UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORCING Y TEORIA DE CONJUNTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A N

MIGUEL CARRILLO BARAJAS

ALBERTO OLIART ROS

México, D. F. 1985

Introducción.

Uno de los temas, que hasta hace poco tiempo no había sido considerado dentro de los cursos de la licenciatura en matemáticas de la facultad de ciencias de la U.N.A.M., orientados a la preparación en el área de lógica matemática, es el de la teoría axiomática de conjuntos. Es indudable que este tema tiene una gran importancia en el estudio de lo que se ha dado en llamar "Fundamentos de la matemáticas".

Dentro del amplio campo de la teoría de conjuntos, encontramos el tema conocido como "Técnica de Forcing", al cual dedicamos gran parte de esta tesis. El resto de la misma contiene lo que consideramos son las bases necesarias para la comprensión del forcing.

Hemos escogido este tema gracias a una sugerencia de nuestro director de tesis, el Prof. Carlos Torres Alcaraz, y porque lo consideramos una continuación adecuada de los cursos de lógica que tomamos durante la licenciatura.

La primera idea completamente elaborada del forcing y su uso, fué concebida por P. Cohen en 1963, pero, como la mayoría de los autores dicen, esta idea ha ido sufriendo modificaciones al paso del tiempo. El enfoque que nosotros hemos escogido para la exposición del tema, es el que propusieron D. Scott y R. Solovay.

Hemos dividido este trabajo en cinco capítulos. En el primer capítulo, incluimos temas básicos de álgebras Booleanas y una pequeña sección de funciones de verdad; el segundo es un vistazo rápido a la teoría intuitiva haciendo énfasis en la recursión transfinita; el tercer capítulo es un ejemplo del uso de forcing a nivel elemental (forcing sin hablar de forcing), manejando solamente desigualdades y funciones de verdad; en el cuarto capítulo se exponen temas básicos de la teoría axiomática de conjuntos, necesarios para la comprensión del último capítulo, en el cual se exponen los temas que constituyen el forcing.

Finalmente aclaramos que la división en capítulos y secciones reponde, principalmente, a la necesidad del orden de aparición de los temas.

INDICE

CAPITULO 1

Preeliminares

ALGEBRAS BOOLEANAS

1.1 Def .-Un álgebra Booleana es un conjunto B con una operación unaria "$'$" y dos operaciones binarias "$+$" y "$\cdot$" junto con dos elementos distinguidos 0 y 1 que satisfacen los siguientes axiomas:

a.- $(a')' = a$

b.- "$+$" y "$\cdot$" son asociativas y conmutativas

c.- "$+$" y "$\cdot$" son distributivas una con respecto a la otra

d.- $\forall_{a,b\in B}$ $(a+b)' = a'\cdot b'$ y $(a\cdot b)' = (a'+b')$

e.- $\forall_{a\in b}$ $a+a = a\cdot a = a$

f.- $\forall_{a\in b}$ $a+0 = a$ y $a\cdot 1 = a$

Orden Inducido

1.2 Si B es un álgebra Booleana, definimos $a \leq b \iff a\cdot b = a$

1.1 $\leq$ es un orden parcial en B e.d. $\leq$ es reflexivo y transitivo y antisimétrico.

Definimos $a<b$ si y solo si $a\leq b$ y $a\neq b$

De aquí en adelante, cuando se hable del SUP o del INF de un subconjunto de B se estará pensando en este orden.

Lista de propiedades de un Algebra Booleana.

P1.- $a+b\cdot c = (a+b)\cdot(a+c)$

P2.- $a\cdot a' = 0$ y $a+a' = 1$

P3.- $a+1 = 1$ y $a\cdot 0 = 0$

P4.- $1' = 0$

P5.- $a+a\cdot b = a$

P6.- $a\cdot(a+b) = a$

P7.- $a + a'\cdot b = a + b$ y $a\cdot(a'+b) = a\cdot b$

P8.- $a\cdot b + a'\cdot c + b\cdot c = a\cdot b + a'\cdot c$

P9.- $(a+b)\cdot(a'+c)\cdot(b+c) = (a+b)\cdot(a'+c)$

P10.- $\underset{a\in A}{SUP}\ c\cdot a = c\cdot \underset{a\in A}{SUP}\ a'$

P11.- $(\underset{a\in A}{INF}\ a)' = \underset{a\in A}{SUP}\ a'$

1.3 Def .- Un álgebra Booleana es completa si :

$$\forall_{A\subseteq B} (\exists_{a\in B}\ a = SUP\ A \ \ y \ \exists_{b\in B}\ b = INF\ A)$$

1.4 Def .- B es σ -álgebra si todo subconjunto numerable de B tiene un supremo y un ínfimo.

1.5 Def .- Si B es un álgebra Booleana $a, b \in B$ son ajenos sii $a\cdot b = 0$

1.6 Def .- $A \subseteq B$ es un subconjunto disjunto si

$$\forall_{a,b\in A}\ a\cdot b = 0$$

1.7 Def .- Un álgebra Booleana B satisface la condición de numerabilidad si todo conjunto disjunto de elementos no nulos es a lo más numerable.

1.8 Def .- Si $M \subseteq B$, decimos que M es un Ideal si

$$0\in M,\ si\ p,q\in M\ ent\ p+q\in M\ y\ si\ p\in M, q\in B\ ent\ p\cdot q\in M$$

La intersección de toda colección de ideales es ideal. Si $E \subseteq B$ entonces la intersección de todos los ideales que contienen a E es el mínimo ideal que contiene a E. Un ideal generado por un monoide $\{p\}$ es llamado un ideal principal.

1.2 Lema .- Un álgebra Booleana B satisface la condición de numerabilidad sii :

$\forall E \subset B \quad \exists D \subset E$ numerable $\wedge$ D y E tiene el mismo conjunto de cotas superiores.

Dem :

Supongamos que B satisface la condición de numerabilidad, y sea M el ideal generado por E con $E \subset B$.

Los elementos de M son exactamente aqyuellos elementos de B que pueden ser dominados por el supremo de algún subconjunto finito de E. Se sigue que M y E tienen el mismo conjunto de cotas superiores.

Apliquemos el lema de Zorn para encontrar un conjunto disjunto maximal, digamos F, de elementos no nulos de M. Se sigue que F y M tienen el mismo conjunto de cotas superiores. Visto que cumple la condición de numerabilidad, F es a lo más numerable. Visto que cada subconjunto numerable de elementos de F es dominado por el supremo de algún subconjunto finito de E, la unión de estos conjuntos finitos es un subconjunto numerable de E con el mismo conjunto de cotas superiores.

Sup. que E es un conjunto disjunto de elementos no nulos de B. Sea $D \subseteq E$ numerable, con el mismo conjunto de cotas superiores que E . Si E tiene un elemento que no está en el complemento de tal elemento, seria una cota superior de D pero no de E . Concluimos que $E = D$ y $\therefore$ E es numerable.

1.3 Corolario .- Una σ -álgebra Booleana B que satisface la condición de numerabilidad es completa.

Dem :

Todo supremo de un conjunto numerable existe por definición Sea $A \subset B$, por el lema anterior, existe $D \subset A$ numerable tal que D y A tienen el mismo conjunto de cotas superiores, sea $s = \sup D$ $\therefore$ $s = \sup A$ $\square$.

1.9 Def .- Una medida sobre un álgebra Booleana B es una función

$$\mu : B \to \mathbb{R}$$

real no negativa, tal que siempre que $\{p_n\}$ es una sucesión disjunta de elementos de B con un supremo $p \in B$, entonces

$$\mu(p) = \sum_n \mu(p_n)$$

Esta última condición se conoce como aditividad numerable. Algunas veces, esta condición es rebajada a aditividad finita.

μ es finitamente aditiva si :

$$\mu(p+q) = \mu(p) + \mu(q) \quad \text{si } p \cdot q = 0 .$$

1.10 Def .- Un álgebra con medida es una σ-álgebra Booleana con una medida μ sobre $\mathcal{B}$, normalizada y positiva.

1.11 Def .- μ es normalizada si $\mu(1) = 1$.

1.12 Def .- μ es positiva si $\mu(p) = 0 \Rightarrow p = 0$

1.4 Lema .- Toda álgebra con medida finitamente aditiva satisface la condición de numerabilidad.

Dem :

Un conjunto disjunto de elementos no nulos no puede contener, para todo entero positivo n, n elementos de medida mayor a $1/n$

1.5 Corolario .- Toda álgebra con medida es completa :

Dem : Apliquense los lemas anteriores.

Filtros y Ultrafiltros.

1.13 Def .- Si $\mathcal{B}$ es un álgebra Booleana, decimos que $F \subset \mathcal{B}$ es un filtro sobre $\mathcal{B}$ sii

a) $x, y \in F \rightarrow x \cdot y \in F$

b) $x \geq y \in F \rightarrow x \in F$

c) $1 \in F$, $0 \notin F$.

Un filtro F sobre $\mathcal{B}$ es un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}$ sii :

d) $\forall_{x \in \mathcal{B}} \; x \in F$ ó $x' \in F$.

Observación .- Si A es un conjunto y $F \subseteq \mathcal{P}(A)$ decimos que F es un filtro sobre A sii

F es un filtro sobre el álgebra Booleana $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Supongamos que L es un lenguaje de primer orden para la estructura

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{R_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K} \rangle$$

Si $ATOM$ es el conjunto de formulas atómicas de L y si $\forall p \in ATOM$, tenemos definida

$$\|P\| : A^{\omega} \longrightarrow B$$

donde B es un álgebra Booleana completa. Podemos extender la definición mediante el proceso inductivo obvio:

$$\|\neg P\|(a) = \|P\|(a)'$$

$$\|\varphi \wedge \psi\|(a) = \|\varphi\|(a) \cdot \|\psi\|(a)$$

$$\|(x_i)\varphi\|(a) = \underset{b\in A}{\mathrm{INF}}\, \|\varphi\|(a(i/b))$$

$$\|(\exists x_i)\varphi\|(a) = \underset{b\in A}{\mathrm{SUP}}\, \|\varphi\|(a(i/b))$$

CAPITULO 2

Teoría Intuitiva de Conjuntos

Supongamos que SSet1 es un sistema formal sobre un lenguaje de primer orden que incluye los axiomas de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos, así como los axiomas lógicos y reglas de inferencia suficientes (cálculo de predicados). Un sistema con las características de SSet1 será descrito más adelante en forma un poco más exacta.

Vamos a estudiar a SSet1, sintáctica y semanticamente, usando como herramienta las "matemáticas contemporaneas". Consideramos que estas "matemáticas contemporaneas" incluyen una parte de la teoría intuitiva de conjuntos que no es muy utilizada por los matemáticos contemporaneos. A lo que nos referimos es a la inducción (recursión) transfinita, i.e., consideramos la teoría de los números transfinitos de Cantor como parte de las "matemáticas contemporaneas".

Por esta razón, vamos a dar una rápida exposición de la teoría intuitiva de conjuntos. Esta exposición servirá además para presentar semánticamente el problema de la hipótesis del contínuo.

Teoría Intuitiva de Conjuntos.

Empezaremos diciendo que la teoría intuitiva de conjuntos no es algo que esté bién definido, es por eso que existe cierta vaguedad en lo que a continuación se expone.

Consideramos que el concepto de conjunto es claro para el lector y por lo tanto lo dejaremos indefinido, o bién, se puede tomar la definición que da Cantor: "Un conjunto es una colección como totalidad de objetos definidos y distintos de nuestra intuición o nuestro pensamiento".

Como consecuencia de lo anterior, la relación de pertenencia quedará también indefinida y para indicar que X es un elemento del conjunto A escribiremos $X \in A$.

Así mismo, adoptamos toda la notación clásica referente a conjuntos. Cabe agregar que damos por cierto el axioma de elección, es decir, ocacionalmente haremos uso de él aunque no se mencione.

Ordinales.

2.1 Definición.- Un conjunto A está parcialmente ordenado por una relación $<$ en A si:

1) $p \not< p \quad \forall p \in A$.

2) $p < q$ y $q < r \Rightarrow p < r$.

Se dice que $(A, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Si además se cumple que $p < q$ ó $p = q$ ó $q < p$ para todo $p, q \in A$ entonces se dice que A está ordenado y si también se cumple que todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo, entonces decimos que A está bién ordenado.

2.2 Definición.- Se dice que un conjunto A es transitivo si para todo $x \in A$ se tiene que $x \subseteq A$.

2.3 Definición.- Un conjunto A es un ordinal si es transitivo y está bién ordenado por la relación de pertenencia.

Denotaremos por ON a la clase (conjunto) de todos los ordinales.

2.1 Afirmación .- Todo elemento de un ordinal es un ordinal, i.e., $x \in ON$ y $y \in x \Rightarrow y \in ON$.

Demostración:

Sea $y \in x$, entonces $y \subseteq x$ y por lo tanto y está bién ordenado. Además, si $u \in v \in y$ entonces:

$v \in y \in x \;\therefore\; v \in x$, $\therefore\; u \in v \in x$ y $\therefore\; u \in x$

así, $u, v, y \in x$ y $\in$ es transitiva en x.

$\therefore\; u \in v \in y \Rightarrow u \in y \;\therefore\; y$ es transitivo

$\therefore\; y \in ON$.

□

Notación.- De aquí en adelante, si $x, y \in ON$,ocacionalmente escribiremos $x < y$ en lugar de $x \in y$..

2.2 Afirmación .- Si $\alpha \in ON$ entonces $\alpha = \{x \in ON / x < \alpha\}$.

Demostración:

$y \in \alpha \Rightarrow y \in ON$ y $y < \alpha$ $\therefore$ $y \in \{x \in ON / x < \alpha\}$.

$y \in \{x \in ON / x < \alpha\} \Rightarrow y < \alpha$ $\therefore$ $y \in \alpha$.

$\therefore$ $\alpha = \{x \in ON / x < \alpha\}$. $\square$

2.5 Definición .- Si $\alpha \in ON$ entonces $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.

2.3 Afirmación .- Si $\alpha \in ON$ entonces $\alpha + 1 \in ON$.

Demostración:

(i) $x \notin x \quad \forall x \in \alpha + 1$.

(ii) Si $x, y, z \in \alpha + 1$ y $x \in y \subset z$, entonces:

$z \in \alpha \Rightarrow x \in y \in z \in \alpha$ $\therefore$ $y \in \alpha$

$\therefore$ $x \in y \in \alpha$ $\therefore$ $x \in \alpha$ $\therefore$ $x, y, z \in \alpha$ $\therefore$ $x \in z$.

$z = \alpha \Rightarrow x \in y \in \alpha$ $\therefore$ $x \in \alpha = z$.

$\therefore$ $\in$ es transitiva en $\alpha + 1$.

(iii) Supongamos que $x, y \in \alpha + 1$.

Si $x, y \in \alpha$ entonces $x \in y$ ó $y \in x$ ó $x = y$.

Si $x, y \in \{\alpha\}$ entonces $x = y$.

S.P.G., supongamos que $x \in \alpha$ y $y = \alpha$ entonces

$x \in y = \alpha$.

iv) Supongamos que $A \subset \alpha+1$, $A \neq \emptyset$.

Si $\alpha \notin A$ entonces $A \subset \alpha$ y $\therefore$ A tiene elemento mínimo.

Supongamos que $\alpha \in A$.

Si $A-\{\alpha\}=\emptyset$ entonces $\mathrm{Min}\ A=\alpha$.

Si $A-\{\alpha\}\neq\emptyset$, sea $a=\mathrm{Min}\,(A-\{\alpha\})$,

como $a\in\alpha$, $a\leq x \quad \forall\, x\in A$.

$\therefore$ A tiene elemento mínimo.

$\therefore$ $\alpha+1$ está bién ordenado por $\in$.

v) Supongamos que $x\in y\in\alpha+1$.

Si $y\in\alpha$ entonces $x\in y\in\alpha$

$\therefore\ x\in\alpha\subset\alpha+1$

$\therefore\ x\in\alpha+1$.

Si $y=\alpha$ entonces $x\in\alpha\subset\alpha+1$

$\therefore\ x\in\alpha+1$.

$\therefore$ $\alpha+1$ es transitivo.

$\therefore\ \alpha+1\in ON$ $\square$

2.6 Definición .- Un ordinal α es un ordinal límite sii

$$\forall_{\beta\in ON}\quad \alpha\neq\beta+1$$

2.4 **Afirmación** .- Si $\alpha, \gamma \in ON$ y $\alpha < \gamma$ entonces $\alpha + 1 \leq \gamma$.

Demostración:

Si $\alpha + 1 = \gamma$ no hay nada que probar.

Supongamos que $\alpha + 1 \neq \gamma$.

Como $\alpha < \gamma$, $\alpha \in \gamma$ $\therefore$ $\alpha \subset \gamma$,

y $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ $\therefore$ $\alpha + 1 \subset \gamma$

$\therefore$ $\gamma \not\subset \alpha + 1$, de lo contrario $\alpha + 1 = \gamma$

$\therefore$ $\gamma - (\alpha + 1) \neq \emptyset$.

Sea $b = Min(\gamma - (\alpha + 1))$, ($b \notin \alpha$ y $b \neq \alpha$).

como $\alpha, b \in \gamma$, $\alpha \in b$ ó $b \in \alpha$ ó $b = \alpha$

ya que $\in$ bién ordena a γ.

Pero $b \notin \alpha$ y $b \neq \alpha$, $\therefore$ $\alpha \in b$.

$\therefore$ $\alpha \in b \in \gamma$

$\therefore$ $\alpha \subset b$

$\therefore$ $\alpha + 1 \subset b \in \gamma$

Si $\alpha + 1 \neq b$ entonces $\alpha + 1 \not\subset b$ ó $b \not\subset \alpha + 1$,

pero $\alpha + 1 \subset b$ $\therefore$ $b \not\subset \alpha + 1$.

$\therefore$ $b - (\alpha + 1) \neq \emptyset$

Sea $x \in (b-(\alpha+1))$

$x \in b \in \gamma \quad \therefore \quad x \in \gamma$

y $x \notin \alpha+1 \quad \therefore \quad x \in (\gamma-(\alpha+1))$.

Como $x \in b$, $x < b$ ∇ ya que $b = Min(\gamma-(\alpha+1))$

$\therefore \alpha+1 \leq \gamma$

$\square$.

2.5 Afirmación .- Si α es un ordinal límite y $\beta \in ON$ es tal que $\beta \in \alpha$ entonces $\beta+1 \in \alpha$.

Demostración:

Por la afirmación anterior, $\beta+1 \leq \alpha$
pero $\beta+1 \neq \alpha$ **por ser** α **límite,** $\therefore$ $\beta+1 < \alpha$

$\therefore \beta+1 \in \alpha$ $\square$

2.6 Afirmación .- Si α es un ordinal límite entonces $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$

Demostración:

Si $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ entonces $x \in \beta_0$ p. a. $\beta_0 \in \alpha$

$\therefore x \in \beta_0 \in \alpha \quad \therefore x \in \alpha \quad \therefore \bigcup_{\beta<\alpha} \beta \subseteq \alpha$.

y Si $\alpha \nsubseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ entonces:

$A := \alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} \beta \neq \emptyset$.

$$\text{Sea } a \in A, \therefore a \in \alpha \text{ y } a \notin \bigcup_{\beta<\alpha} \beta .$$

$$\text{Como } \alpha \text{ es límite, } a+1 \in \alpha .$$

$$\therefore a+1 = \beta_0 \text{ p.a } \beta_0<\alpha ,\ a \in \beta_0 \text{ y } \beta_0 < \alpha$$

$$\therefore a \in \bigcup_{\beta<\alpha} \beta \quad !$$

$$\therefore \alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$$

$$\therefore \alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$$

$\square$

2.7 Definición .-Si A es un conjunto bién ordenado y $a \in A$, entonces el segmento inicial determinado por a es:

$\{x \in A \,/\, x < a\}$.

2.8 Definición .- Si $(A, <)$ y $(B, <')$ son bién ordenados y $f: A \to B$, entonces f es un isomorfismo sii:

1) $\forall\, x, y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) <' f(y)$.

2) f es suprayectiva.

En tal caso, se dirá que A y B son isomorfos y se pondrá $A \approx B$.

En caso de que solo se cumpla el inciso (1), se dice que f es una función preservadora del orden.

2.9 Notación .- Si P es bién ordenado y $y \in P$ entonces se denotará por $\hat{y}$ al segmento inicial determinado por y :

2.7 Afirmación .- Si $(P,<)$ es un conjunto bién ordenado y $f: P \longrightarrow P$ preserva el orden, entonces $f(x) \geqslant x \quad \forall x \in P$.

Demostración:

Sea $A := \{x \in P \,/\, f(x) < x\}$.

Si $A \neq \emptyset$ entonces A tiene elemento mínimo, sea y tal elemento. Entonces:

$f(y) < y$, y como f preserva el orden, entonces $f(f(y)) < f(y)$, es decir, $f(y) \in A$ y $f(y) < y$, lo cual contradice que y sea el elemento mínimo de A .

$\therefore A = \emptyset \quad \therefore f(x) \geqslant x \quad \forall x \in P$. $\square$

2.8 Afirmación .- Si $(P,<)$ es un conjunto bién ordenado y $x \in P$, entonces $\hat{x}$ y P no son isomorfos, i.e., $\hat{x} \not\approx P$.

Demostración:

Supongamos que $\exists\, x \in P \ni \hat{x} \approx P$.

Sea $f: P \longrightarrow \hat{x}$ un isomorfismo, por lo tanto, f preserva el orden y, por un resultado anterior, $f(x) \geqslant x$. Por lo tanto, $f(x) \notin \hat{x}$. Esto es una contradicción ya que el dominio de f debe abarcar todo P (de hecho, un isomorfismo es una función biyectiva).

$\therefore \forall x \in P,\ \hat{x} \not\approx P$.

$\square$

2.9 Afirmación .- Si $(P,<)$ y $(Q,<')$ son conjuntos bién ordenados entonces:

P y Q son isomorfos ó

P es isomorfo a un segmento inicial de Q ó

Q es isomorfo a un segmento inicial de P .

Demostración:

Si $x \in P$ y $y \in Q$ son tales que $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son isomorfos, entonces definimos $f(x) = y$.

f define una función $f: A \longrightarrow B$, $A \subset P$, $B \subset Q$, ya que si $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$ entonces $\hat{x} \approx \hat{y}_1$ y $\hat{x} \approx \hat{y}_2$, por lo tanto, $\hat{y}_1 \approx \hat{y}_2$. Si $y_1 \neq y_2$ entonces, sin perdida de generalidad, $y_1 <' y_2$ y, por lo tanto, $y_1 \in \hat{y}_2$; por lo tanto, $\hat{y}_1$ es un segmento inicial de $\hat{y}_2$ y así tenemos que $\hat{y}_2$ es isomorfo a un segmento inicial propio, lo cual es imposible debido a un resultado anterior y por lo tanto $y_1 = y_2$ y f es una función.

Por otro lado, si $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$,entonces $x_1 \in \hat{x}_2$, por lo tanto, $\hat{x}_1$ es segmento inicial de $\hat{x}_2$, y si $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces $\hat{x}_1 \approx \hat{y}_1$ y $\hat{x}_2 \approx \hat{y}_2$. Por lo tanto:

1) $y_1 \neq y_2$ porque si $y_1 = y_2$ entonces $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$, $\therefore$ $\hat{x}_1 \approx \hat{x}_2$ $\blacktriangledown$

2) Si $y_2 <' y_1$ entonces: como $\hat{x}_1 \approx \hat{y}_1$, $\hat{x}_2 \approx \hat{y}_2$ y $x_1 < x_2$,

$\hat{x}_2$ es isomorfo a un segmento inicial de $\hat{y}_1$ $(y_2 <' y_1)$,

$\therefore$ $\hat{x}_2$ es isomorfo a un segmento inicial de $\hat{x}_1$ $(\hat{x}_1 \approx \hat{y}_1)$,

$\therefore$ $\hat{x}_2$ es isomorfo a un segmento inicial propio $(x_1 < x_2)$.

Por lo tanto, la unica posibilidad que queda es $y_1 <' y_2$, es decir, hemos probado que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) <' f(x_2)$.

$\therefore$ f preserva el orden.

Lo que falta probar acerca de f es :

i) Si $\mathrm{Dom}(f) \neq P$ entonces $\mathrm{Dom}(f) = \hat{p}$ para alguna $p \in P$.

ii) Si $\mathrm{Im}(f) \neq Q$ entonces $\mathrm{Im}(f) = \hat{q}$ para alguna $q \in Q$.

iii) $\mathrm{Dom}(f) = P$ o $\mathrm{Im}(f) = Q$

Demostración :

Si $\mathrm{Dom}(f) \neq P$ entonces $A := \{x \in P \,/\, x \notin \mathrm{Dom}(f)\} \neq \emptyset$

sea $p = \min A$, evidentemente $\mathrm{Dom}(f) = \hat{p}$.

Si $\mathrm{Im}(f) \neq Q$ entonces $B := \{x \in Q \,/\, x \notin \mathrm{Im}(f)\} \neq \emptyset$

sea $q = \min B$, evidentemente $\mathrm{Im}(f) = \hat{q}$.

Sup. que $\mathrm{Dom}(f) \neq P$, y que $\mathrm{Im}(f) \neq Q$, entonces, por lo anterior

$$\mathrm{Dom}(f) = \hat{p} \,,\; p \in P \;\; y$$

$$\mathrm{Im}(f) = \hat{q} \,,\; q \in Q \,.$$

pero $f : \hat{p} \longrightarrow \hat{q}$ es suprayectiva (e inyectiva por ser f preservadora del orden), por lo tanto, f es isomorfismo, i.e. , $\hat{p} \approx \hat{q}$,

$$\therefore\; f(p) = q \;\; y \;\; \therefore\; p \in \mathrm{Dom}(f) \;\; y \;\; q \in \mathrm{Im}(f)$$

$$\therefore\; p \in \hat{p} \;\; y \;\; q \in \hat{q} \;\; \gamma$$

por lo tanto, no es posible que $\mathrm{Dom}(f) \neq P$ y $\mathrm{Im}(f) \neq Q$

$$\therefore\; \mathrm{Dom}(f) = P \;\; o \;\; \mathrm{Im}(f) = Q \quad \square$$

Recordemos que definimos un ordinal como un conjunto transitivo bien ordenado por $\in$. En los parrafos anteriores hemos probado que cualesquiera dos conjuntos bién ordenados son "comparables" mediante un isomorfismo adecuado, este hecho nos ayudará a probar que la clase (conjunto) de todos los ordinales, $\mathcal{OR}$, está bién ordenada por $\in$, es decir, que los ordinales forman un conjunto (clase) bién ordenado, lo cual es la esencia del Principio de Inducción Transfinita.

1.10 Afirmación .- $\mathcal{O}n$ está bién ordenado por $<$ $(\alpha < \beta$ sii $\alpha \in \beta)$.

Demostración:

i) $\forall_{\alpha \in \mathcal{O}n} \, \alpha \nless \alpha$ (estamos suponiendo que ningún conjunto pertenece a si mismo, lo cual es intuitivo).

ii) Si $\alpha < \beta < \gamma$ entonces $\alpha < \gamma$ por ser γ transitivo,

por lo tanto, $<$ es un orden parcial sobre $\mathcal{O}n$.

iii) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{O}n$ entonces α y β son conjuntos bién ordenados; por lo tanto, $\alpha \approx \beta$ ó $\alpha \approx \hat{b}$, $b \in \beta$ ó $\hat{a} \approx \beta$, $a \in \alpha$.

Pero si θ y γ son dos ordinales isomorfos y $f: \theta \longrightarrow \gamma$ es el isomorfismo que se construye en la demostración de la afirmación anterior, entonces:

Si $\theta \neq \gamma$, S.P.G., supongamos que $\exists a \in \theta - \gamma$, entonces

$A := \{x \in \theta / x \notin \gamma\} \neq \emptyset$

sea $p = \text{Min } A$,

$p \notin \gamma$, $p \in \theta$, $f(p) \in \gamma$ y $f(\hat{p}) \approx \hat{p}$,

$\therefore$ si $x < p$ entonces $x \notin A$, $\therefore x \in \theta \cap \gamma$, es decir,

$\forall x < p, x \in \gamma$. Además, si $z \geq p$ entonces $z \notin A$,

de lo contrario $p \leq z \in \gamma$ y $\therefore p \in \gamma$ $\blacktriangledown$

$\therefore \forall z \geq p, z \notin \gamma$

$\therefore$ por una afirmación anterior, $\gamma = \hat{p}$

como $\theta \approx \gamma$ se concluye que $\theta \approx \hat{p}$, pero $p \in \theta$,

$\therefore \Theta$ es isomorfo a un segmento inicial propio ∇

por lo tanto $\Theta = \gamma$.

Por lo tanto, las relaciones de isomorfismo en el inciso (iii) se traducen en igualdad, que era lo que esperabamos,

$\therefore <$ es un orden total en $\mathcal{On}$.

iv) Supongamos que $L \subset \mathcal{On}$, $L \neq \phi$. Consideremos $m = \bigcap L$, entonces: $\exists \ell \in L$ y $\forall x \in L, m \subset x$,

$$\therefore \forall_{x \in L} \; a \in b \in m \subset x \rightarrow a \in b \in x \rightarrow a \in x .$$

$$\therefore \forall_{x \in L} \; a \in x \quad , \therefore a \in m \; , \therefore \underline{\underline{m \text{ es transitivo}}}$$

$$m \subset \ell \quad \therefore \underline{\underline{m \text{ está bién ordenado}}}.$$

$$\therefore \underline{\underline{m \in \mathcal{On}}} .$$

$$\text{Sea } x \in L , m \subset x \quad \therefore \forall_{a \in m} a \in x \; , \therefore \forall_{a \in m} a < x .$$

$$\text{Si } x < m \text{ entonces } x \in m \text{ y } \therefore x < x \; \nabla$$

$$\therefore \underline{\underline{\forall_{x \in L} m \leq x}} \quad \cdots\cdots\cdots (i)$$

Para concluir que $m = \text{Min } L$, solo falta probar que $m \in L$.

Supongamos que $m \notin L$, entonces, por (i),

$$\forall_{x\in L}\ m<x\ ,\text{ es decir, } \forall_{x\in L}\ m\in x\ ,$$

$$\therefore\ m\in \bigcap L = m\ ⚡\ ,\ \therefore\ m\in L$$

por lo tanto m es el mínimo de L.

$\therefore$ $\mathcal{O}\mathcal{n}$ está bién ordenado.

$\square$

Con todo lo expuesto anteriormente, podemos enunciar y probar el Principio de Inducción Transfinita. El principio de inducción transfinita es consecuencia directa del siguiente resultado más general.

2.11 Afirmación 2.11 .- Si W es un conjunto bién ordenado y $A\subset W$ es tal que:

i) $\forall x\in W$ se tiene que

si $\left(\forall_{y\in W}\ (y<x \rightarrow y\in A)\right)$ entonces $x\in A$.

entonces $A=W$.

Demostración:

Si $W=\emptyset$ entonces $A=\emptyset$ y por lo tanto $A=W$.

Supongamos que $W\neq\emptyset$, que $A\subset W$ y que se cumple (i).

Si $A\neq W$ entonces, $B:=\{x\in W/x\notin A\}\neq\emptyset$, ya que $W\neq\emptyset$.

$\therefore$ $B\subset W$ y $B\neq\emptyset$ y como W es bién ordenado, B tiene elemento mínimo. Sea $b=\mathrm{Min}\ B$.

$$\forall_{z<b}\ z\notin B\ ,\ \therefore\ \forall_{z<b}\ z\in A\ ,\ \therefore\ \forall_{z\in W}\ (z<b\rightarrow z\in A)\ ,$$

por lo tanto, por (i), $b\in A$ ⚡

$\therefore$ $A=W$ $\square$

2.12 Teorema. (Principio de Inducción Transfinita).

Si $A \subset \mathcal{On}$ es tal que:

$\forall \alpha \in \mathcal{On}$ se cumple que

si $(\forall \beta \in \mathcal{On} (\beta < \alpha \rightarrow \beta \in A))$ entoces $\alpha \in A$.

entonces $A = \mathcal{On}$.

Demostración:

Por una afirmación anterior, sabemos que $\mathcal{On}$ está bién ordenado, por lo tanto, el principio de inducción transfinita es un caso particular de la afirmación anterior. $\square$

El principio de inducción transfinita generalmente no se usa en la forma enunciada anteriormente, en lugar de esta, se utiliza la siguiente versión:

2.13 Teorema. (Principio de Inducción Transfinita (versión 2)).

Si $A \subset \mathcal{On}$ es tal que:

(i) $\emptyset \in A$.

(ii) si $\beta \in A$ entonces $\beta + 1 \in A$.

(iii) Si α es límite, $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$ y $\forall_{\beta < \alpha} \beta \in A$ entonces $\alpha \in A$.

entonces $A = \mathcal{On}$.

Demostración:

Supongamos que $A \subset \mathcal{On}$ cumple los incisos (i),(ii) y (iii).

Sea $\alpha \in \mathcal{On}$ tal que $\forall_{\beta \in \mathcal{On}} (\beta < \alpha \rightarrow \beta \in A)$.

a) por (i), si $\alpha = \emptyset$ entonces $\alpha \in A$.

b) por (ii), si $\alpha = \beta + 1$ entonces $\beta < \alpha$ $\therefore$ $\beta \in A$ y $\therefore$ $\beta + 1 = \alpha \in A$.

c) por (iii), si $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$ entonces, como $\forall_{\beta < \alpha} \beta \in A$, $\alpha \in A$.

por lo tanto, en cualquier caso, $\alpha \in A$.

por lo tanto $(\forall_{\beta \in ON} (\beta < \alpha \to \beta \in A)) \to \alpha \in A$,

es decir, satisface la premisa del teorema anterior

La versión anterior del principio de inducción transfinita, es la más cómoda para probar algo, por inducción transfinita, acerca de algo que ha sido definido por recursión transfinita.

<u>Recursión Transfinita.</u>

Otra herramienta poderosa de la teoría de conjuntos es la recursión transfinita, que generalmente se usa para hacer definiciones.

2.14 Teo .- Si $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ es una función, entonces existe una única función $F: \mathcal{On} \to \mathcal{U}$ tal que

$$F(\alpha) = G(F/\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathcal{On}.$$

(Recordemos que nuestro concepto de $\mathcal{U}$ es muy amplio, en el sentido de que incluye lo que normalmente llamamos conjuntos, clases, etc.., y aún más.)

Dem:

$$\text{Sea } C = \{f \mid f: \alpha \to x,\ \alpha \in \mathcal{On},\ x \in \mathcal{U} \text{ y } \forall_{\beta \in \alpha}\ f(\beta) = G(f/\beta)\}.$$

y sea $F = \bigcup C$.

Antes de probar que F es una función y que cumple con la propiedad deseada, probaremos lo siguiente:

Si $f_1 : \alpha_1 \to X_1$ y $g : \alpha_2 \to X_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in On$ son funciones tales que:

i) $\alpha_1 \leq \alpha_2$

ii) $f(\beta) = G(f/\beta) \quad \forall \beta \in \alpha_1$

iii) $g(\beta) = G(g/\beta) \quad \forall \beta \in \alpha_2$

ent $f = g/\alpha_1$.

Dem

probaremos por inducción transfinita lo siguiente:

$$\forall \alpha \in On \ (\alpha \in \alpha_1 \to f(\alpha) = g(\alpha))$$

Si $\forall \beta < \alpha \ (\beta \in \alpha_1 \to f(\beta) = g(\beta))$ ent,

Si $\alpha \in \alpha_1$ ent $\forall \beta < \alpha \ \beta \in \alpha_1 \therefore \forall \beta < \alpha \ f(\beta) = g(\beta)$

$\therefore f/\alpha = g/\alpha$

$\therefore f(\alpha) = G(f/\alpha) = G(g/\alpha) = g(\alpha) \therefore (\alpha \in \alpha_1 \to f(\alpha) = g(\alpha))$

$\therefore \forall \alpha \in On \ (\alpha \in \alpha_1 \to f(\alpha) = g(\alpha))$

$\therefore \forall \alpha \in \alpha_1 \ f(\alpha) = g(\alpha) \quad \therefore f = f/\alpha_1 = g/\alpha_1$. $\square$

Una vez probado lo anterior, la prueba de que F es función es sencilla, ya que:

Si $(x,y), (x,y') \in F$ ent:

$\exists\, f, g \in C$, tales que $f(x) = y$ y $g(x) = y'$

$\therefore$ $f: \alpha_1 \to X_1$, $g: \alpha_2 \to X_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in On$

$f(\beta) = G(f/\beta) \quad \forall \beta \in \alpha_1$

$g(\beta) = G(g/\beta) \quad \forall \beta \in \alpha_2$

y S.P.G $\alpha_1 \leq \alpha_2$

$\therefore$ $f = g/\alpha_1$ $\quad\therefore$ $y = f(x) = g(x) = y'$.

Además, F tiene la propiedad deseada, ya que:

$\forall \alpha \in On \quad F/\alpha = f_\alpha$ p.a. $f_\alpha \in C \quad f_\alpha : \alpha \to X$

$\therefore$ $F(\alpha) = F/\alpha+1\,(\alpha) = f_{\alpha+1}(\alpha) = G(f_{\alpha+1}/\alpha) = G(F/\alpha+1/\alpha) =$

$= G(F/\alpha)$.

En cuanto a la unicidad de F , si F' es tal que

$F'(\alpha) = G(F'/\alpha) \quad \forall \alpha \in On$ ent si $\beta < \alpha \rightarrow F(\beta) = F'(\beta)$ ent

$F/\alpha = F'/\alpha \quad \therefore \quad F(\alpha) = G(F/\alpha) = G(F'/\alpha) = F'(\alpha)$

$\therefore$ IND TRA $\quad F = F'$

$\therefore$ F es única. $\square$

En lugar de usar la versión anterior del teorema de recursión transfinita, usaremos la siguiente, que es más común, para hacer definiciones por recursión transfinita.

1.15 Teo 2.15.- **Si** $H: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ **es función,** $a \in \mathcal{U}$ **entonces, existe una única función** $F: \mathcal{On} \rightarrow \mathcal{U}$ **tal que**

i) $F(0) = a$

ii) $F(\alpha+1) = H(F(\alpha))$

iii) $F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$ si α es límite

Dem:

Sea $C = \{ f / f: \gamma \rightarrow \mathcal{U},\ \gamma \neq \emptyset \rightarrow (f(0) = a,$

$\forall \alpha \in \gamma \ \ f(\alpha+1) = H(f(\alpha))$ y

$\forall \alpha \in \gamma, \alpha$ límite $\rightarrow f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)\}$

y sea $F = \bigcup C$.

F **es función, ya que si** $f_1, f_2 \in C$

$f_1 : \mu_1 \longrightarrow U$, $f_2 : \mu_2 \longrightarrow U$ y $\mu_1 \leq \mu_2$

i) $f_1(0) = a = f_2(0)$

ii) Si $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ ent

$$f_1(\alpha+1) = H(f_1(\alpha)) = H(f_2(\alpha)) = f_2(\alpha+1) \quad \text{si } \alpha+1 \in \mu_1$$

iii) Si α es límite y $f_1(\beta) = f_2(\beta)$ $\forall \beta < \alpha$ ent

$$f_1(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f_1(\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} f_2(\beta) = f_2(\alpha) \quad \text{Si } \alpha \in \mu_1$$

$\therefore$ IND. TRANS $\alpha \in \mu_1 \to f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$

$\therefore$ $f_1 = f_2/\mu_1$

$\therefore$ Si $(x,y), (x,y') \in F$ ent

$\exists f, g \in C$, $f : \mu_1 \to U$, $g : \mu_2 \to U$ $\ni$

$y = f(x)$ y $y' = g(x)$

S.P.G. $\mu_1 \leq \mu_2$ y $\therefore$ $f = g/\mu_1$

$\therefore$ $y = f(x) = g(x) = y'$

$\therefore$ F **es función.**

Además, F **tiene las propiedades deseadas, ya que:**

i) $F(0) = f(0) = a$ p.a. $f \in C$

ii) $F(\alpha+1) = f(\alpha+1) = H(f(\alpha)) = H(F(\alpha))$ p.a. $f \in C$

iii) Si α es límite

$$F(\alpha) = f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\alpha) \quad \text{p. a.} \quad f \in C$$

En cuanto a la unicidad, si F' cumple también con las propiedades, entonces:

i) $F(0) = a = F'(0)$

ii) Si $F(\alpha) = F'(\alpha)$ ent

$$F(\alpha+1) = H(F(\alpha)) = H(F'(\alpha)) = F'(\alpha+1)$$

iii) Si α es límite y $\forall_{\beta<\alpha}\ F(\beta) = F'(\beta)$ ent

$$F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} F'(\beta) = F'(\alpha)$$

$\therefore\ F(\alpha) = F'(\alpha) \quad \forall \alpha \in On$

$\therefore\ F = F'$ $\square$

Dentro de nuestro concepto intuitivo de conjunto, suponemos que hay en todo conjunto no vacío un elemento que no tiene elementos del conjunto.

Esta suposición, que en la teoría axiomática de conjuntos se establece como "axioma de regularidad", puede no parecer del todo intuitiva, pero es fundamental en el desarrollo de la teoría y tiene consecuencias importantes, por ejemplo, no existe ninguna cadena infinita de conjuntos de la forma

$$\ldots\ X_{n+1} \in X_n \in X_{n-1} \ldots \in X_1 \in X_0 .$$

Este hecho lo podemos expresar informalmente, diciendo que en los conjuntos, "la escala microscópica está recortada" , es decir, todos los conjuntos están "construidos" a aprtir de conjuntos que no tienen elementos. Pero estamos suponiendo que dos conjuntos son iguales sii tienen los mismos elementos, por lo tanto, solo hay un conjunto sin elementos.

Hacemos este comentario acerca del axioma de regularidad porque en el siguiente resultado hacemos uso de el.

2.16 Teo .- Si $C \subseteq U$ es tal que
para todo $x \in U$ se cumple que si $x \subseteq C$ entonces
entonces $C = U$.

Este teorema es llamado $\in$-inducción.

Dem:

Supongamos que C cumple con la hipótesis de la proposición.

Como $C \subseteq U$, solo falta probar que $U \subseteq C$.

Si $U - C \neq \emptyset$ ant $\exists x \in U - C \ni$

$x \cap (U - C) = \emptyset \quad \therefore\ x \subseteq C \quad \therefore\ x \in C$ γ

ya que $x \in U - C$.

$\therefore\ U - C = \emptyset$ y $\therefore\ U \subseteq C$ $\Box$.

El resultado anterior es un caso particular del siguiente teorema , que es una generalización de los principios de inducción y recursión transfinitos, que se obtiene de sustituir por cualquier clase (conjunto) transitiva.

2.17 Teo .-(Inducción sobre una clase transitiva).

Si T es una clase transitiva, y C es una clase tal que para todo $x \in T$ se tiene que $x \subset C \rightarrow x \in C$ entonces

$$T \subset C.$$

Dem:

Sea $A = T - C$. Si $T \not\subset C$ ent $A \neq \emptyset$ y, por el axioma de regularidad, sabemos que

$$\exists_{a \in A} \; a \cap A = \emptyset$$

$$\therefore a \in T \text{ y } a \subset C$$

porque si existiera $b \in a$ tal que $b \notin C$ entonces

$$b \in a \in T \text{ y } \therefore b \in T, \therefore b \in T - C = A$$

$$\therefore b \in a \cap A = \emptyset \; \text{✗} \qquad \therefore a \in C \; \text{✗}$$

$$\therefore T \subset C \; \square$$

2.1º Teo .- (Recursión sobre clases transitivas)

Si T es una clase transitiva, y $G: U \to U$ es una función, entonces existe una única función

$$F: T \to U \ni F(t) = G(F/t) \ \forall t \in T$$

Dem:

Def.

$$C = \{f: A \to U / A \subset T \text{ y } A \text{ es transitivo y } \forall a \in A \ f(a) = G(f/a)\}.$$

y Sea $F = \cup C$.

es necesario demostrar que F es función, para esto:

Sean $f_1: A_1 \to U$ y $f_2: A_2 \to U \in C$

y Sea $A = A_1 \cap A_2$

Demostraremos que $x \in A \to f_1(x) = f_2(x)$, esto lo haremos con ayuda del teorema de inducción sobre una clase transitiva.

A es transitivo ya que A_1 y A_2 son transitivos

y $A \subset A_1 \subseteq T$

$\therefore f_1/A$ y $f_2/A \in C$

Sea $D = \{x / f_1/A(x) = f_2/A(x)\}$

Sup $x \in A$ y $x \subset D$ ent

$\forall_{y \in x} \; f_1/A(y) = f_2/A(y) \quad \therefore \; f_1/A/x = f_2/A/x$

$\therefore \; f_1/A(x) = G(f_1/A/x) = G(f_2/A/x) = f_2/A(x)$

$\therefore \; x \in D$

$\therefore \; \forall_{x \in A} \; x \subseteq D \to x \in D$

y por el teorema de inducción sobre una clase transitiva

$A \subset D$.

$\therefore \; \forall_{y \in A} \; f_1/A(y) = f_2/A(y)$

$\therefore \; f_1/A = f_2/A$

$\therefore \; F$ **es función, ya que si** $(a,b), (a,c) \in F$ **entonces**

$b = f_1(a)$ y $c = f_2(a)$ p. a. $f_1 : A_1 \longrightarrow U$,

$f_2 : A_2 \to U \quad \therefore \; a \in A_1 \cap A_2$

$\therefore \; b = f_1(a) = f_2(a) = c$.

solo falta ver que $DOM(F) = T$

claramente, $DOM(F) \subseteq T$

y si $x \in T$ ent :

definimos por recursión transfinita J_α $\forall \alpha \in ON$

$J_\phi = \{x\}$

$J_{\alpha+1} = \bigcup J_\alpha$

$J_\alpha = \phi$ si α es límite, y definimos

$TC(\{x\}) = \bigcup_{\alpha \in ON} J_\alpha$

(En general, $TC(b)$ **, es conocido como la cerradura transitiva de** b **y tiene la propiedad de ser el mínimo conjunto transitivo que contiene a** b **):**

i) **claramente** $\{x\} \subseteq TC(\{x\})$

ii) $TC(\{x\})$ **es transitivo, ya que**

Si $a \in b \in TC(\{x\})$ ent. $b \in J_\alpha$ p.a. $\alpha \in ON$

α no límite, $\therefore a \in b \in J_\alpha$ y $\therefore a \in \bigcup J_\alpha =$

$= J_{\alpha+1} \subseteq TC(\{x\})$ $\therefore a \in TC(\{x\})$

iii) **si** R **es transitivo y** $R \supseteq \{x\}$ **entonces**

$R \supseteq TC(\{x\})$ ya que

i) $R \supseteq \{x\} = J_\phi$

ii) Si $R \supset J_\alpha$ ent

$\forall_{x \in J_\alpha} \; x \in R$

y como R es transitivo $\forall_{x \in J_\alpha} \; x \subseteq R$

$\therefore J_{\alpha+1} = \bigcup J_\alpha \subset R$

$\therefore$ por inducción transfinita, $R \supset J_\alpha \quad \forall \alpha \in ON$

$\therefore R \supset TC(\{x\})$.

$\therefore T \supset TC(\{x\}) \supseteq \{x\}$ c.d.

$\forall_{x \in T} \; \exists_{A_x \subseteq T}$ (A_x es Transitivo y $x \in A$).

$\therefore$ Si $x \in T$ ent $x \in A_x \subseteq T$ y A_x es transitivo

Sea $D = \{x / \exists f : A_x \to \mho \ni f \in C\}$

donde $A_x = TC(\{x\})$

Si $y \in T$ y $y \subseteq D$ ent

$\forall_{x \in y} \; \exists f_x : A_x \to \mho \ni f_x \in C$

además, $\bigcup_{x \in y} A_x$ es transitivo y, como las funciones que pertenecen a C coinciden en la intersección de sus dominios

$\bigcup_{x \in y} f_x : \bigcup_{x \in y} A_x \to \mho$

es una función que pertenece a C, también

$\bigcup_{x \in y} A_x \supset y \quad \therefore A_y \subset \bigcup_{x \in y} A_x$

$\therefore$ Si $f = \bigcup_{x \in y} f_x/A_y$ ent

$f: A_y \to \mathcal{U}$ y $f \in C$ $\therefore$ $y \in D$

$\therefore \forall_{y \in T} (y \subseteq D \to y \in D)$, $\therefore T \subset D$, i.e

$\forall_{x \in T} \exists f: A_x \to \mathcal{U} \ni f \in C$, $\therefore T \subset DOM(F)$

$\therefore DOM(F) = T$.

F **satisface los requisitos del teorema, porque**

$F(x) = f(x) = G(f/x) = G(F/x)$ p.a $f \in C$

Que F **es única también lo probamos por inducción sobre** T

supongamos que $F' : T \to \mathcal{U}$ es tal que

$F'(x) = G(F'/x)$

Sea $D = \{x / F'(x) = F(x)\}$

Si $y \in T$ y $y \subseteq D$ ent

$F'(x) = F(x)$ $\forall x \in y$ $\therefore F'/y = F/y$

$\therefore F'(y) = G(F'/y) = G(F/y) = F(y)$

$\therefore y \in D$ $\therefore \forall_{y \in T} (y \subseteq D \to y \in D)$ $\therefore T \subset D$.

$\therefore \forall_{x \in T} F'(x) = F(x)$ $\therefore F' = F$ $\square$

Otra generalización de los teoremas de inducción y recursión transfinitas es la que resulta de generalizar en cierto sentido el concepto de la relación de pertenencia.

El resultado de tal generalización es el concepto de relación bien fundada.

2.10 Def .- Si C es una clase y $E \subseteq C \times C$ y $a \in C$, definimos la clase de a en C, respecto a E, como

$$[a]_{(C,E)} := \{x \in C / (x,a) \in E\}$$

2.11 Def .- Si C es una clase y $E \subseteq C \times C$, decimos que E es una relación bien fundada sii

$$\forall_{A \subseteq C} \; A \neq \emptyset \rightarrow \exists_{a \in A} \forall_{x \in A} \; (x,a) \notin E \text{ , i.e.}$$

toda clase no vacía tiene un elemento -minimal.

Una observación interesante acerca de esta definición, es que quizás un nombre más adecuado que el de relación "bien fundada", sería el de "relación regular", porque la condición que se pide a una relación $E \subseteq C \times C$ para que sea bien fundada es casi equivalente a que $(C, E) \models$ "axioma de regularidad". Decimos "casi equivalente", porque se puede dar un argumento incorrecto de la equivalencia :

Si E es bién fundada y $x \neq \emptyset_{(C,E)}$ (x es un conjunto no vacío en el sentido de (C, E)) entonces $[x]_{(C,E)} \neq \emptyset$, $\therefore [x]_{(C,E)}$ tiene un elemento E -minimal m y es precisamente esta m el elemento que buscamos para realizar el axioma de regularidad, ya que, $X \cap_{(C,E)} m = \emptyset_{(C,E)}$.

En el otro sentido, si $(C,E) \models$ "axioma de regularidad", $X \subseteq C$ y $X \neq \emptyset$, entonces $\exists_{m \in C}\, X \cap_{(C,E)} m = \emptyset_{(C,E)}$ y $\therefore$ m es un elemento minimal de X.

La incorrección de este argumento radica en que en la primera implicación se usa, en cierto momento, que $a \in b$ es lo mismo que $(a,b) \in E$, mientras que en la segunda implicación, se usa que $X \subseteq C \rightarrow X \in C$.

A pesar de que los lazos entre relaciones bién fundadas y el axioma de regularidad no son de equivalencia, existe una conección conceptual.

2.14 Teorema .- (Inducción sobre relaciones bién fundadas)

Si C es una clase, $E \subseteq C \times C$ es una relación bién fundada y A es una clase tal que

i.- si $m \in C$ es un elemento E-minimal de C entonces $m \in A$

ii.- si $x \in C$ es tal que $\forall_{y \in C}\, (y,x) \in E \rightarrow y \in A$

ent $x \in A$

ent $C \subseteq A$.

Dem:

Supongamos que A satisface los incisos (i) (ii)

si $C \not\subseteq A$ entonces $C - A \neq \emptyset$ $\therefore \exists_{m \in C}\, m$ es E-minimal de $C - A$ $\therefore$ $m \in C - A$, i.e., $m \notin A$.

Pero como m es E-minimal de $C - A$, si $(x,m) \in E$ entonces $x \in A$, de lo contrario tendríamos $x \in C - A$ y $(x,m) \in E$, que no es posible, por lo tanto, por el inciso (ii)

$m \in A$ ※ $\therefore C \subseteq A$.

2.20 Teorema 2.22.- **(Recuesión sobre relaciones bién fundadas)**

Si C **es una clase y** $E \subseteq C \times C$ **es una relación bién fundada y** $G: U \times U \longrightarrow U$ **es una función, entonces existe una única función** $F: C \longrightarrow U$ **tal que**

$$\forall_{x \in C} \quad F(x) = G(x, F/_{[x]_{(C,E)}}).$$

Dem:

Definimos

$$D := \{ f: M \to U / M \subseteq U ; f(x) = G(x, f/_{[x]_{(M, E/_M)}} \} .$$

y sea $F := \cup D$

Para ver que F **es función, probaremos que si**

$f_1, f_2 \in D$, $f_1 : M_1 \to U$, $f_2 : M_2 \to U$ y $x \in M := M_1 \cap M_2$

entonces $f_1(x) = f_2(x)$ **y esto lo haremos usando inducción sobre una relación bién fundada.**

Como $M \subseteq C$ **,** $E/_M$ **es una relación bién fundada en** M

Sea $A = \{ x \in M / \ f_1(x) = f_2(x) \}$

i) Si m es $E/_M$ - minimal de M, entonces

$[m]_{(M, E/_M)} = \emptyset \quad \therefore \quad f_1/_{[m]_{(M,E/_M)}} = f_2/_{[m]_{(M,E/_M)}}$

$\therefore\ f_1(m) = G(m, f_1/[m]_{(M,E/M)}) = G(m, f_2/[m]_{(M,E/M)}) = f_2(m)$

$\therefore$ Si m es E/M - minimal ent $m \in A$

ii) Si $\forall_{z \in M} (z,x) \in E/M \rightarrow z \in A$ ent

$\forall_{z \in [x]_{(M,E/M)}} f_1(z) = f_2(z) \quad \therefore\ f_1/[x]_{(M,E/M)} = f_2/[x]_{(M,E/M)}$

$\therefore\ f_1(x) = G(x, f_1/[x]_{(M,E/M)}) = G(x, f_2/[x]_{(M,E/M)}) = f_2(x)$

$\therefore\ x \in A$

satisface la hipótesis del teorema de inducción sobre relaciones bién fundadas

$\therefore\ M \subseteq A$ y $\therefore\ f_1(x) = f_2(x) \ \forall x \in M$

Una vez probado lo anterior, la prueba de que es función es sencilla, ya que si $(x,y), (x,y') \in F$ **entonces existen**

$f, g \in D \quad f: M_1 \rightarrow U,\ g: M_2 \rightarrow U$

$f(x) = y$ y $g(x) = y'$

$\therefore\ x \in M_1 \cap M_2$ y $\therefore\ y = f(x) = g(x) = y'$

Para ver que $DOM(F) = C$ **y que** $F(x) = G(x, F/[x]_{(M,E/M)})$ **también usaremos inducción sobre relaciones bién fundadas:**

Como $DOM(F) \subseteq C$**, solo falta probar que se cumple la otra contención y que** $F(x) = G(x, F/[x]_{(M,E/M)})$.

Sea $B := \{x / x \in DOM(F)$ y $F(x) = G(x, F/[x]_{(M,E/M)})\}$

i.- Si m **es** E**-minimal de** C **, entonces, si definimos**

$f: \{m\} \longrightarrow U \ni f(m) = G(m, \emptyset)$ se tiene que $f \in D$

$\therefore m \in DOM(F)$ y $F(m) = f(m) = G(m, \emptyset) =$

$= G(m, F/[m]_{(C,E)})$

ii.- Supongamos que $\forall_{z \in C}\ (z, x) \in E \rightarrow z \in DOM(F)$ **. Definimos**

$M := [x]_{(C,E)} \cup \{x\}$ y $f: M \longrightarrow U$ tal que

$$f(y) = \begin{cases} F(y) & \text{si } y \in [x]_{(C,E)} \text{ i. e., si } (y, x) \in E \\ G(y; f/[y]_{(C,E)}) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Ahora bién, como $(x, x) \notin E$ **(de lo contrario,** $\{x\}$ **no tendría minimal),** $x \notin [x]_{(C,E)}$**, por lo tanto** f **está bién definida. Además, si** $y \in [x]_{(C,E)}$ **entonces**

$f(y) = F(y) = G(y, F/[y]_{(C,E)}) = G(y, f/[y]_{(C,E)})$

$\therefore f \in D$ y $\therefore x \in B$

$\therefore B$ **satisface la hipótesis del teorema de inducción sobre relaciones bién fundadas y** $\therefore C \subseteq B$

$\therefore C \subseteq DOM(F)$ y $F(x) = G(x, F/[x]_{(C,E)})\ \forall x \in C$.

Con esto concluimos la demostración. $\square$

Otro concepto que nos será útil más tarde es el de relación extensional.

2.12 Def .- Si C es una clase y $E \subseteq C \times C$ decimos que E es extensional en C sii

$$\left[\forall_{z \in C} ((z,x) \in E \leftrightarrow (z,y) \in E)\right] \rightarrow x = y$$

El nombre de extensional es adecuado ya que la condición que se pide es precisamente que la relación E satisfaga el axioma de extensionalidad, i.e. que $(C, E) \models$ "axioma de extensionalidad".

De manera equivalente, E es extensional en C sii

$$\forall_{x,y \in C} ((x \neq y) \rightarrow [x]_{(C,E)} \neq [y]_{(C,E)}).$$

CARDINALES

Intuitivamente, la cardinalidad de un conjunto es el "número" de elementos de dicho conjunto. Lo que sigue formaliza esta idea.

2.13 Definición .- Si X y Y son dos conjuntos, decimos que tienen la misma cardinalidad (son equivalentes) sii existe una función $f: X \rightarrow Y$ biyectiva, y denotamos este hecho por $X \simeq Y$. Además, decimos que Y domina a X sii existe un conjunto $A \subset Y$ tal que $A \simeq X$, y denotamos esto por $X \preccurlyeq Y$

Para lo que sigue necesitaremos de un resultado básico acerca de conjuntos equipotentes, este resultado es el teorema de Cantor- Schröder- Bernstein.

2.21 Teorema. Si X y Y son conjuntos tales que $X \preccurlyeq Y$ y $Y \preccurlyeq X$ entonces $X \simeq Y$.

Demostración:

Primero demostraremos el siguiente lema:

Lema .- Si A, B y C son conjuntos tales que $A \supset B \supset C$ y $A \simeq C$ entonces $B \simeq C$.

demostración:

Sea $F: A \rightarrow C$ biyectiva.

Definimos por recursión transfinita:

$$A_\emptyset = A - B$$

$$A_{\alpha+1} = F[A_\alpha]$$

$A_\alpha = \emptyset$ si α es un ordinal límite.

y definimos $D = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{On}} A_\alpha$. La biyección que necesitamos entre A y B es la siguiente:

$$G : A \to B$$

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in D . \\ x & \text{si } x \notin D . \end{cases}$$

Observación: efectivamente, G es una función de A en B ya que si $x \in D$ entonces $F(x) \in C \subset B$ y si $x \notin D$ entonces $x \notin A - B$ y como $x \in A$, forzosamente $x \in B$.

G es inyectiva porque si $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ entonces

i) si $a_1, a_2 \in D$ entonces $G(a_1) = F(a_1) \neq F(a_2) = G(a_2)$.

ii) si $a_1, a_2 \notin D$ entonces $G(a_1) = a_1 \neq a_2 = G(a_2)$.

iii) si $a_1 \in D$ y $a_2 \notin D$ entonces $a_1 \in A_\alpha$ p.a. $\alpha \in \mathcal{On}$

y $A_{\alpha+1} = F[A_\alpha]$ $\therefore$ $G(a_1) = F(a_1) \in A_{\alpha+1} \subset D$.

$\therefore$ $G(a_1) \in D$

y por otro lado $G(a_2) = a_2 \notin D$, $\therefore$ $G(a_1) \neq G(a_2)$.

$\therefore G$ es inyectiva.

G es suprayectiva porque si $b \in B$ entonces:

i) si $b \in D$ entonces $b \in A_\alpha$ p.a. $\alpha \in \mathcal{On}$, α no límite,

$\alpha \neq \emptyset$ ya que $A_\emptyset = A - B$ y $b \in B$,

$\therefore \alpha = \beta + 1$ y $A_\alpha = F[A_\beta]$

$\therefore b = F(x)$ p.a. $x \in A_\beta \subset D \subset A$.

$\therefore$ $G(x) = F(x) = b$.

ii) si $b \notin D \subset A$ entonces $G(b) = b$.

$\therefore G$ es suprayectiva.

por lo tanto, G es biyectiva y $A \simeq B$.

Ahora, con la ayuda de este lema, procedemos a probar el teorema pendiente.

Supongamos que $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces existen funciones $F: A \to B$, $G: B \to A$ inyectivas, por lo tanto, $G \circ F: A \to A$ es inyectiva.

Sea $C = G \circ F[A]$, entonces $C \subset A$ y $A \simeq C$, ya que $G \circ F: A \to C$ es biyectiva.

Sea $E = G[B]$, entonces $E \subset A$ y si $x \in C$ entonces $x = G(F(a))$ p.a. $a \in A$, y $F(a) \in B$ $\therefore$ $x \in G[B] = E$, es decir, $C \subset E$, $\therefore$ $A \supset E \supset C$ y $A \simeq C$,

$\therefore$ por el lema anterior, $A \simeq E$, y como $G: B \to G[B] = E$ es biyectiva, $B \simeq E$

$\therefore$ $A \simeq B$. $\square$

Otro resultado básico, en lo que a cardinalidad se refiere, es el teorema de Cantor:

Teorema .- Si X es un conjunto, entonces $X \preceq \mathcal{P}(X)$ y $X \not\simeq \mathcal{P}(X)$.

Demostración:

Sea $f: X \to \mathcal{P}(X)$ tal que $f(a) = \{a\}$ $\forall a \in X$, fácilmente se concluye que f es inyectiva,

$$\therefore\ X \simeq f[X] \subset \mathcal{P}(X) \quad \therefore\ X \preceq \mathcal{P}(X) \quad .$$

Ahora supongamos que $X \simeq \mathcal{P}(X)$, entonces $\exists f: X \to \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Sea $C = \{a \in X \,/\, a \notin f(a)\}$, $C \subset X$ y como f es suprayectiva, $\exists a \in X \ni f(a) = C$,

i) si $a \in C$ entonces $a \in f(a) = C$ y $\therefore$ $a \notin C$

ii) si $a \notin C$ entonces $a \notin f(a) = C$ $\therefore a \in C$.

$\therefore a \in C$ sii $a \notin C$ ¡!

$\therefore X \not\cong \mathcal{P}(X)$. ▭

2.14 Definición .- Si $\alpha \in \mathcal{On}$, decimos que α es un número cardinal, brevemente cardinal, sii $\forall_{\beta \in \mathcal{On}} \beta < \alpha \rightarrow \beta \not\cong \alpha$.

Notación: $\mathrm{Card} := \{\alpha \in \mathcal{On} / \alpha$ es cardinal$\}$.

2.15 Definición .- Si X es un conjunto, entonces el número de Hartog de X es: $\mathcal{H}(X) := \mathrm{Min}\{\alpha \in \mathcal{On} / \alpha \not\cong A \;\; \forall A \subset X\}$.

2.12 firmación .- $\mathcal{H}(X)$ existe para todo conjunto X.

demostración: por la afirmación anterior, $A \not\cong \mathcal{P}(X)$ $\forall A \subset X$, y por el axioma de elección $\mathcal{P}(X)$ es bién ordenable, por lo tanto, $\mathcal{P}(X)$ es isomorfo a un ordinal β_X $\therefore \mathcal{P}(X) \simeq \beta_X$,

$\therefore A \not\cong \beta_X$ $\forall A \subset X$, $\therefore \{\alpha \in \mathcal{On} / \alpha \not\cong A \;\; \forall A \subset X\} \neq \emptyset$

$\therefore \mathcal{H}(X)$ existe. ▭

2.16 Definición .- $\omega := \mathrm{Min}\{\alpha \in \mathcal{On} / \alpha$ es límite y $\alpha \neq \emptyset\}$.

2.13 Afirmación .- Si $A = \{\alpha \in \mathcal{On} / \forall_{X \in \alpha+1} X \neq \emptyset \rightarrow X$ no es límite$\}$, entonces $\omega = A$.

demostración: Si $y \in \omega$ entonces, si $X \neq \emptyset$ y $X \in y+1$, se cumple que $X \leq y < y+1 < \omega$, $\therefore X < \omega$, $\therefore X$ no es límite, $\therefore y \in A$, $\therefore \omega \subset A$. Si $y \in A$ entonces $\forall_{X \in y+1} X \neq \emptyset \rightarrow X$ no es límite, $\therefore \omega \notin y+1$, $\therefore y < y+1 \leq \omega$, $\therefore y < \omega$, $\therefore y \in \omega$, $\therefore A \subset \omega$.

$\therefore A = \omega$. ▭

Ahora estamos en posición de definir $\aleph_\alpha$ para todo $\alpha \in On$, esto lo haremos por recursión transfinita. Después de haber definido los $\aleph_\alpha$, probaremos que todos ellos son cardinales, de hecho son los cardinales transfinitos.

2.18 Definición[2.18].- $\aleph_\emptyset := \omega_\emptyset := \omega$

$$\aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} := \mathcal{H}(\omega_\alpha)$$

$$\aleph_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ es límite}, \ \alpha \neq \emptyset$$

Los siguientes resultados tienen por objeto probar que los $\aleph_\alpha$ son cardinales.

2.24 Afirmación[2.24].-Si $m, n \in \omega$ y $m \simeq n$ entonces $m = n$.

demostración: lo que vamos a demostrar es

$$\forall_{\alpha \in On} \left(\alpha < \omega \rightarrow (m \simeq \alpha \rightarrow m = \alpha)\right),$$

esto lo haremos por inducción transfinita.

i) Si $\alpha = \emptyset$ y $m \simeq \emptyset$ entonces $m = \emptyset$ ya que el único conjunto equipotente a $\emptyset$ es $\emptyset$.

ii) Supongamos que $\alpha < \omega \rightarrow (m \simeq \alpha \rightarrow m = \alpha)$.

Si $\alpha+1 < \omega$ y $m \simeq \alpha+1$ entonces, como $\alpha+1 \neq \emptyset$, forzosamente $m \neq \emptyset$, de lo contrario $\emptyset$ sería equipotente a un conjunto no vacío, y como $m \in \omega$, $m = c+1$. Además, $\alpha, c \in \omega$ ya que $\alpha < \alpha+1 < \omega$ y $c < c+1 < \omega$.

$\therefore$ $c+1 \simeq \alpha+1$, $c, \alpha \in \omega$.

$\therefore$ $\exists f : c+1 \rightarrow \alpha+1$ biyectiva

y $g : c \rightarrow \alpha$ tal que $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \neq \alpha \\ \ldots \end{cases}$

es también biyectiva.

$\therefore\ c \simeq \alpha$, $\therefore\ c = \alpha$.

$\therefore\ m = c+1 = \alpha+1$

$\therefore\ \alpha+1 < \alpha \rightarrow (m \simeq \alpha+1 \rightarrow m = \alpha+1)$.

iii) en el caso en que α es límite, $\alpha \geqslant w$,

$\therefore\ \alpha < w \rightarrow (m \simeq \alpha \rightarrow m = \alpha)$.

$\therefore\ \forall_{\alpha \in On} (\alpha < w \rightarrow (m \simeq \alpha \rightarrow m = \alpha))$,

es decir, $\forall_{n \in w}\ m \simeq n \rightarrow m = n$. $\square$

2.25 Afirmación .- Si $n \in w$ entonces $\forall_{\alpha \in On} (\alpha \simeq n \rightarrow \alpha = n)$.

demostración:

Supongamos que $\alpha \geqslant w$ entonces $n < w \leq \alpha$ $\therefore\ n < \alpha$,

$\therefore\ n < n+1 \leq \alpha$ $\therefore\ n \subset n+1 \subset \alpha$ y $n \simeq \alpha$, por lo tanto, por el lema utilizado en la prueba del teorema de Cantor-Bernstein, $n \simeq n+1$, y por la afirmación anterior, $n = n+1$ $\overset{\nabla}{\circ}$.

$\therefore\ \alpha < w, \alpha \in w$ y $\alpha \simeq n$, $\therefore\ \alpha = n$. $\square$

2.26 Afirmación .- $w \in Card$.

demostración:

Supongamos que $n < w$. Si $w \simeq n$ entonces $w = n$ y $n < w$ $\overset{\nabla}{\circ}$

$\therefore\ w \not\simeq n$ y $w \in Card$. $\square$

2.27 Afirmación .- Si X es un conjunto, entonces $\mathcal{H}(x) \in Card$.

demostración:

Por definición, $\mathcal{H}(x) \in On$.

Supongamos que $\exists_{\alpha \in On} \alpha < \mathcal{H}(x)$ y $\alpha \simeq \mathcal{H}(x)$.

Como $\mathcal{H}(x) = \text{Min}\{\alpha \in On / \alpha \not\simeq A \ \forall A \subset x\}$ y $\alpha < \mathcal{H}(x)$,

$\alpha \simeq A$ p.a. $A \subset x$ y $\alpha \simeq \mathcal{H}(x)$,

$\therefore A \simeq \mathcal{H}(x)$ y $A \subset x$ ¡!

$\therefore \forall_{\alpha \in On} \alpha < \mathcal{H}(x) \longrightarrow \alpha \not\simeq \mathcal{H}(x)$, $\therefore$ $\mathcal{H}(x) \in$ Card . $\square$

2.28 Afirmación .- $\forall_{\alpha \in On} \aleph_\alpha \in$ Card .

demostración: (inducción transfinita)

i) $\aleph_\emptyset = w \in$ Card .

ii) supongamos que $\aleph_\alpha \in$ Card , entonces

$\aleph_{\alpha+1} = \mathcal{H}(\aleph_\alpha) \in$ Card .

iii) supongamos que $\alpha \neq \emptyset$ es límite, y que $\forall_{\beta < \alpha} \aleph_\beta \in$ Card ,

entonces:

$\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta \quad \therefore \aleph_\alpha \in On$

supongamos que $\aleph_\alpha \notin$ Card , entonces: $\exists_{\gamma \in On} \gamma < \aleph_\alpha$ y $\gamma \simeq \aleph_\alpha$,

$\therefore \gamma < \aleph_\alpha \longrightarrow \gamma \in \aleph_\alpha \longrightarrow \gamma \in \aleph_\beta$ p.a. $\beta < \alpha$.

$\therefore \aleph_\alpha \simeq \gamma < \aleph_\beta < \aleph_\alpha$

$\therefore \gamma \subset \aleph_\beta \subset \aleph_\alpha$ y $\gamma \simeq \aleph_\alpha$

por lo tanto, por un resultado anterior, $\gamma \simeq \aleph_\beta$ ¡!

ya que $\gamma < \aleph_\beta$ y $\aleph_\beta \in$ Card .

$\therefore \aleph_\alpha \in$ Card .

$\therefore \forall_{\alpha \in On} \aleph_\alpha \in$ Card .

2.29 Afirmación .- Si X es un conjunto, entonces existe un único $\lambda \in$ Card $\ni$ $X \simeq \lambda$.

demostración:

Por el axioma de elección, existe un buén orden en X, es decir existe $<$ tal que $(X,<)$ es bién ordenado. Por un resultado anterior, $\underset{\alpha\in On}{\exists}\ \alpha$ es isomorfo a $(X,<)$.

Sea $\lambda = \mathrm{Min}\{\alpha\in On / \alpha$ es isomorfo a $(X,<)\}$.

λ es isomorfo a X, por lo tanto $\lambda \simeq X$.

$\lambda\in Card$ ya que si existiera $\alpha<\lambda$ tal que $\lambda\simeq\alpha$ entonces $\lambda\simeq\alpha$ y $\lambda\simeq X$, por lo tanto, $\alpha\simeq X$ y $\alpha<\lambda$ $\underset{o}{\forall}$.

$\therefore\ \lambda\in Card$.

Ahora, supongamos que $\lambda_1,\lambda_2\in Card$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ y que $\lambda_1\simeq X\simeq\lambda_2$, entonces, S.P.G., $\lambda_1<\lambda_2$, y $\lambda_1\simeq\lambda_2$ $\underset{o}{\forall}$ ya que $\lambda_2\in Card$,

$\therefore\ \lambda$ es único.

2.19 Notación: decimos que λ es la cardinalidad de X y ponemos $|X|=\lambda$

$\square$

Si denotamos por 2 al conjunto $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, podemos enunciar la hipótesis del continuo y la hipótesis generalizada del continuo de la siguiente manera:

a) Hipótesis del continuo (C. H.): $|2^{\chi_\emptyset}| = \chi_1$

b) Hipótesis generalizada del continuo (G.C.H.): $|2^{\chi_\alpha}| = \chi_{\alpha+1}$

Del teorema de Cantor, se deduce que $\chi_\emptyset \precsim \mathcal{P}(\chi_\emptyset)$ y $\chi_\emptyset \not\simeq \mathcal{P}(\chi_\emptyset)$ por lo tanto, $\chi_\emptyset < |\mathcal{P}(\chi_\emptyset)|$, pero, mediante una sencilla biyección, se puede probar que $\mathcal{P}(\chi_\emptyset) \simeq 2^{\chi_\emptyset}$, por lo tanto, se concluye facilmente que $|\mathcal{P}(\chi_\emptyset)| = |2^{\chi_\emptyset}|$ y lo que finalmente tenemos es que $\aleph_0 < |2^{\aleph_0}|$, es decir, $\aleph_1 \leq |2^{\aleph_0}|$. Lo que la hipótesis del continuo dice es que una manera de pasar de $\aleph_0$, el cardinal numerable, a $\aleph_1$, el primer cardinal no numerable, es la "exponenciación". La hipótesis generalizada del continuo es, precisamente una generalización de lo dicho anteriormente, es decir, una manera de avanzar de cardinal transfinito en cardinal transfinito es la "exponenciación".

Aclaración: todo el material presentado anteriormente sobre conjuntos, como se dijo al principio, tiene como único objeto dar una presentación intuitiva básica de conceptos esenciales de la teoría de conjuntos, tales como, ordinal, inducción transfinita y cardinal. Por esta razón, durante la presentación de dicho material, se ignoró la aparición de posibles paradojas, las cuales se pueden resolver solamente mediante un tratamiento axiomático.

Por otro lado, se habrá notado que al final se enuncian la hipótesis del continuo y la hipótesis generalizada del continuo, de éstas solo nos interesa su independencia de los axiomas de ZFC, (ZFC es una teoría axiomatica de conjuntos) la cual permaneció sin prueba hasta que en 1963 Cohen dió una prueba utilizando una técnica llamada "forcing". Es en realidad esta técnica la que nos interesa como herramienta en la prueba de resultados de independencia.

CAPITULO 3

Modelo de $\mathbb{A}$ donde no se cumple H.C.

MODELO DE $\mathbb{R}$ DONDE NO SE CUMPLE LA HIPOTESIS DEL CONTINUO

A continuación describiremos un sistema formal, SR2, para el analisis real, el cual consta de un lenguaje de segundo orden, y un grupo de axiomas y reglas de inferencia. Empezamos con el lenguaje :

L_2 (Lenguaje de segundo orden para el análisis real)

Consta de :

Una cantidad numerable de variables $x_1, x_2, \dots$

Una cantidad numerable de variables funcionales $f_1, f_2, \dots$

Los símbolos constantes $\bar{0}$ y $\bar{1}$

Los símbolos operacionales "$+$" y "$\cdot$"

Los símbolos relacionales $=$ y $\leq$

Los símbolos lógicos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$

Parentesis), (, [,],

Ahora determinaremos cuales son las fórmulas bien formadas del lenguaje L_2 :

a.- Son términos las fórmulas que cumplen lo siguiente :

i.- Si x es una variable, ent. x es un término

ii.- $\bar{0}$ y $\bar{1}$ son términos

iii.- Si t_1 y t_2 son términos, y, f es una variable funcional, ent. $f(t_1)$, $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$ son términos

b.- Fórmulas atómicas

Si t_1 y t_2 son términos ent. $t_1 = t_2$ y $t_1 \leq t_2$ son fórmulas atómicas

c.- Fórmulas bien Formadas (f.b.f)

i.- Si P es una fórmula atómica ent. P es una f.b.f.

ii.-Si P y Q son f.b.f. y x es una variable, y f es una variable funcional ent.

$\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$, $(x)P$, $(f)P$, $(\exists x)P$, son f.b.f.

Axiomas para SR2

a.- Axiomas Lógicos

Si P, Q, R son f.b.f. de L_2, f variable funcional y x variable, entonces se cumplen :

AL1.- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

AL2.- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

AL3.- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$

AL4.- $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

AL5.- $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q))$

AL6.- $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

AL7.- $P \wedge Q \rightarrow P$

AL8.- $P \wedge Q \rightarrow Q$

AL9.- $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$

AL10.- $(x)P(x) \to P(t)$, donde t es un término libre para x en P y donde $P(t)$ es el resultado de substituir todas las ocurrencias libres de x en P por t.

AL11.- $(f)P(f) \to P(g)$, donde g es una variable funcional y g no ocurre libre en P.

AL12.- $(x)(P \to Q) \to (P \to (x)Q)$, donde P no tiene ocurrencias libres de x.

AL13.- $(f)(P \to Q) \to (P \to (f)Q)$, donde f no ocurre libre en P.

AL14.- $\neg(\exists x)P \leftrightarrow (x)\neg P$

AL15.- $\neg(\exists f)P \leftrightarrow (f)\neg P$

b.- Axiomas de Igualdad.

3.1 Def .- Si P es una fórmula, x una variable, t un término, entonces denotamos por $P(x,t)$ el resultado de la introducción de t en P en lugar de cualquier parte de las entradas libres de x en P.

Si x y y son variables, P es una fórmula, ent son axiomas

AI1.- $(x)(x = x)$

AI2.- $(x = y) \to (P(x,x) \to P(x,y))$

c.- Axiomas de Elección (para SR2).

Si P es una fórmula que tiene variables libres x y y, y ninguna otra, entonces son axiomas:

$$AE.- \ (x)(\exists y)(P(x,y)) \rightarrow (\exists f)(x)P(x,f(x))$$

donde f es una variable funcional que no aparece en P.

d.- Axiomas de Campo

Si x, y, z son variables, entonces son axiomas:

$$Ac1.- \ (x)(y)(z)((x+y)+z) = (x+(y+z))$$

$$Ac2.- \ (x)(y)(x+y = y+x)$$

$$Ac3.- \ (x)(x+\bar{0} = x)$$

$$Ac4.- \ (x)(\exists y)(x+y=\bar{0})$$

$$Ac5.- \ (x)(y)(z)(x\cdot(y\cdot z)) = ((x\cdot y)\cdot z)$$

$$Ac6.- \ (x)(y)(x\cdot y = y\cdot x)$$

$$Ac7.- \ (x)(x\cdot\bar{1} = x)$$

$$Ac8.- \ (x)(\neg(x=\bar{0})) \rightarrow (\exists y)(x\cdot y = \bar{1})$$

$$Ac9.- \ (x)(y)(z)(x\cdot(y+z)) = (x\cdot y + x\cdot z)$$

$$Ac10.- \ \neg(\bar{0} = \bar{1}).$$

e.- Axiomas de Orden

Si x , y , z son variables, entonces son axiomas:

AO1.- $x \leq y \vee y \leq x$

AO2.- $(x \leq y \wedge y \leq x) \leftrightarrow (y = x)$

AO3.- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$

AO4.- $x \leq y \wedge \bar{0} \leq z \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

f.- Axiomas del Supremo

Si x , y , z son variables, f es variable funcional, entonces son axiomas:

$$AS.- \ (f)\big((\exists y)(x)(f(x) \leq y) \rightarrow (\exists z)(y)$$

$$((x)(f(x) \leq y \leftrightarrow z \leq x))\big)$$

Reglas de Inferencia

Si P y Q son f.b.f. , x es una variable, y f es una variable funcional, entonces las siguientes son reglas de inferencia validas en SR2

Modus Ponens

Q es consecuencia inmediata de P y $P \rightarrow Q$

Generalización para variables

$(x)P$ es consecuencia inmediata de P

Generalización para variables funcionales

$(f)P$ es consecuencia inmediata de P

CONSTRUCCION DEL MODELO

Pongamos:

I un conjunto

$\Omega = [0,1]^I$

m la medida de lebesgue en Ω

Ahora nuestro propósito es el de definir un álgebra Booleana $\mathcal{B}$ completa con condición de numerabilidad, sobre la cual se tomarán "los valores de verdad" de las funciones de vardad correspondientes a cada una de las fórmulas de

3.2 Def 3.2 .-Sean

$$A, B \subset \Omega \Rightarrow A \sim B \iff m(s(A,B)) = 0$$

Por las propiedades de la medida m, $\sim$ es una relación de equivalencia

Si $A \subset \Omega$, $\bar{A}$ denota la clase de A según $\sim$

Sea $\mathcal{B} = \{\bar{A} / A \subset \Omega\}$

definimos

$$\bar{a}' = \overline{\Omega - a}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a \cup b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cap b}$$

$$1 = \bar{\Omega}$$

$$0 = \bar{\emptyset}$$

3.1 Aff.- $(B, +, \cdot, ')$ es un álgebra Booleana completa con condición de numerabilidad.

Dem:

i.- p.d. $(\bar{a}')' = \bar{a}$

$$(\bar{a}')' = (\overline{\Omega - a})' = \overline{\Omega - (\Omega - a)} = \bar{a}$$

ii.- p.d. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b \cup c} = \overline{a \cup b \cup c} =$$

$$= \overline{a \cup b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

iii.- p.d. $\bar{a} + (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{c})$

$$\bar{a} + (\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b \cap c} = \overline{a \cup (b \cap c)} =$$

$$= \overline{(a \cup b) \cap (a \cup c)} = (\overline{a \cup b}) \cdot (\overline{a \cup c}) = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{c})$$

iv.- p.d $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a \cup b} = \overline{b \cup a} = \bar{b} + \bar{a}$$

v.- $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a}$

$$\bar{a} + \bar{a} = \overline{a \cup a} = \bar{a}$$

vi.- p.d. $(\bar{a}+\bar{b})' = \bar{a}'\cdot\bar{b}'$.

$$(\bar{a}+\bar{b})' = (\overline{a\cup b})' = \overline{\Omega-(a\cup b)} =$$

$$= \overline{(\Omega-a)\cap(\Omega-b)} = \bar{a}'\cdot\bar{b}'$$

vii.- p.d. $\bar{a}+0=\bar{a}$

$$\bar{a}+0 = \bar{a}+\bar{\emptyset} = \overline{a\cup\emptyset} = \bar{a}$$

Se puede demostrar de igual manera para "$\cdot$"

$\therefore$ $\mathcal{B}$ es un álgebra Booleana.

3.- Aff.- $\mathcal{B}$ es una σ- álgebra Booleana

Dem:

P. D. si $A\subset\mathcal{B}$ numerable ent. existen $\sup A$ e $\inf A$.

sup $A\subset\mathcal{B}$ numerable, por ejemplo $A=\{\bar{a}_i \,/\, i\in\mathbb{N}\}$.

sea $p=\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i}$, por supuesto p está bién definido, ya que

$$\text{si } t=\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} b_i} \quad y \quad \bar{b}_i=\bar{a}_i$$

$$\forall_{i\in\mathbb{N}}\ m(s(\bar{a}_i,\bar{b}_i))=0$$

$$m(s(\overline{\cup a_i},\overline{\cup b_i})) = m(\overline{(\cup a_i-\cup b_i)\cup(\cup b_i-\cup a_i)}) \leq$$

$$\leq m(\overline{(\cup(a_i-b_i))\cup(\cup(b_i-a_i))}) =$$

$$= m(\overline{\cup((a_i-b_i)\cup(b_i-a_i))}) =$$

$$= m(\cup(s(\bar{a}_i,\bar{b}_i))) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} m(s(\bar{a}_i,\bar{b}_i)) = 0$$

$\therefore\ m(s(\overline{\cup a_i}, \overline{\cup b_i})) = 0$

$\therefore\ p = t$

Aff.- $p = \sup A$

Si $x \in A$ ent $x = \overline{a_i}$ p. a. a_i

$\overline{a_i} \cdot p = \overline{a_i} \cdot \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i} = \overline{a_i \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i} = \cdot\, a_i$

$\therefore\ x = \overline{a_i} \leq p \quad \forall_{x\in A}$.

Ahora supongamos que $x < \overline{q}\ \forall_{x\in A}$ $\overline{a_i} \leq \overline{q}\ \forall_{i\in\mathbb{N}}$

$\therefore\ \overline{a_i} \cdot \overline{q} = \overline{a_i} \quad \therefore\ m(s(a_i \cap q, a_i)) = 0 \quad \forall_{i\in\mathbb{N}}$

$\overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i} \cdot \overline{q} = \overline{(\cup a_i) \cap q} = \overline{\cup (a_i \cap q)} = \overline{\cup a_i}$

Esta última igualdad se sigue de

$m(s(\cup(a_i \cap q), \cup a_i)) =$

$= m((\cup(a_i \cap q) - \cup a_i) \cup (\cup a_i - \cup(a_i \cap q))) \leq$

$\leq m((\cup(a_i \cap q - a_i) \cup (\cup(a_i - a_i \cap q))) =$

$= m(\cup(s(a_i \cap q, a_i))) \leq \sum m(s(a_i \cap q, a_i)) = 0$

$\therefore\ p = \sup A$.

Analogamente, si tomamos $I = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} a_i$ ent $I = \mathrm{INF}\,A$

$\therefore$ $\mathcal{B}$ es una σ - álgebra Booleana.

3.3 Ahora se demostrará que este álgebra Booleana cumple con la condición de numerabilidad y que por lo tanto, es completa.

Definimos:

$m' : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cdot \ni \quad m'(\bar{b}) = m(\bar{b})$

m' no depende de representantes ya que si

$\bar{x} = \bar{y} \quad$ ent $\quad m(s(x,y)) = 0$

$$m(x) = m((x-y) \cup (x \cap y)) = m(x-y) + m(x \cap y) =$$

$$= m(x \cap y) = m(y-x) + m(x \cap y) =$$

$$= m((y-x) \cup (x \cap y)) = m(y)$$

Además:

$$m'(1) = m'(\bar{\Omega}) = m(\Omega) = 1$$

$$y \text{ si } \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \text{ent} \quad \overline{a \cap b} = 0 \quad \therefore \quad m(a \cap b) = 0 .$$

$$m'(\bar{a} + \bar{b}) = m'(\overline{a \cup b}) = m(a \cup b) =$$

$$= m(a) + m(b) - m(a \cap b) = m'(\bar{a}) + m'(\bar{b}) - 0 =$$

$$= m'(\bar{a}) + m'(\bar{b})$$

$\therefore$ m' es una medida en

$\therefore$ $\mathcal{B}$ es un álbebra Booleana con medida

$\therefore$ $\mathcal{B}$ cumple la condición de numerabilidad

$\therefore$ $\mathcal{B}$ es completa.

MODELO E INTERPRETACION PARA $SR2$

El conjunto de objetos que nos servirá para interpretar los términos ("reales") del sistema $SR2$ es :

$$\bar{R} = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f \text{ es medible} \}$$

y el conjunto que nos servirá para interpretar las variables funcionales es :

$$\bar{R}_{(1)} = \{ f : \bar{R} \longrightarrow \bar{R} \,/\, \forall_{x,y\in\bar{R}} \ \{\omega\in\Omega / x(\omega) = y(\omega)\} \leq \{\omega\in\Omega / f(x)(\omega) = f(y)(\omega)\}\}$$

Aunque lo más natural sería tomar como $\bar{R}_{(1)}$ todas las funciones $f : \bar{R} \longrightarrow \bar{R}$ sin excepción alguna, la condición pedida no es tan artificial, ya que lo que esencialmente se está pidiendo es que la clase del conjunto en los cuales la x y la y coinciden sea más fuerte que la clase del conjunto de elementos en los cuales $f(x)$ y $f(y)$ coinciden. Por ejemplo, si x e y son casi iguales, $(\overline{\{\omega\in\Omega / x(\omega) = y(\omega)\}} \cong 1)$ entonces, $f(x)$ y $f(y)$ también son casi iguales ya que :

$$\overline{\{\omega\in\Omega / f(x)(\omega) = f(y)(\omega)\}} \geq \overline{\{\omega\in\Omega / x(\omega) = y(\omega)\}} \cong 1$$

Definición de operaciones en $\bar{R}$

$$\forall_{f,g\in\bar{R}} \quad \forall_{\omega\in\Omega} \quad (f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$$

$$\forall_{f,g\in\bar{R}} \quad \forall_{\omega\in\Omega} \quad (f\cdot g)(\omega) = f(\omega)\cdot g(\omega).$$

<u>Interpretación.</u>

Para la interpretación de las variables de $SR2$ utilizaremos elementos de $\bar{R}^{\omega}$

$$\bar{R}^{\omega} = \{ s : \mathbb{N} \longrightarrow \bar{R} \}$$

Para la interpretación de las variables funcionales, utilizaremos elementos de $\bar{R}^{\omega}_{(1)}$

Por razones de comodidad, haremos $\bar{M} = \bar{R}^{\omega} \times \bar{R}^{\omega}_{(1)}$

Interpretación de las variables.

Supongamos que x_i es una variable, f_i es una variable funcional, y que $\xi = (a, b) \in \bar{M}$ donde $a = (a_1, a_2, \ldots)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots)$ entonces

i.- La interpretación de x_i según ξ es $x_i^{\xi} = a_i$

ii.-La interpretación de f_i según ξ es $f_i^{\xi} = b_i$

Interpretación de términos.

La interpretación de terminos se define recursivamente de la siguiente manera:

i.- Si t es x_i su interpretación ya se ha descrito.

ii.-Si t es $\bar{0}$ ent $t^{\xi} = \bar{0}$

si t es $\bar{1}$ ent $t^{\xi} = \bar{1}$

donde $\bar{0}$ y $\bar{1}$ son las funciones constantes 0 y 1.

iii.-Si t es $t_1 + t_2$ ent $t^{\xi} = t_1^{\xi} + t_2^{\xi}$

si t es $t_1 \cdot t_2$ ent $t^{\xi} = t_1^{\xi} \cdot t_2^{\xi}$

iv.-Si t es $f_i(r)$ ent $t^{\xi} = f_i^{\xi}(r^{\xi})$

Funciones de verdad.

Nuestro propósito es definir para cada fórmula φ una función de verdad $\|\varphi\| : \bar{M} \longrightarrow B$, lo cual podemos hacer de manera recursiva:

a.- Si φ es $t_1 = t_2$ ent $\|\varphi\|(\xi) = \overline{\{\omega \in \Omega / t_1^{\xi}(\omega) = t_2^{\xi}(\omega)\}}$

si φ es $t_1 \leq t_2$ ent $\|\varphi\|(\xi) = \overline{\{\omega \in \Omega / t_1^{\xi}(\omega) \leq t_2^{\xi}(\omega)\}}$

b.- La definición de $\|\varphi\|$ se completa según el caso con la lista siguiente:

$$\|\neg P\|(\xi) = [\|P\|(\xi)]'$$

$$\|P \vee Q\|(\xi) = \|P\|(\xi) + \|Q\|(\xi).$$

$$\|P \wedge Q\|(\xi) = \|P\|(\xi) \cdot \|Q\|(\xi)$$

$$\|P \rightarrow Q\|(\xi) = \|P\|(\xi)' + \|Q\|(\xi)$$

$$\|P \leftrightarrow Q\|(\xi) = \|P\|(\xi)' \cdot \|Q\|(\xi)' + \|P\|(\xi) \cdot \|Q\|(\xi)$$

$$\|(x_i)\, P\|(\xi) = \underset{c \in \overline{R}}{\mathrm{INF}}\, \|P\|(\xi(i/c,)) \quad \text{donde } \xi(i/c,) = (a(i/c), b)$$

$$\|(f_i)\, P\|(\xi) = \underset{c \in \overline{R}_{(1)}}{\mathrm{INF}}\, \|P\|(\xi(, i/c)) \quad \text{donde } \xi(, i/c) = (a, b(i/c))$$

$$\|(\exists x_i)\, P\|(\xi) = \underset{c \in \overline{R}}{\mathrm{SUP}}\, \|P\|(\xi(i/c,))$$

$$\|(\exists f_i)\, P\|(\xi) = \underset{c \in \overline{R}_{(1)}}{\mathrm{SUP}}\, \|P\|(\xi(, i/c)).$$

3.3 Def. .-Decimos que la fórmula P es "verdadera" si

$$\|P\|(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in M$$

Decimos que P es "falsa si

$$\|P\|(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in M$$

3.4 Lema .-sea P una f.b.f.

Si $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ son las variables que ocurren libres en P y si $f_{j_1}, \dots, f_{j_m}$ son las variables funcionales que ocurren libres en P y si $\xi = (a, b)$ y $\xi' = (c, d)$ son tales que $a(i_k) = c(i_k)$ $1 \le k \le n$ $b(j_l) = d(j_l)$ $1 \le l \le m$ entonces

$$\|P\|(\xi) = \|P\|(\xi').$$

La demostración de este lema es analoga al resultado análogo de lenguajes de primer orden, donde $\| \cdot \|$ se toma en el sentido clásico.

SR2 $\nvdash$ H.C.

Ahora se va a demostrar que los axiomas de SR2 son "ciertos", que las reglas de inferencia conservan la veracidad y que la hipotesis del continuo es "falsa" para SR2, con lo que quedará probado que SR2 $\nvdash$ H.C.

3.5 Aff.- Los axiomas de SR2 son "verdaderos".

AL1.- $P \to (Q \to P)$

P.d $\Vert P \to (Q \to P)\Vert(\rho) = 1 \ \forall \rho \in \bar{M}$

Sea $\rho \in \bar{M}$

ent $\Vert P \to (Q \to P)\Vert(\rho) = [\Vert P\Vert(\rho)]' + \Vert Q \to P\Vert(\rho) =$

$= [\Vert P\Vert(\rho)]' + [\Vert Q\Vert(\rho)]' + \Vert P\Vert(\rho) =$

$= \left([\Vert P\Vert(\rho)]' + \Vert P\Vert(\rho)\right) + [\Vert Q\Vert(\rho)]' =$

$= 1 + [\Vert Q\Vert(\rho)]' = 1$

$\therefore$ AL1 es "verdadero".

AL2.- $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

Sea $\rho \in \bar{M}$

entonces

$\Vert (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))\Vert(\rho) =$

$= [\Vert P \to (Q \to R)\Vert(\rho)]' + \Vert (P \to Q) \to (P \to R)\Vert(\rho) =$

$= [(\Vert P\Vert(\rho))' + (\Vert Q\Vert(\rho))' + \Vert R\Vert(\rho)]' + [\Vert P \to Q\Vert(\rho)]' + \Vert P \to R\Vert(\rho) =$

$= \Vert P\Vert(\rho)\cdot\Vert Q\Vert(\rho)\cdot[\Vert R\Vert(\rho)]' + \Vert P\Vert(\rho)\cdot[\Vert Q\Vert(\rho)]' + [\Vert P\Vert(\rho)]' + \Vert R\Vert(\rho) =$

$$= \|P\|(\xi)\cdot[\|Q\|(\xi)\cdot[\|R\|(\xi)]' + [\|Q\|(\xi)]']' + [\|P\|(\xi)]' + \|R\|(\xi) =$$

$$= \|Q\|(\xi)\cdot[\|R\|(\xi)]' + \|Q\|(\xi) + [\|P\|(\xi)]' + \|R\|(\xi) =$$

$$= [\|R\|(\xi)]' + [\|Q\|(\xi)]' + [\|P\|(\xi)]' + \|R\|(\xi) =$$

$$= 1 + [\|Q\|(\xi)]' + [\|P\|(\xi)]' =$$

$$= 1$$

$\therefore$ AL2 es "verdadero.

Analogamente, usando propiedades elementales de álgebras Booleanas, se puede probar que los axiomas AL3 al AL9 son "verdaderos".

AL10.- $(x_i)P \rightarrow P(t)$ donde t es libre para x_i en P.

$$\|(x_i)P \rightarrow P(t)\|(\xi) = [\|(x_i)P\|(\xi)]' + \|P(t)\|(\xi) =$$

$$= [\operatorname*{INF}_{a\in R} \|P\|(\xi(i/a,\xi))]' + \|P(t)\|(\xi) =$$

$$= \operatorname*{SUP}_{a\in R} [\|P\|(\xi(i/a,\xi))]' + \|P(t)\|(\xi)$$

Sea $a_0 = t^{\xi} \in \bar{R}$,entonces se puede demostrar que:

$$\|P\|(\xi(i/a_0,\xi)) = \|P(t)\|(\xi)$$

$$\therefore \operatorname*{SUP}_{a\in R} [\|P\|(i/a,\xi)]' + \|P(t)\|(\xi) \geq$$

$$\geq [\|P\|(\xi(i/a,\xi))]' + \|P(t)\|(\xi) = [\|P(t)\|(\xi)]' + \|P(t)\|(\xi) = 1.$$

$$\therefore \|AL10\| = 1 .$$

Analogamente $AL\ 11$ es "verdadero"

$AL12 \vdash (x_i)\ (P \to Q) \to (P \to (x_i)\ Q)$

x_i no aparece libre en P

sea $\xi \in \bar{\mathcal{N}}$

$$\therefore\ \| (x_i)(P \to Q) \to (P \to (x_i)\ Q) \| =$$

$$= \left[\underset{a \in \bar{R}}{INF} \| P \to Q \| (\xi(i/a,)) \right]' + \left[\| P \| (\xi) \right]' +$$

$$+ \underset{a \in \bar{R}}{INF} \| Q \| (\xi(i/a,)) =$$

$$= \underset{a \in R}{SUP} \left[\| P \| (\xi(i/a,)) \cdot \left[\| Q \| (\xi(i/a,)) \right]' \right] +$$

$$+ \left[\| P \| (\xi) \right]' + \underset{a \in \bar{R}}{INF} \| Q \| (\xi(i/a,))$$

Puesto que x_i no ocurre libre en P, y $\xi(i/a)$ y ξ no difieren más que en el lugar i-ésimo, $\xi(i/a)$ y ξ no difieren en las variables libres de P y

$$\therefore\ \| P \| (\xi(i/a,)) = \| P \| (\xi)$$

$$\therefore\ \underset{a \in \bar{R}}{SUP} \left[\| P \| (\xi(i/a,)) \cdot \left[\| Q \| (\xi(i/a,)) \right]' \right] +$$

$$+ \left[\| P \| (\xi) \right]' + \underset{a \in \bar{R}}{INF} \| Q \| (\xi(i/a,)) =$$

$$= \underset{a \in \bar{R}}{SUP} \left[\| P \| (\xi) \cdot \left[\| Q \| (\xi(i/a,)) \right]' \right] + \left[\| P \| (\xi) \right]' +$$

$$+ \underset{a \in R}{INF} \| Q \| (\xi(i/a,)) =$$

$$= \| P \| (\xi) \cdot \underset{a \in \bar{R}}{SUP} \left[\| Q \| (\xi(i/a,)) \right]' + \left[\| P \| (\xi) \right]' + \underset{a \in \bar{R}}{INF} \| Q \| (\xi(i/a,)) =$$

$$= \sup_{a \in \bar{E}} [\|Q\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} + [\|P\|(\xi)]^{s} + \inf_{a \in \bar{E}} \|Q\|(\xi(^i/_{a},)) =$$

$$= [\inf_{a \in \bar{E}} \|Q\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} + [\|P\|(\xi)]^{s} + \inf_{a \in \bar{E}} \|Q\|(\xi(^i/_{a},)) =$$

$$= 1 + [\|P\|(\xi)]^{s} = 1$$

$\therefore$ AL 12 es "verdadero"

Analogamente AL 13 es "verdadero".

AL14.- $\neg(\exists x_i) P \longleftrightarrow (x_i) \neg P$

Sea $\xi \in \bar{\mathcal{M}}$

$$\|\neg(\exists x_i) P \longleftrightarrow (x_i) \neg P\|(\xi) =$$

$$= \|\neg(\exists x_i) P\|(\xi) \cdot \|(x_i) \neg P\|(\xi) + [\neg(\exists x_i) P\|(\xi)]^{s} \cdot [\|(x_i) \neg P\|(\xi)]^{s} =$$

$$= [\sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} \cdot \inf_{a \in \bar{E}} [\|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} +$$

$$+ \sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},)) \cdot [\inf_{a \in \bar{E}} [\|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s}]^{s} =$$

$$= \inf_{a \in \bar{E}} [\|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} \cdot \inf_{a \in \bar{E}} [\|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} +$$

$$+ \sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},)) \cdot \sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},)) =$$

$$= \inf_{a \in \bar{E}} [\|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} + \sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},)) =$$

$$= [\sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},))]^{s} + \sup_{a \in \bar{E}} \|P\|(\xi(^i/_{a},)) = 1$$

$\therefore$ AL14 es "verdadero".

Analogamente, haciendo una demostración semejante, se puede probar que $AL15$ es "verdadero".

Axiomas de Igualdad.

$AI1$.- $(x_i)(x_i = x_i)$

Sea $\xi \in \bar{M}$

$$\|(x_i)(x_i = x_i)\|(\xi) = \underset{a \in E}{\mathrm{INF}} \|x_i = x_i\|(\xi(i/a_j)) =$$

$$= \underset{a \in E}{\mathrm{INF}} \overline{\{\omega \in \Omega / x_{i\,(\omega)}^{\xi(i/a_j)} = x_{i\,(\omega)}^{\xi(i/a_j)}\}} = \underset{a \in E}{\mathrm{INF}}\ 1 = 1$$

$\therefore$ $AI1$ es "verdadero".

En lugar de probar que $AI2$ es "verdadero" probamos solo el caso en que P es atómica lo cual es suficiente para nuestros propósitos, ya que $AI2$ se deduce de esta versión más simple y, como además probaremos que las reglas de inferencia conservan la "veracidad", resultará que $AI2$ es "verdadero".

$$(x = y) \rightarrow (P(x,x) \rightarrow P(x,y)).$$

Supongamos que $P(x,x)$ es atómica; por ejemplo $x_i \leq x_j$ y supongamos y es x_k, x es x_i, (si x no es x_i ni x_j, el caso es muy simple) y que $P(x,y)$ es $x_k \leq x_j$ (los demás casos también son simples). entonces:

Sea $\xi \in \bar{M}$

$$\|x_i = x_k \rightarrow (x_i \leq x_j \rightarrow x_k \leq x_j)\|(\xi) =$$

$$= \|x_i = x_k\|(\xi)' + \|x_i \leq x_j\|(\xi)' + \|x_k \leq x_j\|(\xi)$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^{\xi}(\omega) = x_k^{\xi}(\omega)\}'} + \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^{\xi}(\omega) \leq x_j^{\xi}(\omega)\}'}$$

$$+ \overline{\{\omega \in \Omega / x_k^{\xi}(\omega) \leq x_i^{\xi}(\omega)\}} =$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^{\xi}(\omega) \neq x_k^{\xi}(\omega)\}} + \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^{\xi}(\omega) > x_j^{\xi}(\omega)\}} +$$

$$+ \overline{\{\omega \in \Omega / x_k^{\xi}(\omega) \leq x_i^{\xi}(\omega)\}} =$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^{\xi}(\omega) \neq x_k^{\xi}(\omega) \text{ ó } x_i^{\xi}(\omega) > x_j^{\xi}(\omega) \text{ ó } x_k^{\xi}(\omega) \leq x_j^{\xi}(\omega)\}} =$$

$$= \overline{\Omega} = 1$$

El caso en el que $P(x,x)$ es $x_i = x_j$ es annálogo al anterior y $\therefore$ AI2 es "verdadero".

Axiomas de Campo.

De este grupo de axiomas solo nos ocuparemos de unos cuantos a manera de ejemplo, todos los demás son análogos.

$$Ac\,2)\quad (x_i)(x_j)((x_i + x_j) = (x_j + x_i)).$$

Sea $\xi \in \overline{M}$

$$\therefore \|Ac\,2\|(\xi) = \underset{a \in \overline{R}}{\mathrm{INF}} \left[\|(x_j)(x_i + x_j = x_j + x_i)\|(\xi(i/a_j))\right] =$$

$$= \underset{a \in \overline{R}}{\mathrm{INF}} \left[\underset{b \in \overline{R}}{\mathrm{INF}} \left[\|x_i + x_j = x_j + x_i\|(\xi(i/a_j)(j/b_j))\right]\right] = 1$$

ya que

$$\|x_i + x_j = x_j + x_i\|(\eta) = \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^{\eta}(\omega) + x_j^{\eta}(\omega) = x_j^{\eta}(\omega) + x_i^{\eta}(\omega)\}} =$$

$$= \overline{\Omega} = 1 \quad \forall_{\eta \in \overline{M}}$$

$Ac\,4)\;(x_i)(\exists x_j)(x_i + x_j = \bar{0})$

Sea $\xi \in \bar{M}$

$$\| Ac\,4 \|(\xi) = \underset{a \in \bar{R}}{\mathrm{INF}}\left[\underset{b \in \bar{R}}{\mathrm{SUP}}\left[\| x_i + x_j = \bar{0} \|(\xi(i/a_g)(j/b_g))\right]\right]$$

Sea $a \in \bar{R}$.

Definimos $h_a : \Omega \longrightarrow R \ni h_a(\omega) = \begin{cases} a(\omega)^{-1} \text{ si } a(\omega) \neq 0 \\ 0 \text{ si } a(\omega) = 0 . \end{cases}$

A partir de que a es medible, se puede ver que h_a también lo es y $\therefore\; h_a \in \bar{R}$

$\therefore\; \| x_i + x_j = \bar{0} \|(\xi(i/a_g)(j/b_g)) =$

$= \overline{\{\omega \in \Omega / x_i^\eta(\omega) + x_j^\eta(\omega) = 0\}} = \overline{\{\omega \in \Omega / a(\omega) + h_a(\omega) = 0\}} =$

$= \bar{\Omega} = 1 \quad , \quad \eta = \xi(i/a_g)(j/b_g)$

$$\therefore \underset{a \in \bar{R}}{\forall}\; \underset{b \in \bar{R}}{\mathrm{SUP}}\left[\| x_i + x_j = \bar{0} \|(\xi(i/a_g)(j/b_g))\right] \geq$$

$$\geq \| x_i + x_j = \bar{0} \|(\xi(i/a_g)(j/h_{a_g})) = 1$$

$$\therefore \underset{a \in \bar{R}}{\forall}\; \underset{b \in \bar{R}}{\mathrm{SUP}}\left[\| x_i + x_j = \bar{0} \|(\xi(i/a_g)(j/b_g))\right] = 1$$

$$\therefore \underset{a \in \bar{R}}{\mathrm{INF}}\left[\underset{b \in \bar{R}}{\mathrm{SUP}}\left[\| x_i + x_j = \bar{0} \|(\xi(i/a_g)(j/b_g))\right]\right] = 1$$

$\therefore\; Ac\,4$ es "verdadero".

$A< 10) \neg (\bar{0} = \bar{1})$

Sea $\xi \in \bar{M}$

$$\| \neg(\bar{0} = \bar{1}) \|(\xi) = \left[\| \bar{0} = \bar{1} \|(\xi) \right]' = \overline{\{ \omega \in \Omega \,/\, \bar{0}^{\xi}(\omega) = \bar{1}^{\xi}(\omega) \}}' =$$

$$= \left[\overline{\{ \omega \in \Omega \,/\, 0(\omega) = 1(\omega) \}} \right]' = [\phi]' = \bar{\Omega} = 1$$

Axiomas de Orden.

De este grupo de axiomas, solo probaremos $AO3$, los pruebas de los demás son igualmente sencillas, y se reducen a propiedades de los reales.

$AO3$: $x \leq y \to (x + z \leq y + z)$

Sea $\xi \in \bar{M}$

$$\| x \leq y \to (x + z \leq y + z) \|(\xi) = [\| x \leq y \|(\xi)]' + \| x + z \leq y + z \|(\xi) =$$

$$= \left[\overline{\{ \omega \in \Omega \,/\, x^{\xi}(\omega) \leq y^{\xi}(\omega) \}} \right]' +$$

$$+ \overline{\{ \omega \in \Omega \,/\, x^{\xi}(\omega) + z^{\xi}(\omega) \leq y^{\xi}(\omega) + z^{\xi}(\omega) \}} =$$

$$= \overline{\Omega - \{ \omega \in \Omega \,/\, x^{\xi}(\omega) \leq y^{\xi}(\omega) \}} +$$

$$+ \overline{\{ \omega \in \Omega \,/\, x^{\xi}(\omega) + z^{\xi}(\omega) \leq y^{\xi}(\omega) + z^{\xi}(\omega) \}} =$$

$$= \overline{\{ \omega \in \Omega \,/\, x^{\xi}(\omega) > y^{\xi}(\omega) \} \cup \{ \omega \in \Omega \,/\, x^{\xi}(\omega) + y^{\xi}(\omega) \leq y^{\xi}(\omega) + z^{\xi}(\omega) \}} =$$

$$= \bar{\Omega} = 1 .$$

Omitimos las demostraciones de la veracidad del Axioma del Supremo y del Axioma de Elección porque son, en cierta forma, análogas a la demostración de la falsedad de H.C. y son tan largas y tediosas como dicha demostración.

3.6 La hipótesis de continuo es "falsa" para cierta elección de I

H.C.:

$$(f_1)\left[(\exists f_2)(x_2)(\exists x_1)(f_1(x_1)=0 \wedge x_2 = f_2(x_1) \vee (\exists f_3)(x_2)(f_1(x_2)=0 \rightarrow (\exists x_1)(Z(x_1)\wedge x_2 = f_3(x_1)))\right]$$

Sea $\xi \in \bar{M}$

P.D. $\|HC\|(\xi)=0$

para cierta elección de I

Sean $Q_1: (\exists f_2)(x_2)(\exists x_1)(f_1(x_1)=\bar{0} \wedge x_2 = f_2(x_1))$

$Q_2: (\exists f_3)(x_2)\left[f_1(x_2)=\bar{0} \rightarrow (\exists x_1)(Z(x_1)\wedge x_2=f_3(x_1))\right]$

$$\|H.C.\|(\xi) = \|(f_1)(Q_1 \vee Q_2)\|(\xi) = \underset{a\in \bar{R}_{(1)}}{INF} \|Q_1 \vee Q_2\|(\xi(, {}^1/a)) =$$

$$= \underset{a\in \bar{R}_{(1)}}{INF} \left[\|Q_1\|(\xi(, {}^1/a)) + \|Q_2\|(\xi(, {}^1/a))\right)$$

Ahora se debe hallar una $b \in \bar{R}_{(1)}$ tal que

$\|Q_1\|(\xi(, {}^1/b)) = 0$ y $\|Q_2\|(\xi(, {}^1/b)) = 0$.

Definiremos $b: \bar{R} \longrightarrow \bar{R}$ explicitamente

Sean I y J conjuntos tales que $J \subset I$.

y $\aleph_0 < \# J < \# I$, $\# J \neq \aleph_0$ $\# J \neq \# I$

Definimos:

$$\underset{i\in I}{\forall}\ P_i : [0,1]^I \longrightarrow [0,1] \ni P_i(h) = h(i) \ \underset{h: I \to [0,1]}{\forall}$$

Por supuesto, $\underset{i\in I}{\forall}$ P_i es medible

$\therefore$ $P_i \in \bar{R}$ $\underset{i\in I}{\forall}$

$$\text{Sea } T := \{f \in \bar{R} \,/\, f = P_i \text{ p.a. } i \in I\} \subset \bar{R}$$

$$\underset{f\in R}{\forall} \text{ sea } \overline{\Omega(f)} = \underset{c\in T}{\text{SUP}} \, \| x_4 = x_5 \| (\xi(4/f,)(5/c,)) =$$

$$= \underset{c\in T}{\text{SUP}} \, \overline{\{w \in \Omega \,/\, f(w) = c(w)\}}$$

Lo que se está haciendo exactamente, es tomar

$$A = \underset{c\in T}{\text{SUP}} \, \| x_4 = x_5 \| (\xi(4/c,)(5/c,))$$

esto, gracias a la completez de $\mathcal{B}$, y luego, para cada f fija, tomar un representante arbitrario pero fijo al que llamaremos $\Omega(f)$.

Ahora, ya con los elementos necesarios definidos, definimos

$$b : \bar{R} \longrightarrow \bar{R} \ni \underset{f\in\bar{R}}{\forall} \; b(f)(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \in \Omega(f) \\ 1 & \text{si } w \notin \Omega(f) \end{cases}$$

donde $0, 1 \in \mathbb{R}$, $\therefore \underset{f\in\bar{R}}{\forall}$ $b(f) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

y claramente, $\underset{f\in\bar{R}}{\forall}$ $b(f)$ es medible

$\therefore \underset{f\in\bar{R}}{\forall}$ $b(f) \in \bar{R}$

$\therefore$ la definición de b como función de $\bar{R} \longrightarrow \bar{R}$ es correcta.
Para ver que $b \in \bar{R}_{U1}$ solo hace falta verificar que:

$$\forall_{x,y \in \bar{R}} \quad \overline{\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\}} \leq \overline{\{\omega \in \Omega \,/\, b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\}}$$

Sean $x, y \in \bar{R}$

p. d. $\overline{\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\}} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega \,/\, b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\}} =$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\}}$$

$$\overline{\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\}} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega \,/\, b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\}} =$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\}}$$

$$\text{y} \quad S\left(\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\}, \{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\}\right) =$$

$$= \left[\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\} - \{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\}\right]$$

$$\cup \left[\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) = b(y)(\omega)\} - \{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega)\}\right] =$$

$$= \{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) \neq b(y)(\omega)\} \cup \emptyset$$

$\therefore$ lo que necesitamos probar es que

$$m\left(\{\omega \in \Omega \,/\, x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) \neq b(y)(\omega)\}\right) = 0 .$$

Para probar la afirmación anterior, debemos probar primero que :

$$\underset{x\in\bar{R}}{\forall} \ \|f_1(x_1)=\bar{o}\|(\xi(^{Y}/_{x_3})(_3{}^{1}/_{b})) = \underset{c\in T}{\mathrm{SUP}} \|x_1 = x_2\|(\xi(^{1}/_{x_3})(^{2}/_{c_3}))$$

$$\text{Sea } x\in\tilde{R} \quad \xi' := \xi(^{1}/_{x_3})(_3{}^{1}/_{b})$$

$$\|f_1(x_1)=0\|(\xi') = \overline{\{w\in\Omega \mid f_1^{\xi'}(x\xi')(w)=0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega \mid b(x)(w)=0\}} = \overline{\Omega(x)} = \underset{c\in T}{\mathrm{SUP}} \|x_1=x_2\|(\xi(^{1}/_{x_3})(^{2}/_{c_3}))$$

que es lo que quríamos.

De la, serie de igualdades anterio, concluimos que

$$\underset{\xi\in\bar{M}}{\forall} \ \underset{x\in\bar{R}}{\forall} \ \overline{\{w\in\Omega \mid b(x)(w)=0\}} = \overline{\Omega(x)} = \underset{c\in T}{\mathrm{SUP}} \|x_1=x_2\|(\xi(^{Y}/_{x_3})(^{2}/_{c_3})),$$

$$\therefore \ \underset{x\in\bar{R}}{\forall} \ \overline{\{w\in\Omega \mid b(x)(w)=0\}} = \underset{c\in T}{\mathrm{SUP}}[\overline{\{w\in\Omega \mid x(w)=c(w)\}}] \quad (*).$$

Más tarde haremos referencia a esta igualdad.

Ahora, procedemos a probar que

$$m(\{w\in\Omega \mid x(w)=y(w) \ \ y \ \ b(x)(w)\neq b(y)(w)\})=0$$

$$\text{S.P.G.} \quad \sup \quad b(x)(w)=0 \ \ y \ \ b(y)(w)=1$$

$$\therefore \{w\in\Omega \mid x(w)=y(w) \ \ y \ \ b(x)(w)\neq b(y)(w)\} =$$

$$= \{w\in\Omega \mid x(w)=y(w) \ \ y \ \ b(x)(w)=0 \ \ y \ \ b(y)(w)=1\} =$$

$$= \{w\in\Omega \mid x(w)=y(w)\} \cap \{w\in\Omega \mid b(x)(w)=0\} \cap \{w\in\Omega \mid b(y)(w)=1\} =$$

$$= \{w\in\Omega \mid x(w)=y(w)\} \cap \Omega(x) \cap \{w\in\Omega \mid b(y)(w)=1\}.$$

$$\therefore \overline{\{w\in\Omega \mid x(w)=y(w) \ \ y \ \ b(x)(w)\neq b(y)(w)\}} =$$

$$= \overline{\{w \in \Omega / x(w) = y(w)\} \cap \Omega(x) \cap \{w \in \Omega / b(y)(w) = 1\}}$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega)\}} \cdot \overline{\Omega(x)} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega / b(y)(\omega) = 1\}} =$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega)\}} \cdot \left[\sup_{c \in T} \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = c(\omega)\}} \right] \cdot$$

$$\overline{\{\omega \in \Omega / b(y)(\omega) = 1\}} =$$

$$= \left[\sup_{c \in T} \left(\overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega)\}} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = c(\omega)\}} \right) \right] \cdot$$

$$\overline{\{\omega \in \Omega / b(y)(\omega) = 1\}} =$$

$$= \left[\sup_{c \in T} \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega) \text{ y } x(\omega) = c(\omega)\}} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega / b(y)(\omega) = 1\}} \right] =$$

Pero $\overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega) \text{ y } x(\omega) = c(\omega)\}} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega / \quad (y)(\omega) = c(\omega)\}}$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega) \text{ y } x(\omega) = c(\omega) \text{ y } y(\omega) = c(\omega)\}} =$$

$$= \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega) \text{ y } x(\omega) = c(\omega)\}}$$

$$\therefore \overline{\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega) \text{ y } x(\omega) = c(\omega)\}} \leq \overline{\{\omega \in \Omega / y(\omega) = c(\omega)\}}$$

$$\therefore \left[\sup_{c \in T} \overline{\{\omega \in \Omega / y(\omega) = c(\omega)\}} \right] \cdot \overline{\{\omega \in \Omega / b(y)(\omega) = 1\}} =$$

$$= \overline{\Omega(y)} \cdot \overline{\{\omega \in \Omega / b(y)(\omega) = 1\}} =$$

$$= \overline{\Omega(y)} \cdot \overline{\Omega - \Omega(y)} = \overline{\emptyset} = 0$$

$$\therefore m(\{\omega \in \Omega / x(\omega) = y(\omega) \text{ y } b(x)(\omega) \neq b(y)(\omega)\}) = 0$$

$$\therefore b \in \overline{R}_{(1)}$$

Ahora, lo que falta demostrar es que

$\|Q_1\|(\xi(,1/b))=0$ y $\|Q_2\|(\xi(,1/b))=0$

Empezaremos probando que $\|Q_1\|(\xi(,1/b))=0$.

$$\|Q_1\|(\xi(,1/b)) = \|(\exists f_2)(x_2)(\exists x_1)(f_1(x_1)=0 \wedge x_2=f_2(x_1))\|(\xi(,1/b)) =$$

$$= \underset{f\in\overline{R}_{(1)}}{SUP}\left[\underset{x\in\overline{R}}{INF}\left[\underset{y\in\overline{R}}{SUP}\left[\|f_1(x_1)=0 \wedge x_2=f_2(x_1)\|(\xi(,1/b)(,2/f)(2/x,)(1/y,))\right]\right]\right] =$$

$$= \underset{f\in\overline{R}_{(1)}}{SUP}\left[\underset{x\in\overline{R}}{INF}\left[\underset{y\in\overline{R}}{SUP}\left[\overline{\{w\in\Omega / b(y)(w)=0 \text{ y } x(w)=f(y)(w)\}}\right]\right]\right]$$

Ahora procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $\|Q_1\|(\xi(,1/b))\neq 0$. Por lo tanto, de la igualdad anterior tenemos que

$$\underset{g\in\overline{R}_{(1)}}{\exists}\ \underset{x\in\overline{R}}{INF}\left[\underset{y\in\overline{R}}{SUP}\left[\overline{\{w\in\Omega / b(y)(w)=0 \text{ y } x(w)=g(y)(w)\}}\right]\right]\neq 0 .$$

Llamemosle L a

$$\underset{x\in\overline{R}}{INF}\left[\underset{y\in\overline{R}}{SUP}\left[\overline{\{w\in\Omega / b(y)(w)=0 \text{ y } x(w)=g(y)(w)\}}\right]\right]$$

entonces :

$$L=\underset{x\in\overline{R}}{INF}\left[\underset{y\in\overline{R}}{SUP}\left[\overline{\{w\in\Omega / b(y)(w)=0\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega / x(w)=g(y)(w)\}}\right]\right]=$$

$$=\underset{x\in\overline{R}}{INF}\left[\underset{y\in\overline{R}}{SUP}\left[\left(\underset{c\in T}{SUP}\ \overline{\{w\in\Omega / y(w)=c(w)\}}\right)\cdot\overline{\{w\in\Omega / x(w)=g(y)(w)\}}\right]\right]$$

Esto ultimo como consecuencia de (I).

$$\therefore\ L = \inf_{x\in\bar{R}} \Big[\sup_{y\in\bar{R}} \Big[\sup_{c\in T} \Big(\overline{\{w\in\Omega \,/\, y(w) = c(w)\}} \cdot$$

$$\cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(y)(w)\}} \Big) \Big] \Big] \leq$$

$$\leq \inf_{x\in\bar{R}} \Big[\sup_{y\in\bar{R}} \Big[\sup_{c\in T} \Big(\overline{\{w\in\Omega \,/\, g(y)(w) = g(c)(w)\}} \cdot$$

$$\cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(y)(w)\}} \Big) \Big] \Big]$$

ya que $g \in \bar{R}(1)$, pero además tenemos que :

$$\Big(\overline{\{w\in\Omega \,/\, g(y)(w) = g(c)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(y)(w)\}} \Big) \cdot$$

$$\cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(c)(w)\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega \,/\, g(y)(w) = g(c)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(y)(w)\}}$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega \,/\, g(y)(w) = g(c)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(y)(w)\}} \leq$$

$$\overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(c)(w)\}}$$

por lo tanto, $L \leq \inf_{x\in\bar{R}} \Big[\sup_{y\in\bar{R}} \Big[\sup_{c\in T} \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(c)(w)\}} \Big] \Big] =$

$$= \inf_{x\in\bar{R}} \Big[\Big(\sup_{c\in T} \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(c)(w)\}} \Big) \cdot \sup_{y\in\bar{R}} 1 \Big] =$$

$$= \inf_{x\in\bar{R}} \Big[\sup_{c\in T} \overline{\{w\in\Omega \,/\, x(w) = g(c)(w)\}} \Big]$$

por lo tanto, $L \leqslant \inf_{x \in \overline{R}} \left[\sup_{c \in T} \overline{\{w \in \Omega / x(w) = g(c)(w)\}} \right] \leqslant$

$$\leqslant \sup_{c \in T} \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(c)(w)\}} \quad \forall i \in I \quad \text{ya que } P_i \in \overline{R}$$

$$\therefore \; L \leqslant \sup_{c \in T} \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(c)(w)\}} \quad \forall i \in I$$

Como estamos suponiendo que L es distinta de cero, se conclu-

ye que $\sup_{c \in T} \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(c)(w)\}} \neq 0 \quad \forall i \in I$,es decir,

$$\forall_{i \in I} \; \exists_{c_i \in T} \; \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(c_i)(w)\}} \neq 0$$

Como $c_i \in T$, $\forall_{i \in I} \; c_i = P_{j(i)}$ p. a. $j(i) \in J$

$$\therefore \; \forall_{i \in I} \; \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(P_{j(i)})(w)\}} \neq 0$$

Observemos que lo anterior define una funcion $j \cdot I \longrightarrow J$
y recordemos que $\chi_0 < \# J < \# I$.

Afirmamos que :

$$\exists_{k \in J} \; \# j^{-1}[\{k\}] > \chi_0$$

En efecto, si $\forall_{a \in J} \; \# j^{-1}[\{a\}] \leq \chi_0$, entonces, como

$$j^{-1}[\{a\}] \cap j^{-1}[\{b\}] = \phi \quad \forall_{a \neq b} \;, \quad \& \quad I = \bigcup_{a \in J} j^{-1}[\{a\}] \;,$$

tenemos que $\# I = \# \bigcup_{a \in J} j^{-1}[\{a\}] = \sum_{a \in J} \# j^{-1}[\{a\}] \leq \sum_{a \in J} \chi_0 = \# J \cdot \chi_0 = \# J$

$\therefore \# I \leq \# J$ lo que contradice lo supuesto.

Sea $I_0 \subseteq I$ y $I_0 = j^{-1}[\{k\}]$, entonces $\# I_0 > \chi_0$

y, por supuesto, $\forall_{i \in I_0} \quad A_i := \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(P_k)(w)\}} \neq 0$.

Además, $\forall_{i,j \in I_0} \quad (A_i \cdot A_j) \cdot \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = P_j(w)\}} =$

$$= \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(P_k)(w)\}} \cdot \overline{\{w \in \Omega / P_j(w) = g(P_k)(w)\}} \cdot \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = P_j(w)\}} =$$

$$= \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(P_k)(w) \text{ y } P_j(w) = g(P_k)(w) \text{ y } P_i(w) = P_j(w)\}} =$$

$$= \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = g(P_k)(w) \text{ y } P_j(w) = g(P_k)(w)\}} = A_i \cdot A_j$$

$$\therefore \forall_{i,j \in I_0} \quad A_i \cdot A_j \leq \overline{\{w \in \Omega / P_i(w) = P_j(w)\}}$$

Pero si $i \neq j$, P_i y P_j son dos proyecciones distintas, las cuales, intuitivamente, solo coinciden en un conjunto de medida cero, es decir

$$\forall i \neq j \quad \overline{\{w \in \Omega \,/\, P_i(w) = P_j(w)\}} = 0$$

$$\therefore \; A_i \cdot A_j \leq 0 \qquad \forall_{i,j \in I_0}, i \neq j$$

$$\therefore \; \forall_{i,j \in I, i \neq j} \; A_i \cdot A_j = 0 \; .$$

Por lo tanto, $\{A_i\}_{i \in I_0} \subseteq B$ es una familia no numerable de elementos no nulos ajenos dos a dos, lo cual es una contradicción, ya que se ha probado que B es un algebra Booleana con condicción de numerabilidad. Evidentemente, esta contradicción surge por haber supuesto que $\|Q_1\|(\xi(,1/b)) \neq 0$.

Por lo tanto hemos probado que $\|Q_1\|(\xi(,1/b)) = 0$.

En lo que sigue nos dedicaremos a probar que $\|Q_2\|(\xi(,1/b)) = 0$

Recordemos que es Q_2 .

$$Q_2 : (\exists f_3)(x_2)\left[f_1(x_2) = \bar{0} \rightarrow (\exists x_1)\left(Z(x_1) \wedge x_2 = f_3(x_1) \right) \right] .$$

Como se ve, en Q_2 aparece $Z(X_1)$ lo cual es la abreviatura de la formula que en L_2 "dice que" X_1 "es un entero". Para efectuar el calculo deseado, necesitamos calcular $\| Z(x_1)\|(\eta)$ para alguna $\eta \in \overline{M}$, esto es lo que haremos a continuación.

3.7 Afirmación : Si $\eta \in \overline{M}$ entonces

$$\sup_{n\in \mathbb{Z}} \overline{\{w\in\Omega / X_1^\eta(w)=n\}} = \overline{\{w\in\Omega / X_1^\eta(w)\in \mathbb{Z}\}} .$$

Dem:

Sea $\eta \in \overline{M}$.

$$\overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)\in\mathbb{Z}\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}} = \overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)\in\mathbb{Z} \text{ y } X_1^\eta(w)=n\}} =$$

$$=\overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}} \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

$$\therefore \overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}} \leq \overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)\in\mathbb{Z}\}} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$\therefore \overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)\in\mathbb{Z}\}}$ es cota superior.

Ahora supongamos que $L\subset\Omega$ y que

$\overline{L} \geq \overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$. Entonces

$$\forall_{n\in\mathbb{Z}} \quad \overline{L}\cdot\overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}} = \overline{L\cap\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}} = \overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}}$$

es decir, $\forall_{n\in\mathbb{Z}} \quad m(L\cap\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\}) = m(\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\})$

$$\therefore \overline{L}\cdot\overline{\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)\in\mathbb{Z}\}} = \overline{L\cap\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)\in\mathbb{Z}\}} =$$

$$= \overline{L\cap(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\})} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(L\cap\{w\in\Omega/X_1^\eta(w)=n\})}$$

Además,

$$\left(L \cap \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n_1\}\right) \cap \left(L \cap \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n_2\}\right) = \emptyset \ , \ n_1 \neq n_2 \ ,$$

y $\mathbb{Z}$ es numerable.

Sea n_i , $i \in \mathbb{N}$ una numeración de $\mathbb{Z}$.

$$m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(L \cap \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n\}\right)\Big) = m\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(L \cap \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n_i\}\right)\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} m\left(L \cap \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n_i\}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} m\left(\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n_i\}\right) =$$

$$= m\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n_i\}\Big) = m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n\}\Big) =$$

$$= m\left(\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) \in \mathbb{Z}\}\right)$$

$$\therefore \ \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(L \cap \{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n\}\right)} = \overline{\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) \in \mathbb{Z}\}}$$

$$\therefore \ \overline{L} \cdot \overline{\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) \in \mathbb{Z}\}}$$

$$\therefore \ \overline{\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) \in \mathbb{Z}\}} \leq \overline{L}$$

$$\therefore \ \sup_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) = n\}} = \overline{\{w \in \Omega / x_i^{\eta}(w) \in \mathbb{Z}\}}$$

Ahora procedemos a calcular $\|Z(x_1)\|(\eta)$:

3.9 Afirmación: Si $\eta \in \bar{M}$ entonces

$$\|Z(x_1)\|(\eta) = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\{w\in\Omega / x_1^{\eta}(\omega)=n\}} .$$

Demostración:

$$Z(x_1):(f_4)\left[\left(f_4(\bar{0})=\bar{0} \wedge (x_3)(f_4(x_3)=f_4(x_3+\bar{1})\right)\rightarrow f_4(x_1)=\bar{0}\right]$$

Recordemos que nuestro modelo de los "numeros reales" (en realidad de SR2) está constituido por las funciones $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ medibles, por lo tanto, los "numeros enteros" del modelo, intuitivamente, son las funciones $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ medibles que cumplen con que $m(\{w\in\Omega / f(\omega)\in\mathbb{Z}\})=1$. Y de antemano hemos aceptado que la formula $Z(x_1)$ "dice" que x_1 es un "entero" , consecuentemente, la afirmación que queremos probar resulta natural.

Sea $\eta\in\bar{M}$

$$\|Z(x_1)\|(\eta) = \operatorname*{INF}_{a\in\bar{R}_{(1)}}\left[\left(\|f_4(\bar{0})=\bar{0} \wedge (x_3)(f_4(x_3)=f_4(x_3+\bar{1}))\|(\eta(,4/a))\right)' \right.$$

$$\left. + \|f_4(x_1)=\bar{0}\|(\eta(,4/a))\right]=$$

$$=\operatorname*{INF}_{a\in\bar{R}_{(1)}}\left[\|f_4(\bar{0})=\bar{0}\|(\eta(,4/a))' + \left(\operatorname*{INF}_{c\in\bar{R}}\left[\|f_4(x_3)=f_4(x_3+\bar{1})\|(\eta(,4/a)(3/c))\right]\right)'\right.$$

$$\left. + \|f_4(x_1)=\bar{0}\|(\eta(,4/a))\right] =$$

$$= \underset{a\in \bar{R}_{(1)}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\{w\in\Omega / a(0)(w)=0\}}' + \underset{c\in\bar{R}}{\mathrm{SUP}} \left[\overline{\{w\in\Omega / a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}' \right] + \overline{\{w\in\Omega / a(x_1^{\eta(,4/a)})(w)=0\}} \right]$$

Definimos $h:\bar{R}\to\bar{R}$ tal que $h(x)(w)=Sen^2(\pi\cdot x(w))$.

Denotamos $x_1^{\eta(,4/a)}$ por P, entonces:

$$\overline{\{w\in\Omega / h(0)(w)=0\}}' = \overline{\{w\in\Omega / Sen^2(\pi\cdot 0(w))=0\}}' =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega / Sen^2(0)=0\}}' = \bar{\Omega}' = 1' = 0 .$$

Además:

$$\overline{\{w\in\Omega / h(c)(w)=h(c+1)(w)\}}' = \overline{\{w\in\Omega / Sen^2(\pi\cdot c(w)) = Sen^2(\pi\cdot(c+1)(w))\}}' =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega / Sen^2(\pi\cdot c(w)) = Sen^2(\pi\cdot(c(w)+1(w)))\}}' =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega / Sen^2(\pi\cdot c(w)) = Sen^2(\pi\cdot c(w)+\pi)\}}' = \bar{\Omega}' = 1' = 0 .$$

esto último se debe a que Sen^2 tiene período π, es decir,

$$Sen^2(z) = Sen^2(z+\pi) \quad \forall z\in\mathbb{R}.$$

$$\therefore \|Z(x_1)\|(\eta) = \underset{a\in\bar{R}_{(1)}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\{w\in\Omega / a(0)(w)=0\}}' + \right.$$

$$\left. \underset{c\in\bar{R}}{\mathrm{SUP}} \left[\overline{\{w\in\Omega / a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}' \right] + \overline{\{w\in\Omega / a(P)(w)=0\}} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\{w\in\Omega / h(0)(w)=0\}}' + \underset{c\in\overline{R}}{SUP}\left[\overline{\{w\in\Omega / h(c)(w)=h(c+1)(w)\}}'\right] +$$

$$\overline{\{w\in\Omega / h(P)(w)=0\}} = 0 + \underset{c\in\overline{R}}{SUP}[0] + \overline{\{w\in\Omega / h(P)(w)=0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega / h(P)(w)=0\}} = \overline{\{w\in\Omega / Sen^2(\pi\cdot P(w))=0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega / P(w)\in \mathbb{Z}\}}$$ ya que $Sen^2(\pi\cdot m)=0$ sii $m\in\mathbb{Z}$.

Pero $P = X_1^{\eta(,4/a)} = X_1^{\eta}$ ya que $\eta(,4/a)$ y η tienen como primera coordenada la misma sucesión

$$\therefore \overline{\{w\in\Omega / P(w)\in\mathbb{Z}\}} = \overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)\in\mathbb{Z}\}}$$

$$\therefore \|Z(X_1)\|(\eta) \leqslant \overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)\in\mathbb{Z}\}} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{SUP}\ \overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)=n\}}$$

$$\therefore \|Z(X_1)\|(\eta) \leqslant \underset{n\in\mathbb{Z}}{SUP}\ \overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)=n\}} \quad \text{.........}(I)$$

Para probar la desigualdad en el otro sentido, procedemos de la siguiente manera:

Sean $a\in\overline{R}_{(1)}$ y $n\in\mathbb{Z}$ entonces:

(En lo que sigue, según el contexto, n denota a un entero, o bién, a la función constante n, $n:\Omega\to\mathbb{R}$).

$$\overline{\{w\in\Omega / a(n)(w)=0\}}' \cdot \left(\overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)=n\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega / a(X_1^{\eta})(w)=0\}}'\right) =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega / a(n)(w)\neq 0 \ y \ X_1^{\eta}(w)=n \ y \ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}}$$

Además

$$s\left(\{w\in\Omega \,/\, a(n)(w)\neq 0 \ \text{y}\ X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\},\right.$$

$$\left.\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}\right) =$$

$$= \emptyset \cup \{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0 \ \text{y}\ a(n)(w)=0\}$$

$$\text{y}\quad \overline{\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0 \ \text{y}\ a(n)(w)=0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(n)(w)=0\}} \leqslant$$

$$\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(X_1^{\eta})(w)=a(n)(w)\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(n)(w)=0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega \,/\, a(X_1^{\eta})(w)=a(n)(w) \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0 \ \text{y}\ a(n)(w)=0\}} = \overline{\emptyset} = 0$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0 \ \text{y}\ a(n)(w)=0\}} = 0$$

$$\therefore\ m\left(\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0 \ \text{y}\ a(n)(w)=0\}\right)=0$$

$$\therefore\ m\left(s\left(\{w\in\Omega \,/\, a(n)(w)\neq 0 \ \text{y}\ X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\},\right.\right.$$

$$\left.\left.\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}\right)\right)=0$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega \,/\, a(n)(w)\neq 0 \ \text{y}\ X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n \ \text{y}\ a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega \,/\, X_1^{\eta}(w)=n\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(X_1^{\eta})(w)\neq 0\}},$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega\,/\,a(n)(w)=0\}}'\cdot\left(\overline{\{w\in\Omega\,/\,X_i^{n}(w)=n\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(X_i^{n})(w)=0\}}'\right)=$$

$$=\overline{\{w\in\Omega\,/\,X_i^{n}(w)=n\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(X_i^{n})(w)=0\}}'$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega/X_i^{n}(w)=n\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(X_i^{n})(w)=0\}}'\leq\overline{\{w\in\Omega/a(n)(w)=0\}}'\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

Sea $H=\{c\in\overline{R}\,/\,c(w)=m\ \ \forall w\in\Omega\,,\ \text{p.a. } m\in\mathbb{Z}\ \ 0\leq m\leq n-1\}$

Como $H\subset\overline{R}$ **, tenemos que**

$$\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(0)(w)=0\}}\cdot\underset{c\in\overline{R}}{\mathrm{INF}}\ \overline{\{w\in\Omega\,/\,a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}\leq$$

$$\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(0)(w)=0\}}\cdot\underset{c\in H}{\mathrm{INF}}\ \overline{\{w\in\Omega\,/\,a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}\ .$$

Pero H **es finito, por lo tanto el ínfimo deseado será el producto de los elementos en cuestión, es decir:**

$$\underset{c\in H}{\mathrm{INF}}\ \overline{\{w\in\Omega\,/\,a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}=\prod_{m=0}^{n-1}\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(m)(w)=a(m+1)(w)\}}$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega\,/\,a(0)(w)=0\}}\cdot\underset{c\in\overline{R}}{\mathrm{INF}}\ \overline{\{w\in\Omega/a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}\leq$$

$$\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(0)(w)=0\}}\cdot\prod_{m=0}^{n-1}\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(m)(w)=a(m+1)(w)\}}\ .$$

Pero además:

$$\overline{\{w\in\Omega/a(n)(w)=0\}}\cdot\left(\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(0)(w)=0\}}\cdot\prod_{m=0}^{n-1}\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(m)(w)=a(m+1)(w)\}}\right)=$$

$$= \overline{\{w\in\Omega\,/\,a(n)(w)=0\}\cap\{w\in\Omega/a(0)(w)=0\}\cap\left(\bigcap_{m=0}^{n-1}\{w\in\Omega\,/a(m)(w)=a(m+1)(w)\}\right)} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega/a(n)(w)=0 \text{ y } a(0)(w)=0 \text{ y } a(0)(w)=a(1)(w)=a(2)(w)=\cdots=a(n)(w)\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega\,/a(0)(w)=0 \text{ y } a(0)(w)=a(1)(w)=a(2)(w)=\cdots=a(n)(w)\}} =$$

$$= \overline{\{w\in\Omega\,/a(0)(w)=0\}}\cdot\prod_{m=0}^{n-1}\overline{\{w\in\Omega\,/a(m)(w)=a(m+1)(w)\}} .$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega\,/a(0)(w)=0\}}\cdot\prod_{m=0}^{n-1}\overline{\{w\in\Omega\,/\,a(m)(w)=a(m+1)(w)\}}\leqslant\overline{\{w\in\Omega\,/a(n)(w)=0\}}$$

$$\therefore\ \overline{\{w\in\Omega\,/a(0)(w)=0\}}\cdot\operatorname*{INF}_{c\in\overline{R}}\overline{\{w\in\Omega\,/a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}\leqslant\overline{\{w\in\Omega\,/a(n)(w)=0\}}$$

y complementando en ambos lados tenemos

$$\overline{\{w\in\Omega\,/a(n)(w)=0\}}'\leqslant\overline{\{w\in\Omega/a(0)(w)=0\}}'+\operatorname*{SUP}_{c\in\overline{R}}\left(\overline{\{w\in\Omega\,/a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}'\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

por lo tanto, mediante las desigualdades (1) y (2) , nos queda

$$\overline{\{w\in\Omega\,/X_1^{\eta}(w)=n\}}\cdot\overline{\{w\in\Omega\,/a(X_1^{\eta})(w)=0\}}'\leqslant$$

$$\overline{\{w\in\Omega\,/a(0)(w)=0\}}'+\operatorname*{SUP}_{c\in\overline{R}}\left(\overline{\{w\in\Omega\,/a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}'\right),$$

pero observamos que en general se cumple que

$$a\leqslant b+c \quad \text{sii} \quad a\cdot c'\leqslant b\ ,$$

ya que

$$a\cdot(b+c)=a \quad \text{sii} \quad a\cdot b+a\cdot c=a \quad ,\text{sii}$$

$$a\cdot b\cdot c'+a\cdot c\cdot c'=ac' \quad \text{sii} \quad abc'=ac' \quad \text{sii} \quad a\cdot c'\leqslant b$$

por lo tanto, aplicando esto a nuestro caso,

$$\overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)=n\}} \leq \overline{\{w\in\Omega / a(0)(w)=0\}}' + \underset{c\in\overline{R}}{\mathrm{SUP}}\left(\overline{\{w\in\Omega / a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}'\right) +$$

$$+ \overline{\{w\in\Omega / a(X_1^{\eta})(w)=0\}} \quad \underset{a\in\overline{R}_{(1)}}{\forall} \ y \ \underset{n\in\mathbb{Z}}{\forall}$$

$$\therefore \ \underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \ \overline{\{w\in\Omega / X_1^{\eta}(w)=n\}} \leq \underset{a\in\overline{R}_{(1)}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\{w\in\Omega / a(0)(w)=0\}}' + \right.$$

$$\left. + \underset{c\in\overline{R}}{\mathrm{SUP}}\left(\overline{\{w\in\Omega / a(c)(w)=a(c+1)(w)\}}'\right) + \overline{\{w\in\Omega / a(X_1^{\eta})(w)=0\}}\right] =$$

$$= \| Z(x_1) \| (\eta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

por lo tanto, con (I) y (II), tenemos lo que queríamos.

Ahora si, procedemos a calcular $\| Q_2 \| (\xi(,{}^1/b))$

$$\| Q_2 \| (\xi(,{}^1/b)) = \underset{a\in\overline{R}_{(1)}}{\mathrm{SUP}} \left[\underset{c\in\overline{R}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\{w\in\Omega / b(c)(w)=0\}}' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \underset{d\in\overline{R}}{\mathrm{SUP}} \left[\| Z(x_1) \| (\xi(,{}^1/b)(,{}^3/a)({}^2/c,)({}^1/d,)) \cdot \overline{\{w\in\Omega / c(w)=a(d)(w)\}} \right] \right] \right] =$$

$$= \underset{a\in\overline{R}_{(1)}}{\mathrm{SUP}} \left[\underset{c\in\overline{R}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\{w\in\Omega / b(c)(w)=0\}}' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \underset{d\in\overline{R}}{\mathrm{SUP}} \left[\left(\underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \ \overline{\{w\in\Omega / d(w)=n\}} \right) \cdot \overline{\{w\in\Omega / c(w)=a(d)(w)\}} \right] \right] \right] \leq$$

$$\leqslant \sup_{a\in\overline{R}_{(1)}} \Big[\inf_{c\in\overline{R}} \Big[\overline{\{w\in\Omega \,/\, b(c)(w)=0\}}' +$$

$$\sup_{d\in\overline{R}} \Big[\sup_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\overline{\{w\in\Omega \,/\, a(d)(w)=a(n)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, c(w)=a(d)(w)\}} \Big) \Big] \Big] \Big] .$$

pero

$$\overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(n)(w)\}} \cdot \Big(\overline{\{w\in\Omega \,/ a(d)(w)=a(n)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/ c(w)=a(d)(w)\}} \Big) =$$

$$\overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(n)(w) \text{ y } a(d)(w)=a(n)(w) \text{ y } c(w)=a(d)(w)\}} =$$

$$\overline{\{w\in\Omega/a(d)(w)=a(n)(w) \text{ y } c(w)=a(d)(w)\}} =$$

$$\overline{\{w\in\Omega/a(d)(w)=a(n)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/ c(w)=a(d)(w)\}}$$

$$\therefore \; \overline{\{w\in\Omega/a(d)(w)=a(n)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(d)(w)\}} \leqslant \overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(n)(w)\}}$$

$$\therefore \|Q_2\|(\xi(,1/b)) \leqslant \sup_{a\in\overline{R}_{(1)}} \Big[\inf_{c\in\overline{R}} \Big[\overline{\{w\in\Omega/b(c)(w)=0\}}' +$$

$$+ \sup_{d\in\overline{R}} \Big[\sup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(n)(w)\}} \Big] \Big] \Big] =$$

$$= \sup_{a\in\overline{R}_{(1)}} \Big[\inf_{c\in\overline{R}} \Big[\overline{\Omega(c)}' + \Big(\sup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(n)(w)\}} \Big) \cdot \sup_{d\in\overline{R}} 1 \Big] \Big] =$$

$$= \sup_{a\in\overline{R}_{(1)}} \Big[\inf_{c\in\overline{R}} \Big[\overline{\Omega(c)}' + \sup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\{w\in\Omega/c(w)=a(n)(w)\}} \Big] \Big] .$$

Ahora procedemos por contradicción, es decir, supongamos que

$\|Q_2\|(\xi(,1/b)) \neq 0$.

$$\therefore \underset{a\in\bar{R}_{(1)}}{\mathrm{SUP}} \left[\underset{c\in\bar{R}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\Omega(c)}' + \underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \overline{\{w\in\Omega / c(w)=a(n)(w)\}} \right]\right] \neq 0$$

$$\therefore \underset{g\in\bar{R}_{(1)}}{\exists} \quad \underset{c\in\bar{R}}{\mathrm{INF}} \left[\overline{\Omega(c)}' + \underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \overline{\{w\in\Omega / c(w)=g(n)(w)\}} \right] \neq 0$$

$$\therefore \underset{c\in\bar{R}}{\forall} \left[\overline{\Omega(c)}' + \underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \overline{\{w\in\Omega / c(w)=g(n)(w)\}} \right] \neq 0$$

y como $T \subset \bar{R}$,

$$\underset{c\in T}{\forall} \quad \overline{\Omega(c)}' + \underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \overline{\{w\in\Omega / c(w)=g(n)(w)\}} \neq 0$$

pero, por la igualdad (*) establecida en un párrafo anterior,

$$\underset{c\in T}{\forall} \quad \overline{\Omega(c)} = \underset{e\in T}{\mathrm{SUP}} \overline{\{w\in\Omega / c(w)=e(w)\}} \geqslant \overline{\{w\in\Omega / c(w)=c(w)\}} = 1$$

$$\therefore \underset{c\in T}{\forall} \quad \overline{\Omega(c)}' = 0$$

$$\therefore \underset{c\in T}{\forall} \quad \underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{SUP}} \overline{\{w\in\Omega / c(w)=g(n)(w)\}} \neq 0$$

es decir, $\forall_{j\in J} \ \sup_{n\in \mathbb{Z}} \overline{\{w\in \Omega / P_j(w) = g(n)(w)\}} \neq 0$

$$\therefore \ \forall_{j\in J} \ \exists_{n(j)\in \mathbb{Z}} \ \overline{\{w\in \Omega / P_j(w) = g(n(j))(w)\}} \neq 0 .$$

Observemos que lo anterior define una función $n : J \longrightarrow \mathbb{Z}$

y recordemos que $\# J > \aleph_0$.

Afirmamos que $\exists_{m_0\in \mathbb{Z}} \ \# n^{-1}[\{m_0\}] > \aleph_0$.

En efecto, si $\forall_{m\in \mathbb{Z}} \ \# n^{-1}[\{m\}] \leq \aleph_0$ entonces, como

$$n^{-1}[\{m_1\}] \cap n^{-1}[\{m_2\}] = \emptyset \text{ si } m_1 \neq m_2 \text{ , y } J = \bigcup_{m\in \mathbb{Z}} n^{-1}[\{m\}] ,$$

entonces

$$\# J = \# \bigcup_{m\in \mathbb{Z}} n^{-1}[\{m\}] = \sum_{m\in \mathbb{Z}} \# n^{-1}[\{m\}] \leq \sum_{m\in \mathbb{Z}} \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$\therefore \ \# J \leq \aleph_0$, lo cual es una contradicción.

$$\therefore \ \exists_{m_0\in \mathbb{Z}} \ \# n^{-1}[\{m_0\}] > \aleph_0$$

Sea $J_0 \subset J$ tal que $J_0 = n^{-1}[\{m_0\}]$ entonces $\# J_0 > \aleph_0$, y hemos probado que $\underset{j\in J_o}{\forall} \quad A_j := \overline{\{w\in\Omega \,/\, P_j(w) = g(m_o)(w)\}} \neq 0$.

También, si $j, k \in J_o$, $j \neq k$, entonces

$$\overline{\{w\in\Omega \,/\, P_j(w) = P_k(w)\}} \cdot \left(\overline{\{w\in\Omega \,/\, P_j(w) = g(m_o)(w)\}} \cdot \overline{\{w\in\Omega \,/\, P_k(w) = g(m_o)(w)\}}\right) =$$

$$\overline{\{w\in\Omega \,/\, P_j(w) = P_k(w) \text{ y } P_j(w) = g(m_o)(w) \text{ y } P_k(w) = g(m_o)(w)\}} =$$

$$\overline{\{w\in\Omega \,/\, P_j(w) = g(m_o)(w) \text{ y } P_k(w) = g(m_o)(w)\}} = A_j \cdot A_k$$

$$\therefore \underset{j,k\in J_o,\, j\neq k}{\forall} \qquad A_j \cdot A_k \leq \overline{\{w\in\Omega \,/\, P_j(w) = P_k(w)\}} = 0$$

$$\therefore \underset{j,k\in J_o,\, j\neq k}{\forall} \qquad A_j \cdot A_k = 0 \; .$$

En resumen, $\{A_j\}_{j\in J_o}$ es una familia no numerable de elementos no nulos, ajenos dos a dos, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{B}$ es un álgebra Booleana con condición de numerabilidad.

$\therefore$ concluimos que $\| Q_2 \| (\xi(\,,1/b)) = 0$.

$$\therefore \; \|HC\|(\xi) = \underset{a\in\overline{R}_{(1)}}{\mathrm{INF}} \left[\|Q_1\|(\xi(\,,1/a)) + \|Q_2\|(\xi(\,,1/a)) \right] \leq$$

$$\leq \|Q_1\|(\xi(,1/b)) + \|Q_2\|(\xi(,1/b)) = 0+0=0 .$$

$$\therefore \quad \|HC\|(\xi)=0 .$$

por lo tanto, HC es "falsa" si $\aleph_0 < \# J < \# I$.

$\square$

3.9 Las reglas de inferencia conservan la 'veracidad'.

Exactamente, lo que aquí queremos probar es:

i) si P es "verdadera" y $P \rightarrow Q$ es "verdadera" entonces Q es "verdadera".

ii) si P es "verdadera" entonces $(X_i)P$ y $(f_i)P$ también son "verdaderas" (X_i es una variable y f_i es una variable funcional).

Comencemos probando el inciso (i).

Si P es "verdadera" y $P \rightarrow Q$ es "verdadera", entonces

$$\|P\|(\xi)=1 \quad y \quad \|P \rightarrow Q\|(\xi)=1 \quad \forall \xi \in \bar{M}$$

$$\therefore \|P\|(\xi)'=0 \quad y \quad \|P\|(\xi)'+\|Q\|(\xi)=1 \quad \forall \xi \in \bar{M}$$

$$\therefore \|Q\|(\xi)=1 \quad \forall \xi \in \bar{M}. \quad \therefore$$ Q es "verdadera".

Para probar (ii) procedemos de la misma manera:

Si P es "verdadera", entonces $\|P\|(\xi)=1 \quad \forall \xi \in \bar{M}$.

Sea $\eta \in \bar{M}$.

$$\|(X_i)P\|(\eta) = \underset{a \in \bar{R}}{INF} \|P\|(\eta({}^i/a,)) = \underset{a \in \bar{R}}{INF} 1 = 1$$

$$y \quad \|(f_i)P\|(\eta) = \underset{c \in \bar{R}_{(1)}}{INF} \|P\|(\eta(,{}^i/c)) = \underset{c \in \bar{R}_{(1)}}{INF} 1 = 1$$

ya que $\eta({}^i/a,), \eta(,{}^i/c) \in \bar{M}$.

$\therefore (X_i)P$ y $(f_i)P$ son "verdaderas".

$\square$

CAPITULO 4

Teoría Axiomática de Conjuntos

Teoría Axiomática de Conjuntos

Podemos pensar en los conjuntos intuitivos como en una estructura relacional $\mathcal{U}=\langle U,\in,=\rangle$, donde U representa a todos los conjuntos y $\in,=$ son relaciones binarias sobre U . Ignoramos todas las posibles paradojas que puedan surgir al considerar a los conjuntos como una estructura , cabe agregar que suponemos que los elementos de un conjunto son también conjuntos. Puestas las cosas de esta manera, podemos construir una teoría axiomática (sistema formal) de conjuntos; presentaremos dos sistemas formales, ZFC y NBG. Comenzaremos por describir un lenguaje de primer orden asociado a la estructura relacional $\mathcal{U}$ y enseguida especificaremos dos grupos de axiomas, uno para ZFC y uno para NBG , y las reglas de inferencia de ambos sistemas. Las razones por las cuales describimos dos sistemas son que, por un lado, ZFC (Zermelo-Fraenkel con axioma de elección) es el sistema axiomatico clásico de teoría de conjuntos y es, además, el sistema en el que Cohen trabajó para dar sus famosos resultados de independencia, y, por otro lado, NBG (Neumann- Bernays- Gödel) es un sistema interesante porque tiene la ventaja sobre ZFC de tener un número finito de axiomas; esta propiedad de NBG tiene consecuencias importantes que comentaremos mas adelante.

Nota: tradicionalmente, ZF representa el sistema ZFC sin axioma de elección.

El lenguaje de primer orden, LSET, asociado a $\mathcal{U}$ consta de:

Símbolos:

a) Una cantidad numerable de variables: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

b) Dos símbolos relacionales de aridad 2: R_1^2, R_2^2.

c) Símbolos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, (,) .

d) Símbolos de puntuación: [, ; , { , etcetera...

Reglas de formación:

a) fórmulas atómicas

Si x, y son variables entonces $R_1^2(x,y)$ y $R_2^2(x,y)$ son fórmulas atómicas.

Notación: de aquí en adelante, en lugar de $R_1^2(x,y)$ y $R_2^2(x,y)$ escribiremos $x \in y$ y $x = y$ respectivamente.

b) fórmulas bién formadas (f.b.f)

i) Si A es una fórmula atómica entonces A es f.b.f.

ii) Si A y B son f.b.f. y x es una variable, entonces: $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B, (\exists x)A, (x)A$ son f.b.f.

Axiomas y reglas de inferencia.

Axiomas Lógicos:

Si P, Q, R son f.b.f. y x es una variable entoces son axiomas:

AL1.- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$.

AL2.- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

AL3.- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$

AL4.- $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

AL5.- $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q))$.

AL6.- $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$.

AL7.- $(P \wedge Q) \rightarrow P$

AL8.- $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

AL9.- $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$

AL10.- $(x)P(x) \rightarrow P(y)$

AL11.- $(x)(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (x)Q)$ donde P no tiene ocurrencias libres de x.

AL12.- $\neg(\exists x)P \leftrightarrow (x)\neg P$.

Axiomas de Igualdad.

Como axiomas de igualdad tomamos los axiomas AI1 y AI2 del sistema SR2 expuesto en párrafos anteriores.

<u>Axiomas específicos para ZFC.</u>

Si f, x, y, z, u, v, w, t son variables distintas y $\varphi(x)$, $\psi(x,y)$ son f.b.f. entonces los siguientes son axiomas de

AE1.- Axioma de extensionalidad

$$(x)(y)((z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

AE2.- Axioma del par :

$$(x)(y)(\exists z)(u)(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)).$$

AE3.- Axioma de comprensión :

$$(x)(\exists y)((z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))).$$

AE4.- Axioma de la suma :

$$(x)(\exists y)((z)(u)((z \in u \wedge u \in x) \rightarrow z \in y)).$$

Notación, Abreviamos $(x)(x \in y \rightarrow x \in z)$ por $y \subseteq z$.

$$\neg(x=y) \text{ por } x\neq y ,$$

$$x\subseteq y \wedge x\neq y \text{ por } x\subset y ,$$

$$\neg(x\in y) \text{ por } x\notin y .$$

AE5.- Axioma del conjunto potencia

$$(x)(\exists y)((u)(u\subseteq x \rightarrow u\in y))$$

AE6.- Axioma de reemplazamiento

$$(x)[((u)(v)(w)((\Psi(u,v)\wedge\Psi(u,w))\rightarrow v=w)))\rightarrow(\exists y)((z)\ldots$$
$$\ldots(z\in y\leftrightarrow(\exists t)(t\in x\wedge\Psi(t,z))))]$$

AE7.- Axioma de infinitud

$$(\exists x)[((y)(y\notin z)\rightarrow z\in x)\wedge(u)(u\in x\rightarrow((y)(y\in w\leftrightarrow(y\in u \vee y=u))\rightarrow\ldots$$
$$\ldots w\in x))]$$

AE8.- Axioma de regularidad

$$(x)[(\exists y)(y\in x)\rightarrow(\exists z)(z\in x\wedge(v)(v\notin x \quad \vee \quad v\notin z))]$$

AE9.- Axioma de elección

Para enunciar este axioma será cómodo introducir un poco de notación:

- Abreviamos $(\exists x)f(x)\wedge[(x)(y)((f(x)\wedge f(y))\rightarrow x=y)]$ con $(\exists! x)f(x)$.
- Abreviamos $(z)[z\in x\leftrightarrow((w)(w\in z\leftrightarrow w=u)\vee(w)(w\in z\leftrightarrow(w=u\vee w=v)))]$ con $x\equiv(u,v)$
- Sea $\Psi(s,y)$ la fórmula

$$(\exists w)[s\in w\wedge(v\equiv(y,w)\wedge v\in A)]\wedge(\exists! w)[v\equiv(y,w)\wedge v\in A]$$

entonces el axioma de elección queda enunciado de la siguiente manera:

$$(x)(\exists f)[(y)(y\in x\rightarrow[(z)(z\notin y)\rightarrow((s\in t\leftrightarrow\Psi(s,y))\rightarrow t\in y)])]$$

Axiomas específicos de NBG.

En este sistema axiomático, se supone que, de manera intuitiva, las variables están destinadas a ser interpretadas como clases (objetos, no forzosamente conjuntos, cuyos elementos son conjuntos), es por esto, que de alguna manera se puede decir que NBG es mas bién una teoría de clases que una teoría de conjuntos. En realidad, se puede probar que NBG es una teoría que "contiene" propiamente a ZFC, dicho de una manera un poco mas precisa, todo teorema de ZFC es un teorema de NBG, y todo teorema de NBG que "habla" solamente de conjuntos es un teorema de ZFC.

Los axiomas de NBG son los siguientes: (x, y, z, etc... son variables, y algunas de las abreviaciones introducidas en ZFC serán utilizadas)

Abreviamos $(\exists y)(x \in y)$ con $M(x)$, "x es conjunto", (la M es por Menge= conjunto).

AG1.- Axioma de extensionalidad

$$x = y \rightarrow (x \in z \leftrightarrow y \in z).$$

AG2.- Axioma del par

$$(x)(M(x) \rightarrow (y)(M(y) \rightarrow (\exists z)(M(z) \wedge (u)(M(u) \rightarrow (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))))))$$

AG3.- Axioma del conjunto nulo (este axioma es consecuencia del resto de los axiomas, sin contar a AG6)

$$(\exists x)(M(x) \wedge (y)(M(y) \rightarrow y \notin x))$$

AG4.- Axioma del conjunto suma

$$(x)(M(x) \rightarrow (\exists y)(M(y) \wedge (u)(M(u) \rightarrow (u \in y \leftrightarrow (\exists v)(M(v) \wedge u \in v \wedge v \in x)))))$$

AG5.- Axioma del conjunto potencia

$$(x)(M(x) \rightarrow (\exists y)(M(y) \wedge (u)(M(u) \rightarrow (u \in y \leftrightarrow u \subseteq x))))$$

AG6.- Axioma de intersección de clases y conjuntos (este axioma es consecuencia del resto de los axiomas sin contar AG3)

$$(x)(M(x) \rightarrow (y)(\exists z)(M(z) \wedge (u)(M(u) \rightarrow (u \in z \leftrightarrow (u \in x \wedge u \in y)))))$$

Notación:

a) Abreviamos $((M(x) \wedge M(y) \wedge (u)(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)))$

$\vee (\neg M(x) \wedge \neg (M(y)) \wedge (u)(u \notin z)))$

con $z \equiv \{x, y\}$, " z es el par no ordenado de x, y "

b) Abreviamos $((\exists x)(\exists y)(z \equiv \{x, y\} \wedge x \equiv \{u, u\} \wedge y \equiv \{u, v\}))$

con $z \equiv (u, v)$, " z es el par ordenado (u, v) "

c) Abreviamos $((\exists x)(z \equiv (x, v) \wedge x \equiv (t, u)))$

con $z \equiv (t, u, v)$, " z es la tercia ordenada (t, u, v) " .

AG7.- Axioma de reemplazamiento

$$(x)(((u)(M(u) \rightarrow (\exists \ell)(((\exists! v)(M(v) \wedge \ell \equiv (u, v) \wedge \ell \in x))))) \rightarrow$$

$$(u)(M(u) \rightarrow (\exists v)(M(v) \wedge (t)(M(t) \rightarrow (t \in v \leftrightarrow$$

$$(\exists w)(w \in u \wedge m \equiv (w, t) \wedge m \in x)))))) .$$

Observación: este axioma ha sido enunciado de manera especial para que aparezca como axioma y no como esquema axiomático (comparese con el axioma AE6 de ZFC).

Axiomas de existencia de clases :

El siguiente grupo de axiomas tiene como principal objeto sustituir el esquema axiomático de comprensión, para que el número de axiomas de NBG sea finito, siendo esta cualidad la mas valiosa de este sistema.

AG8.1.- $(\exists x)(y)(y \in x \leftrightarrow ((\exists u)(\exists v)(M(u) \wedge M(v) \wedge y \equiv (u, v) \wedge u \in v)))$.

"Existe una clase X cuyos elementos son precisamente parejas de conjuntos (u, v) tales que $u \in v$ ".

AG8.2.- $(x)(y)(\exists z)(u)(M(u) \rightarrow (u \in z \leftrightarrow (u \in x \wedge u \in y)))$

"Para todo par de clases X, Y existe una clase Z cuyos elementos que son conjuntos son precisamente aquellos que pertenecen a ambas clases".

AG8.3.- $(x)(\exists z)(u)(M(u) \rightarrow (u \in z \leftrightarrow u \notin x))$.

"Para toda clase X existe otra clase Z cuyos elementos que son conjuntos, son precisamente aquellos que no pertenecen a X ".

AG8.4.- $(x)(\exists z)(u)(M(u) \rightarrow (u \in z \leftrightarrow (\exists \ell)(\exists v)(M(v) \wedge \ell \equiv (u,v) \wedge \ell \in x)))$

"Para toda clase X existe otra clase Z cuyos elementos, que son conjuntos, son precisamente aquellos que son el primer elemento de alguna pareja de conjuntos que es elemento de X . En resumen, el dominio de una clase es una clase".

AG8.5.- $(x)(\exists z)(\ell)(\ell \in z \leftrightarrow ((\exists u)(\exists v)(M(u) \wedge M(v) \wedge \ell \equiv (u,v) \wedge u \in x)))$.

"Para toda clase X existe una clase Z cuyos elementos, que son conjuntos, son precisamente aquellos que son alguna pareja de conjuntos cuyo primer elemento pertenece a X ".

AG8.6.- $(x)(\exists z)(\ell)(\ell \in z \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(\exists w)(\exists y)$

$$(M(u) \wedge M(v) \wedge M(w) \wedge \ell \equiv (u, v, w) \wedge y \in x \wedge y \equiv (w, u, v)))$$

"Dada una clase X , existe una clase Z cuyos elementos son 'rotaciones a la izquierda' de tercias de conjuntos que pertenecen a X " .

AG8.7.- $(x)(\exists z)(\ell)(\ell \in z \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(\exists w)(\exists y)$

$$(M(u) \wedge M(v) \wedge M(w) \wedge \ell \equiv (u,v,w) \wedge y \in X \wedge y \equiv (u,w,v)))$$

"Dada una clase X existe una clase z cuyos elementos son 'permutaciones' de tercias de conjuntos que pertenecen a X"

AG9.- Axioma de infinitud

$$(\exists x)(M(x) \wedge (y)((M(y) \wedge (z)(z \notin y)) \rightarrow y \in X) \wedge$$

$$(u)(w)(M(u) \rightarrow (u \in X \rightarrow ((v)(v \in w \leftrightarrow (v \in u \vee v = u)) \rightarrow w \in X))$$

AG10.- Axioma de elección

$$(\exists x)(y)(M(y) \rightarrow ((\exists v)(v \in y) \rightarrow (\exists! u)(u \in y \wedge (\ell)(\ell \equiv (y,u) \rightarrow \ell \in X)))).$$

Reglas de Inferencia.

Como reglas de inferencia tomamos las de costumbre, que son:

1) Modus ponens: φ es consecuencia de $\psi \rightarrow \varphi$ y ψ .

2) Generalización: $(x)\varphi$ es consecuencia de φ .

Términos Clase.

Cuando sea necesario, usaremos abreviaciones de ciertas fórmulas de ZFC que recuerdan la notación que generalmente se utiliza en la teoría de conjuntos intuitivas.

Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ son f.b.f. que tienen a x como posible y única variable libre y z, y, w son variables, entonces "abreviamos" :

1) $\varphi(z)$ por $z \in \{x / \varphi(x)\}$

2) $(\exists y)[y \in w \wedge (z)(z \in y \leftrightarrow \varphi(z))]$ por $\{x / \varphi(x)\} \in w$

3) $(\exists y)[\psi(y) \wedge (z)(z \in y \leftrightarrow \varphi(z))]$ por $\{x / \varphi(x)\} \in \{x / \psi(x)\}$.

Observaciones :

1.- De acuerdo con lo anterior, el símbolo $\in$ tendrá dos papeles, uno como símbolo del lenguaje, y el otro como abreviación, pero este hecho no creará confusiones, ya que $\in$ juega el papel de abreviación solamente cuando aparece junto a $\}$ o a $\{$.

2.- Las cadenas de la forma $\{x / \varphi(x)\}$ son conocidas como términos clase. El sentido de esto es que si se consideran como elementos del lenguaje suceptibles a interpretación, podrán ser interpretados como clases (objetos, no necesariamente conjuntos, cuyos elementos son conjuntos.).

3.- De aquí en adelante, cuando digamos que "una metavariable de M denota a una variable de ZF ", en lo que estaremos pensando realmente es que si el contexto lo permite, " M denota a una variable de ZF o denota a un término clase".

Las definiciones, sobre todo las que son por inducción, y los teoremas de ZF correspondientes a la teoría axiomática de conjuntos, se dan y se usan de manera pseudoformal. Además, damos por hecho, que para cada resultado básico de la teoría intuitiva, contamos con un teorema equivalente en ZF y usaremos estos teoremas sin ningún prejuicio. Para un tratamiento estrictamente formal de los teoremas de la teoría axiomática de conjuntos, consultar el libro de Takeuti "Introduction to Axiomatic Set Theory".

Modelos.

En la sección anterior, hemos presentado a ZFC como una teoría de primer orden que axiomatiza la teoría intuitiva de conjuntos. El siguiente paso es hablar de modelos de ZFC.
La manera en que se hará esto es la que se supone conocida, es decir, consideramos a los modelos como estructuras del tipo

$$\mathfrak{a} = \langle A, R_1^2, R_2^2 \rangle$$

donde A es un conjunto o una clase, (objeto no necesariamente conjunto, cuyos elementos son conjuntos), y R_1^2, R_2^2 son relaciones binarias sobre A destinadas a interpretarse como pertenencia e igualdad respectivamente. A continuación, definimos de manera recursiva $\mathfrak{a} \models \varphi$ ($\mathfrak{a}$ realiza a φ).

4.1 Supongamos que $\mathfrak{a} = \langle A, P, I \rangle$ es una estructura relacional, donde A es una clase, y P, I son relaciones binarias sobre A, es decir, $P, I \subseteq A^2$, y supongamos que φ, ψ son f.b.f. de ZFC, que x_i, x_j son variables, y que

$$\partial = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in A^\omega$$

entonces definimos

1) $\mathfrak{a} \models_{\partial} x_i \in x_j$ sii $(a_i, a_j) \in P$

2) $\mathfrak{a} \models_{\partial} x_i = x_j$ sii $(a_i, a_j) \in I$

3) $\mathfrak{a} \models_{\partial} \neg \varphi$ si no es cierto que $\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi$ $(\mathfrak{a} \not\models_{\partial} \varphi)$

$\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi \wedge \psi$ sii $\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi$ y $\mathfrak{a} \models_{\partial} \psi$

$\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi \vee \psi$ sii $\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi$ o $\mathfrak{a} \models_{\partial} \psi$

$\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi \rightarrow \psi$ sii $\mathfrak{a} \not\models_{\partial} \varphi$ o $\mathfrak{a} \models_{\partial} \psi$.

$\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi \longleftrightarrow \psi$ sii $\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi \rightarrow \psi$ y $\mathfrak{a} \models_{\partial} \psi \rightarrow \varphi$

$\mathfrak{a} \models_{\partial} (x_i)\, \varphi$ sii $\forall a \in A$ $\mathfrak{a} \models_{\partial(i/a)} \varphi$

donde $\partial(i/a) = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots)$

$\mathfrak{a} \models_{\partial} (\exists x_i)\, \varphi$ sii $\exists a \in A$ $\mathfrak{a} \models_{\partial(i/a)} \varphi$

$\mathfrak{a} \models_{\partial} \varphi$ se lee $\mathfrak{a}$ realiza a φ en ∂.

Decimos que $\mathfrak{a} \models \varphi$, $\mathfrak{a}$ realiza a φ, sii $\forall_{a \in A^{\omega}}\ \mathfrak{a} \models_{a} \varphi$.
También decimos que es modelo de sii

$$\mathfrak{a} \models \varphi \quad \forall \text{axioma } \varphi \text{ de ZFC}.$$

Observación : La definición de modelo que hemos adoptado, esta hecha a un nivel metalingüistico mayor con respecto al lenguaje de ZFC, y es, por tanto, una definición semántica.

Hemos hecho esta observación, porque en ZFC es posible "definir" el concepto de satisfactibilidad, es decir, para cada f.b.f. φ **de ZFC existe una fórmula** $S_{\varphi}(M, P, I)$ **(** M, P, I **términos clase), que intuitivamente dice que** $\langle M, P, I\rangle \models \varphi$ **pero, desgraciadamente, aún fijando las variables** que aparecen **en los esquemas axiomáticos de ZFC (por ejemplo, tomando** $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ **en lugar de** f, x, y, z, v, r, w **) los axiomas de comprensión y de reemplazamiento permanecen como esquemas, y por lo tanto, el número de axiomas de ZFC es infinito.**

Este hecho es importante , **ya que si el número de** axiomas de ZFC hubiera sido finito, por ejemplo $A_1, \ldots, A_n$, podríamos haber tomado las fórmulas $S_{A_1}(M, P, I), S_{A_2}(M, P, I), \ldots, S_{A_n}(M, P, I)$ y juntarlas en la fórmula $S_{A_1}(M, P, I) \wedge S_{A_2}(M, P, I), \ldots, S_{A_n}(M, P, I)$ que dice que $\langle M, P, I\rangle$ es un modelo de ZFC.

Pero no es este el caso, y si queremos una fórmula $\Psi(M,P,I)$ de ZFC que "diga" que $\langle M,P,I\rangle$ es modelo de ZFC, entonces sería necesario que "aritmetizaramos" el lenguaje de ZFC (haciendo esto, las fórmulas de ZFC serán números) para así tener una fórmula $\xi(x,y)$ en ZFC que exprese la función de la metateoría

$$R(x) : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$$

tal que

$$R(x) = 1$$

si x es el número de una instancia de esquema axiomático de reemplazamiento

$$R(x) = 0 \quad \text{si no}$$

y, de esta manera, la fórmula

$$(x)\left(\left(x \in W \wedge \xi(x, \bar{1})\right) \rightarrow S_{g^{-1}(x)}(M,P,I)\right)$$

donde $g^{-1}(x)$ es la fórmula cuyo número es x, "diría" que $\langle M,P,I\rangle \models$ "Axioma de Reemplazamiento" y, de la misma manera tendríamos que construir una fórmula para decir que $\langle M,P,I\rangle \models$ "Axioma de comprehensión".

Finalmente, haciendo la conjunción de las fórmulas de satisfactibilidad obtenidas para cada axioma, tendríamos una fórmula en ZFC que "diría"

$$\langle M,P,I\rangle \models ZFC .$$

En cambio, NBG tiene un número finito de axiomas, y también para cada fórmula φ de NBG, existe una fórmula $S_\varphi(M,P,I)$ (M, P, I variables) que "dice" que $\langle M,P,I\rangle \models \varphi$ y, por lo tanto, existe una fórmula en NBG, la conjunción de $S_{A_1}(M,P,I), \ldots, S_{A_n}(M,P,I)$ donde $A_1, \ldots, A_n$ son los axiomas de NBG, que dice que $\langle M,P,I\rangle \models NBG$.

A pesar de la considerable "ventaja" de NBG sobre ZFC, este último se sigue utilizando, tal vez por tradición y, en algunos casos, predilección, por ejemplo, uno podría pregintarse porque Cohen, que trabajó con ZFC, y no con NBG; la respuesta que el mismo Cohen da, es que, a su modo de ver, NBG "es menos natural" que ZFC.

En lo que sigue, detallaremos un poco más como se define el concepto de modelo dentro del sistema ZFC.

Modelos en ZFC.

El objetivo principal es : dada una fórmula φ , definir una fórmula $S_\varphi(M,P,I)$ con variables libres M, P, I (modelo pertenencia e igualdad) que diga que $\langle M,P,I\rangle \models \varphi$.

Esto lo haremos de manera recursiva según el número de conectivos que aparezcan en φ .

1) $\langle M,P,I\rangle \models x \in y$ es una abreviación de la fórmula

$$x \in M \wedge y \in M \wedge (\ell)(\ell \equiv (x,y) \rightarrow \ell \in P)$$

$\langle M,P,I\rangle \models x = y$ es una abreviación de la fórmula

$$x \in M \wedge y \in M \wedge (\ell)(\ell \equiv (x,y) \rightarrow \ell \in I).$$

2.- Si μ y ψ son fórmulas, entonces

a) $\langle M, P, I \rangle \models \mu \wedge \psi$ es una abreviación de la fórmula

$$\langle M, P, I \rangle \models \mu \wedge \langle M, P, I \rangle \models \psi$$

b) $\langle M, P, I \rangle \models \mu \vee \psi$ es una abreviación de la fórmula

$$\langle M, P, I \rangle \models \mu \vee \langle M, P, I \rangle \models \psi .$$

c) $\langle M, P, I \rangle \models \neg \mu$ es una abreviación de la fórmula

$$\neg \langle M, P, I \rangle \models \mu$$

d) $\langle M, P, I \rangle \models \mu \rightarrow \psi$ es una abreviaciób de la fórmula

$$\langle M, P, I \rangle \models \mu \rightarrow \langle M, P, I \rangle \models \psi$$

e) $\langle M, P, I \rangle \models \mu \leftrightarrow \psi$ es una abreviación de la fórmula

$$\langle M, P, I \rangle \models \mu \longleftrightarrow \langle M, P, I \rangle \models \psi$$

f) $\langle M, P, I \rangle \models (x)\ \psi$ es una abreviación de la fórmula

$$(x)(x \in M \rightarrow \langle M, P, I \rangle \models \psi)$$

g) $\langle M, P, I \rangle \models (\exists x)\ \psi$ es una abreviación de la fórmula

$$(\exists x)(x \in M \wedge \langle M, P, I \rangle \models \psi)$$

En el caso en que P sea $\in/M$ e I sea $=/M$, escribiremos $M \models \varphi$ en lugar de $\langle M, P, I \rangle \models \varphi$.

Observación.- Cuando σ es un enunciado, la fórmula $M \models \sigma$ es equivalente a la fórmula que defina Cohen en "Set theory and the continuum hypothesis" como relativización de σ a M.

A continuación, escribimos la definición que da Cohen de relativización :

4.2 Def .- Si $P(x)$ es una fórmula con una variable libre, entonces, para cada fórmula φ definimos en forma recursiva, la relativización de φ a P, φ_P como :

1.- Si $\varphi = v \in v$ entonces $\varphi_P = \varphi$

Si $\varphi = v = v$ entonces $\varphi_P = \varphi$

2.- Si $\varphi = A \ominus B$ donde $\ominus$ es un conectivo lógico, entonces

$$\varphi_P = (A_P) \ominus (B_P)$$

3.- Si $\varphi = (x)\psi$ entonces $\varphi_P = (x)(P(x) \to \psi_P)$

Si $\varphi = (\exists x)\psi$ entonces $\varphi_P = (\exists x)(P(x) \wedge \psi_P)$

Con la ayuda del concepto de relativización de una fórmula, podemos definir satisfactibilidad de otra manera :

4.3 Def .- Si $C = \{x / P(x)\}$ y σ es un enunciado, abreviamos σ_P con $C \models \sigma$ o con σ_C.

Aclaración.- Usaremos el símbolo $\models$ con el siguiente significado que se dió en la primera definición. Más adelante, usaremos otra vez este símbolo para definir expresiones del tipo $V^B \models \varphi$, pero como siempre, esto no es motivo de preocupación, ya que el significado será según el contexto.

Necesitaremos también la siguiente definición :

4.4 Def .- Si M , P , I , son variables (clases) entonces $\langle M,P,I\rangle \nvDash \varphi$ es una abreviación de $\neg(\langle M,P,I\rangle \vDash \varphi)$

Como habíamos comentado antes, debido a que ZF tiene una infinidad de axiomas, esta noción de sayisfactibilidad $\vDash$ no es suficiente para construir una fórmula de ZF que "diga" que una estructura $\langle M,P,I\rangle$ dentro de ZF es modelo de ZF , es decir, no existe en ZF una fórmula "$\langle M,P,I\rangle \vDash ZF$", sin embargo, haciendo una mezcla entre el nível sintáctico y el semántico, podemos definir, de forma más o menos satisfactoria, que significa que una estructura $\langle M,P,I\rangle$ dentro de ZF sea modelo de ZF :

Def .- Si M , P , I ; son variables de ZF , decimos que $\langle M,P,I\rangle$ es un modelo dentro de ZF de ZF sii para todo axioma φ de ZF se tiene que $ZF \vdash (\langle M,P,I\rangle \vDash \varphi)$.

Modelos Booleanos.

Existen varias maneras de llegar al concepto de Forcing, una de ellas es a través del álgebra, especificamente, a través de los modelos booleanos.

Empezaremos describiendo el concepto de Modelo Booleano a través de la idea de la función caracteristica.

En lo que sigue , al mencionar la palabra conjunto, nos estaremos refiriendo a la idea intuitiva que cada uno de nosotros tiene de conjumto, es decir, estaremos pensando en el modelo intuitivo $\mathcal{U}=\langle \mho, P, I \rangle$.

Como es sabido, a cada conjunto X se le puede asociar una función caracteristica:

$$c_X : \mho \rightarrow \{0,1\} \quad \ni \quad c_X(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in X \\ 0 & \text{si } a \notin X \end{cases}$$

De esta manera, puesto que c_X y X son recuperables cada uno a través del otro, podemos pensar en $\mho$ como en la clase ${}^c\mho$ de las funciones caracteristicas de los conjuntos. El único defecto de este punto de vista es que no es independiente del punto de vista anterior en el siguiente sentido: si en un momento dado quisieramos saber, por ejemplo, si el conjunto representado por c_Y es elemento del conjunto representado por c_X , tendríamos que averiguar cual es el conjunto que representa c_Y , es decir, tendríamos que encontrar Y (estamos suponiendo que solamente contamos con las funciones c_X y c_Y) y entonces, al aplicar c_X a Y sabriamos si el conjunto representado por c_Y pertenece al conjunto representado por c_X .

La solución a este problema es en cierta manera natural, lo que hace falta es modificar ligerámente C_X de la siguiente manera:

Ahora C_X ya no tendrá valor 1 en los elementos de X sino que tendrá valor 1 en las funciones que representan a los elementos de X. De esta manera, la modificación C'_X de C_X es:

$$C'_X : {}^{C}\mathcal{U} \longrightarrow \{0,1\} \;\ni\; C'_X(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = C_y \text{ p.a. } y \in X \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ya que hemos obtenido la C'_X correspondiente a cada conjunto X, podemos considerar la clase $\mathcal{U}^2$ de todas las funciones C'_X. Llamaremos a los elementos de $\mathcal{U}^2$ conjuntos 2-valuados.

Como decíamos anteriormente, $\mathcal{U}^2$ es una copia de $\mathcal{U}$ con la siguiente propiedad: Para decidir si un conjunto 2-valuado X pertenece a otro conjunto 2-valuado Y, solamente hay que calcular el valor de Y en X.

Así, los conjuntos 2-valuados son funciones con valores en $\{0,1\}$ y cuyo dominio consiste a su vez de conjuntos 2-valuados (existe una cierta analogía entre este hecho y el de que los conjuntos consisten de elementos que a su vez son conjuntos). Enseguida se nota que hay un matiz recursivo en la naturaleza de los conjuntos 2-valuados, esto sugiere que podríamos haber comenzado definiendo $\mathcal{U}^2$ recursivamente.

El tratamiento recursivo de las cosas en la teoría de conjuntos es muy cómodo aunque se pierde un poco la orientación que da el pensamiento intuitivo, a continuación definimos $\mathcal{U}^2$ recursivamente.

Para todo $\alpha \in ON$ definimos

$$\mathcal{U}^2_\alpha = \{ x \,/\, x : A \longrightarrow 2 \ \text{ y } A \subset \mathcal{U}^2_\xi \ \text{ p.a. } \xi < \alpha \}.$$

y definimos

$$\mathcal{U}^2 = \bigcup_{\alpha \in ON} \mathcal{U}^2_\alpha$$

El siguiente paso es sustituir 2 por un algebra Booleana completa $\mathcal{B}$. Intuitivamente, lo que se logra hacer con esto, es "extender" la noción del concepto de pertenencia en el sentido de que al existir (probablemente) más opciones, aparte de 0 y 1, se puede pensar en grados intermedios de pertenencia de un elemento en un conjunto.

Así definimos:

$$\mathcal{U}^B_\alpha = \{x / x : A \to B \text{ y } A \subset \mathcal{U}^B_\xi \text{ p.a. } \xi < \alpha\} \quad \forall \alpha \in ON$$

$$\mathcal{U}^B = \bigcup_{\alpha \in ON} \mathcal{U}^B_\alpha$$

El objetivo inicial, era decir lo que entendemos por modelo Booleano de la teoría axiomatica de conjuntos, y lo que hemos hecho hasta ahora es: Dada un algebra Booleana completa fija, describir $\mathcal{U}^B$. $\mathcal{U}^B$ será tomado como la base del modelo $\mathfrak{U}^B = \langle \mathcal{U}^B, I^B, P^B \rangle$ al cual llamaremos "Modelo B-valuado de la teoría de conjuntos". Estando en este punto, lo que nos falta hacer es definir, de la manera más natural, las relaciones I^B y P^B que están destinadas a ser pensadas, especificamente, como "igualdad" y "pertenencia" en $\mathcal{U}^B$. El camino que seguiremos para definir dichas relacionesn no es del todo directo, pero procura ser lo más natural posible.

4.6 Definición.-

Si $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in ON \times ON$ ent.

$$(\alpha_1, \alpha_2) < (\beta_1, \beta_2) \quad \text{sii}$$

$$\max(\alpha_1,\alpha_2) < \max(\beta_1,\beta_2) \quad \text{ó}$$

$$\max(\alpha_1,\alpha_2) = \max(\beta_1,\beta_2) \ \text{y} \ \alpha_1 < \beta_1 \quad \text{ó}$$

$$\max(\alpha_1,\alpha_2) = \max(\beta_1,\beta_2) \ \text{y} \ \alpha_1 = \beta_1 \ \text{y} \ \alpha_2 < \beta_2$$

4.1 Afirmación.- $<$ bien ordena a $ON \times ON$

Dem:

(i) $\forall_{(\alpha,\beta)\in ON\times ON}$ $(\alpha,\beta) \nless (\alpha,\beta)$ ya que

$\max(\alpha,\beta) = \max(\alpha,\beta)$ y $\alpha=\alpha$ y $\beta=\beta$.

(ii) Si $(\alpha_1,\beta_1) < (\alpha_2,\beta_2)$ y $(\alpha_2,\beta_2) < (\alpha_3,\beta_3)$

entonces, para ver que $(\alpha_1,\beta_1) < (\alpha_3,\beta_3)$ es necesario analizar 9 casos posibles. Como ejemplo, solamente analizaremos uno de ellos, los demás son igualmente sencillos.

Supongamos que

$$\max(\alpha_1,\beta_1) < \max(\alpha_2,\beta_2) \ \text{y} \ \max(\alpha_2,\beta_2) = \max(\alpha_3,\beta_3)$$

y $\alpha_2 < \alpha_3$ $\quad\therefore\ \max(\alpha_1,\beta_1) < \max(\alpha_2,\beta_2) = \max(\alpha_3,\beta_3)$

$\therefore\ (\alpha_1,\beta_1) < (\alpha_3,\beta_3)$

(iii) Sean $(\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2) \in ON \times ON$

Como ON está bién ordenado, tenemos que:

$\max(\alpha_1,\beta_1) < \max(\alpha_2,\beta_2)$ ó $\max(\alpha_2,\beta_2) < \max(\alpha_1,\beta_1)$

ó $\max(\alpha_1,\beta_1) = \max(\alpha_2,\beta_2)$

Si se diera cualquiera de los dos primeros casos, tendriamos

$$(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2) \quad \acute{o} \quad (\alpha_2, \beta_2) < (\alpha_1, \beta_1)$$

$\therefore$ sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\alpha_1 = \max(\alpha_1, \beta_1) = \max(\alpha_2, \beta_2) = \alpha_2$$

como $\beta_1 < \beta_2$ ó $\beta_2 < \beta_1$ ó $\beta_1 = \beta_2$, forzosamente

$$(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2) \ \acute{o}\ (\alpha_2, \beta_2) < (\alpha_1, \beta_1) \ \acute{o}\ (\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2).$$

(iv) Sea $A \subset ON \times ON$, $A \neq \emptyset$, ent.

consideremos la clase

$$A_1' = \{\max(\alpha, \beta) / (\alpha, \beta) \in A\} \subset ON$$

$\therefore A_1' \neq \emptyset$, $\therefore A_1'$ tiene elemento mínimo.

Sea $a_1 = \min A_1'$

Sea $A_1 = \{(\alpha, \beta) \in A / \max(\alpha, \beta) = a_1\} \subset A$

Si A_1 consta de un solo elemento, entonces, este será el mínimo de A. Si A_1 consta de más de un solo elemento, entonces consideramos la clase

$$A_2' = \{x \in ON / (x, y) \in A_1 \ \text{p.a.}\ y \in ON\} \neq \emptyset$$

y sea $a_2 = \min A_2'$

Si la clase $A_2=\{(\alpha,\beta)\in A/\alpha=a_2\}\subset A_1$ consta de un solo elemento, entonces, este será el elemento mínimo de A.

Si A_2 consta de más de un elemento, consideremos la clase

$$A_3'=\{y\in ON/(x,y)\in A_2 \text{ p.a. } x\in ON\}$$

y sea $a_3=\min A_3'$.

Por último, consideremos la clase

$$A_3=\{(\alpha,\beta)\in A_2/\ \beta=a_3\}\subset A_2$$

A_3 tiene un solo elemento, porque

$$(x,y)\in A_3\rightarrow(y=a_3 \text{ y } (x,y)\in A_2)\rightarrow$$

$$\rightarrow(y=a_3 \text{ y } x=a_2\rightarrow(x,y)=(a_2,a_3))$$

$\therefore$ (a_2,a_3) será el mínimo de A

$\therefore$ $<$ bien ordena a $ON\times ON$

($<$ es conocido como el orden canónico de $ON\times ON$)

Haber definido el orden canónico de $ON\times ON$ es importante porque hay casos en los que es necesario definir un concepto que depende, o está relacionado con parejas de ordinales. En estos casos, la recursividad es una herramienta poderosa y, una vez definido el orden canónico en $ON\times ON$ podemos hacer uso de ella.

4.7 **Definición** .- Para todo conjunto $\mathcal{B}$ -valuado $x\in V^{B}$ definimos el rango de x, $\rho(x)$, de la siguiente manera:

$$\rho(x)=\mathrm{MIN}\{\alpha\in ON/\ x\in V^{B}_{\alpha+1}\}$$

4.8 **Definición .- Para todo $(x,y) \in U^{B} \times U^{B}$ definimos por recursión sobre $(\rho(x), \rho(y))$, lo siguiente:**

$$N_{\in}(x,y) = \sup_{z \in DOM(y)} (y(z) \cdot N_{=}(z,x))$$

$$N_{=}(x,y) = \inf_{z \in DOM(x)} (x(z) \rightarrow N_{\in}(z,y)) \cdot \inf_{z \in DOM(y)} (y(z) \rightarrow N_{\in}(z,x))$$

Observación acerca de las dos definiciones anteriores:

Se puede pensar en $\rho(x)$ como en el "nivel" al que pertenece X en la construcción de U^{B}, es decir, $\rho(x)$ es el "momento" en el cual es construido X. Se puede probar, directamente, a partir de las definiciones de $\rho(x)$ y de U_{α}^{B}, que si $x \in DOM(y)$ entonces $\rho(x) < \rho(y)$, además:

(a) Si $z \in DOM(y)$ ent $\rho(z) < \rho(y)$ y por lo tanto

$(\rho(z), \rho(x)) < (\rho(x), \rho(y))$ ya que

(1) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(x)$ y $\rho(z) < \rho(y) \rightarrow$

$\rightarrow (\max\{\rho(z), \rho(x)\} = \rho(x)$ y $\rho(z) < \rho(x))$

(2) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(y)$ y $\max\{\rho(z), \rho(x)\} = \rho(z)$ y

$\rho(z) < \rho(y) \rightarrow \max\{\rho(z), \rho(x)\} < \max\{\rho(x), \rho(y)\}$

(3) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(y)$ y $\max\{\rho(z), \rho(x)\} = \rho(x)$ y

$\rho(x) \neq \rho(y) \rightarrow \max\{\rho(z), \rho(x)\} = \rho(x) < \rho(y) = \max\{\rho(x), \rho(y)\}$

(4) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(y)$ y $\max\{\rho(z), \rho(x)\} = \rho(x)$ y $\rho(x) = \rho(y)$

se reduce al caso (1)

(b) Si $z \in DOM(X)$ ent $\rho(z) < \rho(X)$ y por lo tanto

$(\rho(z), \rho(y)) < (\rho(x), \rho(y))$ ya que

(1) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(y)$ y $\rho(z) < \rho(x) \rightarrow$

$\rightarrow \max\{\rho(x), \rho(y)\} = \max\{\rho(z), \rho(y)\}$ y $\rho(z) < \rho(x)$

(2) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(x)$ y $\max\{\rho(z), \rho(y)\} = \rho(z)$ y

$\rho(z) < \rho(x) \rightarrow \max\{\rho(z), \rho(y)\} < \max\{\rho(x), \rho(y)\}$

(3) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(x)$ y $\max\{\rho(z), \rho(y)\} = \rho(y)$ y

$\rho(x) \neq \rho(y) \rightarrow \max\{\rho(z), \rho(y)\} = \rho(y) < \rho(x) = \max\{\rho(x), \rho(y)\}$

(4) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(x)$ y $\max\{\rho(z), \rho(y)\} = \rho(y)$ y $\rho(x) = \rho(y)$

se reduce al caso (1)

Por lo tanto, la definición de $N_{\in}$ **y** $N_{=}$ **es correcta.**

Como quizá se habrá notado, la **definición de** $N_{\in}$ **y** $N_{=}$ **está orientada para satisfacer los siguientes requisitos naturales**

1.- Por supuesto, si $x \in DOM(Y)$ **, un valor deseable de** $N_{\in}(x,y)$**es** $Y(x)$ **(la "medida" del** grado **de pertenencia de** x **en ,**

pero podría darse el caso de que existiera una $x' \in DOM(Y)$ tal que la "medida" del grado de igualdad de X' y X fuera "bastante" grande ($N_\epsilon(x,y) \gg 0$) y que $Y(x') > Y(x)$, en este caso, si hubieramos tomado $N_\epsilon(x,y) = Y(x)$, estaríamos subestimando, de alguna manera, la "medida" del grado de pertenencia de X en Y. Para evitar que esto suceda, lo que se hace, es buscar, en $DOM(Y)$, la z que simultaneamente maximice $Y(z)$ y $N_=(z,x)$.

En símbolos

$$N_\epsilon(x,y) = \underset{z \in DOM(Y)}{SUP} (Y(z) \cdot N_=(z,x))$$

Cabe hacer notar, que al definir $N_\epsilon(x,y)$ de esta manera, abarcamos también el caso en que $x \notin DOM(Y)$.

2.- De la misma manera en que la definición de $N_\epsilon(x,y)$ se apoya en la definición de $N_=(u,v)$ para $(u,v) < (x,y)$, la definición de $N_=$ también se apoya en la definición de N_ϵ.

Como estamos pensando en $N_=(x,y)$ como en la "medida" del grado de igualdad de X y Y, y como de alguna manera X y Y son conjuntos (conjuntos B -valuados), lo más natural es que la "medida" del grado de igualdad de X y Y dependa de la "medida" del grado de pertenencia entre u y Y ($u \in DOM(x)$) y de la "medida" del grado de pertenencia entre v y X ($v \in DOM(Y)$) - recordamos que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$)

Hechas estas consideraciones, la definición

$$N_=(x,y) = \underset{z \in DOM(x)}{INF} (x(z) \to N_\epsilon(z,y)) \cdot \underset{z \in DOM(Y)}{INF} (Y(z) \to N_\epsilon(z,x)).$$

resulta natural.

3.- Como el objetivo es construir un modelo de la teoría axiomática de conjuntos, y como $N_\in$ y $N_=$ están pensadas como "pertenencia" e "igualdad", es natural pedir que la definición de $N_\in(x,y)$ y $N_=(x,y)$ sean un reflejo de dos fórmulas que son teoremas de la teoría. estas fórmulas son:

$$x \in y \longleftrightarrow (\exists z)(z \in y \wedge z = x)$$

$$x = y \longleftrightarrow (z)(z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z)(z \in y \rightarrow z \in x)$$

Hemos definido las funciones anteriores con el propósito de definir las relaciones P^B (pertenencia) e I^B (igualdad) en V^B y así tener complta la estructura $\mathcal{U}^B = \langle V^B, P^B, I^B \rangle$. Más tarde, veremos que $\mathcal{U}^B \models ZF$ para toda álgebra Booleana B .

4.9 Definición .- Si X y Y son conjuntos B -valuados entonces

$$(x,y) \in P^B \quad \text{sii} \quad N_\in(x,y) = 1$$

$$(x,y) \in I^B \quad \text{sii} \quad N_=(x,y) = 1$$

Para B fija, $\mathcal{U}^B$ es conocido como el modelo B -valuado de ZF y se dice que $\mathcal{U}^B$ es un modelo Booleano de ZF .

Para aclarar un poco más el concepto de $\mathcal{U}^B$, damos a continuacon algunos ejemplos.

(1) $U^B_\emptyset = \emptyset$

(2) $U^B_{\{\emptyset\}} = \{x / x : A \rightarrow B \text{ y } A \subset \emptyset\} = \{x / x : \emptyset \rightarrow B\}$

$\therefore U^B_{\{\emptyset\}} = \{\emptyset\}$ ($\emptyset$ es la función vacía, la inclusión de $\emptyset$ en B)

(3) $\mho^{B}_{\{\phi,\{\phi\}\}} = \{x / x : A \longrightarrow B \text{ y } (A \subset \phi \text{ o } A \subset \{\phi\})\} =$

$= \{x / x : \phi \longrightarrow B \text{ ó } x : \{\phi\} \longrightarrow B\}$

denotemos por $\{\phi\}_b$ **a la función** $x : \{\phi\} \longrightarrow B \ni x(\phi) = b$

entonces

$$\mho^{B}_{\{\phi,\{\phi\}\}} = \{x / x = \{\phi\}_b \text{ p.a. } b \in B\} \cup \{\phi\}$$

(4) $N_=(\phi, \phi) = \underset{z \in DOM(\phi) = \phi}{INF} (\phi(z) \to N_\in(z,\phi)) \cdot \underset{z \in DOM(\phi) = \phi}{INF} (\phi(z) \to N_\in(z,\phi)) =$

$= 1 \cdot 1 = 1$

(5) $N_\in(\phi, \phi) = \underset{z \in DOM(\phi) = \phi}{SUP} (\phi(z) \cdot N_=(z,\phi)) = 0$

(6) $N_\in(\phi \in \{\phi\}_b) = \underset{z \in DOM(\{\phi\}_b)}{SUP} (\{\phi\}_b(z) \cdot N_=(z,\phi)) =$

$= \{\phi\}_b(\phi) \cdot N_=(\phi,\phi) = b \cdot 1 = b$.

(7) $N_=(\phi, \{\phi\}_b) = \underset{z \in DOM(\phi) = \phi}{INF} (\phi(z) \to N_\in(z, \{\phi\}_b)) \cdot \underset{z \in DOM(\{\phi\}_b)}{INF} (\{\phi\}_b(z) \to N_\in(z,\phi))$

$= 1 \cdot (\{\phi\}_b(\phi) \to N_\in(\phi,\phi)) = b' + 0 = b'$

(8) $N_\in(\{\phi\}_b, \phi) = \underset{z \in DOM(\phi) = \phi}{SUP} (\phi(z) \cdot N_=(z, \{\phi\}_b)) = 0$

(9) $N_=(\{\phi\}_b, \phi) = \underset{z \in DOM(\{\phi\}_b)}{INF} (\{\phi\}_b(z) \to N_\in(z,\phi)) \cdot \underset{z \in DOM(\phi) = \phi}{INF} (\phi(z) \to N_\in(z, \{\phi\}_b)) =$

$= (\{\phi\}_b(\phi) \to N_\in(\phi,\phi)) \cdot 1 = b' + 0 = b'$.

$$(10)\ N_{\in}(\{\phi\}_a, \{\phi\}_b) = \sup_{z \in DOM(\{\phi\}_b)} (\{\phi\}_b(z) \cdot N_{=}(z, \{\phi\}_a)) =$$

$$= \{\phi\}_b(\phi) \cdot N_{=}(\phi, \{\phi\}_a) = b \cdot a'$$

$$(11)\ N_{=}(\{\phi\}_a, \{\phi\}_b) = \inf_{z \in DOM(\{\phi\}_a)} (\{\phi\}_a(z) \rightarrow N_{\in}(z, \{\phi\}_b)) \cdot$$

$$\cdot \inf_{z \in DOM(\{\phi\}_b)} (\{\phi\}_b(z) \rightarrow N_{\in}(z, \{\phi\}_a)) =$$

$$= (\{\phi\}_a(\phi) \rightarrow N_{\in}(\phi, \{\phi\}_b)) \cdot (\{\phi\}_b(\phi) \rightarrow N_{\in}(\phi, \{\phi\}_a)) =$$

$$= (a' + b)(b' + a)$$

Observemos también que la relación I^B definida en V^B no es la relación identidad, pero si es una relación de equivalencia. En otras palabras, podemos pensar que en la estructura $\mathcal{U}^B$ existen varias "copias" de un mismo elemento, por ejemplo:

Si $\alpha \in ON$ y $f_\alpha : V_\alpha^B \rightarrow B$ es tal que $f_\alpha(x) = 0\ \forall x \in V_\alpha^B$ ent

$$f_\alpha \in V_{\alpha+1}^B \subset V^B \quad y$$

$$N_{=}(f_\alpha, \phi) = \inf_{z \in DOM(f_\alpha)} (f_\alpha(z) \rightarrow N_{\in}(z, \phi)) \cdot \inf_{z \in DOM(\phi) = \phi} (\phi(z) \rightarrow N_{\in}(z, f_\alpha)) =$$

$$= \inf_{z \in DOM(f_\alpha) = V_\alpha^B} (f_\alpha(z) \rightarrow N_{\in}(z, \phi))$$

pero $f(x) = 0 \quad \forall x \in V_\alpha^B$

$$\therefore\ f(z) \rightarrow N_{\in}(z, \phi) = 0' + N_{\in}(z, \phi) = 1 \quad \forall z \in V_\alpha^B$$

$$\therefore N_=(f,\phi) = \inf_{z\in DOM(f_\alpha)=U_\alpha^B} (f(z) \to N_\in(z,\phi)) = 1$$

$$\therefore (f_\alpha, \emptyset) \in I^B \quad \forall \alpha \in ON$$

es decir, existen muchas copias de $\emptyset$ (la función vacía) en U^B.

Más adelante, en algunas ocasiones, necesitaremos de una definición que es una extensión de las definiciones de $N_\in$ y $N_=$. En esta definición usaremos el concepto intuitivo de "enunciado de la teoría intuitiva de conjuntos", ETIC, que se puede precisar un poco de la siguiente manera :

4.10 i.- Si $x, y \in V$, entonces $x \in y$ es un ETIC y $x = y$ es un ETIC.

ii.- Si P y Q son ETIC, entonces $(P\ y\ Q)$, $(P\ o\ Q)$ ——

$(\text{Si } P \text{ ent } Q)$, $(\text{Para Todo } x\ P)$, etc.

son ETIC.

iii.- Algo es un ETIC sii se puede probar que lo es mediante (i) y (ii).

4.11 Def .- Si $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es un enunciado de teoría de conjuntos, que hace referencia exactamente a los conjuntos $x_1, x_2, \ldots x_n \in U$ definimos $N_P(x_1, \ldots, x_n)$ de la siguiente manera : (esta definición depende del álgebra Booleana de la cual dependen $N_\in$ y $N_=$.)

i) Si $P(x_1, \ldots, x_n)$ es $x_1 \in x_2$ ent

$$N_P(x_1, \ldots, x_n) := N_=(x_1, x_2).$$

Si $P(x_1, \ldots x_n)$ es $x_1 = x_2$ ent

$N_P(x_1, \ldots, x_n) := N_=(x_1, x_2)$

ii) Si $P(x_1, \ldots x_n)$ es $[Q(x_1, \ldots, x_q) \ominus R(x_1, \ldots, x_r)]$

ent $N_P(x_1, \ldots, x_n) := N_Q(x_1, \ldots, x_q) + N_R(x_1, \ldots, x_r)$

iii) Si $P(x_1, \ldots, x_n)$ es [no $Q(x_1, \ldots, x_n)$] ent

$N_P(x_1, \ldots, x_n) := (N_Q(x_1, \ldots, x_n))'$.

iv) $N_P(x_1, \ldots, x_n)$ se define en forma análoga a los casos (ii) (iii) para los casos en que intervienen los conectivos lógicos restantes.

v) Si $P(x_1, \ldots, x_n)$ es [para todo y $Q(y_1, \ldots, y_q)$] entonces denotamos por $Q(y_i/y)(y_{i_1}, \ldots y_{i_q})$ al enunciado que se obtiene de $Q(y_1, \ldots, y_q)$ al substituir y_i por y y

$$N_P(x_1, \ldots, x_n) := \underset{y \in U}{\mathrm{INF}} \left(N_{Q(y_i/y)}(y_{i_1}, \ldots, y_{i_q})\right)$$

vi) Si $P(x_1, \ldots, x_n)$ es

[Existe y tal que $Q(y_1, \ldots, y_q)$]

ent $N_P(x_1, \ldots, x_n) := \underset{y \in U}{\mathrm{SUP}} \left(N_{Q(y_i/y)}(y_{i_1}, \ldots, y_{i_q})\right)$.

Antes de probar que I^B es una relación de equivalencia en $\mho^B$, probaremos algunas propiedades de $N_\in$ y $N_=$ que nos serán útiles.

4.2 Aff .- Si $x, y, z \in \mho^B$ y si $P(y_1, \ldots, y_n)$ es un enunciado de la teoría intuitiva de conjuntos, entonces

i) $N_=(x, x) = 1$

ii) $N_=(x, y) = N_=(y, x)$

iii) $x(u) \leq N_\in(u, x) \quad \forall u \in DOM(x)$

iv) $N_=(x, y) \cdot N_=(y, z) \leq N_=(x, z)$

v) $N_=(x, y) \cdot N_\in(x, z) \leq N_\in(y, z)$

vi) $N_=(x, y) \cdot N_\in(z, x) \leq N_\in(z, y)$

vii) $N_=(y_i, y) \cdot N_P(y_1, \ldots, y_n) \leq N_{P(y_i/y)}(y_1, \ldots, y_n)$

Dem:

i) inducción sobre ρ

Supongamos que

$$N_=(y, y) = 1 \quad \forall y \;\ni\; \rho(y) < \rho(x) \text{ ent}$$

$$N_=(x, x) = \underset{u \in DOM(x)}{INF}(x(u) \to N_\in(u, x)) \cdot \underset{u \in DOM(x)}{INF}(x(u) \to N_\in(u, x))$$

$$= \underset{\omega \in DOM(x)}{INF} (x(\omega) \rightarrow N_\in(\omega, x))$$

y si $\omega \in DOM(x)$, $\rho(\omega) < \rho(x)$

$$\therefore N_\in(\omega, x) = \underset{\xi \in DOM(x)}{SUP} (x(\xi) \cdot N_=(\xi, \omega)) \geq x(\omega) \cdot N_=(\omega, \omega) =$$

$$= x(\omega) \cdot 1 = x(\omega)$$

$$\therefore (x(\omega) \rightarrow N_\in(\omega, x)) = (x(\omega) \rightarrow x(\omega)) = x(\omega)' + x(\omega) =$$

$$= 1 \quad \forall \omega \in DOM(x)$$

$$\therefore N_=(x, x) = \underset{\omega \in DOM(x)}{INF} (x(\omega) \rightarrow N_\in(\omega, x)) = \underset{\omega \in DOM(x)}{INF} 1 = 1$$

(ii) **La prueba es consecuencia inmediata de la definición de** $N_=$.

(iii) **Supongamos que** $\omega \in DOM(x)$

$$N_\in(\omega, x) = \underset{\xi \in DOM(x)}{SUP} (x(\xi) \cdot N_=(\xi, \omega)) \geq (x(\omega) \cdot N_=(\omega, \omega)) =$$

$$= x(\omega) \cdot 1 = x(\omega)$$

$$\therefore N_\in(\omega, x) \geq x(\omega) \quad \forall \omega \in DOM(x).$$

Para probar los incisos (iv)(v)(vi) , **antes probaremos lo siguiente por inducción:**

Si $\alpha \in ON$, ent

(1) Si $\rho(x), \rho(y) < \alpha$ y $\rho(z) \leq \alpha$ ent.

$$N_=(x,y) \cdot N_\in(x,z) \leq N_\in(y,z)$$

(2) Si $\rho(z) < \alpha$ y $\rho(x), \rho(y) \leq \alpha$ ent.

$$N_=(x,y) \cdot N_\in(z,x) \leq N_\in(z,y)$$

(3) Si $\rho(x), \rho(y), \rho(z) \leq \alpha$ ent.

$$N_=(x,y) \cdot N_=(y,z) \leq N_=(x,z)$$

Dem:

Probaremos simultaneamente los tres incisos por inducción sobre α

Supongamos que los tres incisos se cumplen $\forall \beta < \alpha$ ent:

(1) sup que $\rho(x), \rho(y) < \alpha$ y $\rho(z) \leq \alpha$

$$N_=(x,y) \cdot N_\in(x,z) = N_=(x,y) \cdot \sup_{w \in DOM(z)} (z(w) \cdot N_=(w,x)) =$$

$$= \sup_{w \in DOM(z)} (z(w) \cdot N_=(w,x) \cdot N_=(x,y))$$

como $w \in DOM(z)$, $\rho(w) < \rho(z) \leq \alpha$

$\therefore \rho(x), \rho(y), \rho(w) < \alpha$ e.d.

$\rho(x), \rho(y), \rho(w) \leq \xi \quad p.a\ \xi < \alpha$

$\therefore$ **por la hopotesis de la inducción para el inciso** (3)

$$z(w) \cdot N_=(w, x) \cdot N_=(x, y) \leq z(w) \cdot N_=(w, y) \quad \forall w \in DOM(z)$$

$$\therefore\ N_=(x, y) \cdot N_\in(x, z) = \sup_{w \in DOM(z)} \left(z(w) \cdot N_=(w, x) \cdot N_=(x, y)\right) \leq$$

$$\leq \sup_{w \in DOM(z)} \left(z(w) \cdot N_=(w, y)\right) = N_\in(y, z).$$

(2) Sup que $\rho(z) < \alpha$ y $\rho(x), \rho(y) \leq \alpha$

Si $w \in DOM(x)$ ent.

$$N_=(x, y) \cdot x(w) \cdot N_=(w, z) =$$

$$= \inf_{\delta \in DOM(x)} \left(x(\delta) \to N_\in(\delta, y)\right) \cdot \inf_{\delta \in DOM(y)} \left(y(\delta) \to N_\in(\delta, x)\right) \cdot x(w) \cdot N_=(w, z) \leq$$

$$\leq \left(x(w) \to N_\in(w, y)\right) \cdot x(w) \cdot N_=(w, z).$$

pero, en general, $(a \to b)a \leq b$ **, ya que**

$$(a \to b) \cdot a = a'a + ab = ab \leq b$$

$\therefore$ **por el inciso** (1) , $\forall w \in DOM(x)$ **tenemos que**

$$N_=(x, y) \cdot x(w) \cdot N_=(w, z) \leq N_\in(w, y) \cdot N_=(w, z) \leq N_\in(z, y)$$

$$\therefore\ \sup_{w \in DOM(x)} \left(N_=(x, y) \cdot x(w) \cdot N_=(w, z)\right) =$$

$$= N_=(x,y)\cdot N_\in(z,x) \leq \underset{w\in DOM(x)}{SUP} N_\in(z,y) = N_\in(z,y)$$

(3) Sup que $\rho(x), \rho(y), \rho(z) \leq \alpha$

Si $w \in DOM(x)$ ent:

$$N_=(x,y)\cdot N_=(y,z)\cdot x(w) \leq N_=(x,y)\cdot N_=(y,z)\cdot N_\in(w,x), \text{ por(iii)}$$

$$\leq N_=(y,z)\cdot N_\in(w,y), \text{ por (2)} \leq N_\in(w,z) \text{ por (2)}$$

pero, en general, si $ab \leq c$ **entonces** $a \leq (b \to c)$ **ya que**

$$b \to c = b' + c \geq b' + ab = (b'+b)(b'+a) = b' + a \geq a$$

$$\therefore N_=(x,y)\cdot N_=(y,z) \leq (x(w) \to N_\in(w,z)) \quad \forall w \in DOM(x)$$

$$\therefore N_=(x,y)\cdot N_=(y,z) \leq \underset{w\in DOM(x)}{INF} (x(w) \to N_\in(w,z))$$

Analogamente, se puede probar que

$$N_=(x,y)\cdot N_=(y,z) \leq \underset{w\in DOM(z)}{INF} (z(w) \to N_\in(w,x))$$

$$\therefore N_=(x,y)\cdot N_=(y,z) \leq$$

$$\leq \underset{w\in DOM(x)}{INF} (x(w) \to N_\in(w,z))\cdot \underset{w\in DOM(z)}{INF}(z(w) \to N_\in(w,x)) = N_\in(x,z) :$$

Los incisos (iv)(v)(vi) **son consecuencia directa de los incisos** (3) (1) (2) **respectivamente, porque dados tres ordinales** ρ_1, ρ_2, ρ_3 **siempre es posible encontrar un ordinal** α **tal que** $\alpha > \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

El inciso (vii) se prueba directamente por inducción sobre la complejidad de $P(y_1, \ldots, y_n)$.

Como decíamos anteriormente, I^B es una relación ed equivalencia en U^B. A continuación, damos una prueba de esta afirmación.

4.3 Aff .- I^B es una relación de equivalencia en U^B.

i) Si $x \in U^B$ ent

$$N_=(x,x) = 1 \quad \therefore \quad (x,x) \in I^B$$

ii) Si $x, y \in U^B$ y $(x,y) \in I^B$

$$N_=(x,y) = N_=(y,x) = 1 \quad \therefore \quad (y,x) \in I^B$$

iii) Si $x, y, z \in U^B$ y $(x,y), (y,z) \in I^B$

$$N_=(x,z) \geq N_=(x,y) \cdot N_=(y,z) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\therefore \quad N_=(x,z) = 1 \quad y \quad (x,z) \in I^B$$

Respecto a la desigualdad (iii), cabe recalcar que, al contrario de lo que podría esperarse, la igualdad no se cumple en el caso general, aunque de alguna manera podemos decir que "casi" siempre se cumple.

4.12 De una manera más precisa, si $x \in U^B$ es tal que $x(u) = N_=(u,x)$ $\forall u \in \mathrm{DOM}(x)$ decimos que x es extensional.

4.4 Aff .- Para todo $x \in U^B$ existe una $y \in U^B$, y extensional, tal que $(x,y) \in I^B$.

Dem:

Sea $x \in U^B$ y $y: DOM(x) \to B$ tal que

$$y(u) = N_\in(u, x) \quad \forall u \in DOM(x)$$

Por supuesto, $y \in U^B$ **. Además**

$$N_=(x,y) = \underset{u \in DOM(x)}{INF}(x(u) \to N_\in(u,y)) \cdot \underset{u \in DOM(y)}{INF}(y(u) \to N_\in(u,x)) =$$

$$= \underset{u \in DOM(x)}{INF}(x(u) \to N_\in(u,y)) \cdot \underset{u \in DOM(y)}{INF}(N_\in(u,x) \to N_\in(u,x)) =$$

$$= \underset{u \in DOM(x)}{INF}(x(u) \to N_\in(u,y)) \cdot 1$$

pero $(x(u) \to N_\in(u,y)) = x(u)' + N_\in(u,x) \geq$

$$\geq N_\in(u,x)' + N_\in(u,y) \geq N_\in(u,x)' + y(u) =$$

$$= y(u)' + y(u) = 1$$

$$\therefore N_=(x,y) = \underset{u \in DOM(x)}{INF}(x(u) \to N_\in(u,y)) \geq \underset{u \in DOM(x)}{INF} 1 = 1$$

$\therefore N_=(x,y) = 1 \quad \therefore (x,y) \in I^B$

por otro lado,

$y(u) \leq N_\in(u,y)$ y

$$y(u) = N_\in(u,x) \geq N_=(x,y) \cdot N_\in(u,y) =$$

$= 1 \cdot N_\epsilon(w, y) = N_\epsilon(w, y)$

$\therefore\ y(w) = N_\epsilon(w, y)$

$\therefore\ y$ es extensional.

Un ejemplo que confirma que la desigualdad (iii) no es igualdad en el caso general es el siguiente:

Usando la notación y resultados de los párrafos anteriores, tenemos:

$$U_2^B = U_{\{\phi, \{\phi\}\}}^B = \{x / x = \{\phi\}_b \text{ p.a. } b \in B\} \cup \{\phi\}$$

$$U_3^B = \{x / x : A \to B \text{ tal que } A \subset U_2^B\}$$

Supongamos que B es un algebra Booleana con un elemento a tal que $0 < a < 1$.

Sea $f : \{\{\phi\}_a, \{\phi\}_1\} \to B$ tal que

$f(\{\phi\}_a) = 0$ y $f(\{\phi\}_1) = 1$

$\{\{\phi\}_a, \{\phi\}_1\} \subset U_2^B \quad \therefore f \in U_3^B$ y

$$N_\epsilon(\{\phi\}_a, f) = \sup_{w \in \mathrm{DOM}(f)} (f(w) \cdot N_=(w, \{\phi\}_a)) =$$

$$= f(\{\phi\}_a) \cdot N_=(\{\phi\}_a, \{\phi\}_a) + f(\{\phi\}_1) \cdot N_=(\{\phi\}_1, \{\phi\}_a) =$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (1' + a)(a' + 1) = (0 + a)(a' + 1) = aa' + a =$$

$$= a > 0 = f(\{\phi\}_a) \quad \therefore f(\{\phi\}_a) < N_\epsilon(\{\phi\}_a, f).$$

Para terminar con esta sección, mostraremos que existe una inmersión natural de U en U^B.

4.13 Definición.- Si $x \in U$ entonces definimos por $\in$-recursión:

$$\hat{x} := \{(\hat{y}, 1) / y \in x\}.$$

4.5 Afirmación.- Para toda $x \in U$, $\hat{x} \in U^B$.

Demostración: (por $\in$-inducción)

Sea $C := \{x / \hat{x} \in U^B\}$. Demostraremos que $C = U$ usando $\in$-inducción.

Sea $x \in U$, y supongamos que $x \subseteq C$. entonces

$$\forall y \in x, \ \hat{y} \in U^B, \ \therefore \ \forall y \in x \ \exists \alpha_y \in ON \ni \hat{y} \in U^B_{\alpha_y}.$$

Sea $\alpha := \bigcup_{y \in x} \alpha_y$. $\alpha \geq \alpha_y$, $\therefore U^B_{\alpha_y} \subseteq U^B_\alpha \ \forall y \in x$.

$$\therefore \ \forall y \in x, \ \hat{y} \in U^B_\alpha$$

por lo tanto $\hat{x} \subseteq U^B_\alpha \times \{1\} \subseteq U^B_\alpha \times B$, $\therefore \hat{x} \in U^B_{\alpha+1} \subseteq U^B$

$$\therefore \hat{x} \in U^B, \ \therefore \ x \subseteq C \rightarrow x \in C$$

por lo tanto, C satisface las hipótesis de la $\in$-inducción, y por lo tanto $C = U$.

Por lo tanto, $\forall x \in U$, $\hat{x} \in U^B$. $\square$

4.6 Afirmación.- Si $x \neq y$ entonces $\hat{x} \neq \hat{y}$

Demostración: S.P.G., supongamos que $x \not\subseteq y$. Sea $a \in x - y$, entonces $(\hat{a}, 1) \in \hat{x} - \hat{y}$, $\therefore \hat{x} \not\subseteq \hat{y}$, $\therefore \hat{x} \neq \hat{y}$. $\square$

Las dos afirmaciones anteriores muestran que, como habíamos dicho, existe una inmersión de U en U^B.

Un resultado que necesitaremos más adelante y que justifica un poco más el nombre de inmersión de ^ es :

4.7 Afirmación .- Si x , $y \in V$ entonces

$$x \in y \text{ sii } V^B \models \hat{x} \in \hat{y} \quad y \quad x = y \text{ sii } V^B \models \hat{x} = \hat{y}.$$

Dem : (inducción sobre $\rho(y)$)

Lo que probaremos por inducción sobre $\rho(y)$ no es la afirmación original, sino :

$$P(y): \forall_{x \in V} (x \in y \longleftrightarrow \|\hat{x} \in \hat{y}\| = 1) \quad y$$

$$\forall_{x \in V} (x = y \longleftrightarrow \|\hat{y} = \hat{x}\| = 1) \quad y$$

$$\forall_{x \in V} (y \in x \longleftrightarrow \|\hat{y} \in \hat{x}\| = 1)$$

Supongamos que $P(z)$ se cumple para toda z tal que $\rho(z) < \rho(y)$. Entonces :

$$\text{Como } \hat{y} = \{(\hat{z}, 1) / z \in y\}, \; w \in \mathrm{Dom}(\hat{y}) \text{ sii } w = \hat{z} \text{ p.a. } z \in y.$$

Recordemos que $a \in b \rightarrow \rho(a) < \rho(b)$

$$\|\hat{x} \in \hat{y}\| = \sup_{z \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} (\hat{y}(z) \wedge \|\hat{x} = z\|) = \sup_{z \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{x} = z\| =$$

$$= \sup_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{w} = \hat{x}\| = 1 \text{ sii } \exists_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{x} = \hat{w}\| = 1 \text{ sii}$$

$$\text{sii} \ \exists_{z \in y} \|\hat{x} = \hat{z}\| = 1 \quad \text{sii H.I.}$$

$$\exists_{z \in y} x = z \quad \text{sii} \ x \in z$$

$$\therefore \forall_{x \in U} (x \in y \longleftrightarrow \|\hat{x} \in \hat{y}\|).$$

Veamos que el segundo factor de $P(y)$ **también es cierto :**

$$\|\hat{x} = \hat{y}\| = \mathrm{INF}_{z \in \mathrm{Dom}(\hat{x})} (\hat{x}(z) \to \|z \in \hat{y}\|) \cdot \mathrm{INF}_{z \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} (\hat{y}(z) \to \|z \in \hat{x}\|) =$$

$$= \mathrm{INF}_{z \in \mathrm{Dom}(\hat{x})} \|z \in \hat{y}\| \cdot \mathrm{INF}_{z \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|z \in \hat{x}\| =$$

$$= \mathrm{INF}_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{x})} \|\hat{w} \in \hat{y}\| \cdot \mathrm{INF}_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{w} \in \hat{x}\| =$$

$$[\mathrm{INF}_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{x})} (\mathrm{SUP}_{\hat{v} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{v} = \hat{w}\|)] \cdot \mathrm{INF}_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{w} \in \hat{x}\| = 1 \ \text{sii}$$

$$[(\forall_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{x})} \exists_{\hat{v} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{v} = \hat{w}\|) \ y \ (\forall_{\hat{w} \in \mathrm{Dom}(\hat{y})} \|\hat{w} \in \hat{x}\| = 1)] \ \text{sii}$$

$$[(\forall_{z \in x} \exists_{s \in y} \|\hat{s} = \hat{z}\| = 1) \ y \ (\forall_{z \in y} \|\hat{z} \in \hat{x}\| = 1)] \ \text{sii por H.I.}$$

$$[(\forall_{z \in x} \exists_{s \in y} s = z) \ y \ (\forall_{z \in y} z \in y)] \ \text{sii} \ [(x \subseteq y) \ y \ (y \subseteq x)] \ \text{sii} \ x = y.$$

El tercer factor de $P(\check{y})$ se analiza en forma aáloga :

$$\|\check{y} \in \hat{x}\| = \underset{z \in Dom(\hat{x})}{SUP} (\hat{x}(z) \rightarrow \|z = \check{y}\|) = \underset{z \in Dom(\hat{x})}{SUP} \|z = \check{y}\| =$$

$$= \underset{z \in Dom(\hat{x})}{SUP} [(\underset{r \in Dom(z)}{INF} \|r \in \check{y}\|) \cdot (\underset{r \in Dom(\check{y})}{INF} \|r \in z\|)] =$$

$$= \underset{z \in Dom(\hat{x})}{SUP} [(\underset{r \in Dom(z)}{INF} (\underset{s \in Dom(\check{y})}{SUP} \|s = r\|) \cdot \underset{r \in Dom(\check{y})}{INF} \|r \in z\|)] = 1 \text{ sii}$$

$$\underset{z \in Dom(\hat{x})}{\exists} [(\underset{r \in Dom(z)}{\forall} \underset{s \in Dom(\check{y})}{\exists} \|s = r\| = 1) \ y \ (\underset{r \in Dom(\check{y})}{\forall} \|r \in z\| = 1)] \text{ sii}$$

$$\underset{w \in x}{\exists} [(\underset{t \in w}{\forall} \underset{q \in y}{\exists} \|\check{q} = \hat{t}\| = 1) \ y \ (\underset{t \in y}{\forall} \|\hat{t} \in \hat{w}\| = 1) \text{ sii}$$

$$\underset{w \in x}{\exists} [(\underset{t \in w}{\forall} \underset{q \in y}{\exists} q = t) \ y \ (\underset{t \in y}{\forall} t \in w) \text{ sii}$$

$$\underset{w \in x}{\exists} [(w \subseteq y) \ y \ (y \subseteq w)] \text{ sii } \underset{w \in x}{\exists} [w = y] \text{ sii } y \in x$$

$\therefore$ se cumple $P(y)$ y los dos primeros factores de esta proposición nos dan lo que pide el teorema, ya que :

$$U^B \models \hat{x} \in \check{y} \text{ sii } \|\hat{x} \in \check{y}\| \ y$$

$$U^B \models \hat{x} = \check{y} \text{ sii } \|\hat{x} = \check{y}\| = 1 .$$

$\square$.

Se sospecha inmediatamente que el resultado anterior es solamente la base de la inducción en la demostración de un resultado más general :

4.8 Aff .- Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula restringida, entonces,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ sii } V^B \models \varphi(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n).$$

Aunque la demostración de esta afirmación no es difícil, antes de aplicar inducción sobre la complejidad de φ, es necesario por comodidad, probar algunos resultados que no hemos probado, y, por lo tanto, dejamos esta afirmación sin demostración. (Vea los resultados 1.18, 1.20 y 1.23 de Bell, J. "Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory").

En relación a la inmersión ^ de V en V^B, caben cierto tipo de preguntas, todas ellas muy interesantes, pero, por necesaria para establecer resultados posteriores, nos interesa específicamente la siguiente :

El valor de $\|\alpha \in On\|$ nos indica la "probabilidad de que el elemento $\alpha \in V^B$ sea un "ordinal", así, si $\|\alpha \in On\| = 1$, podemos afirmar con un cien por ciento de seguridad que α es un ordinal. Podemos llamar "ordinales a los elementos $\alpha \in V^B$ tales que $\|\alpha \in On\| = 1$.

Por otro lado, si analizamos la fórmula en la que se traduce la abreviación, $\alpha \in On$, observaremos que esta es una fórmula restringida, por lo tanto, podemos aplicar la afirmación anterior, y concluir que $\alpha \in On$ sii $\|\alpha \in On\| = 1$ es decir, de los elementos de la inmersión de V en V^B, son ordinales solamente aquellos que provienen de elementos de V que son ordinales, esto nos permite calcular $\|\alpha \in On\|$ cuando $\alpha \in \wedge[V]$, sin embargo, puede existir elementos en $V^B - \wedge[V]$ que también son "ordinales".

La pregunta es si aún en estos casos existe alguna influencia de los ordinales de V en el cálculo de $\|\alpha \in On\|$ Algo de lo que la siguiente afirmación "dice" es que $x \in V^B$ es un "ordinal" sii existe un ordinal α de V tal que es "igual" a x :

4.9 Aff .- Si $x \in V^B$, entonces

$$\|x \in On\| = \sup_{\alpha \in On} \|\hat{\alpha} = x\|.$$

Dem:

Sea $x \in V^B$

Como decíamos, $x \in On$ es una fórmula restringida,

$\therefore$ Si $\alpha \in On$, $\|\hat{\alpha} \in On\| = 1$.

y, por lo tanto

$$\|x = \hat{\alpha}\| = \|x = \hat{\alpha}\| \wedge \|\hat{\alpha} \in On\| \leq \|x \in On\|$$

$$\therefore \sup_{\alpha \in On} \|x = \hat{\alpha}\| \leq \|x \in On\|.$$

La desigualdad en el otro sentido se prueba como sigue:

Para toda $y \in Dom(x)$, definimos $D_y = \{\beta / \| y = \hat{\beta} \| \neq 0\}$ y definimos $D = \bigcup_{y \in Dom(x)} D_y$ (En una prueba formal, sería necesario probar que es conjunto)

$$\text{Sea } \alpha_0 = \Big(\bigcup_{\beta \in On \cap D} \beta\Big) + 1, \text{ es decir } \alpha_0 \in On \text{ y}$$

$$\alpha_0 > \beta \quad \forall \beta \in On \cap D.$$

$$\therefore \alpha_0 \notin D \text{ y } \therefore \| y = \hat{\alpha}_0 \| = 0 \quad \forall y \in Dom(x).$$

$$\text{Así, } \| \alpha_0 \in x \| = \sup_{y \in Dom(x)} \big(x(y) \cdot \| y = \alpha_0 \| \big) =$$

$$= \sup_{y \in Dom(x)} 0 = 0.$$

Por otro lado:

$$[(x \in On \wedge \hat{\alpha}_0 \in On) \rightarrow (x \in \hat{\alpha}_0 \vee x = \hat{\alpha}_0 \vee \hat{\alpha}_0 \in x)]$$

es un teorema de ZFC, y como $V^B \models ZFC$,

$$\| (x \in On \wedge \hat{\alpha}_0) \rightarrow (x \in \hat{\alpha}_0 \vee x = \alpha_0 \vee \alpha_0 \in x) \| = 1$$

$$\therefore \| x \in On \wedge \hat{\alpha}_0 \in On \| \leq \| x \in \hat{\alpha}_0 \vee x = \hat{\alpha}_0 \vee \hat{\alpha}_0 \in x \|.$$

$$\therefore \| x \in On \| \cdot \| \hat{\alpha}_0 \in On \| \leq \| x \in \hat{\alpha}_0 \| + \| x = \hat{\alpha}_0 \| + \| \hat{\alpha}_0 \in x \|$$

pero $\|\hat{\alpha}_0 \in \mathfrak{M}\| = 1$ ya que $\beta \in \mathfrak{M}$ es restringida y

$\|\hat{\alpha}_0 \in X\| = 0$,

$$\therefore \|x \in \mathfrak{M}\| \leq \|x \in \hat{\alpha}_0\| + \|x = \hat{\alpha}_0\| =$$

$$= \sup_{z \in Dom(\hat{\alpha}_0)} (\hat{\alpha}_0(z) \to \|x = z\|) + \|x = \hat{\alpha}_0\| =$$

$$= \sup_{z \in Dom(\hat{\alpha}_0)} \|x = z\| + \|x = \hat{\alpha}_0\| =$$

$$= \sup_{\beta \in \alpha_0} \|x = \hat{\beta}\| + \|x = \hat{\alpha}_0\| \leq \sup_{\beta \in \alpha_0} \|x = \beta\| + \sup_{\alpha \in \mathfrak{M}} \|x = \hat{\alpha}\| \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \mathfrak{M}} \|x = \hat{\alpha}\| \text{ ya que } \alpha_0 \in \mathfrak{M}$$

$$\therefore \|x \in \mathfrak{M}\| = \sup_{\alpha \in \mathfrak{M}} \|x = \hat{\alpha}\|$$

$\square$.

Otra propiedad útil de la función $\wedge$ es la siguiente :

4.10 Aff .- Si $x, y \in \mathcal{V}$ entonces

$$\|\hat{x} = \hat{y}\| \in \{0, 1\} \text{ y } \|\hat{x} \in \hat{y}\| \in \{0, 1\}.$$

Dem :

Supongamos que $x, y \in \mathcal{V}$

Definimos

$$A := \{x \in \mathcal{V} / \forall_{y \in \mathcal{V}} (\|\hat{x} = \hat{y}\| \in \{0, 1\} \text{ y } \|\hat{x} \in \hat{y}\| \in \{0, 1\})\} \text{ y}$$

$$E := \{(x,y) \in \mathcal{U}\times\mathcal{U} / \hat{x} \in \mathrm{Dom}(y)\}$$

E es una relación bién fundada sobre $\mathcal{U}$ ya que si $D \subseteq \mathcal{U}$ y $D \neq \emptyset$ entonces D tiene un elemento m que es $\in$-minimal que también es E-minimal porque si $r \in D$ entonces $x \notin r$, por lo tanto $x \notin \mathrm{Dom}(\hat{r})$ y $(x,r) \notin E$

Ahora demostraremos la proposición que nos interesa probando que $\mathcal{U} \subseteq A$ por inducción sobre la relación bién fundada E.

i) Si m es un elemento E-minimal de $\mathcal{U}$ entoces

$$\forall_{r\in\mathcal{U}} (r,m) \notin E \quad \therefore \quad \forall_{r\in\mathcal{U}} \hat{r} \notin \mathrm{Dom}(\hat{m}),$$

$$\therefore\ m = \emptyset \text{ (de lo contrario, } r \in m \rightarrow \hat{r} \in \mathrm{Dom}(\hat{m})).$$

Ahora, si $y \in \mathcal{U}$, $\|\hat{\emptyset} = y\| = \underset{z\in\mathrm{Dom}(\hat{\emptyset})}{\mathrm{INF}} (\hat{\emptyset}(z) \rightarrow \|z \in y\|)\cdot$

$$\cdot \underset{z\in\mathrm{Dom}(y)}{\mathrm{INF}} (y(z) \rightarrow \|z \in \hat{\emptyset}\|) =$$

$$= \underset{z\in\emptyset}{\mathrm{INF}} (\hat{\emptyset}(z) \rightarrow \|z \in y\|) \cdot \underset{r\in y}{\mathrm{INF}} (y(\hat{r}) \rightarrow \|\hat{r} \in \hat{\emptyset}\|) =$$

$$= 1 \cdot \underset{r\in y}{\mathrm{INF}} \|\hat{r} \in \hat{\emptyset}\| = \underset{r\in y}{\mathrm{INF}} \|\hat{r} \in \hat{\emptyset}\| =$$

$$= \underset{r\in y}{\mathrm{INF}}\left(\underset{z\in \mathrm{Dom}(\hat{\emptyset})}{\mathrm{SUP}}\left(\hat{\emptyset}(z)\cdot\|z=\hat{r}\|\right)\right) = \underset{r\in y}{\mathrm{INF}}\left(\underset{z\in \emptyset}{\mathrm{SUP}}\left(\hat{\emptyset}(z)\cdot\|z=\hat{r}\|\right)\right) =$$

$$= \underset{r\in y}{\mathrm{INF}}\, 0 = \begin{cases} 1 & \text{si } y=\emptyset \\ 0 & \text{si } y\neq\emptyset \end{cases}$$

$\therefore \|\hat{\emptyset}=\hat{y}\|\in\{0,1\}$

Además, $\|\hat{\emptyset}\in\hat{y}\| = \underset{z\in \mathrm{Dom}(\hat{y})}{\mathrm{SUP}}\left(\hat{y}(z)\cdot\|\hat{\emptyset}=z\|\right) =$

$$= \underset{r\in y}{\mathrm{SUP}}\left(\hat{y}(\hat{r})\cdot\|\hat{\emptyset}=\hat{r}\|\right) = \underset{r\in y}{\mathrm{SUP}}\,\|\hat{\emptyset}=\hat{r}\|\in\{0,1\}$$

ya que $\underset{r\in y}{\forall}\ \|\hat{\emptyset}=\hat{r}\|\in\{0,1\}$

$\therefore \|\hat{\emptyset}\in\hat{y}\|\in\{0,1\}$

ii) Si $v\in U$ es tal que $(r,v)\in E \rightarrow r\in A$

ent $\underset{r\in v}{\forall}\ \underset{y\in U}{\forall}\left(\|\hat{r}=\hat{y}\|\in\{0,1\} \text{ y } \|\hat{r}\in\hat{y}\|\in\{0,1\}\right)$,

$$\therefore \|\hat{v}=\hat{y}\| = \underset{z\in \mathrm{Dom}(\hat{v})}{\mathrm{INF}}\left(\hat{v}(z)\rightarrow\|z\in\hat{y}\|\right)\cdot\underset{z\in \mathrm{Dom}(\hat{y})}{\mathrm{INF}}\left(\hat{y}(z)\rightarrow\|z\in\hat{v}\|\right) =$$

$$= \underset{r\in v}{\mathrm{INF}}\,\|\hat{r}\in\hat{y}\|\cdot\underset{r\in y}{\mathrm{INF}}\,\|\hat{r}\in\hat{v}\| =$$

$$= \underset{r\in v}{\mathrm{INF}}\,\|\hat{r}\in\hat{y}\|\cdot\underset{r\in y}{\mathrm{INF}}\left(\underset{s\in v}{\mathrm{SUP}}\,\|\hat{s}=\hat{r}\|\right)\in\{0,1\}$$

ya que $r, s \in v \to (\|\hat{r} \in \hat{y}\| \in \{0,1\}$ y $\|\hat{s} = \hat{r}\| \in \{0,1\})$.

$\therefore \|\hat{v} = \hat{y}\| \in \{0,1\}$.

Además, $\|\hat{v} \in \hat{y}\| = \sup\limits_{z \in Dom(\hat{y})} (\hat{y}(z) \cdot \|\hat{v} = z\|) =$

$= \sup\limits_{r \in y} \|\hat{v} = \hat{r}\| \in \{0,1\}$

ya que $\forall_{r \in y} \|\hat{v} = \hat{r}\| \in \{0,1\}$

$\therefore v \in A$

por lo tanto $V \subseteq A$, i.e.

$V = A$ y $\forall_{x,y \in V} (\|\hat{x} = \hat{y}\| \in \{0,1\}$ y $\|\hat{x} \in \hat{y}\| \in \{0,1\})$

$\square$.

CAPITULO 5

Forcing

Modelos Booleanos dentro del sistema.

En la parte anterior adoptamos el punto de vista intuitivo para describir el concepto de modelo Booleano. Igual que con los modelos en general, es posible definir el concepto de modelo Booleano dentro del sistema. En realidad, lo único por hacer es procurar que los elementos que intervienen en la definición del modelo Booleano queden definidos dentro del sistema. La parte que sigue contiene los detalles de esta idea.

1) $V=\{x/x=x\}$, es decir, $y\in V$ es una abreviación de la fórmula $y=y$. Intuitivamente, V representa el universo de conjuntos U .

2) $\emptyset=\{x/x\neq x\}$, es decir, $y\in\emptyset$ es una abreviación de la fórmula $y\neq y$. Intuitivamente, $\emptyset$ representa el conjunto vacío.

3) $ON=\{x/\Psi(x)\}$, donde $\Psi(x)$ es la fórmula de ZF que "dice" que x está bien ordenado por $\in$ y que x es transitivo, por lo tanto, $y\in ON$ es una abreviación de la fórmula $\Psi(y)$, la cual "dice" que y es un ordinal. Intuitivamente, ON representa la clase de ordinales $\mathcal{On}$.

4) Para B , el álgebra Booleana, necesitamos una fórmula de ZF que "diga" que B es un conjunto y que B satisface los axiomas para un álgebra Booleana completa. Esta fórmula tiene el siguiente aspecto: $ABC(B):B\in V\wedge f(B)$ donde $f(B)$ es la fórmula de ZF que resulta de la con-

junción de las fórmulas que expresan cada uno de los axiomas necesarios para que B sea un álgebra Booleana completa.

5) $V_\alpha^B := \{x / FUN(x) \wedge Im(x) \subseteq B \wedge (\exists \xi)(\xi \in ON \wedge \xi < \alpha \wedge Dom(x) \subseteq V_\xi^B\}$

donde:

$FUN(x)$ es la fórmula que expresa en ZF que x es función,

$Im(x) := \{y / (\exists z)((z,y) \in x)\}$ (imagen de x),

$Dom(x) := \{z / (\exists y)((z,y) \in x)\}$ (dominio de x).

Considerando que V_α^B define una función $G(\alpha)$, V_α^B queda definida para toda $\alpha \in ON$ por recursión transfinita sobre α.

6) $V^B := \{x / (\exists \alpha)(\alpha \in ON \wedge x \in V_\alpha^B)\}$

De esta manera, V^B queda definido dentro de ZF como un término clase.

Para hablar comodamente en ZF de los elementos de V^B es conveniente extender el lenguaje de ZF agregando un símbolo constante para cada elemento de V^B. De aquí en adelante, al mencionar la palabra "fórmula", nos estaremos refiriendo a una fórmula del lenguaje extendido.

Ahora, para poder considerar a V^B como un modelo de ZF, falta representar en ZF la noción " V^B satisface a φ " para toda fórmula φ. Para poder hacer esto, comenzaremos por las fórmulas atómicas y después extenderemos la definición a enunciados y finalmente a fórmulas bién formadas.

Supongamos que φ es una fórmula atómica. es decir, φ es la fórmula $x \in y$ o la fórmula $x = y$, donde x y y no son variables sino constantes, es decir, $x, y \in V^B$, definimos por recursión sobre $(\rho(x), \rho(y))$ lo siguiente:

5.2 Definición.-

1) $\|x \in y\|^B := \sup_{z \in Dom(y)} (y(z) \cdot \|z = x\|^B)$,

2) $\|x = y\|^B := \inf_{z \in Dom(x)} (x(z) \rightarrow \|z \in y\|^B) \cdot \inf_{z \in Dom(y)} (y(z) \rightarrow \|z \in x\|^B)$.

donde: $a \rightarrow b := a' + b$.

Cabe agregar que en (1) y (2) los miembros derechos de ambas igualdades son abreviaciones de fórmulas de ZF que dicen precisamente lo que la notación sugiere.

Si φ es un enunciado de ZF, definimos $\|\varphi\|^B$ por recursión sobre la complejidad de φ:

5.3 Definición.-

3) $\|\neg\psi\|^B := (\|\psi\|^B)'$.

4) $\|\psi \wedge \delta\|^B := \|\psi\|^B \cdot \|\delta\|^B$.

5) $\|\psi \vee \delta\|^B := \|\psi\|^B + \|\delta\|^B$.

6) $\|\psi \rightarrow \delta\|^B := (\|\psi\|^B)' + \|\delta\|^B$.

7) $\|\psi \leftrightarrow \delta\|^B := (\|\psi \rightarrow \delta\|^B) \cdot (\|\delta\|^B \rightarrow \|\psi\|^B)$.

8) $\|(\exists x)\,\psi\|^B := \sup_{y \in V^B} \|\psi(y)\|^B$.

9) $\|(x)\,\psi\|^B := \inf_{y \in V^B} \|\psi(y)\|^B$.

Una vez hecho lo anterior, si σ es un enunciado de ZF, entonces:

5.4 Definición.- $V^B \models \sigma$ es una abreviación de la fórmula $\|\sigma\|^B = 1$, y si φ es una fórmula de ZF y ψ es la cerradura universal de φ entonces $V^B \models \varphi$ es una abreviación de la fórmula $\|\psi\|^B = 1$.

Leemos $V^B \models \varphi$ como " V^B realiza a φ" o " φ es verdadera en V^B"

Conviene aclarar que el significado que tiene aquí el símbolo $\models$ es distinto al que se le dió a $\langle M, P, I \rangle \models \varphi$ como abreviación de ZF. Por supuesto, su significado será según el contexto.

Además, consideraremos que la afirmación " V^B realiza a φ " es cierta si sucede que $ZF \vdash (V^B \models \varphi)$.

Es necesario observar que, si ZF es consistente, la "función" que asigna a cada enunciado σ su "valor Booleano" en B, $\sigma \longmapsto \|\sigma\|^B$, no puede estar definida dentro de ZF, de hecho, usando el teorema de A. Tarski acerca de la imposibilidad de expresar el conjunto de fórmulas verdaderas dentro de cierto tipo de sistemas formales, se podría probar que si ZF es consistente, entonces tal función no es representable en ZF. Por esta razón, nos conformaremos con la definición metalingüística de $\|\sigma\|^B$ para cada enunciado σ.

Finalmente, hacemos notar que, igual que en el caso intuitivo, existe una inmersión de V en V^B.

5.5 Def .- Por $\in$ -recursión definimos :

$$\hat{x} := \{ z / (\exists y)(y \in x \wedge z = (\hat{y}, 1)) \}$$

Igual que en el caso intuitivo tenemos que :

$$ZF \vdash (x)(\hat{x} \in V^B).$$

MODELOS $\in$-TRANSITIVOS.

Cuando se exhibe un modelo para probar la independencia de un enunciado en un sistema formal dado, es importante que la construcción del modelo se haga enteramente dentro del sistema, ya que, si esta se hiciera , total o parcialmente, por fuera, cualquier crítico exigente podría protestar por los métodos empleados en tal construcción.

En la sección anterior recalcamos que la "función de verdad" , $\sigma \longmapsto \|\sigma\|^B$, no podía ser definida totalmente dentro de ZF . Este pequeño defecto de V^B se soluciona si en lugar de tomar todo V , tomamos solamente una "parte" M de V y relativizamos toda la construcción de V^B a M . Para esto, es necesario introducir el concepto de modelo $\in$-transitivo, y esto lo haremos dando primero la versión intuitiva y después la formal.

Recordemos que $\mathcal{U}=\langle U, P, I\rangle$ es el modelo intuitivo de ZF .

Supongamos que M es un conjunto, es decir, supongamos que $M \in U$. Decimos que $\mathcal{M}=\langle M, P_M, I_M\rangle$ es una estructura P-transitiva si P_M es la relación de pertenencia, P, restringida a M , P/M , e I_M es la relación de igualdad, I , restringida a M , $I/_M$, y además $\forall u,v \in U$ se tiene que $(uPv \text{ y } vPM) \longrightarrow uPM$, dicho en palabras, M es P-transitivo. De aquí en adelante, si $\mathcal{M}=\langle M, P_M, I_M\rangle$ es una estructura P-transitiva, ocacionalmente cometeremos un abuso de notación y escribiremos $\in$ y $=$ en lugar de P_M e I_M respectivamente.

Para ampliar un poco mas el panorama general, vamos a hacer una especie de clasificación de los modelos de la teoría de conjuntos, para esto agregamos las siguientes definiciones:

5.6 Definición.- Un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, P_M, I_M \rangle$ de la teoría de conjuntos es estandar sii $I_M = I/_M$ y $P_M = P/_M$.

5.7 Definición.- Un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, P_M, I_M \rangle$ de la teoría de conjuntos es transitivo sii $\mathfrak{M}$ es estandar y M es P_M-transitivo.

5.8 Definición.- Un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, P_M, I_M \rangle$ de la teoría de conjuntos es no-transitivo sii $\mathfrak{M}$ es estandar y M no es P_M-transitivo.

5.9 Definición.- Un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, P_M, I_M \rangle$ de la teoría de conjuntos es no-estandar sii $\mathfrak{M}$ no es estandar.

De esta manera, una gráfica de la clasificación de modelos de la teoría de conjuntos es lasiguiente:

$$
\text{Modelos de la teoría de conjuntos}
\begin{cases}
\text{Modelos Estandar} \begin{cases} \text{Modelos Transitivos} \\ \text{Modelos No-transitivos} \end{cases} \\
\text{Modelos No-estandar}
\end{cases}
$$

Volviendo a las estructuras transitivas, observemos que si α es un ordinal, entonces, α es transitivo ($\in$-transitivo) y por lo tanto, $\langle \alpha, \in, = \rangle$ es una estructura $\in$-transitiva.

Supongamos que $\mathfrak{M} = \langle M, \in, = \rangle$ es una estructura transitiva y supongamos que $\mathfrak{M} \models ZF$. Supongamos además que $\xi : \mathbb{N} \to M$ es una suceción en M tal que $\xi(1) = B \in M$ y que

$$\mathfrak{M} \models_{\xi} ABC(x_1)$$

donde $ABC(x_1)$ es la fórmula de ZF que dice " x_1 es un álgebra Booleana completa" .

De una manera mas compacta, se puede decir que B es un álgebra booleana completa "en el sentido de M" .

Ahora procedemos a construir M^B en una forma completamente análoga a la que se construyó U^B. Esta construcción se hace dentro de U .

5.10 Si $\alpha \in U$ es un ordinal, entonces definimos

$$M_\alpha^B := \{x / x : A \to B \text{ y } A \subset M_\xi^B \text{ p.a. } \xi < \alpha\}$$

y definimos

$$M^B := \bigcup_{\alpha \in ON} M_\alpha^B .$$

Igual que en el caso de U^B, el objetivo es construir un modelo $\mathfrak{M}^B = \langle M^B, P_M^B, I_M^B \rangle$ a partir del modelo $\mathfrak{M} = \langle M, P_M, I_M \rangle$, por lo tanto, lo que hace falta es definir las relaciones P_M^B, I_M^B, pero antes haremos algunas observaciones útiles.

Como $\mathfrak{M} \models ABC(B)$ (esto es una abreviación de $\mathfrak{M} \models_{\xi} ABC(x_1)$,

$\xi : \mathbb{N} \longrightarrow M$, $\xi(1) = B$), también tenemos que

$$\mathcal{M} \models \text{"}(x_2)(x_2 \subset B \rightarrow ((\exists x_3)(x_3 \in B \wedge SUP(x_3, x_2))))\text{"}.$$

donde $SUP(x_3, x_2)$ es la fórmula que dice " x_3 es el supremo de x_2 ", es decir,

$$SUP(x_3, x_2) : (x)(x \in x_2 \longrightarrow x_3 \geqslant x) \wedge (y)((x)(x \in x_2 \rightarrow y \geqslant x) \rightarrow x_3 \leqslant y))$$

Lo que significa todo esto, es que todo "subconjunto según M " de B tiene un "supremo según M ", es decir, si $X \in M$ y $X \subset B$ entonces X tiene un supremo según M . Que S es supremo según M de $X \subset B$ ($X \in M$) significa que:

$$\left(\forall_{m \in M}\ m \in X \rightarrow s \geqslant m\right) \text{ y } \left(\forall_{s' \in M}\left(\forall_{m \in M}\ m \in X \rightarrow s' \geqslant m\right) \rightarrow s \leqslant s'\right)$$

La relación $\leqslant$ que aparece en la expresión anterior es la relación en M que interpreta el símbolo formal $\leqslant$ que se puede definir en ZF y que representa el orden parcial canónico de un álgebra Booleana.

Hicimos la observación anterior respecto a la fórmula "todo subconjunto de B tiene un supremo",

$$(x_2)(x_2 \subset B \longrightarrow ((\exists x_3)(x_3 \in B \wedge SUP(x_3, x_2))))$$

porque esta fórmula, y la fórmula "todo subconjunto de B tiene un ínfimo", no tienen una propiedad que tienen todas las demás fórmulas para los axiomas de álgebra Booleana completa. Esta propiedad es que todas las variables de la fórmula están acotadas por un cuantificador relativizado a B , es decir, toda variable X aparece en una subformula de la forma $(x)(x \in B \rightarrow f(x))$ o de la forma $(\exists x)(x \in B \wedge f(x))$.

En el caso de la fórmula

$$(x_2)(x_2 \subset B \rightarrow ((\exists x_3)(x_3 \in B \wedge SUP(x_3, x_2))))\ ,$$

X_2 es la variable que no está acotada por un cuantificador relativizado a B . Lo que este hecho provoca son dos cosas:

1) Trivialmente, $\mathcal{U} \models_{\varsigma} AB(X_1)$, donde $\varsigma(1) = B$, es decir, B es un álgebra Booleana según $\mathcal{U}$.

2) En general, no se puede decir que $\mathcal{U} \models_{\varsigma} ABC(X_1)$, es decir, B no es necesariamente completa según $\mathcal{U}$.

5.11 Definición.- Si $X \subset B$ denotamos por $SUP^M X$ al supremo de X según $\mathcal{M}$ y por $INF^M X$ al ínfimo de X según $\mathcal{M}$.

5.12 Definición.- Para todo $(x,y) \in M^B \times M^B$ definimos simultaneamente, por recursión sobre $(\rho(x), \rho(y))$, lo siguiente:

$$N_{\in}^M(x,y) = \underset{z \in Dom(y)}{SUP^M} (y(z) \cdot N_{=}^M(z,x)) ,$$

$$N_{=}^M(x,y) = \underset{z \in Dom(x)}{INF^M} (x(z) \rightarrow N_{\in}^M(z,y)) \cdot \underset{z \in Dom(y)}{INF^M} (y(z) \rightarrow N_{\in}^M(z,x)) .$$

Como se puede ver, la definición de $N_{\in}^M$ y $N_{=}^M$ es completamente análoga a la de $N_{\in}$ y $N_{=}$, y por lo tanto, se puede verificar que es correcta de la misma manera en que se hizo para $N_{=}$ y $N_{\in}$.

5.13 Definición.- Si $x,y \in M^B$ entonces $(x,y) \in P_M^B$ sii $N_{\in}^M(x,y)=1$ y $(x,y) \in I_M^B$ sii $N_{=}^M(x,y)=1$.

Se puede probar que si $\mathcal{M} = \langle M, P_M, I_M \rangle$ es un modelo transitivo de ZF y B es un álgebra Booleana completa según $\mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}^B = \langle M^B, P_M^B, I_M^B \rangle$ es un modelo de ZF.

Extensiones $\mathcal{M}$-genéricas y Forcing.

Se puede decir que el origen del "forcing", o bién la "técnica de forcejeo" está en la historia de dos famosos problemas en Matemáticas que son el problema del axioma de elección y el problema de la hipótesis del continuo. De estos problemas, el del axioma de elección es el mas famoso, por cierto, la historia de este problema es chistosa, ya que actualmente la "validez intuitiva" del axioma de elección es aceptada por la mayoría de los matemáticos, de los cuales, a muchos les parece incomprensible que dicho axioma haya provocado tanta polémica durante las primeras cuatro décadas del siglo XX. Se puede decir que parte del origen de las discusiones acerca de este axioma fué que algunos lo rechazaban como esquema de razonamiento lógico (una información mas amplia de la historia del axioma de elección se encuentra en "Set theory and Lógic" de A. Fraenkel).

El problema de la hipótesis del continuo consiste en determinar que lugar ocupa el cardinal de los números reales, $|2^{\mathbb{N}}|$, en la lista de los cardinales $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots$; se sabe que $|2^{\mathbb{N}}| > \aleph_0$, y la hipótesis del continuo afirma que $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$ (para una información mas amplia acerca del problema de la hipótesis del continuo vea K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem?"). Como se ve, ambos problemas son importantes y por lo tanto, es importante saber cual es su situación, en lo que se refiere a consistencia e independencia, dentro del marco de la teoría axiomática de conjuntos. Actualmente, ambos problemas están resueltos. En 1938, K. Gödel probó que, tanto el axioma de elección como la hipótesis generalizada del continuo son consistentes en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, mientras que en 1963 P. Cohen probó que el axioma de elección es independiente de ZF y que la hipótesis del continuo es independiente de ZFC.

Decimos que el origen del "forcing" estaba en la historia de los problemas ya mencionados por la siguiente razón: K. Gödel, al probar la consistencia del axioma de elección (AC) y de la hipótesis generalizada del continuo (GCH), hizo lo siguiente:

i) Construyó (definió) una clase L a la que llamó universo construible.

ii) Probó lo siguiente acerca de L:

a) Para todo axioma φ de ZF se tiene que $ZF \vdash (L \models \varphi)$, es decir, L es modelo de ZF.

b) El axioma de constructibilidad es "cierto" en L (V=L es conocido como el axioma de constructibilidad), es decir, $ZF \vdash (L \models V=L)$.

c) Probó que en ZF V=L implica AC y GCH, es decir, $ZF \vdash (V=L \rightarrow AC \wedge GCH)$.

d) Concluyó que en ZF L realiza a AC y a GCH.

Sin embargo, P. Cohen, en su camino para probar la independencia de AC y GCH, se encontró con el siguiente obstáculo que él mismo cita como un "resultado negativo" en su libro "Set Theory and the Continuum Hypothesis" ;

5.2 **Teorema.-** (Shepherson, 1953) Si M es una clase entonces $ZF \nvdash (M \models V \neq L)$.

Demostración: vea la página 108 del libro antes mencionado.

Como corolario de este resultado y del inciso (c) anterior, tenemos:

5.3 **Teorema.-** Si M es una clase entonces $ZF \nvdash (M \models \neg AC)$. y $ZFC \nvdash (M \models \neg GCH)$.

Demostración: Sea M una clase.

Sabemos que $ZF \vdash \neg AC \rightarrow V \neq L$,

$\therefore\ ZF \vdash (M \models (\neg AC \rightarrow V \neq L))$

$\therefore\ ZF \vdash (M \not\models \neg AC) \vee (M \models V \neq L)$

por lo tanto, si $ZF \vdash (M \models \neg AC)$ entonces $ZF \vdash (M \models V \neq L)$!

$\therefore\ ZF \nvdash (M \models \neg AC)$.

En particular, $ZF \nvdash (V \models \neg AC)$.

Por lo tanto, $ZF \nvdash \neg AC$ (ya que se puede probar facilmente, por inducción sobre la longitud de φ , que $ZF \vdash (\varphi \leftrightarrow (V \models \varphi))$).

Por otro lado, sabemos que $ZFC \vdash \neg GCH \rightarrow V \neq L$,

$\therefore\ ZFC \vdash (M \models (\neg GCH \rightarrow V \neq L))$

$\therefore\ ZFC \vdash (M \not\models \neg GCH) \vee (M \models V \neq L)$

por lo tanto, si $ZFC \vdash (M \models \neg GCH)$ entonces $ZFC \vdash (M \models V \neq L)$

$\therefore\ ZF \vdash (AC \rightarrow (M \models V \neq L))$

$\therefore\ ZF \vdash \neg AC$ o $ZF \vdash (M \models V \neq L)$!

$\therefore\ ZFC \nvdash (M \models \neg GCH)$. $\square$

Como habíamos mencionado antes, lo que hizo K. Gödel para probar la consistencia de AC y GCH fué dar un "modelo interno" de AC y GCH, es decir, probó que $ZF \vdash ((L \models AC) \wedge (L \models GCH))$, donde L es una clase determinada por una fórmula de ZF, por lo tanto, lo único que falta para probar la independencia de AC y GCH es dar un "modelo" de $\neg AC$ y $\neg GCH$. Sin embargo, el asunto no es tan sencillo porque el resultado anterior nos dice que no podemos buscar este modelo en forma análoga a la que lo hizo K. Gödel. Este es un hecho grave porque, si queremos seguir por el camino de los modelos, nos quedan dos opciones:

1) Buscar dos modelos no-estándar M_1 y M_2 tales que

$$ZF \vdash (\langle M_1, P_1, I_1 \rangle \models \neg AC).$$

y $$ZF \vdash (\langle M_2, P_2, I_2 \rangle \models \neg GCH)$$

2) Modificar el lenguaje de ZF enriqueciendolo con nuevas constantes (esto corresponde a la idea intuitiva de agregar "nuevos" conjuntos al universo) y extender la definición de satisfabilidad a este nuevo lenguaje.

El problema está en que buscar un modelo no-estándar es "aventurarse en un mundo desconocido", la razón de esto es que nuestros conceptos intuitivos de conjunto y de pertenencia son muy "profundos" y nos sería difícil pensar en objetos, que no sean conjuntos ni pertenencia, que satisfagan los axiomas de ZF. Fué por esto por lo que P. Cohen pensó en la segunda opción, que es, en cierta manera, la base del forcing. A continuación exponemos la idea global del forcing.

Como deciamos, lo que se pretende es agregar al lenguaje de ZF constantes que representen nuevos conjuntos, pero, por supuesto, estos nuevos conjuntos deben tener cierta "interacción" con los conjuntos viejos (al decir conjuntos viejos estamos considerando también a las clases), por ejemplo, uno puede preguntarse que resulta de la intersección de un conjunto viejo con un conjunto nuevo. La respuesta a esto no es inmediata, en realidad depende del "significado" que tengan los conjuntos nuevos (el "significado" de los conjuntos viejos está dado por los axiomas para los conjuntos y por las fórmulas del lenguaje para clases). Por supuesto, el "significado" de los conjuntos nuevos no puede estar dado solamente por los axiomas ni tampoco por las fórmulas del lenguaje porque, de ser así, no serían nuevos. El hecho de que una fórmula no pueda determinar un conjunto nuevo no puede estar dado completamente por una propiedad expresable en el lenguaje de ZF.

Fué quizá esto lo que motivó que P. Cohen pensara en conjuntos nuevos cuyo significado o descripción estuviera dado parcialmente, es decir, conjuntos cuya descripción no está dada por una fórmula sino por cierta información parcial.

Un mecanismo que sirve para formalizar la idea de "dar información parcial del conjunto" es el siguiente :

- Podemos considerar que una sucesión finita de unos y ceros nos da información acerca de qué números naturales pertenecen a un conjunto nuevo X. Por ejemplo, la sucesión finita (10110) nos dice que $0 \in X$, $1 \notin X$, $2 \in X$, $3 \in X$, $4 \notin X$ y no nos dice nada acerca de los demás números naturales. En general, la sucesión finita $s=(s_0, s_1, \ldots, s_n)$, $s_i \in \{0,1\}$, nos dice que $k \in X$ si $s_k = 1$ y que $k \notin X$ si $s_k = 0$. De manera muy informal (que quede claro), si P es una propiedad (una fórmula de ZF) y s es una sucesión finita, decimos que s forza a P, $s \Vdash P$, si s contiene suficiente información para concluir que P es "cierta". Por ejemplo, si $s=(10110)$, entonces $s \Vdash 0 \in X$ y $s \Vdash (1984,3) \in \omega \times X$ pero $s \nVdash 5 \in X$ y $s \nVdash 5 \notin X$. Es necesario hacer algunas observaciones acerca de todas estas ideas :

1) Si $s=(10110)$ y $t=(10110, t_5, t_6, \ldots t_n)$ entonces : si $s \Vdash P$ entonces $t \Vdash P$, ya que " t tiene más información que s ". Alo que esto nos lleva directamente, es que podemos definir un orden parcial entre todas las sucesiones finitas de unos y ceros de la siguiente manera :

Si $s=(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ y $t=(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ entonces: $s<t$ sii ($n<m$ y $s_k = t_k$ $\forall k \leq n$).

De esta manera tenemos que

si $s \leq t$ y $s \Vdash P$ entonces $t \Vdash P$

A las sucesiones finitas de unos y ceros, y en general a los elementos de un orden parcial, se les conoce como condiciones de forcing o bién condiciones de forcejeo.

2) Pueden existir condiciones de forcing "incompatibles", por ejemplo, si $s=(10110)$ y $t=(10111)$ entonces $s \Vdash 4 \in X$ y $t \Vdash 4 \notin X$. Este hecho no es motivo de preocupación, ni va en contra de la idea intuitiva del forcing, ya que pensamos en $s \Vdash P$ como el siguiente enunciado condicional:

" Si la condición s describe a X entonces se cumple P ". Esta es la razón por la que llamamos "condiciones de forcing" a los elementos de un orden parcial y es la idea de "incompatibilidad" que hemos dado, lo que motiva la siguiente definición:

5.14 Definición.- Si $(P, <)$ es un orden parcial y $s, t \in P$ entonces

$$s \text{ y } t \text{ son compatibles sii } \underset{r \in P}{\exists}\, s \leq r \text{ y } t \leq r.$$

Nota: Más adelante, por razones técnicas, modificaremos ligeramente esta definición de compatibilidad.

Todo lo que hemos dicho anteriormente respecto a la idea de agregar un conjunto nuevo es intuitivamente correcta, pero tiene el siguiente problema técnico: si X es el conjunto nuevo que estamos agregando al modelo $\mathfrak{M}$, no podemos agregar solamente X, sino que hay que agregar todos los conjuntos "construibles en $\mathcal{M}$ " a partir de X . Para resolver este problema, en lugar de tomar el camino de la "constructibilidad relativa" tomaremos un camino un poco más rico en cuanto a "recursos matemáticos" y que es precisamente el método de Scott-Solovay de modelos booleano valuados y extensiones M-genéricas.

De manera breve, podemos decir que el método de Scott-Solovay consiste en lo siguiente: (aunque empleamos conceptos que serán definidos más adelante, esta idea global es útil)

El objetivo es: dado un modelo transitivo de ZF, $\mathcal{M}$, y un enunciado, φ , en el lenguaje de ZF, encontrar una "extensión", $\mathcal{M}_\varphi$, de $\mathcal{M}$, tal que $\mathcal{M}_\varphi \models \varphi$.

La forma de lograr este objetivo es la siguiente:

1) Comenzamos con un conjunto parcialmente ordenado P (conjunto de condiciones de forcing).

   Este conjunto , P , no representa precisamente la idea que expresamos en los párrafos anteriores, sino más bién la "base" para la construcción de $\mathcal{M}_\varphi$. Como se puede sospechar, P debe ser construida, de manera adecuada, a partir de φ, o bién, se pueden evitar este paso y el siguiente, y construir directamente el álgebra booleana que se necesita, pero esto podría resultar aún más difícil.

2) "Completar" P a un álgebra booleana completa B .

3) Tomar $\mathcal{M}^B/U$, $\mathcal{M}^B$ módulo un ultrafiltro $\mathcal{M}$ -genérico adecuado, U . $\langle \mathcal{M}^B/U, \in^U, =^U \rangle$, donde $\in^U$ y $=^U$ son,

respectivamente, la "pertenencia" y la "igualdad" definidas en $\mathcal{M}^B/U$ en forma adecuada, resulta ser un modelo de ZFC.

4) Emplear el "lema de Mostowski" para obtener un modelo $\in$-transitivo, $\mathcal{M}[U]$, isomorfo a $\langle \mathcal{M}^B/U, \in^U, =^U \rangle$.

Si elegimos correctamente a P, o B según sea el caso, y U, entonces $\mathcal{M}[U]$ es la extensión $\mathcal{M}_\varphi$ de $\mathcal{M}$ que estamos buscando, es decir, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[U]$ y $\mathcal{M}[U] \models \varphi$.

A continuación explicamos detalladamente cada uno de los puntos anteriores.

Para nuestros propósitos generales, nos hace falta definir la compleción de un orden parcial, las siguientes definiciones están encaminadas a este propósito.

5.15 Definición.- Si $(P, <)$ es un orden parcial entonces

D es denso en P sii $D \subseteq P$ y $\forall_{q \in P} \exists_{d \in D} \; d \leq q$.

Esta definición es congruente con el concepto topológico de densidad. Para ver esto, basta tomar la "topología del orden" de P, que se obtiene tomando como base la siguiente familia: $\{O_p / p \in P\}$, donde $O_p = \{q \in P / q \leq p\}$.

5.16 Definición.- Si $(P, <)$ es un orden parcial y $q, r \in P$, decimos que q y r son compatibles sii existe $c \in P$ tal que $c \leq q$ y $c \leq r$.

5.17 Definición.- Si $(P, <)$ es un orden parcial, decimos que P es separativo (algunos autores emplean "refinado" en lugar de "separativo") sii para todo $q, r \in P$

$(q \nleq r \Rightarrow \exists_{t \in P} (t \leq q$ y t y r no son compatibles$))$.

5.18 Definición.- Si $(P, <)$ es un orden parcial, decimos que U es una cortadura de P sii $U \subseteq P$ y

$(q \leq r$ y $r \in U) \Rightarrow q \in U$.

5.19 Definición.- Si U es una cortadura de un orden parcial, P, decimos que U es regular sii

$$\forall_{q\in P}\ q \notin U \Rightarrow \exists_{r\in P} (r \leq q \text{ y } O_r \cap U = \emptyset)$$

donde $O_r := \{x \in P / x \leq r\}$.

O_r resulta ser un básico de la "topología de orden" de P , y, como era de esperarse, una cortadura regular es un abierto regular en dicha topología.

Con las definiciones anteriores estamos en posición de probar un resultado básico en lo que se refiere a la compleción de un orden parcial.

5.4 Teorema.- Si $(P,<)$ es un orden parcial separativo, entonces, existe un álgebra booleana completa, B , y una función inyectiva $\alpha : (P,<) \longrightarrow (B-\{0\},<)$ tal que :

i) $r<q$ sii $\alpha(r)<\alpha(q)$

ii) $\alpha[P]$ es denso en $(B-\{0\},<)$

y B es única excepto por isomorfismo.

Demostración:

Lo primero que haremos será probar lo siguiente:

5.5 Lema.- Si $(P,<)$ es un orden parcial entonces P es separativo sii $\forall_{x\in P}$ O_x es una cortadura regular.

Supongamos que P es separativo.

Sea $x \in P$ y supongamos que $q \notin O_x$, entonces $q \nleq x$ y como P es separativo, existe $x' \leq q$ tal que x y x' no son compatibles, $\therefore \nexists_{z\in P} (z \leq x \text{ y } z \leq x')$

$\therefore\ O_{x'} \cap O_x = \emptyset$,

por lo tanto, O_x es una cortadura regular, y si $r, q \in P$ son tales que $r \not\leq q$ entonces O_q es una cortadura regular y $r \notin O_q$, $\therefore \exists_{t \in P} (t \leq r \text{ y } O_t \cap O_q = \emptyset)$,

$\therefore \nexists_{z \in P} (z \leq t \text{ y } z \leq q)$

por lo tanto, t y q no son compatibles y $t \leq r$,

$\therefore\ P$ es separativo.

Para nuestra demostración pendiente, necesitaremos también la definición de $\overline{\overline{U}}$ que de hecho es la mínima cortadura regular que contiene a la cortadura U :

5.20 Definición.- Si U es una cortadura de un orden parcial, P , definimos $\overline{\overline{U}} := \{x \in P / \forall_{y \leq x}\ O_y \cap U \neq \emptyset\}$.

5.6 Lema.- Si U es una cortadura de P entonces $\overline{\overline{U}}$ es una cortadura regular tal que $U \subseteq \overline{\overline{U}}$.

Dem: Si $z \in U \subseteq P$ y $y \leq z$ entonces $y \in U$ y $y \in O_y$

$\therefore\ O_y \cap U \neq \emptyset$, $\therefore\ z \in \overline{\overline{U}}$, por lo tanto $U \subseteq \overline{\overline{U}}$.

Si $x \in \overline{\overline{U}}$ y $z \leq x$ entonces $\forall_{y \leq x}\ O_y \cap U \neq \emptyset$,

por lo tanto, $\forall_{y \leq z}\ O_y \cap U \neq \emptyset$, $\therefore\ z \in \overline{\overline{U}}$,

por lo tanto $\overline{\overline{U}}$ es cortadura de P .

Si $q \notin \overline{\overline{U}}$ entonces $\exists_{r \leq q}\ O_r \cap U = \emptyset$;

supongamos que $O_r \cap \overline{\overline{U}} \neq \emptyset$, si $a \in O_r \cap \overline{\overline{U}}$ entonces $a \leq r$ y $\forall_{t \leq a}\ O_t \cap U \neq \emptyset$, en particular, $O_a \cap U \neq \emptyset$,

pero $a \leq r$, por lo tanto $O_a \subseteq O_r$ y $O_r \cap U = \emptyset$,

$\therefore\ O_a \cap U = \emptyset$ ¡

$\therefore\ O_r \cap \overline{\overline{U}} = \emptyset$,

por lo tanto $\overline{\overline{U}}$ es una cortadura regular.

Ahora supongamos que U' es una cortadura regular tal que $U \subseteq U'$. Sea $v \in \overline{\overline{U}}$, entonces $\underset{t \leq v}{\forall}\ O_t \cap U \neq \emptyset$; si $v \notin U'$ entonces $\underset{t \leq v}{\exists}\ O_t \cap U' = \emptyset$ y $U \subset U'$,

$\therefore\ O_t \cap U = \emptyset$ y $t \leq v$! ,

$\therefore\ v \in U'$, $\therefore\ \overline{\overline{U}} \subseteq U'$,

por lo tanto $\overline{\overline{U}}$ es la mínima cortadura regular tal que $U \subseteq \overline{\overline{U}}$.

Con la ayuda de los lemas anteriores, procedemos a demostrar el teorema pendiente.

Definimos:

$B = \{c \,/\, c$ es una cortadura regular de $P\}$,

$0 = \emptyset$, $1 = P$,

$a \cdot b = a \cap b \quad \forall a, b \in B$ (obviamente, la intersección de una familia arbitraria de cortaduras regulares es una cortadura regular) ,

$a + b = \overline{\overline{a \cup b}} \quad \forall a, b \in B$,

$a' = \{r \,/\, O_r \cap a = \emptyset\} \quad \forall a \in B$ (claramente, a' es una cortadura de P , y si $z \in a'$ entonces $O_z \cap a \neq \emptyset$, sea $t \in O_z \cap a$; si $x \in O_t \cap a'$ entonces $x \leq t$ y $O_x \cap a = \emptyset$, pero $x \leq t \in a$ y a es cortadura, $x \in a$ y $x \in O_x$, $O_x \cap a \neq \emptyset$! ,

$\therefore\ O_t \cap a' = \emptyset$ y $t \leq z$, por lo tanto a' es una cortadura regular) .

Se puede probar directamente que $(B,+,\cdot,',1,0)$ es un álgebra booleana. De hecho, esta álgebra resulta ser el álgebra conocida como "el álgebra de los abiertos regulares" del espacio topológico que ya hemos mencionado.

Ahora veremos que $(B,+,\cdot,',1,0)$ es completa.

Supongamos que $A \subseteq B$;

Definimos $I := \bigcap A$ y $S := \overline{\overline{\bigcup A}}$.

Se puede probar facilmente que $\operatorname{INF} A = I$, nosotros solo probaremos que $\operatorname{SUP} A = S$;

Sea $a \in A$,

$a \cdot s = a \cap s = a \cap (\overline{\overline{\bigcup A}})$, pero $a \subseteq \bigcup A \subseteq \overline{\overline{\bigcup A}}$,

$\therefore\ a \cdot s = a \cap (\overline{\overline{\bigcup A}}) = a$

$\therefore\ a \leq s \quad \forall a \in A$,

y si $s' \in B$ es tal que $a \leq s' \ \forall a \in A$, entonces

$s' \cdot a = a \quad \forall a \in A$, $\therefore\ s' \cap a = a \quad \forall a \in A$,

$\therefore\ a \subseteq s' \quad \forall a \in A$, $\therefore\ \bigcup A \subseteq s'$,

pero $\overline{\overline{\bigcup A}}$ es la mínima cortadura regular tal que $\bigcup A \subseteq \overline{\overline{\bigcup A}}$,

por lo tanto $\overline{\overline{\bigcup A}} \subseteq s'$,

$\therefore\ s' \cdot \overline{\overline{\bigcup A}} = s' \cap \overline{\overline{\bigcup A}} = \overline{\overline{\bigcup A}}$, $\therefore\ \overline{\overline{\bigcup A}} \leq s'$

$\therefore\ \operatorname{Sup} A = s = \overline{\overline{\bigcup A}}$,

por lo tanto B es completa.

Solamente nos falta definir $e : (P,<) \longrightarrow (B-\{0\},<)$;
si $r \in P$ definimos $e(r) = O_r$. Aquí es donde se usa el

hecho de que P sea separativo, ya que, por el lema que probamos, O_r es una cortadura regular de P y por lo tanto e está bién definida.

e cumple con el inciso (i) porque si $q < r$ entonces

$$O_q \subseteq O_r \,,$$

$$r \in O_r - O_q \,, \quad \therefore O_q \neq O_r$$

$$\therefore O_q \cdot O_r = O_q \cap O_r = O_q$$

$$\therefore O_q \subseteq O_r \ \text{ y } \ O_q \neq O_r$$

$$\therefore e(q) = O_q < O_r = e(r)$$

y si $O_q < O_r$ entonces $O_q \neq O_r$ y $O_q \cdot O_r = O_q \cap O_r = O_q$

$$\therefore O_q \subseteq O_r \ \text{ y } \ O_q \neq O_r$$

$$\therefore q < r$$

por lo tanto $q < r$ sii $e(q) < e(r)$,

más aún, e es inyectiva, ya que

si $q \neq r$ y $q \not< r$ entonces $q \in O_q - O_r$,

por lo tanto $e(q) = O_q \neq O_r = e(r)$.

Para ver que $e[P]$ es denso en $(B-\{0\}, <)$, observamos que si $b \in B-\{0\}$ entonces b es una cortadura regular de P y $b \neq \emptyset$;

sea $r \in b \subseteq P$, $e(r) = O_r \subset b$ porque b es cortadura,

$$\therefore O_r \cdot b = O_r \cap b = O_r \,, \quad \therefore O_r \leqslant b \ \text{ y } \ O_r \in e[P],$$

por lo tanto $e[P]$ es denso en $(B-\{0\}, <)$.

Finalmente, la unicidad de B , excepto por isomorfismo, se verifica de la siguiente manera:

Supongamos que B', un álgebra booleana completa, y

$e' : (P,<) \longrightarrow (B'-\{0\},<')$ satisfacen los requisitos del teorema que estamos probando.

Para todo $X \in B$ definimos $P_X := \{r \in P \,/\, e(r) \leqslant X\}$

y definimos $f:(B,<) \longrightarrow (B',<')$ tal que $f(X) = \mathrm{Sup}\ e'[P_X]$.

Observemos que

$$P_{O_s} = \{r \,/\, e(r) \leqslant O_s\} = \{r \,/\, O_r \leqslant O_s\} = O_s$$

$$\therefore\ e'[P_{O_s}] = e'[O_s],$$

y como $e'(s) \in e[O_s]$ y $e'(s) \geqslant e'(r)$ $\forall r \in e'[O_s]$,

$f(O_s) = \mathrm{Sup}\ e'[O_s] = e'(s)$.

También observemos que $e(r) = O_r \neq \emptyset = 0$ $\forall r \in P$,

$$\therefore\ P_0 = \{r \,/\, e(r) \leqslant 0\} = \emptyset$$

$$\therefore\ f(0) = \mathrm{Sup}\ e'[P_0] = \mathrm{Sup}\ \emptyset = 0$$

Además, si $X \neq 0$ entonces $f(X) \neq 0$, ya que $\underset{r \in P}{\exists}\ e(r) \leqslant X$,

$$\therefore\ f(e(r)) = e'(r) \leqslant f(X) \ \text{ y } \ e'(r) \neq 0,$$

$$\therefore\ f(X) \neq 0$$

por lo tanto $f(X) = 0$ sii $X = 0$.

i) $X = \mathrm{Sup}\ e[P_X]$:

Si $z \in e[P_X]$ entonces $z = e(r) \leqslant X$ p.a. $r \in P$;

supongamos que $z \leq X_1$ $\forall z \in e[P_X]$,

si $a \in P_X$ entonces $a \in O_a = e(a) \leq X$ y $a \in O_a = e(a) \leq X_1$

$$\therefore\ a \in X \wedge X_1$$

$$\therefore\ P_X \subseteq X \wedge X_1$$

Además, si $r \leqslant X$ entonces $O_r \subseteq X$ porqué X es cortadura,

$\therefore\ e(r) = O_r \leq X$,

$\therefore\ r \in P_X$, $\therefore\ X \subseteq P_X$, $\therefore\ X \subseteq P_X \subseteq X \cap X_1$, $\therefore\ X \leq X \cdot X_1$

$\therefore\ X \leq X \cdot X_1$ y claramente $X \cdot X_1 \leq X$,

por lo tanto $X \cdot X_1 = X$ y $\therefore\ X \leq X_1$,

$\therefore\ X = \mathrm{Sup}\ e[P_X]$.

ii) El hecho de que $X = \mathrm{Sup}\ e[P_X]$ es una consecuencia directa de la densidad de $e[P]$ en B , y por lo tanto, sucede algo análogo en B' :

Si definimos $Q_z := \{r / e'(r) \leq' z\}$ entonces $\forall_{z \in B'}\ z = \mathrm{Sup}\ e'[Q_z]$. Esto se ve de la siguiente manera:

Claramente, $z \geq' e'(r)\ \forall r \in Q_z$, por lo tanto z es cota superior de $e'[Q_z]$.

Ahora bién, $z = 0$ implica $Q_z = \emptyset$, por lo tanto, si $z = 0$ entonces $z = \mathrm{Sup}\ e'[Q_z]$. Supongamos que $z \neq 0$, entonces:

si $y \geq' e'(r)\ \forall r \in Q_z$ entonces

si $z \not\leq' y$ entonces $z y' \neq 0$, y como $e'[P]$ es denso en $(B' - \{0\}, <')$, $\exists_{s \in P}\ e'(s) \leq' z y' \leq' z, y'$,

$\therefore\ e'(s) \leq' y'$ y $s \in e'[Q_z]$,

$\therefore\ e'(s) \leq' y, y'$, $\therefore\ e'(s) \leq' y \cdot y' = 0$, $\therefore\ e'(s) = 0$ ¡

$\therefore\ z \leq' y$

por lo tanto $z = \mathrm{Sup}\ e'[Q_z]$.

La función f es un homomorfismo :

iii) La función f preserva el producto :

Nenesitamos probar que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$;

Sea $a := f(x \cdot y) = \operatorname{Sup}\{e'(r) / e(r) \leqslant x \cdot y\}$, entonces

. $a \geqslant e'(r)$ si $e(r) \leqslant x \cdot y$,

por lo tanto, $a \cdot e'(r) = e'(r)$ si $e(r) \leqslant x \cdot y$;

analogamente, si $b := f(x) = \operatorname{Sup}\{e'(r) / e(r) \leqslant x\}$ y

$c := f(y) = \operatorname{Sup}\{e'(r) / e(r) \leqslant y\}$, entonces

$$b \cdot e'(r) = e'(r) \quad si \quad e(r) \leqslant x$$

$$y \quad c \cdot e'(r) = e'(r) \quad si \quad e(r) \leqslant y$$

Ahora usaremos que $v \cdot \operatorname{Sup}_{i \in I} v_i = \operatorname{Sup}_{i \in I} (v \cdot v_i)$.

Si $d := ab = \operatorname{Sup}\{a e'(r) / e(r) \leqslant x\}$ entonces

$d \cdot a e'(r) = d e'(r) = a e'(r)$ si $e(r) \leqslant x$;

analogamente, $d e'(r) = b e'(r)$ si $e(r) \leqslant y$,

por lo tanto, $d e'(r) = e'(r)$ si $e(r) \leqslant x, y$.

Si $g := dc = \operatorname{Sup}\{d e'(r) / e(r) \leqslant y\}$ entonces

$g e'(r) = d e'(r)$ si $e(r) \leqslant y$,

por lo tanto, $g e'(r) = e'(r)$ si $e(r) \leqslant x, y$.

Con todo lo anterior, tenemos que

$$b \cdot c = \operatorname{Sup}\{b e'(r) / e(r) \leqslant y\}$$

y si $e(r) \leqslant y$ entonces

$$g \cdot (b e'(r)) = g e'(r) = d e'(r) = b e'(r)$$

$\therefore$ $g \geqslant b e'(r)$ si $e(r) \leqslant y$,

por lo tanto, $g \geqslant bc$, pero $g = a \cdot b \cdot c$, $\therefore$ $g \leqslant bc$,

$\therefore$ $g = bc$, $\therefore$ $f(x \cdot y) \cdot f(x) \cdot f(y) = f(x) \cdot f(y)$,

$\therefore$ $f(x \cdot y) \geqslant f(x) \cdot f(y)$.

Para mostrar que la otra desigualdad también se cumple, vemos que $P_{xy} \subseteq P_x \cap P_y$ ya que $xy \leqslant x, y$,

$$\therefore\ e'[P_{xy}] \subseteq e'[P_x \cap P_y] \subseteq e'[P_x] \wedge e'[P_y]$$

$$\therefore\ \mathrm{Sup}\ e'[P_{xy}] \leqslant \mathrm{Sup}\,(e'[P_x] \wedge e'[P_y]) \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{Sup}\ e'[P_x]) \cdot (\mathrm{Sup}\ e'[P_y])$$

$$\therefore\ f(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y)$$

por lo tanto, $f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y)$.

iv) La función f preserva el complemento :

Sea $a := f(x') = \mathrm{Sup}\ e'[P_{x'}]$,

$x' = \{ q \in P \,/\, O_q \cap x = \emptyset \}$;

sea $b := f(x)' = (\mathrm{Sup}\ e'[P_x])' = \underset{z \in e'[P_x]}{\mathrm{INF}}\ z'$,

$a \cdot b = \mathrm{INF}\, \{ a \cdot e'(r)' \,/\, e(r) \leqslant x \}$.

Si $e(r) \leqslant x$ entonces :

$a \cdot e'(r)' = \mathrm{Sup}\, \{ e'(s) \cdot e'(r)' \,/\, e(s) \leqslant x' \}$,

$e(r) \leqslant x \Rightarrow e(r)' \geqslant x' \geqslant e(s)$,

$\therefore\ e(s) \leqslant e(r)'$ y $s \in O_s = e(s) \subseteq e(r)' = O_r'$, $\therefore\ s \in O_r'$,

$\therefore\ O_s \cap O_r = \emptyset$

$\therefore\ f(O_s \cdot O_r) = 0$, $\therefore\ f(O_s) \cdot f(O_r) = 0$

$\therefore\ e'(s) \cdot e'(r) = 0$

$\therefore\ e'(s) \cdot e'(r)' = e'(s)$

$\therefore\ a \cdot e'(r)' = \mathrm{Sup}\, \{ e'(s) \,/\, e(s) \leqslant x' \} = a$

$\therefore\ a \cdot b = \mathrm{INF}\, \{ a \cdot e'(r) \,/\, e(r) \leqslant x \} = \mathrm{INF}\, \{a\} = a$,

por lo tanto, si $e(r) \leqslant x$ entonces $a \leqslant b$.

Por otro lado,

$$a\cdot b = \operatorname{Sup}\{e'(r)\cdot b \,/\, e(r) \leq x'\}$$

$$e(r) \leq x' \implies e'(r)\cdot b = \operatorname{INF}\{e'(r)\cdot e'(s) \,/\, e(s) \leq x\}$$

$$e(s) \leq x \implies e(s)' \geq x' \geq e(r)$$

$$\therefore\ e(s)' \geq e(r) \quad y \quad e(s) \leq e(r)'$$

$$\therefore\ s \in O_s = e(s) \subseteq e(r)' = O_r' \quad , \therefore\ s \in O_r'$$

$$\therefore\ O_s \cap O_r = \emptyset ,$$

$$\therefore\ f(O_s \cdot O_r) = f(O_s)\cdot f(O_r) = f(\emptyset) = 0$$

$$\therefore\ e'(s)\cdot e'(r) = 0 \quad , \therefore\ e'(s)\cdot e'(r)' = e'(s)$$

por lo tanto, si $e(r) \leq X'$ **entonces:**

$$e'(r)\cdot b = \operatorname{INF}\{e'(r)\cdot e'(s) \,/\, e(s) \leq x\} =$$

$$= \operatorname{INF}\{e'(s) \,/\, e(s) \leq x\} = b$$

$$\therefore\ a\cdot b = \operatorname{Sup}\{e'(r)\cdot b \,/\, e(r) \leq x'\} = \operatorname{Sup}\{b\} = b$$

$$\therefore\ a \geq b ,$$

por lo tanto, $f(X') = a = b = f(x)'$.

v) Puesto que f **preserva el producto y el complemento,** f **preserva la suma y por lo tanto** f **es un homomorfismo. Una consecuencia directa de esto es que** $X \leq y$ **implica** $f(x) \leq f(y)$ **.**

vi) La función f **es inyectiva, porque si** $f(x) = f(y)$ **entonces:**

$$f(xy') = f(x)\cdot f(y)' = f(x)\cdot f(x)' = 0 \ , \therefore\ xy' = 0 \ , \therefore\ x \leq y \ ,$$

y $f(yx') = f(y)\cdot f(x)' = f(y)\cdot f(y)' = 0 \ , \therefore\ yx' = 0 \ , \therefore\ y \leq x$,

por lo tanto $X = y$ **.**

vii) La función f **es suprayectiva. Para ver esto, tomamos**

$z \in B'$, $z \neq 0$ $(z = 0 = f(0))$.

Definimos $x := \mathrm{Sup}\ e[Q_z]$. **Como** $z \in B'$, $z = \mathrm{Sup}\ e'[Q_z]$, **por lo tanto, lo que hace falta demostrar es que** $f(x) = \mathrm{Sup}\ e'[P_x] = \mathrm{Sup}\ e'[Q_z] = z$, **lo cual resulta obvio si se ha demostrado antes que** $P_x = Q_z$ **:**

$P_x \supseteq Q_z$ **porque** $x = \mathrm{Sup}\ e[Q_z]$ **y** $\therefore$ $x \geq e(r)$ $\forall r \in Q_z$; **además, si** $P_x - Q_z \neq \emptyset$, **entonces tomemos** $r \in P_x - Q_z$, **por lo tanto** $r \not\leq s$ $\forall s \in Q_z$, **de lo contrario** $r \in Q_z$. **Puesto que** $z \neq 0$, $Q_z \neq \emptyset$. **Sea** $s \in Q_z$, **entonces** $r \not\leq s$ **y, por la separatividad de** P, **existe** $t \in P$ **tal que** $t \leq r$ **y** t **y** s **no son compatibles. Pero :**

$e(t) \leq e(r) \leq x$, $\therefore$ $t \in P_x$,

$\therefore$ $\mathrm{INF}\ e[P_x] \leq e(t)$ **y** $e[P_x] \supseteq e[Q_z]$,

por lo tanto $\mathrm{INF}\ e[P_x] \leq e(s)$, **y como** $e[P]$ **es denso en** $(B - \{0\}, <)$, $\underset{u \in P}{\exists}\ e(u) \leq \mathrm{INF}\ e[P_x]$,

$\therefore$ $e(u) \leq e(t), e(s)$,

$\therefore$ $u \leq t, s$ $\underset{0}{\blacktriangledown}$ **ya que** t **y** s **no son compatibles.**

$\therefore$ $P_x - Q_z = \emptyset$, $\therefore$ $P_x \subseteq Q_z$, $\therefore$ $P_x = Q_z$,

por lo tanto, $z = \mathrm{Sup}\ e'[Q_z] = \mathrm{Sup}\ e'[P_x] = f(x)$.

Con esto concluimos la demostración del teorema.

Teorema de Mostowski

El resultado que vamos a probar es esta sección es conocido como el "Mostowski's Collapsing Theorem".

Este teorema es una especie de generalización del teorema que dice que todo conjunto bién ordenado es isomorfo a un ordinal, ya que, lo que más o menos dice es que toda clase C con una relación E, "parecida a $\in$", (extensional) tal que E "bién ordena a C" (es bién fundada) es isomorfa a un "ordinal" (clase transitiva).

5.7 Teorema de Mostowski .- Si C es una clase y $E \subseteq C \times C$ es una relación extensional y bién fundada, entonces existe una única clase transitiva T y un único isomorfismo

$$f: C \to T \ni \forall_{x,y \in C} (x,y) \in E \text{ sii } f(x) \in f(y)$$

Dem:

Si definimos $G: U \times U \to U \ni G(x,y) = y$ entonces por el teorema de recursión sobre relaciones bién fundadas

$$\exists F: C \to U \text{ tal que } F(x) = G(x, F/_{[x]_{(C,E)}}) =$$

$$= F/_{[x]_{(C,E)}}$$

Sean $T := F[C]$ y $f: C \to T \ni f = F/T$.

$$\therefore f(x) = f/_{[x]_{(C,E)}} = F[[x]_{(C,E)}] = \{ f(y) / (y,x) \in E \}$$

Veamos que f y T tienen las propiedades que se enuncian en el teorema.

i.- T es transitiva

Si $x \in y \in T$ ent

$x \in y = f(b) = \{ f(z) / (z,b) \in E \}$ p.a. $b \in C$

$\therefore$ $x = f(z)$ p.a. $z \in C$ $\therefore$ $x \in f[C] = T$

ii.- Como $T = F[C]$, f es suprayectiva

iii.- Para probar que f es inyectiva, usaremos inducción sobre relaciones bién fundadas

$$\text{Sea } D := \{ x \in C / \forall_{y \in C} (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)) \}$$

a) Si m es E-minimal de C, ent

si $m \neq y$, como E es extensional,

$[m]_{(C,E)} \neq [y]_{(C,E)}$, Pero $[m]_{(C,E)} = \emptyset$ y

$f(m) = \emptyset$ $\therefore$ $f(y) = f([y]_{(C,E)}) \neq \emptyset = f(m)$

$\therefore$ $f(m) \neq f(y)$.

b) Si $\forall_{z \in C} ((z,x) \in E \rightarrow z \in D)$ ent:

Si $x \neq y$ ent, por ser E extesional

$[x]_{(C,E)} \neq [y]_{(C,E)}$

1) Si $[y]_{(c,E)} \not\subseteq [x]_{(c,E)}$ ent $\exists_{u\in[y]_{(c,E)}} \forall_{v\in[x]_{(c,E)}} u \neq v$

Pero $v \in [x]_{(c,E)} \to (v,x) \in E$

$\therefore \forall_{v\in[x]_{(c,E)}} (v \in D$ y $v \neq u)$

$\therefore \forall_{v\in[x]_{(c,E)}} f(v) \neq f(u)$

$\therefore f(u) \in f[[y]_{(c,E)}] - f[[x]_{(c,E)}]$

$\therefore f(x) = f[[x]_{(c,E)}] \neq f[[y]_{(c,E)}] = f(y)$

2) Si $[x]_{(c,E)} \not\subseteq [y]_{(c,E)}$ ent $\exists_{u\in[x]_{(c,E)}} \forall_{v\in[y]_{(c,E)}} u \neq v$

$\therefore (u,x) \in E$ y $\forall_{v\in[y]_{(c,E)}} u \neq v$

$\therefore \forall_{v\in[y]_{(c,E)}} f(u) \neq f(v)$

$\therefore f(u) \in f[[x]_{(c,E)}] - f[[y]_{(c,E)}]$

$\therefore f(x) = f[[x]_{(c,E)}] \neq f[[y]_{(c,E)}] = f(y)$

Así, en cualquier caso, tenemos que $f(x) \neq f(y) \therefore x \in D$.

Por lo tanto, por el teorema de inducción sobre relaciones bién fundadas, $C \subseteq D$, por lo tanto

$$\forall_{x\in C}\ \forall_{y\in C}\ (x\neq y \rightarrow f(x)\neq f(y))$$

$\therefore$ f es inyectiva.

iv) Ahora probaremos que $(x,y)\in E$ sii $f(x)\in f(y)$

Si $(x,y)\in E$ ent $f(x)\in\{f(z)/(z,y)\in E\}=f(y)$

y si $f(x)\in f(y)=\{f(z)/(z,y)\in E\}$ ent

$$\exists_{z\in C}\ (f(z)=f(x)\ \text{ y }\ (z,y)\in E)$$

Pero f es biyectiva,

$\therefore\ z=x$ y $\therefore\ (x,y)\in E$

Por último, para probar la unicidad de T **y** f **; supongamos que** W **y** $g: C\longrightarrow W$ **satisfacen las condiciones del teorema.**

Si $h:=gf^{-1}: T\longrightarrow W$, h es biyectiva y

$\forall_{x,y\in T}$ $x\in y$ sii $(f^{-1}(x), f^{-1}(y))\in E$

Sii $gf^{-1}(x)\in gf^{-1}(y)$ sii

$h(x)\in h(y)$.

Usaremos inducción sobre clases transitivas para probar que $h(x) = x \quad \forall x \in T$.

Sea $D := \{x / h(x) = x\}$

Si $x \in T$ y $X \subseteq D$, ent

$\forall_{z \in X} \; h(z) = z$,

Si $z \in X$, ent, $z \in h(x)$, $\therefore X \subseteq h(x)$

y si $z \in h(x)$, entonces $z \in h(x) \in W$

$\therefore z \in W$ y

$\therefore \exists_{u \in T} \; h(u) = z$, $\therefore h(u) \in h(x)$

$\therefore u \in X$, $\therefore h(u) = u$

$\therefore z = u \in X \quad \therefore h(x) \subseteq X$

Resumiendo, $h(x) = x$ y $\therefore x \in D$

$\therefore$ por el teorema de inducción sobre clases transitivas $T \subseteq D$, e.d,

$h(x) = x \; \forall x \in T$ y h es biyectiva

$\therefore T = W$ y $g f^{-1} = h = 1_T \quad \therefore g = g f^{-1} f = 1_T f = f$

$\therefore T$ y f son únicos $\square$

Ultrafiltros M -Genéricos.

Otra herramienta más que necesitaremos para la definición del concepto de extensión M -genérica es la de ultrfiltro M -genéricos. Como habíamos definido en la sección de álgebras Booleanas, un ultrafiltro F sobre un álgebra Booleana B es un subconjunto de B con las siguientes propiedades :

i) Si $x, y \in F$ ent $x \cdot y \in F$

ii) Si $x \in F$ y $x \leq y$ ent $y \in F$

iii) $1 \in F$, $0 \notin F$

iv) $\forall_{x \in B} (x \in F$ ó $x' \in F)$

Para aclarar un poco el concepto de ultrafiltro, podemos pensar que la definición de filtro (cuando se satisfacen las condiciones (i) - (iii)), es la formalización de la idea de conjunto de elementos grandes, así, el inciso (i) dice que los elementos de F , deben ser suficientemente "grandes" para que el producto de cualesquiera dos siga siendo un elemento "grande", mientras que el inciso (ii) dice que los elementos mayores que un elemento "grande" también son "grandes", y el inciso (iii) sirve para evitar que F sea vacío o igual a B .

Para entender el concepto de ultrafiltro, es útil considerar una definición de ultrafiltro equivalente a la que ya hemos dado : Si consideramos a los filtros sobre B ordenados parcialmente por contención, entonces un ultrafiltro sobre B es un filtro maximal, por lo tanto, un ultrafiltro es, en cierto sentido, la refinación maxima de una cadena de filtros.

Vamos a necesitar también, un tipo especial de ultrafiltros.

5.21 Def .- Si B es un álgebra y $S \subseteq \mathcal{P}(B)$, decimos que un ultrafiltro U sobre B es S - completo, o completo respecto a S sii

$$\underset{A \subseteq U}{\forall} (A \in S \rightarrow \mathrm{INF}\, A \in U)$$

El nombre de "completo respecto a S " resulta completamente natural, porque la definición pide precisamente que todo subconjunto, en el sentido de S , de U tenga un infimo en U , y, por lo tanto, existe cieta analogía con la definición de álgebra Booleana completa.

La definición anterior, nos permite definir lo que es un ultrafiltro M - genérico.

5.22 Def .- Si M es un modelo transitivo de ZFC y $B \in M$ es un álgebra Booleana completa en el sentido de M , i.e., $M \models$ " B es un álgebra Booleana completa", decimos que un ultrafiltro U sobre B ,(solo pedimos que $U \subseteq B$ y no que $U \in M$), es un ultrafiltro M - genérico sii

U es $\mathcal{P}^M(B)$ - completo, donde $\mathcal{P}^M(B)$ denota al conjunto potencia de B en el sentido de M.

Dicho de otra manera, U es M-genérico sii todo subconjunto X, en el sentido de $\mathcal{P}^M(B)$, de U $(X \subseteq_{\mathcal{P}^M(B)} U)$ tiene un ínfimo en U. Como $X \subseteq_{\mathcal{P}^M(B)} U \rightarrow X \in \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{P}^M(B) =$

$= \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{P}(B) \cap M = \mathcal{P}(U) \cap M \rightarrow X \subseteq_M U$,

U es M-genérico sii todo subconjunto de U en el sentido de M tiene un ínfimo en U. Quizá, esto último justifique un poco el nombre de ultrafiltro M-genérico. Más adelante, veremos que los ultrafiltros M-genéricos juegan un papel importante en la construcción de "extensiones M-genéricas".

6.9 Afí .- Si $B \in M$ es un álgebra Booleana completa en el sentido de M, W es un ultrafiltro sobre B entonces W es M-genérico sii

$$\forall_{X \in \mathcal{P}^M(B)} \left(\sup X \in W \leftrightarrow X \cap W \neq \emptyset \right)$$

Dem :

Supongamos que W es M-genérico

Sea $X \in \mathcal{P}^M(B)$

Si $X \cap W \neq \emptyset$ ent $\exists_{y_0 \in X}\, y_0 \in W$ y $y_0 \leq \sup$

$\therefore \sup X \in W$

La implicación en el otro sentido la probaremos por contrapositiva.

Supongamos que $x \wedge W = \emptyset$

Def $x^{\mathfrak{I}} := \{ y^{\mathfrak{I}} / y \in x \}$

Como $x \wedge W = \emptyset$ y W es ultrafiltro

$x^{\mathfrak{I}} \subseteq W$, además, $x^{\mathfrak{I}} \in \mathcal{P}^M(B)$

$\therefore (\text{SUP } x)^{\mathfrak{I}} = \text{INF } x^{\mathfrak{I}} \in W$

$\therefore \text{SUP } x \notin W$

$\therefore$ Si W es M-Genérico ent

$$\forall_{x \in \mathcal{P}^M(B)} (\text{SUP } x \in W \leftrightarrow x \wedge W \neq \emptyset)$$

Ahora, Sup que $\forall_{x \in \mathcal{P}^M(B)} (\text{SUP } x \in W \leftrightarrow x \wedge W \neq \emptyset)$

Sup que $x \subseteq W$ y que $x \in \mathcal{P}^M(B)$

Si $\text{INF } x \notin W$ ent

$\text{SUP } x^{\mathfrak{I}} = (\text{INF } x)^{\mathfrak{I}} \in W \quad \therefore x^{\mathfrak{I}} \wedge W \neq \emptyset$

$\therefore \exists_{y_0 \in x} y_0^{\mathfrak{I}} \in W \quad \therefore y_0 \notin W \quad \therefore x \not\subseteq W$ ↯

$\therefore \text{INF } x \in W \quad \therefore W$ es M-Genérico.

$\square$

Modelos Cociente.

De aquí en adelante, será importante para lograr nuestro propósito final, que nuestras definiciones y teoremas se hagan completamente dentro de ZF , aunque, por supuesto, solamente lo haremos de manera pseudo formal bajo la suposición de que se puede formalizar completamente, así mismo, como ya lo habíamos anunciado antes, usaremos el equivalente formal de algunas definiciones y teoremas que solo enunciamos en su forma intuitiva.

Como anunciamos varias seciiones atrás, uno de nuestros objetivos es el de construir un modelo que cumpla con cierto conjunto de condiciones (de forcing). Este modelo será el resultado final de un proceso en el que interviene cierto modelo cociente.

5.23 Def .- Si M es un modelo transitivo de ZFC , $ZFC \vdash M \models$ " B es un álgebra Booleana completa" y W es un ultrafiltro sobre B , decimos que dos elementos x , y de M^B son equivalentes módulo W , $x \sim_W y$ sii

$$\|x = y\|^B \in W$$

Consideramos que la relación $\sim_W$ queda definida dentro de ZFC .

5.9 Aff .- La relación $\sim_W$ es de equivalencia.

Dem :

(i) $\|x = x\|^B = 1 \in W \quad \therefore \quad x \sim_w x$

(ii) Si $x \sim_w y$ ent $\|y = x\|^B = \|x = y\|^B \in W$

$\therefore \; y \sim_w x$

(iii) Si $x \sim_w y$ y $y \sim_w z$ ent

$\|x = y\|^B \in W$ y $\|y = z\|^B \in W \; \therefore \|x = y\|^B \cdot \|y = z\|^B \in W$

y como $\|x = z\|^B \geq \|x = y\|^B \cdot \|y = z\|^B$,

$\|x = z\|^B \in W \; \therefore \; x \sim_w z$

$\square$

Lo bueno de que $\sim_w$ sea de equivalencia, radica en que podemos "partir" M^B en relaciones de equivalencia y formar con estas una nueva clase M^B/w ; M^B módulo W , (no forzosamente transitiva) que podemos convertir en modelo de ZFC si definimos de manera adecuada dos relaciones; $=_w$ y $\in_w$, sobre M^B/w .

5.24 Def .- Si M^B ; B ; W son como en la definición anterior y $x, y \in M^B$, definimos :

a) $x^w := \{ y \in M^B / \, y \sim_w x \}$, la clase de x

b) $x^w \in_w y^w$ Sii $\|x \in y\|^B \in W$

c) $x^w =_w y^w$ Sii $x^w = y^w$

Con la definición anterior, se puede probar que

$$M^B/W = \langle \{x^w / x \in M^B\}, =_W, \in_W \rangle$$

es un modelo de ZFC ,es decir, $ZFC \vdash (M^B/W \models ZFC)$

Que M^B/W es modelo de ZFC es un corolario del siguiente teorema :

5.10 Teo .- Si $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ es una fórmula y

$x_1, \dots, x_n \in M^B$ y $s := (x_1^w, x_2^w, \dots, x_n^w, x_n^w, \dots)$

entonces $M^B/W \models_s \varphi$ sii $\|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \in W$,

es decir, $ZFC \vdash (M^B/W \models_s \varphi$ sii $\|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \in W)$.

Dem : (Inducción sobre la complejidad de φ):

i) Si φ es $v_1 \in v_2$ ent

$M^B/W \models \varphi$ sii $x_1^w \in_W x_2^w$ sii

$\|x_1 \in x_2\| \in W$ sii $\|\varphi(x_1, x_2)\| \in W$.

El caso en que φ es $v_1 = v_2$ es analogo al anterior.

Supongamos que el teorema es cierto para fórmulas φ de complejidad menor que k : Si la complejidad de φ es k entonces :

ii) Si φ es $\neg\psi$ ent

$M^B/W \models \neg\psi$ sii $M^B/W \not\models_s \psi$

Sii $\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \notin W$ sii

$\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \|^{g} \in W$ sii $\| \neg \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \in W$

sii $\| \varphi(x_1, \ldots, x_n) \| \in W$.

iii) Si φ es $\psi \to \mu$ ent

$M^{B}/W \models_s \varphi$ sii $(M^{B}/W \not\models_s \psi$ o $M^{B}/W \models \mu)$ sii

$(\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \notin W$ o $\| \mu(x_1, \ldots, x_n) \| \in W)$ sii

no $(\| \psi(x_1, \ldots, x_n \| \in W$ y $\| \mu(x_1, \ldots, x_n) \| \notin W)$ sii

no $(\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \in W$ y $\| \neg \mu(x_1, \ldots, x_n) \| \in W)$ sii

$(\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \cdot \| \neg \mu(x_1, \ldots, x_n) \| \notin W)$ sii

$\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg \mu(x_1, \ldots, x_n) \| \notin W$ sii

$\| \neg (\psi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg \mu(x_1, \ldots, x_n)) \| \in W$ sii

$\| \psi(x_1, \ldots, x_n) \to \mu(x_1, \ldots, x_n) \| \in W$ sii

$\| \varphi(x_1, \ldots, x_n) \| \in W$.

iv) Los casos para el resto de los conectivos proposicionales se manejan en forma análoga al caso anterior.

v) Si φ es $(\exists v_j)(\psi(v_1, \ldots, v_n))$ ent

Si $M^B/W \models_s \varphi$ ent $\underset{P \in M^B}{\exists} M^B/W \models_{S(i/pw)} \psi$

$\therefore \underset{P \in M^B}{\exists} \| \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, P, x_{j+1}, \ldots, x_n) \| \in W$

$\therefore \underset{P \in M^B}{SUP} \| \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, P, x_{j+1}, \ldots, x_n) \| \in W$

$\therefore \| (\exists v_j) \; \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \in W.$

y si $\| (\exists v_j) \; \psi(x_1, \ldots, x_n) \| \in W$ ent

por un resultado anterior

$\underset{P \in M^B}{\exists} \| \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, P, x_{j+1}, \ldots, x_n) \| =$

$\| (\exists v_j) \; \psi(x_1, \ldots, x_n) \|$

$\therefore \underset{P \in M^B}{\exists} \| \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, P, x_{j+1}, \ldots, x_n) \| \in W$

$\therefore$ por H.I. $\underset{P \in M^B}{\exists} M^B/W \models_{S(i/pw)} \psi$,

$\therefore M^B/W \models (\exists v_j) \psi \quad \therefore M^B/W \models \varphi.$

vi) El caso en que φ es $(x_i)\psi$ se maneja en forma análoga al caso anterior.

$\square$.

Es intuitivamente claro, a partir de la definición de M^B, que todos los teoremas y definiciones tratados en el caso de V^B o bién de $\mho^B$ tienen su contraparte en M^B.

Así, $M^B \models ZFC$, $\|\sigma\| = 1 \in W$ para todo axioma σ de ZFC, y del teorema anterior, tenemos el siguiente corolario :

5.11 Corolario .- $ZFC \vdash (M^B/W \models ZFC)$.

Otro resultado en $\mho^B$ del cual usaremos su contraparte en M^B es el que dice que:

$$\|x \in \mathcal{O}n\| = \sup_{\alpha \in \mathcal{O}n} \|\alpha = x\|.$$

Así, tenemos que (en ZFC) $\|x \in \mathcal{O}n\| = \sup_{\alpha \in \mathcal{O}n^M} \|\alpha = x\|$. donde, por supuesto, $\mathcal{O}n^M$ representa a la clase de ordinales según M.

Volviendo a M^B/W, diremos que $x \in M^B/W$ es un ordinal si, como era de esperarse, x es un ordinal en M^B/W, es decir :

5.25 Def .- Si $x \in M^B/W$ entonces x es un ordinal sii

$$M^B/W \models_s x_1 \in ON$$

donde s es una sucesión de M^B/W tal que $s_1 = x$.

Formalmente, $x \in ON^{M^B/W}$ es una abreviación de la fórmulá $(M^B/W \models_s (x_1 \in ON))$.

Como se puede ver, estamos usando la palabra ordinal para definir algo distinto de lo que ya significaba, pero como en otros casos, esto no debe provocar confusión, ya que el significado será adecuado al contexto.

La afirmación que viene a continuación, expresa que la propiedad de ser ordinal en M se conserva al "pasar" a M^B/W.

5.12 Aff .- α es un ordinal en M sii $\hat{\alpha}^W$ es un ordinal en M^B/W, es decir,

$$M \models \alpha \in ON \quad \text{sii} \quad M^B/W \models_s x_1 \in ON$$

donde $s = (s_i)$ es una sucesión M^B/W tal que $s_1 = \hat{\alpha}^W$.

Formalmente $ZFC \vdash (M \models \alpha \in ON \leftrightarrow M^B/W \models_s x_1 \in ON)$.

Dem :

Como contraparte de la afirmación que dice "si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula restringida, entonces $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sii $V^B \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$" tenemos que $M \models \alpha \in ON$ sii $M^B \models \hat{\alpha} \in ON$

y, por el teorema anterior, tenemos que

$$M^B \models \hat{\alpha} \in ON \quad \text{sii} \quad M^B/W \models_s x_1 \in ON$$

$$\text{donde} \quad s = (\hat{\alpha}^W, s_2, \dots), \; s_i \in M^B/W .$$

$$\therefore \; M \models \alpha \in ON \quad \text{sii} \quad M^B/W \models_s x_1 \in ON$$

$$\text{donde} \quad s = (\hat{\alpha}^W, s_2, \dots) \quad s_i \in M^B/W$$

□.

La afirmación anterior nos permite hacer la siguiente definición :

5.26 Def .- Si x es un ordinal de M^B/W, decimos que x es un ordinal estandar sii $x = \hat{\alpha}^W$ para alguna α tal que $M \models \alpha \in ON$ es decir $\alpha \in ON^M$.

Formalmente, $x \in ONSTANDAR$ es una abreviación de la fórmula $(x \in ON^{M^B/W} \wedge (\exists \alpha)[(M \models \alpha \in ON) \wedge x = \check{\alpha}^W])$.

El teorema que sigue, muestra de manera sorprendente la fuerza de los ultrafiltros M-genéricos.

6.13 Teo .- Si W es un ultrafilrto M-genérico, entonces todos los ordinales de M^B/W son estándar.

(El recíproco de esta afirmación también es cierto, vea Bell, J "Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory").

Formalmente, $ZFC \vdash$ ("W es un ultrafiltro M-genérico sobre B" $\rightarrow (x \in ON^{M^B/W} \rightarrow x \in ONSTANDAR)$.

Dem :

Supongamos que W es M-genérico. Entonces

$$\forall_{A \subseteq W} (A \in P^M(B) \rightarrow \exists_{a \in W}\ a = INF\ A$$

$\therefore$ Si $s = (y^W, s_2, \ldots)$ es una sucesión en M^B/W,

y^W es un ordinal de M^B/W sii

$M^B/W \models_s x_1 \in On$ sii $\|y \in On\| \in W$ sii

$$\sup_{\alpha \in On^M} \|\check{\alpha} = y\| \in W.$$

Pero $\{\|\check{\alpha} = y\| / \alpha \in On^M\} \in P^M(B)$ y W es M-genérico

$$\therefore \sup_{\alpha \in \mathcal{O}n^M} \|\hat{\alpha} = y\| \in W \quad \text{sii} \quad \{\|\hat{\alpha} = y\| / \alpha \in \mathcal{O}n^M\} \cap W \neq \emptyset$$

$$\text{sii} \quad \exists_{\alpha_0 \in \mathcal{O}n^M} \|\hat{\alpha}_0 = y\| \in W \quad \text{sii}$$

$$\exists_{\alpha_0 \in \mathcal{O}n^M} \; y^W = \hat{\alpha}_0^W \quad \text{sii} \quad y^W \text{ es un ordinal estándar.}$$

$\therefore$ y^W **es un ordinal de** M^B/W **sii** y^W **es un ordinal estándar.**

5.14 Teo .- **Si** W **es un ultrafiltro** M**-genérico sobre** B **entonces** $\in_W$ **es una relación bién fundada sobre** M^B/W.

Igual que como los teoremas anteriores, suponemos que tanto el enunciado como la demostración del teorema, se pueden hacer completamente dentro de ZFC.

Dem :

Primero demodtraremos que la relación $\in_W$ bien ordena a los ordinales de M^B/W, es decir, a $ON^{M^B/W}$

Definimos

$$f : ON^M \to ON^{M^B/W} \text{ tal que } f(\alpha) = \hat{\alpha} \quad \forall_{\alpha \in ON}$$

Por el teorema anterior, f es suprayectiva, ya que, si $x \in ON$ entonces $x \in ON\,STANDAR$,

$$\therefore \; x = \hat{\alpha}^W = f(\alpha) \quad \text{p.a.} \quad \alpha \in ON^M.$$

Además, si $\alpha, \beta \in ON^M$ y $\alpha <_M \beta$ ent

$$\alpha \in_M \beta \quad y \quad \hat{\beta} = \{(\hat{x}, 1) / x \in_M \beta\}, \therefore \hat{\alpha} \in \hat{\beta}$$

y, usando el resultado análogo a un resultado anterior, tenemos que $M^B \models \hat{\alpha} \in \hat{\beta}$, i.e., $\| \hat{\alpha} \in \hat{\beta} \| = 1 \in W$.

Por lo tanto, $f(\alpha) = \hat{\alpha}^W \in_W \hat{\beta}^W = f(\beta)$, es decir, f es preservadora del orden.

Pero sabemos que ON^M está bién ordenado por $\subset_M$, por lo tanto $f[ON^M] = ON^{M^B/W}$ está bién ordenado por $\in_W$. Ahora que ya sabemos que $ON^{M^B/W}$ está bién ordenado por $\in_W$, el problema es más sencillo.

Supongamos momentaneamente que ρ, para ser breves, denota la función rango de M^B/W, es decir,

$$\underset{x \in M^B/W}{\forall} \rho(x) := \operatorname{Min} \{\alpha \in ON^{M^B/W} / x \approx \alpha + 1\}$$

Sean $A \subseteq M^B/W$, $A \neq \emptyset$ y $m = \operatorname{Min} \{\rho(x) / x \in_W A\}$

sea $a \in A$ tal que $\rho(a) = m$.

a es el elemento buscado minimal, ya que si existiera $x \in A$ tal que $x \in_W a$ entonces, tendríamos que $\rho(x) < \rho(a) = m$ lo cual entra en contradicción con la definición de m

$\therefore \in_W$ es bién fundada.

$\square$

Aparte de que $\in_W$ es bién fundada, se requiere que sea también una relación extensional sobre M^B/W, porque nuestro propósito es aplicar el teorema de Mostowski para obtener una clase transitiva isomorfa a M^B/W; pero ya hemos visto que $M^B/W \models ZFC$ y sabemos que $\in_W$ es extensional sii $M^B/W \models$ "axioma de extensionalidad", por lo tanto, $\in_W$ es extensional.

De aquí en adelante, supondremos que W es un ultrafiltro M-genérico sobre B y $\therefore$ $\in_W$ es bién fundada y extensional.

5.15 Aff .- Existe una única clase transitiva $M[W]$ y un único isomorfismo $f: M^B/W \longrightarrow M[W]$ tal que

$$\forall_{x,y \in M^B/W} \quad x \in_W y \quad \text{sii} \quad f(x) \in f(y)$$

Dem :

$\in_W$ es extensional y bién fundada sobre M^B/W, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Mostowski y obtener el resultado deseado. □

Si observamos la demostración del teorema de Mostowski, veremos que el isomorfismo f de la afirmación anterior está definido de la siguiente manera :

$$f(x) = \{f(y) / y \in_W x\} \quad \forall x \in M^B/W$$

Ponemos la definición de f porque nos vamos a basar en ella para dar otras definiciones.

5.27 Def .- Nos referimos a $M[W]$ como la extensión M-genérica de M respecto a W.

5.28 **Def** .- Definimos la función $i_W : M^B \longrightarrow M[W]$, la interpretación de M^B mediante $M[W]$ como

$$i_W(x) = f(x^W) \quad \forall x \in M^B$$

5.29 **Def** .- Definimos la función $j : M \longrightarrow M[W]$, como

$$j(x) = i_W(\hat{x}) \quad \forall x \in M .$$

Con las funciones que hemos definido tenemos que la situación gráfica es como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\hat{}"] \arrow[dr, "j"'] & M^B \arrow[r, ".^W"] \arrow[d, "i_W"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^B/W . \arrow[dl, "f"] \\
& M[W] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, de las funciones que intervienen en este diagrama, algunas resultan ser inyectivas, y algunas suprayectivas. Así, sabemos que f es biyectiva y $.^W$ es suprayectiva, por lo tanto i_W es suprayectiva. Además $\hat{}$ es inyectiva, y en cuanto a j tenemos que si $j(x) = j(y)$ entonces

$$i_W(\hat{x}) = i_W(\hat{y}) \quad \therefore \; f(\hat{x}^W) = f(\hat{y}^W)$$

$$\therefore \; \hat{x}^W = \hat{y}^W \quad \therefore \; \hat{x} \sim_W \hat{y} \; \text{ y } \; \| \hat{x} = \hat{y} \| \in W$$

$$\therefore \; \| \hat{x} = \hat{y} \| \neq 0 .$$

Pero, por un resultad- anterior, sabemos que $\|\hat{x}=\hat{y}\|\in\{0,1\}$ por lo tanto, $\|\hat{x}=\hat{y}\|=1$; y aplicando otro resultado anterior, tenemos que $\hat{x}=\hat{y}$ y como $\hat{\ }$ es inyectiva, $x=y$ es decir, $j(x)=j(y)\longrightarrow x=y$ y, por lo tanto, j es inyectiva.

Como consecuencia de la observaciones anteriores, y usando notación de la teoría de categorías, nuestro diagrama se transforma en el siguiente dibujo :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "\hat{\ }"] \arrow[dr, "j"'] & M^B \arrow[r, two heads, "\cdot^{W}"] \arrow[d, "i_W"] & M^B/W \arrow[dl, "f"] \\
 & M[W] &
\end{tikzcd}$$

En la parte que viene a continuación, probaremos algunas propiedades generales de las extensiones M -genéricas que son indispensables en su aplicación en las pruebas de independencia de enunciados.

5.16 Teo .- (J Bell) Si W es un ultrafiltro M -genérico sobre B entonces $j[M]$ es una clase transitiva, más aún $j=1_M$.

Dem :

Supongamos que W es un ultrafiltro M-genérico sobre B

Para probar que $j[M]$ es transitiva, supongamos que

$$x \in y \in j[M] \text{ , ent } y = j(s) \text{ p.a } s \in M,$$

$$\text{además } j[M] \subseteq M[W] \therefore x \in y \in M[W]$$

$$\therefore x \in M[W] \text{ y como } i_W \text{ es sobre}$$

$$\underset{x_0 \in M}{\exists} \; x = i_W(x_0)$$

Así, tenemos que $x = i_W(x_0) \in j(s) = y$, pero

$$j(s) = i_W(\hat{s}) \quad \therefore \quad x = i_W(x_0) \in i_W(\hat{s}) = y.$$

Por otro lado, de las definiciones de i_W , f , $\in_W$, tenemos que

$$i_W(\hat{s}) = f(\hat{s}^W) = \{ f(r^W) / r^W \in_W \hat{s}^W \} =$$

$$= \{ i_W(r) / \| r \in \hat{s} \| \in W \} \therefore \| x_0 \in \hat{s} \| \in W$$

$$\text{Pero } \| x_0 \in \hat{s} \| = \underset{z \in DOM(s)}{SUP} (\hat{s}(z) \cdot \| x_0 = z \|) =$$

$$= \underset{z \in DOM(\hat{s})}{SUP} \| x_0 = z \| = \underset{t \in s}{SUP} \| x_0 = t \| \in W$$

por lo tanto, usando un teorema acerca de ultrafiltros M - genéricos, tenemos que

$$\underset{t \in s}{\exists} \; \| x_0 = t \| \in W$$

$$\therefore x_0 \sim \hat{t} \quad y \quad x_0^W = \hat{t}^W ;$$

Así, tenemos que $j(t) = h(\hat{t}^{W}) = h(x_0^{W}) = i(x_0) = x$

Además $t \in s \in M$, $\therefore t \in M$ y $j(t) = x$,

es decir $x \in j[M]$

$\therefore$ $j[M]$ es transitiva.

Ahora probaremos que $j = 1_M$

De las definiciones de j tenemos que

Si $r, s \in M$ y $s \in r$ ent

$j(r) = i(\hat{r}) = \{ i(v) / \| v \in \hat{r} \| \in W \}$

pero como $s \in r$, $s \in \mathrm{DOM}(\hat{r})$

$\therefore \| \hat{s} \in \hat{r} \| \leq \hat{r}(\hat{s}) = 1 \in W$

$\therefore \| \hat{s} \in \hat{r} \| \in W$ y $j(s) = i(\hat{s}) \in i(\hat{r}) = j(r)$

$\therefore$ $s \in r \to j(s) \in j(r)$, $j : M \to j[M]$ es biyectiva y tanto M como $j[M]$ son transitivos, pero un resultado anterior nos dice que en tales circunstancias

$M = j[M]$

$\therefore$ $j = 1_M$ $\square$

5.17 Corolario .- Si W es un ultafiltro M-genérico, entonces $M \subseteq M[W]$

Dem :

$$j = 1_M \quad \therefore \quad M = j[M] \subseteq M[W] \; \square$$

El corolario anterior es importamte porque contribuye a la justificación del nombre de $M[W]$. Lo que sigue a continuación está encaminado a probar que, bajo ciertas circunstancias, el ultrafiltro W es un elemento de $M[W]$, lo cual también es un hecho importante (desde el punto de vista formal) porque garantiza que una herramienta usada en la "construcción" de $M[W]$ forma parte de ella misma.

De acuerdo con las condiciones, que establecimos inicialmente, sabemos que B es un álgebra Booleana completa en el sentido de M y que W es un ultrafiltro M-genérico sobre B, consecuentemente, $B \in M$ y $W \subseteq B$, pero hasta el momento, nada nos dice que W es un elemento de M.

Esta observación es interesante, ya que dentro de la demostración del teorema anterior probamos que la función j preserva la pertenencia, por lo tanto, si W fuera un ultrafiltro M-genérico, tendríamos que $j = 1_M$ y que

$$W \in M \rightarrow W = j(W) \in M[W].$$

Sin embargo, suponer adicionalmente que $W \in M$ podría complicar la construcción de W, y como el lector habrá notado, todo el trabajo siguiente depende de la existencia de

W : Además, la hipótesis $W \in M$ no es necesaria para concluir $W \in M[w]$, y, por lo atnto prescindiremos de ella; y para probar que $W \in M[w]$, en lugar de tomar el camino directo que nos marca j, transitaremos a través de la función $\hat{}$ y de la función i : Empezaremos con una definición:

Def :- Definimos $B^* \in M^B$ de la siguiente manera :

$$DOM(B^*) := \{\hat{x} / x \in B\}$$

$$y \ B^*(\hat{x}) = x \quad \forall x \in B .$$

Se puede observar que B^* es una especie de inmersión de B en M^B, y, en ningún caso $B^* = \hat{B}$.

Aunque la definición de B^* depende solamente de B : más adelante veremos que, de manera sorprendente, B^*, y W están relacionados mediante la función i :

Aff :-

$$i) \forall_{x \in M^B} \ \|x \in B^*\| = \underset{y \in B}{SUP} \left(y \cdot \|x = \hat{y}\| \right).$$

$$ii) \forall_{b \in B} \ \|\hat{b} \in B^*\| = b$$

Dem :

Para el inciso (i) tenemos que :

$$\|x \in B^*\| = \underset{z \in DOM(B^*)}{SUP} \left(B^*(z) \cdot \|x = z\| \right) =$$

$$= \underset{y \in B}{SUP} \left(B^*(\hat{y}) \cdot \|x = \hat{y}\| \right) = \underset{y \in B}{SUP} \left(y \cdot \|x = \hat{y}\| \right).$$

Mientras que, para el inciso (ii) tenemos que :

$\|\hat{b} = \hat{y}\| \in \{0,1\}$ y $\|\hat{b} = \hat{y}\|$ sii $b = y$,

$\therefore \|\hat{b} = \hat{y}\| = 1$ si $b = y$ y

$\|\hat{b} = \hat{y}\| = 0$ si $b \neq y$

Así ;

$$y \cdot \|\hat{b} = \hat{y}\| = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq b \\ b & \text{si } y = b \end{cases}$$

$$\therefore \text{ por } (i) \text{ , } \|\hat{b} \in B^*\| = \sup_{y \in B} (y \cdot \|\hat{b} = \hat{y}\|) = b$$

$\square$.

A continuación, probaremos un resultado sorprendente que relaciona B^* y W .

6.18 Teo .- Si W es un ultrafiltro M-genérico sobre B entonces $i_W(B^*) = W$.

Dem.:

Supongamos que W es un ultrafiltro M-genérico sobre B . Primero probaremos que :

$$\{z / \exists_{x \in M^B} (z = i_W(x) \wedge \|x \in B^*\| \in W\} = \{z / \exists_{y \in W} (z = i_W(\check{y}))\}.$$

$[\exists_{x \in M^B} (z = i_W(x) \wedge \|x \in B^*\| \in W\}$ sii

$$[\exists_{x\in M^B} (z = i_W(x) \wedge \sup_{y\in B} (y \cdot \|x = \check{g}\|) \in W)]$$

sii (por un resultado de ultrafiltros M-genéricos)

$$[\exists_{x\in M^B} (z = i_W(x) \wedge \exists_{y\in B} \; y \cdot \|x = \check{g}\| \in W)$$

Pero como W es un ultrafiltro

$$y \cdot \|x = \check{g}\| \in W \rightarrow (y \in W \;\; y \;\; \|x = \check{g}\| \in W)$$

ya que $y \cdot \|x = \check{g}\| \leq y \, , \, \|x = \check{g}\|$

Así, $[\exists_{x\in M^B} (z = i_W(x) \wedge \|x \in B^*\| \in W)]$ sii

$$[\exists_{x\in M^B} (z = i_W(x) \wedge \exists_{y\in W} \|x = \check{g}\| \in W)] \text{ sii}$$

$$[\exists_{x\in M^B} (z = i_W(x) \wedge \exists_{y\in W} (x^W = \check{g}^W)] \text{ sii}$$

sii $[\exists_{x\in M^B} z = i_W(x) \wedge \exists_{y\in W} (h(x^W) = h(\check{g}^W))]$

sii $[\exists_{x\in M^B} (z = i_W(x) \wedge \exists_{y\in W} (i_W(x) = i_W(\check{g}))]$ sii

$$[\exists_{y\in W} (z = i_W(\check{g}))]$$

Por lo tanto

$$\{z / \exists_{x \in M^B} (z = i_W(x) \wedge \|x \in B^*\| \in W)\} = \{z / \exists_{y \in W} (z = i_W(\check{y}))\};$$

con lo anterior tmnemos que :

$$i_W(B^*) = f(B^*)^W = \{f(x^W) / x^W \in (B^*)^W\} =$$

$$= \{i_W(x) / \| x \in B^* \| \in W\} = \{z / \exists_{x \in M^B} (z = i_W(x) \wedge \|x \in B^*\| \in W\} =$$

$$= \{z / \exists_{y \in W} (z = i_W(\check{y}))\} = \{z / \exists_{y \in W} (z = j(y))\} =$$

$$= \{j(y) / y \in W\} = \{1_M(y) / y \in W\} = W$$

$$\therefore\ i_W(B^*) = W$$

$\square$.

5.19 **Corolario** .- Si W es un ultrafiltro M-genérico sobre B entonces $W \in M[W]$

Dem :

$$W = i_W(B^*) \in M[W]$$

ya que $i_W : M^B \longrightarrow M[W]$

$\square$.

Ahora, nuestro propósito es probar un teorema en cuyo enunciado se resumen las principales propiedades de las extensiones M-genéricas, pero antes de hacer esto, probaremos un teorema importante que es precisamente, aunque disfrazado, el teorema llamado "Teorema de Forcing" que probaremos más adelante.

5.20 Teo : Si W es un ultrafiltro M-genérico sobre B y $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es una fórmula y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M^B$ y $s = (i_W(x_1), i_W(x_2), \ldots, i_W(x_n), i_W(x_n), \ldots)$ entonces

$$M[W] \models_s f(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \text{sii} \quad \| f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \| \in W$$

Dem :

Sabemos que $f : M^B/W \longrightarrow M[W]$ es un isomorfismo tal que :

$$\forall_{x,y \in M^B} \quad x^W \in_W y^W \quad \text{sii} \quad f(x^W) \in f(y^W)$$

por lo tanto, se puede probar, aunque no lo haremos, (por inducción sobre la complejidad de $f(v_1, \ldots, v_n)$) que si

$$r := (x_1^W, x_2^W, \ldots, x_n^W, x_n^W, \ldots) \quad y$$

$$f(r) := (f(x_1^W), f(x_2^W), \ldots, f(x_n^W), f(x_n^W), \ldots)$$

$$\text{ent} \quad M^B/W \models_r f(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \text{sii}$$

$$M[W] \models_{f(r)} f(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Por otro lado, por un teorema anterior, tenemos que :

$M^B/W \models_{r} \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sii

$\|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \in W$

$\therefore M[W] \models_{f(r)} \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sii

$\|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \in W$, pero $i_W(x) = f(x^W)$

$\therefore f(r) = (f(x_1^W), f(x_2^W), \ldots, f(x_n^W), f(x_n^W), \ldots) =$

$= (i_W(x_1), i_W(x_2), \ldots, i_W(x_n), i_W(x_n), \ldots)$

$\therefore M[W] \models_{s} \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sii $\|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \in W$

$\square$.

5.21 Teo **.- Si W es un ultrafiltro** M-genérico sobre $\mathcal{B}$ **entonces :**

1º.- $M[W]$ **es el menor modelo transitivo** de ZFC **tal que** $M \subseteq M[W]$ y $W \in M[W]$

11º.- M **y** $M[W]$ **tienen los mismos ordinales, es decir,** $ON^M = ON^{M[W]}$.

Dem :

1.- Por un resultado anterior sabemos que M^B/W **es un modelo de** ZFC **, y como** $f: M^B/W \to M[W]$ **es un isomorfismo tal que** $x \in_W y$ **sii** $f(x) \in f(y)$ resulta **evidente que** $M[W]$ también es modelo de ZFC .

Ahora supondremos que N es un modelo transitivo de ZFC

tal que $M \subseteq N$ y $W \in N$

Por construcción, sabemos que $M_\alpha^B \in M \ \forall \alpha \in ON^M$, y como $M \subseteq N$, $M_\alpha^B \in N \quad \forall \alpha \in ON^M$

Además, de la definición de i_W, tenemos que la restricción de i_W a M_α^B queda definida como :

$$i_W/M_\alpha^B(x) = \{ i_W/M_\alpha^B(y) \mid y \in_W x \} = \{ i_W/M_\alpha^B(y) / \| y \in x \| \in W \}$$

Puesto que $W \in N$ para toda $x \in M_\alpha^B$, $i_W/M_\alpha^B(x)$ es una calse totalmente dentro de N ,i.e., $i_W/M_\alpha^B(x) \in N \ \forall x \in M_\alpha^B$ y, por lo tanto, i_W/M_α^B es una función que pertenece a N ; es decir, $i_W/M_\alpha^B \in N$ y $M_\alpha^B \in N$, $\therefore$ $i_W/M_\alpha^B[M_\alpha^B] \in N \ \forall \alpha \in ON^M$ y como N es transitivo, $i_W/M_\alpha^B[M_\alpha^B] \subseteq N \ \forall \alpha \in ON^M$

Así, ya que

$$M^B = \bigcup_{\alpha \in ON^M} M_\alpha^B \quad y \quad i_W/M_\alpha^B[M_\alpha^B] = i_W[M_\alpha^B],$$

$$M[W] = i_W[M^B] = \bigcup_{\alpha \in ON^M} i_W[M_\alpha^B] \subseteq N$$

$\therefore$ $M[W] \subseteq N$ y $M[W]$ es el menor modelo transitivo que cumple con

$$M \subseteq M[W] \quad y \quad W \in M[W]$$

ii.- $X \in ON^{M[W]}$ sii $(\exists_{a \in M^B} \ x = i_W(a) \ y \ M[W] \models (x \in ON))$ sii

sii $M[W] \models (i(z) \in ON)$ sii $\|z \in ON\| \in W$ sii

$\sup\limits_{\alpha \in ON^M} \|z = \hat{\alpha}\| \in W$ sii (por ser W M-genérico).

$\exists_{\alpha \in ON^M} (\|z = \hat{\alpha}\| \in W)$ sii $\exists_{\alpha \in ON^M} (z^W = \hat{\alpha}^W)$ sii

$\exists_{\alpha \in ON^M} (h(z^W) = h(\hat{\alpha}^W))$ sii $\exists_{\alpha \in ON^M} (i_W(z) = i_W(\hat{\alpha}))$ sii

$\exists_{\alpha \in ON^M} (x = i_W(z) = i_W(\hat{\alpha}) = \alpha)$ sii $\exists_{\alpha \in ON^M} (x = \alpha)$ sii

$x \in ON^M$ $\therefore ON^{M[W]} = ON^M$ $\square$.

Resulta útil anotar que en lugar de definir las extensiones M-genéricas a través del Teorema de Mostowski, hubiéramos podido proceder de manera directa definiendo i_W recursivamente como:

$$i_W(x) := \{ i_W(y) / \|y \in x\| \in W \} \ \forall x \in M^B$$

y entonces definir $M[W]$ como la imagen de M^B bajo i_W, es decir, $M[W] := i_W[M^B]$. Sin embargo, aunque este enfoque es más directo, resulta un poco más artificial, y además es más pobre, porque proporciona menos herramientas para probar propiedades de la definición. A pesar de todo, no deja de ser interesante el saber que existe otro tratamiento del tema.

Conjuntos M-genéricos.

Como habíamos dicho anteriormente, una de las ideas intuitivas escondidas detrás del concepto de condiciones de forcing (elementos de un orden parcial) era la de que podíamos pensar que una condición de forcing "nos proporciona cierta información acerca de los elementos que pertenecen a un determinado conjunto nuevo". En realidad, no existe razón alguna para pensar que es solo una condición de forcing la que "determina" un "conjunto nuevo", sino que más bién puede ser todo un conjunto de condiciones de forcing el que haga esto. Pero lo que deseamos no es solamente agregar un conjunto nuevo a un modelo dado, sino que también deseamos que el modelo siga siendo modelo. Se puede sospechar fácilmente que no cualquier conjunto de condiciones de forcing va a determinar un "conjunto nuevo" de tal manera que el modelo, junto con este conjunto, pueda ser extendido a otro modelo, dicho de otra manera, nada nos garantiza que exista una extensión que incluya a un "conjunto nuevo". Por esta razón, es necesario determinar o definir que tipo de conjunto de condiciones de forcing nos puede garantizar que nuestros propósitos serán satisfactorios.

Un tipo de conjuntos de condiciones de forcing que cumplen con esto, son conocidos como conjuntos "genéricos".

5.10 Def .- Si M es un modelo transitivo de ZF y (P , $<$) es un orden parcial en el sentido de M , decimos que $G \subseteq P$ es un subconjunto M-genérico de condiciones brevemente conjunto M -genérico sii

1) Si $x \in G$, $y \in P$ y $x \leq y$ ent $y \in G$

2) $\forall_{x,y \in G} \exists_{z \in G} (z \leq x$ y $z \leq y)$

3) Si $A \in M$ es denso en P ent $G \cap A \neq \emptyset$.

La semejanza entre los nombres "ultrafiltro M -genérico" y "conjunto M -genérico" no es meramente casual, ya que existen dos resultados que relacionan fuertemente estos conceptos, y que usaremos más adelante en la demostración del teorema de forcing.

5.31 Def .- Si M es un modelo transitivo de ZF, (P, $<$) es un orden parcial en el sentido de M, (B, e) es la compleción de P, y G es un subconjunto de P M -genérico, entonces, definimos $U(G)$, "el ultrafiltro generado por G " como :

$$U(G) := \{x \in B / \exists_{y \in G} (e(y) \leq x)\}$$

y si W es un ultrafiltro M -genérico sobre B, entonces definimos $c(W)$, " el conjunto M -genérico asociado a W " como :

$$c(W) := \{q \in P / e(q) \in W\}.$$

La siguiente afirmación justifica el nombre de $U(G)$:

5.22 Aff :- Si M es un modelo transitivo de ZF , $(P ; <)$ es un orden parcial en el sentido de M , $(B ; e)$ es la compleción de P en el sentido de M y G es un subconjunto M-genérico de P , entonces, $U(G)$ es un ultrafiltro M-genérico sobre B . Más aún,

$$e[G] = U(G) \cap e[P].$$

Dem:

i) Si $x, y \in U(G)$ ent $\underset{g_1, g_2 \in G}{\exists} (e(g_1) \le x \text{ y } e(g_2) \le y)$.

Como G es M-genérico, $\underset{g \in G}{\exists} (g \le g_1 \text{ y } g \le g_2)$

$\therefore\ e(g) \le e(g_1) \le x \quad \text{y} \quad e(g) \le e(g_2) \le y$

$\therefore\ e(g) \le x \cdot y \quad \text{y} \quad \therefore\ x \cdot y \in U(G).$

ii) Si $x \in U(G)$ y $x \le y$ ent $\underset{g \in G}{\exists} (e(g) \le x \le y)$

$\therefore\ y \in U(G)$.

iii) como $e(q) > 0 \ \forall q \in P$, $0 \notin U(G)$

Por otro lado, P es denso en P y $P \in M$,

$\therefore\ G = G \cap P \neq \emptyset$

y si $q \in G$ ent $e(q) \leq 1$ $\therefore$ $1 \in U(G)$.

(v) Para ver que $U(G)$ es un ultrafiltro solo falta probar que $\forall_{x \in B}$ $x \in U(G)$ o $x' \in U(G)$.

Sea $x \in B$ $\therefore$ Por el inciso anterior, podemos suponer que $x \neq 0$.

Definimos :

$$A_x := \{q \in P / \ e(q) \leq x \ \text{ o } \ e(q) \leq x'\}$$

A_x es denso en P porque :

si $r \in P$ entonces $e(r) \neq 0$

$\therefore$ $e(r) \cdot x \neq 0$ o $e(r) \cdot x' \neq 0$ (de lo contrario $e(r) = e(r)(x + x') = e(r)x + e(r)x' = 0$ ↯)

S.P.G., supongamos que $e(r) \cdot x \neq 0$. Como $e(P)$ es denso en $B - \{0\}$, $\exists_{s \in P}$ $e(s) \leq e(r) \cdot x$,

$\therefore$ $e(s) \leq e(r)$ y $e(s) \leq x$ $\therefore$ $s \leq r$ y $s \in A_x$.

Siendo $A_x \in M$ denso en P y G un conjunto M-genérico, tenemos que $G \cap A_x \neq 0$,

$\therefore$ $\exists_{g \in G}$ $g \in A_x$, i.e., $e(g) \leq x$ o $e(g) \leq x'$

$\therefore \; x \in U(G)$ o $x' \in U(G)$

$\therefore \; U(G)$ es un ultrafiltro.

v) Para probar que $U(G)$ es M-genérico, probaremos primero el siguiente lema :

Lema .- Si G es M-genérico, $X \in M$, $X \subset P$, ent

$$\underset{g \in G}{\exists} \left(g \in X \text{ o } \underset{r \in X}{\forall} \; r \nleq g \right).$$

Dem: –

Sup $X \in M$ y $X \subseteq G$

Definimos

$$X_1 := X \cup \{ r \in P / \underset{r \in X}{\forall} \; r \nleq z \}$$

Claramente, $X_1 \in M$. Además, X_1 es denso en P, de lo contrario tendríamos que :

$$\underset{s \in P}{\exists} \; \underset{v \in X_1}{\forall} \; v \nleq s \;\therefore\; \underset{v \in X}{\forall} \; v \nleq s \;\therefore\; s \in X_1 \text{ y } s \leq s \; \text{\Large ȣ}$$

Como G es M-genérico, $G \cap X_1 \neq \emptyset$, es decir,

$$\underset{g \in G}{\exists} \left(g \in X \text{ o } \underset{r \in X}{\forall} \; r \nleq g \right).$$

Ahora bién, para ver que $U(G)$ es M-genérico necesitamos probar que si $A \in M$ y $A \subseteq U(G)$ entonces $\mathrm{INF} A \in U(G)$.

Supongamos que $A \in M$ y $A \subseteq U(G)$

Recordemos que los elementos de $\mathcal{B}$ (la compleción de $\mathcal{P}$) son cortaduras regulares de $\mathcal{P}$,

$$\therefore \forall_{x \in \mathcal{B}} \; x \subseteq \mathcal{P} \quad \therefore \; \text{INF} A \subseteq \mathcal{P}.$$

Más aún, $\text{INF} A \in \mathcal{B} \in M \;\; \therefore \text{INF} A \in M$

Aplicando el lema que hemos probado, tenemos que

$$\exists_{g \in G} \left(g \in \text{INF} A \;\; o \;\; \forall_{r \in \text{INF} A} r \notin g \right)$$

Pero no es posible que $\forall_{r \in \text{INF} A} r \notin g$ ya que entonces (recordemos que

$$O_g := \{ r \in \mathcal{P} / r \leq g \} \in \mathcal{B}).$$

$$O_g \cdot \text{INF} A = O_g \cap \text{INF} A = \emptyset = 0$$

y si definimos $A_1 := A \cup \{O_g\}$, tenemos que

$$\text{INF} A_1 = O_g \cdot \text{INF} A = 0 \quad \therefore \; \text{SUP}_{a \in A_1} a' = 1 = \mathcal{P}$$

Además, $\bigcup_{a \in A_1} a'$ es denso en $\mathcal{P}$, porque si $r \in \mathcal{P}$

ent

$$r \in \mathcal{P} = \text{SUP}_{a \in A_1} a' = \overline{\overline{\bigcup_{a \in A_1} a'}} := \{ r \in \mathcal{P} / \forall_{y \leq x} O_y \cap (\bigcup_{a \in A_1} a') \neq \emptyset \}$$

$$\therefore \forall_{y \leq r} O_y \cap (\bigcup_{a \in A_1} a') \neq \emptyset \;\; \therefore \; O_r \cap (\bigcup_{a \in A_1} a') \neq \emptyset$$

$\therefore \underset{s \in O_r}{\exists} \; s \in \bigcup_{a \in A_1} a^{\prime}, \;\therefore\; s \leq r \;$ y $\; s \in \bigcup_{a \in A_1} a^{\prime}$

Evidentemente, $\underset{a \in A}{\forall} \; a^{\prime} \in M \;\therefore\; G \cap \left(\bigcup_{a \in A_1} a^{\prime}\right) \neq \emptyset$

$\therefore \underset{h \in G}{\exists} \; \underset{a \in A_1}{\exists} \; (h \in a^{\prime}), \;\therefore\; e(h) = O_h \subseteq a^{\prime}$

$\therefore \; e(h) \leq a^{\prime} \;\;\therefore\; a^{\prime} \in U(G)$

Por otro lado, $e(g) = O_g \;\therefore\; O_g \in U(G)$,

$\therefore A_1 \subseteq U(G) \;\;\therefore\; a \in A_1 \subseteq U(G)$

$\therefore \; a^{\prime} \in U(G)$ y $a^{\prime} \in U(G)$ $\natural$.

Dado que no es posible que $\underset{r \in X}{\forall} \; r \notin g$ $\therefore$ forzosamente

$g \in \text{INF } A$.

$\therefore O_g \subseteq \text{INF } A, \;\therefore\; e(g) = O_g \leq \text{INF } A$

$\therefore \text{INF } A \in U(G) \;\therefore\; U(G)$ es M-genérico

Para terminar, probaremos que $e[G] = U(G) \cap e[P]$.

ya que $e(g) \leq e(g) \; \forall_{g \in G}$, $e[G] \subseteq U(G)$.

Además, $G \subset P$, $\therefore\; e[G] \subseteq e[P]$.

$\therefore\ e[G] \subseteq U(G) \cap e[P]$.

Si $x \in U(G) \cap e[P]$, ent $\underset{r \in G}{\exists} (e(r) \leq x)$ y

$\underset{q \in P}{\exists}\ x = e(q)$, $\therefore\ e(r) \leq e(q)$, $\therefore\ r \leq q$,

$\therefore\ q \in G \quad \therefore\ x \in e[G]$, i.e., $U(G) \cap e[P] \subseteq e(G)$ $\square$.

La siguiente afirmación, que es en cierto modo el recíproco de la anterior, justifiva el nombre de $C(W)$:

5.23 Aff :- Si M es un modelo transitivo de ZF, (P ; $<$) es un orden parcial en el sentido de M, (B , e) es la compleción de P en el sentido de M y W es un ultrafiltro M-genérico sobre B ; entonces $C(W)$ es un subconjunto M-genérico de P :

Dem :

Primero hay que notar que :

i) Si $D \in M$ es denso en $B - \{0\}$ entonces $D \cap W \neq \emptyset$ ya que de lo contrario, $\bar{D} := \{d' / d \in D\} \subseteq W$ y, siendo W M-genérico, tendríamos que $\mathrm{INF}\, \bar{D} \in W$, pero

$\mathrm{INF}\, \bar{D} = 0$, porque si $c \neq 0$ y $\underset{d \in D}{\forall}\ c \leq d'$ ent

$\underset{v \in D}{\exists} (v \leq c)$ y $c \leq v'$, $\therefore\ v \leq c$ y $c' \geq v$

$\therefore\ v \leq cc' = 0,\ \therefore\ 0 = v \in D$ 𝛾

$\therefore\ D$ no tiene cotas inferiores distintas de cero

i.e. $\mathrm{INF}\ \bar{D} = 0$.

Ahora supongamos que $A \in M$ es un subconjunto denso de P.

Demostraremos que $c(W) \cap A \neq \phi$.

$e[A]$ es denso en $B - \{0\}$ porque si $x \in B - \{0\}$ ent

$$\exists_{q \in P}\ e(q) \leq x \quad (e[P] \text{ es denso en } B - \{0\})$$

$$\therefore \exists_{r \in A}\ r \leq q \quad \therefore\ e(r) \leq e(q) \leq x.$$

y como W intersecta a los subconjuntos densos en $B - \{0\}$.

$$W \cap e[A] \neq 0$$

$$\therefore \exists_{v \in W}\ v \in e[A] \quad \therefore \exists_{a \in A}\ e(a) = v,\ \therefore\ e(a) \in W$$

$$\therefore\ a \in c(W),\ \therefore\ c(W) \cap A \neq \phi.$$

$\therefore$ si $A \in M$ es un subconjunto denso de P, entonces

$c(W) \cap A \neq \phi$ (i)

Por otro lado, si $x \in c(W)$, $y \in P$ y $x \leq y$ ent

$e(x) \in W$ y $e(x) \leq e(y)$,

por lo tanto, siendo W un ultrafiltro; $\alpha(y) \in W$ y por lo tanto $y \in \alpha(W)$, es decir,

$$(x \in c(W),\ y \in P \text{ y } x \leq y) \Rightarrow y \in c(W) \quad (ii)$$

Además, si $x, y \in c(W)$ ent

$$A := \{q \in P / (q \leq x \text{ y } q \leq y) \text{ o } (q \text{ y } x \text{ son incompatibles}) \text{ o } (q \text{ y } y \text{ son incompatibles})\}$$

es denso en P , ya que si $r \in P$ entonces

a) si $r \in A$ ent $r \in A$ y $r \leq r$

b) si $r \notin A$ ent r y x son compatibles

$\therefore \exists_{s_1 \in P} (s_1 \leq x \text{ y } s_1 \leq r)$

b₁) si $s_1 \in A$ ent $s_1 \in A$ y $s_1 \leq r$

b₂) si $s_1 \notin A$ ent s_1 y y son compatibles

$\therefore \exists_{s_2 \in P} (s_2 \leq y \text{ y } s_2 \leq s_1)$

$\therefore s_2 \leq y$ y $s_2 \leq x$

$\therefore s_2 \in A$ y $s_2 \leq r$

Así, por el inciso (i), sabemos que $c(W) \cap A \neq \emptyset$

$\therefore \underset{z \in A}{\exists}\ z \in c(W)$, $\therefore$ $z \in A$ y $e(z) \in W$.

Ahora, como x, $y \in c(W)$, tenemos que $e(x)$ y $e(y) \in W$

$\therefore$ si z y x fueran incompatibles, entonces

$$e(x) \cdot e(z) = O_x \cap O_z = \emptyset = 0 \in W \; \text{\textdoublebarpipe}$$

y si z y y fueran incompatibles, entonces

$$e(y) \cdot e(z) = O_y \cap O_z = \emptyset = 0 \in W \; \text{\textdoublebarpipe}$$

pero $z \in A$

$$\therefore\ z \leq x \ \text{ y } \ z \leq y \ \text{ y } \ z \in c(W) \qquad (iii)$$

Por (i) y (ii) y (iii), tenemos que $c(W)$ es un subconjunto M-genérico de P.

$\square$.

El último resultado que presentaremos en esta sección muestra el carácter inverso que tienen las operaciones U y c y lo cual nos da una forma de recuperar el ultrafiltro o conjunto M-genérico del cual hemos partido.

5.24 Afirmación.- Si M es un modelo transitivo de ZF, $(P, \leq)$ es un orden parcial en el sentido de M, W es un ultrafiltro M-genérico sobre B y $G \subseteq P$ es un conjunto M-genérico, entonces :

$$i)\ U(c(W)) = W$$

$$ii)\ c(U(G)) = G$$

Dem:

i) si $x \in U(c(W))$, $\underset{r \in c(W)}{\exists}$ $e(r) \leq x$

$\therefore$ $e(r) \in W$ ya que $r \in c(W)$

$\therefore$ $x \in W$, $\therefore$ $U(c(W)) \subseteq W$

si $x \in W - U(c(W))$ ent $x' \subseteq U(c(W)) \subseteq W$

$\therefore$ $x' \in W$ & $\therefore$ $x \in U(c(W))$

$\therefore$ $W \subseteq U(c(W))$ $\therefore$ $W = U(c(W))$.

ii) $c(U(G)) = \{q \in P / e(q) \in U(G)\} =$

$= \{q \in P / \underset{g \in G}{\exists} \; e(g) \leq e(q)\}$

si $x \in c(U(G))$, $\underset{g \in G}{\exists}$ $e(g) \leq e(x)$

$\therefore$ $g \leq x$, $\therefore$ $x \in G$, $\therefore$ $c(U(G)) \subseteq G$

si $x \in G$ ent $e(x) \in U(G)$ $\therefore$ $x \in c(U(G))$

$\therefore$ $G \subseteq c(U(G))$

$\therefore$ $c(U(G)) = G$.

$\square$.

Forcing

Los conceptos que hasta aquí hemos definido constituyen una base suficiente para dar una definición formal de la relación de forcing entre los elementos de un orden parcial P y los enunciados acerca de elementos de M^B (donde B es la compleción de P).

5.32 Def .- Sup que(P , $<$) es un orden parcial separativo y que (B , e) es la compleción de P . Si $q \in P$ y σ es un enunciado acerca de elementos de M^B , entonces decimos que q forza a σ y escribimos $q \Vdash \sigma$ si y solo si

$$e(q) \leq \|\sigma\|^B$$

Sin embargo, por razones de comodidad, aprovechando que e es una inmersión de P en B , identificaremos q con $e(q)$ y por lo tanto la definición que utilizaremos será :

$$q \Vdash \sigma \quad \text{sii} \quad q \leq \|\sigma\|$$

El siguiente teorema contiene una lista de propiedades elementales de la relación de forcing. Pensando en el concepto intuitivo de forcing, cada una de estas propiedades no es más que la formalización de algo que ya era intuitivamente cierto.

5.25 Teo .- Si α y β son dos B -enunciados y $\varphi(x)$ es una B -fórmula y p , $q \in P$ entonces :

i) $p \Vdash \neg\alpha$ sii $\forall_{q \leq p} \; q \nVdash \alpha$.

ii) $p \Vdash \alpha \wedge \beta$ sii $(p \Vdash \alpha$ y $p \Vdash \beta)$

iii) $p \Vdash \alpha \vee \beta$ sii $(\forall_{q \leq p} \exists_{r \leq q} (r \Vdash \alpha$ o $r \Vdash \beta)$

iv) $p \Vdash \alpha \to \beta$ sii $(\forall_{q \leq p}$ si $q \Vdash \alpha$ ent $\exists_{r \leq q} (r \Vdash \beta))$.

v) $p \Vdash (x)\, f(x)$ sii $(\forall_{v \in M^B} p \Vdash f(v))$

vi) $p \Vdash (\exists x)\, f(x)$ sii $(\forall_{q \leq p} \exists_{r \leq q} \exists_{v \in M^B} (r \Vdash f(v)))$

vii) $\|\alpha\| = 0$ sii $\forall_{r \in P}\ r \nVdash \alpha$.

viii) $\|\alpha\| = 1$ sii $\forall_{r \in P}\ r \Vdash \alpha$

ix) $\forall_{q \in P} \exists_{r \leq q} (r \Vdash \alpha$ o $r \Vdash \neg \alpha)$

x) Si $q \leq p$ y $p \Vdash \alpha$ ent $q \Vdash \alpha$

xi) Si $p \Vdash \alpha$ ent $p \nVdash \neg \alpha$.

Dem:

i) sup que $p \Vdash \neg \alpha$ ent

$p \leq \|\neg\alpha\| = \|\alpha\|'$, y por lo tanto

si $q \leq p$ y $q \leq \|\alpha\|$ ent $q \leq p \leq \|\alpha\|'$ y $q \leq \|\alpha\|$

$\therefore$ $q \leq \|\alpha\|$ y $q \leq \|\alpha\|'$, pero $\underset{q \in P}{\forall}$ $q > 0$,

$\therefore$ $0 < q \leq \|\alpha\| \cdot \|\alpha\|' = 0$ $\quad \therefore$ $0 < 0$ $\between$

$\therefore$ si $q \leq p$ ent $q \nleq \|\alpha\|$, i.e., $q \nVdash \alpha$.

Recíprocamente, procediendo por contrapositiva,

si $p \nVdash \neg\alpha$ ent $p \nleq \|\neg\alpha\| = \|\alpha\|'$,

por lo tanto, $p \cdot \|\alpha\| \neq 0$ (o de lo contrario

$p = p \cdot (\|\alpha\| + \|\alpha\|') = p\|\alpha\| + p\|\alpha\|' = p\|\alpha\|'$ y $p \leq \|\alpha\|'$).

Además, $\mathcal{B}$ es la compleción de $\mathbb{P}$ y por lo tanto $\mathbb{P}$ es denso en $\mathcal{B} - \{0\}$

Así, $\underset{q \in P}{\exists}$ $q \leq p \cdot \|\alpha\|$, pero $p \cdot \|\alpha\| \leq p, \|\alpha\|$,

por lo tanto $q \leq p$ y $q \leq \|\alpha\|$

$\therefore$ $\underset{q \leq p}{\exists}$ $q \Vdash \alpha$.

ii) La prueba de este inciso es directa :

$p \Vdash \alpha \wedge \beta$ sii $(p \leq \|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|)$ sii

$(p \leq \|\alpha\|$ y $p \leq \|\beta\|)$ sii $(p \Vdash \alpha$ y $p \Vdash \beta)$.

iii) $p \Vdash \alpha \vee \beta$ sii $(p \leq \|\alpha \vee \beta\| = \|\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)\|)$ sii

$[p \Vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)]$ sii $(\forall_{q \leq p}\ q \not\Vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta)$ sii

$[\forall_{q \leq p} (q \not\Vdash \neg\alpha$ o $q \not\Vdash \neg\beta)]$ sii

$[\forall_{q \leq p} (\exists_{s \leq q}\ r \Vdash \alpha$ o $\exists_{t \leq q}\ r \Vdash \beta)]$

sii $[\forall_{q \leq p} \exists_{r \leq q} (r \Vdash \alpha$ o $r \Vdash \beta)]$,

para este último paso, basta tomar $r = st$.

iv) $p \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ sii $(p \leq \|\alpha \rightarrow \beta\| = \|\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\|)$ sii

$[p \Vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)]$ sii $[\forall_{q \leq p}\ q \not\Vdash \alpha \wedge \neg\beta]$ sii

$[\forall_{q \leq p}$ si $q \Vdash \alpha$ ent $q \not\Vdash \neg\beta]$ sii

$[\forall_{q \leq p}$ si $q \Vdash \alpha$ ent $\exists_{r \leq q}\ q \Vdash \beta)$.

v) $p \Vdash (x)\, \varphi(x)$ sii $\left(p \leq \|(x)\,\varphi(x)\| = \right.$

$= \left.\underset{v \in M^B}{\mathrm{INF}} \|\varphi(x)\|\right)$ sii $\left(\underset{v \in M^B}{\forall} p \leq \|\varphi(v)\|\right)$ sii

$\left(\underset{v \in M^B}{\forall} p \Vdash \varphi(v)\right)$

vi) $p \Vdash (\exists x)\, \varphi(x)$ sii

$\left(p \leq \|(\exists x)\, \varphi(x)\| = \|\neg\, (x) \neg\, \varphi(x)\|\right)$ sii

$\left(p \Vdash \neg\, (x) \neg\, \varphi(x)\right)$ sii $\left(\underset{q \leq p}{\forall} q \not\Vdash (x) \neg \varphi(x)\right)$ sii

$\left(\underset{q \leq p}{\forall}\ \underset{v \in M^B}{\exists} q \not\Vdash \neg\, \varphi(v)\right)$ sii $\left(\underset{q \leq p}{\forall}\ \underset{v \in M^B}{\exists}\ \underset{r \leq q}{\exists} r \Vdash \varphi(v)\right)$.

vii) si $\|\alpha\| = 0$ ent $\underset{r \in P}{\forall} r \nleq \|\alpha\|$ y $\therefore \underset{r \in P}{\forall} r \not\Vdash \alpha$.

si $\|\alpha\| \neq 0$ ent, por ser P denso en $B - \{0\}$,

$\underset{r \in P}{\exists} r \leq \|\alpha\|$, $\therefore \underset{r \in P}{\exists} r \Vdash \alpha$.

viii) si $\|\alpha\| = 1$ ent $\underset{r \in P}{\forall} r \leq \|\alpha\|$, $\therefore \underset{r \in P}{\forall} r \Vdash \alpha$,

y si $\underset{r \in P}{\forall} r \Vdash \alpha$ ent $\underset{r \in P}{\forall} r \not\Vdash \alpha$ (de lo contrario $\underset{s\le r}{\exists}$ $s \not\Vdash \alpha$).

$\therefore \|\alpha\|' = \|\neg\alpha\| = 0$

$\therefore \|\alpha\| = 1$

ix) Sea $q \in P$

a) si $q \Vdash \alpha$ no hay nada que probar.

b) si $q \not\Vdash \alpha$ ent $q \nleq \|\alpha\|$ y $\therefore$ $q \cdot \|\alpha\|' \neq 0$

(Vea la demostración de (i)).

y como P es denso en $B - \{0\}$

$\underset{r\in P}{\exists}$ $r \le q \cdot \|\alpha\|'$, $\therefore$ $r \le q$, $\|\alpha\|$, i.e.,

$r \le q$ y $r \Vdash \neg\alpha$.

x) Trivial

xi) si $p \Vdash \alpha$ y $p \Vdash \neg\alpha$ ent

$p \le \|\alpha\|$ y $p \le \|\alpha\|'$, $\therefore$ $p \le \|\alpha\| \cdot \|\alpha\|' = 0$ ↯

$\therefore$ si $p \Vdash \alpha$ ent $p \not\Vdash \neg\alpha$.

□

Como ya lo habíamos mencionado, cada una de las propiedades enunciadas en el teorema anterior corresponde a una idea intuitiva completamente natural. Así, por ejemplo, lo que el inciso (vii) dice, es equivalente a que si un enunciado es "intrinsecamente falso" a que ninguna cantidad de "información" pueda forzarlo a ser "verdadero", mientras que el inciso (viii) afirma que es equivalente que un enunciado sea "intrinsecamente verdadero" a que cualquier "cantidad de información" sea suficiente para forzarlo a ser "verdadero". El inciso (ix) se refiere a la naturaleza de las informaciones diciendo que cualquier información puede ser refinada hasta el grado de que la información obtenida sea capaz de forzar que un enunciado dado, o su negación, sea "verdadero", además, el inciso (xi) nos dice que esta disyunción es exclusiva, ya que ninguna información puede forzar al mismo tiempo a un enunciado y a su negación.

El inciso (x) dice que la información refinada sigue forzando las mismas "verdades" que la información original ya forzaba. El resto de los incisos se refieren a la conexión que existe entre los operadores lógicos y la relación de forcing.

Por ejemplo, los incisos (ii) y (v) afirman que tal conexión es directa, ya que, si una información forza dos o "más" cosas a que sean verdaderas, evidentemente forza a cada una de ellas y viceversa. El inciso(i) afirma que es equivalente que una información force la negación de un enunciado a que ningún refinamiento de ésta force al enunciado, lo cual resulta natural si se toma en cuenta a los incisos (ix) y (x).

Finalmente, los incisos (iii) y (vi) afirman que el que una información force la "disyunción" de dos o "más" enunciados es equivalente a que todo refinamiento de esta información pueda ser a su vez refinado para obtener una información que force a que alguno de los enunciados de la disyunción sea "verdadero".

Teorema de Forcing.

El teorema que probaremos en esta sección y que es conocido con el nombre de teorema de forcing, es muy importante porque establece una conexión entre la relación de forcing y las extensiones M-genéricas. Esta conexión resulta vital para el uso del "método de forcing" en la prueba de indecibilidad de enunciados en la teoría axiomática de conjuntos, ya que nos permite usar la relación de forcing para saber si un enunciado dado es cierto o falso en la extensión M-genérica correspondiente a las condiciones de forcing usadas, dicho de otra manera, el teorema de forcing nos permite preocuparnos solamente de forzar enunciados dandonos la seguridad de que existe un modelo que los realiza.

5.26 Teorema de Forcing .- Supongamos que :

a.- M es un modelo transitivo de ZFC

b.-(P , $<$) es un orden parcial separativo, en el sentido de M

c.-(B , $\leq$) es la compleción de P , en el sentido de M

d.- $\mathcal{G}$ es un subconjunto M -genérico de $\mathbb{P}$

e.- $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ es una fórmula

f.- $x_1, x_2, \dots, x_n \in M^B$ y

$$s = (i_w(x_1), i_w(x_2), \dots, i_w(x_n), i_w(x_n), \dots)$$

ent

$$M[U(G)] \models_s \varphi(v_1, \dots, v_n) \quad \text{sii}$$

$$\exists_{g \in G} \; g \Vdash \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dem :

Como ya habíamos anunciado, este teorema no es más que una reformulación de un teorema que ya hemos probado, lo cual simplifica la demostración :

$$M[U(G)] \models_s \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \text{sii}$$

$$\| \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \| \in U(G) \quad \text{sii}$$

$$\exists_{g \in G} \; e(g) \leq \| \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \| \quad \text{sii}$$

$$\exists_{g \in G} \; g \Vdash \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

$\square$

Aplicaciones.

En vista de los resultados presemtados en la secoión anterior, se puede decir que, dados un modelo transitivo de ZF, M, una fórmula $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del lenguaje de ZF y una sucesión $S=(m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots)$ de elementos de M, la aplicación de la técnica de forcing para probar la "independencia" o la "consistencia" de f (buscando una extensión de M, M' tal que $ZF \vdash (M' \models f)$ o bién uqe $ZF \vdash (M' \models \neg f)$) se resume en los siguientes pasos :

1º.- Establecer en forma intuitiva, la condición c que habrá de forzar que el enunciado del lenguaje extendido, $f(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, \hat{m}_n)$, que corresponde al "enunciado" $f(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ sea "verdadero".

2.- Definir un orden parcial adecuado que tenga un elemento q_c que "corresponde" a la condición c.

3º.- Encontrar un subconjunto M-genérico de P, G, tal que $q_c \in G$.

4º.- Aplicando el teorema de forcing y que $(i_G(G) \circ \hat{\ })$, i.e., J, es la identidad en M, tenemos que $M[G]$ es una extensión de M, tal que

$$M[G] \models_S f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ sii } \exists_{g \in G}\, g \Vdash f(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_n).$$

Pero hemos construido a G de manera que

$$q_c \Vdash f(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, m_n), \quad \therefore\ M[G] \models_S f(x_1, \ldots, x_n).$$

Pero, todo esto tiene sus dificultades. Como el lector habrá notado, no todos los pasos del método de forcing son precisos, ya que, aunque nos indica que es lo que se necesita, no nos dice como encontrarlo. La construcción del orden parcial que se pide en el paso 2, corre a cargo del usuario, mientras que para el paso 3 contamos con un resultado que nos ayuda en algunos casos :

5.27 Teo .- Si M es un modelo transitivo de ZF y $(P\ ;\ <)$ es un orden parcial en el sentido de M y el conjunto potencia de P en el sentido de M, $\mathcal{P}^M(P)$, es numerable (en el sentido de ZF), entonces

$$\forall_{q\in P}\ \exists_{G\subseteq P}\ (G \text{ es } M\text{-genérico y } q\in G).$$

Dem :

Supongamos que $q\in P$,

ya que $\mathcal{P}^M(P)$ es numerable, $A := \{x\in M \,/\, x \text{ es denso en } P\}$ es numerable.

Sea D_n ; $n\in \omega$, una numeración de los elementos de A.

Entonces

$$\forall_{r\in P}\ \forall_{n\in\omega}\ \exists_{r(n)\in D_n}\ r(n)\leq r.$$

Definimos por inducción sobre n :

$$P_0 = q$$

$$P_{n+1} = P_n(n),$$

por lo tanto, $\forall_{n\in\omega} (p_{n+1} \in D_n \text{ y } p_{n+1} \leq p_n)$

Ahora definimos

$$G := \{r \in P / \exists_{n\in\omega} (r \leq p_n)\}$$

G es el conjunto que buscamos, ya que :

a) $q \geq p_0$, $\therefore q \in G$

b) Si $x \in G$, $y \in P$ y $x \leq y$, ent

$\exists_{n\in\omega} (x \geq p_n)$, $\therefore y \geq p_n$ y $y \in G$

Si $x, y \in G$ ent $\exists_{n\in\omega} (x \geq p_n)$ y $\exists_{m\in\omega} (y \geq p_m)$

S.P.G. $n \geq m$

$\therefore p_n \leq p_m$ y $p_n \geq p_n$

$\therefore p_n \in G$, $p_n \leq x$ y $p_n \leq y$

$\therefore \exists_{z\in G} (z \leq x \text{ y } z \leq y)$

Si $D \in M$ es denso en P, ent $D = D_n$ p.a. $n \in \omega$.

$\therefore\ p_{n+1} \in D$ y $p_{n+1} \in G$

$\therefore\ G \cap D \neq \emptyset$

$\therefore\ G$ es un subconjunto M -genérico de $\mathbb{P}$.

Por supuesto, en caso de que M sea numerable, $\mathcal{P}^M(\mathbb{P})$ es numerable, y el teorema se puede aplicar.

Cabe mencionar que el teorema anterior es un caso particular del teorema de Rasiowa-Sikorski :

5.28 Teo (Rasiowa-Sikorski).- Si $\mathcal{B}$ es un álgebra Booleana y $F \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{B})$ es numerable, entonces existe un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}$ F -completo.

Dem : (vea "Boolean Algebras", Sikorski, R).

De todo lo anterior, concluimos que, aunque la técnica de forcing es una poderosa herramienta para hacer pruebas de independencia, esto no significa que las pruebas en sí sean sencillas.

Los siguientes ejemplos ilustran tanto lo que hemos comentado, como el uso de la técnica.

5.29 Ejemplo 1 : Probaremos que existe un modelo de ZF en el que es cierto que $V \neq L$. Puesto que K. Gödel exhibió un modelo en el que se cumple $V = L$, lo siguiente completa la demostración de que $V = L$ es independiente de ZF .

- Lo que intuitivamente estamos buscando, es un "conjunto" (elemento de V) que no sea construible (no elemento de L). Lo que haremos, será encontrar un modelo en el que exista un subconjunto de ω , X , tal que $X \notin L$.

Este modelo será la extensión.

Como X no puede ser un "conjunto completa mente especificado", procedemos de la siguiente manera : Pensaremos que que una sucesión finita de unos y ceros, por ejemplo $s=(01011)$, es la función característica de un subconjunto finito de ω. Utiliza esta "representación" de los subconjuntos finitos de ω, porque de esta manera podemos introducir un orden parcial sobre ellos y, además, podemos construir un "nuevo subconjunto de ω" a partir de cierta clase G de sucesiones finitas.

- Definimos $(P, <)$ como :

a) $P := \{ s / \exists_{n \in \omega} \; s : n \longrightarrow 2 \}$

b) $\forall_{q, r \in P} \; q < r$ sii $(q \supset r$ y $q \neq r)$

P es el conjunto de sucesiones finitas de unos y ceros ordenados por contención "inversa".

- El siguiente paso es escoger un subconjunto M-genérico de P adecuado. En nuestro caso, no hemos especificado aún cual es la condición que forzará $L \neq V$. Afortunadamente, cualquier conjunto genérico nos sirve, porque solo lo usaremos para construir el elemento especial que buscamos.

Sea G un subconjunto M-genérico de P. Sabemos que G existe porque M es numerable.

Sea $C'_x := \bigcup G$

Siendo G M-genérico, $\forall_{g_1, g_2 \in G} \exists_{g \in G} (g \supset g_1 \text{ y } g \supset g_2)$

$\therefore \forall_{g_1, g_2 \in G} \; g_1 \cup g_2$ es función

$\therefore c_x$ es función.

Se puede ver que $\mathrm{Dom}(x) = \omega$ de la siguiente manera :

$\forall_{n \in \omega}$ definimos $A_n := \{ q \in P / n \in \mathrm{Dom}(q) \}$.

Si $r \in P$ ent

a) $n \in \mathrm{Dom}(r) \to (r \in A_n \text{ y } r \leq r)$

b) $n \notin \mathrm{Dom}(r) \to (r' := r \cup \{(n, 0)\} \in A_n \text{ y } r' \leq r)$

$\therefore A_n$ es denso en P.

Claramente, $A_n \in M$

Por lo tanto, por ser G M -genérico,

$\forall_{n \in \omega} \; A_n \cap G \neq \emptyset$, es decir,

$\forall_{n \in \omega} \exists_{g \in G} (n \in \mathrm{Dom}(g))$

$\therefore \mathrm{Dom}(c_x) = \omega$, $c_x : \omega \to \{0, 1\}$.

- Sea $\mathcal{B}$ la compleción de $\mathcal{P}$:

Definimos $X_B \in M^B$ como :

$$\mathrm{Dom}(X_B) := \{\hat{n} / n \in \omega\}$$

$$X_B(\hat{n}) := \mathrm{SUP}\{e(q) \in \mathcal{B} / q(n) = 1\}$$

Sea $W = U(G)$ y sea $X := i_W(X_B)$

Resulta que X está contenido en ω, más aún,

$$X = \{n \in \omega / C_X(n) = 1\}$$

como veremos en seguida :

$$X = i_W(X_B) = \{i_W(y) / \|y \in X_B\| \in W\}$$

$$\text{Si } i_W(y) \in X \text{ ent } \|y \in X_B\| \in W$$

$$\therefore \mathop{\mathrm{SUP}}_{v \in \mathrm{Dom}(X_B)} (X_B(v) \cdot \|y = v\|) \in W$$

$\therefore$ Siendo W M-genérico,

$$\exists_{v \in \mathrm{Dom}(X_B)} (X_B(v) \cdot \|y = v\| \in W)$$

$$\therefore X_B(v), \|y = v\| \in W$$

$$v = \hat{n} \quad \text{p. a. } n \in \omega$$

$$\|y = \hat{n}\| \in W \longrightarrow y^W = \hat{n}^W.$$

$f(y^w) = f(\hat{n}^w)$

$\therefore \quad i_w(y) = i_w(\hat{n}) = n \quad \therefore \quad i_w(y) \in \omega$

Además, $X_B(\hat{n}) \in W$,

y si $\quad X(n) = 0 \quad$ ent $\displaystyle\forall_{g \in G} \; g(n) = 0$

$\therefore \quad X_B(\hat{n}) = \sup \; \emptyset = 0 \in W$ &

$\therefore \quad C_X(n) = 1$

$\therefore \quad i_w(y) = n \in \{n \in \omega / C_X(n) = 1\}$

$\therefore \quad X \subseteq \{n \in \omega / C_X(n) = 1\}$

Para probar la otra contención, tomamos $n \in \omega$ **tal que** $C_X(n) = 1$ **. Entonces :**

W **es** M-**genérico,** $\therefore \; j = 1_M$.

Así, si definimos

$y := n, \; i_w(y) = i_w(\hat{n}) = j(n) = n,$

veremos que $\|y \in X_B\| \in W$:

$X_B(y) = X_B(\hat{n}) = \sup\{e(f) \mid g(n) = 1\}$.

Como $C_X(n) = 1$, $\displaystyle\exists_{g \in G} \; g(n) = 1$, $\therefore$

$\therefore\ \alpha(g) \leq \mathrm{SUP}\{\alpha(q)/\, q(n)=1\} = X_B(\hat{n})$

$y\ \alpha(g) \leq \alpha(g)\ \therefore\ \alpha(g) \in W$

$\therefore\ X_B(\hat{n}) \in W$

Pero $\|g \in X_B\| = \|\hat{n} \in X_B\| \geq X_B(\hat{n})$,

$\therefore\ \|g \in X_B\| \in W$

$\therefore\ n = i_W(g) \in \{i_W(g)/\, \|g \in X_B\| \in W\}$,

$\therefore\ \{n \in w/\, C_X(n)=1\} \subseteq X$

$\therefore\ X = \{n \in w/\, C_X(n)=1\}$.

Ahora probaremos que $G \notin M$

Supongamos que $G \in M$

Si $g \in G$, $g : n \to \{0,1\}$,

entonces no es posible que

$g \cup \{(n+1,0)\} \in G$ y $g \cup \{(n+1,1)\} \in G$

porque de lo contrario existiría $h \in G$ tal que

$h \supseteq g \cup \{(n+1,0)\}$ y $h \supseteq g \cup \{(n+1,1)\}$,

y por lo tanto $0 = h(n+1) = 1$ ∦

por lo tanto $\forall_{g \in G} (g \cup \{(n+1, 0)\} \notin G$ o $g \cup \{(n+1, 1)\} \notin G)$

Sea $A := \{r \in P / r \notin G\}$. ya que $P, G \in M$, $A \in M$.

Además, si $s \in P$, $s : n \to \{0, 1\}$,

ent $s \cup \{(n+1, 0)\} \notin G$ o $s \cup \{(n+1, 1)\} \notin G$.

S.P.G. $s \cup \{(n+1, 0)\} \notin G$

$\therefore$ $s \cup \{(n+1, 0)\} \in A$ y $s \cup \{(n+1, 0)\} < s$.

Es decir, $A \in M$ y A es denso en P

$\therefore$ $G \cap A \neq \emptyset$ ☇

Por lo tanto, $G \notin M$. Con mayor razón,

$c_x = \bigcup G \notin M$.

Así, $x = i_W(x_B) \in M[W]$, pero $x \notin M$,

de lo contrario:

$c_x = \{(n, m) / n \in \omega$ y $(m = 0$ o $n \in x)\} \in M$ ☇

Resumiendo, tenemos que $x \subseteq \omega$, $x \in M[W]$ y $x \notin M$.

$$\therefore\ ZF \vdash (M[W] \models x \notin M)$$

Además, sabemos que $ZF \vdash M \subseteq L$

$$\therefore\ ZF \vdash (M \models M = L)$$

por lo tanto, extendiendo de manera natural la definición de $\hat{}$ a clases $ZF \vdash (M^B \models \hat{M} = \hat{L})$

y por el teorema de forcing

$$ZF \vdash (M[W] \models i_W(\hat{M}) = i(\hat{L}))$$

$$\therefore\ ZF \vdash (M[W] \models M = L)$$

$$\therefore\ ZF \vdash (M \models x \notin M \wedge M = L)$$

$$\therefore\ ZF \vdash (M[W] \models x \notin L)$$

$\square$.

Otro ejemplo en el que exhibiremos la aplicación de la técnica de forcing, es la demostración de la independencia de la hipótesis del continuo de los axiomas de ZFC.

6.30 Ejemplo 2 .- Probaremos que si ZFC es consistente, entonces existe un modelo de ZFC en el que es cierto que

$$|2^{\aleph_0}| > \aleph_1 .$$

Como en el ejemplo 1, esto completa la prueba de la independencia de la hipótesis del continuo, porque K. Gödel dió un modelo en el que $|2^{\aleph_0}| = \aleph_1$.

Dem :

Igual que en el ejemplo 1, supondremos que M es un modelo transitivo numerable de ZFC cuya existencia se desprende de L y del teorema de Lövenheim - Skolem.

En este caso, la idea intuitiva consiste en encontrar una extensión genérica en la que exista una familia de subconjuntos de ω, cuya cardinalidad sea $\aleph_2$. De esta manera, tendríamos $|2^{\aleph_0}| \geq \aleph_2 > \aleph_1$.

La manera en que se construye esta familia es agregando "nuevos subconjuntos" de ω que se definen a partir del conjunto M-genérico que determina $M[G]$. Por supuesto, para comenzar necesitamos definir un orden parcial que conste de bastantes elementos :

Definimos (P , $<$) de la siguiente manera :

$$P := \{x \in M / (\exists A)(x : A \to \{0,1\} \wedge |A| < \omega^M \wedge A \subseteq \omega^M \times \omega_2^M\}$$

$\forall_{r,s\in P}$ definimos $r < s$ sii $r \supset s$.

Sea $G \in P$ un subconjunto M-genérico de condiciones.

Ahora probaremos que $\cup G$ es una función tal que

$\cup G : \omega^M \times \omega_2^M \longrightarrow \{0,1\}$

i) si $g_1, g_2 \in G$ ent $\exists_{g\in G}(g \leq g_1$ y $g \leq g_2)$

$\therefore g \supseteq g_1 \cup g_2$ y $\therefore g_1 \cup g_2$ es función

$\therefore \cup G$ es función.

ii) para ver que $Dom(\cup G) = \omega \times \omega_2$,

$\forall_{(n,\alpha)\in\omega\times\omega_2}$ definimos $A_{(n,\alpha)} := \{x \in P / (n,\alpha) \in Dom(x)\}$

si $t \in P$ ent

a) $(n,\alpha) \in Dom(t) \rightarrow (t \in A_{(n,\alpha)}$ y $t \leq t)$.

b) $(n,\alpha) \notin Dom(t) \rightarrow (t \cup \{((n,\alpha),0)\} \in A_{(n,\alpha)}$ y

$t \cup \{((n,\alpha),0)\} \leq t)$

$\therefore \forall_{(n,\alpha)\in\omega\times\omega_2} A_{(n,\alpha)}$, es denso en P.

$$\text{Así, si } (n,\alpha) \in \omega \times \omega_2 \text{ ent } A_{(n,\alpha)} \cap G \neq \emptyset$$

$$\therefore \underset{g \in G}{\exists}\ g \in A_{(n,\alpha)}, \quad \therefore (n,\alpha) \in \mathrm{Dom}\,(g) \subseteq \mathrm{Dom}\,(\cup G)$$

$$\therefore \mathrm{Dom}\,(\cup G) = \omega \times \omega_2$$

Como siempre, sea ($\mathcal{B}$, e) la compleción de ($\mathcal{P}$, $<$)$\ddot{\cdot}$
Ahora procedemos a de finir la familia de subconjuntos de ω con cardinalidad mayor a $\aleph_1$

Para cada $\alpha \in \omega_2^M$ definimos $x_{B,\alpha} \in M^B$ como :

$$\mathrm{Dom}\,(x_{B,\alpha}) := \{ \hat{n} / n \in \omega^M \} \ \ y$$

$$x_{B,\alpha}(\hat{n}) = \mathrm{SUP}\, \{ e(r) / r((n,\alpha)) = 1 \} \ \forall_{\hat{n} \in \mathrm{Dom}(x_{B,\alpha})}$$

También, para cada $\alpha \in \omega_2^M$ definimos x_α como

$$x_\alpha := \{ n \in \omega / (\cup G)((n,\alpha)) = 1 \}$$

Como era de esperarse, $i_W(x_{B,\alpha}) = x_\alpha$:

$$i_W\,(x_{B,\alpha}) = \{ i_W\,(y) / \| y \in x_{B,\alpha} \| \in W \}$$

$$\sup\ i_W\,(y) \in i_W\,(x_{B,\alpha}).\ \text{Ent}\ \| y \in x_{B,\alpha} \| \in W$$

$$\therefore \underset{u \in \mathrm{Dom}(x_{B,\alpha})}{\mathrm{SUP}} \left(x_{B,\alpha}(u) \cdot \| y = u \| \right) \in W$$

$\therefore$ siendo W M-genérico,

$$\exists_{u \in Dom(x_{B,\alpha})} (x_{B,\alpha}(u) \cdot \|y = u\| \in W)$$

$$\therefore x_{B,\alpha}(u), \|y = y\| \in W.$$

$$u = \hat{n} \quad \text{p.a. } n \in \omega^M$$

$$\|y = \hat{n}\| \in W \longrightarrow y^W = \hat{n}^W$$

$$\therefore f(y^W) = f(\hat{n}^W) \quad \therefore i_W(y) = i_W(\hat{n}) = n \in \omega^M.$$

Además, $x_{B,\alpha}(\hat{n}) \in W$, y si $(\cup G)((n,\alpha)) = 0$ ent

$$\forall_{g \in G} \; g((n,\alpha)) = 0$$

$$\therefore x_{B,\alpha}(\hat{n}) = \sup \emptyset = 0 \in W \; \gamma$$

$$\therefore (\cup G)((n,\alpha)) = 1 \; \therefore i_W(y) =$$

$$= n \in \{n \in \omega^M / (\cup G)((n,\alpha)) = 1\} = x_\alpha$$

$$\therefore i_W(x_{B,\alpha}) \subseteq x_\alpha .$$

Para probar que $x_\alpha \subseteq i_W(x_{B,\alpha})$ **, tomemos** $n \in \omega$ **tal que** $(\cup G)((n,\alpha)) = 1$ **. Entonces**

Como W **es** M**-genérico,** $J = 1_M$ **. Así, si definimos**

$$y = \hat{n}, \text{ ent } i_W(y) = i_W(\hat{n}) = j(n) = n.$$

Por otro lado, $x_{B,\alpha}(y) = x_{B,\alpha}(\hat{n}) =$

$= \text{SUP}\{e(r) / r((n,\alpha)) = 1\}$

y como $(\cup G)((n,\alpha)) = 1$, $\underset{g \in G}{\exists}\ g(n) = 1$

$\therefore\ e(g) \leq \text{SUP}\{e(r) / r((n,\alpha)) = 1\} = x_{B,\alpha}(\hat{n})$ y

$e(g) \leq e(g)$

$\therefore\ \overline{e(g)} \in W \quad \therefore\ x_{B,\alpha}(\hat{n}) \in W.$

Por lo tanto, $\|y \in x_{B,\alpha}\| = \|\hat{n} \in x_{B,\alpha}\| \geq x_{B,\alpha}(\hat{n}) \in W$

$\therefore\ \|y \in x_{B,\alpha}\| \in W$

$\therefore\ n = i_W(y) \in \{i_W(y) / \|y \in x_{B,\alpha}\| \in W\} = i_W(x_{B,\alpha})$

$\therefore\ X_\alpha \subseteq i_W(x_{B,\alpha}) \quad \therefore\ i_W(x_{B,\alpha}) = X_\alpha.$

Nuestro propósito es probar que la familia de conjuntos

$$F := \{ X_\alpha \,/\, \alpha < \omega_2^M \}$$

tiene cardinalidad (en $M[G]$) $\aleph_2$

Para esto primero probaremos que por cada $\alpha < \omega_2^M$ obtenemos un elemento distinto de F :

Supongamos que $\alpha, \beta < \omega_2^M$, $\alpha \neq \beta$

Si $\| x_{B,\alpha} = x_{B,\beta} \| \neq 0$ entonces, puesto que $e[P]$ es denso en $B - \{0\}$

$$\underset{r\in P}{\exists}\; r \Vdash \chi_{B,\alpha} = \chi_{B,\beta}.$$

Pero Dom(r) es finito

$$\therefore \underset{n\in\omega}{\exists}\; ((n,\alpha)\notin \mathrm{Dom}(r) \wedge (n,\beta)\notin \mathrm{Dom}(r)).$$

Sea $q = r \cup \{((n,\alpha),1), ((n,\beta),0)\}$

ent : $q((n,\alpha)) = 1$ y $q((n,\beta)) = 0$

$$\therefore\; e(q) \leq \chi_{B,\alpha}(\hat{n}) \leq \|\hat{n}\in \chi_{B,\alpha}\|$$

$$\therefore\; q \Vdash \hat{n} \in \chi_{B,\alpha}.$$

También resulta que $q \Vdash \hat{n}\notin \chi_{B,\beta}$, porque, de lo contrario,

$$\underset{t\leq q}{\exists}\; t \Vdash \hat{n}\in \chi_{B,\beta}$$

$$\therefore\; e(t) \leq \|\hat{n}\in \chi_{B,\beta}\| = \underset{m\in\omega}{\mathrm{SUP}}\; \chi_{B,\beta}(\hat{m})\cdot\|\hat{m} = \hat{n}\| =$$

$= \chi_{B,\beta}(\hat{n})$, ya que, $\|\hat{m}=\hat{n}\| = 0$ si $m \neq n$

$$\therefore\; e(t) \leq \chi_{B,\beta}(\hat{n}) = \mathrm{SUP}\{e(r) \,/\, r((n,\beta)) = 1\}$$

$$\therefore\; e(t) = e(t)\cdot \chi_{B,\beta}(\hat{n}) \leq \mathrm{SUP}\{e(t)\cdot e(r) \,/\, r((n,\beta)) = 1\}.$$

Pero si $r((n,\beta))=1$ y $e(t)\cdot e(r)\neq 0$ ent

$\underset{s\in P}{\exists}\ e(s)\leq e(t)\cdot e(r)\leq e(t),\ e(r)$

$\therefore\ s\leq t, r$

$\therefore\ 1=r((n,\beta))=s((n,\beta))=t((n,\beta))=0\ \text{\Lightning}$

$\therefore$ si $r((n,\beta))=1$ ent $e(t)\cdot e(r)=0$.

Así, $\overline{e(t)}\leq \sup\{e(t)\cdot e(r)/r((n,\beta))=1\}=0$

$\therefore\ e(t)=0\ \text{\Lightning}$

$\therefore\ \underset{t\leq q}{\nexists}\ t\Vdash \hat{n}\in X_{B,\beta}$

$\therefore\ q\Vdash \hat{n}\notin X_{B,\beta}$.

$\therefore\ q\Vdash \hat{n}\in X_{B,\alpha}\ \wedge\ \hat{n}\notin X_{B,\beta}$.

$\therefore\ q\Vdash X_{B,\alpha}\neq X_{B,\beta}\ \text{\Lightning}$

ya que $q\leq r$ y $\therefore\ q\Vdash X_{B,\alpha}=X_{B,\beta}$.

Por lo tanto, no es posible que

$\| X_{B,\alpha}=X_{B,\beta}\|\neq 0$.

$$\therefore \; \| x_{B,\alpha} = x_{B,\beta} \| = 0 \notin W$$

$$\therefore \; x^{W}_{B,\alpha} \neq x^{W}_{B,\beta}$$

$$\therefore \; M[G] \models x_\alpha \neq x_\beta$$

Para concluir, solamente nos falta ver que $M[G] \models |F| = \aleph_2$. Para esto, usaremos el último resultado de las propiedades de V^B que enunciamos, considerando que también es cierto para M^B.

Sabemos que si B es un álgebra Booleana completa que satisface la condición de numerabilidad, entonces :

a) si $M \models \alpha \in CARD$ ent $M^B \models \hat{\alpha} \in CARD$ y

b) si $M \models |x| = |y|$ ent $M^B \models |\hat{x}| = |\hat{y}|$.

Para aplicar (a) y (b) comprobaremos que B satisface la condición de numerabilidad.

Ahora bién, B es la compleción de P , y es fácil ver que si B no satisface la condición de numerabilidad, P tampoco la cumple. (Por definición, P satisface la condición de numerabilidad sii todo subconjunto de P de elementos incompatibles dos a dos es a lo más numerable).

Por lo tanto, será suficiente ver que P satisface la condición de numerabilidad :

Sea $C \subseteq P$, tal que $\forall_{r,s \in P}$ r y s son incompatibles.

por lo tanto, si $r, s \in C$ y $r \neq s$

$$r: A_r \longrightarrow \{0,1\};\ |A_r| \leq \omega \ y\ A_r \subseteq \omega^M \times \omega_2^M$$

$$s: A_s \longrightarrow \{0,1\};\ |A_s| \leq \omega \ y\ A_s \subseteq \omega^M \times \omega_2^M$$

$$\text{ant} \underset{a \in A_r \cap A_s}{\exists} r(a) \neq s(a), \text{ de lo contrario,}$$

$$t = r \cup s \in P \ y \ t \geq r, s\ , \ \therefore t \leq r, s \ \text{X}$$

Ya que r y s son incompatibles,

$\underset{n \in \omega}{\forall}$ definimos $C_n := \{ r \in C \,/\, |Dom(r)| = n \}$

De esta manera, $C = \underset{n \in \omega}{\bigcup} C_n$, y por lo tanto, para probar que C es numerable, será suficiente probar que

$$\underset{n \in \omega}{\forall} \ C_n \text{ es finito}$$

Supongamos que $|C_n| \geq \aleph_0$ ¨ Por comodidad, supongamos también que $A_0 = \{ y_i \,/\, i \in \omega \} \subseteq C_n$.

Supongamos que $Dom(y_0) = \{ a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n} \}$, (el primer índice indica la independencia de A_0)

$$\therefore \underset{i \in \omega - \{0\}}{\forall} \ \underset{a \in Dom(y_0) \cap Dom(y_i)}{\exists} y_i(a) \neq y_0(a)$$

Siendo A_0 numerable y $Dom(y_0)$ finito, forzosamente existe un subconjunto de A_0 numerable, $A_1 = \{ y_{1i} \,/\, i \in \omega \}$, tal que, sin pérdida de generalidad,

$$y_0(a_{01}) = 0 \quad y \quad \underset{i \in \omega}{\forall} \ y_{1i}(a_0) = 1$$

Repitiendo el argumento, supongamos que

$$\mathrm{Dom}(y_{10}) = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}$$

$$\therefore \underset{i\in\omega-\{0\}}{\forall} \quad \underset{a\in \mathrm{Dom}(y_{10})\cap \mathrm{Dom}(y_{1i})}{\exists} y_{1i}(a) \neq y_{10}(a),$$

y, por la misma razón, existe $A_2 \subseteq A_1$ numerable, $A_2 = \{y_{2i} \mid i \in \omega\}$, tal que, sin pérdida de generalidad,

$$y_{10}(a_{11}) = 0 \quad y \quad \underset{i\in\omega}{\forall} \; y_{2i}(a_{11}) = 1$$

además, $a_{01}, a_{11} \in \mathrm{Dom}(y_{10})$ y $a_{01} \neq a_{11}$.

Es evidente que este proceso produce en cada paso un elemento distinto y todos los elementos producidos pertenecen al dominio de algún elemento de C_n. Por lo tanto, repitiendo este proceso más de n veces, obtenemos un elemento y de C_n tal que $\mathrm{Dom}(y) > n$ ☒

$$\therefore |C_n| < \aleph_0 \quad y \quad C \text{ es numerable}$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ cumple la condición de numerabilidad.

Volviendo a la demostración, tenemos que

$$F = \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_2^M\} \; y \; M[G] \models \alpha \neq \beta \Rightarrow x_\alpha \neq x_\beta$$

en particular, $M \models \alpha \neq \beta \rightarrow x_\alpha \neq x_\beta$

$$\therefore M \models |F| = |\aleph_2|$$

por lo tanto, por el inciso (b), $M^B \models |\hat{F}| = |\hat{\aleph}_2|$

$$\therefore \| |\hat{F}| = |\hat{\aleph}_2| \| = 1 \in W,$$

por lo tanto, por el teorema de forcing,

$$M[G] \models (|i_W(\hat{c})| = |i_W(\hat{\chi}_2)|)$$

y como W es M-genérico, $i_W \circ \wedge = 1_M$

$$\therefore \quad M[G] \models |F| = |\chi_2|$$

de la misma manera, $M \models |\chi_2| = \chi_2$

$$\therefore \quad M^B \models |\hat{\chi}_2| = \hat{\chi}_2 \,, \quad \therefore \quad \| \, |\hat{\chi}_2| = \hat{\chi}_2 \| = 1 \in W$$

$\therefore$ por el teorema de forcing, $M[G] \models |i_W(\hat{\chi}_2)| = i_W(\hat{\chi}_2)$

$$\therefore \quad M[G] \models |\hat{\chi}_2| = \hat{\chi}_2$$

por lo tanto

$$M[G] \models |F| = \chi_2$$

Con esto concluimos la demostración.

BIBLIOGRAFIA.

Bell, J.
"Boolean Valued Models and Independence Proofs in Set Theory"
Oxford University Press, 1977

Cantor, G.
"Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers"
Dover, 1915

Cohen, P.
"Set Theory and the Continuum Hypothesis"
W.A. Benjamin, 1976

Fraenkel, A.
"teoría de los Conjuntos y Lógica"
U.N.A.M. 1976

Göedel, K.
"The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory"
Princeton, 1958

Halmos, P
"Lecture on Boolean Algebras"
Van Nostrand 1963

Halmos, P
"Teoría intuitiva de Conjuntos"
CECSA, 1971

Hrbacek, K y Jech, T.
"Introduction to Set Theory"
Marcel Dekker, Inc. , 1978

Jech, T
"Lectures in Set Theory with particular emphasis on the Method of Forcing"
Springer Verlag, 1971

Jech, T
"Set Theory"
Academic Press, 1978

Manin, Y
"Lo demostrable e Indemostrable"
M.I.R. , 1981

Mendelson, E

"Introduction to Mathematical Logic"

Van Nostrand, 1964

Takeuti, G y Żaring, W

"Introduction to Axiomatic Set Theory"

Springer-Verlag, 1971

Takeuti, G y Zaring, W

"Axiomatic Set Theory"

Springer-Verlag 1972

LISTA de DEFINICIONES y AFIRMACIONES

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5