos entre los individuos.

"El trabajo es, en primer lugar, un proceso entre el hombre y la naturaleza, un proceso en que el hombre media, regula y controla su metabolismo con la naturaleza. El hombre se enfrenta a la materia natural misma como un poder natural. Pone en movimiento las fuerzas naturales que pertenecen a su corporeidad, brazos y piernas, cabeza y manos, a fin de apoderarse de los materiales de la naturaleza bajo una forma útil para su propia vida. Al operar por medio de ese movimiento sobre la naturaleza exterior a él y transformarla, transforma a la vez su propia naturaleza" (Marx, El Capital, tomo I, pág 215)

En una carta de Marx a Kugelmann fechada el 11 de julio de 1868, señala: "... un país que dejase de trabajar, no digo durante un año sino por unas pocas semanas, se moriría... la cantidad de producto correspondiente a las diversas necesidades requiere masas diferentes y cuantitativamente determinadas del trabajo social de la sociedad. El que no pueda eliminarse esta necesidad de distribuir el trabajo social en proporciones definidas mediante la _forma particular_ de la producción social, sino que sólo pueda cambiar la _forma que toma_ es evidente. No se puede eliminar ninguna ley natural. Lo que puede cambiar con el cambio de circunstancias históricas, es la _forma_ en que operan esas leyes. Y la forma en que opera esa división proporcional del trabajo en un estado de la sociedad en que la interconexión del trabajo social se manifiesta en el intercambio privado de cada uno de los productos del trabajo, es precisamente el valor de cambio de esos productos.

"La ciencia consiste precisamente en elaborar cómo opera la ley del valor... Lo característico de la sociedad burguesa consiste precisamente en esto, en que a priori no hay una regulación consciente, social de la producción. Lo racional y lo necesario se producen en la naturaleza sólo como un promedio que opera ciegamente" (Marx y Engels, correspondencia, pág 169)

El valor es la forma histórica de expresión de esas leyes naturales: a) el hombre debe trabajar para reproducirse; b) el hombre es componente del trabajo social. La ley del valor es una ley específica del desequilibrio que se encarga de distribuir inconscientemente el trabajo social y socializarlo, sancionándolo. Opera independientemente de mi voluntad y la de los otros, es un entrechocar de voluntades que se potencian como ley tendencial.

"Las colisiones entre las innumerables voluntades y actos individuales crean en el campo de la historia un estado de cosas muy análogo al que impera en la naturaleza inconsciente. Los fines de los actos son obra de la voluntad, pero los resultados que en la realidad se derivan de esos actos no lo son, y aun cuando parezcan ajustarse al fin propuesto, a la postre encierran consecuencias muy distintas a las propuestas. Por eso, en conjunto, los acontecimientos históricos también parecen estar regidos por el azar. Pero allí donde en la superficie de las cosas parece reinar la casualidad, ésta se halla siempre regida por leyes internas, ocultas, y de lo que se trata es de descubrir estas leyes". (Marx y Engels, obras escogidas, tomo 8, Ludwig Feuerbach y el fin de la filosofía clásica alemana, pág 381).

Marx recorre a partir de una mercancía que busca expresar su valor desde la forma simple del valor hasta la forma dinero.

Forma simple $xA = yB$
Cuando la sociedad reconoce la igualdad, A expresa su valor en la mercancía B, B representa el cuerpo del valor en que se expresa A.

Forma desarrollada $xA = yB$; $xA = zC, \ldots$
El valor de A toma muchos cuerpos, la relación depende del valor de uso de A, pero también del de las otras; Marx avanza luego en un sentido aparentemente formal de voltear las ecuaciones, entonces en el mundo de las mercancías hay una que corporiza el valor en forma de equivalente general, y aquí está la posibilidad de existencia del dinero al prestar una mercancía su materialidad corpórea para expresar de manera uniforme el valor de todas las demás. Este camino no es otra cosa que el desdoblamiento del valor de uso y valor, de la mercancía y el dinero.

Demostrada la necesidad de la circulación y el metabolismo que ella implica, mercancía y dinero aparecen como sus resultados específicos. Ambas formas aparecen como producto genuino de la expansión de la circulación, como modo organizativo esencial de la producción.

Marx demostró que la transformación del dinero en capital se funda en la compra y venta de la fuerza de trabajo transformada ella misma en mercancía (logrando con esto resolver un problema planteado pero no resuelto por la Economía Política Clásica), haciendo con esto posible conciliar el intercambio recíproco de capital y trabajo con la determinación del valor por el trabajo (ley del valor). Marx distingue entre la fuerza de trabajo, la cual es una mercancía y como tal tiene valor, y el trabajo como la fuente del valor y que carece de valor. El trabajo, desde este punto de vista, es la cualidad específica de la mercancía fuerza de trabajo, su valor de uso peculiar.

El valor de la fuerza de trabajo, al igual que el de las demás mercancías, se determina por la cantidad de trabajo socialmente necesario para su producción y reproducción y este se resuelve en el valor de determinada suma de medios de subsistencia. El valor de la fuerza de trabajo y el valor que ella puede crear son dos magnitudes diferentes: por ejemplo, si el valor diario de la fuerza de trabajo es de $X/_2$ pesos (donde x representa el valor de una jornada completa de trabajo) porque los medios de subsistencia necesarios para la producción de la fuerza de trabajo cuestan media jornada, esto no impide que el obrero trabaje la jornada completa, y es el valor que añade durante esa media jornada adicional no pagada el que se convierte en el plusvalor del capitalista.

Llamemos C al capital constante, V al capital variable, P al plusvalor y analicemos la expresión de valor siguiente: Valor = C + V + P.

Sabemos que los diversos factores del proceso laboral (capital constante y capital variable) inciden de manera desigual en la formación del valor del producto. El obrero cuya fuerza de trabajo adquiere el capitalista con el capital variable incorpora al objeto de trabajo un nuevo valor mediante la adición de una cantidad determinada de trabajo, por otra parte, transfiere el valor de los medios de producción consumidos. Estos dos resultados totalmente distintos, el obrero los produce al mismo tiempo aunque sólo trabaja una vez, en el mismo instante crea y transfiere valor, esto lo logra debido a la dualidad del trabajo mismo.

"Por medio de la mera adición cuantitativa de trabajo se añade nuevo valor; mediante la cualidad del trabajo agregado se conservan en el producto los viejos valores de los medios de producción" (Marx, El capital, tomo I, pág 243)

Los factores objetivos del proceso laboral se comportan de diferentes maneras: la materia prima y los materiales auxiliares pierden la forma bajo la cual entraron en el proceso de trabajo; los medios de trabajo mantienen siempre su figura autónoma con respecto al producto. Los medios de producción sólo transfieren valor a la figura nueva del producto en la medida en que, durante el proceso laboral, pierden valor bajo la figura de sus antiguos valores de uso. El máximo de pérdida de valor que pueden experimentar en el proceso de trabajo está limitado por la magnitud de valor originaria que poseen independientemente del proceso laboral al cual sirven.

"El obrero no puede añadir trabajo nuevo, y por tanto crear valor nuevo, sin conservar valores antiguos, pues siempre se ve precisado a añadir el trabajo bajo determinada forma útil... Es, pues, un don natural de la fuerza de trabajo que se pone a sí misma en movimiento, del trabajo vivo, el conservar valor al añadir valor, un don natural que nada le cuesta al obrero pero le rinde mucho al capitalista: la conservación del valor preexistente del capital" (Marx, El Capital, tomo I, pág 249)

Lo que se consume en los medios de producción es, en general, su valor de uso, y es por medio de ese consumo como el trabajo crea productos. Su valor en realidad no se consume, y por tanto tampoco se lo puede reproducir. Se lo conserva. Lo que sí se produce es el nuevo valor de uso, en el que reaparece el viejo valor de cambio.

Otra cosa ocurre con el factor subjetivo del proceso laboral: la fuerza de trabajo que se pone a sí misma en acción. Mientras el trabajo, en virtud de su forma orientada a un fin, transfiere al producto el valor de los medios de producción y lo conserva, cada fase de su movimiento genera valor adicional, valor nuevo, es el único valor original que surge dentro de ese proceso, la única parte del valor del producto que ha sido producida por el proceso mismo. Una parte de ese valor añadido sólo -

remplaza el dinero adelantado por el capitalista al comprar la fuerza de trabajo y gastado en medios de subsistencia por el obrero mismo, esto es, reproduce el valor de la fuerza de trabajo, pero con la puesta en acción de la fuerza de trabajo no sólo se reproduce su propio valor, sino que produce un valor excedente ya que el proceso laboral sigue más allá del punto en que la fuerza de trabajo ha reproducido su propio valor.

Por lo que los mismos componentes del capital que distinguimos como factores objetivos y subjetivos del proceso laboral, desde el punto de vista del proceso de valorización podemos considerarlos como capital constante y capital variable, respectivamente, en tanto que el primero no modifica su magnitud de valor en el proceso de producción y el segundo sí lo modifica al reproducir su equivalente y un excedente (plusvalor)

Resumiendo : C.- valor prexistente

que se conserva y transfiere; V.- valor nuevo que reproduce un valor preexistente (trabajo pago); P.- valor nuevo (trabajo impago que se apropia el capitalista)

De este modo, vemos que el obrero con su trabajo reproduce el valor de su fuerza de trabajo, así, el valor del capital variable nunca deja de pertenecerle al capitalista, a veces lo hace bajo la forma dinero, a veces bajo la forma mercancía y otros bajo la forma fuerza de trabajo. También vemos que no es cierto que exista una subdivisión del producto excedente entre obrero y capitalista, sino que todo el excedente le pertenece y se lo apropia el capitalista.

Una vez analizadas las componentes de valor, veamos que podemos decir acerca del valor y el precio. El valor es una realidad esencial no tangible y el precio es la forma de manifestarse del valor; el valor es diferente del precio: difieren no solo cuantitativamente sino también cualitativamente, ya que cosas que no tienen valor pueden tener precio.

En los dos primeros tomos de El Capital, Marx señala que las mercancías se intercambian por su valor, es decir valor = precio; en el tercer tomo levanta este supuesto y dice que las mercancías se intercambian a sus precios de producción. ¿Es que el valor ya no explica más el desarrollo del capitalismo?

Marx busca determinar cómo se establece la tasa general de ganancia sin violentar la ley del valor, esto es, tal como se conoce el problema en la literatura ¿Cómo se opera la transformación de valores en precios? Aquí nos encontramos con un problema de contenido y forma, pero también es la voluntad de los hombres exigiendo tasas de ganancia iguales. Primero, se nos presenta un capitalista ante sus obreros arrancándoles plusvalía, luego se nos muestra la explotación como fenómeno social, esto es, toda la clase de los capitalistas explotando a toda la clase obrera y finalmente vemos a los capitalistas exigiéndose unos a otros la ganancia media.

En una carta de Marx a Engels fechada el 2 de agosto de 1862 le plantea el problema de la siguiente manera: "... con igual explotación del obrero en diferentes industrias, capitales diferentes del mismo volumen producirán cantidades muy diferentes de plusvalía en diferentes esferas de la producción, y por consiguiente muy diferentes tasas de beneficio, ya que la ganancia no es sino la proporción de la plusvalía respecto del capital total aplicado. Esto dependerá de la composición orgánica del capital, esto es, de su distribución en capital constante y variable ... Pero ... considerado como capital total de la clase, ... la competencia provoca que iguales sumas de capital en diferentes industrias produzcan, a pesar de su diferente composición orgánica, la misma tasa media de beneficio.

"En otras palabras: el beneficio medio que produce un capital... en cierta industria, no proviene de la aplicación de este capital particular ni está vinculado, en consecuencia, a la finalidad con la que se produce la plusvalía, sino que constituye una parte alícuota del capital total de la clase capitalista. Es una participación en la cual se paga los dividendos, en proporción a su volumen mediante la totalidad de la plusvalía (o trabajo no pagado) que produce el capital variable total (invertido en salarios) de la clase.

"... para que cada uno de los tipos de capital produzcan el mismo beneficio medio, cada uno debe vender sus mercancías al precio de costo = gasto del capital más beneficio medio [es lo que hemos llamado precio de producción en este trabajo],... Por consiguiente, la competencia no reduce a las mercancías a su valor, sino a su precio de costo [producción] que es superior, inferior, o igual a su valor, según la composición orgánica de los respectivos capitales" (Marx-Engels, correspondencia, pág 93)

Partiendo del valor, Marx piensa en tres categorías: precio de costo, precio de producción y precio de mercado. La transformación de unos en otros se da en el terreno de la competencia, pero no es la competencia la que establece las leyes que rigen a la economía, es tan sólo su ejecutor, la competencia no explica la ley sino que la deja ver ¿Qué ley?: la ley del valor.

Las mercancías de una misma esfera de la producción se obtienen con un valor individual que puede, y en general así es, diferir, pues este valor individual está determinado por las condiciones particulares de producción en las cuales cada capitalista produce; por ello, y en tanto socialmente se le reconoce un valor de mercado promedio único a cada una de esas mercancías, los capitalistas que operen en mejores condiciones que las generales implantadas en esa esfera de producción obtendrán la mercancía con un valor individual menor que el valor de mercado, puesto que operan con una productividad de la fuerza de trabajo mayor que la media de esa esfera, la cual les permite, por ese simple hecho, la posibilidad de apropiarse de masas de plusvalor producidas por otros capitales de la rama que operan en peores condiciones que las medias, las cuales obtienen la mercancía con un valor individual mayor que el valor de mercado.

Aquí, entonces, se asiste a un nivel de la competencia: el que se establece entre los capitales invertidos en la misma esfera. En este nivel: "... la competencia nivela los <u>distintos valores individuales</u> con el mismo <u>valor de mercado igual, indiferenciado</u>, al permitir las <u>diferencias entre las ganancias individuales</u>, ganancias de capitalistas considerados individualmente, y sus <u>desviaciones respecto de la tasa media de ganancia de la esfera.</u>

Inclusive crea diferencias al establecer el <u>mismo valor de mercado</u> para mercancías producidas en condiciones de producción desiguales, y por tanto con una productividad desigual del trabajo; las mercancías representan de esa manera, <u>cantidades de tiempo de trabajo desiguales e individuales</u>..." (Marx-Engels, O.E. tomo 4, teorías sobre la plusvalía, pág 175)

Pero supóngase un capital invertido en las condiciones medias de producción, esto es, un capital para el cual el valor de mercado de la mercancía de que se trate coincide con su valor individual, un capital para el cual la productividad del trabajo es igual a la productividad media de esa esfera. El valor de esa mercancía, en tanto es resultado de un proceso de producción capitalista, puede considerarse formado por dos partes: por un lado, lo que constituye su precio de costo, el cual supone lo que le cuesta al capitalista la producción de esa mercancía, es decir su capital constante y variable, y por otro lado, el plusvalor. Así, los capitalistas que operen en cualquier rama de la producción, para valorizar su capital, deben adelantarlo bajo las formas de capital constante y capital variable; por ello, el grado de valorización de su capital lo refieren al monto de capital global por ellos adelantado: "De este modo, el plusvalor, cualquiera que sea su origen, es un excedente por encima del capital global adelantado. Este excedente se halla por ende, con el capital global en una relación que se expresa mediante la fracción $P/(C+V)$, a diferencia de la tasa de plusvalor P/V..." (Marx, El Capital, tomo III, pág 49)

Esto es lo que se le revela al capitalista: la ganancia, la forma que adopta el plusvalor en cuanto ganancia; la tasa de ganancia que no es más que el plusvalor referido al capital global adelantado por él. A diferencia de la tasa de plusvalor que es igual al plusvalor referido al capital variable. De este modo, la ganancia surge para el capitalista por igual de C y de V, esto es, desde el punto de vista del capitalista hay una fuente de valor que no es el trabajo; ocultando la diferencia entre el capital variable y el capital constante, de esta manera se oculta también que el origen de la ganancia es el plusvalor, es decir, la parte de trabajo impago ejecutada por el obrero durante la jornada.

De aquí que "... lo que le cuesta la mercancía al capitalista y lo que cuesta la producción de la misma mercancía son dos magnitudes totalmente diferentes. La parte del valor mercantil consistente en plusvalor no le cuesta nada al capitalista, precisamente porque al obrero le cuesta trabajo impago..." (Marx, El Capital, tomo III, pág 30). Es decir, el costo capitalista de la mercancía se mide por el gasto de capital, el costo real de la mercancía se mide por el gasto en trabajo.

Más se oculta si se considera que el capital sólo se ha valorizado efectivamente una vez que retorna de la -

circulación, y no antes: "Aunque el excedente del valor de la mercancía por encima de su precio de costo se origina en el proceso directo de la producción, sólo se realiza en el proceso de la circulación, y adquiere la apariencia de emanar del proceso de la circulación tanto más fácilmente por cuanto en la realidad, dentro de la competencia, en el mercado real, depende de las condiciones del mercado el que ese excedente se realice o no, y en qué grado..." (Marx, El Capital, tomo III, pag 50).

Sin embargo, la producción es la que fija el límite al cual puede realizarse la tasa de ganancia, es el referente a los movimientos de la circulación.

Existen dos factores importantes que determinan posibles diferencias entre las tasas de ganancia imperantes en las diversas ramas: la composición orgánica y el tiempo de rotación del capital.

En cuanto a la composición orgánica, la masa de ganancia apropiada por el capital en su conjunto tiene su origen, y es igual en magnitud, en el plusvalor, en el trabajo impago, en el tiempo de trabajo excedente. Por ello, dado un grado de explotación promedio en la economía, esto es, una tasa de plusvalor, la masa de plusvalor producida estará determinada por el capital variable adelantado: $P = P_v' \cdot V$ (donde P_v' es la tasa de plusvalor) y dado el salario medio, la masa de plusvalor estará determinada por la cantidad de obreros ocupados productivamente. En cualquier unidad productiva, un determinado número de obreros trabaja con determinados medios de producción; no se trata aquí de calcular una medida que refleje, en unidades físicas, cuántos medios de producción en promedio pone en movimiento un obrero, pues esto sería imposible dada la heterogeneidad de los propios medios de producción (diversos tipos de máquinas y herramientas, materias primas, materiales auxiliares, etc). Sin embargo, esta es la base sobre la cual se define la composición de valor de capital, su composición orgánica, o sea la relación que en términos de valor hay entre los medios de producción y la fuerza de trabajo empleada: c/v. De aquí que referirse a diversas composiciones orgánicas significa que un capital de cien, por ejemplo, se subdivide en diferentes proporciones en capital constante y variable, y en tanto pone en movimiento distintas cantidades de trabajo vivo dada la jornada laboral y el grado de explotación promedio de la fuerza de trabajo, produce diferentes cantidades de plusvalor. Cuanto mayor es la composición orgánica del capital $= c/v$, menor es la masa de plusvalor producida por un capital de igual magnitud.

Dos factores determinan el valor de la composición orgánica, en primer lugar, la relación técnica existente entre los medios de producción y la fuerza de trabajo empleados, la cual está a su vez determinada por cuestiones de carácter técnico, por el nivel de desarrollo alcanzado por la tecnología de la rama en cuestión, lo cual implica que a mayor desarrollo técnico mayor composición orgánica; y, en segundo lugar, por el valor de los medios de producción y de la fuerza de trabajo empleadas.

Dado que el acicate de la producción capitalista es la tasa de ganancia y su objetivo la valorización del capital, cualquier masa de valor de capital tendrá posibilidades de una mayor valorización en la medida en que se invierta productivamente de acuerdo con las mejores condiciones técnicas que le permitan producir su mercancía con el menor valor unitario posible, pudiendo así, en la medida en que dicho valor sea menor que el valor de mercado, apropiarse de masas de plusvalor mayores; así, las mejores condiciones técnicas son característica y condición del capital en su conjunto manifestados a través de los capitales individuales y al observarlo para el capital social se manifiesta como un aumento tendencial de la composición orgánica media del capital.

El segundo factor ya señalado que determina posibles diferencias entre las tasas de ganancia de las diversas esferas de la producción es el tiempo de rotación del capital: "...a igual composición de los capitales y bajo circunstancias en lo demás iguales, las tasas de ganancia están en relación inversa a los tiempos de rotación y asimismo, que un mismo capital variable, si rota en diferentes lapsos, produce masas desiguales de plusvalor anual..." (Marx, El Capital, tomo III, pág 191)

De aquí que las tasas de ganancia imperantes en las diversas ramas de producción puedan diferir sensiblemente; sin embargo, esas diferentes tasas de ganancia tienden a ser equilibradas por la competencia en una tasa general de ganancia, en una tasa media de ganancia.

Es con esta tasa media de ganancia que se determinan los precios de producción, los cuales se calculan agregando a los precios de costo de las diversas esferas de la producción la ganancia media, pero esta a su vez presupone que los diferentes tasas de ganancia correspondientes a cada una de las esferas de la producción tomados aisladamente ya fueron reducidos a aquella tasa media. A su vez, la realización de las mercancías de los diversas esferas a sus respectivos precios de producción supone que los capitales invertidos en ellos obtienen una misma tasa de ganancia, correspondiendo tan solo una mayor masa de ganancia en la medida en que sea mayor la masa de valor de capital adelantado, independientemente del valor de las mercancías producidas.

Mientras que "... el precio de costo depende por completo del desembolso efectuado dentro de las respectivas esferas de la producción, el otro componente del precio (de producción) de la mercancía, la ganancia agregada a este precio de costo, no depende de la masa de ganancia producida por ese capital determinado en esa esfera determinada de la producción durante un tiempo dado, sino según la masa de ganancia que corresponde a cada capital empleado como parte alícuota del capital social global empleado en la producción global, en promedio, durante un lapso dado... El agregado de ganancia a ese precio de costo es independiente de la esfera particular de producción, es un simple promedio por cada 100 de capital adelantado" (Marx, El Capital, tomo III, págs 200-201).

La competencia entre los capitales aunada a que el incentivo del propio capital es valorizarse en la mayor medida posible hace que el capital global de la sociedad se distribuya en las diversas esferas de la producción, orientándose fundamentalmente hacia aquellas esferas que operan con una tasa de ganancia superior a la media, pero provocando con ello que en esas esferas se impongan las condiciones medias.

Aquí se está en presencia de un nivel

de la competencia diferente del referido con anterioridad: en este caso es la competencia entre los capitales invertidos en distintas esferas de la producción lo que determina que a una misma masa de capital adelantado corresponda una cantidad igual de plusvalor, esto es, una misma tasa de ganancia. Es la lucha entre los capitales por obtener una mayor cantidad de plusvalor posible para una masa de capital dada, lo que los lleva a invertirlo en aquellas esferas que temporalmente lo permitan; pero esa misma lucha provoca una tendencia a la igualación de las tasas de ganancia. Estos dos niveles de la competencia ya planteados son a los que se refiere Marx en el siguiente párrafo: "..los productos de la misma esfera se venden en el mismo valor de mercado y la competencia, pues, impone distintas tasas de ganancia, es decir desviaciones respecto de la tasa general de ganancia. De acuerdo con la segunda (proposición) la tasa de ganancia debe ser la misma para cada inversión de capital, o sea, que la competencia provoca una tasa general de ganancia. La primera ley rige para los distintos capitales independientes invertidos en la misma esfera de producción. La segunda rige para los capitales en la medida en que se encuentran invertidos en esferas de producción diferentes. Por la primera acción la competencia crea el valor de mercado, es decir, el mismo valor para mercancías de la misma esfera de producción, aunque este valor idéntico debe culminar en ganancias diferentes; de tal modo crea el mismo valor a pesar de, o más bien por medio de distintas tasas de ganancia. La segunda acción (que, de pasada, ocurre en forma muy distinta, a saber, por la competencia entre los capitalistas de esferas distintas, que lanza el capital de una esfera a otra, en tanto que la otra competencia, en la medida en que no es competencia entre compradores, ocurre entre capitales de la misma esfera) permite que la competencia cree el precio (de producción); en otras palabras, la misma tasa de

ganancia en las distintas esferas de producción, aunque esta tasa de ganancia idéntica es contraria a la desigualdad de los valores, y por lo tanto solo puede ser impuesta por precios que son diferentes de los valores.'
(Marx-Engels, Obras escogidas, tomo 4 teorías sobre la plusvalía, pág 176)

Por ejemplo:

	Capitales c v	p/v	p	p/(c+v)	Capital Consumido (Dk)
I	80+20	100%	20	20%	50
II	70+30	100%	30	30%	51
III	60+40	100%	40	40%	51
IV	85+15	100%	15	15%	40
V	95+5	100%	5	5%	10
total	390+110	—	110	—	—
promedio	78+22	—	22	22%	—

	(c+v+p) Valor	Precio de costo (Pc)	Precio (Prod-Pp)	tasa media de ganancia	Desviación del precio con relación al valor
I	90	70	92	22%	+2
II	111	81	103	22%	-8
III	131	91	113	22%	-18
IV	70	55	77	22%	+7
V	20	15	37	22%	+17

"Esta ley general de nivelación de la tasa de ganancia se impone como la tendencia dominante solo de una manera muy intrincada y aproximada como un promedio de perpetuas oscilaciones que jamás puede inmovilizarse (Marx, El Capital, tomo III, pág 203)

"Como quiera que estén regulados los precios, resulta lo siguiente:

"1) la ley del valor rige su movimiento, al hacer que la disminución o el aumento del tiempo de trabajo requerido para la producción haga aumentar o disminuir los precios de producción...

"2) La ganancia media que determina los precios de producción debe ser aproximadamente igual a la cantidad de plusvalor que corresponde a un capital dado como parte alícuota del capital social global." (Marx, El Capital, tomo III, pag 227)

"El intercambio o venta de las mercancías a su valor es lo racional, la ley natural de su equilibrio; a partir de ella pueden explicarse las divergencias, y no a la recíproca, la ley a partir de éstas." (Marx, El Capital, tomo III, pág 237)

Finalmente "la relación entre la oferta y la demanda solo explica, por una parte, las divergencias de los precios de mercado con respecto a los valores de mercado (precios de producción) y por la otra la tendencia a la anulación de esta divergencia, es decir a la anulación del efecto de la relación entre oferta y demanda". (Marx, el Capital, tomo III, pág 240)

De esta manera los precios son el mecanismo para que la plusvalía se redistribuya entre los capitalistas de acuerdo con su capital adelantado, constatando que la explotación es un hecho social.

Así, el sistema de precios permite el despliegue de mecanismos penalizadores de las decisiones tomadas por los capitalistas, se convierten en el principal indicador de la conducta económica de la sociedad y permiten la comunicación entre las diversas esfera

Cap. 2

bortkiewicz - leontief - sraffa

En este capítulo, una vez establecido en el anterior el problema de la transformación de valores en precios tal como lo plantea Marx, se establece la crítica de Bortkiewicz y su solución.

Primero se desarrolla el modelo a "pie", tal como lo hizo Bortkiewicz. Posteriormente, se resuelve utilizando álgebra lineal, para después cambiar las unidades de valor por cantidades físicas y así poderlo comparar con el modelo de Leontief y Sraffa.

Lo más relevante es la conclusión final del capítulo que muestra la proximidad entre los dos modelos.

§ 2.1 El modelo de Ladislaus von Bortkiewicz (MATEMATICO RUSO 1868-1931)

Bortkiewicz propone una solución al

problema de la transformación de los valores en precios que durante algún tiempo se consideró definitiva.

Recordemos el ejemplo de Marx:

	C	V	D_K	M^*	Valor	P_c	G	P_p
I	80	20	50	20	90	70	22	92
II	70	30	51 [50]	30	111 [110]	81 [80]	22	103 [102]
III	60	40	51 [52]	40	131 [132]	91 [92]	22	113 [114]
IV	85	15	40	15	70	55	22	77
V	95	5	10	5	20	15	22	37
Total	390	110	202	110	422	312	110	422

*[M = plusvalía]

— Cuadro 2.1. a —

Bortkiewicz realiza la modificación que está entre paréntesis, después reagrupa las ramas III y IV en un sector que produce medios de producción (I), las ramas I y V en un sector que produce bienes de consumo (II) y considera la rama II como el sector de bienes de lujo (III), obteniendo el siguiente cuadro a partir del cual Bortkiewicz analiza las condiciones de la reproducción simple.

	C	V	Dk	M	Valor	Pc	G	Pp
I	145	55	92	55	202	147	44	191
II	175	25	60	25	110	85	44	129
III	70	30	50	30	110	80	22	102
total	390	110	202	110	422	312	110	422

- Cuadro 2.1.b -

Las condiciones de reproducción simple estarían expresadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} D_{K1} + V_1 + M_1 &= D_{K1} + D_{K2} + D_{K3} \\ D_{K2} + V_2 + M_2 &= V_1 + V_2 + V_3 \\ D_{K3} + V_3 + M_3 &= M_1 + M_2 + M_3 \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

Si en estas ecuaciones sustituimos los valores del cuadro (2.1.b) obtenemos

$$92 + 55 + 55 = 92 + 60 + 50$$

$$60+25+25=55+25+30$$
$$50+30+30=55+25+30$$

De esta manera, las condiciones de la reproducción simple se respetan en el modelo de valores, pero al considerarlo en el modelo de precios de producción.

$$191 \neq 92+60+50=202$$
$$129 \neq 55+25+30=110$$
$$102 \neq 55+25+30=110$$

No se cumplen las condiciones de la reproducción simple, esto es, los ingresos distribuidos no permiten reproducir las condiciones iniciales de producción.

Con esto, concluye Bortkiewicz: 1) que el método de transformación de Marx es erróneo ya que una correcta — transformación debe preservar las condiciones de reproducción y 2) que Marx cometió el error de no convertir

a precios el capital constante y el capi-
tal variable invertido.

Bortkiewicz dice que la transformación debe ser total o si no, no realizarse, y, por ello, afirma que la ecuación que expresa los precios de producción es falsa al igual que la expresión de la tasa de ganancia que está calculada en valores, ya que la tasa de ganancia es una relación entre precios.

Bortkiewicz señala que Marx debió haber deducido, al percatarse de las deficiencias de su método, que toda su construcción de precios es inútil y demuestra que es falso que la suma de precios sea igual a la suma de valores y, a la vez, la suma de ganancias sea igual a la de las plusvalías.

Bortkiewicz considera que esto, sin embargo, no pone en tela de juicio que el origen de la ganancia es el sobre_trabajo arrebatado a los trabajado_res por los capitalistas.

Es así que en su "Contribución a una rectificación de los fundamentos de la construcción teórica de Marx en el volumen III de 'El Capital'", Bortkiewicz pretende analizar si Marx se equivocó y dónde.

Considerando la hipótesis de que el período de rotación de todo el capital anticipado (también el constante) es de un año $[Ci = Dki]$; agrupando la producción en tres sectores como se hizo antes y considerando la reproducción simple, obtiene de manera semejante a (2,1,1) lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
C_1 + V_1 + M_1 &= C_1 + C_2 + C_3 = C \\
C_2 + V_2 + M_2 &= V_1 + V_2 + V_3 = V \qquad (2.1.2) \\
C_3 + V_3 + M_3 &= M_1 + M_2 + M_3 = M
\end{aligned}
$$

donde C_i = capital constante del sector i
V_i = capital variable del sector i
M_i = plusvalía del sector i

Como la cuota de plusvalía la considera la misma en los tres sectores, si r es la cuota de plusvalía, tendremos:

$$r = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} = \frac{M_3}{V_3}$$

Con lo que (2.1,2) se transforma en:

$$\begin{aligned} C_1 + (1+r)V_1 &= C \\ C_2 + (1+r)V_2 &= V \\ C_3 + (1+r)V_3 &= M \end{aligned} \qquad (2.1.3)$$

Si la cuota media de ganancia es

$$P = \frac{M}{C+V} \qquad (2.1.4)$$

Marx expresa los precios de producción como:

$$
\begin{aligned}
P_{P_1} &= C_1 + V_1 + \rho\,(C_1 + V_1) \\
P_{P_2} &= C_2 + V_2 + \rho\,(C_2 + V_2) \qquad (2.1.5) \\
P_{P_3} &= C_3 + V_3 + \rho\,(C_3 + V_3)
\end{aligned}
$$

Esto es considerado por BortKiewicz incorrecto ya que excluye de la conversión de valores a precios el capital constante y el capital variable.

Enseguida, exponemos lo que BortKiewicz considera la forma correcta de resolver el problema.

Supongamos que en los productos del sector I la relación del valor con el precio sea (como media) como x a 1, en los del sector II como y a 1 y en los del sector III como z a 1. Sea ρ' la cuota media de ganancia (cuya expresión es distinta de la de ρ), entonces:

$$(1+\rho')(C_1x+V_1y)=(C_1+C_2+C_3)x = Cx = (C_1+V_1+M_1)x$$
$$(1+\rho')(C_2x+V_2y)=(V_1+V_2+V_3)y = Vy = (C_2+V_2+M_2)y$$
$$(1+\rho')(C_3x+V_3y)=(M_1+M_2+M_3)z = Mz = (C_3+V_3+M_3)z$$

$$\begin{aligned}(1+\rho')(C_1x+V_1y) &= (C_1+V_1+M_1)x \\ (1+\rho')(C_2x+V_2y) &= (C_2+V_2+M_2)y \\ (1+\rho')(C_3x+V_3y) &= (C_3+V_3+M_3)z\end{aligned} \qquad (2.1.6)$$

De este modo, obtenemos 3 ecuaciones con 4 incógnitas (x, y, z, ρ'). Para obtener una cuarta ecuación Bortkiewicz considera dos vías.

La primera consiste en tener presente la relación entre unidad de precio y unidad de valor y, si lo que se quiere es que el precio global coincida con el valor global, hay que añadir como cuarta ecuación.

$$Cx + Vy + Mz = C + V + M \qquad (2.1.7)$$

La segunda vía consiste en considerar que la unidad de precio debe ser igual a la unidad de valor por lo cual hay que considerar que el oro, que es la mercancía que sirve de unidad de valor y de precio, se produce en el sector III. Por tanto, la ecuación por añadir es

$$Z = 1 \qquad (2.1.8)$$

Finalmente, Bortkiewicz elige la segunda opción y, con ello, el sistema (2.1.6) se transforma en

$$\begin{aligned}(1+\rho')(C_1 x + V_1 y) &= (C_1 + V_1 + M_1)\, x \\ (1+\rho')(C_2 x + V_2 y) &= (C_2 + V_2 + M_2)\, y \\ (1+\rho')(C_3 x + V_3 y) &= C_3 + V_3 + M_3\end{aligned} \qquad (2.1.9)$$

quedando por determinarse X, Y y ρ'. De lo anterior, dividiendo entre C_1, C_2 y C_3 respectivamente, se obtiene

$$(1+\rho')\left(x + \frac{V_1}{C_1}\, y\right) = \left(\frac{C_1 + V_1 + M_1}{C_1}\right) X$$

$$(1+\rho')\left(x+\frac{V_2}{C_2}y\right)=\left(\frac{C_2+V_2+M_2}{C_2}\right)y$$

$$(1+\rho')\left(x+\frac{V_3}{C_3}y\right)=\frac{C_3+V_3+M_3}{C_3}$$

Entonces, para simplificar, utiliza la Notación:

$$f_i=\frac{V_i}{C_i}\,, \qquad 1+\rho'=\sigma$$

$$g_i=\frac{V_i+C_i+M_i}{C_i} \qquad (2.1.10)$$

con lo cual, reescribe el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma(x+f_1y)&=g_1x\\ \sigma(x+f_2y)&=g_2y\\ \sigma(x+f_3y)&=g_3\end{aligned} \qquad (2.1.11)$$

Ahora, resuelve este sistema. De la primera ecuación obtiene

$$x=\frac{f_1y\sigma}{g_1-\sigma} \qquad (2.1.12)$$

valor que sustituye en la segunda - ecuación para obtener

$$\sigma\left(\frac{f_1 y \sigma}{g_1-\sigma} + f_2 y\right) - g_2 y = 0$$

$$\frac{f_1 y \sigma^2}{g_1-\sigma} + f_2 y \sigma - g_2 y = 0$$

$$\therefore \; f_1 y \sigma^2 + f_2 y \sigma g_1 - f_2 y \sigma^2 - g_1 g_2 y + g_2 y \sigma = 0$$

$\therefore$ si $y > 0$

$$f_1 \sigma^2 + f_2 \sigma g_1 - f_2 \sigma^2 - g_1 g_2 + g_2 \sigma = 0$$

$$\therefore \; (f_1 - f_2)\sigma^2 + (f_2 g_1 + g_2)\sigma - g_1 g_2 = 0 \qquad (2.1.13)$$

$\therefore$ Si $f_1 - f_2 \neq 0$,

$$\sigma = \frac{-(f_2 g_1 + g_2) \pm \sqrt{(f_2 g_1 + g_2)^2 + 4(f_1 - f_2)(g_1 g_2)}}{2(f_1 - f_2)} \qquad (2.1.14)$$

Ahora, como $(f_2 g_1 + g_2)^2 + 4(f_1 - f_2)(g_1 g_2) =$

$$= f_2^2 g_1^2 + 2 f_2 g_1 g_2 + g_2^2 + 4 f_1 g_1 g_2 - 4 f_2 g_1 g_2$$

$$= f_2^2 g_1^2 - 2 f_2 g_1 g_2 + g_2^2 + 4 f_1 g_1 g_2$$

$$= (f_2 g_1 - g_2)^2 + 4 f_1 g_1 g_2 \text{ , se obtiene}$$

$$\sigma = \frac{(f_2 g_1 + g_2) \pm \sqrt{(f_2 g_1 - g_2)^2 + 4 f_1 g_1 g_2}}{2\,(f_2 - f_1)} \qquad (2.1.15)$$

Analicemos ambos casos: $f_1 - f_2 > 0$

$f_1 - f_2 < 0$

Si $f_1 - f_2 > 0$, entonces $\dfrac{V_1}{C_1} - \dfrac{V_2}{C_2} > 0$

$\therefore \dfrac{V_1}{C_1} > \dfrac{V_2}{C_2}$ y $\dfrac{C_1}{V_1} < \dfrac{C_2}{V_2}$.

Es decir, la composición orgánica (según Marx) del sector I es menor que la del sector II lo que, económicamente, es un supuesto poco razonable.

Supongamos entonces que $f_1 - f_2 < 0$.

De aquí podemos concluir que

$$(f_2 g_1 + g_2) > \sqrt{(f_2 g_1 - g_2)^2 + 4 f_1 g_1 g_2}$$

ya que

$$(f_2 g_1 + g_2)^2 + 4\underbrace{(f_1 - f_2)}_{<0} g_1 g_2 = (f_2 g_1 - g_2)^2 + 4 f_1 g_1 g_2$$

$\therefore$ Si $(f_1 - f_2) < 0$, las dos raíces de la ecuación de segundo grado (2.1.15) son positivas. Examinémoslas ahora.

Si consideramos el signo "+" en (2.1.15) obtenemos:

$$\sigma = \frac{(f_2 g_1 + g_2) + \sqrt{(g_2 - f_2 g_1)^2 + 4 f_1 g_1 g_2}}{2(f_2 - f_1)} >$$

$$\frac{(f_2 g_1 + g_2) + \sqrt{(g_2 - f_2 g_1)^2}}{2(f_2 - f_1)} .$$

Es decir, si $g_2 - f_2 g_1 > 0$,

$$\sigma > \frac{f_2 g_1 + g_2 + g_2 - f_2 g_1}{2(f_2 - f_1)} = \frac{2 g_2}{2(f_2 - f_1)} = \frac{g_2}{f_2 - f_1}$$

y como $f_2 - f_1 < f_2$, obtenemos que

$$\sigma > \frac{g_2}{f_2}.$$

Pero, de la segunda ecuación del sistema (2.1.11): $\sigma x + \sigma f_2 y = g_2 y$, deducimos que

$$\frac{\sigma x}{f_2 y} + \sigma = \frac{g_2 y}{f_2 y} = \frac{g_2}{f_2} \quad \therefore \quad \sigma < \frac{g_2}{f_2}$$

Luego, la raíz que se obtiene por usar el signo "+" en (2.1.15) es incompatible con el sistema (2.1.11). Concluímos entonces que $f_1 - f_2 < 0$ y que

$$\sigma = \frac{(f_2 g_1 + g_2) - \sqrt{(g_2 - f_2 g_1)^2 + 4 f_1 g_1 g_2}}{2(f_2 - f_1)} \tag{2.1.16}$$

Ahora bien, de la segunda y tercera ecuación del sistema (2.1.11) obtenemos:

$$\sigma x + \sigma f_2 y - g_2 y = \sigma x + \sigma f_3 y - g_3$$

$$\therefore \quad y(-\sigma f_2 + g_2 + \sigma f_3) = g_3$$

y

$$y = \frac{g_3}{g_2 + (f_3 - f_2)\sigma} \qquad (2.1.17)$$

Por lo que, teniendo el valor de σ, obtenemos el de y, para, con ambos valores, obtener el de x de la ecuación (2.1.12)

Bartkiewicz continúa su artículo con un ejemplo.

	C	V	M	Valor
I	225	90	60	375
II	100	120	80	300
III	50	90	60	200
total	375	300	200	875

— Cuadro 2.1.C —

de donde $C_1 = 225 \qquad C_2 = 100 \qquad C_3 = 50$

$V_1 = 90 \qquad V_2 = 120 \qquad V_3 = 90$

$M_1 = 60 \qquad M_2 = 80 \qquad M_3 = 60$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{90}{225} = \frac{2}{5}, \quad f_2 = \frac{120}{100} = \frac{6}{5},$$

$$f_3 = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}, \quad g_1 = \frac{225+90+60}{225} = \frac{5}{3},$$

$$g_2 = \frac{100+120+80}{100} = 3 \qquad g_3 = \frac{50+90+60}{50} = 4$$

valores que al sustituirlos en las ecuaciones (2.1.12) (2.1.15) y (2.1.17), nos dan:

$$\sigma = \frac{\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}\right) + 3 - \sqrt{\left[3-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}\right)\right]^2 + 4\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot 3\right)}}{2\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{5}\right)}$$

$$\sigma = \frac{2+3-\sqrt{1+8}}{2\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \quad \rho' = \sigma - 1 = \frac{1}{4}$$

$$Y = \frac{4}{3+\left(\frac{9}{5}-\frac{6}{5}\right)\frac{5}{4}} = \frac{4}{3+\frac{3}{4}} = \frac{16}{15}$$

$$X = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{5}{3} - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{5}{12}} = \frac{96}{75} = \frac{32}{25} .$$

A partir de estos valores, Bartkiewicz obtiene los cálculos de los precios.

	C ←(en precio)→	V	G
I	$225 \cdot \frac{32}{25} = 288$	$90 \cdot \frac{16}{15} = 96$	$(288+96)\frac{1}{4} = 96$
II	$100 \cdot \frac{32}{25} = 128$	$120 \cdot \frac{16}{15} = 128$	$(128+128)\frac{1}{4} = 64$
III	$50 \cdot \frac{32}{25} = 64$	$90 \cdot \frac{16}{15} = 96$	$(96+64)\frac{1}{4} = 40$
total	480	320	200

	Precio
I	$288+96+96=480$
II	$128+128+64=320$
III	$64+96+40=200$
total	1000

— Cuadro 2.1.d —

Comparando con el cuadro (2.1.c), observamos que:

$$\sum \text{de precios} = 1000 > 875 = \sum \text{de valores.}$$

Esto, según Bortkiewicz, se debe a que la composición orgánica del sector III es relativamente baja y es de ahí de donde se elige el bien que sirve de medida de precio y de valor.

Al mismo tiempo,

$$\sum \text{de ganancias} = 200 = 200 = \sum \text{de plusvalías}$$

lo cual es explicado por Bortkiewicz en virtud del hecho de que el bien utilizado como medida de valor y de precio pertenece al sector III, el cual produce los bienes de consumo capitalista.

A continuación, Bortkiewicz compara con lo que hubiera construido Marx.

$$\rho = \frac{M}{C+V} = \frac{200}{375+300} = \frac{200}{675} = \frac{8}{27} = 29.62\,\%$$

Con esto, se obtiene el siguiente cuadro:

	G	Precios
I	$\frac{8}{27}(225+90)=93\frac{9}{27}$	$315+93\frac{9}{27}=408\frac{9}{27}$
II	$\frac{8}{27}(100+120)=65\frac{5}{27}$	$220+65\frac{5}{27}=285\frac{5}{27}$
III	$\frac{8}{27}(50+90)=41\frac{13}{27}$	$140+41\frac{13}{27}=181\frac{13}{27}$
total	200	875

— Cuadro 2.1.e —

Por tanto, según Bortkiewicz, para Marx $\rho = 29.62\%$ y no se satisfacen las condiciones de la reproducción simple.

Es decir,

$$408\tfrac{9}{27} = C_1 + V_1 + M_1 \neq C = 375$$
$$285\tfrac{5}{27} = C_2 + V_2 + M_2 \neq V = 300$$
$$181\tfrac{13}{27} = C_3 + V_3 + M_3 \neq M = 200$$

En cambio, para Bortkiewicz $\rho' = 25\%$

$$C_1 + V_1 + M_1 = C = 480$$
$$C_2 + V_2 + M_2 = V = 320$$
$$C_3 + V_3 + M_3 = M = 200$$

A partir de esto, Bortkiewicz considera que:

1) Marx indica una vía equivocada para determinar el nivel de la cuota de ganancia lo que lo conduce a precios equivocados y 2) Marx, identifica - erróneamente los factores de los que depende la cuota de ganancia.

Expliquemos con más cuidado esto último. Si, siguiendo a Marx, hacemos

$$q_0 = \frac{C}{C+V} = \quad y \quad r = \text{cuota de plusvalía} = \frac{M}{V}$$

entonces tenemos que

$$\rho = \frac{M}{C+V} = \frac{1}{C+V}\,\frac{M(C - C + V)}{V} = \frac{C+V-C}{C+V}\cdot\frac{M}{V} =$$

$$\left(1-\frac{C}{C+V}\right)\frac{M}{V} = (1-q_0)r.$$

Por tanto, según Marx, dada la cuota de plusvalía, lo único que determina el nivel de la cuota de ganancia es la

mayor o menor participación del capital constante en el capital global y no — influyen en absoluto las diferentes composiciones orgánicas en cada una de las esferas de la producción. Bortkiewicz reconoce que Marx, en "El Capital", — señala que la cuota general de ganancia está determinada por 2 factores:
1) la composición orgánica de los capitales en las distintas esferas de la producción, o sea las distintas cuotas de ganancia de cada una de las esferas y
2) la distribución del capital social global en estas esferas.

Sin embargo, Bortkiewicz objeta que, dada la forma como Marx efectúa el cálculo, la recíproca influencia de estos dos factores se reduce a la influencia de uno solo: la composición orgánica del capital social global. Esto, según Bortkiewicz, es incorrecto.

De esta manera queda establecido lo esencial de la crítica de Bortkiewicz a Marx, y la solución que aquél propone. Aunque el artículo de Bortkiewicz que aquí comentamos no concluye con esto, para nuestros fines, es suficiente.

§2.2 Aproximación al modelo de Bortkiewicz mediante los resultados de Perrón - Frobenius.

Empezaremos ahora por abordar la problemática de Bortkiewicz con ayuda de los métodos del álgebra lineal y de algunos resultados sobre matrices no-negativas que fueron desconocidos para este autor.

Tengamos presente entonces el sistema inicial de nuestro autor, es decir,

$$\begin{aligned}(1+\rho')(C_1 x + V_1 y) &= C x\\ (1+\rho')(C_2 x + V_2 y) &= V y \qquad (2.2.1)\\ (1+\rho')(C_3 x + V_3 y) &= M z\end{aligned}$$

Podemos escribir esto como

$$\begin{aligned}(1+\rho')\left(\frac{C_1 x + V_1 y}{C}\right) &= x\\ (1+\rho')\left(\frac{C_2 x + V_2 y}{V}\right) &= y \qquad (2.2.2)\\ (1+\rho')\left(\frac{C_3 x + V_3 y}{M}\right) &= z\end{aligned}$$

ya que podemos suponer que la producción de cada uno de los sectores I, II y III, que son respectivamente C, V, M, son distintos de cero.

Ahora hagamos $\sigma = 1+\rho'$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{C}x + \frac{V_1}{C}y &= \frac{1}{\sigma}x\\ \frac{C_2}{V}x + \frac{V_2}{V}y &= \frac{1}{\sigma}y \qquad (2.2.3)\end{aligned}$$

$$\frac{C_3}{M}x + \frac{V_3}{M}y = \frac{1}{\sigma}z$$

Y, si escribimos

$$B = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{C} & \frac{V_1}{C} & 0 \\ \frac{C_2}{V} & \frac{V_2}{V} & 0 \\ \frac{C_3}{M} & \frac{V_3}{M} & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (2.2.4)$$

podemos expresar el sistema anterior en su forma matricial. Es decir,

$$\boxed{B\underline{X} = \frac{1}{\sigma}\underline{X}} \qquad (2.2.5)$$

Por tanto, del enfoque de Bortkiewicz se desprende que $\frac{1}{\sigma}$ es un valor propio de la matriz no negativa B y que $\underline{X}$ es un vector propio de B asociado al valor $\frac{1}{\sigma}$.

Claramente, de (2.2.5) se desprende que

$$B'\gamma' = \frac{1}{\sigma}\,\gamma' \qquad (2.2.6)$$

endonde $B' = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{C} & \frac{V_1}{C} \\ \frac{C_2}{V} & \frac{V_2}{V} \end{pmatrix}$ y $\gamma' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Es natural considerar que las entradas de la matriz B' son positivas, es decir, que en ambos sectores I y II se utiliza capital constante y capital variable.

Entonces, B' es una matriz no negativa y conectada y, por lo tanto, en virtud del teorema de Perrón - Frobenius, [véase apéndice] existe un único valor propio positivo que tiene asociado un vector propio con todas sus entradas positivas. Este vector propio es único salvo multiplicar por una constante positiva y el valor propio citado se -

llama la raíz de Frobenius o el dominante de la matriz.

Ahora bien, según el enfoque de Bortkiewicz, existen x, y, z y ρ' positivos tales que la ecuación (2.2.5) se cumple. Por tanto, x, y y ρ' satisfacen la ecuación (2.2.6) y, en virtud del resultado anteriormente citado, tenemos que

$$\frac{1}{\sigma} = \hat{\lambda}(B') = \text{raíz de Frobenius de } B' \qquad (2.2.7)$$

de donde

$$\rho' = \frac{1}{\hat{\lambda}(B')} - 1 \qquad (2.2.8)$$

Entonces, si en la ecuación (2.2.6) σ está dada por (2.2.7), tenemos que la solución positiva más general de esa ecuación es de la forma $K\begin{pmatrix}\overset{*}{X}\\ \overset{*}{Y}\end{pmatrix}$ en donde K es un real positivo y $\begin{pmatrix}\overset{*}{X}\\ \overset{*}{Y}\end{pmatrix}$ es un -

vector propio positivo de B' asociado al valor $\frac{1}{\sigma}$.

Supongamos ahora que x, y, z y ρ' constituyen una solución positiva para el sistema (2.2.5) en donde $\sigma = 1 + \rho'$, entonces x, y y σ constituyen una solución positiva de (2.2.6), y σ está dada por (2.2.8) y

$$x = K\overset{*}{x} \qquad y = K\overset{*}{y} \qquad (2.2.9)$$

Y de (2.2.5),

$$\frac{C_3}{M}x + \frac{V_3}{M}y = \frac{1}{\sigma}\, z$$

$$\therefore \qquad z = K\sigma\left(\frac{C_3}{M}\overset{*}{x} + \frac{V_3}{M}\overset{*}{y}\right) \qquad (2.2.10)$$

Finalmente, si definimos $\overset{*}{z} = \sigma\left(\frac{C_3}{M}\overset{*}{x} + \frac{V_3}{M}\overset{*}{y}\right)$,

tendriamos que $\quad z = K z^{*} \qquad (2.2.11)$

Es muy fácil comprobar que si σ está dada por (2.2.8), X y Y están dadas por (2.2.9) y Z está dada por (2.2.11), entonces tenemos una solución positiva del sistema (2.2.5) y por tanto, (2.2.8), (2.2.9) y (2.2.11) nos determinan la solución más general de este sistema.

Hemos calculado entonces la tasa de ganancia según Bortkiewicz y sus coeficientes de transformación de los valores en precios en donde el número K depende de qué numerario se elija.

Comparemos ahora lo hecho por nosotros con lo hecho por Bortkiewicz.

Si escribimos $\lambda = \frac{1}{\sigma}$, λ es un cero

del polinomio característico de B'. Es decir,

$$\begin{vmatrix} \frac{C_1}{C} - \lambda & \frac{V_1}{C} \\ \frac{C_2}{V} & \frac{V_2}{V} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Es fácil ver que los dos ceros de dicho polinomio están dados por

$$\lambda = \frac{\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V}\right)^2 - 4\,\frac{C_1 V_2 - C_2 V_1}{CV}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1}{C} - \frac{V_2}{V}\right)^2 + 4\,\frac{C_2 V_1}{CV}}}{2}$$

Pero como λ es la raíz de Frobenius de B', entonces λ es el cero de mayor valor absoluto [véase apéndice] — el cual se obtiene claramente usando el signo "+" en la expresión de arriba.

Entonces

$$\lambda = \frac{\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V}\right)^2 - 4\,\frac{C_1 V_2 - C_2 V_1}{CV}}}{2}$$

y de aquí

$$\sigma = \frac{2}{\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V}\right)^2 - 4\,\frac{C_1 V_2 - C_2 V_1}{CV}}} \qquad (2.2.12)$$

Mediante (2.2.12) <u>tenemos ya calculado a σ explícitamente</u>, pero si $C_1V_2 - C_2V_1 \neq 0$ (es decir, si $\frac{C_1}{V_1} \neq \frac{C_2}{V_2}$), podemos ir más adelante. En este caso, claramente

$$\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V} - \sqrt{\left(\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V}\right)^2 - 4\,\frac{C_1V_2 - C_2V_1}{CV}} \neq 0$$

y podemos racionalizar la expresión (2.2.12) para obtener, después de simplificar, que

$$\sigma = \frac{\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V} - \sqrt{\left(\frac{C_1}{C} + \frac{V_2}{V}\right)^2 - 4\,\frac{C_1V_2 - C_2V_1}{CV}}}{2\left(\frac{C_1V_2 - C_2V_1}{CV}\right)} \qquad (2.2.13)$$

Finalmente, multiplicando y dividiendo por $\frac{CV}{C_1C_2}$ y recordando las definiciones hechas por Bortkiewicz de f_i y g_i, obtenemos que

$$\sigma = \frac{g_2 + f_2g_1 - \sqrt{(g_2 + f_2g_1)^2 - (f_2 - f_1)\,g_1g_2}}{2\,(f_2 - f_1)}$$

Es decir, la expresión obtenida por Bortkiewicz.

Recapitulemos ahora sobre lo tratado en este parágrafo.

Nuestro autor hace una serie de suposiciones ya sea explícita o implícitamente.

Supone que se dan las condiciones para la reproducción simple, es decir que

$$C_1 + V_1 + M_1 = C_1 + C_2 + C_3 = C$$
$$C_2 + V_2 + M_2 = V_1 + V_2 + V_3 = V$$
$$C_3 + V_3 + M_3 = M_1 + M_2 + M_3 = M$$

Supone igualmente que se establecen tanto la tasa de ganancia ρ' como los precios y que estas magnitudes son positivas. De aquí se desprende que los coeficientes x, y, z anteriormente definidos son todos positivos.

Además, Bortkiewicz supone que $f_1 < f_2$ y otras diversas relaciones.

Pero, como hemos visto, lo único que se ha requerido para calcular ρ', x, y y z consiste en la suposición de que éstas magnitudes son positivas (y, naturalmente, la suposición de que las magnitudes C_i, V_i y M lo son también). Y esto ha sido <u>todo</u>.

En particular, ha salido sobrando la suposición de la reproducción simple y nuestro resultado es independiente de si la reproducción es simple, ampliada o disminuída.

§ 2.3 <u>Del modelo de Bortkiewicz al modelo de Leontief - Sraffa.</u>

Volvamos ahora nuevamente al sistema de

ecuaciones (2.1.6) establecido por Bortkiewicz:

$$
\begin{aligned}
(1+\rho')(C_1 x + V_1 y) &= Cx \\
(1+\rho')(C_2 x + V_2 y) &= Vy \qquad (2.3.1) \\
(1+\rho')(C_3 x + V_3 y) &= Mz
\end{aligned}
$$

Como ya lo hemos dicho anteriormente, aquí se consideran agregadas las diversas ramas de la producción para reducir ésta a sólo tres sectores, pero llevando más lejos nuestra simplificación, supongamos que en el primer sector se producen sólo "herramientas" que en el segundo sector se producen sólo "alimentos" y que el tercer sector queda reducido a un solo tipo de "artículos de lujo". Supongamos igualmente que si concebimos "en especie" al capital adelantado en cada sector, el capital constante se reduce a "herramientas" y el capital variable puede considerarse reducido a "alimentos".

Hagamos entonces las siguientes definiciones:

Sean H_i = la cantidad de "herramientas" utilizadas en el sector i (medida en la unidad h de "herramientas"),

A_i = la cantidad de "alimentos" recibidos por los obreros del sector i como salario (medida en la unidad a de "alimentos"),

H = la cantidad total de "herramientas" producidas (medida en unidades h),

A = la cantidad total de "alimentos" producidos (medida en unidades a),

L = la cantidad total de "artículos de lujo" producidos (medida en la unidad l de "artículos de lujo"),

V_H = el valor por unidad de las "herramientas" (dado en unidades $\frac{T}{h}$ en donde T es la unidad de tiempo de trabajo),

V_A = el valor por unidad de los "alimentos" (dado en unidades $\frac{I}{a}$) y

V_L = el valor por unidad de los "artículos de lujo" (dado en unidades $\frac{I}{l}$).

Por tanto, si partimos de lo anterior y si recordamos la definición dada por Bortkiewicz de los coeficientes x, y y z, tenemos que

$$x = \frac{P_H}{V_H}, \qquad y = \frac{P_A}{V_A} \quad \text{y} \quad z = \frac{P_L}{V_L} \qquad (2.3.2)$$

en donde P_H, P_A y P_L son respectivamente los precios de una unidad $\underline{h}$, $\underline{a}$ y $\underline{l}$.

Al mismo tiempo, ya que las cantidades C_i, V_i, C, V, M están dadas en valor, tenemos que

$$\begin{array}{ll} & C = V_H\,H \\ C_i = V_H\,H_i & V = V_A\,A \qquad (2.3.3) \\ V_i = V_A\,A_i & M = V_L\,L \end{array}$$

Ahora, de (2.3.1) y (2.3.3), obtenemos

$$(1+\rho')(x V_H H_1 + y V_A A_1) = x V_H H$$
$$(1+\rho')(x V_H H_2 + y V_A A_2) = y V_A A$$
$$(1+\rho')(x V_H H_3 + y V_A A_3) = z V_L L$$

De donde, si consideramos (2.3.2),

$$(1+\rho')(P_H H_1 + P_A A_1) = P_H H$$
$$(1+\rho')(P_H H_2 + P_A A_2) = P_A A$$
$$(1+\rho')(P_H H_3 + P_A A_3) = P_L L$$

que nos conduce finalmente a

$$P_H \frac{H_1}{H} + P_A \frac{A_1}{H} = \frac{1}{1+\rho'} P_H$$
$$P_H \frac{H_2}{H} + P_A \frac{A_2}{A} = \frac{1}{1+\rho'} P_A \qquad (2.3.4)$$
$$P_H \frac{H_3}{L} + P_A \frac{A_3}{L} = \frac{1}{1+\rho'} P_L$$

Definamos ahora la matriz $\bar{A}$ como

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{H_1}{H} & \frac{H_2}{A} & \frac{H_3}{L} \\ \frac{A_1}{H} & \frac{A_2}{A} & \frac{A_3}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.3.5)$$

Y, con ayuda de esto, podemos dar a (2.3.4) la forma matricial:

$$(P_H \;\; P_A \;\; P_L)\,\bar{A} = \frac{1}{1+\rho'}\,(P_H \;\; P_A \;\; P_L) \qquad (2.3.6)$$

Es decir, el sistema (2.3.1) de Bort - Kiewicz es equivalente al sistema (2.3.6).

Como veremos en el capítulo siguiente, la matriz $\bar{A}$ puede interpretarse como un caso particular de una matriz de Leontief de insumo - producto en la cual se incluye el consumo de los obreros y también en el próximo capítulo veremos que la ecuación fundamental del modelo cerrado de Leontief - Sraffa es una gene realización de la ecuación (2.3.6)

Todo lo anterior nos sugiere una ruta en el desarrollo del pensamiento económico que parte del problema de Marx de la transformación de valores en precios, que pasa por la forma como Bortkiewicz ataca el problema para que, a partir de esta forma, surjan los modelos de insumo-producto de Leontief-Sraffa que tan importante lugar ocupan en la economía contemporánea.

Es importante observar que, en el proceso de seguir la ruta, el centro de atención se ha desplazado fundamentalmente. En particular, la búsqueda de Marx de descubrir las relaciones sociales entre los hombres y su expresión en las relaciones de intercambio entre las mercancías, con el enfoque de Bortkiewicz, se transforma en la investigación de la tasa de ganancia "en precios" y de los coeficientes x, y y z de transformación de los valores en precios; pero sin sentirlo el propio Bortkiewicz, <u>su enfoque es tal que puede hacerse caso omiso de los valores para la determinación de los precios</u> y de esa tasa de ganancia del capital. Esto ya se observa con claridad en la ecuación (2.3.6) en donde los precios y la tasa de ganancia se hacen depender directamente de la matriz $\bar{A}$ que, como veremos, generaliza Leontief a un número arbitrario de sectores, no sin hacer a un lado antes un último residuo de la problemática de Marx que se expresa aún en Bortkiewicz con la distinción entre capital constante y capital variable.

En los capítulos siguientes, expondremos brevemente algunos intentos que se han hecho por volver a la problemática de Marx a partir de los enfoques de insumo-producto. Tocará al lector evaluar estos intentos.

Cap. 3

modelos cerrados

En este capítulo expondremos los modelos cerrados de Leontief - Sraffa partiendo de la hipótesis de que la economía está funcionando y, a partir de esto, tratamos de extraer algunas conclusiones sobre diversos aspectos de la economía. Nuestro tratamiento se desarrolla primero con el supuesto de que no existe capital fijo y luego se levanta este supuesto.

Posteriormente, como lo anunciamos en el capítulo anterior, expondremos algunos resultados que constituyen intentos por volver a la problemática originalmente planteada por Marx y que vinculan valores y precios con la composición orgánica del capital y la plusvalía con la explotación. Estos resultados se obtienen al tratar de ubicar algunos conceptos marxistas en el marco de este modelo.

§ 3.1. El modelo cerrado de Leontief - Sraffa sin capital fijo.

Consideremos una economía determinada por las siguientes características:

a_{ij} = la cantidad necesaria de la mercancía i para producir una unidad de la mercancía j,

l_j = la cantidad necesaria de trabajo para producir una unidad de la mercancía j,

b_i = la cantidad de la mercancía i que se necesita consumir para reproducir la capacidad de trabajo necesaria para producir una unidad de trabajo durante una hora, esto es, la componente i del salario real unitario.

Sean $\quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad$ y

$A = (a_{ij}) =$ la matriz con entradas a_{ij}.

A es una matriz no negativa en la que su j'ésima columna indica los insumos <u>directos</u> necesarios para la producción de una unidad de mercancía j, A es la matriz de condiciones técnicas de la economía.

Si consideramos la matriz Bl' definida como

$$Bl' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (l_1, \ldots, l_n) = \begin{pmatrix} b_1 l_1 & b_1 l_2 & \cdots & b_1 l_n \\ \vdots & & b_i l_j & \vdots \\ b_n l_1 & & \cdots & b_n l_n \end{pmatrix}$$

su j'ésima columna nos indica las cantidades de las diferentes mercancías que se necesitan consumir para reproducir la cantidad directa de trabajo necesaria para obtener una unidad de la mercancía j.

Sea

$$\bar{A} = A + Bl' = (a_{ij} + b_i l_j) \qquad (3.1.1)$$

la matriz donde $a_{ij}+b_i l_j$ es la cantidad de la mercancía i que se necesita insumir, incluyendo el consumo de los trabajadores para producir una unidad de la mercancía j.

Algunos supuestos de este modelo son: Existen a_{ij}, l_j, b_j y son constantes, cualquier modificación de alguna de ellas implica estar en otra economía; de esta manera, se supone que existe un único procedimiento para producir la mercancía j; cada procedimiento da como resultado una única mercancía; $\bar{A}$ tiene coeficientes constantes independientemente del nivel de producción; se tiene que el vector $l > \bar{0}$ y, por lo tanto, la matriz $\bar{A}$ no tiene una columna completa de ceros, es decir, cualquier mercancía utiliza para su producción al menos trabajo.

Suponemos que existen condiciones de producción capitalista.

- Los medios de producción son propiedad del capitalista;
- Los trabajadores asalariados venden su fuerza de trabajo para poder obtener sus medios de subsistencia;
- El proceso de producción se realiza bajo control del capitalista, propietario del producto, y
- El capitalista busca no sólo recuperar sus costos sino obtener la máxima ganancia.

Suponemos también que todos los insumos (incluida la fuerza de trabajo) se pagan por adelantado; pero en una primera aproximación consideramos que no existe capital fijo. Suponemos dadas las condiciones para que el salario por unidad sea el mínimo de subsistencia en todos los sectores y para que se forme una tasa media de ganancia en la : —

economía.

<u>Hipótesis</u>: La economía <u>está funcionando</u>, lo cual implica que existe una tasa media de ganancia $r > 0$ para el capital y existe un vector de precios $P > \bar{0}$ según el cual se intercambian entre sí las mercancías.

Si los capitalistas recuperan los costos de producción y obtienen además la tasa media de ganancia sobre su capital adelantado, <u>el sistema que define los precios</u> se obtiene como sigue:

Supongamos que w = tasa de salario, y que los trabajadores gastan todo su salario en medios de consumo. Entonces, si B es el vector que expresa el salario real, tenemos que

$$w = P'B = (P_1, \ldots, P_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = P_1 b_1 + P_2 b_2 + \cdots + P_n b_n \qquad (3.1.2)$$

Consideremos ahora lo que ocurre cuando se produce en estas condiciones una unidad de la mercancía j.

En primer lugar, el capital adelantado para producir dicha unidad de la mercancía j es igual a

$$\sum_{i=1}^{n} P_i a_{ij} + w l_j = \sum_{i=1}^{n} P_i (a_{ij} + b_i l_j)$$

y, por lo tanto, la ganancia obtenida por el capital es igual a

$$P_j - \sum_{i=1}^{n} P_i (a_{ij} + b_i l_j)$$

pero, si se establece la tasa media de ganancia, r, la ganancia debe ser igual al producto de r por el capital adelantado, es decir,

$$P_j - \sum_{i=1}^{n} P_i (a_{ij} + b_i l_j) = r \sum_{i=1}^{n} P_i (a_{ij} + b_i l_j) \quad (3.1.3)$$

De aquí, tenemos que

$$P_j = (1+r) \sum_{i=1}^{n} P_i \left(a_{ij} + b_i l_j \right)$$

para $j = 1, 2, \ldots, n.$

Lo cual se expresa en forma matricial como

$$P' = (1+r) P' \bar{A}$$ ó como

$$\boxed{\frac{1}{1+r} P' = P' \bar{A}} \qquad (3.1.4)$$

en donde P' denota el transpuesto de $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$.

Llamaremos a la ecuación (3.1.4) la <u>ecuación fundamental del modelo cerrado de Leontief - Sraffa sin capital fijo</u> y nuestro problema consiste ahora en calcular el sistema P de precios y la tasa de ganancia r con base en los supuestos anteriormente señalados.

La matriz $\bar{A}$ puede o no ser una matriz conectada [véase el apéndice], pero, en cualquier caso, se define en el apéndice lo que se entiende por raíz de Frobenius o dominante de $\bar{A}$ $(\hat{\lambda}(\bar{A}))$ y se establece que, sea $\bar{A}$ conectada o no, el dominante de $\bar{A}$ es un valor propio no negativo de $\bar{A}$ cuyo valor absoluto es el máximo de los valores absolutos de los valores propios de $\bar{A}$ y que, además, tiene asociado al menos un vector propio de $\bar{A}$ no negativo y no trivial (por la izquierda y por la derecha).

Sea $\lambda = \hat{\lambda}(\bar{A})$ y sea $X \geq \bar{0}$ un vector propio de $\bar{A}$ asociado a λ como se indica arriba.

Entonces $$\bar{A}\, X = \lambda X$$

que multiplicando por la izquierda por P' y considerando (3.1.4) nos conduce a

$$\frac{1}{1+r}\,(P'X) = \lambda (P'X)$$

Ahora bien, como $P \gg \bar{0}$ tenemos que

$$P'X > 0$$

por lo que, dividiendo la ecuación anterior entre $P'X$ obtenemos que

$$\frac{1}{1+r} = \lambda = \hat{\lambda}(A) \qquad (3.1.5)$$

lo cual nos conduce a una forma de calcular la tasa de ganancia del capital.

Ahora bien, si la matriz $\bar{A}$ es conectada, se demuestra en el apéndice que $\hat{\lambda}(\bar{A})$ tiene asociado <u>sólo un</u> vector propio por la izquierda (o por la derecha) excepto multiplicar por escalares positivos. Entonces, en ese caso, en virtud de la ecuación (3.1.4), dicho vector propio nos permitirá determinar los precios unitarios de las diversas mercancías, pero ¿Qué hacer cuando $\bar{A}$ no sea conectada en cuyo caso [véase el apéndice] no se puede asegurar la <u>unicidad</u> del vector propio de $\bar{A}$ no negativo y no trivial asociado a $\frac{1}{1+r}$?

Examinemos pues la posibilidad de que la matriz $\bar{A}$ sea no conectada.

Definamos entonces en primer lugar

$$S = \{ i = 1, 2, \ldots n \;/\; b_i > 0 \}$$

y si $i \in S$ digamos que la mercancía i es de <u>primera necesidad</u>.

Luego, en virtud de nuestra suposición de que $l_j > 0$ para $j = 1, 2, \ldots n$, tenemos que si i es un renglón de primera - necesidad y j es un renglón arbitrario, i y j están <u>directamente conectados</u> mediante $\bar{A}$ [véase apéndice].

Diremos ahora que un renglón i de la producción es <u>básico</u> si existe $j \in S$ tal que i y j están <u>conectados</u> mediante $\bar{A}$, es decir, si i es un "insumo" en cierta instancia de la fuerza de trabajo.

Sea $\mathcal{B} = \{1, 2, \ldots, n \,/\, i \text{ es básico}\}$.

No perdemos generalidad si suponemos que los m primeros renglones de la producción son los básicos, es decir, si suponemos que $\mathcal{B} = \{1, 2, \ldots, m\}$. En este caso es claro que dos renglones i y j cualesquiera de $\mathcal{B}$ siempre están conectados y la matriz

$$\overline{A}^{*} = (\overline{a}_{ij}) \text{ con } i, j = 1, 2, \ldots, m$$

será una matriz conectada.

Ahora bien, si $i \notin \mathcal{B}$ y $j \in \mathcal{B}$, es claro que $\overline{a}_{ij} = 0$ pues, de otro modo, i y j estarían conectados y entonces i sería básico. Con ayuda de esto y de la ecuación (3.1.4) tenemos que, para toda $j \in \mathcal{B}$

$$\frac{1}{1+r} P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i \overline{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} P_i \overline{a}_{ij}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+r}\,\overset{*}{P}{}' = \overset{*}{P}{}'\,\overset{*}{\bar{A}} \qquad (3.1.6)$$

en donde $\overset{*}{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$

Es decir, $\frac{1}{1+r}$ es un valor propio positivo de la matriz $\overset{*}{\bar{A}}$ y $\overset{*}{P}{}' > \bar{0}$ es un vector propio de $\overset{*}{\bar{A}}$ asociado a $\frac{1}{1+r}$.

Entonces, en virtud de que $\overset{*}{\bar{A}}$ es una matriz conectada [véase apéndice], tenemos que

$$\frac{1}{1+r} = \hat{\lambda}\left(\overset{*}{\bar{A}}\right) \qquad (3.1.7)$$

y que $\overset{*}{P}{}'$ <u>es un vector de Frobenius (por la izquierda) de la matriz $\overset{*}{\bar{A}}$.</u>

Nos falta, por tanto, determinar sólo los precios unitarios de las mercancías no básicas y, para determinar estos últimos, valuamos a nuestra ecuación

(3.1.4).

Debido a que $r>0$ y a que $P \geq \bar{0}$, tenemos que para toda $j \notin \mathcal{B}$,

$$P_j = (1+r)\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} P_i = (1+r)\sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ij}} P_i \; +$$

$$(1+r)\sum_{i=m+1}^{n} \overline{a_{ij}} P_i \qquad (3.1.8)$$

$$\therefore \; P_j - (1+r)\sum_{i=m+1}^{n} \overline{a_{ij}} P_i = (1+r)\sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ij}} P_i > 0$$

$$(3.1.9)$$

ya que para cada j, <u>existe</u> al menos un $i = 1, 2, \ldots m$ tal que $\overline{a_{ij}} > 0$.

Ahora bien, si definimos $\overset{**}{A} = (\overline{a_{ij}})$ $i, j = m+1, \ldots, n$, podemos inferir de (3.1.9) que

$$\overset{**}{P}{}' \left(I - (1+r)\overset{**}{A}\right) \geq \bar{0} \qquad (3.1.10)$$

en donde $\overset{**}{P} = \begin{pmatrix} P_{m+1} \\ P_{m+2} \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$, denotamos como

I a la matriz identidad de orden $n-m$

y $\overline{O}$ es el vector nulo de dimensión $n-m$.

Ahora bien, la desigualdad (3.1.10) significa [véase el apéndice] que <u>la matriz $(1+r)\overset{**}{A}$ es productiva</u> y, por tanto, según se demuestra en el apéndice, la matriz cuadrada $(I-(1+r)\overset{**}{A})$ de orden $n-m$ tiene una inversa — $(I-(1+r)\overset{**}{A})^{-1}$ cuyas entradas son todas no negativas.

Consideremos entonces nuevamente (3.1.9). Es decir, para $j=m+1, m+2, \dots, n$, tenemos que

$$P_j - (1+r)\sum_{i=m+1}^{n} \overline{a_{ij}}\, P_i = (1+r)\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, P_i$$

o, lo que es lo mismo, en la forma matricial

$$\overset{**}{P}'\left(I-(1+r)\overset{**}{A}\right) = \mathcal{C}' \qquad (3.1.11)$$

en donde $\mathcal{C}$ es un vector de dimensión $n-m$.

$$\mathbb{C} = (1+r)\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{i\,m+1}\, P_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{in}\, P_i \end{pmatrix} > \overline{0} \qquad (3.1.12)$$

Finalmente, aprovechando que $(I-(1+r)\overset{**}{A})^{-1}$ existe, tenemos que

$$\overset{**}{P}' = \mathbb{C}'\left(I-(1+r)\overset{**}{A}\right)^{-1} \qquad (3.1.13)$$

Recapitulemos ahora sobre todo lo que hemos hecho en el caso de que $\overline{A}$ no sea una matriz conectada.

En primer lugar, mediante (3.1.7) [ó (3.1.5)] hemos determinado la tasa de ganancia del capital y, junto con esto, si $Q^* = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} > \overline{0}$ es un vector de Frobenius (por la izquierda) de la matriz $\overset{*}{A}$ tenemos que

$$\overset{*}{P} = \lambda\, Q^* \qquad (3.1.14)$$

en donde $\lambda > 0$ es un real que depende del numerario elegido.

Esto nos permite calcular los precios de las mercancías básicas.

Finalmente, una vez calculados los precios de las mercancías básicas, mediante (3.1.12) y (3.1.13) podemos calcular los precios de las mercancías no básicas y, con esto, hemos cumplido con el objetivo central que nos propusimos en este parágrafo.

Como un corolario importante de todo lo anterior, hemos obtenido que, bajo los supuestos originalmente planteados, <u>la tasa de ganancia del capital depende única y exclusivamente de las condiciones de la producción en las ramas básicas.</u>

Para dar fin a este parágrafo haremos

ahora algunas observaciones.

Hemos demostrado que, bajo nuestros supuestos, la raíz de Frobenius de $\overline{A}$ es $\frac{1}{1+r} < 1$ sea $\overline{A}$ conectada o no

y esto, como se demuestra en el apéndice, es condición suficiente para que $\overline{A}$ sea una <u>matriz productiva</u>.

Por tanto, las condiciones $r > 0$ y $P \geqslant \overline{0}$ son suficientes para que $\overline{A}$ sea productiva.

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Si $\overline{A}$ es productiva, existen $r > 0$ y $P \geqslant \overline{0}$ que cumplen la ecuación (3.1.4)? Para contestar esto consideremos el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2/15 & 1/10 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad l = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B\ell' = \begin{pmatrix} 2/15 & 1/10 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/10 & 1/10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Para obtener la raíz de Frobenius consideramos la ecuación

$$|\bar{A} - \lambda I| = 0 \qquad (3.1.15)$$

Es decir, $\begin{vmatrix} 1/3 - \lambda & 1/5 \\ 0 & 2/5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1/3$
$\lambda_2 = 2/5$

Entonces, la raíz de Frobenius de $\bar{A}$ es $\hat{\lambda} = 2/5$. Si $P > \bar{0}$ y $r > 0$ satisfacen (3.1.4)

$$\frac{1}{1+r} = \frac{2}{5} \quad \therefore \quad 1 + r = \frac{5}{2} \text{ y } r = \frac{3}{2}$$

luego, $(P_1, P_2) = (P_1, P_2)(5/2)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$

$$= (P_1, P_2)\begin{pmatrix} 5/6 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y de aquí

$$P_1 = \frac{5}{6} P_1 \qquad \text{Es decir,} \qquad P_1 = 0 .$$

Esto es un absurdo ya que habíamos supuesto que $P > \bar{0}$.

Finalmente, puesto que $\hat{\lambda}(\bar{A}) = \frac{2}{5} < 1$

$\bar{A}$ es una matriz productiva y la respuesta a nuestra pregunta consiste en que no, que el que $\bar{A}$ sea productiva no garantiza que existan $r > 0$ y $P > \bar{0}$ que cumplan con (3.1.4).

Tras este esbozo del modelo cerrado de Leontief - Sraffa sin capital fijo, pasemos ahora a examinar algunos resultados obtenidos en el intento de ubicar la problemática de Marx en los marcos de la problemática de Leontief - Sraffa.

§ 3.2. La problemática de Marx en los marcos del modelo cerrado de Leontief - Sraffa sin capital fijo.

Empezaremos por esbozar cómo se aborda el problema del valor-trabajo dentro del modelo antes expuesto de Leontief - Sraffa.-

Para $j = 1, 2, \ldots, n$, sea λ_j la cantidad total de trabajo necesaria para producir una unidad de la mercancía j.

Entonces, tenemos que λ_j será igual a la suma del trabajo directo (o "vivo") necesario para producir una unidad de la mercancía j más el trabajo (indirecto) contenido en los insumos necesarios para producir una unidad de j, es decir, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

$$\lambda_j = l_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \qquad (3.2.1)$$

Llevemos ahora el sistema de ecuaciones (3.2.1) en las incógnitas λ_j a su forma matricial, es decir,

$$\lambda' = l' + \lambda' A \qquad (3.2.2)$$

en donde $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\lambda' (I - A) = l' \qquad (3.2.3)$$

y $A = (a_{ij})$ es la matriz de insumo-producto ya conocida por nosotros.

Con el propósito de resolver la ecuación (3.2.2) observemos que $A \leq \overline{A}$ de donde

$$\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(\overline{A}) < 1$$

Esto implica que la matriz A es también productiva y, por lo tanto [véase apéndice], la inversa $(I-A)^{-1}$ de la matriz $(I-A)$

existe y todas sus entradas son no negativas.

Multipliquemos por la derecha ahora la ecuación (3.2.3) por la matriz $(I-A)^{-1}$ y obtenemos que

$$\hat{\lambda} = l'(I-A)^{-1} \qquad (3.2.4)$$

con lo cual obtenemos una fórmula para calcular las magnitudes λj.

Si llamamos a λj el valor de una unidad de la mercancía j o valor unitario de j, podemos observar que, según la fórmula (3.2.4) los valores unitarios son todos positivos, como era de esperar, en virtud de que $l \geq \bar{0}$ y de que cada columna de $(I-A)^{-1}$ tiene al menos una entrada positiva debido a que $(I-A)^{-1}$ es no singular.

Observemos que de la ecuación (3.2.4)

se desprende que los valores son <u>independientes del salario</u> y dependen única y exclusivamente, como era de esperar, de las condiciones técnicas en que se producen <u>las diversas</u> mercancías.

Otra observación interesante es la siguiente: como se demuestra en el apéndice, en virtud de que la matriz A es productiva, se tiene que

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots \qquad (3.2.5)$$

Entonces

$$\lambda' = l'(I-A)^{-1} = l' + l'A + l'A^2 + \cdots + l'A^k + \cdots$$

de donde se infiere que el valor unitario de una mercancía j es igual a la cantidad de trabajo unitaria directamente necesaria más la cantidad de trabajo directamente necesaria para producir los insumos unitarios más la cantidad de trabajo directamente necesaria para producir los insumos de los insumos unitarios más etc., etc...

Finalmente, el valor λj nos indica el empleo generado por una unidad de demanda final j y la magnitud $\frac{1}{\lambda j}$ es la cantidad del producto j que es posible obtener al emplear en la producción de j (directa o indirectamente) una unidad de trabajo. La magnitud $\frac{1}{\lambda j}$ es, por lo tanto,

<u>una medida de la productividad física del trabajo.</u>

Una vez conocidos los valores, podemos obtener algunos resultados como lo hacen algunos economistas posteriores a Leontief y a Sraffa al ubicar algunos conceptos marxistas en el marco del modelo de Leontief - Sraffa.

Expongamos esto. Se define la tasa de plusvalía como sigue:

$$\text{tasa de plusvalía} = \frac{\text{trabajo excedente}}{\text{trabajo necesario}} =$$

$$= \frac{\text{plusvalía}}{\text{valor de la fuerza de trabajo}} =$$

$$= \frac{\text{Jornada de trabajo} - \text{Trabajo necesario}}{\text{trabajo necesario}}.$$

Sea e = tasa de plusvalía,

T = duración de la jornada de trabajo,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ = nuestro vector ya conocido de salario real unitario y

$\overline{B} = TB$ = salario real por jornada.

Con base en lo anterior, el valor unitario de la fuerza de trabajo en una jornada está dado por

$$\lambda'\bar{B} = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n)T$$
$$\lambda'\bar{B} = l'(I-A)^{-1}\,\bar{B}$$

esta última expresión representa las horas de trabajo que la sociedad utiliza en mantener a un trabajador, ya que $(I-A)^{-1}\bar{B}$ nos indica los insumos necesarios para obtener $\bar{B}$ como excedente.

Sea entonces $T - \lambda'\bar{B} = S =$ plusvalía producida por un obrero en una jornada, es decir, la parte del trabajo social de que se apropian los capitalistas.

De aquí, podemos obtener que

$$e = \frac{T - \lambda'\bar{B}}{\lambda'\bar{B}} = \frac{T - \lambda' T B}{\lambda' T B} = \frac{1 - \lambda' B}{\lambda' B} =$$

$$= \frac{1 - l'(I-A)^{-1}B}{l'(I-A)^{-1}B} = \frac{1}{l'(I-A)^{-1}B} - 1 \qquad (3.2.6)$$

Es decir, e depende de l, A y B. Además, la última relación nos permite afirmar que e guarda con l, A y B "una relación inversa", es decir, e disminuye o aumenta según que l, A ó B aumenten o disminuyan.

Hagamos ahora las siguientes definiciones:

$C_{ij} = \lambda_i a_{ij}$ = valor de a_{ij},

$V_{ij} = \lambda_i b_i l_j$ = valor de $b_i l_j$,

$C_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}$ = capital constante por unidad de j,

$V_j = \sum_{i=1}^{n} V_{ij}$ = capital variable por unidad de j,

$S_j = e V_j$ = plusvalía por unidad de j y

$\theta_j = \frac{C_j}{V_j}$ = composición orgánica del sector j.

Es fácil ver que

$\lambda_j = C_j + V_j + S_j$ = valor por unidad de j.

y, finalmente, si $w = P'B > 0$ es el salario nominal, definamos el vector P_w de precios referidos al salario por medio de

$$P_w = \frac{P}{w}$$

Ahora, con base en nuestro supuesto acostumbrado de que "la economía está funcionando" (lo cual implica la existencia de $P \gg \bar{0}$ y $r > 0$ real tales que se cumple la ecuación (3.1.4)), podemos establecer el siguiente

teorema (3.2.T1)

Los precios referidos al salario son mayores que los valores, es decir,

$$P_w > \lambda$$

o, lo que es lo mismo, para que los obreros obtengan mediante su salario una unidad de la mercancía j, deben vender su capacidad de trabajo durante más tiempo que el necesario (directa o indirectamente) para producir una unidad de dicha mercancía j.

Demostración De la ecuación (3.1.4), sabemos que

$$P' = (1+r)P'\bar{A} = (1+r)P'(A+B\ell') =$$
$$(1+r)(P'A + P'B\ell') = (1+r)(P'A + w\ell').$$

Entonces $\quad P'_w = (1+r)(P'_w A + \ell')$

$$\therefore \; P'_w\left(I-(1+r)A\right) = (1+r)\ell' > \bar{0} \qquad (3.2.7)$$

Esto nos lleva a concluir, en virtud de un resultado ya muchas veces - citado, que la matriz no negativa $(1+r)A$ es productiva y que existe la matriz $(I-(1+r)A)^{-1}$ la cual, además, tiene todas sus entradas no negativas.

Por tanto, de (3.2.7) inferimos que

$$P_w' = (1+r)\,l'\,(I-(1+r)A)^{-1} \qquad (3.2.8)$$

Pero debido una vez más a que $(1+r)A$ y A son matrices productivas se establece también en el apéndice que

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots \qquad y$$

$$(I-(1+r)A)^{-1} = I + (1+r)A + (1+r)^2A^2 + \cdots + (1+r)^kA^k + \cdots$$

De donde, puesto que claramente

$$(1+r)^kA^k \geqq A^k$$

tenemos que $\quad (I-(1+r)A)^{-1} \geqq (I-A)^{-1}$

por lo cual

$$l'(I-(1+r)A)^{-1} \geqq l'(I-A)^{-1} > \bar{O}' \qquad (3.2.9)$$

Finalmente, combinando (3.2.8) y (3.2.9) y recordando que $r>0$ y la forma de calcular λ', tenemos que

$$P_w' > (1+r)\, l'(I-A)^{-1} > l'(I-A)^{-1} = \lambda'$$

y nuestro teorema está probado.

Enseguida, siempre con nuestro supuesto de costumbre, sigamos a Michio Morishima en el establecimiento de un nuevo teorema cuya demostración es inmediata basándonos en el teorema anterior*

---

* Morishima reúne este teorema y el siguiente en uno solo y al resultado le llama "Teorema fundamental Marxista"

<u>Teorema</u>

Si λ está dado por (3.2.4) y hacemos $e = \dfrac{1-\lambda' B}{\lambda' B}$, entonces, <u>si $e>0$</u>, existen un sistema $P \geq \bar{0}$ y $r>0$ que satisfacen la ecuación fundamental del modelo cerrado de Leontief-Sraffa.

<u>Demostración</u>:

Tenemos en primer lugar que (cont.)

Teorema (3.2.T2)

La tasa de plusvalía e (o tasa de explotación del trabajo) es positiva.

Demostración. Sabemos que $w = P'B > 0$

Entonces, en virtud del teorema anterior

$$1 = P'_w B > \lambda' B > 0$$

y, de aquí,
$$e = \frac{1 - \lambda' B}{\lambda' B} > 0$$

con lo cual queda demostrado nuestro teorema.

$$\lambda'(I - (A + B\ell')) = \lambda'(I - A) - \lambda' B \ell' =$$

$$= \ell' - \lambda' B \ell' = (1 - \lambda' B)\ell' > \bar{0}$$

De aquí, $\bar{A} = A + B\ell'$ es una matriz productiva de donde se desprende (véase el apéndice) que

$$\hat{\lambda}(\bar{A}) < 1 \quad \text{y existe } P \geq \bar{0} \text{ tal que } \hat{\lambda}(\bar{A})P' = P'\bar{A}$$

Nuestro teorema queda demostrado si hacemos $\frac{1}{1+r} = \hat{\lambda}(\bar{A})$..

Finalmente, establecemos una condición necesaria y suficiente para que las mercancías se intercambien por sus valores.

Teorema.- (3.2.T3)

Los precios son proporcionales a los valores si y solo si las composiciones orgánicas de los diversos sectores son todas iguales entre sí.

Demostración

"=>"

$$\text{Si } P_j = \alpha \lambda_j \quad \text{para } j=1,2,\dots,n$$

con $\alpha > 0$ un real. Entonces $P = \alpha \lambda$

Sabíamos de (3.1.4) que $P' = (1+r)P'\overline{A}$

de donde

$$\alpha \lambda' = (1+r)\alpha \lambda' \overline{A}$$

Por tanto, la j'ésima componente es tal que

$$\lambda_j = (1+r)[\lambda_1(a_{1j}+b_1 l_j) + \lambda_2(a_{2j}+b_2 l_j) + \dots + \lambda_n(a_{nj}+b_n l_j)]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_j = (1+r) \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i a_{ij} + \lambda_i b_i l_j) =$$

$$= (1+r)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i l_j\right) =$$

$$= (1+r)(c_j + v_j)$$

$$\therefore \quad \lambda_j - c_j - v_j = r(c_j + v_j)$$

Es decir, $\quad S_j = r(c_j + v_j)$

$$\therefore \quad r = \frac{S_j}{c_j + v_j} = \frac{S_j / v_j}{c_j/v_j + v_j/v_j} = \frac{e}{\theta_j + 1}$$

Finalmente, como r y e son las mismas en todos los sectores, entonces θ_j tiene que ser la misma en todos los sectores ya que

$$\theta_j = \frac{e}{r} - 1 \quad .$$

"$\Longleftarrow$" Si θ_j es la misma en todos los sectores, hagamos $\quad \rho = \dfrac{e}{\theta_j + 1} > 0$

en virtud del teorema anterior.

Demostraremos entonces que $\rho = r$. Para ello, sea $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\rho = \frac{e \cdot v_j}{\theta_j \cdot v_j + 1 \cdot v_j} = \frac{S_j}{C_j + v_j}$$

$$\therefore \quad S_j = \rho(C_j + v_j)$$

y $$S_j + C_j + v_j = (1+\rho)(C_j + v_j).$$

Entonces $$\lambda_j = (1+\rho)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i l_j\right)$$

y $$\lambda_j = (1+\rho)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_{ij} + b_i l_j).$$

Por tanto, expresando lo anterior en forma matricial, tenemos que

$$\lambda' = (1+\rho)\lambda' \overline{A}$$

ó $$\frac{1}{1+\rho}\lambda' = \lambda' \overline{A}.$$

De donde se desprende que $\frac{1}{1+\rho}$ es un valor propio positivo de $\bar{A}$ que tiene asociado un vector $\lambda > \bar{o}$.

Y, de aquí, $\frac{1}{1+\rho}$ es la raíz de Frobenius de $\bar{A}$ que, puesto que ésta es única nos conduce a establecer que $\frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+r}$ y, finalmente, a que $\rho = r$. y a que

$$\frac{1}{1+r}\lambda' = \lambda'\bar{A} \qquad (3.2.10)$$

Es decir, el sistema constituido por el vector $\lambda > \bar{o}$ y $r > 0$ nos proporciona una solución de la ecuación fundamental del modelo cerrado de Leontief - Sraffa.

Ahora bien, si $\bar{A}$ es una matriz conectada, entonces, según se establece en el apéndice, existe, salvo por multiplicar por escalares positivos, uno y sólo un vector $P > \overline{0}$ que junto con r nos da una solución de la ecuación (3.1.4).

Entonces, en ese caso, $\lambda = \alpha P$ con $\alpha > 0$ real y nuestro teorema estaría probado.

¿Pero qué hacer si $\overline{A}$ no es una matriz conectada, situación que es la más común?

En este caso, sea $\mathcal{B}$ el conjunto de renglones <u>básicos</u> de la producción y la matriz $\overset{*}{\overline{A}}$ como en el parágrafo 1.

Entonces, de (3.2.10) y razonando en forma análoga a la que nos llevó a establecer (3.1.6), podemos establecer que

$$\frac{1}{1+r}\overset{*}{\lambda}{}' = \overset{*}{\lambda}{}'\overset{*}{\overline{A}} \qquad (3.2.11)$$

en donde $\overset{*}{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$.

Pero ahora $\overline{\overset{*}{A}}$ es <u>conectado</u> y basándonos en (3.1.6) y en el apéndice - podemos establecer que

$$\overset{*}{\lambda} = \alpha \overset{*}{P} \qquad (3.2.12)$$

en donde $\alpha > 0$ es un real.

Enseguida, si $\overline{\overset{**}{A}}$ es como en el - parágrafo 1 y si

$$\overset{**}{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

podemos, también razonando en forma análoga a lo hecho en el anterior parágrafo, establecer que

$$\overset{**}{\lambda} \left(I - (1+r) \overline{\overset{**}{A}} \right) = D' \qquad (3.2.13)$$

en donde

$$D = (1+r)\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{i\,m+1}\,\lambda_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{in}\,\lambda_i \end{pmatrix} > \overline{0} \qquad (3.2.14)$$

Pero, en virtud de (3.2.12)

$$D = \alpha\, C$$

en donde C es como en (3.1.12)

Por tanto, partiendo de (3.1.13) y de (3.2.13), obtenemos que

$$\overset{**}{\lambda}{}' = D'\left(I-(1+r)\overset{**}{\overline{A}}\right) = \\ = \alpha\, C\left(I-(1+r)\overset{**}{\overline{A}}\right)^{-1} = \alpha\,\overset{**}{P}{}' \qquad (3.2.15)$$

y nuestro teorema está ahora probado.

§ 3.3. El modelo cerrado de Leontief-Sraffa con capital fijo.

En los dos parágrafos anteriores hemos supuesto una situación simplificada según la cual el capital adelantado para producir una unidad de la mercancía j puede considerarse como constituido por el vector $\bar{A}_j \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} a_{1j}+b_1t_j \\ a_{2j}+b_2t_j \\ \vdots \\ a_{nj}+b_nt_j \end{pmatrix}$.

Es decir, dicho capital adelantado puede considerarse como un vector cuya i'ésima componente $a_{ij}+b_it_j$ está integrada por la cantidad a_{ij} de la mercancía i la cual se "insume productivamente" (es "destruida" por el obrero en el proceso de producir una unidad j) y cuyo valor pasa íntegramente a constituir el valor de la mercancía i que consumen los obreros por unidad j producida.

Para obtener una "segunda aproximación" a la economía capitalista supongamos ahora que el <u>capital adelantado</u> para producir una unidad de la mercancía j puede considerarse como un vector

$$\overline{K}_j = \begin{pmatrix} k_{1j} + b_1 t_j \\ k_{2j} + b_2 t_j \\ \vdots \\ k_{nj} + b_n t_j \end{pmatrix} \qquad (3.3.1)$$

cuya i'esima componente está constituida por la cantidad $b_i t_j$ ya conocida por nosotros más la cantidad k_{ij} igual al "stock" de i por unidad j necesario para poder emprender la producción de j en un período de tiempo determinado y del cual sólo se "insume", se "pierde", la <u>parte</u> a_{ij} por unidad j producida en el período dado, en tanto que se preserva la cantidad $k_{ij} - a_{ij}$ al fin de dicho período.

A la matriz $A = (a_{ij})$ la llamaremos como antes la matriz de insumo-producto en tanto que llamaremos a la matriz $K = (k_{ij})$ la matriz de stock-producto y, naturalmente, supondremos que para $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$$k_{ij} \geqq a_{ij} \geqq 0 \qquad (3.3.2)$$

Hagamos ahora nuevamente el supuesto de que la economía "está funcionando" que, como en el modelo sin capital fijo, implica que se establece un sistema de precios $P > \overline{0}$ y una tasa media de ganancia del capital $r > 0$.

Procedamos entonces por analogía con el parágrafo 1 examinando lo que ocurre cuando se produce una unidad de j.

En el caso actual, el capital adelantado para producir una unidad j está dado por

$$\sum_{i=1}^{n} P_i k_{ij} + w l_j = \sum_{i=1}^{n} P_i (k_{ij} + b_i l_j)$$

mientras que la ganancia obtenida por el capital está dàda por

$$P_j - \sum_{i=1}^{n} P_i (a_{ij} + b_i l_j)$$

luego, esta ganancia será el producto de r por el capital adelantado, es decir

$$P_j - \sum_{i=1}^{n} P_i (a_{ij} + b_i l_j) = r \sum_{i=1}^{n} P_i (k_{ij} + b_i l_j) \quad (3.3.3)$$

y, si hacemos $a_{ij} + b_i l_j = \overline{a_{ij}}$ y $k_{ij} + b_i l_j = \overline{k_{ij}}$ (concordando con (3.3.1) obtenemos que, para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i \overline{a_{ij}} + r \sum_{i=1}^{n} P_i \overline{k_{ij}} \quad (3.3.4)$$

lo cual toma la forma matricial

$$\boxed{p' = p'(\bar{A} + r\bar{K})} \qquad (3.3.5)$$

en donde $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ y $\bar{K} = (\bar{k}_{ij})$.

Por analogía con el caso sin capital fijo, la ecuación (3.3.5) será llamada la <u>ecuación fundamental del modelo cerrado de Leontief-Sraffa con capital fijo.</u>

Es fácil demostrar ahora que $\bar{A}$ es una matriz productiva si suponemos (como es natural) que $l > \bar{0}$ y $B \geq \bar{0}$ y dado que esto implica la existencia y la no negatividad de $(I-\bar{A})^{-1}$, en primer lugar, podemos inferir de (3.3.5) que

$$\frac{1}{r} p' = p'\bar{K}(I-\bar{A})^{-1} \qquad (3.3.6)$$

y demostrar que $\frac{1}{r} = \hat{\lambda}\left(\bar{K}(I-\bar{A})^{-1}\right)$ (3.3.7)

para tener de este modo una forma de calcular la tasa media de ganancia.

Si definimos ahora mercancías de <u>primera necesidad</u> como en el parágrafo 1, podemos llamar a un renglon i <u>básico</u> si "es un "stock" necesario en cierta instancia de la fuerza de trabajo", es decir, si existe j de <u>primera necesidad</u> tal que i y j están conectados <u>mediante la matriz</u> $\bar{K}$.

Entonces, si B es el conjunto de los sectores básicos y suponemos como en el parágrafo 1 que $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, tendremos que la matriz $\overset{*}{\bar{K}} = (\bar{k}_{ij})$ con $i, j = 1, 2, \ldots, m$ es una <u>matriz conectada</u> en tanto que si $i \notin B$ y $j \in B$, se puede ver que $\bar{k}_{ij} = 0$ lo cual, a su vez, implica que $\bar{a}_{ij} = 0$.

Volviendo a la ecuación (3.3.5), podemos ahora establecer que

$$\overset{*}{p}' = \overset{*}{p}' \left(\overset{*}{\bar{A}} + r \overset{*}{\bar{K}} \right) \qquad (3.3.8)$$

en donde $\overset{*}{\bar{A}} = (\bar{a}_{ij})$ con $i, j = 1, 2, \ldots, m$

y

$$\overset{*}{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

Ahora, la matriz $\overset{*}{\bar{A}} + r\overset{*}{\bar{K}}$ es claramente una matriz conectada y en virtud de que $\overset{*}{P} > \bar{0}$, tenemos, en primer lugar, que

$$\hat{\lambda}\left(\overset{*}{\bar{A}} + r\overset{*}{\bar{K}}\right) = 1 \qquad (3.3.9)$$

y, en segundo lugar, que $\overset{*}{P}$ es el vector de Frobenius por la izquierda de dicha matriz.

Enseguida se demuestra en forma análoga a lo hecho en el parágrafo 1 que la matriz $\overset{**}{\bar{A}} + r\overset{**}{\bar{K}}$ es productiva en donde $\overset{**}{\bar{A}} = (\bar{a}_{ij})$ y $\overset{**}{\bar{K}} = (\bar{k}_{ij})$ con los índices i y j corriendo en ambos casos desde $m+1$ hasta n y se establece que

$$\overset{**}{P}'\left(I - \left(\overset{**}{\bar{A}} + r\overset{**}{\bar{K}}\right)\right) = E' > \bar{0} \qquad (3.3.10)$$

$$\overset{**}{P} = \begin{pmatrix} p_{m+1} \\ p_{m+2} \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad y \quad E = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} p_i (\overline{a_{i\,m+1}} + r\overline{k_{i\,m+1}}) \\ \sum_{i=1}^{m} p_i (\overline{a_{i\,m+2}} + r\overline{k_{2\,m+1}}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} p_i (\overline{a_{in}} + r\overline{k_{in}}) \end{pmatrix}$$

De lo anterior se deduce, finalmente, que

$$\overset{**}{P}{}' = E'\left(I - (\overset{**}{A} + r\overset{**}{K})\right)^{-1} \qquad (3.3.11)$$

En resumen, en el caso del modelo cerrado de Leontief - Sraffa con capital fijo, podemos calcular mediante (3.3.7) la tasa de ganancia del capital, mediante (3.3.8) los precios de las - mercancías básicas y, por último, mediante (3.3.11) los precios de las mercancías no básicas.

Esbocemos ahora cómo se ubica la problemática de Marx en los marcos del modelo cerrado de Leontief - Sraffa con capital fijo.

En primer lugar, los valores en este modelo quedan igual que antes

$$\lambda' = l'(I - A)^{-1}$$

ya que lo que cuenta para el valor de la mercancía es lo que realmente transfirió valor, lo que está dado por las magnitudes a_{ij} independientemente de lo que quedó en las máquinas o en acopio.

En segundo lugar, la tasa de plusvalía e puede definirse exactamente como en el parágrafo 2. Es decir,

$$e = \frac{1 - \lambda' B}{\lambda' B} \qquad (3.3.12)$$

Conviene modificar las definiciones dadas en el parágrafo 2 de la siguiente — manera:

$\varphi_{ij} = \lambda_i a_{ij}$ = valor de a_{ij}

$C_{ij} = \lambda_i k_{ij}$ = valor de k_{ij}

$V_{ij} = \lambda_i b_i l_j$ = valor de $b_i l_j$

$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij}$ = parte del capital constante que transfiere su valor por unidad de j.

$C_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}$ = capital constante por unidad de j.

$V_j = \sum_{i=1}^{n} V_{ij}$ = capital variable por unidad de j.

$S_j = e\, V_j$ = plusvalía por unidad de j

$\theta_j = \dfrac{C_j}{V_j}$ = composición orgánica del capital del sector j.

De donde se desprende como antes que

$\lambda_j = \varphi_j + V_j + S_j$ = valor por unidad de j

Ahora, si definimos w y P_w como antes, se demuestran análogamente a lo hecho en el parágrafo 2 los siguientes Teoremas:

Teorema.- (3.3.t1)

En el modelo cerrado de Leontief-Sraffa con capital fijo se tiene que

$$P > \lambda$$

Teorema.- (3.3.t2) *

La tasa de plusvalía e es positiva.

---

* Puede generalizarse también al caso presente la segunda parte del Teorema llamado por Morishima el "Teorema fundamental Marxista", es decir puede establecerse el siguiente Teorema

Si $e>0$, existen un sistema $P \geq \bar{0}$ y $r>0$ que satisfacen la ecuación fundamental del modelo cerrado de Leontief - Sraffa con capital fijo

La demostración es del siguiente modo:

Se prueba que $\bar{A}$ es productiva como en la nota al pie de página del parágrafo 2. (cont.)

Finalmente, podemos establecer el

teorema.- (3.3.T3)

En el modelo cerrado de Leontief-Sraffa con capital fijo los precios son proporcionales a los valores si y sólo si las composiciones orgánicas de los diversos sectores son todas iguales entre sí.

La demostración de la dirección "$\Rightarrow$" es completamente análoga a la demostración correspondiente del parágrafo 2.

Ahora, según se desprende del apéndice,

$\hat{\lambda}(\bar{K}) \geqq \min_j \sum_i \bar{K}_{ij} > 0$ y, por tanto, $\bar{K}(I-\bar{A})^{-1} \geqq \bar{K}$

$\therefore\ \hat{\lambda}(\bar{K}(I-\bar{A})^{-1}) > 0$ y, si hacemos $r = \dfrac{1}{\hat{\lambda}(\bar{K}(I-\bar{A})^{-1})} > 0$,

existe un vector $P \geqslant \bar{0}$ tal que $\frac{1}{r} P' = P' \bar{K}(I-\bar{A})^{-1}$

$\therefore\ P' = P'\bar{A} + r P'\bar{K}$ lo cual prueba nuestro teorema.-

La demostración de la dirección "$\Leftarrow$" es del siguiente modo:

Supongamos que θ_j es la misma en todos los sectores.

Hagamos $\rho = \dfrac{e}{\theta_j + 1} > 0$ en virtud

del teorema anterior.

Entonces $\rho = \dfrac{e\,V_j}{\theta_j V_j + V_j} = \dfrac{S_j}{C_j + V_j}$

$\therefore$ $S_j = \rho(C_j + V_j)$ lo cual nos

conduce si sumamos $\varphi_j + V_j$ de ambos lados a que

$$\lambda_j = \varphi_j + V_j + \rho(C_j + V_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} + \rho \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_{ij}$$

lo cual se traduce a la ecuación matricial:

$$\lambda' = \lambda'\bar{A} + \rho\lambda'\bar{K} \qquad (3.3.13)$$

$$\therefore \frac{1}{\rho}\lambda' = \lambda'\bar{K}(I-\bar{A})^{-1}.$$

Ahora, si $x \geq \bar{0}$ es un vector de Frobenius por la derecha de la matriz $\bar{K}(I-\bar{A})^{-1}$, tenemos que

$$\frac{1}{\rho}\lambda' x = \hat{\lambda}\left(\bar{K}(I-\bar{A})^{-1}\right)\lambda' x$$

de donde deducimos que $\frac{1}{\rho} = \hat{\lambda}\left(\bar{K}(I-\bar{A})^{-1}\right)$

ya que $\lambda' x > 0$.

Entonces, de (3.3.7) obtenemos que

$$\rho = r$$

Volviendo ahora a (3.3.13) establecemos ahora que

$$\lambda' = \lambda'(\bar{A} + r\bar{K}) \qquad (3.3.14)$$

y de aquí, procediendo análogamente

a la demostración correspondiente del parágrafo 2, obtenemos que

$$P = \alpha \lambda$$

en donde α es un real positivo.

Con esto queda completa la demostración del teorema.

Cap. 4

modelos abiertos

apêndice

§ A.1 Antecedentes

En este apéndice vamos a demostrar los resultados matemáticos que hemos utilizado en esta Tesis; para ello, consideramos que se tiene algún conocimiento básico de Algebra Lineal, en especial de los temas de vectores, matrices y transformaciones lineales, en caso de no ser así, es suficiente con revisar los capítulos I-II-III VII-VIII del libro "Curso de Algebra Superior" de A. G Kurosch señalado en la bibliografía o cualquier libro de Algebra Lineal.

Una vez señalado lo anterior, vamos a establecer las definiciones y algunas propiedades de los vectores y los valores propios.

(A.1.D1) Los <u>vectores propios</u> de la matriz A son aquellos que al ser transformados por medio de A se conservan colineales a sí mismos, es decir,

(por la derecha) $\quad Ax = \lambda x \quad$ (A.1.1)

(por la izquierda) $\quad xA = \lambda x$

A la λ de la ecuación (A.1.1) se le llama <u>valor propio</u> de A. (A.1.D2)

Notemos que $x = \bar{0}$ es un vector propio trivial y $\lambda = 0$ <u>no</u> es un valor propio trivial.

De la ecuación (A.1.1) obtenemos

$$Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = 0$$

para que este sistema tenga solución no trivial es necesario que su determinante sea cero

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (A.1.2)$$

Este determinante cuyo resultado es

un polinomio es llamado el polinomio característico. Este polinomio tiene n raíces reales o complejos, distintos o múltiples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cada uno de estos valores propios dará lugar a un vector propio asociado $x^1, x^2, \ldots, x^n$ tal que

$$A x^i = \lambda_i x^i$$

Si X es un vector propio de A, Kx también lo será ya que si

$$A x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad K(Ax) = K\lambda x \quad \Rightarrow A(Kx) = \lambda(Kx)$$

$\therefore$ lo que nos determinan los vectores propios son direcciones propias.

Los vectores propios de A asociados a un valor propio forman un subespacio:

— Si λ es valor propio de A, entonces λ^n es valor propio de A^n

Si $$Ax = \lambda x$$
$$AAx = A\lambda x = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$$
$$\vdots$$
$$A^n x = \lambda^n x$$

– Si λ es valor propio de A, entonces $(1-\lambda)$ es valor propio de $(I-A)$.

Si $$Ax = \lambda x$$
$$x - Ax = x - \lambda x$$
$$(I-A)x = (1-\lambda)x$$

– Si λ es valor propio de A entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.

Si $Ax = \lambda x$ y existe A^{-1} entonces sabemos que $\lambda \neq 0$, de aquí,

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$$
$$x = \lambda A^{-1}x$$
$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

De los dos últimos resultados podemos concluir que si λ es valor propio de A y si existe $(I-A)^{-1}$, entonces $1-\lambda \neq 0$ y $\frac{1}{1-\lambda}$ es valor propio de $(I-A)^{-1}$.

§A.2. Matrices conectadas y Matrices no-conectadas.

Utilizaremos la siguiente notación para vectores

$$X > 0 \quad \text{si} \quad X_i > 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$X \geqq 0 \quad \text{si} \quad X_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$X \geq 0 \quad \text{si} \quad X_i \geqq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

y además existe k tal que $X_k > 0$.

y para matrices

$$A > 0 \quad \text{si} \quad a_{ij} > 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$A \geqq 0 \quad \text{si} \quad a_{ij} \geqq 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$A \geqslant 0$ si $a_{ij} \geqslant 0$ para $i,j=1,2,\dots,n$ y además existen i', j' tales que $a_{i'j'} > 0$.

Consideremos las siguientes definiciones:

(A.2.D1) Decimos que j es <u>directamente requerido</u> en la producción de i, si $a_{ij} > 0$

(A.2.D2) Decimos que j es <u>requerido</u> (en última instancia) en la producción de i, si existe una sucesión $J_0, J_1, J_2, \dots J_l$ tal que $J_0 = j$, $J_l = i$ y cada miembro de la sucesión es directamente requerido en la producción del siguiente miembro.

(A.2.D3) Una matriz es <u>conectada</u> si describe una economía en la cual toda mercancía es requerida en la producción de todas las otras, es decir si:

i) $a_{ij} \geqslant 0$ para $i,j=1,2,\dots,n$

ii) Si para todo par de indices (i,j) existe una sucesión de indices J_0,

$j_1, j_2, \ldots j_l$ con $j_0 = j$, $j_l = i$ tal que

$$a_{j_0 j_1}\, a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{l-1} j_l} > 0$$

(A.2.B.4) Una <u>permutación</u> de una matriz cuadrada A es una permutación de sus renglones combinada con la misma permutación de sus columnas.

Si pensamos en la matriz A como un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ con base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, una permutación de A es una renumeración de los vectores de la base, un cambio a una nueva base

$$e'_1 = e_{j_1} \quad e'_2 = e_{j_2} \quad \cdots \quad e'_n = e_{j_n}$$

donde $j_1, j_2, \ldots j_n$ son una permutación de los índices $1, 2, \ldots, n$.

La Matriz A entonces se transforma en una matriz

$$A_* = T^{-1} A T$$

en donde cada renglón y cada columna de la matriz de transformación T contiene un solo elemento 1, y los demás elementos son ceros.

En términos económicos permutar una matriz significa reenumerar los sectores de la producción.

Ahora que hemos definido una permutación de una matriz observemos que una matriz conectada la podemos definir también como sigue:

(A.2.D3') A es una matriz <u>conectada</u> si ninguna permutación de la matriz nos permite ponerla de manera que

$$A_* = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

donde la matriz $A_{21} = \bar{0}$ y las matrices A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas.

Claramente se puede ver que (A.2.D3) y (A.2.D3') son equivalentes.

(A.2.D5) Una matriz A es llamada <u>no-conectada</u> si no es conectada. Y, por lo tanto, existe una permutación tal que la matriz resultante es de la forma

$$A_* = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{A_{11}}}^{m} & \overbrace{\phantom{A_{12}}}^{n-m} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, m \\ \}\, n-m \end{array}$$

donde A_{21} es la matriz cero y A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas.

Esto nos indicaría que las mercancías de los $n-m$ sectores que quedan abajo no son utilizados en la producción de los m sectores restantes.

Si además sucediera que la matriz $A_{12} = \overline{0}$ diríamos que la matriz A es totalmente desconectada y nos estaría hablando de 2 "subeconomías" independientes al interior de la economía.

* La forma triangular de una matriz no-conectada.

teorema (A.2.+1)

Si A es una matriz no-conectada es posible por medio de permutaciones escribirla de la siguiente manera.

$$A_* = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & O & \ddots & \\ & & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde las matrices de la diagonal A_{11}, A_{22}, ..., A_{rr} son matrices cuadradas conectadas ó la matriz cero de orden 1×1.

Demostración.

La prueba de este resultado la haremos por inducción sobre el orden de la matriz (κ)

Si $k = 1$, es decir si la matriz es de orden 1×1 el resultado es evidente.

Ahora supongamos que el resultado es cierto para todo valor de k tal que

$$k < n$$

y demostraremos que es válido para $k = n$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ como A es no-conectada entonces existe $A_* = T^{-1} A T$ con

$$A_* = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right)$$

con A_{11} y A_{22} matrices cuadradas, si A_{11} y A_{22} son matrices conectadas ya terminamos.

Pero si alguna de ellas no lo es, supongamos sin pérdida de generalidad que ambas A_{11} y A_{22} no lo fueran, como el orden de A_{11} y de A_{22} es menor que n, nuestro resultado es válido para ellas

$$\therefore \quad A_{11*} = \begin{pmatrix} A'_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & A'_{rr} \end{pmatrix} \quad y \quad A_{22*} = \begin{pmatrix} A''_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & A''_{rr} \end{pmatrix}$$

donde en la diagonal hay matrices cuadradas conectadas ó la matriz cero de orden 1.

Debemos observar que los cambios para triangular A_{11} no afectan a A_{22}, la que se ve afectada es A_{12}; de igual manera al triangular A_{22} no afectamos a A_{11} sino tan solo a A_{12}. La nueva A_{12} la llamaremos A_{12*}.

Por lo tanto podemos permutar A y obtener A_*

$$A_* = \begin{pmatrix} A_{11*} & A_{12*} \\ 0 & A_{22*} \end{pmatrix}$$

donde A_{11*} y A_{22*} están en su forma triangular, Así, tenemos A_*^* que es la forma triangular de A y nuestro teo—

rema queda demostrado.

<u>teorema</u> (A.2.T2)

Los valores propios de la matriz A son los mismos que los de la matriz A_*.

<u>Demostración</u>

Como la matriz A_* la obtenemos de A después de realizar algunas permutaciones sabemos que

$$A_* = T^{-1} A T$$

$$|\lambda I - T^{-1} A T| = |\lambda T^{-1} T - T^{-1} A T| =$$

$$|T^{-1} (\lambda I - A) T| = |T^{-1}| |\lambda I - A| |T| = |\lambda I - A|$$

con esto lo que vemos es que los polinomios característicos de A y de A_* son los mismos, por lo tanto sus soluciones son también las mismas, con lo cual queda demostrado el teorema.

Teorema (A.2.T3)

Si A ha sido llevada a su forma triangular, entonces λ es valor propio de A_* si y sólo si λ es valor propio de alguna de las submatrices de la diagonal en la forma triangular.

Demostración

"$\Longrightarrow$"

$$|\lambda I - A_*| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda I - A_{ii} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda I - A_{rr} \end{vmatrix}$$

donde A_{ii} son nuestras conocidas submatrices de la forma triangular.

Como $\lambda I - A_*$ es una matriz triangular, sabemos que su determinante es igual al producto de los determinantes de la diagonal, —

entonces:

$$|\lambda I - A_*| = |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}|\cdots|\lambda I - A_{rr}|$$

De donde, si λ es valor de A_* entonces

$$|\lambda I - A_*| = 0$$

$$\therefore \quad |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}|\cdots|\lambda I - A_{rr}| = 0$$

y esto último implica que λ es valor propio de alguna de las submatrices de la diagonal ya que si no lo fuera entonces

$$|\lambda I - A_{ii}| \neq 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, r$$

$$y \quad |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}|\cdots|\lambda I - A_{rr}| \neq 0$$

"$\Leftarrow$" Si λ es valor propio de A_{ii} para alguna i, entonces

$$|\lambda I - A_{ii}| = 0$$

$\therefore |\lambda I - A_*| = 0 \qquad \therefore \lambda$ es valor propio de

A_* y así queda demostrado el teorema.

§ A.3 Teorema de Perrón-Frobenius y resultados adicionales.

Matrices cuadradas no negativas y conectadas.

teorema.- (A.3.T.1) Perrón-Frobenius.

La matriz A posee un valor propio real y positivo $\hat{\lambda}$ al que se le puede asociar un vector propio positivo $\hat{x} > 0$, $\hat{x}$ es el único vector propio no negativo - (dirección propia en rigor).

Antes de demostrar este teorema vamos a demostrar algunos lemas auxiliares.

Lema (A.3.L.1)

Si $x \geqq \bar{0}$ y $A\,x = 0$ entonces $x = \bar{0}$

Demostración.

Si $A\,x = 0$

entonces $A^2 x = 0$

$A^{l} x = 0$ para $l \geq 1$

Si consideramos

$$\sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{\substack{j_l \\ \| \\ i}} a_{j_0 j_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{l-1} j_l} X_i = 0$$

como $X_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots n$ ya que $X \geq \bar{0}$ esto implica que cada término de esta suma es cero y

$\therefore \quad a_{j_0 j_1} \cdots a_{j_{l-1} j_l} X_i = 0$ para todos los valores de los índices $j_0, j_1, \dots, j_l$.

Sin embargo, el que A sea conectada implica que al menos uno de esos coeficientes es positivo

$\therefore X_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots n$

con lo que queda demostrado nuestro lema.

<u>Lema</u> (A.3.L2)

Existe $\lambda > 0$ tal que $Ax = \lambda x$ tiene una solución con $x \geq \bar{0}$.

Demostración

Tomemos un hiperplano de dimensión $n-1$ en un espacio n-dimensional que intersecte a cada uno de los ejes coordenados en un valor positivo.

Sea $S = \{ X \geq 0 \,/\, \sum_{i=1}^{n} X_i \} = 1$ el hiperplano.

Cada vector en el hiperplano es transformado mediante la matriz A en un punto $X^{(1)}$ del octante semipositivo porque $A \geq \bar{0}$ y por el lema anterior $Ax \neq 0$.

Si multiplicamos $X^{(1)}$ por un escalar adecuado lo podemos mandar a $X^{(2)}$ que caiga en el hiperplano original.

Esto es, sea $\sigma = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(1)}$ entonces

$$X_i^{(2)} = \frac{1}{\sigma} X_i^{(1)} \qquad \therefore \; X^{(2)} = \frac{1}{\sigma} Ax = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ es claramente una función continua del subconjunto cerrado, acotado y convexo $\{x \,/\, x \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ en sí mismo.

Utilizando el teorema de punto fijo de Brower.*

Sabemos que existe x tal que

$$x = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)}} A x \qquad \text{Si hacemos } \lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)}$$

entonces $Ax = \lambda x$ y $\lambda > 0$ $x \geq \bar{0}$ quedando nuestro lema probado.

---

*teorema de punto fijo de Brower.

Sea S un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio euclideano.

Sea φ una función arbitraria y continua de S en sí mismo.

Entonces existe al menos un punto $p \in S$ tal que $\varphi(p) = p$, esto es, existe al menos un punto $p \in S$ que se mantiene fijo bajo la función φ.

Lema (A.3. L3)

Si $\lambda > 0$, $Ax = \lambda x$, $x \geq \bar{0}$ pero es falso que $x > \bar{0}$, entonces $x = \bar{0}$.
(es decir, si x es una solución de $Ax = \lambda x$, y alguna componente de x es cero, entonces, todas lo son)

Demostración

Sea $Ax = \lambda x$ $\quad \cdots \quad$ $A^l x = \lambda^l x$ para $l \geq 1$

Supongamos que existen $X_i = 0$, $X_k > 0$.

Por ser A conectada, existe una sucesión de índices tal que

$$a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{l-1} k} > 0 \qquad \text{entonces}$$

el término (i,k) de la matriz A^l es distinta de cero, y como $X_k > 0$, podemos concluir que el término i'esimo de $(A^l x)_i \neq 0$.
Por otro lado como $X_i = 0$ ~~ese~~ término i'esimo $\quad (A^l x)_i = \lambda^l X_i = 0 \quad \therefore \quad X_k = 0$

Ahora vamos a demostrar el teorema.

Demostración

Por los lemas L2 y L3 queda establecida la existencia de soluciones x, λ de la ecuación

$$Ax = \lambda x \qquad \text{con } x > \bar{0},\ \lambda > 0.$$

lo que nos falta demostrar es que x y λ son únicas.

Como A es no-negativa y conectada, si hacemos

$$B = A'$$

entonces B también es nonegativa y conectada

$\therefore$ existen $y > \bar{0}$, $\mu > 0$ tales que

$$By = \mu y \quad \Rightarrow \quad y'A = \mu y'$$

de donde $\lambda y'x = y'Ax = \mu y'x$

Como $y'x > 0$ podemos concluir que

$$\lambda = \mu$$

$\therefore$ λ es única.

Sea x cualquier vector propio de A tal que $x \geq 0$, sea λ el valor propio correspondiente.

Ahora vamos a demostrar que x es único salvo multiplicaciones por escalares.

Sea y un vector propio tal que $Ay = \lambda y$

Sea $t = \min_i \left(\dfrac{y_i}{x_i} \right)$ y sea s el índice

para el cual se alcanza el mínimo.

$$y - tx \geqq 0 \qquad\qquad y - \frac{y_s}{x_s} \geqq 0$$

ya que $\dfrac{y_i}{x_i} \geqq \dfrac{y_s}{x_s} \Rightarrow y_i x_s \geqq x_i y_s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y_i x_s - x_i y_s \geqq 0$$

$$\therefore \quad y_i - \frac{y_s}{x_s} x_i \geqq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots n$$

también sabemos que $y_s - t x_s = 0$, es decir, este vector tiene una coordenada cero y como

$$A(y - tx) = \lambda(y - tx)$$

podemos concluir por el lema L3 que

$$y - tx = 0 \qquad \therefore \qquad y = tx$$

con lo que queda finalmente demostrado el teorema de Perrón-Frobenius.

<u>Corolario.</u> A y su transpuesta tienen los mismos valores propios dominantes.

Llamaremos a $\hat{\lambda}(A)$ la raíz de Frobenius de A, y a $\hat{x}$ el vector de Frobenius de A.

Ahora vamos a establecer algunas propiedades de $\hat{\lambda}(A)$.

<u>teorema.</u> (A.3.72)

Si para un vector cualquiera $z \gneqq \bar{0}$ y $K \in \mathbb{R}$.

i) $Az \geq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) > K$

ii) $Az \leq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) < K$

Si $z \geq \bar{0}$ y $K \in \mathbb{R}$.

i') $Az \gneqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \geq K$

ii') $Az \leqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \leq K$

<u>Demostración</u> (probaremos (i) los otros son similares).

Sea $B = A'$ sea $y > 0$ .t. $By = \lambda y$

Sea $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(B) = \lambda$

Como cada componente de y es positiva, se cumple de la hipótesis de que $Az \geq Kz$

$$y' \cdot A z > K (y' \cdot z)$$

transponiendo $\quad z' B y > K z' y$

$$z'(\lambda y) > K (z'y)$$

$$\lambda (z'y) > K (z'y)$$

como $z'y \neq 0$ $\quad \therefore \ \lambda > K$

entonces $\quad \hat{\lambda}(A) > K$

y nuestro resultado está probado.

<u>teorema</u>.- (A.3.T3)

$$|\mu| \leq \hat{\lambda}(A)$$

donde μ es cualquier valor propio de A.

<u>Demostración</u>

Sea μ un valor propio arbitrario (quizá un complejo) de A. Entonces existe $x \neq 0$ (quizá complejo) tal que $\quad A x = \mu x$

entonces $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \mu x_i \quad$ para $i = 1, 2, \ldots n$

Sea $X^+ = \begin{pmatrix} |X_1| \\ \vdots \\ |X_n| \end{pmatrix}$, claramente $X^+ \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} X_j| \geqq |u X_i| \qquad \text{para } i=1,2,\ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |X_j| \geqq |u| \, |X_i| \qquad \text{"}$$

entonces $A x^+ \geqq |u| x^+$

y por el inciso i') del teorema (A.3.+2) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) \geq u$$

con lo que queda demostrado nuestro teorema.

Con este teorema vemos que $\hat{\lambda}(A)$ tiene la propiedad de ser un valor propio no-negativo con valor absoluto máximo.

Esta puede tomarse como definición equivalente de $\hat{\lambda}(A)$, es algo que vale la pena resaltar, ya que será la definición utilizada para demostrar el teorema de Perrón-Frobenius para matrices no-conectadas.

<u>teorema</u> (A.3.+4)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función estrictamente creciente, es decir si $A^* \geq A$ entonces

$$\hat{\lambda}(A^*) > \hat{\lambda}(A)$$

<u>Demostración</u>

Sea $\lambda^* = \hat{\lambda}(A^*)$ entonces existe

$$x^* > 0 \text{ tal que } A^* x^* = \lambda^* x^*$$

como $A^* \geq A$ entonces $A^* x^* \geq A x^*$

$$\therefore \quad A x^* \leq \lambda^* x^*$$ y por el inciso iii) del teorema (A.3.+2) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) < \hat{\lambda}(A^*) = \lambda^*$$

quedando así demostrado nuestro teorema.

teorema (A.3.+5)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función continua.

Sea $\hat{x} > 0$ tal que $A\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x}$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$

donde $M = \max\limits_{j} \left\{ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i}{\hat{x}_j} \right\}$

Sea $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada con todas sus entradas 1, del mismo orden que A.

Sea B una matriz irreducible tal que

$\|A - B\| < \delta \implies A - \delta J < B < A + \delta J$

si multiplicamos por el vector $\hat{x}$ obtenemos

$(A - \delta J)\hat{x} < B\hat{x} < (A + \delta J)\hat{x}$

de donde

$$A\hat{x} - \delta J\hat{x} < B\hat{x} < A\hat{x} + \delta J\hat{x}$$

$$A\hat{x} - \delta J\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \delta \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i \end{pmatrix} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \delta \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i}{\hat{X}_1} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i}{\hat{X}_n} \hat{X}_n \end{pmatrix} \geq \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \delta M\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \varepsilon\hat{X} = \left(\hat{\lambda}(A) - \varepsilon\right)\hat{X}$$

$$A\hat{x} + \delta J\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \delta \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i \end{pmatrix} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \delta \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i}{\hat{X}_1} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i}{\hat{X}_n} \hat{X}_n \end{pmatrix} \leq \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \delta M\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{X} + \varepsilon\hat{X} = \left(\hat{\lambda}(A) + \varepsilon\right)\hat{X}$$

Con lo que finalmente obtenemos

$$\left(\hat{\lambda}(A) - \varepsilon\right)\hat{X} \leq B\hat{x} \leq \left(\hat{\lambda}(A) + \varepsilon\right)\hat{X}$$

y por el teorema (A.3.+2) incisos (i) y (ii) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) - \varepsilon < \hat{\lambda}(B) < \hat{\lambda}(A) + \varepsilon$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Matrices cuadradas no-negativas y no-conectadas

teorema (A.3.+6) Perrón - Frobenius

La Matriz A posee un valor propio real y no negativo $\hat{\lambda}$, tal que si μ es un valor propio cualquiera de A, entonces $\hat{\lambda} \geq |\mu|$, $\hat{\lambda}$ tiene asociado un vector propio no negativo $\hat{x} \geq 0$.

[se toma esta otra definición ya que $x \geq 0$ y $\hat{\lambda}(A) \geq 0$ no garantizan la unicidad y sin embargo $\hat{\lambda}(A) \geq 0$, $\hat{\lambda}(A) \geq |\mu|$ y $x \geq 0$ sí la garantizan]

Demostración *

Por ser A no conectada, podemos llevarla a su forma triangular como lo demostramos en el teorema (A.2.+1), quedando A_* de la siguiente manera:

$$A_* = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde las matrices de la diagonal son matrices cuadradas conectadas ó la matriz cero de orden uno.

Sea A_k la submatriz de la diagonal de máximo valor propio λ_k, como sabemos de

---

* Enunciado y Demostración alternativa del teorema de Perrón-Frobenius para matrices no negativas arbitrarias.

TEOREMA:- Sea $A \geq \bar{0}$. A tiene una raíz no negativa $\hat{\lambda}(A)$ y un vector propio asociado no negativo.

Sea $S = \{x \geq \bar{0} \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

Sea $f_i(x) = \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$

(cont.)

(A.2.T3) λ_R es también valor propio de A.

$\therefore$ sea $\hat{\lambda}(A) = \lambda_R$

De lo anterior obtenemos $\hat{\lambda}(A) \geq 0$ y para todo valor propio μ de A $|\mu| \leq \hat{\lambda}(A)$.

Ahora vamos a ver cuál es el vector propio correspondiente.

Sea $\{A^n\}$ una sucesión de matrices positivas conectadas tal que $\{A^n\} \searrow A$

Aplicando el teorema de P-F para matrices conectadas a cada matriz de la sucesión.

Entonces

$$f: S \to S \qquad f \text{ es continua}$$

utilizando el teorema de punto fijo de Brower, sabemos que existe $x^* \in S$ tal que

$$f(x^*) = x^* = \frac{x^* + Ax^*}{1 + \mathbb{I}'Ax^*} \qquad \text{donde } \mathbb{I}' = (1, 1, \ldots 1)$$

de aquí $(1 + \mathbb{I}'Ax^*)x^* = x^* + Ax^* \Rightarrow Ax^* = (\mathbb{I}'Ax^*)x^*$

sea $\hat{\lambda}(A) = \mathbb{I}'Ax^* \geq 0$; $x^* \geq 0$ es su vector asociado.

QED.

sabemos que existen

$\hat{\lambda}(A_n) > 0 \qquad x^n > 0$ tales que $A^n x^n = \hat{\lambda}(A^n)\, x^n$

Consideremos que $x^n \in S$, en donde $S = \{x \geq 0 \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ como S es cerrado y acotado y $\therefore$ compacto entonces $\{x^n\}$ contiene una subsucesión convergente en S. Llamemos x al vector al que converge.

$$\{x^{\varphi_k}\} \to x \geq 0 \qquad \text{por estar en } S$$

como $A^{\varphi_k} x^{\varphi_k} = \hat{\lambda}(A^{\varphi_k}) x^{\varphi_k}$ entonces $\hat{\lambda}(A^{\varphi_k})$ converge. Sea $\hat{\lambda}$ el valor al que converge.

En el límite $\qquad Ax = \hat{\lambda} x$

Por otro lado, como $|\mu| \leq \hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(A^n)$ al tomar límite

$$|\mu| \leq \hat{\lambda}(A) = \lim_{n \to \infty} \hat{\lambda}(A_n)$$

$\therefore \quad \hat{\lambda} = \hat{\lambda}(A)$ y x es el valor propio asociado a la raíz de Frobenius.

<u>Teorema</u> (A.3.T7)

Si para un vector cualquiera $z > \bar{0}$ y $K \in \mathbb{R}$

i) $Az \geqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \geq K$

ii) $Az \leqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \leq K$

si $z \geqslant 0$ y $K \in \mathbb{R}$

i') $Az > Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) > K$

ii) $Az < Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) < K$

<u>Demostración</u> (probaremos (i) los otros son similares)

Sea $B = A'$ sea $y \geqslant 0$ tal que $A'y = \lambda y$

Sea $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(B) = \lambda$

Como cada componente de y es no negativa, de la hipótesis de que $Az \geqq Kz$ se desprende que

$\hat{\lambda}(A)(y'z) = y'\hat{\lambda}(A)z = y'Az \geqq K(y'z)$ como $y'z \neq 0$

podemos concluir que $\hat{\lambda}(A) \geq K$ qEpd.

teorema (A.3.T8)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función no decreciente.

primero demostraremos un lema auxiliar.

Lema (A.3.L4)

Si $0 \leqq A \leqq B$ y B es una matriz conectada entonces $\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(B)$

Demostración

Por ser B conectada sabemos que existe $y > \bar{0}$ tal que $By = \hat{\lambda}(B)y$ de aquí obtenemos

$$Ay \leqq By = \hat{\lambda}(B)y$$

Por otro lado, sabemos que existe $p \geq \bar{0}$ tal que $Ap = \hat{\lambda}(A)p$

$$\therefore \quad \hat{\lambda}(A)py = Apy \leqq Bpy = \hat{\lambda}(B)py$$

como $py \neq 0$ entonces $\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(B)$

Con lo cual el lema está demostrado.

Ahora vamos a demostrar el teorema.

Si B es no-conectada, entonces triangulamos B transformando correspondientemente A.

Como $\bar{O} \leqq A \leqq B$ entonces $A_{ii} \leqq B_{ii}$ para toda submatriz de la diagonal.

Entonces $\hat{\lambda}(A_{ii}) \leq \hat{\lambda}(B_{ii})$ para $i=1,2..n$

Ya que B_{ii} ó es la matriz cero en cuyo caso $\hat{\lambda}(A_{ii}) = \hat{\lambda}(B_{ii}) = 0$ ó es una matriz conectada en cuyo caso aplicamos el lema (A.3.L4) que acabamos de demostrar.

observemos que si algún elemento de la matriz B es cero, el correspondiente de A también lo es. ∴ si tomamos el valor propio máximo de las submatrices B_{ii}, que sabemos es la raíz de Frobenius podemos concluir que $\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(B)$

teorema (A.3.t9)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función continua.

Una vez más primero demostraremos dos lemas auxiliares.

Lema (A.3.L5)

Si $A^n \downarrow A$; $\hat{\lambda}(A_n) \downarrow \hat{\lambda}(A)$

Demostración

Sea $A^1 \geqq A^2 \geqq A^3 \cdots$

$$\hat{\lambda}(A^n) \geqq \hat{\lambda}(A)$$

Sea $\lambda = \lim_{n \to \infty} \hat{\lambda}(A^n)$

Sabemos que para toda A^n, existe $X^n \varepsilon S$ tal que

$$A^n X^n = \hat{\lambda}(A^n) X^n$$

Sabemos que existe X tal que

$$X^{\varphi_k} \to X \varepsilon S$$

como $\quad A^{\varphi_K} x^{\varphi_K} = \lambda(A^{\varphi_K})\, x^{\varphi_K}$.

en el límite $\quad Ax = \lambda x$

$\therefore$ λ es un valor propio no negativo de A

Si μ es un valor propio de A . como

$$|\mu| \leq \hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(A^n)$$

entonces $\quad |\mu| \leq \lambda = \lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}(A^n)$

$$\therefore \quad \lambda = \hat{\lambda}(A)$$

quedando así demostrado nuestro lema.

<u>Lema</u> (A.3.L 6)

Si $A^n \nearrow A$, $\hat{\lambda}(A^n) \nearrow \hat{\lambda}(A)$

<u>Demostración</u>

$$\hat{\lambda}(A^n) \to \lambda \leq \hat{\lambda}(A)$$

triangulamos A y operamos con A^n como con A, $\therefore$ A^n está triangulada aunque las submatrices A^n_{ii} quizá sean no-conectadas pero al acercarnos "suficientemente" a A, es decir para n suficientemente grande

$$A_{ii} \text{ conectada} \Rightarrow A^n_{ii} \text{ conectada}$$

Para $n = 1, 2, \ldots$ sea $i(n)$ tal que

$$\hat{\lambda}\left(A^n_{i(n)i(n)}\right) = \hat{\lambda}\left(A^n\right)$$

Existe por lo menos un i_0 tal que $i_0 = i(n)$ para un conjunto infinito de índices, entonces vamos a ordenarlos.

$$\{n \mid i(n) = i_0\} = \{\varphi^1, \varphi^2 \ldots\} \quad \text{con } \varphi^1 < \varphi^2 < \cdots$$

Ahora consideremos la siguiente sub-sucesión de la sucesión original.

$$A^{\varphi k} \nearrow A \qquad \hat{\lambda}\left(A^{\varphi k}\right) \nearrow \lambda$$

$$\hat{\lambda}(A^{\varphi_K}) = \hat{\lambda}(A^{\varphi_K}_{i_0 i_0})$$

$$\lambda \leq \hat{\lambda}(A)$$

Supongamos que $\lambda < \hat{\lambda}(A)$

Sabemos que existe i tal que $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(A_{ii})$

Sabemos que $\hat{\lambda}(A^{\varphi_K}_{i_0 i_0}) \to \lambda$

pero $A^{\varphi_K}_{i_0 i_0} \to A_{i_0 i_0}$

con $A^{\varphi_K}_{i_0 i_0}$ matrices conectadas al igual que $A_{i_0 i_0}$ como ya demostramos la continuidad para las matrices conectados (teorema (A.3.+5)) entonces

$$\hat{\lambda}(A^{\varphi_K}_{i_0 i_0}) \to \hat{\lambda}(A_{i_0 i_0})$$

$$\therefore \quad \lambda = \hat{\lambda}(A_{i_0 i_0})$$

y como $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(A_{ii})$ y $\lambda < \hat{\lambda}(A)$

entonces $i \neq i_0$.

Consideremos

$$A_{ii}^{\varphi_K} \to A_{ii}$$

$$\hat{\lambda}(A_{ii}^{\varphi_K}) \to \hat{\lambda}(A_{ii}) = \hat{\lambda}(A)$$

para K suficientemente grande

$$\hat{\lambda}(A_{i_0 i_0}^{\varphi_K}) < \hat{\lambda}(A_{ii}^{\varphi_K})$$

pero $\hat{\lambda}(A_{i_0 i_0}^{\varphi_K}) = \hat{\lambda}(A^{\varphi_K})$

y $\hat{\lambda}(A_{ii}^{\varphi_K}) = \hat{\lambda}(A^{\varphi_K})$

lo cual es un absurdo $\therefore$ es incorrecto nuestro supuesto de que

$$\lambda < \hat{\lambda}(A)$$

$$\therefore \quad \lambda = \hat{\lambda}(A)$$

que es la demostración de nuestro lema.

Una vez probados estos 2 lemas vamos a probar el teorema.

Demostración.

$$\text{Si } A^n \to A$$

Sean $\overline{A^n} = A + \frac{1}{n} J$ con $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

y $\underline{A^n} = (\underline{a^n_{ij}})$ con $\underline{a^n_{ij}} = \max\left(0, a_{ij} - \frac{1}{n}\right)$

$$\overline{A^n} \searrow A \quad \text{y} \quad \underline{A^n} \nearrow A$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe N_1 tal que si $n > N_1$

$$|\hat{\lambda}(\overline{A^n}) - \hat{\lambda}(A)| < \varepsilon$$

y existe N_2 tal que si $n > N_2$

$$|\hat{\lambda}(\underline{A^n}) - \hat{\lambda}(A)| < \varepsilon$$

Sea $\bar{N} = \max(N_1, N_2)$ entonces existe N tal que si $n > N$ entonces

$$\underline{A^{\bar{N}+1}} \leqq A^n \leqq \overline{A^{\bar{N}+1}}$$

de aquí podemos obtener que

$$\hat{\lambda}\left(\underline{A^{\bar{N}+1}}\right) \le \hat{\lambda}(A^n) \le \hat{\lambda}\left(\overline{A^{\bar{N}+1}}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \vee & & \wedge \\ \hat{\lambda}(A)-\varepsilon & & \hat{\lambda}(A)+\varepsilon \end{array}$$

$$\therefore \quad \left|\hat{\lambda}(A) - \hat{\lambda}(A^n)\right| < \varepsilon$$

con lo cual el teorema está probado.

<u>teorema</u>.- (A.3.T10)

Sea $\lambda = \hat{\lambda}(A)$, sea $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

sea $\underline{S} = \min_j S_j$ y $\overline{S} = \max_j S_j$

Entonces $\underline{S} \le \lambda \le \overline{S}$

<u>Demostración</u>

Sea $\mathbb{1}' = (1, 1, \cdots, 1)$

Entonces $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} \overline{S} \\ \vdots \\ \overline{S} \end{pmatrix} = \overline{S} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

es decir $A \cdot \mathbb{1} \leqq \overline{S}\ \mathbb{1}$ $\therefore$ por el teorema (A.3.T7) inciso (ii) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) \leq \overline{S}$$

igualmente $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix}\underline{S}\\ \vdots\\ \underline{S}\end{pmatrix} = \underline{S}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

$\therefore \quad A\cdot\bar{1} \geqq \underline{S}\,\bar{1}$ y por el teorema (A.3.+7) inciso (ii) obtenemos que

$$\hat{\lambda}(A) \geq \underline{S}$$

$$\therefore \quad \underline{S} \leq \lambda \leq \overline{S}$$

con lo cual queda demostrado nuestro teorema.

§ A.4 Matrices productivas.

Nuestro resultado central es (A.4.+3) pero requerimos de algunos preámbulos.

(A.4.D1) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es de <u>diagonal dominante en el sentido de Hadamard</u> si

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad \text{para } j = 1, 2, \dots n$$

(A.4.D2) A es de <u>diagonal dominante</u> si existe

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{con } d_i > 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots n$$

tal que DA es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard, es decir, si - existen n positivos $d_1, d_2, \dots d_n$ tales que

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ \vdots & & \\ d_n a_{n1} & \cdots & d_n a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d_j |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |a_{ij}|$$

$$\text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

<u>teorema</u> (A.4.T1)

Si A es de diagonal dominante, entonces A es no-singular.

Demostración

Supongamos que A es singular.

Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$ con $d_i > 0$ tal que

DA es diagonal dominante en el sentido de Hadamard, entonces como $|A| = 0$

$$|DA| = |D|\,|A| = 0$$

$$\therefore\ DA = E \text{ es singular}$$

$\therefore$ existe X no nulo tal que $X'E = \bar{0}'$

es decir $\sum_{k=1}^{n} x_k e_{kj} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

consideremos $|x_j|$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

Sea j_0 tal que $|x_{j_0}| = \max_j \{|x_j|\}$

$$x_{j_0} e_{j_0 j_0} + \sum_{k \neq j_0} x_k e_{k j_0} = 0$$

de aquí $x_{j_0} e_{j_0 j_0} = -\sum_{k \neq j_0} x_k e_{k j_0}$

$$|x_{j_0}||e_{j_0j_0}| = |\sum_{k\neq j_0} x_k e_{kj_0}| \leq |\sum_{k\neq j_0} |x_k||e_{kj_0}|| \leq \sum_{k\neq j_0} |x_{j_0}||e_{kj_0}|$$

$\therefore$ E no es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard y finalmente A no es de diagonal dominante, lo cual es un absurdo $\therefore$ podemos concluir que

A es no-singular

quedando demostrado el teorema.

<u>teorema</u> (A.4.T2)

Sea $B=(b_{ij})$ tal que si $i\neq j$ $b_{ij}\leq 0$ y $b_{ii}>0$ para $i=1,2,\ldots n$. entonces B es de diagonal dominante si y sólo si para toda $C\geq\bar{0}$ existe un único $x\geq\bar{0}$ tal que $Bx=C$.

<u>Demostración.</u>

"$\Longrightarrow$" Sea D tal que DB es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard.

Por el teorema anterior sabemos que B es una matriz no-singular. $\therefore$ existe B^{-1}

Sea $C \geq \bar{0}$ Sea $X = B^{-1}C$ vamos a probar que $X \geq \bar{0}$

Sea $J = \{ j = 1, 2, \dots n \mid X_j < 0 \}$

Supongamos que $J \neq \phi$; si $i = 1, 2, \dots n$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} X_k = C_i \qquad \sum_{k \notin J} b_{ik} X_k + \sum_{k \in J} b_{ik} X_k = C_i$$

si $i \in J$ entonces en la primera suma $b_{ik} \leq 0$ y $X_k \geq 0$, además $b_{ii} > 0$ y $X_i < 0$

entonces $$\sum_{\substack{k \notin J \\ i = k}} b_{ik} X_k \leq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{k \in J \\ k \neq i}} b_{ik} X_k \geq 0$$

Si esta última sumatoria la multiplicamos por $d_i > 0$ y sumamos sobre las $i \in J$. obtenemos

$$\sum_{i \in J} \sum_{\substack{k \in J \\ k \neq i}} d_i b_{ik} X_k \geq 0 \qquad (A.4.1)$$

Ahora como B es de diagonal dominante

$$d_j |b_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |b_{ij}| \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

en especial si $j \in J$.

pero $\displaystyle\sum_{\substack{i \neq j \\ i \in J}} d_i |b_{ij}| \leq \sum_{i \neq j} d_i |b_{ij}| < d_j |b_{jj}|$

entonces $$0 < \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in J}} d_i (-|b_{ij}|) + d_j |b_{jj}| =$$

$$= \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in J}} d_i b_{ij} + d_j b_{jj} = \sum_{i \in J} d_i b_{ij}$$

Si esta última sumatoria la multiplicamos por X_j que sabemos es negativo, entonces

$$0 > \sum_{i \in J} d_i b_{ij} X_j \qquad \text{para } j \in J$$

$$\therefore \qquad 0 > \sum_{j \in J} \sum_{i \in J} d_i b_{ij} X_j \qquad (A.4.2)$$

pero las ecuaciones (A.4.1) y (A.4.2) son incompatibles $\therefore$ es incorrecto suponer que $J \neq \phi$ y entonces podemos concluir que

$$J = \phi \qquad \therefore \quad X \geq \bar{0}$$

Ahora vamos a demostrar el resultado en la otra dirección "$\Leftarrow$".

Sea $C > \bar{0}$ y existe $X \geq \bar{0}$ tal que $BX = C$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j = C_i > 0 \qquad \text{entonces}$$

$$b_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} X_j > 0 \qquad b_{ii} X_i > \sum_{j \neq i} (-b_{ij}) X_j \geq 0$$

$b_{ii} X_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ $\quad \therefore \quad X_i > 0$

Sea $d_i = X_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$d_i |b_{ii}| = X_i b_{ii} > \sum_{i \neq j} (-b_{ij}) X_j = \sum_{i \neq j} |b_{ij}| d_j$$

$\therefore$ B es de diagonal dominante

Entonces B' cumple las hipótesis de este teorema y podemos aplicarle la primera parte, es decir, para toda $c \geq \bar{0}$ existe un único $y \geq \bar{0}$ tal que $B'y = c$, haciendo lo mismo que hicimos con B obtenemos que $(B')' = B$ es de diagonal dominante.

Con esto nuestro teorema está demostrado.

__Corolario.-__ Si B es tal que si $i \neq j$ $b_{ij} \leq 0$ y $b_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \ldots n$. entonces B es de diagonal dominante si y sólo si B' lo es.

Ahora vamos a demostrar el teorema central de este parágrafo.

__teorema.-__ (A.4.T3)

Sea A una matriz no negativa, y sea $B = (I - A)$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

I) A es productiva, es decir, existe $X \geq 0$ tal que $X > AX$, esto es, $(I-A)X = BX > \bar{0}$

II) Más general, para toda $C \gneq \bar{0}$ existe $X \gneq \bar{0}$ tal que $(I-A)X = BX = C$, es decir, para toda $C \gneq \bar{0}$ existe un único vector de producción que engendra una situación realizable.

III) B es no singular y $B^{-1} \geq \bar{0}$

IV) $\sum_{K=0}^{\infty} A^K$ converge

V) $\hat{\lambda}(A) < 1$

<u>Demostración</u>

$I \Rightarrow II$

Sabemos por hipótesis que existe $X \geq \bar{0}$ tal que $BX > \bar{0}$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j > 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} X_j > 0 \qquad b_{ii} X_i > \sum_{j \neq i} (-b_{ij}) X_j \geq 0$$

$\therefore b_{ii} X_i > 0 \qquad \therefore X_i > 0$ y $b_{ii} > 0$

Sea $d_i = X_i > 0$

$$d_i |b_{ii}| = X_i b_{ii} > \sum_{i \neq j} |b_{ij}| d_j$$

entonces B es de diagonal dominante. Con esto vemos que se cumplen las hipótesis del teorema (A.4.T2) por lo que podemos concluir que para toda $C \geq 0$ existe un único vector $X \geq 0$ tal que $BX = C$ que es el resultado II.

II $\Rightarrow$ III

también ya sabemos por el teorema (A.4.T1) que si B es de diagonal dominante entonces B es no-singular, es decir B^{-1} existe, falta ver que $B^{-1} \geq 0$.

Pero por hipótesis de II para toda $C \geq \bar{0}$, $B^{-1} C = X \geq \bar{0}$.

Sea $C = e_j$ $\quad B^{-1} e_j$ es la j'ésima columna de B^{-1}

$$\therefore B^{-1} \geq \bar{0}$$

III $\Rightarrow$ II

Existe $B^{-1} \geq \bar{0}$ entonces si $C \geq \bar{0}$

$$X = B^{-1} C \geq \bar{0} \quad \text{y} \quad BX = C$$

II $\Rightarrow$ I

Sabemos que para toda $C \geq 0$ existe $X \geq 0$ tal que $BX = C$

Sea $C > 0$ entonces $BX = C > 0$

Hasta aquí hemos probado I $\Leftrightarrow$ II $\Leftrightarrow$ III

Ahora demostraremos III $\Rightarrow$ IV

Sea $T_m = \sum_{K=0}^{m} A^K$

Consideremos $T_m \cdot B = \sum_{K=0}^{m} A^K (I - A) =$

$$\sum_{K=0}^{m} A^K - \sum_{K=0}^{m} A^{K+1} = I - A^{m+1} \qquad (A.4.3)$$

$$\therefore \; T_m \cdot B \leq I$$

de III Sabemos que existe $B^{-1} \geq \bar{0}$

entonces $t_m \leqq B^{-1}$

es decir, sin importar cómo son las entradas de t_m, todas están acotadas superiormente por B^{-1}

Además $t_m \leqq t_{m+1}$ para toda m ya que t_{m+1} tiene un término más. Por esto podemos concluir que existe el

$$\lim_{m\to\infty} t_m = t$$

$\therefore$ la serie converge, de aquí que el término general converge a cero, es decir,

$$\lim_{m\to\infty} A^{m+1} = 0$$

Sabemos de (A.4.3) que

$$t_m \cdot B = I - A^{m+1} \quad \text{de donde}$$

$$\lim_{m\to\infty} (t_m \cdot B) = \lim_{m\to\infty} (I - A^{m+1})$$

de aquí obtenemos

$$T \cdot B = I$$

$$\therefore \quad T = B^{-1} = (I-A)^{-1}$$

es decir la serie converge y converge a $(I-A)^{-1}$

Ahora vamos a demostrar IV => III

De nuevo consideremos (A.4.3)

es decir

$$T_m \cdot B = I - A^{m+1}$$

observemos que esta afirmación la obteníamos independientemente de que la matriz B sea o no singular.

Ahora como T_n converge sabemos que el término general converge a cero y por lo tanto

$$T \cdot B = I \qquad\qquad \therefore \quad T = B^{-1}$$

pero T es el límite de una serie que término a término cada uno de sus sumandos es una entrada no negativa, entonces

$$B^{-1} \geq \bar{0} \quad .$$

Ahora hemos demostrado que

$$\mathrm{I} \Longleftrightarrow \mathrm{II} \Longleftrightarrow \underline{\mathrm{III}} \Longleftrightarrow \underline{\mathrm{IV}}$$

solo nos falta demostrar la equivalencia con V.

$\mathrm{I} \Longrightarrow \mathrm{V}$

Por hipótesis de I sabemos que existe $x \geq 0$ tal que $x > Ax$, esto es,

$$1 \cdot x > Ax$$

Entonces por el teorema (A.3.T7) inciso (ii) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) < 1$$

$\text{V} \Rightarrow \text{I}$

Sea $A \geq 0$ $\quad 1 > \hat{\lambda}(A)$

Sea $\{A^n\}$ una sucesión de matrices tal que para toda n $A^n > 0$, entonces A^n es conectada, y tal que

$A^n \Downarrow A$ ya demostramos que

$\hat{\lambda}(A^n) \searrow \hat{\lambda}(A)$

Existe p_0 tal que $1 > \hat{\lambda}(A^{p_0})$

Sea $X > 0$ el vector propio de A^{p_0} asociado a $\hat{\lambda} A^{p_0}$

$$BX = (I-A)X = X - AX \geqq X - A^{p_0}X = X - \hat{\lambda}(A^{p_0})X$$

pero

$$X - \hat{\lambda}(A^{p_0})X = \left(1 - \hat{\lambda}(A^{p_0})\right) X > 0$$

$$\therefore \quad B\,X > \bar{0}$$

y con esto queda totalmente demostrado nuestro teorema.

<u>teorema</u> (A.4. T4)

Si A es una matriz productiva y $B \geqslant \bar{0}$ es tal que $A \geqslant B$, entonces

$$(I-A)^{-1} \geqq (I-B)^{-1}$$

<u>Demostración</u>.-

Como A es productiva existe $(I-A)^{-1} \geqslant 0$, y por el inciso IV del teorema anterior la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} A^K \text{ converge a } (I-A)^{-1}$$

Es claro que también B es productiva ya que $X > AX \geqslant BX$

entonces también la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k \text{ converge a } (I-B)^{-1}$$

De aquí podemos concluir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \geqq \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

ya que término a término es mayor la primera que la segunda ∴

$$(I-A)^{-1} \geqq (I-B)^{-1}$$

con lo que el teorema está probado.

bibliografía

L. V. BortKiewicz (1907) "Contribución a una rectificación teórica de Marx en el volumen III de El Capital", Cuadernos de Pasado y Presente, #49, México, 1978.

G. Debreu; I.N. Herstein (1953) "Nonnegative square matrices", Econométrica #21, octubre 1953.

G. Dostaler (1978) "Valor y Precio, historia de un debate", terra nova, México, 1980.

C.E. Ferguson; J.P. Gould (1975) "Teoría Microeconómica", Fondo de cultura económica, México, 1978.

F.R. Gantmacher (1959) "the theory of Matrices", Chelsea, EU, 1974.

A.G. Kurosch (1946) "Curso de Algebra Superior", Mir, Moscú, 1977.

C. Marx; F Engels (1934) "Correspondencia", Cartago, Buenos Aires, 1957.

C. Marx; F Engels (1967) "Obras Escogidas" 8 tomos, Ediciones Quinto Sol, México, 1970.

C. Marx (1867) "El Capital", Siglo XXI, México, 1976.

C. Napoleoni (1963) "El pensamiento económico en el siglo XX", oikos-tau, España, 1968.

J.T. Schwartz (1961) "Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics", Gordon and Breach, E.U. 1961.

P. Sraffa (1960) "Producción de mercancías por medio de mercancías," oikos-tau, España, 1960.

A. Takayama (1974) "Mathematical Economics", Dryden, E.U., 1974.

J. M. Vegara (1979) "Economía política y modelos multisectoriales", Tecnos, Madrid, 1979.

L. Villegas (1981) "Una presentación matemática del modelo de Insumo - Producto de Leontief", tesis profesional, facultad de ciencias, UNAM, México, 1981.

J. E. Woods (1978) "Mathematical Economics, topics in multi-sectoral economics", Longman, London & New York, 1978.