UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DEL INDICE DE POINCARE-HOPF.

TESIS PROFESIONAL

Que Para Obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

ERNESTO ROSALES GONZALEZ.

MEXICO D.F. 1984

INDICE

INTRODUCCION

El tema central de este trabajo consiste en rescatar información topológica de una superficie a partir de un campo vectorial sobre ella. De manera intuitiva esto se podría explicar como sigue:

Para empezar consideremos sobre la esfera el flujo generado por un campo por ejemplo consideremos el flujo obtenido de inducir un remolino en el polo Norte "N" ver fig. I.1 y extendiéndolo de manera continua hasta cubrir toda la esfera tratando de evitar nuevos remolinos, al terminar se induce un remolino en el hemisferio sur en "S", es mas si el remolino en N gira en sentido contrario a las manecillas del reloj "↺", en S girará en sentido de las manecillas del reloj "↻". Que pasaría si quisieramos generar un flujo con remolinos en N y S, girando ambos en la misma dirección, digamos ↺ como en la fig. I.2, entonces si tratamos de extender, generará nuevos remolinos en la zona en que se acoplen ambos flujos. Se "siente" entonces que no podría generar flujos en la superficie con

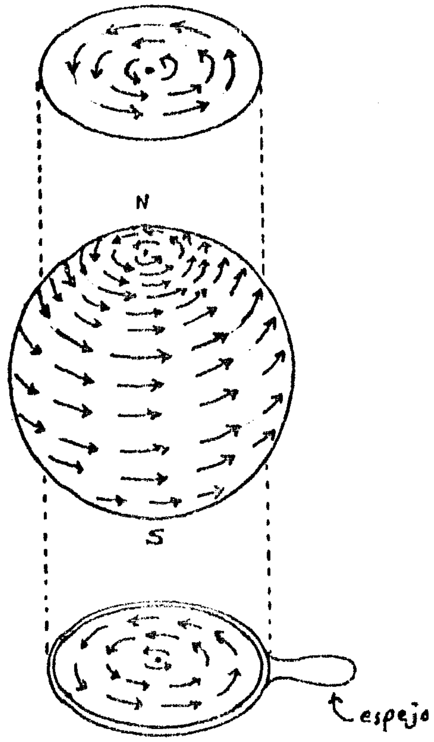


fig. I.1

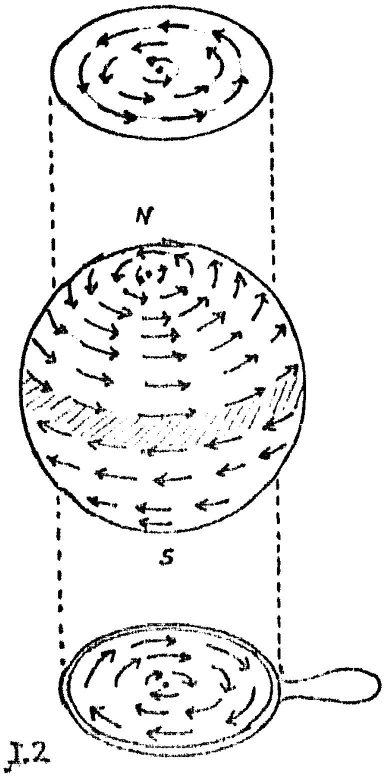


fig. I.2

el comportamiento en sus remolinos como se desee. Es entonces de esperar que dado un campo pueda obtener información topológica estudiando "los remolinos que genera o el comportamiento de éste, en los puntos donde podría ser caótico, i.e. los puntos singulares del campo, o los puntos fijos del flujo.

Una forma de "medir" el comportamiento del campo en sus puntos singulares, sería ver cuántas veces se "enreda" el campo alrededor de una singularidad, por ejemplo tomemos el "campo magnético" sobre la superficie de la tierra y caminamos alrededor del polo norte con una brujula en sentido ↺, despues de dar una vuelta la aguja de la brujula habrá dado una vuelta en sentido ↺. Haciendo lo mismo en el polo sur resultará que la aguja de la brujula dara una vuelta en el mismo sentido (ver fig. I.3

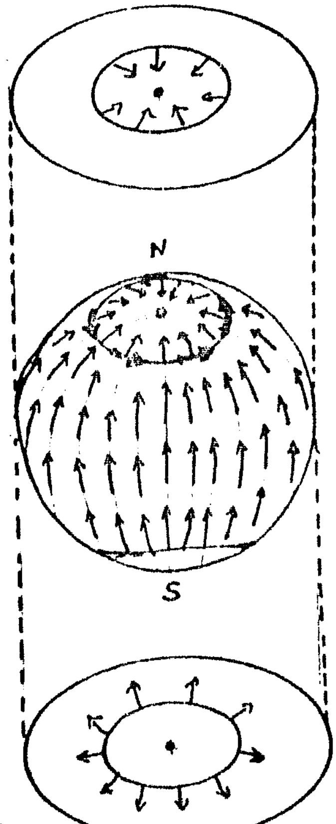


fig. I.3

Analicemos el campo de nuestro primer ejemplo (fig. I.1) haciendo lo mismo en cada punto singular N y S el comportamiento a lo largo de la trayectoria es como en la fig. I.4, si la "brujula" apunta en la dirección del flujo al darle la vuelta a N la aguja dara una vuelta en sentido ↺

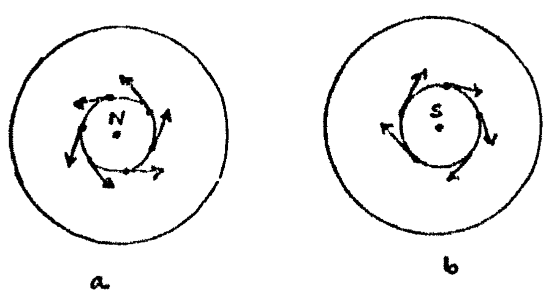


fig. I.4

y lo mismo pasará en S, en total 2 vueltas en sentido ↺ .

Hagamos lo mismo con el campo sobre S^2 mostrado en la fig I.5.a rodeando el polo Norte en sentido ↺ como en I.5 b) la aguja de la brujula dará 2 vueltas en sentido ↺ , y éste es el total ya que solo hay una singularidad.

Asi tenemos en los 3 ejemplos que la suma del numero de vueltas en sentido ↺ es 2 y en sentido ↻ es 0.

Veamos ahora algunos ejemplos en otra superficie $T^2 \cong S^1 \times S$, en él tenemos campos vectoriales sencillos de construir como el que es tangente a los meridianos y el que es tanjente a los paralelos, ver fig I.6 y I.7 ambos sin singularidades, y por lo tanto el número total de vueltas en sentido ↺ es cero y en sentido ↻ es 0.

Otro campo en T^2 es el Ilustrado

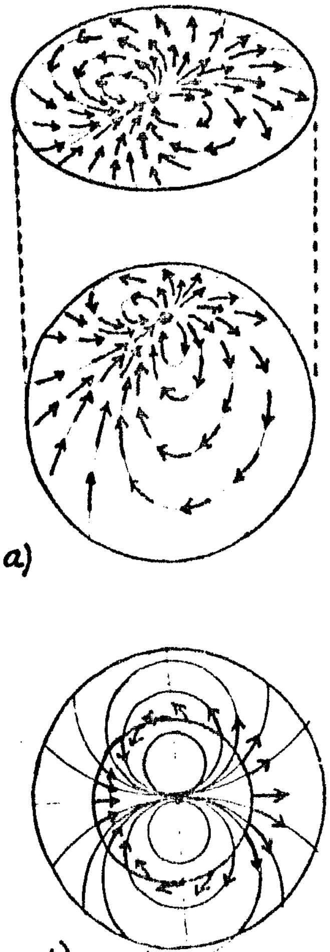


fig. I.5

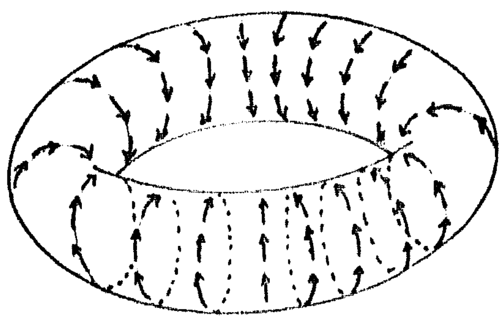


fig. I.6

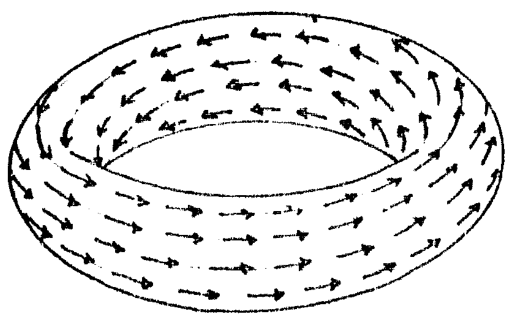
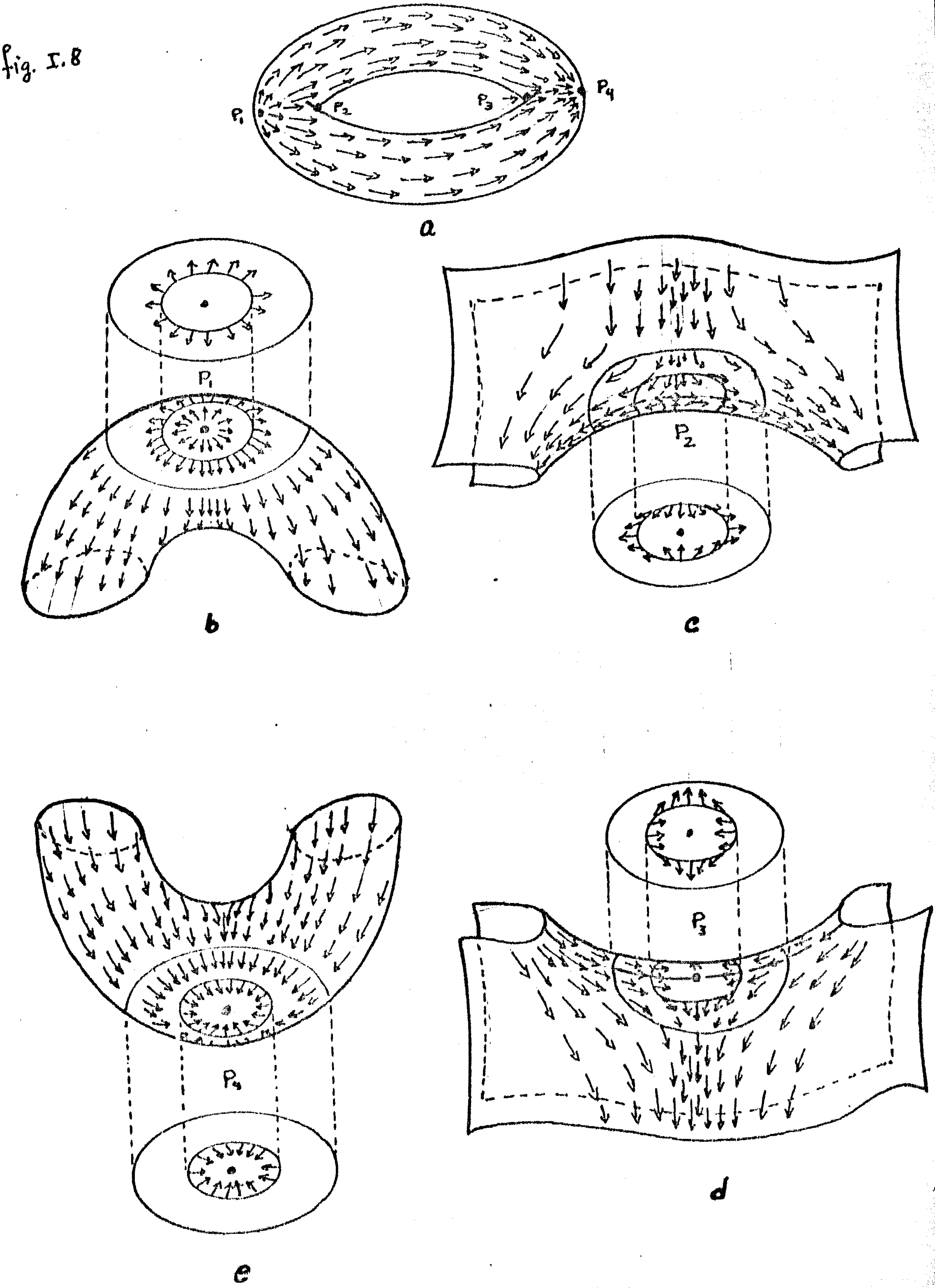


fig. I.7

en la fig. I.8 a) con 4 singularidades P_1, P_2, P_3, P_4 cuyo comportamiento en cada una de ellas se ilustra en I.8. b, c, d, e.

fig. I.8



procediendo en cada una como antes la aguja de la brujula dara una vuelta en sentido ↺ en P_1, 1 vuelta en sentido ↻ en P_2 y P_3 y una vuelta en sentido ↺ en P_4, en total 2 en sentido ↺ y 2 en sentido ↻, si contamos como −1 vuelta cada vuelta en sentido ↻ obtenemos que la suma total de vueltas es cero igual que en los ejemplos anteriores (fig. I.6, I.7).

Consideremos ahora una superficie de genero g y un campo analogo al de fig. I.8 a) ver fig. I.9 este campo tiene $P_0, P_1^1, P_1^2, P_2^1, P_2^2, \ldots, P_g^1, P_g^2, P_{g+1}$ puntos singulares y el comportamiento de cada uno en una vecindad es como sigue

P_0	se comporta como en	I.8 b)	y contribuye en una welta en sentido ↺
$P_1^1, \ldots, P_g^1$	" " " "	I.8 c)	" " " " " " ↻
$P_1^2, \ldots, P_g^2$	" " " "	I.8 d)	" " " " " " ↻
P_{g+1}	" " " "	I.8 e)	" " " " " " ↺

en total tenemos 2 vueltas en sentido ↺ y $2g$ vueltas en sentido ↻ sumando $2-2g$ vueltas.

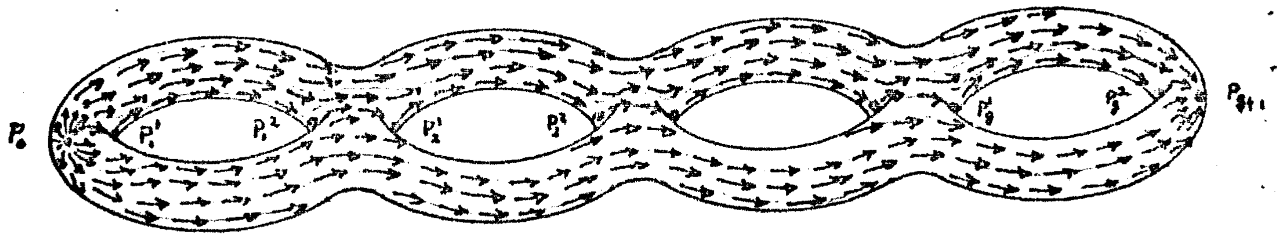


fig. I.9

Formalizando estas ideas probaremos que: **Dado** un campo vectorial continuo sobre una superficie compacta con un número finito de singularidades a cada punto singular se le puede asociar un numero entero (Indice del campo en el punto) y la suma de estos es la caracteristica de Euler de la Superficie. Luego se generalizara la idea del indice utilizando el concepto de "grado de una aplicacion" y se probara el teorema para variedades diferenciables de dimension finita lo cual se hará en los capitulos III y IV.

CAPITULO I

INDICE EN EL PLANO

En la introducción hablamos de "rodear" un punto singular y medir el incremento del argumento de la dirección del campo cuando nos movemos de un punto a otro sin pasar por la singularidad, entonces si al hacer el recorrido en el intervalo de tiempo $I = [0,1]$, y $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nos da la posición en el tiempo t y $v: \mathrm{Im}\,\alpha \longrightarrow S^1$ nos da la dirección del campo en cada punto de $\mathrm{Im}\,\alpha$ al final obtenemos una función $v_\alpha : I \longrightarrow S^1$ a la cual le mediremos el incremento de su argumento. Usando la proyección cubriente $\pi: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ $\pi(\theta) = e^{i\theta}$ y considerando un levantamiento $v_\alpha^* : I \longrightarrow \mathbb{R}$ el incremento total del argumento estará dado por $v^*(1) - v^*(0)$ dividiendo entre 2π obtendremos lo que le llamaremos el índice del campo en el arco α, si la curva es cerrada este será entero se probará que son depende de la clase de equivalencia modulo homotopía de la curva α. Si P es un punto aislado de singularidades distintas de P se verá que el índice del campo en cualquier arco simple que rodee el punto es el mismo si el arco está en una vecindad pequeña del punto P a lo que le llamaremos el índice del campo en el punto. Probaremos también que dada una curva simple en un abierto simplemente conexo el índice del campo en el arco depende solo de las singularidades que están en su interior.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo ($U \cong \mathring{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| < 1\}$) y $v: U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo, sea $\alpha: [0,1] \longrightarrow U$ un arco simple continuo tal que v no se anula en la traza de $\alpha = \mathrm{Im}\,\alpha = J_\alpha$. Consideremos la función $\hat{v}_\alpha : I \longrightarrow S^1$ $\hat{v}_\alpha(t) = \frac{v(\alpha(t))}{\|v(\alpha(t))\|}$ sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$

tal que $\pi(\theta_0) = \hat{\nu}_\alpha(0)$ entonces existe un unico levantamiento $\hat{\nu}^*_\alpha : I \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{\nu}^*_\alpha(0) = \theta_0$ y $\pi \circ \hat{\nu}^*_\alpha = \hat{\nu}_\alpha$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\hat{\nu}^*_\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, dashed, "\hat{\nu}_\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi\ (=e^{i\theta})"] \\
J_\alpha \arrow[r, "\beta"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

entonces definimos el indice del arco como sigue:

<u>Definición 1.1</u> el indice del campo ν a lo largo de α "$I(\nu,\alpha)$" lostó dado por

$$I(\nu,\alpha) = \frac{\hat{\nu}^*_\alpha(1) - \hat{\nu}^*_\alpha(0)}{2\pi} .$$

⊢⊣

<u>Observación</u>: para definir $I(\nu,\alpha)$ solo necesitamos que ν este definido y no se anule en J_α.

Antes de dar propiedades de $I(\nu,\alpha)$ consideremos las siguientes definiciones.

<u>Definición 1.2</u> sean $\alpha, \beta : I \to U$ 2 curvas simples tal que $\beta(0) = \alpha(1)$ y $J_\alpha \cap J_\beta = \beta(0)$, entonces definimos las curvas $-\alpha$, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ como:

i) $-\alpha : I \to U \qquad (-\alpha)(t) = \alpha(1-t)$

ii) $\alpha+\beta : I \to U \qquad (\alpha+\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \alpha(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$

iii) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

⊢⊣

Con las hipotesis anteriores para U, ν, α, β se tiene

<u>Proposición 1.1</u> i) $I(\nu,\alpha)$ no depende del valor inicial del levantamiento $\hat{\nu}^*_\alpha(0)$

ii) Si ν no se anula en $J_\alpha \cup J_\beta$ entonces

a) $I(\nu,\alpha+\beta) = I(\nu,\alpha) + I(\nu,\beta)$ b) $I(\nu,-\alpha) = -I(\nu,\alpha)$

c) $I(\nu,\alpha) \in \mathbb{Z}$ si $\alpha(0) = \alpha(1)$

<u>Dem.</u> i) sea $\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha : I \to \mathbb{R}$ tal $\pi\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha = \hat{\nu}_\alpha$ entonces $\pi(\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha - \hat{\nu}^*_\alpha) = \pi(\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha) \cdot \pi(-\hat{\nu}^*_\alpha) =$

$\hat{\nu}_\alpha \cdot \pi(-\hat{\nu}^*_\alpha) = \pi(\hat{\nu}^*_\alpha) \cdot \pi(-\hat{\nu}^*_\alpha) = \pi(\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\nu}^*_\alpha) = \pi(0) = e^{i0} = (1,0) \Rightarrow$

$\dfrac{\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha - \hat{\nu}^*_\alpha}{2\pi}(t) \in \mathbb{Z} \quad \forall t$ como es continua y I conexo $\Rightarrow \hat{\nu}^{*\prime}_\alpha - \hat{\nu}^*_\alpha = 2\pi k$

con $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto $(\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha - \hat{\nu}^*_\alpha)(1) - (\hat{\nu}^{*\prime}_\alpha - \hat{\nu}^*_\alpha)(0) = 0$ y

$0 = \hat{\vartheta}_\alpha^{*\prime}(1) - \hat{\vartheta}_\alpha^{*\prime}(0) - (\hat{\vartheta}_\alpha^*(1) - \hat{\vartheta}_\alpha^*(0)) \Rightarrow \hat{\vartheta}_\alpha^{*\prime}(1) - \hat{\vartheta}_\alpha^{*\prime}(0) = 2\pi\, I(\nu,\alpha)$ ☐

ii) a) sea $\hat{\vartheta}_\alpha^* : I \to \mathbb{R}$ y $\hat{\vartheta}_\beta^* : I \to \mathbb{R}$ los levantamientos de ϑ_α y ϑ_β respectivamente por i) podemos suponer $\hat{\vartheta}_\beta^*(0) = \hat{\vartheta}_\alpha^*(1)$ y que $\alpha(1) = \beta(0)$

entonces $\hat{\vartheta}_{\alpha+\beta}^* : I \to \mathbb{R}$ esta dado por:

$$\hat{\vartheta}_{\alpha+\beta}^*(t) = \begin{cases} \hat{\vartheta}_\alpha^*(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \hat{\vartheta}_\beta^*(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

y $\pi\hat{\vartheta}_{\alpha+\beta}^* = \vartheta_{\alpha+\beta}$ y $I(\nu,\alpha+\beta) = \dfrac{\hat{\vartheta}_{\alpha+\beta}^*(1) - \hat{\vartheta}_{\alpha+\beta}^*(0)}{2\pi} = \dfrac{\hat{\vartheta}^*(1) - \hat{\vartheta}^*(0)}{2\pi}$

$$= \frac{\hat{\vartheta}_\beta^*(1) - \hat{\vartheta}_\beta^*(0) + \hat{\vartheta}_\alpha^*(1) - \hat{\vartheta}_\alpha^*(0)}{2\pi} = I(\nu,\alpha) + I(\nu,\beta)$$ ☐

b) se tiene ya que $\hat{\vartheta}_{-\alpha}^* : I \to \mathbb{R}$ esta dada por $\hat{\vartheta}_{-\alpha}^*(t) = \hat{\vartheta}_\alpha^*(1-t)$ $t \in I$

y por tanto $I(\nu,-\alpha) = \dfrac{\hat{\vartheta}_{-\alpha}^*(1) - \hat{\vartheta}_{-\alpha}^*(0)}{2\pi} = \dfrac{\hat{\vartheta}_\alpha^*(0) - \hat{\vartheta}_\alpha^*(1)}{2\pi} = -I(\nu,\alpha)$ ☐

c) como $\pi(2\pi I(\nu,\alpha)) = \pi(\hat{\vartheta}_\alpha^*(1) - \hat{\vartheta}_\alpha^*(0)) = \pi(\hat{\vartheta}_\alpha^*(1)) \cdot \pi(-\hat{\vartheta}_\alpha^*(0))$

$= \vartheta_\alpha(1) \cdot \pi(-\hat{\vartheta}_\alpha^*(0)) = \vartheta_\alpha(0)\, \pi(-\hat{\vartheta}_\alpha^*(0)) = \pi(\hat{\vartheta}_\alpha^*(0))\, \pi(-\hat{\vartheta}_\alpha^*(0))$

$= \pi(0) = (1,0) \Leftrightarrow I(\nu,\alpha) \in \mathbb{Z}.$ ☐

$\vdash\!\dashv$

Una de las propiedades mas utiles esta dada cuando α es cerrada y es que no depende de la clase de homotopia de la curva α en el siguiente sentido:

<u>Proposición 1.2</u> Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ como antes y $\alpha_0, \alpha_1 : I \to U$ 2 curvas cerradas homotopicas tal que si $H : I \times I \to U$ es la homotopia de α_0 a α_1 i.e. $H(t,0) = \alpha_0(t)$, $H(t,1) = \alpha_1(t)$, y $\nu : U \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial continuo que no se anula en la imagen de H entonces $I(\nu,\alpha_0) = I(\nu,\alpha_1)$.

para la demostración necesitaremos el siguiente lema:

<u>Lema 1.3</u> sea U, α, como antes y $\nu, \mu : U \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales continuos que no se anulan en α, y que no son opuestos en cada punto $\alpha(t)$ i.e. $\hat{\nu}(\alpha(t)) + \hat{\mu}(\alpha(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$, entonces $I(\nu,\alpha) = I(\mu,\alpha)$

Dem sean $a,b,c,d : I \to \mathbb{R}$ tales $\hat{\nu}_\alpha(t) = (a+ib)(t)$, $\hat{\mu}_\alpha(t) = (c+id)(t)$

supongamos $I(\nu,\alpha) \neq I(\mu,\alpha)$ $\Rightarrow$ $1 \leq | I(\nu,\alpha) - I(\mu,\alpha) |$ si $\hat{\nu}^*_\alpha$, $\hat{\mu}^*_\alpha$ son

los levantamientos de $\hat{\nu}_\alpha, \hat{\mu}_\alpha$ respectivos $\Rightarrow \left| \frac{\hat{\nu}^*_\alpha(1) - \hat{\nu}^*_\alpha(0)}{2\pi} - \frac{\hat{\mu}^*_\alpha(1) - \hat{\mu}^*_\alpha(0)}{2\pi} \right| \geq 1$

$\Rightarrow |(\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\mu}^*_\alpha)(1) - (\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\mu}^*_\alpha)(0)| \geq 2\pi$ asi si $m = \min\{(\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\mu}^*_\alpha)(1), (\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\mu}^*_\alpha)(0)\}$

y M el maximo $\Rightarrow$ $M - m \geq 2\pi$ y por tanto $\pi([m,M])$ cubre S^1

$\Rightarrow \exists\, \theta_0 \in [m,M]$ tal que $\pi(\theta_0) = (-1,0)$, y $\exists\, t_0 \in [0,1]$ tal que

$(\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\mu}^*_\alpha)(t_0) = \theta_0$ por tanto $\pi((\hat{\nu}^*_\alpha - \hat{\mu}^*_\alpha)(t_0)) = (-1,0) = \pi(\hat{\nu}^*_\alpha(t_0))\, \pi(-\hat{\mu}^*_\alpha(t_0))$

$= [(a+ib)(t_0)][(c-id)(t_0)] = ((ac+bd)(t_0) + i((ad-bc)(t_0))$ $\Rightarrow$

$* \ldots (ac-bd)(t_0) = -1 = (a,b)\cdot(c,d)(t_0)$ $\quad (ad-bc)(t_0) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(t_0) = 0 \ldots **$

$**$ $\Rightarrow$ que $\hat{\nu}_\alpha(t_0), \hat{\mu}_\alpha(t_0)$ están alineados, $*$ $\Rightarrow$ que la proyección de

$\hat{\nu}_\alpha(t_0)$ sobre $\hat{\mu}_\alpha(t_0)$ es negativa $\Rightarrow$ ν y μ son opuestos en $\alpha(t_0)$ 8

y por tanto $I(\nu,\alpha) = I(\mu,\alpha)$ ▪

Demostración de 1.2

como $I \times I$ es compacto la funcion $\sigma(t,s) = \hat{\nu} \circ H(t,s) = \dfrac{\nu(H(t,s))}{\|\nu(H(t,s))\|}$ es uniformemente continua $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que si $\|(t,s) - (t',s')\| < \delta$ $\|\sigma(t,s) - \sigma(t',s')\| < 2$

y por tanto $\forall\, t \in I$ si $s, s' \in I$ $|s - s'| < \delta \Rightarrow \sigma(t,s) + \sigma(t,s') \neq 0$. sea $n \in \mathbb{N}$

tal $1/n < \delta$ y consideremos la partición de $[0,1]$ $0, 1/n, 2/n, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$

para cada $m \in \{0,\ldots,n\}$ consideremos la curva $\beta_m(t) = H(t, \frac{m}{n})$ $(\beta_0 = \alpha_0, \beta_n = \alpha_1)$

y definamos para $m \in \{0,\ldots,n-1\}$ los campos sobre β_m dada por

$\nu_m(\beta_m(t)) = \nu(\beta_{m+1}(t))$ y $\nu_n(\beta_n(t)) = \nu(\beta_n(t))$. entonces para cada

$m = 0,1,\ldots,n$ tenemos 2 campos continuos definidos sobre β_m; ν_m y $\nu|_{\beta_m}$

además para cada $t \in I$ $\|\hat{\nu} \circ \beta_m(t) - \hat{\nu}_m(\beta_m(t))\| < 2$ $\forall\, m = 0,1,\ldots,n$

$\Rightarrow$ ν_m y $\nu|_{\beta_m}$ no son opuestos a lo largo de β_m $\Rightarrow I(\nu_m, \beta_m) = I(\nu, \beta_m)$

$\forall\, m = 0,1,\ldots,n$ y $I(\nu_m, \beta_m) = I(\nu, \beta_{m+1})$ ya que $\nu_m \circ \beta_m = \nu \circ \beta_{m+1}$

para $m < n$ $\Rightarrow I(\nu,\alpha_0) = I(\nu,\beta_0) = I(\nu_0,\beta_0) = I(\nu,\beta_1) = I(\nu_1,\beta_1) = \ldots$

$\ldots = I(\nu,\beta_m) = I(\nu_{m+1},\beta_{m+1}) = \ldots = I(\nu,\beta_n) =$

$= I(\nu,\alpha_1)$ ▪

<u>Corolario 1.4</u> Si $\nu : U \to \mathbb{R}^2$ $U \cong \mathring{D}^2$ es un campo continuo que no se anula entonces $I(\nu,\alpha) = 0$ $\forall$ $\alpha : I \to U$

<u>Dem</u> esto se sigue de que toda curva cerrada es homotópica a la constante $\alpha_p = p \in U$ y de 1.2 $I(\nu,\alpha) = I(\nu,\alpha_p) = 0$ ∎

<u>Corolario 1.5</u> Sea $\alpha : I \to U$ una curva simple cerrada sea $\nu, \mu : J_\alpha \to \mathbb{R}^2$ continuos, que no se anulen en J_α y son homotópicos i.e. $\exists$ $H : J_\alpha \times I \to \mathbb{R}^2 - 0$ tal que $H(P,0) = \nu(P)$; $H(P,1) = \mu(P)$ entonces $I(\nu,\alpha) = I(\mu,\alpha)$

<u>Dem</u> considere el campo sobre D^2 definido $\mathbb{1}(x) = x$ entonces las curvas $\hat{\nu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\alpha$ son homotopías considerando la homotopía

$G(t,s) = \dfrac{H(\alpha(t),s)}{\|H(\alpha(t),s)\|}$ y por 1.2 $I(1,\hat{\nu}_\alpha) = I(1,\hat{\mu}_\alpha)$

pero $I(1,\hat{\nu}_\alpha) = I(\nu,\alpha)$ $\leftarrow$ $I(\mu,\alpha) = I(1,\hat{\mu}_\alpha)$ ∎

A continuación definiremos el Indice de un campo en un punto P aislado de ceros y probaremos que el indice de una curva depende solo de los puntos singulares que se encuentren en su "interior" pero antes enunciaremos el sig. teorema el cual no demostraremos:

<u>Teorema</u> 1.6 (Jordan - Shoenflies) Sea J_α una curva de Jordan parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ simple, entonces $\mathbb{R}^2 - J_\alpha$ tiene 2 componentes U, V una de ellas U acotada, y $U \cup J_\alpha$ es homeomorfa a D^2 y J_α es la frontera de ambas componentes.

(ver Introduction to topology, Lefschetz Capit. II teor. 9.4 pg 62)

En lo que sigue la componente U de $\mathbb{R}^2 - J_\alpha$ la denotaremos como $\mathring{\alpha}$.

Ahora, sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\nu : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo sea $p \in U$ tal que $\exists\, \varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(p) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|y - p\| \leq \varepsilon \} \subset U$ y ν no se anula en $B_\varepsilon(p) - p$. Para cada $\delta > 0$ definimos las curvas $\sigma_\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \sigma_\delta(t) = \delta e^{i2\pi t}$ y $p + \sigma_\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad (p+\sigma_\delta)(t) = p + \sigma_\delta(t)$

Definición 1.7 sea ν, U, p, y ε como en el parrafo anterior sea $\delta < \varepsilon$ entonces el indice del campo ν en el punto p lo denotamos por $I_\nu(p)$ y esta dado por: $\quad I_\nu(p) = I(\nu, p + \sigma_\delta)$.

$\longmapsto$

Esta definición no depende de δ ya que si $\delta' \leq \varepsilon$ se tiene la siguiente homotopia $H : I \times I \longrightarrow B_\varepsilon(p) - p$ $\quad H(t,s) = p + s\sigma_\delta(t) + (1-s)\sigma_{\delta'}(t)$

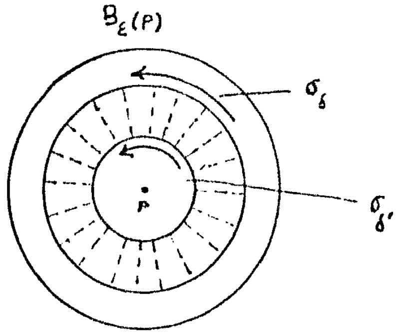


fig. 1.1

y $H(t,0) = p + \sigma_\delta(t)$ $\quad H(t,1) = p + \sigma_{\delta'}(t)$

y ν no se anula en dom H por tanto $I(\nu, p+\sigma_\delta) = I(\nu, p + \sigma_{\delta'})$ fig. 1.1

Ademas si $\alpha : I \to U$ es una parametrización de la curva de Jordan J_α tal que $p \in \mathring{\alpha}$ entonces sea δ tal que $B_\delta(p) \subset \mathring{\alpha}$ entonces $\mathring{\alpha} \cup \alpha \cap \mathring{B}_\delta(p)^c = A$ es homeomorfo a un anillo $S^1 \times I$ y por tanto α o $-\alpha$ resulta homotopica a $p + \sigma_\delta$ y por tanto si $\mathring{\alpha} \cup \alpha - p$ no contiene singularidades de ν

$I(\nu, \alpha) = I(\nu, p + \sigma_\delta) = I_\nu(p)$ y esto nos lleva a la siguiente definición.

Sea $p \in \mathbb{R}^2$; y definimos el campo $1_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad 1_p(x) = x - p$ entonces:

Definición 1.8 decimos que $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada simple es positivamente orientada si $I(1_p, \alpha) = 1$ $\quad p \in \mathring{\alpha}$ y denotamos por

$$+\mathcal{O}_p = \{ \alpha : I \to \mathbb{R}^2 \,/\, \alpha \text{ es cerrada simple positivamente orientada} \}.$$

Se puede probar que esta definición es independiente del punto interior que se elija y ademas que las curvas en $+\mathcal{O}_p$ son la clase de homotopia de $p + \sigma_\delta$ $\;\delta > 0$. (ver apendice I A.1) en $\mathbb{R}^2 - p$.

Ahora probaremos que $I_\nu(p)$ es invariante bajo difeomorfismos pero antes:

Definición 1.9 Sea $f: U \to f(U)$ un difeomorfismo con $U, f(U) \subset \mathbb{R}^n$ sea $\nu: U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo entonces decimos que $\mu: f(U) \to \mathbb{R}^n$ es el campo inducido si $\mu(y) = (D_{f^{-1}(y)} f)(\nu(f^{-1}(y)))$

⟼

Con ésto 1º probaremos que dado $\nu: U \to \mathbb{R}^2$ $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto entonces $I(\nu,\alpha)$ es invariante bajo traslaciones y $I_\nu(P)$ es invariante bajo reflexiones lo cual queda en las siguientes 2 proposiciones.

Proposición 1.10 Sea $U \subset \mathbb{R}^2$, $\nu: U \to \mathbb{R}^2$, $\alpha: I \to U$ tal que ν no se anula en J_α, sea $T_p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T_p(x) = x + p$ $p \in \mathbb{R}^2$, denotemos por $\beta: I \to T_p(U)$ $\beta(t) = \alpha(t) + p = T_p(\alpha(t))$ y $\mu: T_p(U) \to \mathbb{R}^2$ el campo inducido por T_p en $T_p(U)$ entonces $I(\nu,\alpha) = I(\mu,\beta)$.

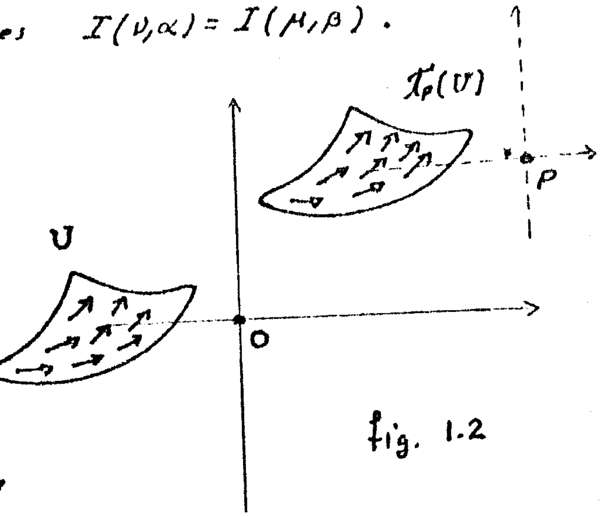


fig. 1.2

Dem como $D_y T_p = Id$ $\forall y \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\mu(y) = Id(\nu(y-p))$ $y \in T_p(U)$ y por tanto en β $\mu(\beta(t)) = \nu(\beta(t) - p)$
$= \nu(\alpha(t))$
$\Rightarrow \hat\mu_\beta = \hat\nu_\alpha$ y $\therefore$ $\hat\mu_\beta^*$ es un levantamiento de $\hat\nu_\alpha$ $\Rightarrow I(\nu,\alpha) = I(\mu,\beta)$. □

⟼

Proposición 1.11 Sea $\rho_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión $\rho_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, U, ν como en 1.10 y $P \in U$ tal que $\exists\, \varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(P) \subset U$ y ν no se anula en $B_\varepsilon(P) - P$, sea $\mu: \rho_2(U) \to \mathbb{R}^2$ el campo inducido en $\rho_2(U)$ entonces $I_\nu(P) = I_\mu(\rho_2(P))$

Dem por definición $I_\nu(P) = I(\nu, P+\sigma_\delta)$ $\delta<\varepsilon$ sea $\nu': T_{-P}(U) \to \mathbb{R}^2$ el campo inducido por la traslación T_{-P} entonces ν es el campo inducido en U por ν' vía T_P y por 1.10 $I(\nu',\sigma_\delta) = I_{\nu'}(0) = I(\nu, P+\sigma_\delta) = I_\nu(P)$.

analogamente si $\mu' : \mathcal{T}'_{-\ell(p)}(\ell_2(U)) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es el campo inducido por μ en $\mathcal{T}'_{-\ell(p)}(\ell_2(U))$ via $\mathcal{T}_{-\ell_2(p)}$ entonces por 1.10 $I_\mu(\ell_2(p)) = I_{\mu'}(0)$. y μ' es el campo inducido por $\mathcal{T}'_{-\ell(p)}\ell_2\mathcal{T}_{+p} : \mathcal{T}_{-p}(U) \longrightarrow \mathcal{T}_{-\ell(p)}\ell_2(U)$

ademas si $(x,y) \in \mathcal{T}_{-p}(U)$ $\mathcal{T}_{-\ell(p)}\ell_2\mathcal{T}_{-p}((x,y)) = -\ell_2(p) + \ell_2((x,y)+(p_1,p_2))$

$= -(p_1,-p_2) + (x+p_1, -(y+p_2)) = (x,-y) = \ell_2(x,y)$. y $\therefore$ μ' es el campo inducido por ℓ_2 en $T_{\ell(p)}\ell_2(U)$ via ℓ_2. con esto podemos suponer que $p=0$, y pd. si ν, μ son como en las hipotesis con $p=0$ entonces $I_\nu(0) = I_\mu(0)$. como μ esta definido en $B_\varepsilon(0)$ sea $\delta < \varepsilon$ y sea entonces $\sigma_\delta = \delta e^{i\theta 2\pi}$ entonces $I_\mu(0) = I(\mu, \sigma_\delta)$

ent. si $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ entonces $\mu(x,y) = (\nu_1, -\nu_2)(x,-y)$ y $\therefore$

$$\mu \circ \sigma_\delta = (\nu_1,-\nu_2)(\delta(\cos 2\pi t, -\operatorname{sen} 2\pi t)) = (\nu_1,-\nu_2)(\delta(\cos(2\pi - 2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi(1-t))))$$

$$= (\nu_1,-\nu_2)(-\sigma_\delta) \quad \text{por tanto} \quad I(\mu,\sigma_\delta) = -I((\nu_1,-\nu_2),\sigma_\delta)$$

ahora sea $\hat{\nu}^*_{\sigma_\delta}$ un levantamiento de $\hat{\nu}_{\sigma_\delta}$ entonces se tiene $\Pi(-\hat{\nu}^*_{\sigma_\delta}(t)) =$

$$(\hat{\nu}^*_{\sigma_\delta}(t))^{-1} = \frac{(\nu_1,-\nu_2)}{\|\nu_1,\nu_2\|} \circ \sigma_\delta(t) \Rightarrow I((\nu_1,-\nu_2),\sigma_\delta) = \frac{-\hat{\nu}^*_{\sigma_\delta}(1) - (-\hat{\nu}^*_{\sigma_\delta}(0))}{2\pi}$$

$$= -I(\nu,\sigma_\delta) \quad \text{y por tanto} \quad I(\mu,\sigma_\delta) = I(\nu,\sigma_\delta)$$

$$\Rightarrow I_\nu(0) = I_\mu(0).$$

■

<u>Proposición 1.13</u>. sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ abierto convexo) tal que $f(0) = 0$ y f es un encaje diferenciable (i.e. $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo) entonces f es suavemente isotopico a $Id/_U$ o a $\ell_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ si $\det D_0 f$ es positivo o negativo respectivamente.

Para la demostración necesitaremos el siguiente lema:

<u>Lema 1.14</u> con las hipotesis de 1.13 f se puede expresar como sigue

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, g_j(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{donde } g_j : U \to \mathbb{R}^n \text{ es diferenciable}$$

y $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$.

Dem para cada $x \in U$ considerese la función $F : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ $[0,1] \subset (a,b)$

$F(t) = f(tx)$ entonces F es diferenciable y si $f = (f_1, \dots, f_m)$ se tiene:

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}\, dt = \int_0^1 (D_{tx} f)(x)\, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} (f^i_{x_j}(tx)\, x_j \right] e_i \, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^1 f^i_{x_j}(tx)\, dt \right) e_i \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt$$

sea $g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt$ tenemos $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ y como $F(1) = f(x)$

y $F(0) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j g_j(x)$ como se quería ▣

⊢—⊣

Demostración de 1.13 : Considere la siguiente isotopía $H : U \times I \to \mathbb{R}^m$

$$H(x,t) = \frac{f(tx)}{t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{t x_j\, g_j(tx)}{t} = \sum_{j=1}^{m} x_j\, g_j(tx)$$

entonces para cada t sea $T_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $T_t(x) = tx$, $\Rightarrow \forall t \in (0,1]$

$H(-,t) = T_{1/t} \circ f \circ T_t$ por tanto $H_t(x) = H(x,t)$ es un difeomorfismo

sobre su imagen y $H_0(x) = H(x,0) = \sum_{j=1}^{m} x_j\, g_j(0) = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = (D_0 f)(x)$

$\therefore \forall t \in I$ $H_t : U \to H_t(U)$ es un difeomorfismo

y $D_0 f$ es isotópico a $Id_{\mathbb{R}^m}$ o ρ_m segun si $\det D_0 f$ es >0 o <0

lo cual se sigue de que $GL(n,\mathbb{R})$ tiene 2 componentes (ver Apendice I A.1.3) ▣

⊢—⊣

Proposición 1.15 Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$ un encaje diferenciable tal que $f(0) = 0$ sea $\nu : U \to \mathbb{R}^m$ un campo continuo y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset U$ y ν no se anule en $B_\varepsilon(0) - 0$, sea ν' el campo inducido por ν vía f entonces $\exists\, \delta < \varepsilon$ tal que ν' no se anule en $B_\delta(0) - 0 \subset f(U)$, y una homotopía $F : \partial B_\delta(0) \times I \to \mathbb{R}^m - 0$ tal que $F(x,0) = \nu(x)$, $F(x,1) = \nu'(x)$ o $F(x,1) = \rho_m \nu' \rho_m(x)$ si $\det(D_0 f)$ es >0 o <0 respectivamente.

<u>Dem</u> por 1.13 tenemos una isotopía suave $H: U\times I \to \mathbb{R}^n$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = Id|_U$ o ρ_m según si $\det D_0 f$ es >0 o <0 y $\forall t \in I$ $H(0,t)=0$ y $H_t: U \to \mathbb{R}^n$ es un encaje diferenciable.

Sea $\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(0) = \{x / \|x\| \leq \varepsilon\} \subset U$. Consideremos ahora la siguiente función $G: B_\varepsilon(0)\times I \to H(U\times I)\times I$ definida por $G(x,t) = (H_t(x), t)$ entonces G es una biyección sobre su imagen $G(B_\varepsilon(0)\times I) = \bigcup_{t\in I}(H_t(B_\varepsilon(0)), t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $\Rightarrow$ G es un homeomorfismo sobre su imajen y además $V = G(\mathring{B}_\varepsilon(0)\times I)$ es abierto en $G(B_\varepsilon \times I)$ que contiene a $0\times I$ $\Rightarrow$ por el lema del tubo (ver topology a 1st course Munkres pg 169) $\exists\ \delta>0$ tal que $B_\delta(0)\times I \subset V$ y por tanto $B_\delta(0) \subset H_t(B_\varepsilon(0))$ $\forall t \in I$, consideremos ahora $F: B_\delta(0)\times I \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x,t) = (D_{H_t^{-1}(x)} H_t)(\nu \circ H_t^{-1}(x))$ entonces como ν no se anula en $B_\varepsilon(0)-0$ y $H_t^{-1}(B_\delta(0)-0) \subset B_\varepsilon - 0$ $\Rightarrow$ $F_t(x) \neq 0$ $\forall t \in I$ y $x \in \partial B_\delta(0)$ y además

$$F_0(x) = (D_{H_0^{-1}(x)} H_0)(\nu \circ H_0^{-1}(x)) = (D_{f^{-1}(x)} f)(\nu(f^{-1}(x))) = \nu'(x)$$

$$F_1(x) = (D_{H_1^{-1}(x)} H_1)(\nu \circ H_1^{-1}(x)) = \begin{cases} D_x Id \circ \nu \circ Id(x) = \nu(x) \wedge |D_0 f| > 0 \\ D_{\rho_m^{-1}(x)} \rho_m \circ \nu \circ \rho_m^{-1}(x) = \rho_m \nu \rho_m(x) \wedge |D_0 f| < 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

<u>Proposición 1.16</u> Sea $\nu: U \to \mathbb{R}^2$ es un campo continuo que no se anula en una vecindad agujerada de p, $B_\varepsilon(p) - p \subset U$, sea $f: U \to \mathbb{R}^2$ un encaje diferenciable y $\nu': f(U) \to \mathbb{R}^2$ el campo inducido por ν vía f entonces $I_\nu(p) = I_{\nu'}(f(p))$.

<u>Dem.</u> por 1.10 podemos suponer $0 \in U$ y $f(0)=0$ y $p=0$ y por 1.15 $\exists\ \delta<\varepsilon$ tal que $\nu|_{\partial B_\delta(0)}$ es homotópico a $\nu'|_{\partial B_\delta(0)}$ en $\mathbb{R}^2 - 0$ y

$\therefore\ I_\nu(0) = I(\nu, \sigma_\delta) = I(\nu', \sigma_\delta) = I_{\nu'}(0)$.

$\blacksquare$

<u>Proposición 1.17</u> Sea $v: U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto convexo un campo vectorial continuo y $J_\alpha \subset U$ una curva de Jordan parametrizada por α donde $\alpha \in +O_p$ $p \in \mathring{\alpha}$ y $\mathring{\alpha} \subset U$, si v no se anula en J_α y v tiene un numero finito de singularidades $S = \{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathring{\alpha}$ entonces

$$I(v,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} I_v(P_i) .$$

la demostración resulta demaciado tecnica por lo que solo la plaliaremos. para lo cual se usará el siguiente lema sin demostrar:

<u>Lema 1.18</u> Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una parametrisación simple de una curva de Jordan J_α entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una curva poligonal $\alpha^* : I \to \mathbb{R}^2$ tal que $\| \alpha(t) - \alpha^*(t) \| < \varepsilon$ $\forall t$.

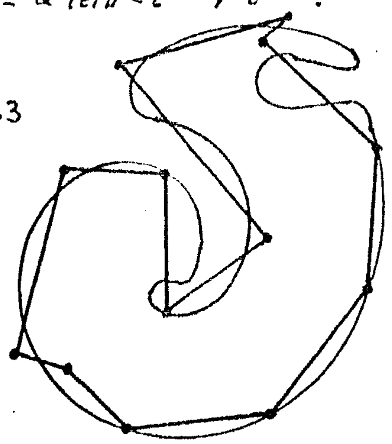


fig. 1.3

para la demostración ver en el Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana 1946 "Un teorema sobre transformaciones de curvas cerradas sobre si mismas" pg 21 Lema 1 por Jaime Lifshitz. ◻

i) tomando $\varepsilon < \min\{ d(J_\alpha, S) , d(J_\alpha, \mathbb{R}^2 - U) \}$ se tiene que $S \subset \mathring{\alpha}^*$ y α es homotopica a α^* en $U - S$ $\therefore$ si $\alpha \in +O \Rightarrow \alpha^* \in +O$

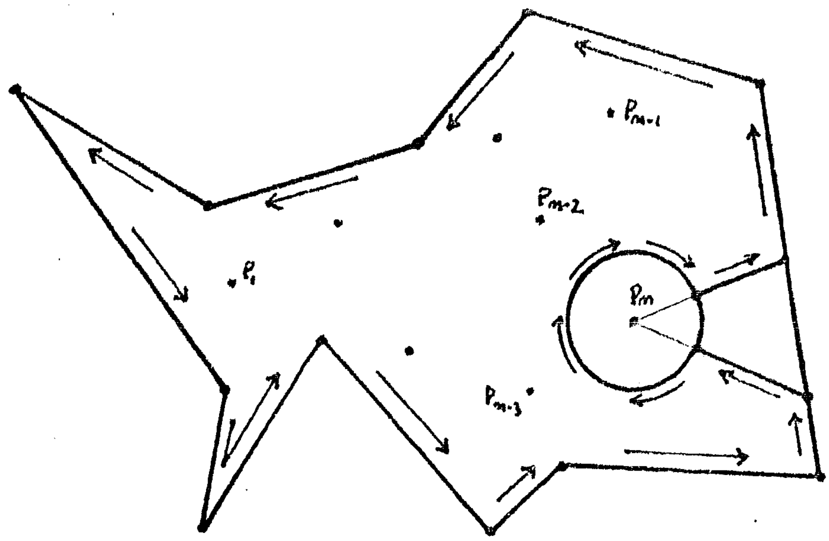
ii) procediendo por inducción sobre n considerando α un poligono $+O$ para $n=1$ se tiene porque $\alpha \in +O_{P_1}$ y $\therefore$ α es homotopica a $P_1 + \sigma_\varepsilon$ (ver Apendice A.1)

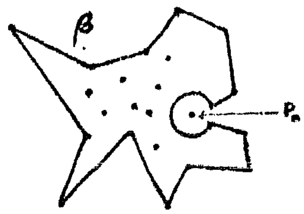
supongamos valido para $n-1$

iii) si $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ sea $\varepsilon_n > 0$ tal $B_{\varepsilon_n}(P_n) \subset \mathring{\alpha} - S$ entonces se puede construir una curva β $+O$ con las siguientes propiedades

a) $\beta \subset \mathring{\alpha}$ b) $S - P_n \subset \mathring{\beta}$ c) $I(v,\beta) + I_v(P_n) = I(\alpha)$

como muestra la fig. 1.4 (para mas detalles ver Apendice I A.2)





y por hipot. $I(\nu,\beta)=\sum_{i=1}^{m-1} I_\nu(P_i) \quad \therefore \quad I(\nu,\alpha)=\sum_{i=1}^{m} I_\nu(P_i)$ ∎

APENDICE I

Proposición A.1.1 $\alpha \in +\theta_p$ $p \in \mathring{\alpha}$ entonces

i) $\alpha \in +\theta_q$ $\forall q \in \mathring{\alpha}$

ii) α es homotópica a $p + \sigma_\delta$ en $\mathbb{R}^2 - p$

Dem. para proba i) considerese $\gamma : I \longrightarrow \mathring{\alpha}$ tal que $\gamma(0) = p$ $\gamma(1) = q$

entonces se tiene $H : \mathbb{R}^2 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $H(x,t) = x - \gamma(t)$

entonces $H(x,0) = 1_p(x)$ $H(x,1) = 1_q(x)$ ademas restrinjido

a J_α H no se anula y por tanto $1_p|_{J_\alpha}$ es homotopica

a $1_q|_{J_\alpha}$ $\Rightarrow I(1_p, \alpha) = I(1_q, \alpha) = 1$

ii) sea $1 > \delta > 0$ sea la homotopia $H_1 : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - P$

$H_1(t,s) = s\left(\frac{\alpha(t) - P}{\|\alpha(t) - P\|} + P\right) + (1-s)\,\alpha(t)$ entonces si $\beta(t) = p + \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}$

$I(1_p, \alpha) = I(1_p, \beta) = 1$, se $\hat{\beta}(t) = 1_p \circ \beta(t) = \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}$

y $\hat{\sigma}(t) = 1_p \circ \sigma_\delta(t) = e^{i2\pi t}$ sea $\beta^* : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de $\hat{\beta}$ tal $\pi\beta^*(t) = \hat{\beta}(t)$, sea $\theta_0 = \beta^*(0)$

sea $H_2 : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$

$H_2(t,s) = \beta^*(t) - s\theta_0$

entonces $H_2(t,0) = \beta^*(t)$ y $H_2(t,1) = \beta^*(t) - \theta_0 = f(t)$

y sea $H_3(t,s) = 2\pi s t + (1-s) f(t)$

entonces $H_3(t,0) = f(t)$ y $H_3(t,1) = 2\pi t$ y

$H_3(0,s) = 0$ y $H_3(1,s) = 2\pi s + (1-s) f(1) =$

pero $f(1) = \beta^*(1) - \theta_0 = \beta^*(1) - \beta^*(0) = 2\pi I(1_p, \beta) = 2\pi$

$\Rightarrow H_3(1,s) = 2\pi$ $\forall s$.

y por tanto $\pi \circ H_2$ es una homotopía de de $\hat{\beta}$ a $\pi \circ f$

y $\pi \circ H_3$ es una homotopia de $\pi \circ f$ a $\pi \circ 2\pi t = e^{i2\pi t}$

$= \hat{\sigma}(t)$ trasladando las homotopías con centro en P

obtenemos el resultado.

A1.2. En esta parte detallaremos un poco mas en lo que se refiere la parte iii de la prop. 1.17

podemos pensar que $P_m = 0$ aplicando una traslacion ya que todas nuestras hip. son invariantes bajo traslaciones.

entonces tenemos:

$V: U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ U abierto convexo un campo vectorial continuo con ceros en $S = \{P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m = 0\}$ y $\alpha: I \to U$ una parametrización simple cerrada poligonal tal que $S \subset \mathring{\alpha}$ entonces

sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset \mathring{\alpha} - S$

sea $l_\theta = \{ t e^{i\theta 2\pi} \, t \in \mathbb{R} \}$, $l_\theta^+ = \{ v \in l_\theta \mid t \geq 0 \}$ $\theta \in [0,1]$

sea θ_0 tal l_{θ_0} no intersecta $S - 0$ ni pasa por algun vertice de α

sea $q_0 = \varepsilon e^{i 2\pi \theta_0}$,

sea $q_1 \in l_{\theta_0}^+ \cap \alpha$ tal que $\| q_1 \|$ es minima; sea A, y B los vertices del lado en que se encuentra q_1, ordenados por el parametro de α.

sea $\eta > 0$ tal que $\forall$ $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \delta]$ l_θ no intersecta ningun vertice de α ni a S

sea $q_2 = l_{\theta_0 + \delta}^+ \cap \alpha$ y

$q_3 = \varepsilon e^{i 2\pi(\theta_0 + \delta)}$, entonces

$q_2 \in \overline{AB}$ y ademas eligiendo δ pequeño el interior del cuadrilatero $q_0 q_1 q_2 q_3$ se puede contraer linealmente a q_2 (ver fig. A.1.1)

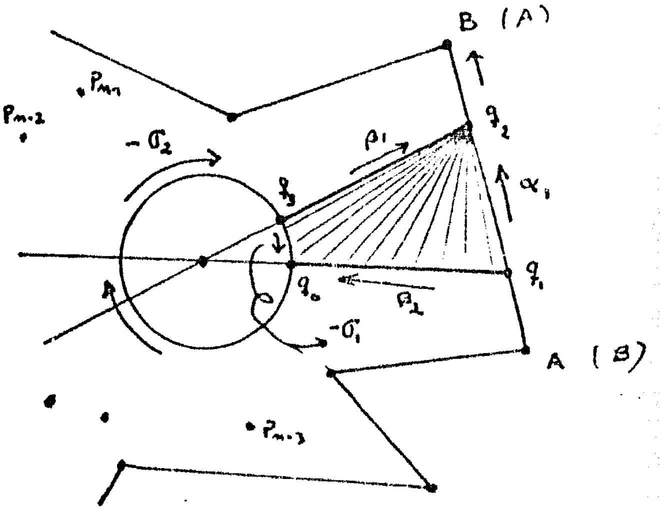


fig. A.1.1

podemos suponer que $\alpha(0) = q_1$ reparametrizando α y sin alterar $I(V, \alpha)$

sea $\alpha(s) = q_2$ entonces se tiene

$\alpha[0,s] = \overrightarrow{q_1 q_2}$

así tomando $\alpha_1 = \alpha|_{[0,\delta]}$ y $\alpha_2 = \alpha|_{[\delta,1]}$ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $I(\nu,\alpha) = I(\nu,\alpha_1) + I(\nu,\alpha_2)$ haciendo algo análogo con σ_ε se obtienen 2 arcos σ_1, σ_2 tales que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_\varepsilon$ $\sigma_1|(0,\delta) = \sigma_\varepsilon|_{[\theta_0,\theta_0+\delta]}$ (ver fig. A.1.1) y $\sigma_2(\delta,1) = \sigma_\varepsilon(\theta_0,\theta_0+\delta)^c \cap d_{\sigma_\varepsilon}$, sea β_1 una param. de $\overrightarrow{q_3 q_2}$ y β_2 de $q_1 q_0$ entonces $\sigma_1 + \beta_1 - \alpha_1 + \beta_2$ es una parametrización del cuadrilátero $q_0 q_3 q_2 q_1$, el cual es contraible en $\mathring{\alpha} \cup J_\alpha - S$ $\therefore$ $I(\nu, \sigma_1 + \beta_1 - \alpha_1 + \beta_2) = 0$

y $\therefore$ $+I(\nu,\alpha_1) + I(\nu,\sigma_1) = +I(\nu,\beta_1) + I(\nu,\beta_2)$

$$\Rightarrow I(\nu,\beta_1) + I(\nu,\beta_2) = I(\nu,-\sigma_1) + I(\nu,\alpha_1)$$

sea entonces $\beta = -\sigma_2 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2$ entonces se tiene

$$I(\nu,\beta) = I(\nu,-\sigma_2) + I(\nu,\beta_1) + I(\nu,\alpha_2) + I(\nu,\beta_2) = I(\nu,-\sigma_2) + I(\nu,\alpha_2) + I(\nu,-\sigma_1) + I(\nu,\alpha_1)$$

$$= -I(\nu, +\sigma_1 + \sigma_2) + I(\nu, \alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow I(\nu,\beta) + I(\nu,\sigma_\varepsilon) = I(\nu,\alpha)$$

y $\therefore$ $I(\nu,\beta) + I_\nu(D) = I(\nu,\alpha)$. ∎

Proposición A.1.3 $GL(n,\mathbb{R})$ Tiene 2 componentes arcoconexas una $U = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \}$ y la otra $\rho \cdot U = \{ \rho A \mid A \in A \}$ $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ es la reflexión en el ultimo eje.

<u>Dem</u> demostraremos que si $A \in U$ entonces $\alpha : [a,b] \to U$ continua $\cdot \ni \cdot$ $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = Id$

sea $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ donde $a_i \in \mathbb{R}^n$ es el renglón i-esimo de A

daremos 1º un arco que empieza en A y termina en una matriz $\hat{A} \in O(n)$ y posteriormente daremos el camino final que une $\hat{A}$ con id.

1º para la primera parte por medio del proceso de Gram-Schmidt tenemos asociada a la base $a_1, \dots, a_n$ la base ortogonal siguiente:

$$\hat{a}_1 = a_1$$
$$\hat{a}_2 = a_2 - \langle a_2, \hat{a}_1 \rangle \frac{\hat{a}_1}{\|\hat{a}_1\|}$$
$$\hat{a}_3 = a_3 - \langle a_3, \hat{a}_1 \rangle \frac{\hat{a}_1}{\|\hat{a}_1\|} - \langle a_3, \hat{a}_2 \rangle \frac{\hat{a}_2}{\|\hat{a}_2\|}$$
$$\vdots$$
$$\hat{a}_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle a_n, \hat{a}_i \rangle \frac{\hat{a}_i}{\|\hat{a}_i\|}$$

sea $c_i(t) = t\hat{a}_i + (1-t)a_i$ entonces para cada i se Tiene lo siguiente:

i) $c_i(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

ii) $\{ \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, c_i(t) \}$ son L.I.

para probar i se sigue de $c_i(t) = 0 \Rightarrow t\hat{a}_i + (1-t)a_i = 0$

$\therefore t \neq 0,1$ y $t\left(a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \hat{a}_j, a_i \rangle \frac{\hat{a}_j}{\|\hat{a}_j\|}\right) + (1-t)a_i = 0$

$\Rightarrow a_i = t \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, \hat{a}_j \rangle \frac{\hat{a}_j}{\|\hat{a}_j\|}$ pero $\hat{a}_j \in \langle \{a_1, \dots, a_j\} \rangle$ para cada

$j \leq i-1 \Rightarrow a_i \in \langle \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \rangle$ ✗ ya que $\{a_i\}_{i=1,\dots,m}$ son L.I. . ésto prueba i

para ii) sup. $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_i$ no todos cero tal que

$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \hat{a}_j + \alpha_i c_i(t) = 0$ entonces $\alpha_i = 0 \Rightarrow \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}\}$ son L.I ✗

$\therefore\ \alpha_i \neq 0$ y $\therefore\ c_i(t) = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \hat{a}_j$ i.e.

$$t\left(a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, \hat{a}_j \rangle \frac{\hat{a}_j}{\|\hat{a}_j\|}\right) + (1-t)\, a_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \hat{a}_j$$

$$\Rightarrow \quad a_i = t \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, \hat{a}_j \rangle \frac{\hat{a}_j}{\|\hat{a}_j\|} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \hat{a}_j \Rightarrow a_i \in \langle \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}\} \rangle \text{ ✗}$$

$\therefore\ \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, c_i(t)\}$ son L.I. $\forall\, t \in [0,1]$.

con ésto podemos probar también lo siguiente

iii) $\{c_1(t), c_2(t), \dots, c_i(t)\}$ son L.I. $\forall\, i = 1, \dots, n \quad t \in [0,1]$

por inducción se tiene para $i=1$ $\{c_1(t)\}$ es L.I. $\forall t$

sup. valido $\{c_1(t), \dots, c_{i-1}(t)\}$ es L.I. $\forall\, t \in [0,1]$

entonces si $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathbb{R}$ no todos cero tal que

$\sum_{j=1}^{i} \alpha_j \cdot c_j(t) = 0$ entonces $\alpha_i = 0 \Rightarrow \{c_1(t), \dots, c_{i-1}(t)\}$ es L.D ✗

$\therefore\ \alpha_i \neq 0$ y $\therefore\ c_i(t) = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} c_j(t) \in \langle \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}\} \rangle$ ✗

$\therefore$ ya que por ii) son L.I.

Por tanto se tiene que la matriz $C(t)$ cuyos renglones son $\{c_i(t)\}$ es tal $\det C(t) \neq 0\ \forall\, t \in [0,1]$ y $\det(C(0)) = \det A > 0$

$\therefore\ C(t) \in V\ \forall\, t \in [0,1]$ y $C(1) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$ tiene renglones ortogonales.

Consideremos ahora el arco $C'(t) = \begin{pmatrix} t\left(\frac{\hat{a}_1}{\|\hat{a}_1\|}\right) + (1-t)\, \hat{a}_1 \\ \vdots \\ t\, \frac{\hat{a}_m}{\|\hat{a}_m\|} + (1-t)\, \hat{a}_m \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

entonces $C'(t) \in V\ \forall t$ y $C'(0) = C(1)$ $\quad C'(1) \in O(m, \mathbb{R})$

$\therefore$ A es conectable por una trayectoria con una matriz $\hat{A} = C'(1) \in O(n)$.

llamemos r a la función $r: GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow O(n)$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} \hat{a}_1/\|\hat{a}_1\| \\ \vdots \\ \hat{a}_n/\|\hat{a}_n\| \end{pmatrix}$$

ésta es una retracción ya que $r|_{O(n)} = id_{O(n)}$

además si $A \in GL(n,\mathbb{R})$ y a_1 su primer renglón entonces el 1^{er} renglón de $r(A)$ es L. D. con a_1 y si a_1 es unitario coinciden.

lo que sigue será probar que toda matriz $A \in O(n)$ puedo conectarla con Id si $\det A > 0$ esto lo haremos en varios pasos

i: A es arcoconectable con una matriz $\tilde{A}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad B \in O(n-1)$$

ii) por inducción se probará el resultado final.

para probar i se tiene

afi 1: A es arcoconectable con una matriz A' donde $\langle a_1', e_1 \rangle > 0$ donde a_1' es el 1^{er} renlón de A' y $e_1 = (1,0,\ldots,0)$

para ésto se tienen varios casos: sea a_1 el 1^{er} renglon de A

a) $\langle a_1, e_1 \rangle > 0$

b) $\langle a_1, e_1 \rangle = 0$

c) $\langle a_1, e_1 \rangle < 0$

en el caso a) no hay nada que hacer.

para b) sea $r\,c(t) = r\begin{pmatrix} a_1 + te_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ entonces

$\det(c(t))$ es continua y $\det(c(0)) = \det(A) > 0 \quad \therefore \exists$ $0 < \delta \ni \det(c(t)) > 0 \quad t \in [0,\delta]$ así, la matriz $c(\delta)$ es tal que $\langle a_1 + \delta e_1, e_1 \rangle = \delta > 0$.

para c) sea $c(t) = \begin{pmatrix} (\cos t\pi)a_1 & -\operatorname{sen} t\pi\, a_2 \\ \operatorname{sen} t\pi\, a_1 & + \cos t\pi\, a_2 \\ & a_3 \\ & \vdots \end{pmatrix}$

entonces $C(t) \in O(n)$ $\forall$ $t \in [0,1]$ y

$C(0) = A$ $\quad C(1) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\therefore$ tomando $A' = C(1)$

se tiene $\langle a_1', e_1 \rangle = \langle -a_1, e_1 \rangle = -\langle a_1, e_1 \rangle > 0$.

$\therefore$ se tiene la afirmación 1

finalmente podemos entonces suponer que $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y

$\langle e_1, a_1 \rangle > 0$ sea $C(t) = \begin{pmatrix} te_1 + (1-t)a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

entonces $\forall$ $t \in [0,1]$ $\langle te_1 + (1-t)a_1, a_1 \rangle = t\langle e_1, a_1 \rangle + (1-t)\langle a_1, a_1 \rangle$

es positivo ya que t, $\langle e_1, a_1 \rangle$, $(1-t)$ y $\langle a_1, a_1 \rangle$ lo son

$\therefore$ $te_1 + (1-t)a_1 \notin \langle \{a_2, \dots, a_n\} \rangle$ $\forall$ $t \in [0,1]$ y $\therefore$

$c(t) \in U$ ahora consideremos la trayectoria en $O(n)$ $r \circ C(t)$

entonces $r \circ C(0) = r(A) = A$ y $r \circ C(1) = r \begin{pmatrix} e_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

y como e_1 es unitario $r \circ C(1)$ es de la

forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$ donde $B \in O(n-1)$.

para ii) haciendo inducción sobre n

para $n = 1$ $\Rightarrow$ $A = (1)$ ✓

sup. para $n-1$ se tiene $A \in O(n-1)$ $\ni$ $\det A > 0$ $\exists$

$C : I \longrightarrow O(n-1)$ una trayectoria $\ni$ $C(0) = A$ y $C(1) = id$

para n tenemos (1) $A \in O(n)$ y $\det A > 0$ entonces

A se puede conectar con una matriz A' de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$

y $B \in O(n-1)$ entonces A' se puede conectar

con Id ya que $\det A' = \det B > 0$ $\therefore$ A se puede

conectar con Id. $\blacksquare$

así, dado $A \in GL(n,\mathbb{R})$ dimos un nº finito de trayectorias diferenciables que conectan A con id ésto es A es isotópico a Id y de la transitividad de la relación de isotopía (ver topology from the differentiable viewpoint by John Milnor pg. 21) A es suavemente isotópico a la Id

$\emptyset$

CAPITULO II

EL TEOREMA DEL INDICE DE POINCARE

Parte 1.

Con lo anterior tenemos ya la herramienta suficiente para convencer al lector del esperado teorema del Indice de Poincaré-Hopf para superficies compactas, pero antes de enunciarlo daremos algunos resultados que se usarán más adelante :

<u>Teorema</u> 2.1 de clasificación de Superficies compactas :

Cualquier Superficie compacta es homeomorfa : a una esfera, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos, y tienen las siguientes características de Euler:

$$\left.\begin{array}{lll} S^2 & \ldots\ldots\ldots & \chi(S^2) = 2 \\ \coprod_{i=1}^{m} T_2 & \ldots\ldots\ldots & \chi(\coprod_{i=1}^{m} T_2) = 2-2m \end{array}\right\} \text{orientable}$$

$$\coprod_{i=1}^{m} P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \chi(\coprod_{i=1}^{m} P_2) = 2-m \; \Big\} \quad \text{no orientable}$$

(para más detalles ver Algebraic topology an Introduction by W.S. Masey teorema 5.1).

Sea S una superficie compacta,

Sea $\nu: S \to TS$ un campo vectorial continuo entonces para cada $P \in S$ por medio de la carta (U_p, φ_p) $\varphi_p: U_p \to \mathbb{R}^2$ se tiene la expresión del campo en el sistema de coordenadas $\bar{\nu}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\bar{\nu}(x) = d\varphi_p \circ \nu \circ \varphi_p^{-1}(x)$ que se anula en aquellos puntos q donde $\nu \circ \varphi_p^{-1}(q) = 0$ así, si las singularidades de ν son aisladas entonces son un número finito así definimos el índice del campo ν en P como el índice de su expresión coordenada $\bar{\nu}$ en el punto $\varphi_p(P)$ es como fue definido en el capítulo I, por la prop. 1.4 éste es invariante bajo traslaciones y $\therefore$ podemos suponer $\varphi_p(P) = 0$

y de la prop. 1.16 :) éste es invariante bajo difeomorfismos ∴ no depende de la carta y está bien definido. este índice lo denotaremos $I_v(P)$. Si $\{P_1, \ldots, P_m\}$ son las singularidades de v entonces denotaremos $I_v(S) = \sum_{i=1}^{m} I_v(P_i)$ lo llamaremos el índice del campo en la Superficie S

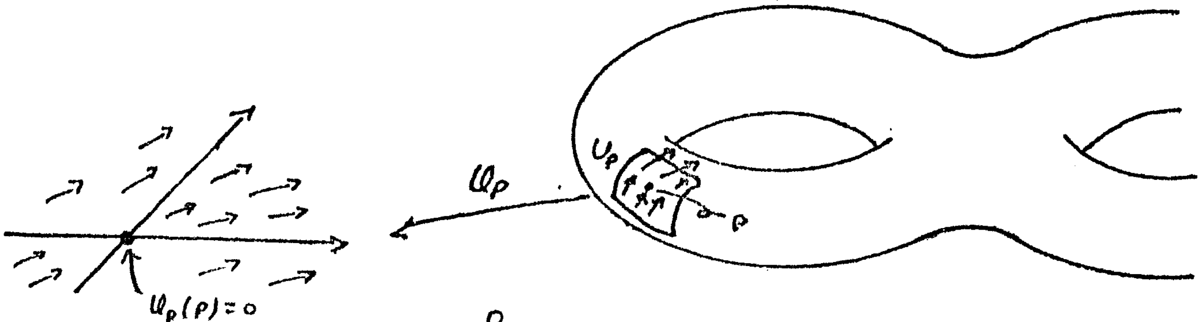


fig. 2.1

con ésto, el objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema:

<u>teorema</u> *del Indice de Poincaré :*

El índice de una superficie compacta relativa a cualquier campo con un numero finito de singularidades es independiente del campo e igual a la característica de Euler de la superficie.

$\longmapsto$

Empezaremos con el caso de la esfera $S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1 \}$

<u>Proposicion</u> 2.1. *El índice de un campo vectorial v sobre la esfera con un número finito de singularidades es* $2 = \chi(S^2)$

<u>demostración</u> consideremos el atlas en S^2 que consiste de las proyecciónes estereográficas desde $N = (0,0,1)$ y $S = (0,0,-1)$ dadas por :

$$\pi_N : S^2 - S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \pi_N(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

$$\pi_S : S^2 - N \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \pi_S(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

entonces los inversos están dados por :

$$\Pi_S^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1} , \frac{2v}{u^2+v^2+1} , \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$$

$$\Pi_N^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1} , \frac{2v}{u^2+v^2+1} , \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1} \right)$$

los cambios de coordenadas son :

$$\Pi_N \Pi_S^{-1} : \mathbb{R}^2-0 \longrightarrow \mathbb{R}^2-0 \qquad \Pi_N\Pi_S^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2} , \frac{v}{u^2+v^2} \right)$$

$$\Pi_S \Pi_N^{-1} : \mathbb{R}^2-0 \longrightarrow \mathbb{R}^2-0 \qquad \Pi_S\Pi_N^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2} , \frac{v}{u^2+v^2} \right)$$

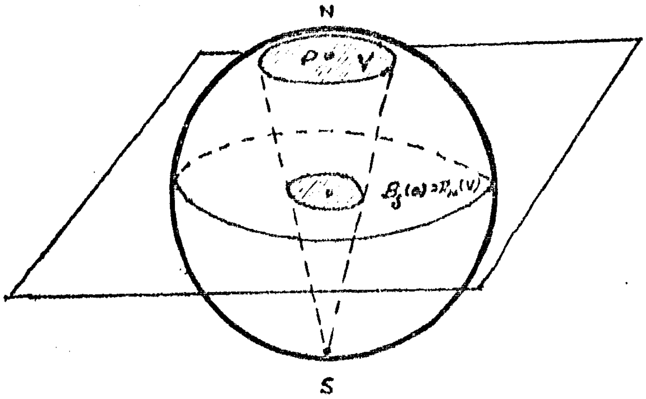


fig. 2.2

sea $v : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de S^2 sea $p \in S^2$ un punto tal que $v(p) \neq 0$ podemos suponer $p=N$ y sea V una vecindad de p tal que v no se anule en $\bar{V}$ podemos suponer que $\Pi_N(\bar{V}) = \bar{B}_\delta(0)$ $\delta>0$ así $d\Pi_N$ induce un campo $v_N : \bar{B}_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ podemos tomar δ suficientemente chico para que $\|\hat{v}_N(q) - \hat{v}_N(q')\| < 1/2$ si $q, q' \in B_\delta(0)$ consideremos la función $g(x) = \beta\left(\frac{\|x\|^2 - \delta^2/9}{\delta^2\, 3/9} \right)$

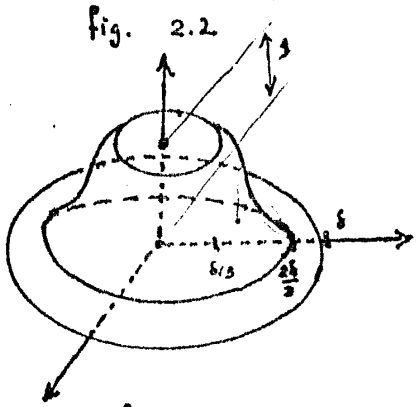


fig. 2.3

donde $\beta(t) = \frac{\alpha(1-t)}{\alpha(1-t)+\alpha(t)}$ y

$$\alpha(s) = \begin{cases} e^{-1/s^2} & \text{si } s>0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

la gráfica de g se ilustra en 2.3 , g se anula en $B^c_{2\delta/3}(0)$, y es 1 en $B_{\delta/3}(0)$, sea v_0 t.q. $\|v_0\| = \min\{\|v_N(q)\| \mid q \in \bar{B}_\delta(0)\}$ $v_0 = v_N(q_0)$ $q_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ consideremos ahora el campo $v_N' : \bar{B}_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido como sigue: $v_N'(q) = (1-g(q))\,v_N(q) + g(q)\,v_0$ se tiene entonces que v_N' coincide con v_N en $\bar{B}_\delta(0) - B_{2\delta/3}(0)$ y es constante igual a v_0 en $\bar{B}_{\delta/3}(0)$ además $v_N'(q)=0 \Rightarrow v_0$ y $v_N(q)$ son L.D. y apunten en direcciónes opuestas pero esto implicaría $\| \hat{\nu}_N(q) - \hat{\nu}_0 \| > 1/2$ ∇ $\therefore$ ν_N' no se anula en $\bar{B}_\delta(0)$ este nuevo campo me induce un campo en $\tilde{V}$ por medio de $d\Pi_N^{-1}(\nu_N' \circ \Pi_N) = \nu'$ el cual coincide con V en ∂V $\therefore$ $\nu|_{\tilde{V}^c}$ se puede extender continuamente a $\tilde{V}$ por medio de ν' sin alterar las singularidades de ν así, llamemos μ a este nuevo campo, sea ν_S el campo inducido por μ en $\mathbb{R}^2$ por $d\Pi_S$ i.e. $\nu_S(q) = d_{\Pi_S^{-1}(q)}\Pi_S(\mu \circ \Pi_S^{-1}(q))$ entonces ν_S se anula solo en los puntos $\Pi_S(p_i)$ donde $\{p_1, \dots, p_n\}$ son las singularidades de ν y $\{\Pi_S(p_i)\} \subset \overset{\circ}{\overline{\Pi_S(V^c)}}$

así tenemos

$$I_\nu(S^2) = \sum_{i=1}^{n} I_\nu(p_i) = \sum_{i=1}^{n} I_{\nu_S}(p_i)$$

pero $\Pi_S(V^c) = \bar{B}_{1/\delta}(0)$ y $\therefore$ de la prop. 1.8

$$\sum_{i=1}^{n} I_{\nu_S}(\Pi_S(p_i)) = I(\nu_S, \sigma_{1/\delta}) = I(\nu_S, \sigma_{3/\delta})$$

pero
$$\begin{aligned}
\nu_S \circ \sigma_{3/\delta}(t) &= \nu_S\left(\tfrac{3}{2} e^{i2\pi t}\right) \\
&= d\,\Pi_S \Pi_N^{-1}\Big|_{\Pi_N\Pi_S^{-1}(\frac{3}{2}e^{i2\pi t})} \circ \nu_N'\left(\Pi_N \Pi_S^{-1}\left(\tfrac{3}{\delta} e^{i2\pi t}\right)\right) \\
&= D\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)_{\frac{\delta}{3}e^{2\pi i t}} \left(\nu_0\left(\tfrac{\delta}{3} e^{i2\pi t}\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} & \dfrac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\[2ex] \dfrac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & -\dfrac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}_{\frac{\delta}{3}e^{2\pi i t}} (\nu_0)
\end{aligned}$$

si ν_0 tiene coordenadas (v_1, v_2)

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^2}{\delta^2} \dfrac{\cos^2 2\pi t - \sin^2 2\pi t}{3^4/\delta^4} & \frac{3^2}{\delta^2} \dfrac{2\cos 2\pi t \sin 2\pi t}{3^4/\delta^4} \\[2ex] \frac{3^2}{\delta^2} \dfrac{\cos 2\pi t \sin 2\pi t}{3^4/\delta^4} & -\frac{\delta^2}{3^2} \cos 4\pi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^2/3^2 (\cos 4\pi t) v_1 + \delta^2/3^2 (\sin 4\pi t) v_2 \\ \delta^2/3^2 (\sin 4\pi t) v_1 - \delta^2/3^2 (\cos 4\pi t) v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\delta^2}{3^2} e^{4\pi i t} \cdot (v_1, -v_2)$$

$$\Rightarrow \quad \nu_3(e^{i2\pi t}) = \frac{\delta^2}{3^2} e^{4\pi i t} \cdot (v_1, -v_2)$$

y si $\theta_0 \in \mathbb{R}$ es tal $e^{i\theta_0} = \frac{(v_1, -v_2)}{\| v_1, -v_2 \|} = \hat{\nu}_3(0)$

entonces la función $\nu^*_{\sigma_{3/\delta}}$ está dada por

$$\nu^*(t) = 4\pi t + \theta_0 \quad \text{ya que} \quad \pi \nu^* = e^{4\pi i t} e^{i\theta_0} = \hat{\nu}_3(e^{i2\pi t})$$

$$\Rightarrow \quad I(\nu_3, \sigma_{3/\delta}) = \frac{\nu^*(1) - \nu^*(0)}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 = \chi(S^2)$$

■

Para el resto de las superficies orientables procederemos como sigue:

2.3 Para el caso del toro si ν es un campo en T^2 con singularidades $\{P_1, \dots, P_m\}$ tomemos una vecindad $V \subset T^2$ difeomorfa a un anillo $S^1 \times [-5, 5]$ que no contenga singularidades de ν si $\psi: V \to S^1 \times [-5, 5]$ es el difeomorfismo éste induce un campo en $S^1 \times [-5, 5]$ que no se anula. sea $\alpha_1 = \psi^{-1}(S^1 \times -1)$ $\alpha_2 = \psi^{-1}(S^1 \times 1)$ sea $U_1 = \psi^{-1}(S^1 \times [-1, 1])$ y $U_2 = \mathring{U}_1^c$ es también $\cong$ a un anillo. entonces identificando en U_2 α_1 a un punto y α_2 a otro y lo mismo con U_1 se obtienen 2 espacios homeomorfos a una esfera $U_1/_\sim$ y $U_2/_\sim$

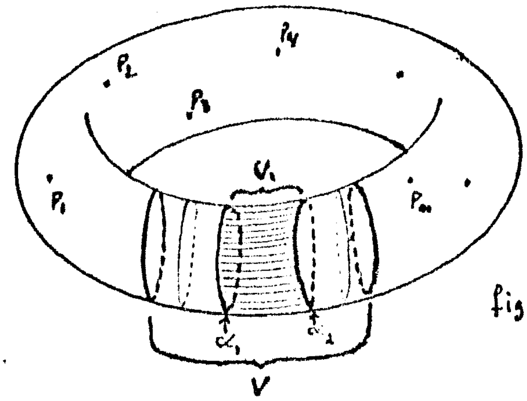


fig. 2.4

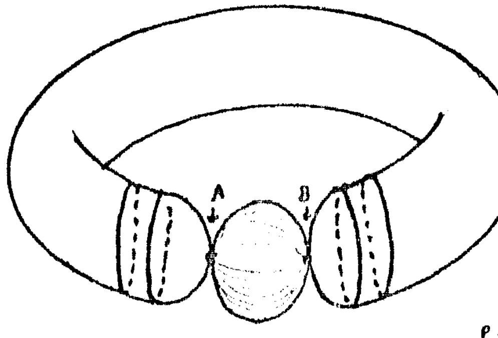


fig. 2.5

la identificación se puede hacer de manera que pueda inducir un campo en $U_{2/\sim}$ ν_2 que coincide con ν en V^c y con singularidades en $P_1,\dots,P_m$, A, B donde $A=[\alpha_1]$ $B=[\alpha_2]$ y tambien inducir un campo ν_2 en $U_{1/\sim}$ que se anula solo en A y B, y es de tal forma que $I_{\nu_1}(A)=I_{\nu_2}(B)$ y $I_{\nu_1}(B)=I_{\nu_2}(A)$ (ver apendice II). de la prop. 2.1

$$\sum^{m} I_{\nu_2}(P_i) + I_{\nu_2}(A) + I_{\nu_2}(B) = 2 \quad \text{y} \quad I_{\nu_1}(A)+I_{\nu_1}(B)=2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} I_{\nu_2}(P_i) = 0 = \chi(T_2)$$

además como ν_2 coincide con ν en una vecindad de V $I_\nu(P_i)=I_{\nu_2}(P_i)$ y $\therefore$

$$\sum_{i=1}^{m} I_\nu(P_i) = 0 .$$

2.4 Para una superficie de genero g, T^g tomando g vecindades anulares, una por cada agujero, ajenas entre si $\{V_1,\dots,V_g\}$ y de tal manera que si ν es un campo con un numero finito de singularidades $\{P_1,\dots,P_m\}$ procediendo como antes obtenemos vecindades difeomorfas a $S^1\times[-1,1]$ $U_1,\dots,U_g$ $U_i\subset V_i$ con frontera α_i, β_i cada una $\alpha_i=\varphi_i^{-1}(S^1\times -1)$ $\beta_i=\varphi_i^{-1}(S^1\times 1)$

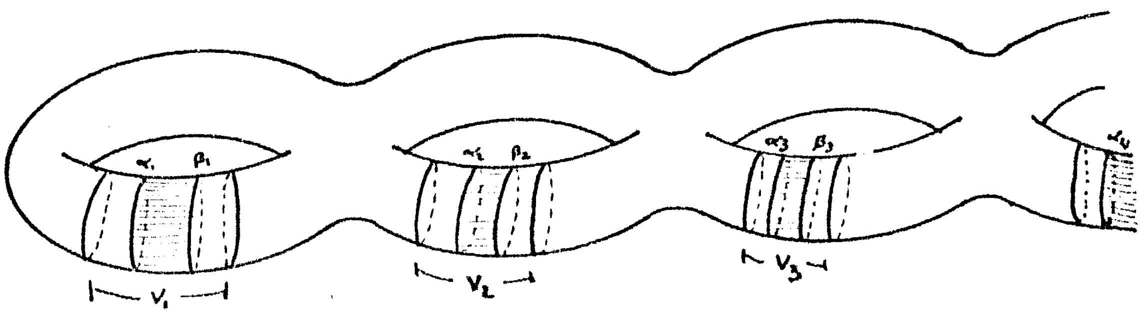
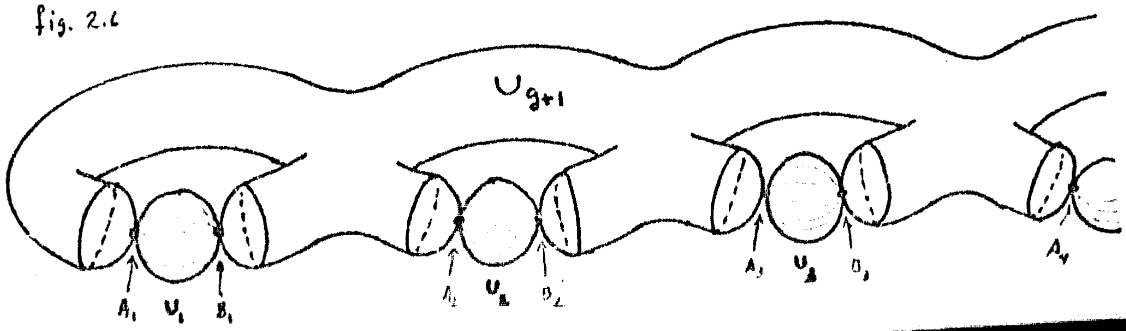


fig. 2.6



sea $U_{g+1} = (\bigcup_{i=1}^{g} \mathring{U}_i)^c$ identificando cada α_i en un punto A_i y cada β_i en B_i se obtienen $g+1$ esferas $\{U_i/\sim\}_{i=1,\dots,g+1}$ y además se puede inducir un campo en cada $U_i/\sim$ ν_i de tal forma que para $i=1,\dots,g$ ν_i se anula solo en los puntos A_i, B_i y ν_{g+1} coincide con ν en $(\bigcup_{i=1}^{g} V_i)^c$ y sus puntos críticos son $\{P_1,\dots,P_n\} \cup \{A_i,B_i\}_{i=1}^{g}$.

y de manera análoga al toro $I_{\nu_i}(A_i) = I_{\nu_{g+1}}(B_i)$, $I_{\nu_i}(B_i) = I_{\nu_{g+1}}(A_i)$ y

$$\therefore \quad I_{\nu_{g+1}}(A_i) + I_{\nu_{g+1}}(B_i) = I_{\nu_i}(A_i) + I_{\nu_i}(B_i) = 2$$

en $U_{g+1}/\sim$

$$\sum_{i=1}^{m} I_{\nu_{g+1}}(P_i) + \sum_{j=1}^{g} I_{\nu_{g+1}}(A_i) + I_{\nu_{g+1}}(B_i) = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} I_{\nu_{g+1}}(P_i) = 2 - \sum_{j=1}^{g} I_{\nu_{g+1}}(A_i) + I_{g+1}(B_i) = 2 - 2g. = \chi(\overset{g}{\mathbb{T}})$$

2.5 Para el plano proyectivo $\mathbb{RP}$ el cual resulta de identificar en S^2 puntos antipodales, así si Q es la identificación $Q: S^2 \to \mathbb{RP}$ es un difeomorfismo local. Si ν es un campo en S^2 continuo este me induce un campo continuo μ en S^2 con $\mu(q) = dQ^{-1}_{Q(q)}(\nu(Q(q)))$ que se anula en aquellos puntos $\{q_i, -q_i\}$ tales que ν se anula en $Q(q_i) = Q(-q_i)$, entonces si $P_1, \dots, P_m$ son las singularidades de ν y $\{q_i, -q_i\} = Q^{-1}(P_i)$ entonces $\{q_i, -q_i\}_{i=1,\dots,m}$ son los ceros de μ, como la proyección Q es compatible con el mapeo antípoda $A: S^2 \to S^2$ $A(x) = -x$ se tiene

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "Q"] & \mathbb{RP} \\ S^2 \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow d_q Q = d_{A(q)} Q \, d_q A$ y si V_q es una vecindad de q donde $Q|_{V_q}$ es difeomorfismo en su imagen se tiene $Q^{-1}: Q(V_q) \to V_q$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V_q & Q(V_q) \arrow[l, "Q^{-1}"'] \arrow[dl, "Q^{-1}"] \\ A(V_q) \arrow[u, "A"] & \end{tikzcd}$$

y por tanto $\quad d_{Q(q)}Q^{-1} = d_{A(q)}A \; d_{Q(-q)}Q^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \mu(q) = d_{Q(q)}Q^{-1}(\,\nu(Q(q))\,) = d_{A(q)}A \circ d_{Q(-q)}Q^{-1}(\,\nu(Q(-q))\,)$$

$$= d_{A(q)}A \circ \mu(-q) = -\mu(-q)$$

$$y \therefore \quad \mu(-q) = -\mu(q) = d_q A\,(\mu(q))$$

por tanto si q_i es un cero de μ y V_{q_i} una vecindad coordenada de q_i aislada de ceros distintos de q_i con carta $\varphi_i : V_{q_i} \to \mathbb{R}^2$ entonces $-V_{q_i}$ es una vecindad coordenada de $-q_i$ aislada de ceros distintos de $-q_i$ y $\varphi_i \circ A|_{-V_{q_i}}$ es una carta coordenada. así para calcular el índice de q_i y $-q_i$ veamos cuales son los campos inducidos por las cartas en $\mathbb{R}^2$

$$\nu_1(x) = \left(d_{\varphi_{q_i}^{-1}(x)}\varphi_{q_i}\right)\left(\mu\left(\varphi_{q_i}^{-1}(x)\right)\right) \quad \text{es el inducido por } \mu|_{V_{q_i}}$$

$$\nu_2(x) = \left(d_{A\varphi_{q_i}^{-1}(x)}\varphi_{q_i}A\right)\left(\mu\left(A\varphi_{q_i}^{-1}(x)\right)\right)$$

$$= \left(d_{-\varphi_{q_i}^{-1}(x)}\varphi_{q_i}A\right)\left(\mu\left(-\varphi_{q_i}^{-1}(x)\right)\right)$$

$$= \left(d_{\varphi_{q_i}^{-1}(x)}\varphi_{q_i} \circ d_{-\varphi_i^{-1}(x)}A\right)\left(\mu\left(-\varphi_{q_i}^{-1}(x)\right)\right)$$

$$= \left(d_{\varphi_{q_i}^{-1}(x)}\varphi_{q_i}\right)\left(-\mu\left(-\varphi_{q_i}^{-1}(x)\right)\right) = \left(d_{\varphi_{q_i}^{-1}(x)}\varphi_{q_i}\right)\left(\mu\left(\varphi_{q_i}^{-1}(x)\right)\right)$$

$$= \nu_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad I_\mu(q_i) = I_\mu(-q_i) = I_\nu(P_i)$$

como $\quad 2 = I_\mu(S^2) = \sum_{i=1}^{m} I_\mu(q_i) + I_\mu(-q_i) = 2\sum_{i=1}^{m} I_\nu(P_i)$

$$\Rightarrow \quad I_\nu(RP) = \sum_{i=1}^{m} I_\nu(P_i) = 1 = \chi(RP)$$

∎

2.6 Para el caso de la suma conexa de q planos proyectivos $S^2 - \overset{q}{\cup} U_i$ $(U_i \cong D^2)$ $U_i \cap U_j = \phi$ $i \neq j$ el cual resulta de identificar con q - bandas de Moebius $M_1, \ldots, M_q$ por la frontera de cada U_i con ∂M_i en donde el campo ν no se anula en $\mathring{\cup} M_i$

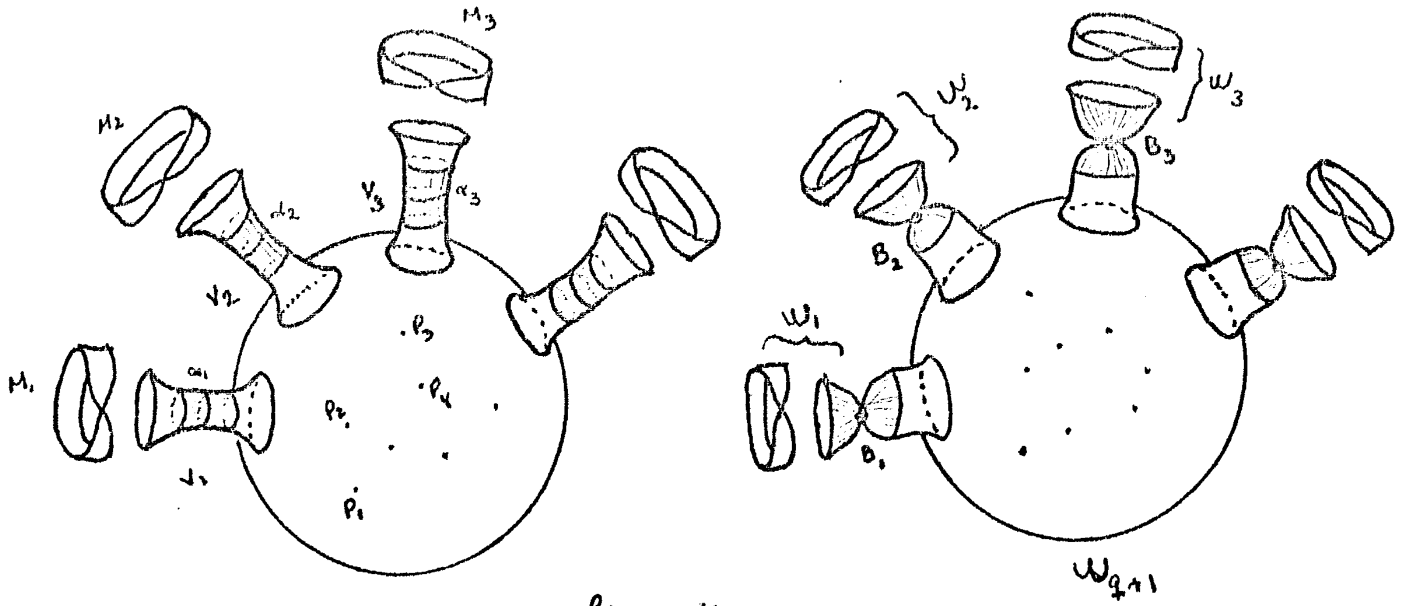


fig. 2.7

Como en el caso del toro tomemos vecindades $\Psi_i \cong S^1\times[-1,1]$ en $S^2 - \bigcup^{g} U_i$ de cada ∂U_i, $V_1,\dots,V_g$. identificando $\Psi_i^{-1}(S^1\times 0) = \alpha_i$ $W_1,\dots,W_{g+1}$ regiones donde $W_i \cong \mathbb{RP}$ $i=1,\dots,g$ y $W_{g+1}\cong S^2$ en cada una de estas se pueden inducir campos v_i de tal forma que v_i se anula en $B_i=[\alpha_i]$ $i=1,\dots,g$ y v_{g+1} se anula en los puntos donde v se anulaba $S=\{P_1,\dots,P_m\}$ y además en los puntos $B_1,\dots,B_g$ y estos son de tal forma que $I_{v_i}(B_i)+I_{v_{g+1}}(B_i)=2$ (ver Apendice II) y el campo v_{g+1} coincide con v en una vecindad de S además como $I_{v_i}(B_i)=I_{v_i}(\mathbb{RP})=1 \Rightarrow I_{v_{g+1}}(B_i)=1$ $i=1,\dots,g$.

y por 2.1 $I_{v_{g+1}}(S^2)=2=\sum_{i=1}^{m} I_{v_{g+1}}(P_i)+\sum_{i=1}^{g} I_{v_{g+1}}(B_i) = \sum_{i=1}^{m} I_{v}(P_i)+g$

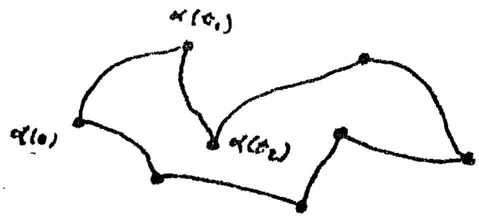
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{g} I_{v_{g+1}}(P_i) = 2-g = \chi(\#_g \mathbb{RP})$$ ∎

Parte 2

Para el caso en que tenemos campos diferenciables sobre la superficie se cuenta con herramienta mas elavorada como lo es el teorema de Gauss-Bonnet, ademas de métodos mas directos para calcular el indice de una singularidad del campo y probar sus propiedades.

Esta parte viene como complemento y se trata de dar un enfoque un poco diferente para llegar a la demostración del teorema de Poincaré que es lo que haremos a continuación:

Para empezar consideremos un campo v definido en una región $U \subset \mathbb{R}^2$ diferenciable, y sea $\alpha : I \to U$ una curva simple regular por pedazos (c.s.c.r.p) cerrada, i.e. $\exists$ una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ tal que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es la restricción de una curva diferenciable definida en una vecindad de $[t_i, t_{i+1}]$



supongamos que v no se anula en J_α ($= Im\,\alpha$) entonces el mapeo $\hat{v}_\alpha(t) = \dfrac{v(\alpha(t))}{\|v(\alpha(t))\|}$ es diferenciable

sea $(a,b) : I \to \mathbb{R}^2$ y $\hat{v}_\alpha(t) = (a,b)(t)$

entonces tenemos una manera de construir el levantamiento $\hat{v}_\alpha^{\#}$ de $\hat{v}_\alpha$ como es dado en el siguiente lema:

<u>**Lema 2.7**</u> sea $\omega = (a,b) : I \to S^1$ continua y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ una partición de I tal que $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es la restricción de una función diferenciable en una vecindad de $[t_i, t_{i+1}]$, sea $s_0 \in I$ $s_0 \in [t_h, t_{h+1}]$ entonces si $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ y $e^{i\varphi_0} = \omega(s_0)$ la función diferenciable $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{s_0}^{t_{h+1}} (a,b)\cdot(b',-a')\,d\tau + \sum_{i=h+1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a,b)\cdot(b',-a')\,d\tau + \int_{t_k}^{t} (a,b)\cdot(b',-a')\,d\tau$$

si $t \in [t_k, t_{k+1}]$, es tal que $\omega(t) = e^{i\varphi(t)}$ $\forall\, t \in [0,1]$ y $\varphi(0) = \varphi_0$

dem. basta probar que la función $\|w - e^{i\theta}\|^2 = 0 = \|w\|^2 - 2\langle w, e^{i\theta}\rangle + \|e^{i\theta}\|^2$

$= 2 - 2\langle w, e^{i\theta}\rangle \iff \langle w, e^{i\theta}\rangle = 1 \quad \forall t \in I$, pero

$$\frac{d}{dt}(\langle w, e^{i\theta}\rangle) = \langle w', e^{i\theta}\rangle + \langle w, \tfrac{d}{dt}(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))\rangle$$

$$= a'\cos\theta + b'\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\theta\,\theta' + b\cos\theta\,\theta'$$

$$= a'\cos\theta + b'\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\theta\,(ab' - ba') + b\cos\theta\,(ab' - ba')$$

$$= a'\cos\theta + b'\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\theta\,(ab' - ba') + b\cos\theta\,(ab' - ba')$$

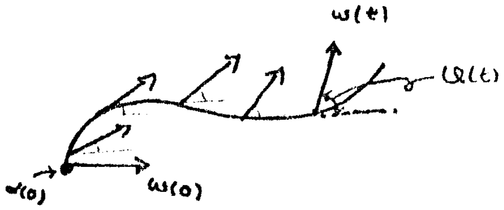
$$= a'\cos\theta + b'\operatorname{sen}\theta - a^2b'\operatorname{sen}\theta - baa'\operatorname{sen}\theta + abb'\cos\theta - b^2a'\cos\theta$$

como $\|w\|^2 = 1 \Rightarrow 2w\cdot w' = 0 \Rightarrow aa' = -bb'$ y por tanto

$$= a'\cos\theta + b'\operatorname{sen}\theta - a^2b'\operatorname{sen}\theta - b^2b'\operatorname{sen}\theta - a^2a'\cos\theta - b^2a'\cos\theta$$

$$= a'\cos\theta + b'\operatorname{sen}\theta - (a^2+b^2)b'\operatorname{sen}\theta - (a^2+b^2)a'\cos\theta = 0$$

además $\langle w(0), e^{i\theta(0)}\rangle = \langle w(0), w(0)\rangle = 1 \quad \therefore \langle w, e^{i\theta}\rangle = 1 \ \forall t \in I$ ∎

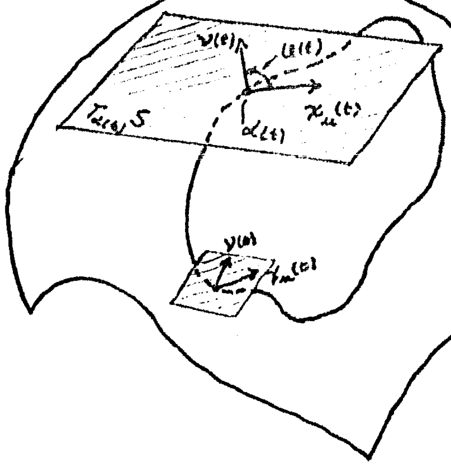


así θ es un levantamiento de $\hat{v}_a$

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta orientable y $v: S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable sea $p \in R$ $R \subset S$ es una región simple cuya frontera está parametrizada por $\alpha: [0,\ell] \to \bar{R}$ α no pasa por p si $x: U \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización de una vecindad de $\bar{R} \subset U$ y p es el único punto singular de v en U entonces tenemos $\hat{v}(t) = \dfrac{v(t)}{\|v(t)\|} = a(t)\hat{x}_u(t) + b(t)\hat{x}_u^{\perp}$ con $(a,b): [0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ diferenciables y $\|a,b\| = 1$ sea $\theta: [0,\ell] \to \mathbb{R}$ (lo llamaremos al levantamiento de (a,b) determinado por el lema 2.7 una determinación diferenciable de x_u a v) entonces si $X(\alpha(t))$ es $\neq 0$ $\theta(\ell) - \theta(0) = 2\pi I_v(p)$ pero $\theta(\ell) - \theta(0) = \int_0^\ell \frac{d\theta}{dt}\,dt$ y $\therefore$

$$I_v(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\ell \frac{d\theta}{dt}\,dt.$$

y por lo visto en el capítulo (2 $I_\nu(P)$ no depende de α ni de la carta $\mathcal{X}$



consideremos ahora $\{(\mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ un atlas de parametrizaciones ortogonales (i.e $\mathcal{X}_{\alpha u} \perp \mathcal{X}_{\alpha v}$) sea $S = \{P\in S \mid \nu(P)=0\} = \{P_1,\dots,P_k\}$

y sea τ una triangulación de S con las siguientes propiedades:

i) $\forall\, T\in\tau$ $\quad T\subset U_\alpha$ p.a. $\alpha\in\Lambda$

ii) $\forall\, T\in\tau$ $\quad T$ contiene a lo mas un punto singular

iii) $\forall\, T\in\tau$ $\quad \partial T$ está $+o$ y no contiene puntos singulares

entonces para cada T si α es una param. de ∂T sea $w_0 \in T_{\alpha(0)}S$ y $w(t)$ el transporte paralelo de w_0 a lo largo de α, y sea $\psi_T(t)$ una determinación diferenciable del angulo de $\mathcal{X}_u$ a w entonces se tiene $\Delta\psi_T = \psi_T(\ell)-\psi_T(0) = \iint_T K\,d\sigma$ $\quad K$ es la curvatura de S

entonces si φ_T es una det. dif. de $\mathcal{X}_u$ a ν $\quad\psi-\varphi$ es una det. dif. de ν a w y $\therefore$ $\Delta(\psi_T-\varphi_T) = \iint_T K\,d\sigma - 2\pi I(\nu,\partial T)$

como cada lado de T aparece en τ 2-veces con orientaciones opuestas y $I(\nu,\partial T)\neq 0$ solo para aquellos triangulos $\{T_1,\dots,T_m\}$ que contienen puntos singulares en su interior sumando sobre todas las $T\in\tau$ obtenemos

$$0 = \iint_S K - \sum_{i=1}^{m} 2\pi I(\nu,\partial T_i)$$

$$\therefore\quad I(\nu,\partial T_i) = \frac{1}{2\pi}\iint_S K = \chi(S)$$

esta ultima igualdad se sigue del teorema de Gauss Bonnet. (ver Differential Geometry of curves and Surfaces by Manfredo P. Docarmo corolario 2 pg 276)

APENDICE II

Ahora probaremos la validez del argumento usado en 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6, Esto lo haremos como sigue:

Dado el Cilindro $\mathcal{C} = S^1 \times [-3,3]$ y un campo vectorial tangente a $\mathcal{C}$ $\nu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$, deformaremos primero el campo a un campo ν_1 de manera que al hacer una identificación en $\mathcal{C}$ de tal forma que $\mathcal{C}/\sim$ resulta homeomorfo a 2 semiesferas y una esfera identificadas en A, B. (ver fig. A.2.1) se pueda inducir un campo en cada semiesfera y en la esfera los cuales se anulen en A, B. si llamamos W_1, W_2 a las semiesferas como muestra fig. A.2.1 y ν_1, ν_2 son los campos inducidos en W_1, W_2 respec. y ν_0 en S^2 se probará que

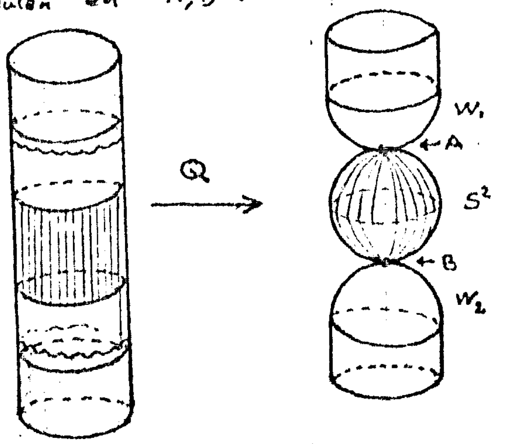


fig. A.2.1

$I(\nu_1, A) = I(\nu_0, B)$,

$I(\nu_2, B) = I(\nu_0, A)$ y por tanto $I(\nu_1, A) + I(\nu_0, A) = 2$

y $I(\nu_1, A) + I(\nu_2, B) = 2$

$= I(\nu_2, B) + I(\nu_0, B) = 2$.

la construcción la haremos en varios pasos:

i) deformaremos el campo en el cilindro $\mathcal{C}$ de manera que obtengamos un nuevo campo μ con las siguientes características

a) μ coincide con ν en una vecindad de $S^1 \times \{-3\} \cup S^1 \times \{3\}$

b) $\mu(x,t)$ es constante $\forall\, t \in [-2,2]$ x fija $\in S^1$

ii) mediante una identificación Q, induciremos un campo en $W_1 - A$, $S^2 - A, -B$, $W_2 - B$, ν_1, ν_0, ν_2 respectivamente

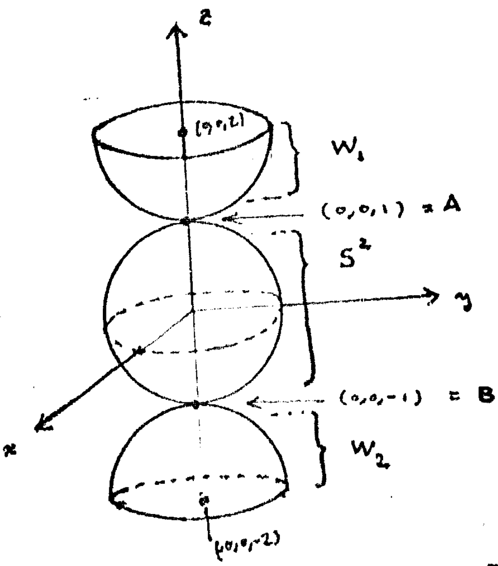
iii) multiplicando por una función campana produciremos un nuevo campo que coincide con el del paso ii) en una vecindad de $\partial W_1 \cup \partial W_2$ y que no se anula en $W_1 - A$, $S^2 - A - B$, $W_2 - B$ y que se puede extender continuamente definiéndolo como 0 en W_1, S^2 y W_2.

Empecemos por determinar nuestros conjuntos:

Sea $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$, $G = S^1 \times [-3, 3]$ $\qquad \mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \geq 0\}$

$S^2_+ = \{x \in S^2 \cap \mathbb{R}^3_+\}$ $\qquad S^2_- = \{x \in S^2 \cap \mathbb{R}^3_-\}$

Sea $W_1 = S^2_- + (0,0,2)$ $\qquad W_2 = S^2_+ + (0,0,-2)$

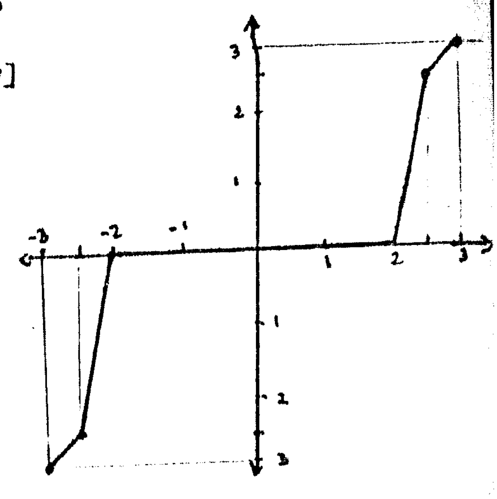


sea $\nu : G \longrightarrow \mathbb{R}^3 - 0$ un campo vectorial continuo tangente a G

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ =.

i) consideremos la siguiente función $f : [-3,3] \longrightarrow [-3,3]$

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [-3, -2\tfrac{1}{2}] \cup [2\tfrac{1}{2}, 3] \\ 5t + 10 & \text{si } t \in [-2\tfrac{1}{2}, -2] \\ 0 & \text{si } t \in [-2, 2] \\ 5t - 10 & \text{si } t \in [2, 2\tfrac{1}{2}] \end{cases}$$

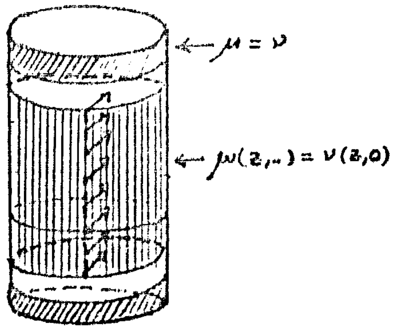


definimos $\mu : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como sigue

$\mu(z,t) = \nu(z, f(t))$ entonces

a) $\mu(z,t) = \nu(z, 0)$ $\quad \forall\, t \in [-2, 2]$ $\quad z \in S^1$

b) $\mu(z,t) = \nu(z, t)$ $\quad \forall\, t \in [-3, -2\tfrac{1}{2}] \cup [2\tfrac{1}{2}, 3]$



y además μ es tangente a $\mathcal{C}$ ya que el vector normal a $\mathcal{C}$ es constante con z fijo y μ no se anula en $\mathcal{C}$

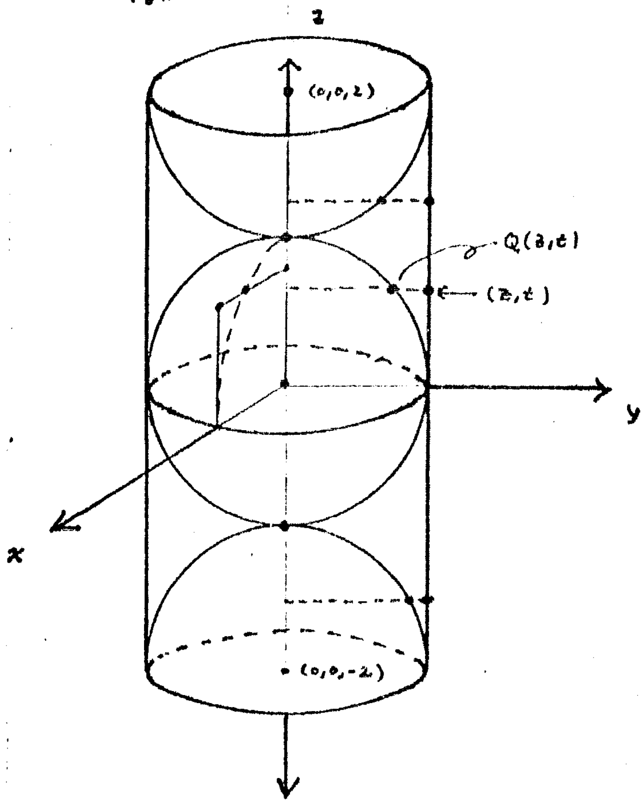
ii) ahora definamos $Q : \mathcal{C}^1 = S^1 \times [-2,2] \longrightarrow W_1 \cup S^2 \cup W_2$

$$Q(z,t) = \begin{cases} Q_1(z,t) = \left(\sqrt{-3+4t-t^2}\, z, t\right) & t \in [1,2] \\ Q_0(z,t) = \left(\sqrt{1-t^2}\, z, t\right) & t \in [-1,1] \\ Q_2(z,t) = \left(\sqrt{-3-4t-t^2}\, z, t\right) & t \in [-2,-1] \end{cases}$$

$Q|_{\mathcal{C}^1 - S^1\times 1 \cup S^1 \times -1}$ tiene inversa y está dada por

$Q^{-1}: W_1 \cup S^2 \cup W_2 - \{A, B\} \longrightarrow \mathcal{C}^1 - S^1 \times 1 \cup S^1 \times -1$

$Q^{-1}(x,y,t) = \left(\frac{x,y}{\|x,y\|}, t \right)$



y $Q|_{\mathcal{C}^1 - S^1\times\{1,-1\}}$ es diferenciable y $\therefore$ es un difeomorfismo así Q induce un campo en $W_1 - A$, $S^2 - \{A,B\}$, $W_2 - B$ mediante $DQ \circ \mu \circ Q^{-1}$ donde DQ está dada por

$$
D_{(z,t)}Q \begin{cases} D_{(z,t)}Q_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-3+2t-t^2} & 0 & \dfrac{x(2-t)}{\sqrt{-3+2t-t^2}} \\ 0 & \sqrt{-3+2t-t^2} & \dfrac{y(2-t)}{\sqrt{-3+2t-t^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex] D_{(z,t)}Q_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} & 0 & -\dfrac{2tx}{\sqrt{1-t^2}} \\ 0 & \sqrt{1-t^2} & -\dfrac{ty}{\sqrt{1-t^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex] D_{(z,t)}Q_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-3-2t-t^2} & 0 & \dfrac{-x(2+t)}{\sqrt{-3-2t-t^2}} \\ 0 & \sqrt{-3-2t-t^2} & \dfrac{-y(2+t)}{\sqrt{-3-2t-t^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}
$$

sea entonces en $\mathcal{G}'$ el campo $\mu(z,t) = \nu(z,0)$ y solo depende de z

$\mu(z,t) = (\omega_1(z), \omega_2(z), \omega_3(z))$

entonces en $W_1 - A$ el campo inducido $\nu_1 = (D_{Q_1^{-1}}Q_1)(\mu \circ Q_1^{-1})$

está dado por:

$$
\nu_1(x,y,t) = \left(D_{\left(\frac{x,y}{\|x,y\|},t\right)} Q_1\right)\left(\omega_1\left(\tfrac{x,y}{\|x,y\|}\right), \omega_2\left(\tfrac{x,y}{\|x,y\|}\right), \omega_3\left(\tfrac{x,y}{\|x,y\|}\right)\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sqrt{-3+2t-t^2} & 0 & \dfrac{x(2-t)}{\|x,y\|\sqrt{-3+2t-t^2}} \\ 0 & \sqrt{-3+2t-t^2} & \dfrac{y(2-t)}{\|x,y\|\sqrt{-3+2t-t^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \\ \omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \\ \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sqrt{-3+2t-t^2}\,\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) + \dfrac{x(2-t)\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3+2t-t^2}} \\ \sqrt{-3+2t-t^2}\,\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) + \dfrac{y(2-t)\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3+2t-t^2}} \\ 0 \quad \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \end{pmatrix}
$$

en $S^2 - \{A, B\}$ el campo inducido v_0 esta dado por:

$$v_0(x,y,t) = \left(D_{\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}, t\right)} Q_0\right)\left(\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right), \omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right), \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} & 0 & -\frac{x\,t}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}} \\ 0 & \sqrt{1-t^2} & -\frac{y\,t}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \\ \omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \\ \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \frac{x\,t\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}} \\ \sqrt{1-t^2}\;\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \frac{y\,t\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}} \\ \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \end{pmatrix}$$

y en $W_2 - B$ el campo v_2 definido como

$$v_2(x,y,t) = \left(D_{\left(\frac{(x,y)}{\|x,y\|}, t\right)} Q_2\right)\left(\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right), \omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right), \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\right)$$

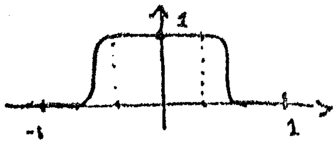
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{-3-2t-t^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \frac{x(2+t)\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3-2t-t^2}} \\ \sqrt{-3-2t-t^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \frac{y(2+t)\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3-2t-t^2}} \\ \omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \end{pmatrix}$$

estos campos no se anulan en ningun punto de su respectivo dominio y no podemos esperar que se extiendan continuamente a A, B. Para arreglar esto multiplicaremos cada uno por una funcion escalar de manera que que los campos asi obtenidos se extiendan a A, B con un solo cero cada uno y de manera que los campos en W_1 y W_2 no se alteren en una verindad de ∂W_1 y ∂W_2.

(ii) Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ $\quad h(t) = \beta\left(\frac{|t|^2 - 4/9}{4/9 - 1/9}\right) = \beta\left(\frac{t^2 - 4/9}{3/9}\right)$

donde β es como en pg 28 esta funcion tiene las sig caracteristicas:

$$h|_{(-1/3,\,1/3)} = 1 \qquad h|_{[-1,-2/3]\cup[2/3,1]} = 0$$



sea $g_0 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue :

$$g_0(t) = h(t) + (1-h(t))\left(\sqrt{1-t^2}\right)$$

entonces $g_0|_{[-1,-2/3]\cup[2/3,1]}(t) = \sqrt{1-t^2}$

$g_0|_{[-1/3,\,1/3]} = 1$ solo se anula en $t^2=1$

así el campo en S^2 ψ_0 definido como

$$\psi_0(x,y,t) = \begin{cases} g_0(t)\ \nu_0(x,y,t) & |t|<1 \\ 0 & t=1 \end{cases}$$

es continuo y se anula solo en $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$

para W_1 y W_2 definimos las siguientes funciones

$$g_1 : [1,2] \longrightarrow [0,1]$$

$$g_1(t) = g_0(t-2)$$

$$g_2 : [-2,-1] \longrightarrow [0,1]$$

$$g_2(t) = g_0(t+2)$$

y definiendo en W_1 y W_2 los campos siguientes

$$\psi_1(x,y,t) = \begin{cases} g_1(t)\ \nu_1(x,y,t) & 2\geq t>1 \\ 0 & t=1 \end{cases}$$

$$\psi_2(x,y,t) = \begin{cases} g_2(t)\ \nu_2(x,y,t) & -2\leq t<-1 \\ 0 & t=-1 \end{cases}$$

entonces ψ_1 solo se anula en $t=1$ y ψ_2 en $t=-1$

Para calcular el índice en los puntos singulares de cada campo tomemos las cartas de W_1, W_2, S^2 que se obtienen proyectando al plano x,y i.e. la restricción en W_1, W_2, S^2_1, S^2_2 de la proyección $p_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$ y $\therefore$ $Dp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

así calculemos 1° el campo inducido por Ψ_1 vía $\varphi_1 = P_{12}|_{W_1}$

llamémosle $\vec{\Psi}_1$ entonces:

$$\hat{\Psi}_1(x,y) = (D_{\varphi_1^{-1}(x,y)}\varphi_1)(\Psi_1(\varphi_1^{-1}(x,y))) = (D_{(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}+2)}\varphi_1)(\Psi_1((x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}+2))$$

$$= g_1(-\sqrt{1-x^2-y^2}+2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}(\Psi_1(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}+2))$$

$$= g_0(-\sqrt{1-x^2-y^2})\left.\begin{pmatrix}\sqrt{-3+4t-t^2}\,\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) + \dfrac{x(2-t)\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3+4t-t^2}} \\ \sqrt{-3+4t-t^2}\,\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) + \dfrac{\frac{y(2-t)}{\|x,y\|}\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\sqrt{-3+4t-t^2}}\end{pmatrix}\right|_{(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}+2)}$$

pero $\sqrt{-3+4t-t^2}\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}+2} = \sqrt{1-(t-2)^2}\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}+2} = \sqrt{x^2+y^2}$

sustituyendo obtenemos

$$\underline{\underline{\hat{\Psi}_1(x,y)}} = g_0(-\sqrt{1-x^2-y^2})\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\,\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) + \dfrac{x(\alpha+\sqrt{1-x^2-y^2})\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{x^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2}\,\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) + \dfrac{y(\alpha+\sqrt{1-x^2-y^2})\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

y $I_{\Psi_1}((0,0,1)) = I_{\hat{\Psi}_1}((0,0))$.

el campo inducido en $\dot{D}^2$ por Ψ_0 vía $\varphi_0' = P_{12}|_{S^2_+}$ está dado por:

$$\hat{\Psi}_0'(x,y) = (D_{\varphi_0'^{-1}(x,y)}\varphi_0')(\Psi_0(\varphi_0'^{-1}(x,y))) = (D_{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})}\varphi_0')(\Psi_0(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}))$$

$$= g_0(\sqrt{1-x^2-y^2})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}(\omega_0(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}))$$

$$= g_0(\sqrt{1-x^2-y^2})\left.\begin{pmatrix}\sqrt{1-t^2}\,\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \dfrac{xt\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}} \\ \sqrt{1-t^2}\,\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \dfrac{yt\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}}\end{pmatrix}\right|_{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})}$$

$$\underline{\underline{\hat{\Psi}_0'(x,y)}} = g_0(\sqrt{1-x^2-y^2})\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\,\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \dfrac{x\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) \\ \sqrt{x^2+y^2}\,\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right) - \dfrac{y\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\end{pmatrix}$$

y $I_{\Psi_0}(0,0,1) = I_{\hat{\Psi}_0'}(0,0)$

en S^2_- tenemos tomando $\varphi_0'' = P_{12}|_{S^2_-}$

$$\hat{\Psi}_0''(x,y) = (D_{\varphi_0''^{-1}(x,y)}\varphi_0'')(\Psi_0(\varphi_0''^{-1}(x,y))) = (D_{(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})}\varphi_0'')(\Psi_0(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}))$$

$$= g_0\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\left(\Psi_0\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\right)$$

$$= g_0\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{1-t^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)-\dfrac{x\,t\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}}\\[2ex] \sqrt{1-t^2}\;\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)-\dfrac{y\,t\,\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{1-t^2}}\end{pmatrix}_{\left(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}$$

$$\hat{\Psi}_0''(x,y) = g_0\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)+\dfrac{x\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\\[2ex] \sqrt{x^2+y^2}\;\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)+\dfrac{y\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\end{pmatrix}$$

$$y \;\therefore\; I_{\Psi_0}(0,0,-1) = I_{\hat{\Psi}_0''}(0,0)$$

y para W_2 se tiene con $\mathcal{U}_2 = \mathcal{P}_{12}\big|_{W_2}$ el campo inducido en $\mathring{D}^2$ es

$$\hat{\Psi}_2(x,y) = \left(D_{\varphi_2^{-1}(x,y)}\mathcal{U}_2\right)\left(\Psi_2\left(\mathcal{U}_2^{-1}(x,y)\right)\right) = \left(D_{\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}-2\right)}\mathcal{U}_2\right)\left(\Psi_2\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}-2\right)\right)$$

$$= g_0\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\left(\Psi_2\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}-2\right)\right)$$

$$= g_0\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{-3-4t-t^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)-\dfrac{x\,(2+t)\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3-4t-t^2}}\\[2ex] \sqrt{-3-4t-t^2}\;\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)-\dfrac{y\,(2+t)\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)}{\|x,y\|\sqrt{-3-4t-t^2}}\end{pmatrix}_{\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}-2\right)}$$

$$\underline{\hat{\Psi}_2(x,y)} = g_0\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\;\omega_1\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)-\dfrac{x\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{x^2+y^2}\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\\[2ex] \sqrt{x^2+y^2}\;\omega_2\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)-\dfrac{y\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{x^2+y^2}\;\omega_3\left(\frac{x,y}{\|x,y\|}\right)\end{pmatrix}$$

$$y \;\therefore\; I_{\Psi_2}(0,0,-1) = I_{\hat{\Psi}_2}(0,0)$$

pero $\hat{\Psi}_1 = \Psi_0''$ y $\Rightarrow$ $I_{\Psi_1}(0,0,1) = I_{\Psi_0}(0,0,-1)$

y $\hat{\Psi}_2 = \Psi_0'$ $\Rightarrow$ $I_{\Psi_2}(0,0,-1) = I_{\Psi_0}(0,0,1)$

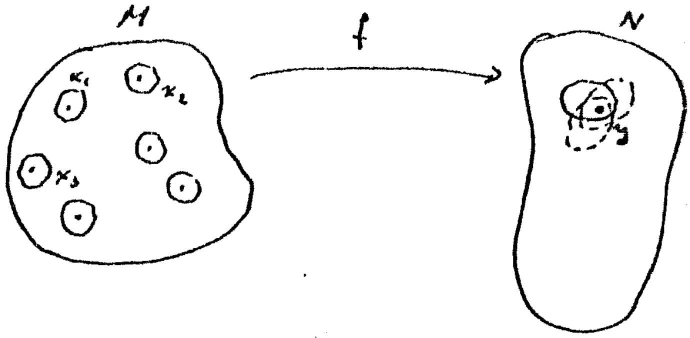
que es lo que se quería probar. ∎

CAPITULO III

GRADO DE UNA APLICACION

En este capitulo estudiaremos el concepto de grado de una aplicación y algunas de sus propiedades. Se verá que el indice de un campo en un punto definido en el capitulo I coincide con el grado de cierta función, esto con el objeto de llevar el concepto de indice a variedades de dimención n y demostrar el teorema de Poincaré - Hopf en variedades compactas orientables

Sean M, N variedades orientables (i.e. admiten átlas con el determinante del cambio de coordenadas positivo) sea $f: M \to N$ una funcion diferenciable y $m = \dim M$, $n = \dim N$ el conjunto $S_f = \{ x \in M \mid D_{\psi(x)} \varphi f \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ no es sobreyectiva, ψ, φ cartas locales de x y $f(x)$ resp. $\}$ es el conjunto de puntos criticos, $f(S_f)$ el conjunto de valores criticos de f y $N - f(S_f)$ el conjunto de valores regulares el cual es denso en N (ver Notas de topologia diferencial: Aplicaciones a teoria de punto fijo por Albrecht Dold traduc. Carlos Prieto §4 teorema (A. Sard) 4.0.1). Entonces si $m = n$ y y es un valor regular se tiene que f mapea difeomorfamente alguna vecindad de x en una vecindad de y para cada $x \in f^{-1}(y)$ y deseamos contar de manera escencial el número de veces que mapea f vecindades de cada punto en $f^{-1}(y)$ sobre alguna vecindad de y.



Si M es compacta y $y \in N - f(S_f)$ entonces $f^{-1}(y)$ es discreto y $\therefore$ finito $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ asi sean $(\psi_1, U_1), \dots, (\psi_k, U_k)$ cartas coordenadas locales de $x_1, \dots, x_k$ respectivamente y (φ, V) una carta de y entonces definimos el grado de f como sigue:

$$gr(f, y) = \sum_{x_i \in f^{-1}(y)} \frac{\det(D_{\psi_i(x_i)} \varphi f \psi_i^{-1})}{|\det(D_{\psi_i(x_i)} \varphi f \psi_i^{-1})|}$$

esto es se toma la suma de -1 por cada x_i donde $D_{\psi_i(x_i)} \varphi f \psi_i^{-1}$ invierte la orientación en una vecindad de x_i y 1 si la conserva.

<u>Proposición 3.1</u> $gr(f,y)$ tiene las siguientes propiedades:

i) $gr(f,y)$ es independiente de las cartas (tomadas de un atlas orientable de M y N)

ii) $gr(f,-): N - f(S_f) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es localmente constante $\therefore$ continua.

iii) Si $f, g: M \longrightarrow N$ son homotópicas y $y \in N - (f(S_f) \cup g(S_g))$ entonces

$gr(f,y) = gr(g,y)$

iv) Si N es conexa entonces $gr(f,y)$ no depende del valor regular y

<u>dem.</u> i) se sigue de que los determinantes de los Jacobianos del cambio de coordenadas es positivo. ∎

ii) sea $\{x_1, \dots, x_k\} = f^{-1}(y)$ y sea $U_1, \dots, U_k$ vecindades de $x_1, \dots, x_k$ ajenas tales que $f|_{U_i}: U_i \to f(U_i)$ es difeomorfismo entonces sea $V \subset \bigcap_{i=1}^{k} f(U_i) - f(M - \bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ una vecindad de y tal que V es conexa entonces $f^{-1}(V) \subset \bigcup_i U_i \; \forall i$ y además $f|_{U_i \cap f^{-1}(V)}: U_i \cap f^{-1}(V) \longrightarrow V$ es difeomorfismo $\therefore U_i \cap f^{-1}(V)$ es conexo y por tanto el signo $\det(D \varphi f \psi_i^{-1})$ no cambia $\forall \psi_i(x) \quad x \in U_i \cap f^{-1}(V)$

$\therefore \; gr(f,y) = gr(f,y') \quad \forall y' \in V$

∎

iii) para la propiedad 3 necesitaremos probar algunos lemas:

<u>Lema 3.2</u> sea M una $n+1$ variedad compacta con frontera, orientable y N una n-variedad conexa orientable, $f: M \longrightarrow N$ diferenciable entonces si y es un valor regular de f y $f/_{\partial M}$ entonces $gr(f/_{\partial M}, y) = 0$ donde ∂M tiene la orientación inducida por M.

<u>dem.</u> ver topology from the differentiable viewpoint by John W. Milnor lema 1 pg. 28

∎

si solo pedimos que y sea valor regular de $f|_{\partial M}$ de la propiedad 2 y de la densidad de $N - f(Sf)$ se tiene que $\exists\, y' \in N - f(Sf)$ tal que $gr(f|_{\partial M}, y') = gr(f|_{\partial M}, y)$ y del lema 3.1 $gr(f|_{\partial M}, y) = 0$.

__lema 3.3.__ sea $F: M \times I \longrightarrow N$ una homotopía suave y $y \in N$ un valor regular de $F_0 = F|_{M\times\{0\}}$ y $F_1 = F|_{M\times\{1\}}$ entonces $gr(F_0, y) = gr(F_1, y)$ donde $M\times\{0\}$, $M\times\{1\}$ tienen la orientación inducida de M

__dem.__ se tiene $\partial(M \times I) = M\times\{0\} \cup M\times\{1\}$ y la orientación inducida en $M\times\{0\}$ es la de M y en $M\times\{1\}$ es la contraria entonces del lema 3.2.

$$gr(F|_{\partial(M\times I)}, y) = 0 \quad \forall y \text{ valor regular de } F|_{\partial(M\times I)}$$

$$y \quad gr(F|_{\partial(M\times I)}, y) = gr(F|_{M\times\{0\}}, y) + gr(F|_{M\times\{1\}}, y)$$

$$= gr(F_0, y) - gr(F_1, y) = 0$$

$$\Rightarrow gr(F_0, y) = gr(F_1, y) \qquad \square$$

$\longmapsto \quad \longmapsto$

esto prueva (ii).

(V) para iv) necesitaremos:

__Lema 3.4.__ dado N una n-variedad conexa, $y, z \in N$ entonces existe $h: N \longrightarrow N$ difeomorfismo tal que $h(y) = z$ y h es isotópico a la identidad en N.

__dem.__ (ver topology from the differentiable viewpoint by John Milnor lema de homogeneidad pg. 22) $\square$

__Lema 3.5.__ sea $h: N \longrightarrow N$ como en 3.4. entonces $\forall\, p \in N$ si φ, ψ son cartas de una vecindad de p y $h(p)$ resp. ent $\det(D_{\varphi(p)} \psi h \varphi^{-1}) > 0$.

__dem.__ sea $H: I \times N \longrightarrow N$ una isotopía tal que $H_0 = id$ $H_1 = h$

sea $p \in N$, $t_0 \in I$ y $y = H_{t_0}(p)$ y (V_y, ψ) una carta de y, sea $U_p \times B_\delta(t_0) \subset H^{-1}(V_y)$ con U_p vecindad coordenada de p con carta φ entonces $\forall\, t \in B_\delta(t_0)$ $H_t(U_p) \subset V_y$ y $\psi \circ H \circ id \times \varphi^{-1} : B_\delta(t_0) \times \varphi(U_p) \to \psi(V_y)$ está bien definida, además para cada t $\psi \circ H_t \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo sobre su imagen por tanto el $\det D\psi \circ H_t \varphi^{-1}$ no se anula en ningún punto de $\varphi(U_p)$ y depende continuamente de t, como I es conexo el signo es constante y para $H_0 = id$ el determinante correspondiente es el det. del Jacobiano de cambio de coordenadas que es positivo $\Rightarrow \det_{\varphi(p)} \psi h \varphi^{-1} > 0$

$\blacksquare$

Lema 3.6.3 (Propiedad iv) $gr(f, -) : N - f(S_f) \to \mathbb{Z}$ es cte.

dem. sea $z, y \in N$ valores regulares de f y sea $h : N \to N$ como en 3.4.1 sea $x \in f^{-1}(y)$ y $\psi_z, \varphi_x, \gamma_y$ cartas locales de vecindades de z, x, y resp. entonces como h es isotópico a $Id \Rightarrow hf \sim f$ y z es valor regular de hf por tanto

$$gr(f, z) \overset{iii}{=} gr(hf, z) = \sum_{x \in (hf)^{-1}(z)} \frac{\det(D_{\varphi(x)} \psi_z h f \varphi_x^{-1})}{|\det(D_{\varphi(x)} \psi_z h f \varphi_x^{-1})|}$$

y $(hf)^{-1}(z) = f^{-1}h^{-1}(z) = f^{-1}(y)$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\det(D_{\varphi(x)} \psi_z h \gamma_y^{-1} \gamma_y f \varphi_x^{-1})}{|\det(D_{\varphi(x)} \psi_z h \gamma_y^{-1} \gamma_y f \varphi_x^{-1})|}$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\det(D_{\gamma(y)} \psi_z h \gamma_y^{-1}) \det(D_{\varphi(x)} \gamma_y f \varphi_x^{-1})}{|\det(D_{\gamma(y)} \psi_z h \gamma_y^{-1}) \det(D_{\varphi(x)} \gamma_y f \varphi_x^{-1})|}$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\det(D_{\varphi(x)} \gamma_y f \varphi_x^{-1})}{|\det(D_{\varphi(x)} \gamma_y f \varphi_x^{-1})|} = gr(f, y)$$

$\blacksquare$

y con esto queda probado iv).

entonces si $f : M \to N$ con N conexa podemos hablar del grado de forma $gr(f,y)$ para cualquier $y \in N - f(St)$

1-1.

En el capítulo I definimos lo que era el índice de un campo en un punto aislado de singularidades, como el índice del campo a lo largo de cualquier curva τ_0 que contuviera al punto en su interior y sin puntos críticos distintos del punto en la cerradura de su interior, en particular se podía tomar un círculo alrededor del punto $p+\sigma_\delta$ con $\delta > 0$ suficientemente chico.

y calculabamos el índice del campo ν tomando el mapeo $\hat{\nu} \circ (p+\sigma_\delta) : I \longrightarrow S^1$ lo levantabamos a ν^* y $I_\nu(P) = \frac{\nu^*(1) - \nu^*(0)}{2\pi}$ así el mapeo $\hat{\nu} : J_{p+\sigma_\delta} \longrightarrow S^1$ lo podemos ver como un mapeo entre 1 variedades orientables compactas.

lo que haremos en seguida será probar que $I_\nu(P) =$ "$gr(\hat{\nu})$".

Para ser mas precisos teniamos:

Sea $p \in U \subset \mathbb{R}^2$ y $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo continuo, que no se anula en $U-P$ U abto. sea $p+\sigma_\delta : I \longrightarrow U$ $(p+\sigma_\delta)(t) = p + \delta e^{i2\pi t}$ con $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(p)} \subset U$ con $p+\sigma_\delta$ una parametrización de $\partial B_\delta(p)$.

sea $\mu : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aproximación diferenciable de ν tal que $\|\mu(x) - \nu(x)\| \leq \frac{\|\nu(x)\|}{2}$ (ver topología diferencial: Aplicaciones a teoría de punto fijo por Albrecht Dold, traducidas por Carlos Prieto; teorema 1.4.11) con $A = \phi$ $y = X$.

entonces $\mu(x) = 0 \Rightarrow \|\nu(x)\| \leq \frac{\|\nu(x)\|}{2} \Leftrightarrow \nu(x) = 0$ $\therefore$ μ se anula solo donde ν lo hace i.e. en P, ademas $\forall x \in U-P$ $\mu(x)$ no es opuesto a $\nu(x)$ y por tanto $I(\nu,\alpha) = I(\mu,\alpha)$ $\forall \alpha \subset U-P$ en particular para $\alpha = p+\sigma_\delta$

como $p+\partial B_\delta(0)$ es una 1 variedad considerando la estructura compatible con la parametrización $p+\sigma_\delta$ al mapeo $\hat{\mu} : p+\partial B_\delta(0) \longrightarrow S^1$ es diferenciable como mapeo entre 1-variedades, entonces probaremos lo siguiente

<u>Proposición 3.4</u> $I_\nu(P) = I(\nu, p+\sigma_\delta) = I(\hat{\mu}, p+\sigma_\delta) \equiv gr(\hat{\mu})$

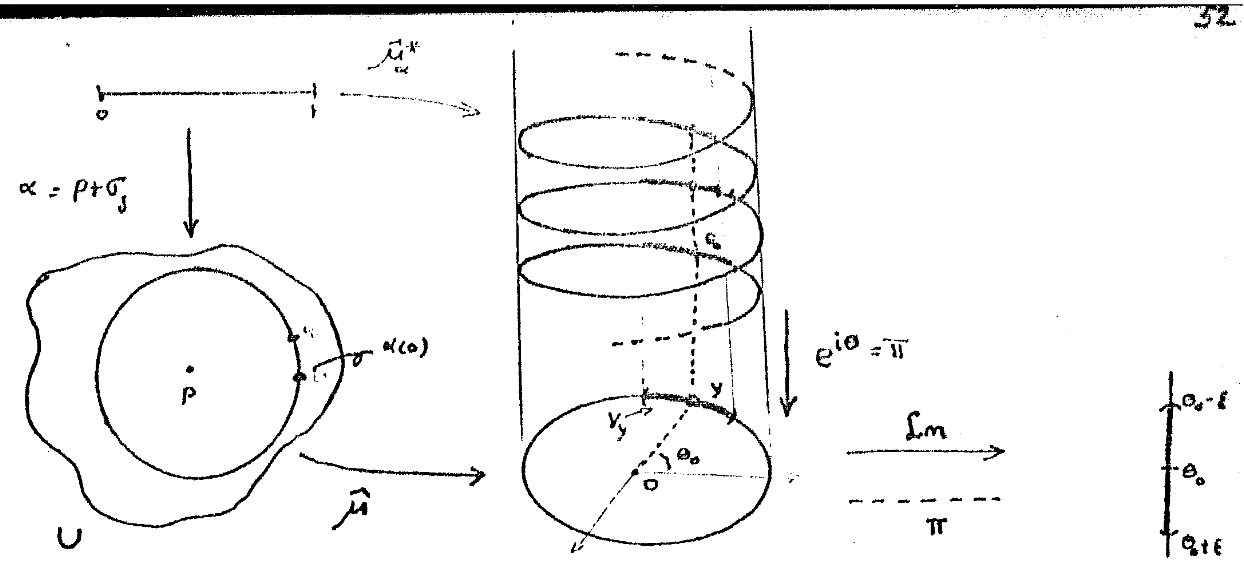


fig. 3.1

<u>dem.</u> tomando $\alpha|_{(0,1)}$ como una carta de $p+\partial B_\delta(0) - \alpha(0)$ sea $\hat{\mu}^*_\alpha : I \to \mathbb{R}$ un levantamiento de $\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}\circ\alpha(t)$ y sea $y \in S^1$ un valor regular de $\hat{\mu}$ con $y \neq \hat{\mu}(0)$, sea t_0, θ_0 tal que $\hat{\mu}^*_\alpha(t_0) = \theta_0$ y $y = \hat{\mu}(t_0)$ sea $\mathcal{L}n$ la inversa en una vecindad de θ_0 de $\pi|_{B_\varepsilon(\theta_0)}$ sea $V_y = \pi(B_\varepsilon(\theta_0))$ entonces $\mathcal{L}n(y) = \theta_0$ y $\mathcal{L}n$ es una carta de una vecindad de y (V_y)

pd. $\frac{1}{2\pi}(\hat{\mu}^*_\alpha(1) - \hat{\mu}^*_\alpha(0)) = gr(\hat{\mu})$; como $\hat{\mu}^{-1}(y) \subset \alpha(0,1)$ entonces

$gr(\hat{\mu}) = gr(\mathcal{L}n\circ\hat{\mu}^{-1}\circ\alpha, \theta_0)$ $\quad \mathcal{L}n\circ\hat{\mu}^{-1}\circ\alpha : \alpha^{-1}\hat{\mu}^{-1}(V_y) \longrightarrow B_\varepsilon(\theta_0)$

sea $W_k = 2\pi k + B_\varepsilon(\theta_0)$ entonces $\pi^{-1}(V_y) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k$ y $W_k \cap W_j = \emptyset$ $k \neq j$

y $\mathcal{L}n\circ\pi|_{W_k} = id - 2\pi k$ $\Rightarrow$ si $z \in \pi^{-1}(y)$ $D_z\, \mathcal{L}n\circ\pi|_{W_k} = id$

$\Rightarrow$ para cada $x \in (\mathcal{L}n\circ\hat{\mu}\circ\alpha)^{-1}(\theta_0) = (\mathcal{L}n\,\pi\,\hat{\mu}^*_\alpha)^{-1}(\theta_0) = \hat{\mu}^{*-1}_\alpha(\pi^{-1}(y))$

el $\det(D_x\, \mathcal{L}n\,\pi\,\hat{\mu}^*) = (\det D_{\hat{\mu}^*_\alpha(x)}\, \mathcal{L}n\,\pi)(\det D_x \hat{\mu}^*_\alpha) = \det D_x \mu^*$

$$y \quad gr(\hat{\mu}) = \sum_{\substack{x\in\hat{\mu}^{*-1}(z) \\ z\in\pi^{-1}(y)}} \frac{\det D_x \mu^*}{|\det D_x \mu^*|}$$

$$= \sum_{z\in\pi^{-1}(y)} \left(\sum_{x\in\hat{\mu}^{*-1}_\alpha(z)} \frac{\det D_x \hat{\mu}^*_\alpha}{|\det D_x \hat{\mu}^*_\alpha|} \right)$$

$$= \sum_{z\in\pi^{-1}(y)} gr(\hat{\mu}^*, z)$$

basta entonces calcular $gr(\hat{\mu}^*, z)$ para cada $z \in \pi^{-1}(y)$

ahora bien sea $a = \min\{\mu^*(0), \mu^*(1)\}$ $b = \max\{\mu^*(0), \mu^*(1)\}$

entonces si $A_1 = \{z \in \pi^{-1}(y) \mid z \notin [a,b]\}$

$A_2 = \{z \in \pi^{-1}(y) \mid z \in (a,b)\}$

$\pi^{-1}(y) = A_1 \cup A_2$ y la función $L : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $L(t) = \mu^*_\alpha(0) + (\mu^*(1) - \mu^*(0))t$

coincide con $\hat{\mu}^*_\alpha$ en $\partial I = \{0,1\}$ entonces se tiene que $\forall z \in \pi^{-1}(y)$

(valor regular de $\hat{\mu}^*$) $gr(\hat{\mu}^*_\alpha, z) = gr(L, z)$ (ver topología diferencial: Aplicaciones a teoría de punto fijo por Albrecht Dold traduc. Carlos Prieto § 6 6.1.18) y por tanto $\forall z \in A_1$ $gr(\mu^*, z) = gr(L, z) = 0$ y

si $A_2 \neq \emptyset$ se tiene $\forall z \in A_2$ $gr(\mu^*, z) = gr(L, z) = \dfrac{\mu^*(1) - \mu^*(0)}{|\mu^*(1) - \mu^*(0)|} = sg(I(M,\alpha))$

(ver top. dif. Apl. a T. de Punto F. Dold. § 5, 5.1.26)

$$\therefore\ gr(\hat{\mu}) = \sum_{z \in A_2} gr(L, z) = (Sg(I(M,\alpha)))\# A_2$$

pero $\# A_2 = |I(M,\alpha)|$ y por tanto $gr(\hat{\mu}) = I(M,\alpha)$

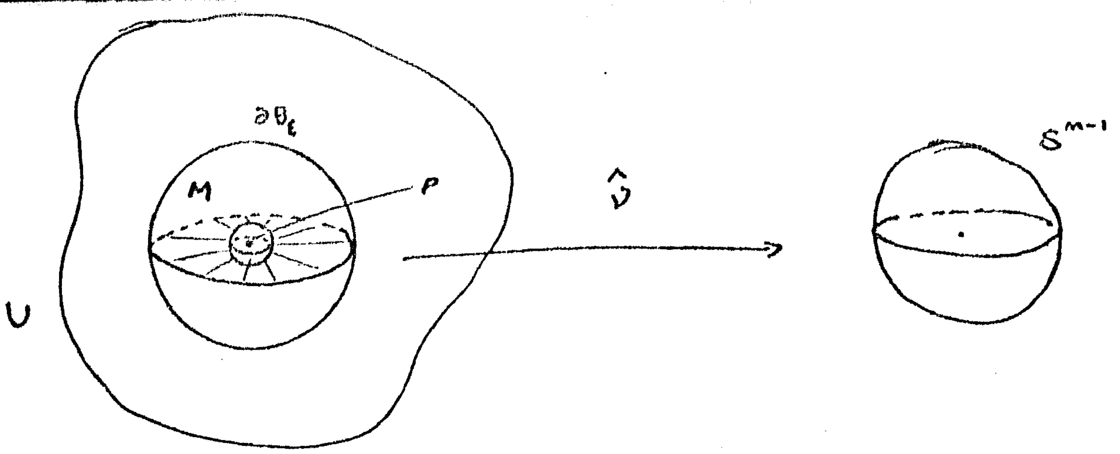
$\blacksquare$

Así con la ayuda del concepto de grado generalizaremos el concepto de Índice como sigue:

sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo diferenciable y $P \in U$ tal que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\varepsilon(P) - P$ no contiene ceros de ν se tiene entonces la función diferenciable $\hat{\nu} : \partial B_\varepsilon(P) \longrightarrow S^{m-1}$

$\hat{\nu}(\xi) = \dfrac{\nu(\xi)}{\|\nu(\xi)\|}$ y al grado de esta aplicación le llamaremos el índice de ν en P ($I_\nu(P)$). Esta definición no depende de ε ya que si $\varepsilon' < \varepsilon$ $\partial B_\varepsilon(P) \cup \partial B_{\varepsilon'}(P)$ es la frontera de la variedad comp. con frontera $M = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \varepsilon' \leq \|x - P\| \leq \varepsilon\}$ y $\hat{\nu}$ se puede definir en todo M entonces por el lema 3.2 pg 48 se tiene

$$gr(\hat{\nu}|_{\partial B_\varepsilon}) = gr(\hat{\nu}|_{\partial B_{\varepsilon'}}).$$



Nuestra intención ahora es definir el índice de un campo en una n-variedad M en un punto $P\in M$ aislado de ceros, calculándolo en el campo inducido por alguna carta coordenada de una vecindad de P en el abierto de $\mathbb{R}^n$ correspondiente, sólo necesitamos probar que no depende del sistema de coordenadas elegido para lo cual necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 3.8: sea $U\subset\mathbb{R}^n$ y $T_q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $T_q(x)=q+x$ entonces

sea $\nu:U\to\mathbb{R}^n$ un campo en U que se anule a lo más en $0\in U$

si ν' es el campo inducido en $T_q(U)$ por T_q entonces

$I_0(\nu)=I_q(\nu')$ $\quad (\nu'(z)=\nu(z-q))$.

dem. se sigue de que las cartas en $q+\partial B_\delta(0)$ $(B_\delta(0)\subset U)$

están dadas por $T_q\circ\varphi$ donde φ es una carta de $\partial B_\delta(0)$

∎

para el caso de reflexiones se sigue del siguiente lema:

Lema 3.9 sea $f:M\to N$ N, M compactas y N conexas orientables

sea $h:N\to N$ y $g:M\to M$ difeomorfismos entonces

$\mathrm{gr}(h\circ f\circ g)=\mathrm{gr}\,h\cdot\mathrm{gr}\,f\cdot\mathrm{gr}\,g$

dem. sea y un valor regular de f entonces

$$\mathrm{gr}(h\circ f\circ g,h(y))=\sum_{x_i\in g^{-1}f^{-1}(y)}\operatorname{signo}(\det D_{\varphi_i(x_i)}\psi\, h f g\, \varphi_i^{-1}) .$$

$$=\sum_{x_i\in g^{-1}f^{-1}(y)}\operatorname{signo}\left(\det D_{\varphi_i(x_i)}(\psi h \gamma_j^{-1})(\gamma_j f\delta_i^{-1})(\delta_i g\,\varphi_i^{-1})\right)$$

$$= \sum_{x_i \in g^{-1} f^{-1}(y)} \text{signo}\left(\det D_{\gamma_y(y)} \psi h \gamma_y^{-1}\right)\left(\det\left(D_{\delta_i(g(x_i))} \gamma_y f \delta_i^{-1}\right)\left(\det D_{\varphi_i(x_i)} \delta_i g \varphi_i^{-1}\right)\right.$$

$$= \sum_{x_i \in g^{-1} f^{-1}(y)} \text{sg. } gr(h, h(y))\left(\det D_{\delta_i(g(x_i))} \gamma_y f \delta_i^{-1}\right)\left(gr(g, g(x_i))\right)$$

$$= gr(h, h(y)) \left[\sum_{g(x_i) \in f^{-1}(y)} \text{signo}\left(\det D_{\delta_i(g(x_i))} \gamma_y f \delta_i^{-1}\right)\right] gr(g)$$

$$= gr(h)\ gr(f)\ gr(g)$$

donde $\{x_1, \dots, x_k\} = g^{-1} f^{-1}(y)$

φ_i es una carta local de una vec. de x_i
δ_i " " " " " " " " $g(x_i)$
γ_y " " " " " " " " y
ψ " " " " " " " " $h(y)$ $\square$

por tanto si ρ es una reflexión $D\rho = \rho$ y el campo inducido $\nu' = \rho \circ \nu \circ \rho^{-1}$ en $\partial B_\varepsilon(0)$ $\varepsilon > 0$, $\rho^{-1} = \rho$

y $\therefore$ $\hat{\nu}' = \rho \circ \hat{\nu} \circ \rho^{-1} : \partial B_\varepsilon \longrightarrow S^{n-1}$ $\Rightarrow gr(\hat{\nu}') = gr\rho\ gr\hat{\nu}\ gr\rho$
$= gr\,\hat{\nu}$

Para terminar si $p \in M$ es un punto aislado de singularidades de ν sea $\varphi_0 ; \varphi_1 : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 2 cartas coordenadas, sea $\nu_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el campo inducido por ν en $\mathbb{R}^n$ por la carta φ_0 y ν_1 el inducido por φ_1 entonces $h = \varphi_1 \varphi_0^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo y

$$\nu_1(x) = D_{h^{-1}(x)} \varphi_1 \varphi_0^{-1}\ \nu_0(h^{-1}(x)) = (D_{h^{-1}(x)} h)\, \nu_0(h^{-1}(x))$$

p.d. $I(\nu_0, \varphi_0(p)) = I(\nu_1, \varphi_1(p))$, podemos suponer que $h(0) = 0$ utilizando 2 traslaciones, de la proposición 1.13 pg.13 h es suavemente isotópico a la Id o ρ donde ρ es una reflexión sea $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ esta isotopía entonces sea $\nu_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\nu_t(x) = \left(D_{H_t^{-1}(x)} H_t\right)\left(\nu \circ H_t^{-1}(x)\right)$$

entonces $\nu_t(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (si p es singularidad de ν) es una homotopía de ν_0 a ν_1 así sea $\partial B_\delta(0)$ entonces

$\hat{\nu}_t : \partial B_\delta(0) \longrightarrow S^{n-1}$ me determina una homotopía de $\hat{\nu}_0$ a $\hat{\nu}_1$ o a $\rho \hat{\nu}_1 \rho^{-1}$,

$\therefore \; gr(\hat{\beta}_0) = gr(\hat{\beta}_1)$ ◻

así $I_v(P)$ está bien definido para cada punto $P \in M$.

CAPITULO IV

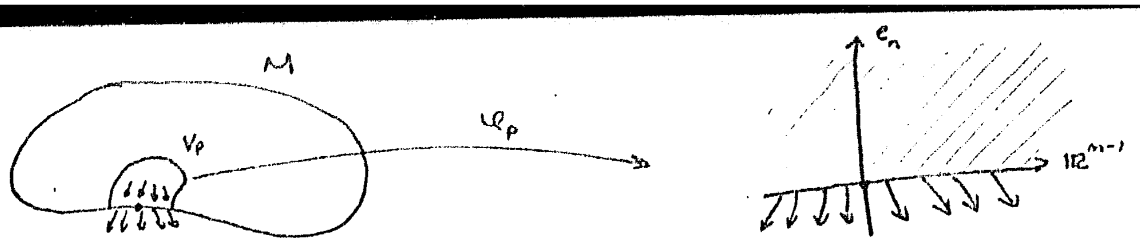
TEOREMA DE POINCARE - HOPF

. En este capítulo demostraremos la generalización del teorema del índice de Poincaré. A grandes rasgos lo que se hará será lo siguiente:

dada M una variedad compacta orientable de dimencion m entonces M la podemos encajar en algun $\mathbb{R}^q$ para alguna q (ver Diferential topology by M.W. Hirsh teorema 3.4 pg 23) entonces $\forall\ x \in M$ $T_xM \subset \mathbb{R}^q$ y por tanto, un campo vectorial ν sobre M está determinado por una funcion $\nu: M \longrightarrow \mathbb{R}^q$ donde para cada $x \in M$ $\nu(x) \in T_xM$, si las singularidades de ν son aisladas se modificará el campo en una vecindad de cada singularidad sin alterar la suma de los indices de estas de manera que el campo obtenido tenga al cero como valor regular lo cual facilita el calculo del indice en cada cero, luego se extenderá este campo a un campo en una vecindad tubular el cual se anula solo en los ceros del campo original y se probará que en este campo la suma de los indices es igual al grado del mapeo definido por la restricción del campo a la frontera de la vec. tubular de M (M_ε) normalizada como función de $\partial M_\varepsilon \longrightarrow S^{q-1}$.

Por ésto empezaremos con algunos resultados parciales en campos vectoriales sobre n-variedades con frontera encajadas en $\mathbb{R}^n$:

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una n-variedad compacta orientable con frontera sea $\nu: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable, diremos que $\nu|_{\partial M}$ "apunta hacia afuera" cuando para cada $p \in \partial M$ si V_p es una vecindad coordenada con carta $\varphi_p: V_p \longrightarrow \mathbb{R}^m_+ = \{(x_1,\dots,x_m) \mid x_m \geq 0\}$ entonces el campo inducido en $\mathbb{R}^m_+$ $\nu' = d\varphi_p \circ \nu|_{V_p} \circ \varphi_p^{-1}: \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que para cada $a \in \partial\mathbb{R}^n_+$ $\nu'(a) \cdot e_n < 0$, esto es lo mismo que pedir que el campo no sea tangente a ∂M y ademas que si $w_1, \dots, w_{m-1}$ es una base de $T_x\partial M$ positi[va] entonces $w_1, \dots, w_{m-1}, \nu(x)$ es una base de T_xM negativamente orientada



esto no depende de la carta elegida ya que: si $\varphi_1, \varphi_2 : V_p \to \mathbb{R}^m_+$ son 2 cartas y $\nu_1(x) = d\varphi_1(\nu \circ \varphi_1^{-1}(x))$ $\nu_2(x) = d\varphi_2(\nu \circ \varphi_2^{-1}(x))$ son los campos inducidos por φ_1 y φ_2 en $\mathbb{R}^n_+$ se tiene entonces

$\nu_1(x) = d\varphi_1 \varphi_2^{-1} \circ (\nu_2 \circ \varphi_2 \varphi_1^{-1}(x))$ asi si $\nu_2 = (v_1, \dots, v_m)$ => $\forall x \in \mathbb{R}^{n-1} \times 0$ $\nu_2(x) \cdot e_1 < 0$ y $d\varphi_1 \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es tal que $e_1, \dots, e_{m-1}$ la manda en una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$

∴ en terminos de la base $e_1, \dots, e_n$ $d\varphi_1\varphi_2^{-1} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{matrix} \\ 0 \dots 0 & a_m \end{pmatrix}$

y $\det A > 0$ ∴ $a_m > 0$ y $\nu_1(x) \cdot e_n = a_m \cdot v_m > 0$ si $v_m > 0$

de aqui la siguiente proposición es inmediata

<u>Proposicion 4.1</u> si $\nu, \nu' : M \to \mathbb{R}^m$ son 2 campos vectoriales tales que en ∂M apunten hacia afuera entonces $\nu'|_{\partial M}$ es homotópico a ν.

<u>dem.</u> usando $H : I \times \partial M \to \mathbb{R}^n$
$H(t, x) = t\nu'(x) + (1-t)\nu(x)$ □

<u>Proposición 4.2</u> si $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ no se anula en ∂M y tiene un numero finito de singularidades $S = \{P_1, \dots, P_k\}$ entonces $\sum_{i=1}^{k} I_\nu(P_i) = gr(\hat{\nu}|_{\partial M})$

<u>Dem.</u> sea $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - P_1\|^2$ entonces $\mathbb{R} - 0$ son valores regulares de f, como $P_1 \in \mathring{M}$ $\exists$ $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(P_1) \subset \mathring{M} - S$ entonces $M_1 = \{x \in M$ tal que $f(x) \geq \varepsilon_1\}$ es una variedad con frontera $\partial M_1 = \partial M \cup \partial B_{\varepsilon_1}(P_1)$
(ver Diferential topology Gillemin - Pollack pg. 62), tomando ε_1 ∋ $\bar{B}_{\varepsilon_1}(P_1) \cap \{P_1, \dots, P_k\} = P_1$ ent. $M_1 = M - \mathring{B}_{\varepsilon_1}(P_1)$ procediendo por induccion se obtiene $M_k = M - \bigcup_{i=1}^{k} \mathring{B}_{\varepsilon_i}(P_i)$ donde $\bar{B}_{\varepsilon_i} \cap \bar{B}_{\varepsilon_j}(P_j) = \phi$ $i \neq j$ es una n-variedad compacta con frontera igual $\partial M \cup (\bigcup_{i=1}^{k} \partial B_{\varepsilon_i}(P_i))$

y $\nu|_{M_k} : M_k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo que no se anula, así $\hat{\nu} : \partial M_k \longrightarrow S^{m-1}$ se extiende a todo M_k y por el lema 3.2 $gr(\hat{\nu}) = 0$ pero $gr(\hat{\nu}) = gr(\hat{\nu}|_{\partial M}) + \sum gr(\hat{\nu}|_{-\partial B_{\varepsilon_i}(P_i)}) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} I_\nu(P_i) = gr(\hat{\nu}|_{\partial M})$$

$\square$

<u>Definición 4.3</u> $P \in M$ es un cero no degenerado de ν si $d_{P_i}\nu$ es no singular.

En lo que sigue probaremos que podemos considerar solo campos con singularidades no degeneradas.

Sea $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ abierto) un campo con una singularidad en P sea $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tal $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y $\overline{B}_{\varepsilon_2}(P) \subset U$ consideremos una función $\mu : \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1]$ que se anula en $\mathbb{R}^m - \mathring{B}_{\varepsilon_2}(P)$ y vale 1 en $B_{\varepsilon_1}(P)$ (por ejemplo $\beta\left(\frac{\|x\|^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}\right)$ β como en pg 28) sea $s = \min\{\|\nu(x)\| \mid x \in B_{\varepsilon_2} - \mathring{B}_{\varepsilon_1}\}$ como $\nu(P) = 0$ sea $y \in \mathbb{R}^m$ un valor regular de ν tal que $y \in B_{s/2}(0)$, ahora sea $\nu' = \nu - \mu \cdot y$ entonces ν' se anula cuando $\nu = \mu \cdot y$ pero $\|\mu \cdot y\| \leq \|y\| < s$ $\therefore$ ν' no se anula en $B_{\varepsilon_2} - \mathring{B}_{\varepsilon_1}$ por tanto ν' se anula solo en B_{ε_1} pero $\nu'(x) = \nu(x) + y$ $\forall x \in B_{\varepsilon_1}$ $\Rightarrow 0 = \nu'(x) \Leftrightarrow x \in B_{\varepsilon_1}$ y $\nu(x) = y$ y $d_x\nu' = d_x\nu$ $\forall x \in \mathring{B}_{\varepsilon_1}(P)$ y $\therefore$ si q es tal que $\nu'(q) = 0 \Rightarrow$ $d_q\nu'$ es no singular y $\sum_{q \in \nu'^{-1}(0)} I_{\nu'}(q) = gr(\hat{\nu}'|_{\partial B_{\varepsilon_1}(P)}) = I_P(\nu)$

con esto tenemos que si $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $M \subset \mathbb{R}^m$ m-variedad es un campo con un numero finito de singularidades entonces haciendo lo anterior en cada punto singular de ν podemos obtener un campo $\nu' : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con un numero finito de singularidades y ademas estas son no degeneradas y es tal que $\sum_{P_i \in \nu^{-1}(0)} I_\nu(P_i) = \sum_{P_i' \in \nu'^{-1}(0)} I_{\nu'}(P_i')$.

$\dashv$

Esto nos facilitó el cálculo del índice de un cero en términos de la diferencial del campo en el punto dado por el siguiente lema:

Lema 4.4 Si $v: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ abierto) es un campo con un único cero en $p \in U$ no degenerado entonces

$$I_v(p) = \frac{\det d_p v}{|\det d_p v|}$$

dem. podemos suponer $p = 0$ y U convexo y $v|_U$ es difeomorfismo

en el capítulo I se probó $\exists\ H: U \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una isotopía con $H_0 = v$ $H_1 = Id$ o ρ $\left(= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}\right)$ según si $\det d_0 v \gtrless 0$

y era tal que $H_t(0) = 0$ $\forall t \in I$ de manera que $\exists \delta > 0$ tal $\hat{H}_t : \hat{B}_\delta(0) \longrightarrow S^{n-1}$ es una homotopía de $\hat{v}|_{\partial B_\delta(0)}$ a $Id|_{\partial B_\delta}$ o $\rho|_{\partial B_\delta}$ y $\therefore$ $gr(\hat{v}/_{\partial B_\delta}) = 1$ o -1 dependiendo si $H_0 = id$ o ρ respectivamente ■

Pasando a variedades sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad de dim. m compacta orientable y $v: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable;

Lema 4.5 Si p es un cero no degenerado de v entonces $\operatorname{Im} d_p v = T_pM$ y $d_p v: T_pM \longrightarrow T_pM$ es un automorfismo y $I_v(p) = 1$ o -1 según si $\det(d_p v)$ es >0 o <0.

dem. sea $h: \mathbb{R}^m \longrightarrow V_p \subset M$ una parametrización de una vecindad de p podemos suponer $h^{-1}(p) = 0$ sea $v': \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ el campo inducido por v mediante dh^{-1} $v' = (v'_1, \dots, v'_m)$ por el lema 4.4

$$I_p(v) = \text{signo} \det d_0 v' = \text{signo} \det \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$$

sea $t_i(u) = d_{h^{-1}(u)} h\,(e_i)$ $u \in V_p$ entonces $v(u) = \sum_{i=1}^{m} v'_i(h^{-1}(u))\, t_i(u)$

como $t_i(u) = d_{h^{-1}(u)} h\,(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} h\,(h^{-1}(u))$ y $d_u \nu(t_i(u)) = d_u \nu \circ d_{h^{-1}(u)} h\,(e_i)$

$= d_{h^{-1}(u)} \nu \circ h\,(e_i) = \frac{\partial\, \nu \circ h}{\partial x_i}\,(h^{-1}(u))$

en p tenemos $d_p \nu(t_i(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum \nu_j t_j\,(p) = \sum \nu_j(0) \frac{\partial}{\partial x_i} t_j \circ h\,(0) + \sum^m \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i} t_j$

$$= \sum^m \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i}(0)\; t_j(p)$$

$$\therefore\ \det(d_0 \nu) = \det\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial x_i}\right) = I_\nu(p) \quad \blacksquare$$

Dada $M \subset \mathbb{R}^m$ una m-variedad compacta orientable se tiene para cada $x \in M$ $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ sea $T_xM^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^m / \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in T_xM \}$ entonces $TM^\perp = \{ (x,v) \in \mathbb{R}^{2m} \mid x \in M \wedge v \in T_xM^\perp \}$ es una n-variedad (ver Diferential topology by Guillemin pg. 71) y la funcion $g: TM^\perp \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $g(x,v) = x + v$ mapea inyectivamente la sección cero en M y es de hecho una inmarción en $M \times 0$ entonces g mapea difeomorfamente una vecindad W de $M \times \{0\}$ en un abierto que contiene a M (ver Stable Mappings and Their singularities by M. Golubitsky prop. 7.3 pg 69) si tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $W_\varepsilon = \{ (x,v) \in W \mid \|v\| \le \varepsilon \}$ entonces $M_\varepsilon = g(W_\varepsilon) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid d(y,M) \le \varepsilon \}$ y ademas si $y = x + v = g(x,v)$ entonces $\|x - y\| = d(y,M)$ esto se tiene porque si $y \in M_\varepsilon \Rightarrow y = g(x,v) = x + v \Rightarrow d(y,M) \le d(y,x) = \|v\| \le \varepsilon$ y ademas si y es tal $d(y,M) \le \varepsilon$ Sea $x \in M$ $\|x - y\| = d(y,M)$ entonces sea $c:(-\delta,\delta) \to M$ una curva tal que $c(0) = x$ entonces la funcion $\mu(t) = \|y - c(t)\|^2$ alcanza un minimo en $t = 0$ y por tanto $\mu'(0) = 0 \Rightarrow (y - c(0)) \cdot c'(0) = 0 \Rightarrow (y - x) \cdot c'(0) = 0$ como $c'(0)$ es arbitrario $\Rightarrow v = y - x \perp T_xM \Rightarrow y = g(x,v)$ $(x,v) \in W_\varepsilon$ $\Rightarrow x$ esta unicamente determinado por la propiedad $d(x,y) = d(y,M)$ asi si definimos la funcion $r: M_\varepsilon \longrightarrow M$ $r(y) = x$ esta bien definida y es diferenciable ya que $r(y) = pr_1 \circ h^{-1}(y) = pr_1(x,v) = x$ y por tanto la funcion $f: M_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(y) = \|y - r(y)\|^2$ es diferenciable como el gradiente de f está dado por

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i} e_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} 2(x_k - r_k(x)) \Big(\frac{\partial x_k}{\partial x_i} - \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \Big) \Big) e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} 2(x_i - r_i(x)) e_i - \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} 2(x_k - r_k(x)) \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \Big) e_i$$

$$= 2(x - r(x)) - \sum_{i=1}^{m} 2(x - r(x)) \cdot d_x r(e_i)$$

$$= 2(x - r(x))$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f = 0 \iff x = r(x) \iff x \in M \iff f(x) = 0$$

$\therefore$ ε es un valor regular y $M_\varepsilon = f^{-1}(-\infty, \varepsilon]$ con $\partial M_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon)$

y el campo $\frac{1}{\varepsilon} \nabla f : \partial M_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo ortonormal a ∂M_ε que apunta hacia afuera.

Si $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo con un numero finito de singularidades que ademas son no degeneradas consideremos el siguiente campo definido en M_ε:

$$\mu : M_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \mu(x) = x - r(x) + \nu(r(x)) \quad \text{como } \nu(r(x)) \in T_x M$$

y $x - r(x) \in T_x M^{\perp}$ $\Rightarrow$ $\mu(x) = 0 \iff x = r(x)$ y $\nu(r(x)) = \nu(x) = 0$

ademas $\mu|_M = \nu$ entonces μ es un campo que extiende a ν sin aumentar ceros distintos de los de ν ademas $\forall x \in \partial M_\varepsilon$ $\langle \mu(x) ; \nabla f(x) \rangle$

$= \|x - r(x)\|^2 = \varepsilon^2 > 0$ por tanto μ apunta hacia afuera y por 4.2

$$\sum_{i=1}^{k} I_\mu(p_i) = gr\Big(\tfrac{1}{\varepsilon} \nabla f \big|_{\partial M_\varepsilon} \Big) \quad \text{donde } \{p_1, \dots, p_k\} = \nu^{-1}(0) = \mu^{-1}(0).$$

y como $T_{p_i} M_\varepsilon = T_{p_i} M \oplus T_{p_i} M^{\perp}$ si $i_1 : \underset{x}{M} \hookrightarrow \underset{x}{M_\varepsilon}$ $\quad i_2 : \underset{y}{T_{p_i} M^{\perp}_\varepsilon} \longrightarrow \underset{y}{M_\varepsilon}$

y $d_{p_i}\mu \big|_{T_{p_i} M} = d_{p_i}\mu \circ d_{p_i} i = d_{p_i}(\mu \circ i) = d_{p_i}\nu$

y $d_{p_i}\mu \big|_{T_{p_i} M^{\perp}} = d_{p_i}\mu \circ d_{p_i} i_2 = d_{p_i}(\mu \circ i_2) = d_{p_i}(i_2)$ ya que $\mu \circ i_2(y) = y$

$\Rightarrow$ $d_{p_i}\mu = d_{p_i}\nu \oplus Id_{T_{p_i} M^{\perp}}$ $\therefore$ p_i es no degenerado y

$$I_{p_i}(\mu) = \text{signo}\big(\det d_{p_i}\mu\big) = \text{signo}\big(\det d_{p_i}\nu\big) = I_{p_i}(\nu)$$

$$\therefore \ gr\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\nabla f\right) = \sum_{i=1}^{k} I_p(P_i)$$

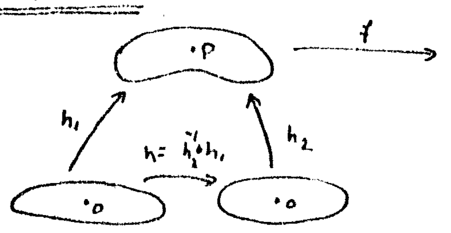
4.5.1 por tanto $\sum_{i=1}^{k} I_p(P_i)$ es independiente del campo vectorial y solo depende de la variedad.

Resta identificar el numero $gr(\tfrac{1}{\varepsilon}\nabla f)$ lo cual la haremos para un campo particular y ver que coincide con $\chi(M)$ la manera en que se hará es construyendo un "campo gradiente" $grad(f)$ de una funcion real valuada $f: M \to \mathbb{R}$, este campo tendrá como singularidades los puntos singulares de f los cuales seran no degenerados si condicionamos a f a ser "no degenerada", se definirá el indice de una función en un punto singular y se relacionara con el indice de $grad f$ en el punto y usando teoria de Morse se probará que la suma de estos es $\chi(M)$.

Sea $f: M \to \mathbb{R}$ diferenciable con $M \subset \mathbb{R}^n$ una m-variedad compacta encajada en $\mathbb{R}^n$ si P es un punto singular de f entonces sea $h: \mathbb{R}^m \to N_p$ una parametrización de una vec. de P denotaremos $\tilde{f} = f \circ h$ $h^{-1}(P) = 0$ y si P es singular se tiene $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

<u>definición 4.6</u> un punto critico P de f es no degenerado si la matriz
$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} \quad \text{es no singular}$$

<u>Proposición 4.7:</u> la definición anterior no depende del sistema de coordenadas,



en efecto si h_1, h_2 son param.

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = f \circ h_1(x_1, \dots, x_m)$$
$$\tilde{f}'(x_1', \dots, x_m') = f \circ h_2(x_1', \dots, x_m')$$
$$y \quad h = h_2^{-1} \circ h_1 = (h_1, \dots, h_m)$$
$$h_1(0) = h_2(0) = P$$

entonces se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{1\le i,j\le m} = \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(0)\right)^{T}_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le m}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}'}{\partial x_j' \partial x_k'}(0)\right) \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le j\le m}}$$

$*$

como $\left(\frac{\partial h_\ell}{\partial x_i}(0)\right)_{\substack{1\le \ell\le m\\ 1\le i\le m}}$ es un isomorfismo se sigue

que $\left(\frac{\partial^2 \bar f'}{\partial x_i'\partial x_j'}(0)\right)$ es no singular $\iff$ $\left(\frac{\partial^2 \bar f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)$ es no singula

∎

tambien en un punto singular P se tiene asociada una forma cuadratica usando un sistema de coordenadas cuya matriz representante es $= \left(\frac{\partial^2 \bar f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ y la forma cuadratica $H(f):\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ está dado por $H(f)(y) = y^t\cdot\left(\frac{\partial^2 \bar f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)\cdot y$

<u>definición</u> 4.8 llamaremos el Indice de f en P como la dimensión del espacio donde $H(f)$ es negativamente definida.

Esta definición no depende de las cartas coordenadas ya que si h_1 y h_2 son param. de una vec. de P $\bar f = f\circ h_1$, $\bar f' = f\circ h_2$ de $*$ en prop 4.4 si $H'(f)$ es la forma cuadrática en las coordenadas de h_2 se tiene

$$H(f)(y) = y^t\cdot\left(\frac{\partial \bar f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)\cdot y = y^t\cdot\left(D_0 h_2^{-1}\circ h_1\right)^t\left(\frac{\partial \bar f'}{\partial x_i'\partial x_j'}(0)\right)\left(D_0 h_2^{-1}\circ h_1\right)\cdot y$$

$$= H'(f)\left(\left[D_0 h_2^{-1}\circ h_1\right] y\right) \Rightarrow$$ si V es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ donde $H'(f)$ es negativamente definido entonces $(D_0 h_1^{-1}\circ h)(V)$ es el espacio en $\mathbb{R}^n$ donde $H(f)$ es negativamente definida y por tanto tienen la misma dimension.

Lo denotaremos como $I_p(f)$.

Consideremos en M la métrica Riemanniana inducida por la métrica en $\mathbb{R}^n$ y la denotaremos por $\langle\ ,\ \rangle_p$ $p\in M$. Entonces para cada $p\in M$ definimos $\operatorname{grad} f(p) \in T_pM$ como el unico vector tal que $\forall\ v\in T_pM$ $\langle v, \operatorname{grad} f(p)\rangle_p = d_pf(v)$ este vector siempre existe ya que $d_pf \in T_pM^*$ y esta asignación $v \longmapsto \langle -, v\rangle$ es un isomorfismo de T_pM a T_pM^*

además en una vecindad coordenada V_p paramétrizada por $h: \mathbb{R}^m \to V_p$ si $v_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$ $\operatorname{grad} f(h(x)) = \sum_{j=1}^{m} b_j(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x)$ se tiene que $\langle v_i , \operatorname{grad} f(h(x)) \rangle_{h(x)} = \sum_{j=1}^{m} \langle \frac{\partial h}{\partial x_i}(x), \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \rangle b_j(x)$
$= \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x)\, b_j(x) = d_{h(x)} f \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \right)$ pero $(d_{h(x)} f)\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right) =$
$= \frac{\partial f \circ h}{\partial x_i}(x)$, y g_{ij} son los coeficientes de la métrica con respecto al sistema de coordenadas h, $g_{ij} = \langle \frac{\partial h}{\partial x_i}, \frac{\partial h}{\partial x_j} \rangle$ así, ai $(g^{ij})_{1 \le i,j \le m} = (g_{ij})^{-1}_{1 \le i,j \le m}$ se tiene

$b_i(x) = \sum_{j=1}^{m} g^{ij}(x) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}(x)$ las cuales son diferenciables por tanto $\operatorname{grad} f$ es un campo diferenciable y $\operatorname{grad}(f)(h(x)) = 0 \Leftrightarrow b_i(x) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x) = 0$ $\forall\, i = 1, \dots, m$, además como el campo inducido en $\mathbb{R}^m$ por $\operatorname{grad}(f)$ mediante ~~la~~ parametrización h, está dado por $\nu(x) = (b_1(x), \dots, b_m(x))$. Si $p = h(0)$ es un punto singular de $f \Rightarrow$ por lo anterior $\operatorname{Grad}(f)(p) = 0$ además

$$D_0 \nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial b_1}{\partial x_m}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial b_m}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial b_m}{\partial x_m}(0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{m} g^{ik}(x) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(x) \right) \Big|_0 \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_j}(0) \overbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(0)}^{0} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_j \partial x_k}(0)\, g^{ik}(0) \right] \right)_{1 \le i,j \le m}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} g^{ik}(0) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_j \partial x_k}(0) \right)_{1 \le i,j \le m}$$

$$= \left(g^{ik}(0) \right)_{1 \le i,k \le m} \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{1 \le j,k \le m}$$

$\Rightarrow D_0 \nu$ es no singular $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$ es no singular $\Leftrightarrow$ P es un punto singular no degenerado de f, entonces

P es así, $grad(f)$ tiene una singularidad no degenerada en P y por tanto $I_{grad(f)}(P) = $ signo $\det(D_0 V)$ (ver 4.3) y además signo $(\det(D_0V)) = $ signo $\left(\det\left(g^{ij}\right)_0 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)\right)$ como $\left(g_{ij}(0)\right)_{1 \le i,j \le m}$ es la mātriz que representa la métrica en T_pM, es positivo definida y su determinante es positivo por tanto signo $(\det(D_0 V)) = $ signo $\left(\det\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)\right)$

4.9 ... y $\therefore$ $I_{grad(f)}(P) = (-1)^{I_p(f)}$.

4.10 Ahora probaremos que dado $M \subset \mathbb{R}^n$ una m-variedad encajada $\exists$ $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ con singularidades no degeneradas.

dem. sea M_ε una vecindad tubular de M en $\mathbb{R}^n$ (ver pg 61) y sea $y \in \mathbb{R}^n - M$ consideremos la función $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(P) = \|y - P\|^2$, esta función es diferenciable en M ya que lo es en $\mathbb{R}^n$, y si $h: \mathbb{R}^m \rightarrow V_p$ es una parametrización de una vecindad de P en M entonces $\hat{f}(x) = \|y - h(x)\|^2$.

entonces P es un punto singular de f $\iff$ $\nabla \hat{f}(0) = 0$

pero $\nabla \hat{f}(0) = \nabla \left(\sum_{i=1}^{m} (y_i - h_i(x))^2 (0) \right) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{m} (y_i - h_i(x))^2 \right) \right] \bar{e}_k$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} -2(y_i - h_i(0)) \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(0) \right) \bar{e}_k \quad \text{por tanto}$$

$$* \ldots \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(0) = \sum_{i=1}^{m} -2(y_i - h_i(0)) \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(0) = (y - P) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_k}(0)$$

de donde P es punto crítico $\iff$ $y - P$ es ortogonal a T_pM entonces si $v \in T_pM^\perp$ $\|v\| = 1$ consideremos $y(t) = P + tv$ $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

i) $S' = \{ t \mid P + tv \in M \ \ni \ v \perp T_{y(t)}M \}$ es finito

ii) la función $f(x) = \|y(t) - x\|^2$ tiene singularidades degeneradas solo para un numero finito de valores de t.

para probar i) sea $q \in M$ $q = y(t)$ entonces $q + sv \in M_\varepsilon$ $\forall\, |s| \leq \varepsilon$ ademas $\{q + sv \mid |s| \leq \varepsilon\} \cap M = q$ $\Rightarrow$ S es discreto y acotado $\Rightarrow$ que es finito.

para ii) por i f tiene un numero finito de singularidades eligiendo v fijo $\in T_pM^\perp$ y $y(t) = p + tv$ $f(x) = \|y(t) - x\|^2$ y ∇f en terminos de una parametrización $h: \mathbb{R}^m \to V_p$ esta dado en * pg 66 y

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^{m} -2\,(y_i(t) - h_i(x))\,\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(o) = \cdots$$

$$= -2\,(y(t) - h(x)) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_k}(x)$$

y

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_i \partial x_k}(o) = 2\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}(o) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_k}(o)\right) + 2\,(y(t) - h(o)) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_k}(o)$$

$$= 2\left(g_{ik}(o) + (y(t) - p) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_k}(o)\right)$$

$$= 2\left(g_{ik}(o) + \left\langle tv, \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_k}(o)\right\rangle\right)$$

$\Rightarrow$ que la matriz $\left(\dfrac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_i \partial x_k}(o)\right)_{1 \leq i,k \leq m}$ es singular

Solo para un numero finito de valores de t.

$\blacksquare$

Para terminar daremos los siguientes teoremas sin demostración:

<u>Teorema 4.11</u> Si $f: M \to \mathbb{R}$ es una funcion diferenciable con M compacta cuyos puntos criticos son no degenerados entonces M tiene el mismo tipo de homotopia de un complejo CW con una celula de dimensión λ por cada punto critico de indice λ.

(ver Morse theory by. J. Milnor teorema 3.5)

Teorema 4.12 Si X es un complejo CW finito, sea $\mathcal{E}^n$ el numero de n-celulas en X, entonces asociado a la descomposición celular de X se tiene un complejo de cadenas $W(X)$ cuya homologia es isomorfa a $H(X)$ y ademas $W_m(X) = \bigoplus_{i=1}^{\mathcal{E}_m} \mathbb{Z}$.

(ver lectures on Algebraic topology by Albrecht Dold capitulo V definición 1.2 y prop. 4.5)

Teorema 4.13 sea k un complejo de cadenas tal que es finito $\therefore$ $\psi(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$ rango k_i esta bien definido y $\chi(Hk) = \chi(k)$

(ver lectures on Algebraic topology by Albrecht Dold capitulo V proposición 5.2)

teorema 4.14 sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion con singularidades no degeneradas M compacta, sea $\operatorname{grad}(f)$ el campo gradiente de f, entonces si $\{P_1, \cdots, P_k\}$ son los puntos singulares de $\operatorname{grad}(f)$

$$\sum_{i=1}^{k} I_{\operatorname{grad}(f)}(P_i) = \chi(M)$$

Demostración de 4.11 $H(M) \cong H(X)$ con X un complejo CW con una celula de dimension λ por cada punto critico de f de indice λ los cuales coinciden con los puntos criticos de $\operatorname{grad}(f)$, ahora por 4.13

$W_\lambda(X) = \bigoplus_{i=1}^{\mathcal{E}_\lambda} \mathbb{Z}$ $\quad \mathcal{E}_\lambda$ = numero de puntos criticos de indice $I_f(P) = \lambda \Rightarrow I_{\operatorname{grad}(f)}(P) = (-1)^\lambda \Rightarrow$

$$\sum_{P \in \operatorname{grad} f^{-1}(0)} I_{\operatorname{grad} f}(P) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \mathcal{E}_\lambda = \chi(X) = \chi(M) \qquad \blacksquare$$

y $\mathcal{E}_\lambda = 0$ para λ suficientemente grande con esto y 4.5.1 se tiene el siguiente teorema

TEOREMA (Poincaré - Hopf)

sea M una m-variedad compacta orientable y $\nu : M \longrightarrow TM$ un campo vectorial diferenciable con un numero finito de singularidades entonces

$$\sum_{p \in \nu^{-1}(0)} I_\nu(p) = \chi(M)$$

$\blacksquare$

Fin

BIBLIOGRAFIA

Albrecht Dold .

lectures on Algebraic topology . Springer - Verlag

topologia diferencial : Aplicaciónes a teoria de punto fijo . trad. Carlos Prieto

Monografias del Instituto de Matematicas (sin publicar)

Do Carmo , Manfredo P.

Differential Geometry of curves and Surfaces . Prentice - Hall .

Geometria Riemanniana . Proyecto Euclides IMPA

Guillemin , Victor / Alan Pollack .

Differential topology . Prentice - Hall .

Hirsh , M. W.

Differential topology . Springer - Verlag .

Lefschetz , Solomon

Differential equations Geometry Theory . Dover .

Introduction to topology . Princeton University Press .

Massey , William S.

Algebraic topology an Introduction . Springer - Verlag

Milnor , John .

Morse theory . Princeton University Press

topology from differentiable viewpoint . the University Press of Virginia.

Munkres , James R.

topology a first course . Prentice - Hall

Lifshitz , Jaime

Un teorema sobre transformaciones de curvas cerradas sobre si mismas

Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana 1946 pg 21-25

Poincare , Henrie .

Ouvres de Henrie Poincaré tomo 1 "Sur les curves definies par les equations differentielles" chapitre XIII "Distribution de points singuliers" pg 121-125.