

29.12



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Geometría Euclidiana
para Bachillerato.**

TESIS CONJUNTA
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :
MATEMÁTICO
P R E S E N T A N
RAFAEL RAMÍREZ GARCÍA
Y
FERNANDO FABIAN HERNÁNDEZ

MEXICO, D. F.

1984.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE DE MATERIAS

<i>Introducción</i>	1 - 1
<i>Unidad I:</i>	
<i>Redescubriendo las propiedades de las figuras geométricas.</i>	
<i>Primer experimento. Angulos opuestos por el vértice.</i>	1 - 1
<i>Segundo experimento. Angulos interiores de un triángulo.</i> ..	1 - 2
<i>Tercer experimento. Triángulo isósceles.</i>	1 - 3
<i>Cuarto experimento. Triángulo equilátero.</i>	1 - 4
<i>Quinto experimento. Angulo exterior de un triángulo.</i>	1 - 5
<i>Ejercicios.</i>	1 - 6
<i>Ejercicios de la unidad I.</i>	1 - 12
<i>Unidad II:</i>	
<i>La inducción en geometría.</i>	
<i>Primer experimento. Suma de ángulos interiores.</i>	2 - 1
<i>Segundo experimento. Suma de ángulos exteriores.</i>	2 - 4
<i>Tercer experimento. Puntos y segmentos de recta.</i>	2 - 7
<i>Ejercicios.</i>	2 - 10
<i>Ejercicios de la unidad II.</i>	2 - 13
<i>Unidad III:</i>	
<i>Congruencia de triángulos.</i>	
<i>Primer experimento.</i>	3 - 1
<i>Segundo experimento.</i>	3 - 2
<i>Tercer experimento.</i>	3 - 4
<i>Cuarto experimento.</i>	3 - 6
<i>Quinto experimento.</i>	3 - 7
<i>Sexto experimento. El problema de la fuente.</i>	3 - 10
<i>Séptimo experimento. El problema de Tales de Mileto.</i>	3 - 15
<i>Ejercicios.</i>	3 - 19
<i>Construcciones geométricas.</i>	3 - 25

1a. construcción. Bisección de un ángulo.....	3 - 28
2a. construcción. Bisección de un segmento.....	3 - 31
3a. construcción. La perpendicular.....	3 - 33
Ejercicios.....	3 - 35

Unidad IV:

Semejanza de triángulos.

1. La escala.....	4 - 1
2. La razón de proporcionalidad.....	4 - 4
3. Los lados proporcionales.....	4 - 7
4. Los ángulos en un plano a escala.....	4 - 15
5. El fraccionamiento.....	4 - 24
Resumen.....	4 - 26
Ejercicios.....	4 - 30
6. La altura del edificio.....	4 - 34
7. El monumento.....	4 - 38
Ejercicios de triángulos semejantes.....	4 - 41
Problemas de semejanza.....	4 - 44
Ejercicios.....	4 - 51
1a. construcción. División de un segmento en tres -- partes iguales.....	4 - 53
2a. construcción. Construye un segmento que sea el pro- ducto de otros dos dados.....	4 - 55
3a. construcción. Construye un segmento cuya longitud -- sea el cociente de dos segmentos dados.....	4 - 57
Ejercicios.....	4 - 59

Unidad V:

El teorema de Pitágoras.

El problema de la escalera.....	5 - 1
Una demostración del teorema de Pitágoras.....	5 - 2

Problemas resueltos.....	5 - 6
Ejercicios.....	5 - 17
Problemas sobre congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.....	5 - 19

Unidad VI:

Trigonometría.

1. Problemas que involucran triángulos.....	6 - 1
2. Resolución por medición directa.....	6 - 5
3. Errores en la medición directa.....	6 - 9
4. Diversos problemas que se pueden presentar en un triángulo.....	6 - 11
5. Triángulos rectángulos.....	6 - 13
6. Los cocientes.....	6 - 17
7. Las razones trigonométricas.....	6 - 20
8. Las tablas.....	6 - 22
9. Uso de las tablas trigonométricas.....	6 - 31
10. Determinación de los lados de un triángulo rectángulo, conociendo un ángulo y un lado.....	6 - 37
11. Determinación de los ángulos de un triángulo rectángulo, conociendo los lados.....	6 - 41
12. Razones trigonométricas recíprocas.....	6 - 44
13. Otras identidades trigonométricas.....	6 - 49
14. Relaciones Pitagóricas.....	6 - 51
15. Triángulos no rectángulos [parte uno].....	6 - 53
16. Triángulos no rectángulos [parte dos].....	6 - 61
17. El círculo trigonométrico.....	6 - 66
18. Ángulos mayores de 90°	6 - 70
19. Ley de los senos.....	6 - 81
20. Ley de los cosenos.....	6 - 88

Unidad VII:

Áreas.

1. Introducción.....	7 - 1
----------------------	-------

2. Unidades de medida.....	7 - 2
3. Area del cuadrado.....	7 - 5
4. El Area del rectángulo.....	7 - 11
5. Area del triángulo.....	7 - 15
6. Areas de otros polígonos.....	7 - 25
7. Otras demostraciones del teorema de Pitágoras.....	7 - 35
8. Areas de figuras semejantes.....	7 - 42
9. Areas de polígonos irregulares.....	7 - 50
10. Area del círculo.....	7 - 54
11. Area de regiones irregulares.....	7 - 68

Unidad VIII:

La circunferencia.

1. Radio perpendicular a una cuerda.....	8 - 1
2. El punto medio de una cuerda.....	8 - 3
3. Circunferencias que pasan por dos puntos dados.....	8 - 6
4. Circunferencias que pasan por tres puntos no-colineales.....	8 - 9
5. Angulo inscrito y ángulo central.....	8 - 11
6. Angulo opuesto al diámetro.....	8 - 16
7. La tangente.....	8 - 20
8. Tangentes a la circunferencia desde un punto fuera de ella.....	8 - 22
9. Ejercicios.....	8 - 24

Apendice:

1. Tabla trigonométrica para el seno.....	A - 1
2. Tabla trigonométrica para el coseno.....	A - 11
3. Tabla trigonométrica para la tangente.....	A - 21

Bibliografía.....	B - 1
-------------------	-------

INTRODUCCION.

La problemática que enfrenta la enseñanza de las matemáticas debe -- ser reflexionada en forma global y de acuerdo a los objetivos particula-- res de formación requerida para los alumnos y no como un trabajo aislado en el cual bajo ciertos contenidos, predeterminados se busque solamente en contrar mejores métodos de enseñanza apoyados principalmente en técnicas didácticas o en nuevas formas de presentación de los temas.

Pensamos que el trabajo de reestructuración del plan global no puede y no debe ser aboradado por un grupo reducido, sino que debe ser parte de un trabajo conjunto.

Bajo este supuesto, pensamos que es indispensable que cada profesor previamente haya reflexionado, analizado y en consecuencia tenga claramen-- te delimitados algunos aspectos básicos relacionados con su quehacer do-- cente; por ejemplo, de acuerdo a los objetivos de la institución y en par-- ticular del área a la que pertenece, debe conocer y poderse responder por qué y para qué enseña tal o cual cosa; cuál ha sido la experiencia y re-- sultados de otras instituciones y quizás de otros países al impartir de-- terminados contenidos; estar consciente de los tropiezos que se han teni-- do en el transcurso de la historia al estudiar un concepto o tema determi-- nado; etc.

Esto le permitirla, ya sea al impartir su clase, al elaborar o utili-- zar materiales, o al realizar investigaciones, ubicar estas actividades - dentro del contexto de lo que pretende la institución, pero también, es-- tar consciente de una serie de dificultades que tienen los alumnos al -- aprender algunos conceptos o temas.

Por lo anterior, para la realización de este trabajo seguimos los siguientes pasos:

a) Presentación y lectura del material que para la materia hablamos escrito hasta antes de empezar la tesis.

b) Lectura y análisis de diversos materiales: entre estos materiales se encuentran los que hablan de la creación del C.C.H., de la historia de la geometría, de los diferentes puntos de vista sobre la enseñanza de la geometría, de los diferentes niveles de rigor al hacer geometría, del porqué se ha omitido la geometría Euclidiana en otros países, así como materiales y libros sobre geometría.

c) En base a los dos pasos anteriores y aunado a la experiencia que tenemos en la docencia delineamos el contenido del material que estamos presentando.

d) Elaboración propiamente del material.

Una vez terminado el trabajo hemos reflexionado acerca del mismo.

Nos hemos dado cuenta que en general para la elaboración de material didáctico de cualquier nivel [primaria, secundaria, bachillerato, profesional] un camino a seguir puede ser el siguiente:

i) Estudio de la historia de la civilización.

Se debe estar consciente del porqué el hombre en cierto momento tiene de agruparse (dejando de ser nómada) y en este sentido a requerir de procesos mentales que le ayuden a vivir mejor.

Uno de los objetivos de este estudio radica en el hecho de conocer cómo es que nace cierta disciplina [matemáticas, lenguaje, química, física, etc.].

ii) Estudio del desarrollo de la disciplina en particular.

En más de una ocasión hemos tendido a querer impartir un determinado conocimiento sin reflexionar que históricamente pasaron varios siglos antes de obtenerlo.

Debemos dejar claro que no siempre se puede planear un curso en forma histórica, sin embargo estos datos ayudan mucho.

iii) Estudio del desarrollo de los sistemas escolarizados.

¿Cuándo, cómo, quiénes, por qué se transmite la cultura?. Estas son algunas de las preguntas que se deben plantear para estar conscientes del trabajo a desarrollar.

iv) La impartición de la asignatura en diferentes países.

Cada país tiene su forma y sus metas al impartir cierta asignatura, incluso los alumnos tienen bases específicas al abordar un tema.

v) Estudios de los objetivos de la institución para la cual va dirigido - el material.

Por decir algo, si todos los sistemas de bachillerato tuvieran los mismos objetivos, no sería necesario que existieran todos ellos, bastaría con un bachillerato único.

Los cinco pasos que hemos planteado tienen como objetivo fundamental que la persona interesada se SENSIBILICE, esto es, que al impartir un - - cierto material tenga presente un esquema global y no que al desarrollar un cierto trabajo se vea la problemática en forma parcial.

En particular nosotros creemos que la sensibilización que adquirimos al preparar la tesis fue entre otras cosas, lo más importante.

Antes de concluir esta explicación, queremos dejar claro, que si - - bien, en la elaboración del material trabajamos un número reducido de gentes, este ha sido pensado como parte de un todo.

Creemos que la forma de trabajo aquí planteada puede servir de base, para dar pie a que se continúe con la producción de los profesores, pero de una manera mejor organizada.

El trabajo que presentamos pensamos es un buen ejemplo de cómo se -- puede abordar la problemática que plantea la enseñanza de las matemáticas.

1. En el plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, el tercero de cuatro semestres que son comunes para todos los alumnos, está -- destinado, dentro del área de Matemáticas, a impartir Geometría.

Tanto los propósitos como los contenidos de esta materia, han ido -- sufriendo en el transcurso del tiempo, diversas modificaciones.

En un principio, la intención primordial del curso, era que el alumno conociera la estructura de una teoría axiomática y su funcionamiento, así como que adquiriera una visión global de diversas teorías; por ello, los temas que contenía el programa de este semestre, en 1973, eran los -- siguientes:

1. Teoría de Gráficas
2. Geometría Euclidiana
3. Geometría Analítica
4. Geometría no-Euclidiana

Sin embargo, en la práctica, lo que sucedió es que no se alcanzaban los propósitos, no sólo porque no llegaban a cubrirse todos los contenidos, pues en sí era un programa extenso, sino también, porque en general no se entendió dentro del propósito del curso, el porqué de cada uno de -- los temas y la relación entre ellos.

Con teoría de gráficas se pretendía que el alumno, a través del estudio y análisis de problemas sencillos y atractivos, descubriera patrones de comportamiento general y de ahí se derivaran por necesidad la construcción de definiciones, axiomas, teoremas, formas de demostración, etc., -- cuidando siempre que no se perdiera de vista la relación entre realidad, -- modelo y teoría.

A partir de la construcción de esta teoría como ejemplo, se preten--

da analizar en la misma forma las otras teorías propuestas en el temario.

Lo que en la práctica resultó en muchos casos, fue que los temas se impartían como algo aislado y que el desarrollo de cada uno de ellos fuera dado con enfoques aun contradictorios.

Por ejemplo, después del desarrollo de la teoría de gráficas mencionado anteriormente, la geometría euclídiana se impartía siguiendo el texto de Euclides rompiendo así el propósito original.

Pensamos que uno de los problemas para llevar a la práctica este - - planteamiento, fue la carencia de material para los demás temas.

Por otra parte, aunque creemos que el planteamiento es correcto en el sentido de que recoge la problemática esencial de las matemáticas, como los alumnos carecen de una experiencia previa, el enfoque pierde riqueza.

Esto es, la fundamentación de las matemáticas tiene sentido, una vez que se ha trabajado con los objetos que se desea formalizar.

Creemos que el esquema puede ser válido, pero adecuándolo a las condiciones reales del alumno.

2. En los años siguientes, se modificaron los programas, de tal suerte, - que, en particular en el Plantel Oriente se optó por no seguir impartiendo el tema teoría de gráficas, y tampoco hablarles de otras geometrías; - el 3er. semestre, entonces, se destinó únicamente a geometría euclídiana, y su enseñanza se basaba principalmente en utilizar el texto de Euclides.

En general, hemos visto que actualmente en el Colegio, de las diferentes formas en que se imparte la materia de geometría euclídiana, las más usuales son las siguientes:

Primera forma. Esta consiste en seguir al pie de la letra el texto de Euclides.

Segunda forma. De una manera menos clásica, se dan algunas definiciones y se encamina el curso a trabajar en forma práctica, encontrando, por ejemplo, valores de ángulos y de lados en triángulos, usando principalmente un enfoque algebraico.

Tercera forma. Esta combina las dos anteriores, esto es, lo que se hace es definir ciertos elementos que a juicio del profesor son obvios, para que, en base a ellos, se haga una especie de demostración de algunas de las proposiciones de Euclides, combinando a la vez ejercicios algebraicos. En esta tercera forma, ya no se habla de nociones comunes, axiomas y postulados, a cambio se define lo que llaman criterios de congruencia y semejanza.

Pensamos que en cualquiera de estas tres modalidades existe la falla de que no se tiene suficiente claridad sobre lo que se pretende lograr -- con cada una de ellas.

Con respecto a la primera, supuestamente se desea que el alumno maneje una teoría axiomática y se espera que con esto aprenda a razonar, pero lo que en la práctica se obtiene, es a lo más que el alumno reproduzca -- las demostraciones.

Por una parte diremos que el texto de Euclides es un libro organizador y sistematizador de los conocimientos geométricos de su época, esto es, su cometido fue mostrar que la geometría puede ser objeto de un desarrollo axiomático, sin embargo como los alumnos carecen de una experiencia geométrica deductiva, no entienden el porqué de las demostraciones; a

manera de ejemplo mencionemos la segunda proposición del primer libro de Euclides, en la cual el alumno no ve la necesidad de la construcción y -- posteriormente la demostración de que un segmento se puede trasladar, -- cuando él lo puede hacer utilizando su compás.

La segunda forma tiene como objetivo que el alumno aplique los conceptos geométricos a problemas prácticos. Esta forma se va al otro extremo, aquí lo que se busca es desaparecer las demostraciones y en su lugar dejar ejercicios meramente numéricos, de cierta manera se persigue que -- el alumno memorice definiciones y que las use en ejercicios algebraicos.

En realidad, en esta segunda forma, lo que se está haciendo es considerar la geometría como extensión del curso de álgebra. En este sentido lo más que logrará el alumno, es reafirmar sus conocimientos algebraicos, en caso de que los tenga.

La tercera forma coincide con la primera en el sentido que toma como camino el desarrollo axiomático, usando en lugar de los axiomas de -- Euclides, axiomas propios, como los de congruencia y semejanza de triángulos.

3. Al principio de estas notas, dijimos que la problemática que enfrenta la enseñanza de las matemáticas debe ser abordada en forma global y de -- acuerdo a los objetivos particulares de formación requerida para los -- alumnos, en este sentido nosotros pensamos que el mayor inconveniente a nivel bachillerato, es impartir la matemática como algo terminado.

Por lo anterior, creemos que lo más conveniente para la formación --

del alumno, es que éste, reproduzca el quehacer de la humanidad al hacer matemáticas.

La humanidad no comienza, en el ámbito matemático, dando definiciones, axiomas, postulados, etc., sino que, en un principio manipula conocimientos en forma empírica, posteriormente se da cuenta que ciertos algoritmos [recetas] le ayudan a resolver sus problemas; en un siguiente intento, organiza esos conocimientos, para que finalmente los sistematice y fundamente, dando con esto inicio a la axiomatización.

Es por esto, que planteamos que el alumno primeramente debe manipular los objetos de conocimiento, para que posteriormente vaya aprendiendo a ser crítico, esto es, que busque mayores y mejores explicaciones -- del desarrollo matemático. En esa búsqueda aprenderá que existen diferentes niveles de conocimientos [de rigor matemático].

Creemos que al finalizar un curso con estos lineamientos, el alumno ya estará capacitado para entender lo que es una demostración. Comprenderá que las matemáticas no son arbitrarias, que siguen reglas y que en base a éstas, se pueden fundamentar mejor los conocimientos posteriores.

En otras palabras, creemos que al finalizar el curso, ya entenderá lo que es una teoría axiomática o bien, que ya podrá empezar a estudiar de una manera formal una teoría axiomática.

En particular, nosotros hemos desarrollado un material para un curso de Geometría Euclídea; debemos aclarar, que hubiéramos podido empezar por otra parte, pero creemos que con la geometría podemos fomentar su cultura general.

Por otra parte, en esta materia se ve muy claro el proceso de matemización del espacio, esto, aunado a que la geometría comprende toda

una primera parte del desarrollo de las matemáticas.

Con esto terminamos la explicación del trabajo; estamos convencidos, que esta es la manera más idónea de abordar la geometría a nivel medio su perior y esperamos en un futuro poder mejorar el mismo.

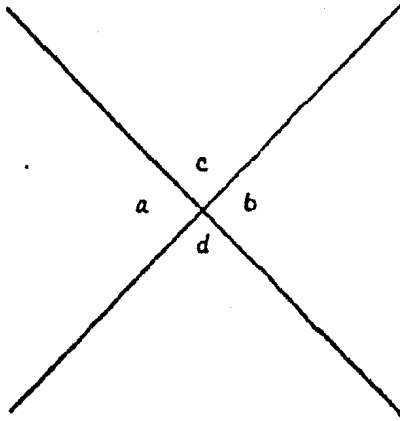
UNIDAD I

*Redescubriendo las propiedades
de las
figuras geométricas.*

PRIMER EXPERIMENTO.

ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE

Traza dos rectas que se corten como en la siguiente figura.



(A los ángulos a y b se les llama ángulos opuestos por el vértice al igual que a los ángulos c y d).

Mide cada uno de los ángulos con el transportador. Si mediste con cuidado habrás encontrado que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Otra forma de comprobarlo es la siguiente:

1o. Recorta el ángulo a y colócalo sobre el ángulo b , observa que son iguales, ya que puedes hacerlos coincidir.

2o. Haz lo mismo para los ángulos c y d .

Repite el experimento por lo menos para otros dos pares de rectas.

SEGUNDO EXPERIMENTO.

ANGULOS INTERIORES DE UN TRIANGULO

Sabemos de nuestra experiencia previa que:

La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°

Para verificar esta afirmación te proponemos que dibujes un triángulo - - cualquiera y midas con el transportador sus ángulos interiores.

¿Resultó ser cierta la afirmación anterior?.

Si no fue así, a qué crees que se deba.

Otra forma de poder verificarlo es la siguiente:

Dibuja sobre una hoja de papel un triángulo, como se observa en la figura 1.

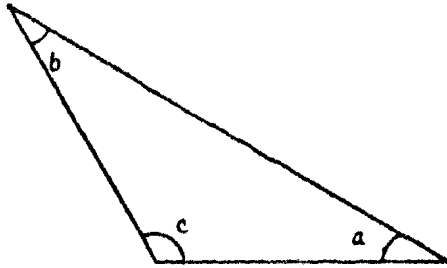


Figura 1

Recorta las esquinas y colócalas como se muestra en la figura 2.

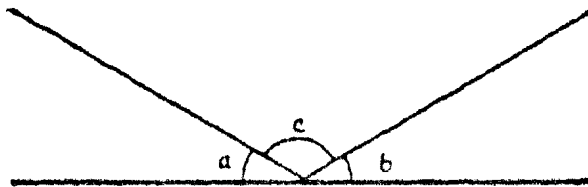


Figura 2

Como podrás observar, la suma de estos tres ángulos es de 180° .

Repite el experimento para al menos otros tres triángulos.

TERCER EXPERIMENTO.

TRIANGULO ISOSCELES

Dibuja un triángulo que tenga dos lados iguales (a estos triángulos se les llama isósceles).

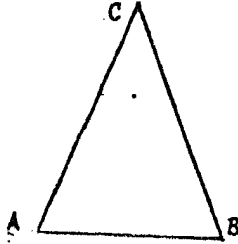


Figura 1

Mide los ángulos que se oponen a los lados iguales, es decir, si el triángulo es como el de la figura 1, hay que medir los ángulos A y B.

¿Son los ángulos que mediste iguales?

Una forma de verificar que los ángulos son iguales es la siguiente:

- 1o. Recorta el triángulo que dibujaste.
- 2o. Dóblalo a la mitad de tal manera que el punto A coincida con el punto B, como se muestra en la figura 2.

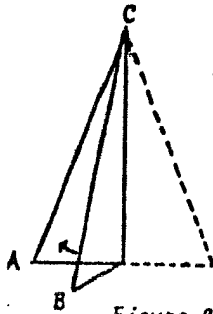


Figura 2

Después de haber hecho lo anterior observarás que el ángulo A es igual al ángulo B.

Ahora te proponemos que dibujes por lo menos otros tres triángulos isósceles diferentes y determines si los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

CUARTO EXPERIMENTO.

TRIANGULO EQUILATERO

Dibuja un triángulo que tenga sus tres lados iguales (a estos triángulos se les llama equiláteros).

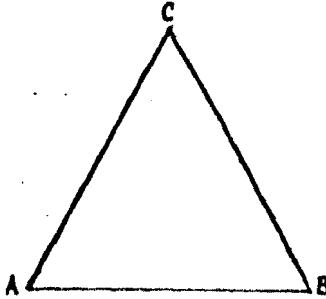


Figura 1

Ahora mide cada uno de los ángulos. ¿Resultaron iguales?

Si no fue así, a qué crees que se deba.

Te proponemos ahora que hagas lo siguiente.

1o) Recorta el triángulo que dibujaste.

2o) Dóblalo a la mitad de tal manera que el punto A coincida con el punto B como lo hiciste en el experimento anterior. Observarás que el $\sphericalangle A$ es igual al $\sphericalangle B$. (Recuerda que se usa el símbolo \sphericalangle para denotar ángulo).

3o) Utilizando el mismo procedimiento comprueba que el $\sphericalangle A$ también es igual al $\sphericalangle C$.

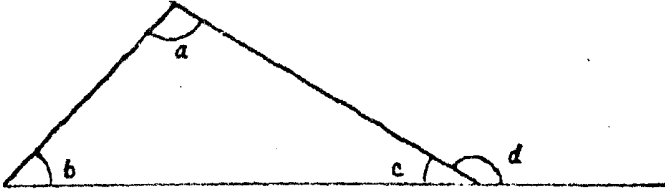
Ahora para poder determinar el valor de cada ángulo, utilizaremos el resultado del segundo experimento. Como la suma de los tres ángulos del triángulo es de 180° y los tres ángulos son iguales, se puede deducir entonces que cada uno mide 60° .

Repite el experimento con al menos otros tres triángulos equiláteros diferentes y determina si sus ángulos son iguales y si miden 60° .

QUINTO EXPERIMENTO.

ANGULO EXTERIOR DE UN TRIANGULO

Dibuja un triángulo que tenga sus tres lados diferentes (a estos triángulos se les llama escalenos) y prolonga uno de sus lados.



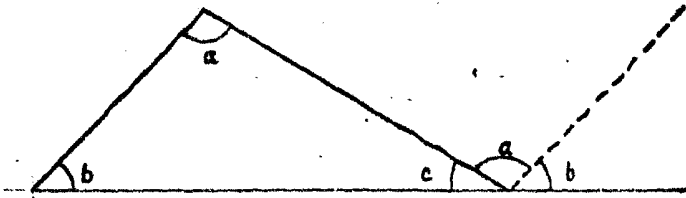
Mide los ángulos a , b , c y d .

Como recordaras a los ángulos a , b y c del triángulo se les llama ángulos interiores y al ángulo d ángulo exterior.

Encuentra una pareja de ángulos interiores con la condición de que su suma sea igual al ángulo d .

¿Encontraste la pareja de ángulos? Si la encontraste, felicidades.

De no ser así, te sugerimos coloques los ángulos a y b sobre el ángulo d y observes que se cumple la igualdad $\sphericalangle a + \sphericalangle b = \sphericalangle d$.



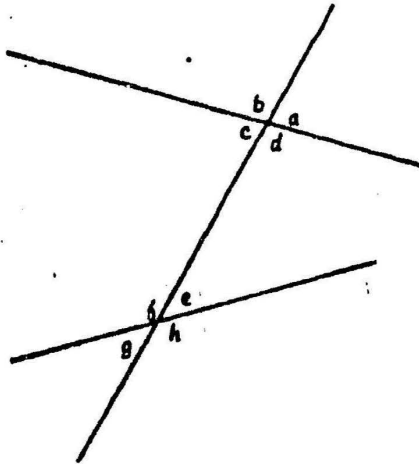
Verifica que se cumple la igualdad por lo menos para otros tres triángulos.

Nota: En nuestro triángulo, el $\sphericalangle c$ es el ángulo interior adyacente al ángulo exterior d y los ángulos a y b son los interiores no-adyacentes al ángulo exterior d .

EJERCICIOS.

1.-

a) Traza dos rectas y una tercera que las corte.

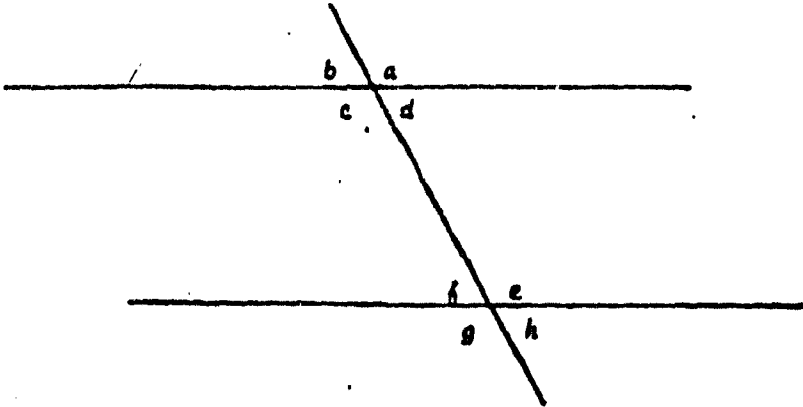


- A las parejas de ángulos: a y e , d y h , b y f , c y g se les llaman ángulos **CORRESPONDIENTES**.
- A las parejas de ángulos: d y f , c y e se les llaman ángulos **ALTERNOS-INTERNOS**.
- A las parejas de ángulos: a y g , b y h se les llaman ángulos **ALTERNOS-EXTERNOS**.
- A las parejas de ángulos: c y f , d y e se les llama **CONJUGADOS-INTERNOS**.

Determina, ya sea midiendo o recortando y superponiendo qué pares de ángulos de las parejas mencionadas arriba son iguales.

Como habrás observado, las parejas de ángulos que comparaste, no necesariamente resultaron ser iguales.

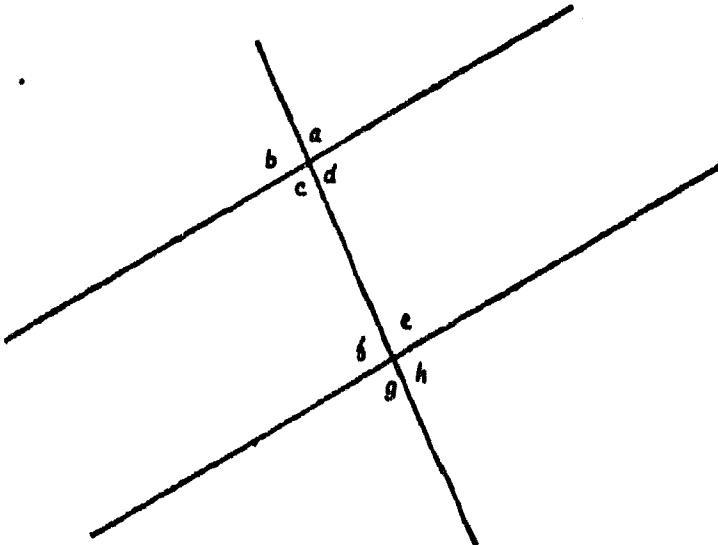
b) Traza dos rectas paralelas y una tercera que las corte.



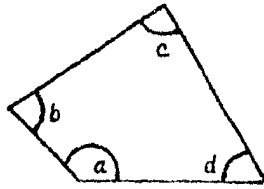
Repite el experimento del inciso (a)

Escribe a continuación todas las parejas de ángulos que son --
iguales.

Repite el experimento ahora en el caso siguiente.



2.- Dibuja una figura de cuatro lados (a estas figuras se les llama cuadriláteros).



Mide sus ángulos interiores a, b, c y d.

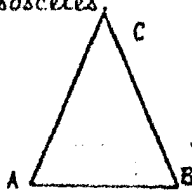
¿Cuál es la suma de los cuatro ángulos interiores?

Verifica tu respuesta haciendo cortes y reacomodándolos.

Repite el experimento por lo menos para otros tres cuadriláteros.

3.-

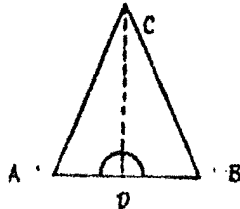
a) Construye un triángulo isósceles.



Recorta el triángulo que dibujaste.

Dobla el triángulo de tal manera que el punto A coincida con el punto B, - después regresa a su forma original.

Traza una recta por encima del doblado.



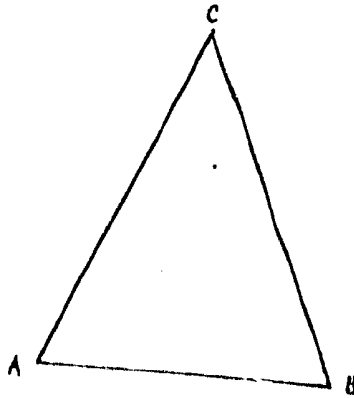
¿Pasa esta recta por C ?.

Repite el experimento para otros dos triángulos isósceles diferentes.

b) Construye por lo menos tres triángulos no-isósceles y repite el experimento.

¿Pasa el doblado por C ?.

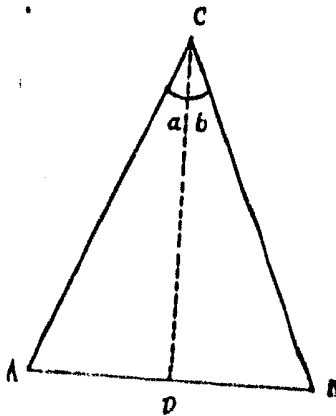
4.- Construye un triángulo isósceles.



Recorta el triángulo que dibujaste.

Dobla el triángulo de tal manera que el punto A coincida con el punto B, después regresa a su forma original.

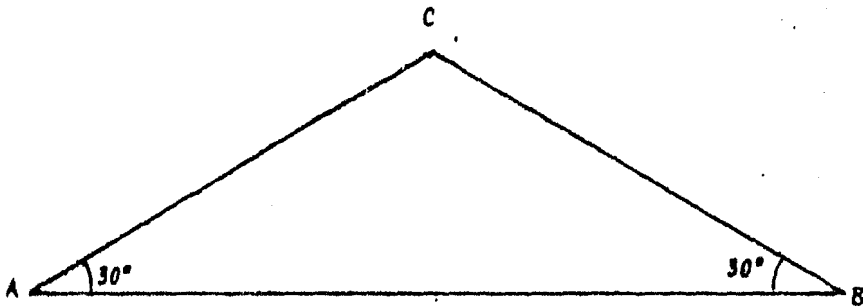
Traza una recta por encima del doblado.



Mide los ángulos a y b. ¿Son iguales?

Repite el experimento para por lo menos otros tres triángulos isósceles diferentes.

5.- Dibuja un triángulo que tenga dos ángulos de 30° .



Mide los lados que se oponen a los ángulos de 30° .

¿Son iguales?

Verifica tu respuesta haciendo cortes o doblesces.

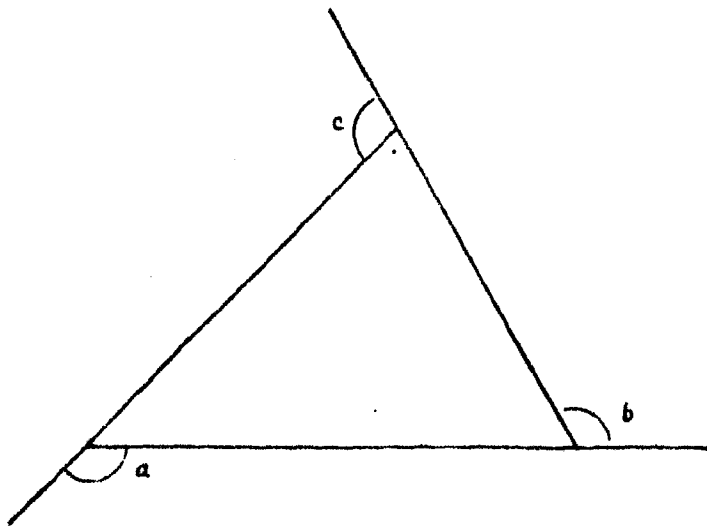
Repite el experimento para un triángulo que tenga:

a) Dos ángulos de 45° .

b) Dos ángulos de 50° .

c) Dos ángulos de 60° .

6.- Dibuja un triángulo y prolonga sus tres lados como se observa en la siguiente figura.



Mide los ángulos exteriores a , b y c .

¿Cuánto suman los ángulos a , b y c ?

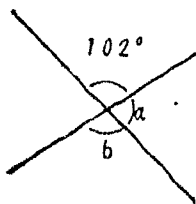
Verifica tu respuesta haciendo cortes.

Repite el experimento para un triángulo :

- a) Equilátero
- b) Isósceles
- c) Escaleno.

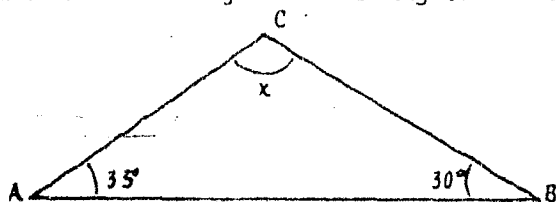
EJERCICIOS DE LA UNIDAD 1

1.- Calcula el valor del ángulo "a" de la siguiente figura.

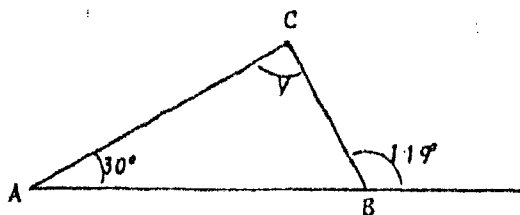


2.- Calcula el valor del ángulo "b" de la figura anterior.

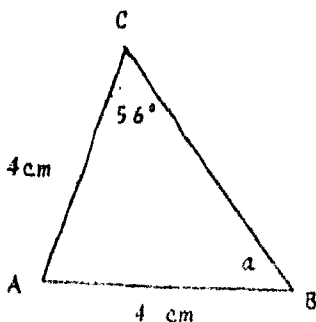
3.- Calcula el valor del ángulo "x" del siguiente triángulo.



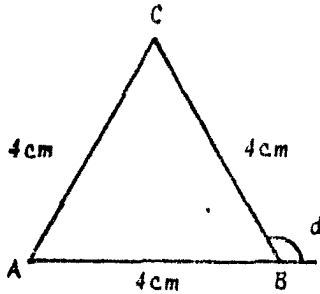
4.- Calcula el valor del ángulo "y" del siguiente triángulo.



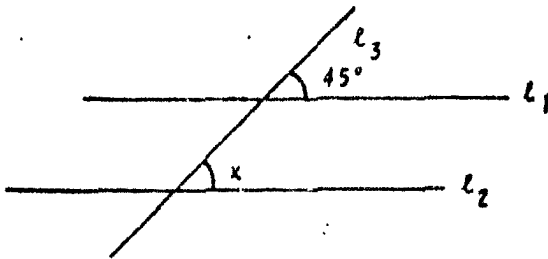
5.- Determina el valor del ángulo "a" del siguiente triángulo.



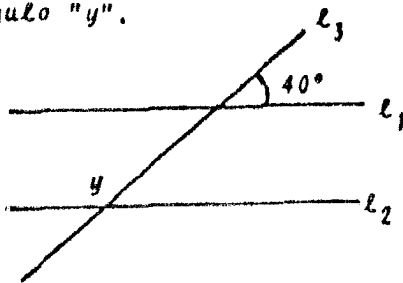
6.- Determina el valor del ángulo "d" del siguiente triángulo.



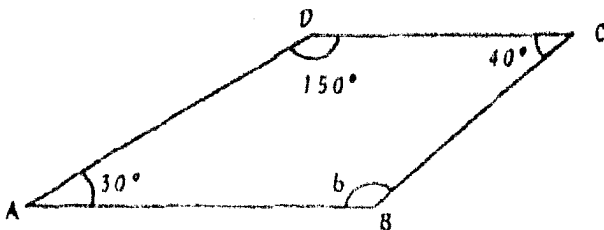
7.- Si l_1 y l_2 son paralelas y l_3 es una transversal, calcula el valor del ángulo "x".



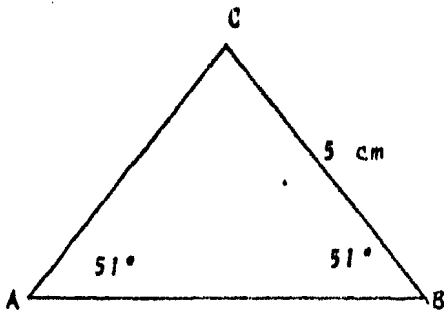
8.- En la siguiente figura l_1 es paralela a l_2 , calcula el valor del ángulo "y".



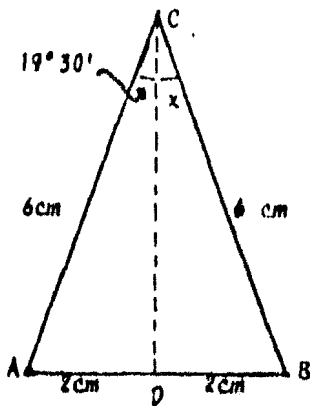
9.- Calcula el valor del ángulo "b" del siguiente cuadrilátero.



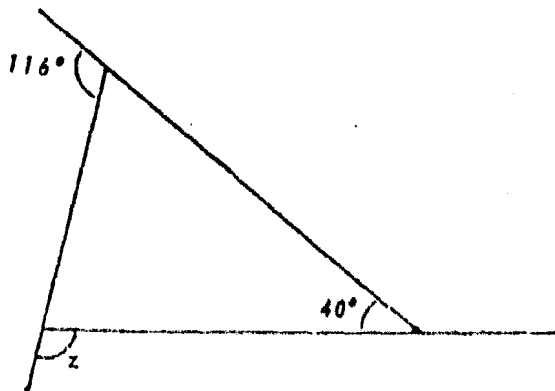
10.- Calcula el valor del segmento AC del siguiente triángulo.



11.- Determina el valor del ángulo "x" del siguiente triángulo.



12.- Calcula el valor del ángulo "z" del siguiente triángulo.



UNIDAD II

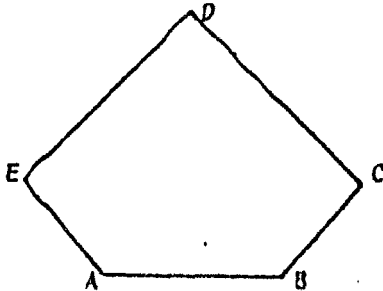
La inducción en geometría.

PRIMER EXPERIMENTO

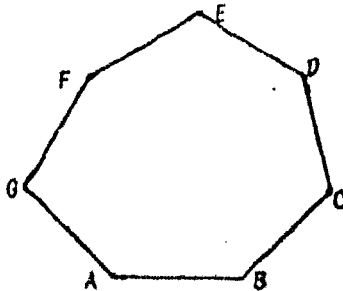
SUMA DE ANGULOS INTERIORES

Dibuja los siguientes polígonos y determina la suma de sus ángulos interiores.

a) Un polígono de cinco lados (a este polígono se le llama pentágono).



b) Un polígono de siete lados (a este polígono se le llama heptágono).



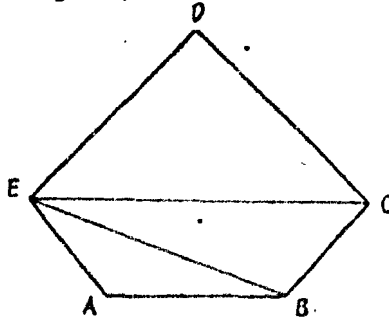
Para poder determinar la suma de los ángulos interiores de las figuras anteriores pudiste haber procedido de las siguientes maneras:

- 1) Medir los ángulos y sumarlos.
- 2) Contar los ángulos y colocarlos de tal manera que se pueda observar cuánto mide la suma de ellos.

Usar cualquiera de las dos formas anteriores es demasiado laborioso, por lo que te proponemos lo siguiente:

En el caso del pentágono, desde uno de sus vértices traza rectas a los

demás para formar triángulos, como se observa a continuación:

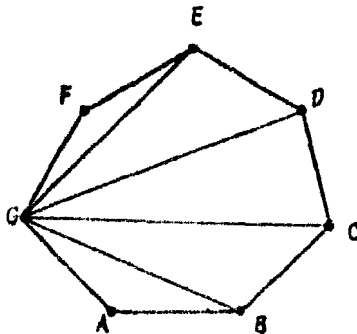


La suma de los ángulos interiores de los tres triángulos formados es igual a la suma de los ángulos interiores del pentágono.

Va que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ; y que en el pentágono se formaron tres triángulos, entonces la suma de sus ángulos interiores será $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

¿Concuerda este resultado con el que obtuviste?

Procediendo de la misma manera para el heptágono, se obtiene la siguiente figura.



En este caso se forman cinco triángulos, de donde la suma de los ángulos interiores es $5 \times 180^\circ = 900^\circ$.

¿Es este resultado igual al que obtuviste?

Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono de doce lados, (a este polígono se le llama dodecágono).

En base a lo anterior, llena la siguiente tabla:

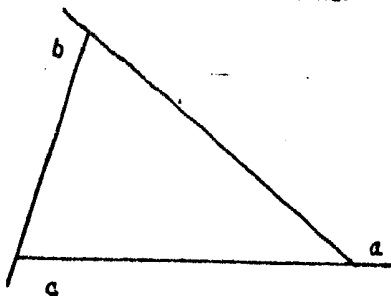
Número de lados del polígono	Número de triángulos que se forman	Suma de los ángulos interiores del polígono
3	1	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$
4	2	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
5	3	<input type="text"/>
6	<input type="text"/>	<input type="text"/>
7	<input type="text"/>	<input type="text"/>
8	<input type="text"/>	<input type="text"/>
9	<input type="text"/>	<input type="text"/>
.	.	.
.	.	.
.	.	.
12	<input type="text"/>	<input type="text"/>
.	.	.
.	.	.
20	<input type="text"/>	<input type="text"/>
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
100	<input type="text"/>	<input type="text"/>

SEGUNDO EXPERIMENTO

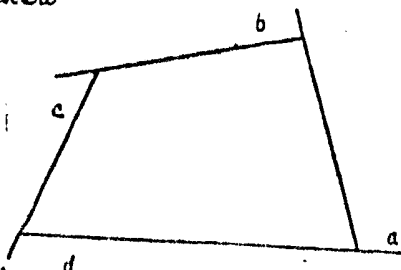
SUMA DE ANGULOS EXTERIORES

Determina la suma de los ángulos exteriores de:

a) Un triángulo



b) Un cuadrilátero

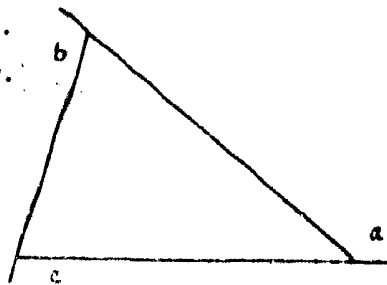


Para determinar las sumas anteriores puedes medir cada uno de los ángulos y después sumarlos. Sin embargo, como ya hablamos observado este método es muy laborioso y tendrías que hacerlo para cada triángulo y cada cuadrilátero.

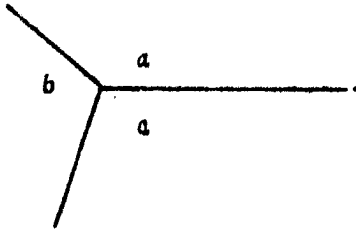
A continuación te mostraremos dos métodos diferentes para encontrar las sumas solicitadas.

Primer método.

Para el caso del triángulo.

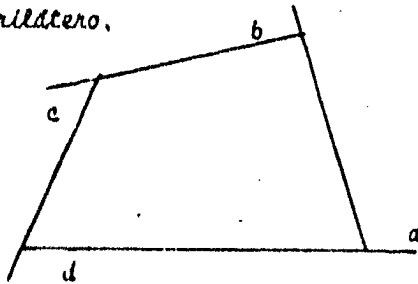


Recorta los ángulos a, b y c y colócalos de la siguiente forma.

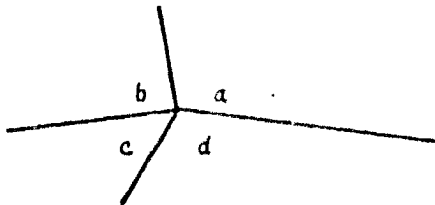


Se observa que su suma es igual a 360° .

Para el caso del cuadrilátero,



Recorta los ángulos a, b, c y d y colócalos de la siguiente forma.

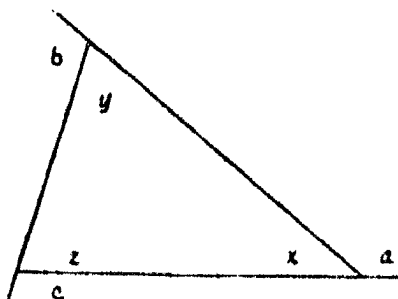


Nuevamente se observa que su suma es igual a 360° .

Usando este método encuentra la suma para un pentágono y un octágono.

Segundo método

Para el caso del triángulo, colocamos letras a los ángulos interiores como se ve a continuación.



Usemos el hecho de que:

$$\angle a + \angle x = 180^\circ,$$

$$\angle b + \angle y = 180^\circ,$$

$$\angle c + \angle z = 180^\circ,$$

Sumando las igualdades anteriores, se tiene que:

$$(\angle a + \angle x) + (\angle b + \angle y) + (\angle c + \angle z) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ,$$

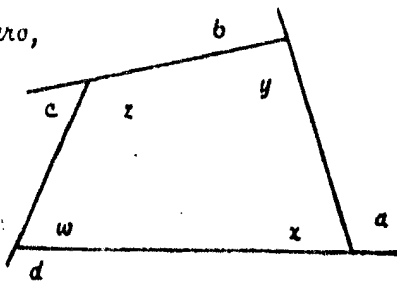
reacomodándolos se tiene,

$$(\angle a + \angle b + \angle c) + (\angle x + \angle y + \angle z) = 3(180^\circ)$$

pero $\angle x + \angle y + \angle z = 180^\circ$ (por el segundo experimento de la primera unidad). Por lo tanto $\angle a + \angle b + \angle c + 180^\circ = 540^\circ$.

O sea $\angle a + \angle b + \angle c = 360^\circ$.

Para el caso del cuadrilátero,



se obtienen cuatro sumas de 180° , es decir

$$\angle a + \angle x = 180^\circ$$

$$\angle b + \angle y = 180^\circ$$

$$\angle c + \angle z = 180^\circ$$

$$\angle d + \angle w = 180^\circ.$$

luego, para obtener la suma de los ángulos exteriores del cuadrilátero, a la suma de los ángulos interiores y exteriores le restamos la suma de los ángulos interiores, es decir, $4(180^\circ) - 360^\circ = 360^\circ$.

usando este método encuentra la suma para el pentágono y el octágono.

TERCER EXPERIMENTO.

PUNTOS Y SEGMENTOS DE RECTA.

Considerando el hecho que para poder trazar un segmento de recta se necesitan dos puntos, determina el número de segmentos que se pueden formar -- -- uniendo los siguientes números de puntos.

a) Dos

b) Tres

c) Cinco

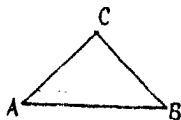
Nota: No es válido que se consideren tres puntos o más en un segmento.

Veamos los casos anteriores haciendo la figura correspondiente.

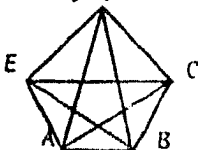
a) Sólo hay un segmento.



b) En este caso hay tres segmentos.



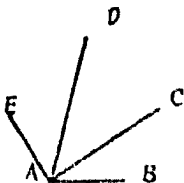
c) Para el caso de cinco puntos existen diez segmentos.



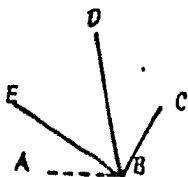
Si tuviéramos más puntos podríamos hacer lo mismo que en los casos anteriores pero cada vez sería más laborioso comprobar que todas las parejas de puntos estén unidos por segmentos y después contarlos.

¿Habrá otra manera de saber cuántos segmentos se pueden trazar?

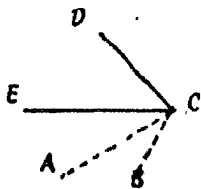
Analicemos el caso de los cinco puntos, observa que desde el punto A salen cuatro segmentos (AB, AC, AD y AE).



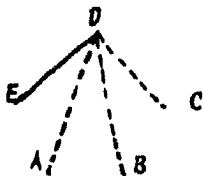
Desde el punto B también salen cuatro segmentos (BA, BC, BD y BE), pero el segmento BA ya había sido trazado, por lo cual realmente sólo salen desde B tres nuevos segmentos (BC, BD y BE).



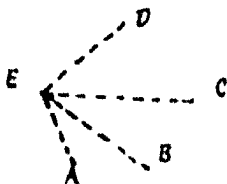
Análogamente, desde C sólo salen dos nuevos segmentos (CD y CE).



Desde D sólo sale un nuevo segmento (DE).



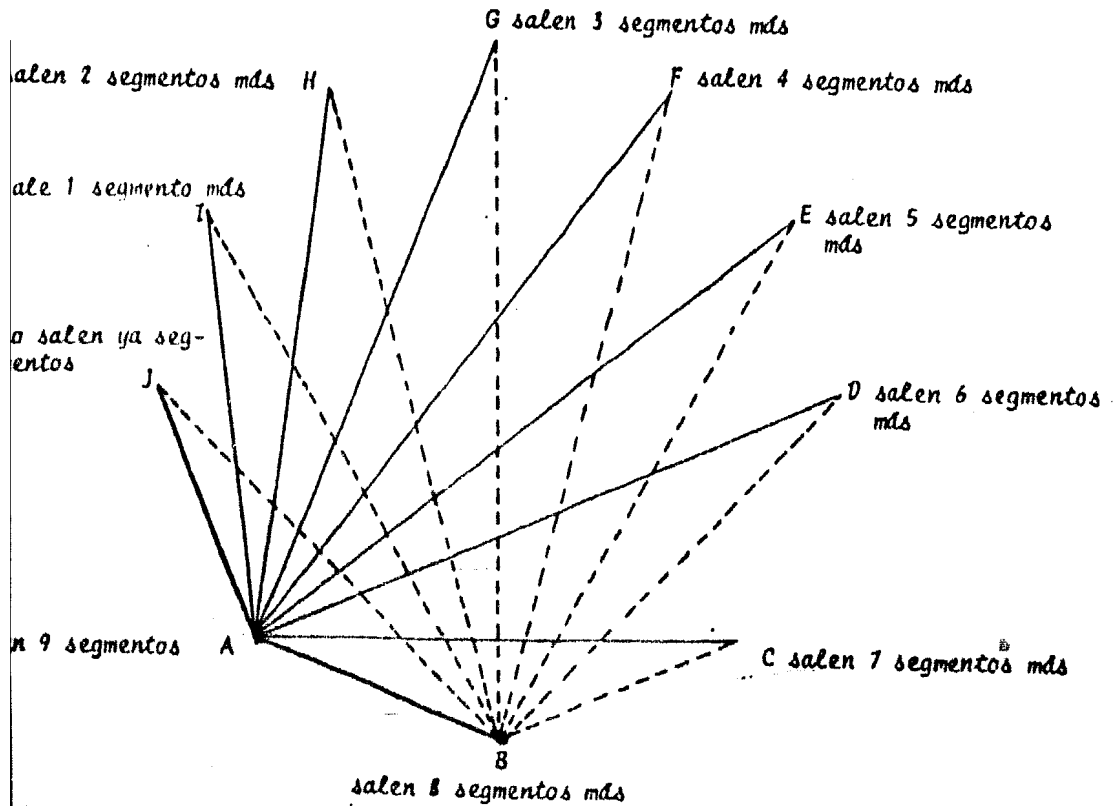
Y por último ya no sale ningún nuevo segmento desde E.



De donde el número de segmentos del pentágono es la suma.

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Utilizando los argumentos anteriores para el decdgono, por ejemplo;
 se tiene la suma $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.



Determina el número de segmentos que se pueden formar uniendo:

a) 12 puntos

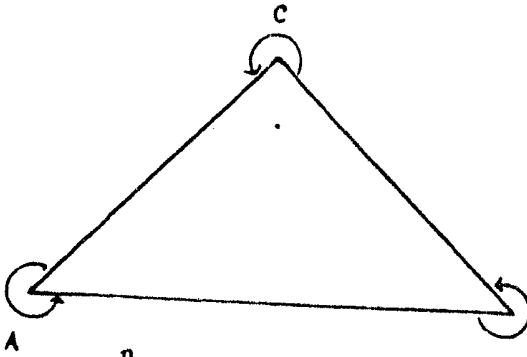
b) 15 puntos

c) 21 puntos.

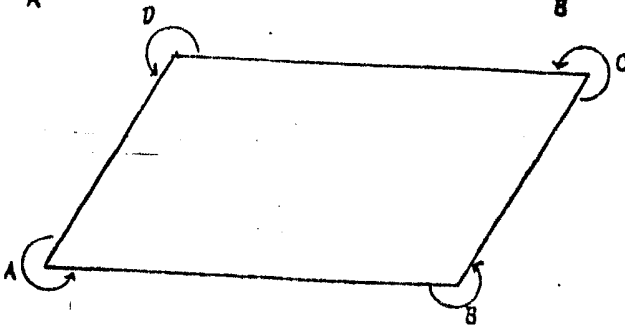
EJERCICIOS.

1.- Determina la suma de los ángulos marcados en las siguientes figuras.

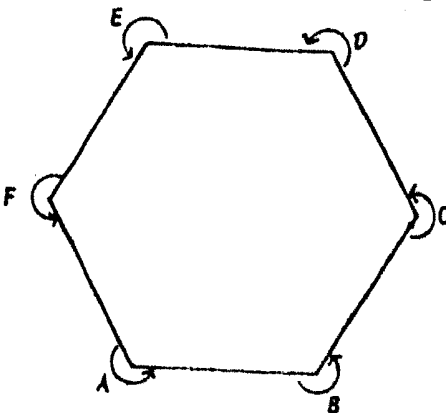
a)



b)



c)



Ahora sin ayuda de figuras, calcula la suma de los ángulos de este tipo - para polígonos de 18, 20 y 30 lados.

2.- Una diagonal de un polígono es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos. Por ejemplo, en la figura 1, AC y BD son diagonales.

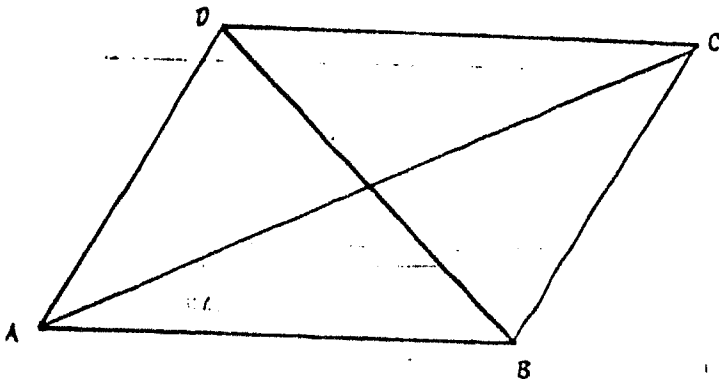
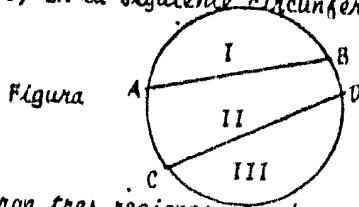


Figura 1

- a) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un triángulo?
- b) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un hexágono?
- c) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un decágono?

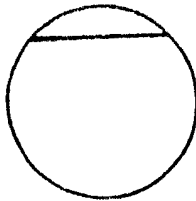
Ahora sin ayuda de figuras, calcula el número de diagonales que tienen los polígonos de 15, 18 y 21 lados.

3.- Una cuerda es un segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia. Por ejemplo, en la siguiente circunferencia AB y CD son cuerdas.

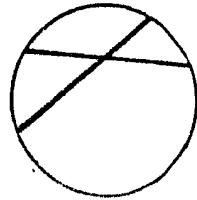


En la figura 1 se formaron tres regiones, a saber: I, II y III. Determina el número de regiones que se pueden formar en una circunferencia si se trazan:

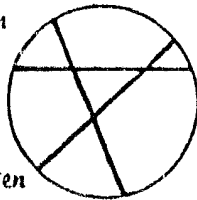
a) Una cuerda



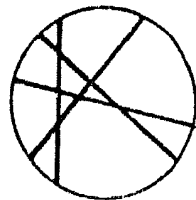
b) Dos cuerdas que se intersecten



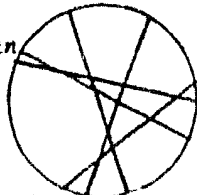
c) Tres cuerdas que se intersecten por pares



d) Cuatro cuerdas que se intersecten por pares



e) Cinco cuerdas que se intersecten por pares

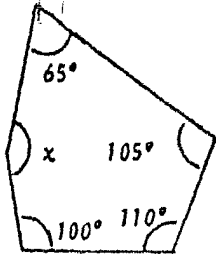


Ahora sin ayuda de figuras, calcula el número de regiones que se pueden formar en una circunferencia al trazar.

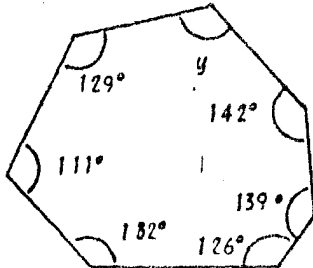
- a) 10 cuerdas que se intersecten por pares.
- b) 15 cuerdas que se intersecten por pares.
- c) 23 cuerdas que se intersecten por pares.

EJERCICIOS DE LA UNIDAD II.

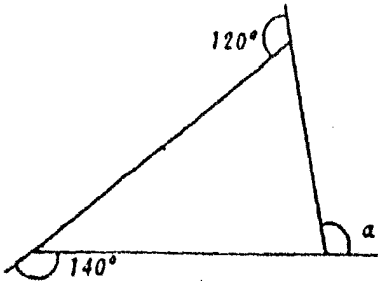
1.- Calcula el valor del ángulo "x" del siguiente pentágono.



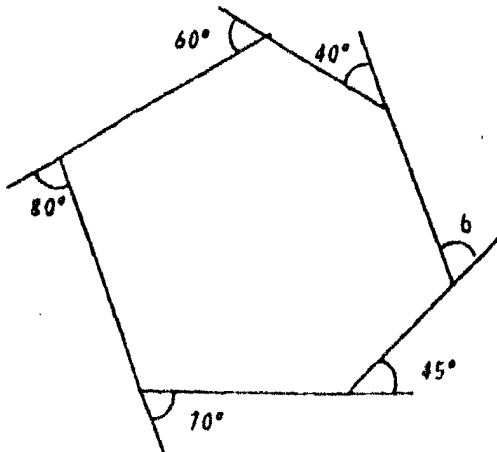
2.- Calcula el valor del ángulo "y" del siguiente heptágono.



3.- Calcula el valor del ángulo "a" del siguiente triángulo.



4.- Calcula el valor del ángulo "b" del siguiente hexágono.

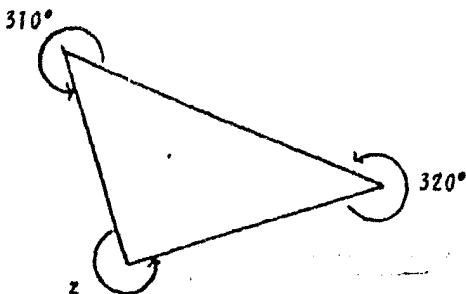


5.- Determina el número de partidos que deben jugarse en un torneo de Fútbol en el que participan ocho equipos, de manera tal que cada equipo juegue un único partido con cada uno de los equipos restantes.

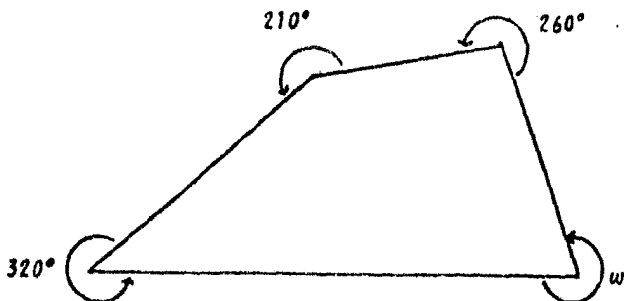
6. En una reunión, después de que cada uno de los asistentes saludó una sola vez a cada uno de los restantes, se realizaron 45 saludos.

Encuentra el número de personas que componían la reunión.

7.- Calcula el valor del ángulo "z" del siguiente triángulo.



8.- Calcula el valor del ángulo "w" del siguiente cuadrilátero.



9.- ¿Cuántas rectas determinan 13 puntos, sabiendo que no hay tres colineales.

10.- Calcula el número de triángulos diferentes que se pueden formar uniendo los cinco vértices de un pentágono.

UNIDAD III

Congruencia de triángulos.

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

PRIMER EXPERIMENTO.

Una persona tiene que pagar el impuesto predial de su terreno.

Hacienda le solicita un croquis para calcular el área del mismo.

La persona antes mencionada le pide a su hijo, que está en el C.C.H., le haga el croquis del terreno cuyas dimensiones son 100m al sur, 40m al norte, 50m al este y 75m al oeste.

Si tú fueras su hijo, ¿cómo lo harías?

Para hacer el croquis se te sugiere la siguiente escala: por cada 10m del terreno original, considera un centímetro sobre el papel; es decir, en el croquis los lados del terreno medirán 10cm, 4cm, 5cm y 7.5cm respectivamente.

Compara tu croquis con los de tus compañeros.

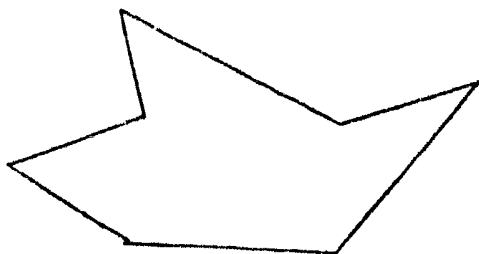
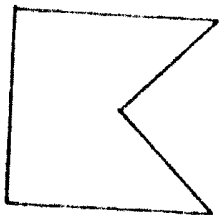
¿ Son todos iguales ?

EJERCICIOS

- 1.- Dibuja un triángulo cuyos lados midan 5cm, 6cm y 4cm respectivamente.
- 2.- Dibuja un pentágono cuyos lados midan 10cm, 8cm, 6cm, 4cm y 5cm, respectivamente.
- 3.- Dibuja un hexágono cuyos lados midan 4cm, 6cm, 7.5cm, 10cm, 12cm, y 15cm.

NOTA: Los polígonos que trabajaremos en esta unidad serán los llamados "convexos" es decir, que no tienen "entradas" en su contorno.

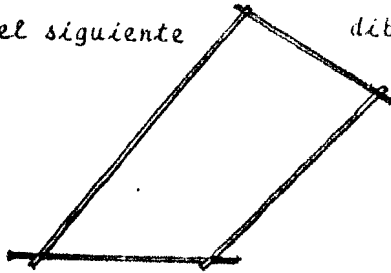
Ejemplos de polígonos no-convexos:



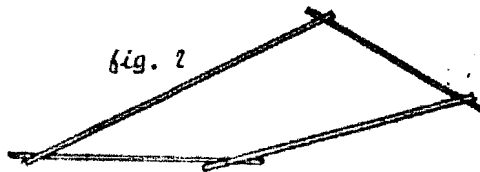
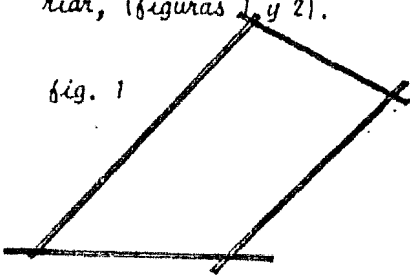
SEGUNDO EXPERIMENTO.

Como habrás observado en el experimento y ejercicios anteriores, solamente en el caso del triángulo tu dibujo es igual al de tus compañeros y en los demás casos no son necesariamente iguales. Veamos por qué sucede esto.

Construye con tiras de cartón y tachuelas un aparato como el que se muestra en el siguiente dibujo.



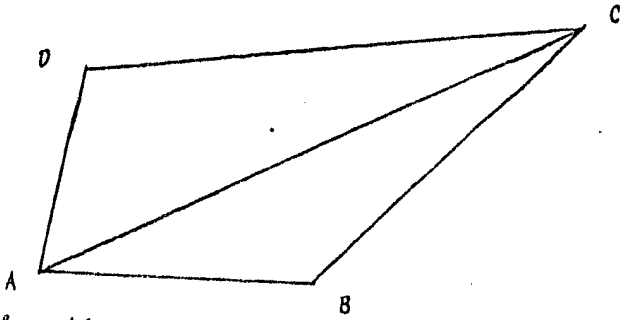
Observa que este aparato no es rígido, es decir, puede adoptar diferentes formas sin variar la longitud de sus lados, ya que sus ángulos pueden variar, (figuras 1 y 2).



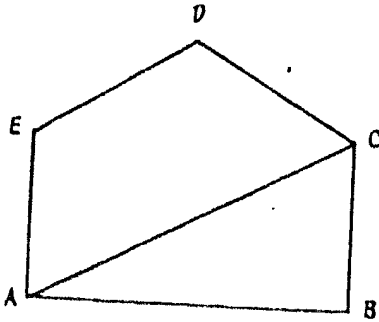
Aunque estos cuadriláteros tienen los lados respectivamente iguales, estos no son iguales, ya que al colocar uno sobre otro no es posible hacerlos coincidir.

- 1.- Construye ahora un aparato que tenga cinco lados y verifica si es rígido o no.
- 2.- Construye un aparato de tres lados y verifica si es rígido o no.

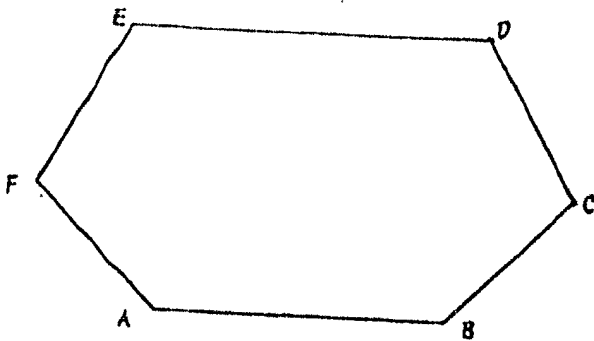
3.- ¿Puede el cuadrilátero siguiente adoptar diferentes posiciones?



4.- ¿Puede el pentágono siguiente adoptar diferentes posiciones?

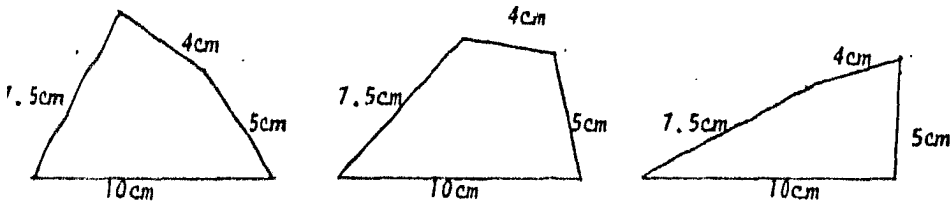


5.- ¿Cuál es el menor número de tiras diagonales que se requieren para hacer rígida la siguiente figura?



TERCER EXPERIMENTO

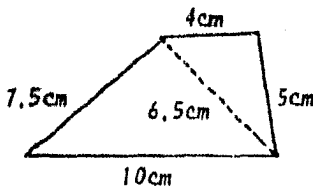
Al hacer el croquis del primer experimento y compararlo con el de tus compañeros, habrás observado que la mayoría son diferentes a pesar que los lados tienen las mismas dimensiones.



Pero al terreno sólo le corresponde un croquis, por lo que, ¿Cómo se puede saber cuál es el croquis que corresponde al terreno?

Se ve que es necesario tener más datos. ¿Es suficiente conocer la medida de una de las diagonales?

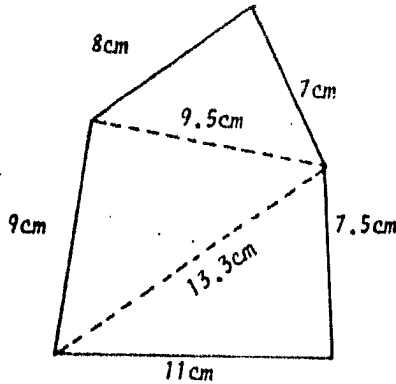
Supón que la medida de una de las diagonales es de 6.5 m y de acuerdo a la escala utilizada corresponde a la trazada en la siguiente figura.



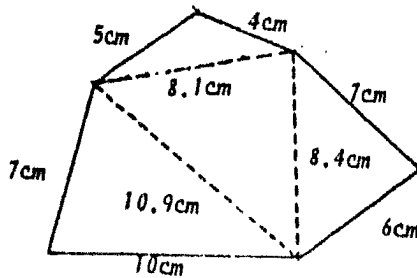
Ahora haz un croquis con el dato adicional de la diagonal y compáralo con los de tus compañeros. ¿Cómo resultaron?

EJERCICIOS .

- 1.- Dibuja un pentágono de dimensiones 9cm, 8cm, 7cm, 7.5cm y 11cm, sabiendo que dos de sus diagonales miden 9.5cm y 13.3cm. A continuación te damos un bosquejo a fin de que veas de cuáles diagonales se trata.



- 2.- Repite el ejercicio para el hexágono siguiente.



Como habrás observado, para dibujar un polígono igual a uno dado no es suficiente con conocer las dimensiones de los lados. Para trazarlo una de las cosas que se puede hacer es triangularlo, es decir, trazar diagonales de tal manera que se formen triángulos y después ir dibujando los triángulos formados.

CUARTO EXPERIMENTO.

Hasta ahora hemos visto que para que dos cuadriláteros sean iguales - además de tener los lados iguales es suficiente pedir la igualdad de una diagonal.

Si a cambio de la igualdad de la diagonal tenemos la de un ángulo.

¿Serán iguales los cuadriláteros ?.

Ejercicio.

Dibuja un cuadrilátero con lados consecutivos de 6cm, 7cm, 9cm y 11 cm, - considerando un ángulo de 40° entre los lados consecutivos de 6cm y 7cm.

Compralo con los de tus compañeros. ¿Son diferentes?

Como habrás visto, los croquis fueron iguales, analicemos por qué sucede esto.

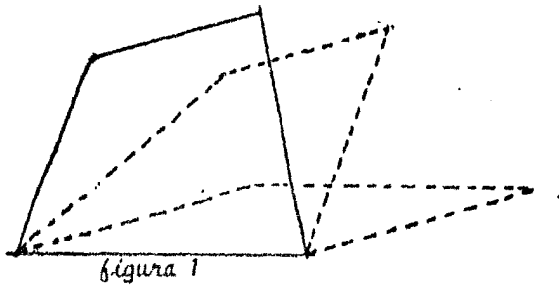
Si consideramos un aparato de cuatro lados como el construido en el segundo experimento y fijamos uno de sus ángulos la figura será rígida, ya que fijar un ángulo es equivalente a fijar la diagonal que se opone al ángulo. Se te sugiere que lo hagas.

EJERCICIOS.

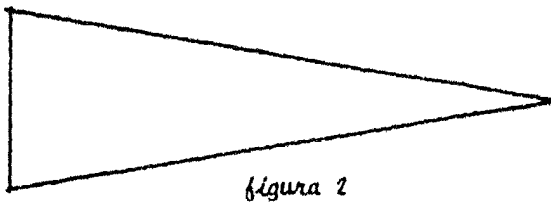
- 1) Dibuja un cuadrilátero cuyos lados consecutivos midan 7cm, 10cm, 13cm y 16cm. Uno de sus ángulos es de 30° y está comprendido entre los -- lados de 7cm y 10cm. Compralo con los de tus compañeros.
- 2) Dibuja un pentágono cuyos lados consecutivos midan 5cm, 7cm, 9cm, -- 14cm y 16cm, y el ángulo comprendido entre los lados de 5cm y 7cm, -- mida 40° . Compralo con los de tus compañeros.
- 3) Si en un pentágono se fija un ángulo. ¿Será rígida la figura?
¿Cuál es el menor número de ángulos que se requieren para hacerlo rígido.

QUINTO EXPERIMENTO.

Como se ha visto en los experimentos anteriores, los cuadriláteros, pentágonos o hexágonos no son figuras rígidas. Por ejemplo., aunque los lados de los siguientes cuadriláteros son respectivamente iguales éstos pueden adoptar diferentes posiciones (figura 1).



Esto se debe a que el cuadrilátero no es rígido, es decir sus ángulos no quedan determinados por la longitud de sus lados. Sin embargo hemos observado que el triángulo es una figura rígida. Esto es, sus ángulos quedan determinados por la longitud de sus lados (figura 2).



Hasta ahora hemos visto que dos figuras son iguales si se pueden superponer, esto lo que significa es que tanto las magnitudes de sus lados como de sus ángulos son respectivamente iguales.

En geometría cuando dos figuras son iguales se dice que son congruentes, -

diremos entonces que dos polígonos son congruentes si tienen sus lados y sus ángulos correspondientes iguales.

Para denotar que dos figuras son congruentes usaremos el símbolo \cong .

Así por ejemplo, si los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes, escribiremos $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Hemos encontrado que en el caso del triángulo la magnitud de sus lados -- determina el valor de sus ángulos, esto lo podemos resumir en el siguiente criterio.

Primer criterio.

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces son congruentes.

Este criterio lo escribiremos en forma abreviada como "LLL".

Sin embargo, ¿Es siempre posible construir un triángulo dado sus lados?.

Antes de contestar la pregunta te sugerimos que resuelvas el siguiente -- ejercicio.

Ejercicio:

Construye un triángulo que tenga lados de:

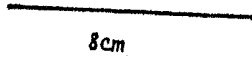
- a) 3cm, 5cm y 7cm.
- b) 4cm, 2cm y 6cm.
- c) 2cm, 5cm y 8cm.

Si hiciste el ejercicio habrás observado que solamente se pudo construir el triángulo del inciso (a).

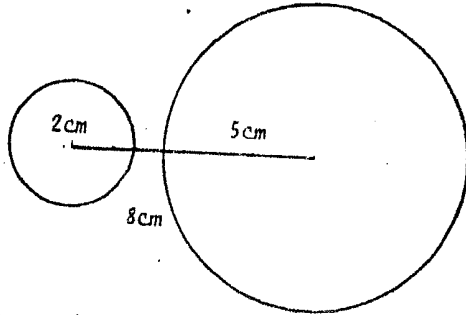
Analícemos por ejemplo que pasa en el caso del inciso (c).

Recordemos como se construye un triángulo dado tres segmentos.

Primer paso: Se considera como base del triángulo cualquier segmento de los dados, por ejemplo el de 8cm.



Segundo paso: Por cada extremo del segmento se dibuja una circunferencia de radio igual a uno de los segmentos restantes.



Tercer paso: Los puntos en donde se cortan las circunferencias se unen con los extremos de la base para formar el triángulo pedido, pero ¡Cuidado! en este caso no se intersectan las circunferencias, por lo cual, no se puede construir el triángulo con las medidas dadas.

Como habrás observado para que se forme un triángulo, es necesario que las circunferencias se corten y para ello se requiere que la suma de sus radios sea mayor que la longitud de la base tomada. De donde, para poder construir un triángulo dado sus tres lados es necesario que la suma de los lados menores sea mayor que el lado restante.

SEXTO EXPERIMENTO

EL PROBLEMA DE LA FUENTE

En el parque de los venados hay varias fuentes con un venado en el centro. En cierta ocasión que fui con una de mis compañeras, me propuso que calculara la distancia que hay entre dos adornos de la fuente (figura 1).
 ¿Tú cómo lo harías?.

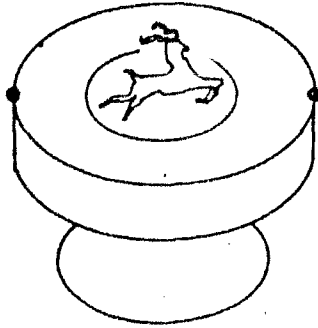


figura 1

Para poder resolver este problema, lo primero que haremos es considerar -- que podemos trasladar la fuente al plano y considerar a los adornos como los puntos A y B respectivamente (figura 2).



figura 2

Debemos medir la distancia AB pero no lo podemos hacer directamente. Intentemos construir un segmento igual al AB , que sí podamos medir directamente. Una manera de hacerlo es construyendo un triángulo que tenga como uno de sus lados al segmento AB y los demás lados que se puedan medir --- directamente y después construir otro triángulo congruente al primero don de todos sus lados se puedan medir.

Consideremos un lugar C fuera de la fuente y formemos el triángulo ABC (figura 3).

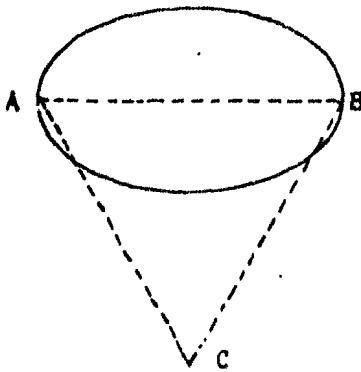


figura 3

Tenemos ahora un triángulo, en el cual AB es uno de sus lados, AC y BC se pueden medir; ahora ¿cómo podemos construir un triángulo congruente al -- triángulo ABC ? ¿Bastará el que dos triángulos tengan dos lados iguales -- para que sean congruentes?

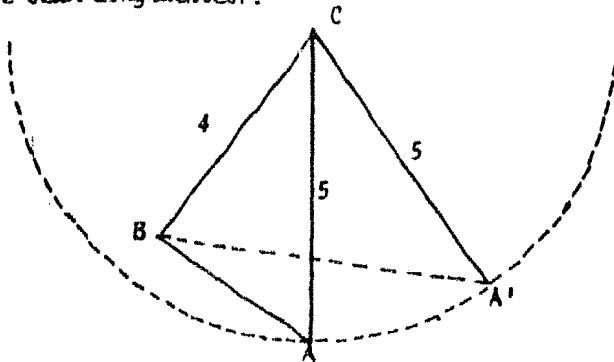


figura 4

Observa los triángulos ABC y $A'B'C$ de la figura 4. Es claro que $AB \neq A'B'$, o sea que no es suficiente que dos triángulos tengan iguales dos lados respectivamente para que el tercer lado sea igual; hace falta algo más para garantizar la igualdad del tercer lado.

Si nos fijamos nuevamente en los triángulos ABC y $A'B'C$, notamos que el ángulo opuesto a AB es diferente del opuesto a $A'B'$. Cabe preguntarse ahora que si los dos ángulos fueran iguales sería $AB = A'B'$?

Ejercicio:

Dibuja un triángulo de lados 7cm y 9cm y el ángulo comprendido entre ellos de 60° y compáralo con el de tus compañeros, ¿cómo son?

En general si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $\angle A = \angle A'$ tendremos que son congruentes. En efecto, coloquemos el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle A'B'C'$ de tal manera que el vértice A coincida con A' y AB con $A'B'$ (figura 5).

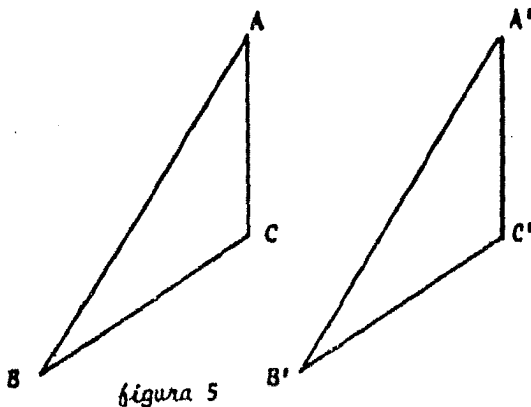


figura 5

B coincidirá con B' porque $AB = A'B'$, C coincidirá con C' porque $\angle A = \angle A'$, C coincidirá con C' porque $AC = A'C'$, por lo tanto CB coincidirá con $C'B'$ y $CB = C'B'$. Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente cri

terio.

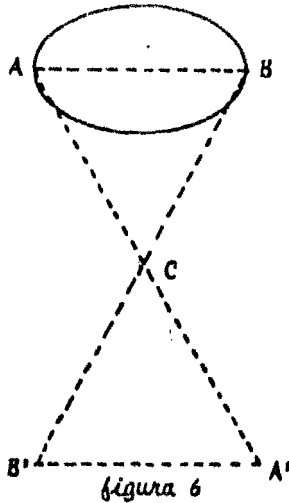
Segundo criterio.

Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales entonces los triángulos son congruentes.

Este criterio lo escribiremos en forma abreviada como "LAL".

Utilicemos este criterio para resolver el problema de la fuente.

La distancia entre los puntos A y B se puede obtener de la siguiente manera:



Se clava una estaca en un punto C cualquiera fuera de la fuente, luego se traza la recta que pasa por A y C y se prolonga hasta el punto A' de tal manera que $AC = CA'$. Se traza la recta que pasa por B y C y se prolonga hasta B' tal que $BC = CB'$ (figura 6). Ya que los ángulos en C de los dos triángulos son iguales por ser opuestos por el vértice, tendremos que el $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C$, luego $AB = B'A'$ y B'A' se puede medir directamente quedando así resuelto el problema.

Ejercicios:

- 1.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes cuyos vértices sean A, B y C, se pueden dibujar con la condición de que $AB = 6\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$ y $BC = 5\text{cm}$?
- 2.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes cuyos vértices sean A, B y C, se pueden dibujar con la condición de que $AB = 6\text{cm}$, $\angle A = 80^\circ$ y $BC = 5\text{cm}$?

Después de haber resuelto los ejercicios observarás que en el primer caso se pueden construir dos triángulos no-congruentes y que en el segundo caso no se puede construir ninguno.

A continuación te mostraremos un dibujo en el cual se observa la solución del ejercicio 1 (figura 7).

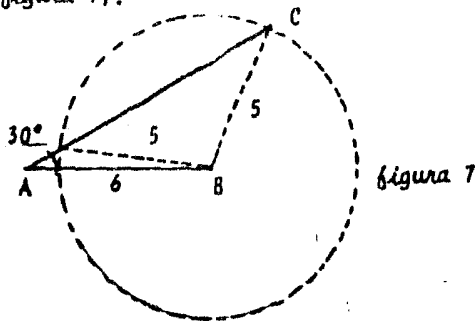


figura 7

Observa que como el ángulo de 30° no está comprendido entre los lados de 6 cm y 5 cm se pueden construir dos triángulos no-congruentes.

En el ejercicio 2, no se puede construir ningún triángulo, ya que la circunferencia de radio 5 cm no corta a la recta AC (figura 8).

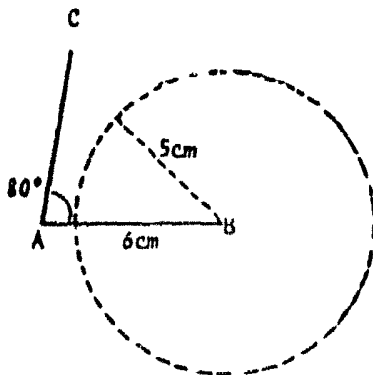


figura 8

SEPTIMO EXPERIMENTO.

EL PROBLEMA DE TALES DE MILETO

Se considera que Tales de Mileto fue el primer científico (siglo VI antes de J.C.). Se dice que predijo un eclipse solar.

La mayor parte del trabajo de Tales que se conoce se refiere a la geometría. Una de las obras que se le atribuyen es haber medido la distancia a que se encontraba un barco de la costa.

Si te propusieran este problema ¿Cómo lo resolverías? (figura 1).

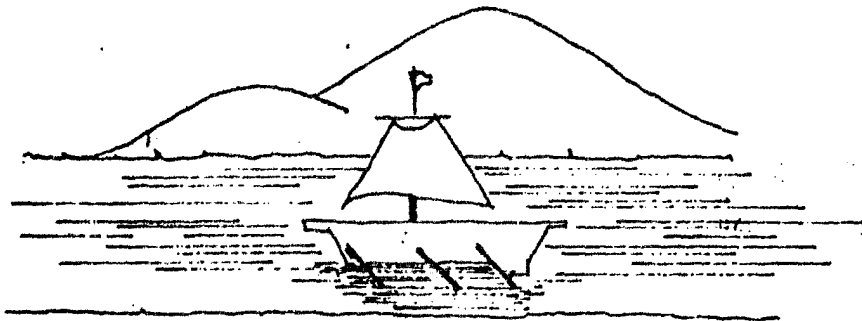


figura 1

Para poder resolver este problema, lo primero que haremos es considerar -- que el barco se encuentra en el punto A. Fijemos dos puntos B y C sobre la orilla de tal manera que se forme el triángulo ABC (figura 2).

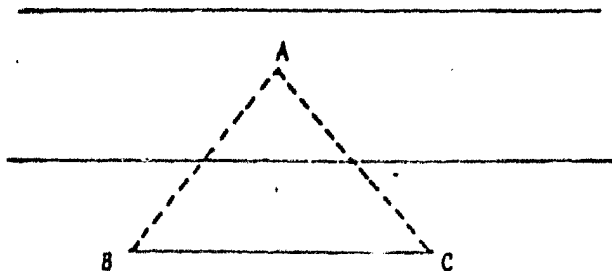
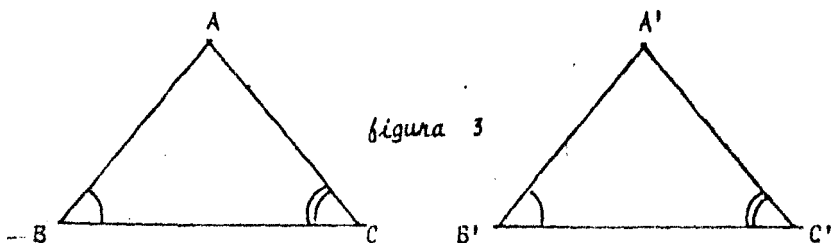


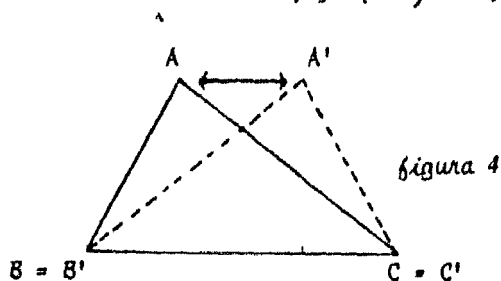
figura 2

Debemos medir la distancia AB , pero no lo podemos hacer directamente por estar sobre el mar. El lado BC y los ángulos B y C del triángulo ABC se pueden medir. ¿Serán suficientes estos elementos para encontrar un triángulo congruente al triángulo ABC ?

Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que $BC = B'C'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ y $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. ¿Serán los triángulos ABC y $A'B'C'$ congruentes? (figura 3).



Si superponemos los triángulos ABC y $A'B'C'$ de manera que $B'C'$ quede sobre BC , tendremos que la recta $B'A'$ cae sobre la recta BA , ya que $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ y la recta $C'A'$ cae sobre la recta CA , ya que $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ (figura 4).



Por lo tanto el punto A' coincidirá con el punto A , ya que las dos rectas se intersectan en un solo punto y $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente criterio:

Tercer criterio.

Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado comprendido entre ellos -- respectivamente iguales entonces los triángulos son congruentes.

Este criterio lo escribiremos en forma abreviada como "ALA".

Utilicemos este criterio para resolver el problema de Tales de Mileto.

La distancia entre los puntos A y B se puede obtener de la siguiente manera (figura 5).

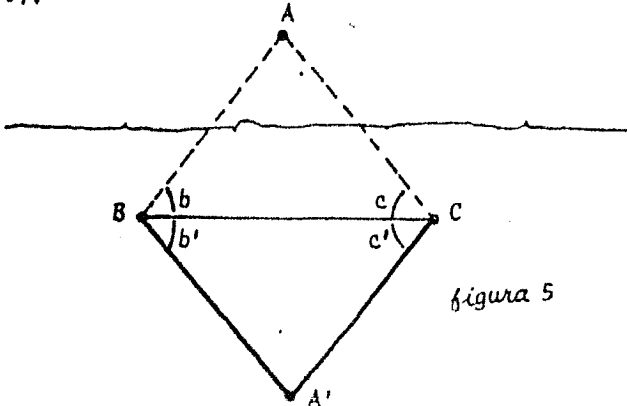


figura 5

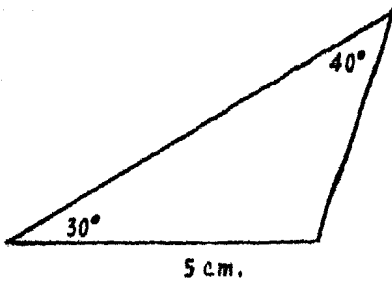
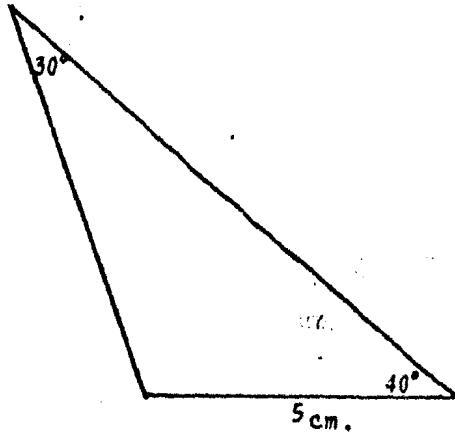
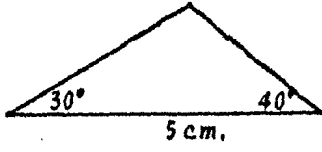
A partir de los puntos B y C se construyen los ángulos b' y c' respectivamente iguales a los ángulos b y c para determinar el punto A' (figura 5).

El $\triangle ABC$ es congruente al $\triangle A'BC$ ya que $\angle b = \angle b'$ por construcción, $BC = BC$ por ser común y el $\angle c = \angle c'$ por construcción. Luego $AB = BA'$ y BA' se puede medir directamente quedando resuelto el problema.

Ejercicio.

Construye tres triángulos no-congruentes que tengan un lado de 5cm y dos ángulos de 30° y 40° respectivamente.

Como habrás observado para poder construir los triángulos que se piden es necesario recordar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° . Los triángulos pedidos serán como los siguientes.



Los siguientes ejercicios consisten en investigar cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar con las condiciones dadas,

(Algunos se pueden contestar sin necesidad de hacer las construcciones).

Explica tu respuesta.

- 1.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un lado de 100 metros?
- 2.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un ángulo de 169° ?
- 3.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un lado de 50 metros y otro lado de 3 metros?
- 4.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un ángulo de 135° y otro de 45° ?
- 5.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un lado de 40 metros, otro lado de 100 metros y un ángulo de 16° ?
- 6.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan dos lados de 15 metros y un ángulo de 30° ?
- 7.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un lado de 30 metros, otro de 16 metros y el tercer lado de 10 metros?
- 8.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un lado de 45 metros, otro lado de 16 metros y el ángulo entre los lados de 45 y 16 metros de 40° ?
- 9.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un ángulo de 76° , un lado de 5 unidades, otro de 10 unidades y el tercer lado de 7 unidades.

10.- ¿Cuántos triángulos no-congruentes se pueden dibujar, con la condición de que tengan un ángulo de 30° , otro ángulo de 40° y el lado entre esas dos ángulos de 10 unidades.

Los siguientes ejercicios consisten en investigar si, bajo las condiciones dadas, los triángulos I y II son congruentes.

Explica tu respuesta.

10. Triángulo I.- Este triángulo tiene un ángulo de 30° , otro de 45° y un lado de 16 unidades.

Triángulo II.- Este triángulo tiene un ángulo de 105° , otro de 45° y un lado de 16 unidades.

20. Triángulo I.- Este triángulo tiene un ángulo de 56° y otro ángulo de 50° .

Triángulo II.- Este triángulo tiene un ángulo de 50° y otro ángulo de 74° .

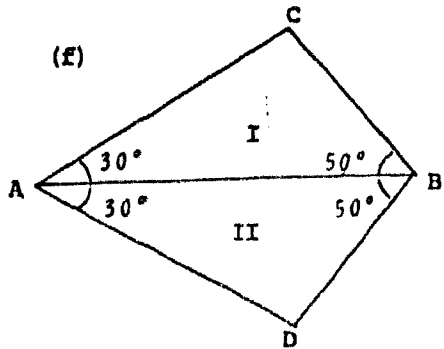
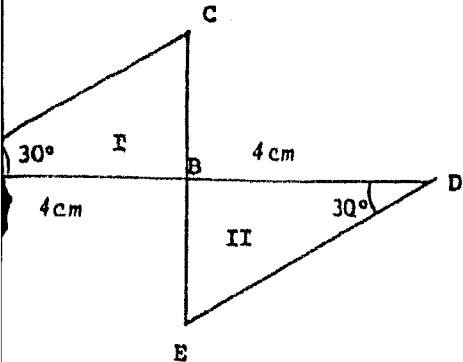
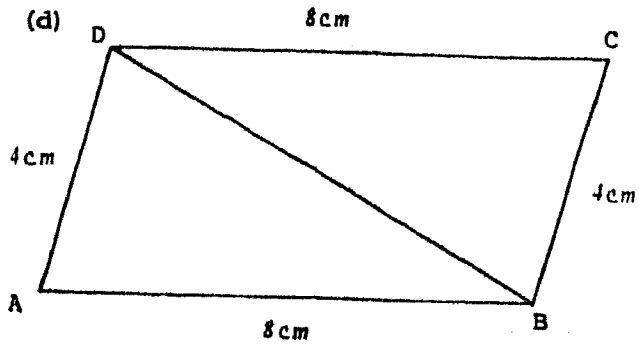
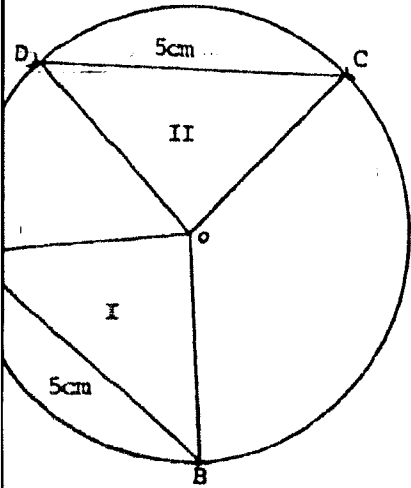
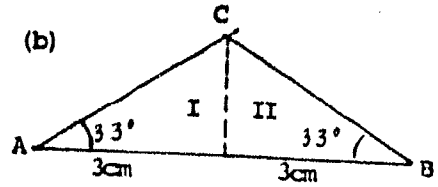
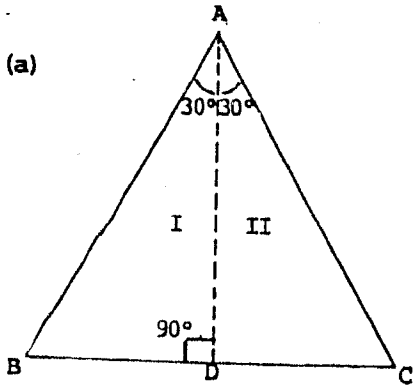
30. Triángulo I.- Este triángulo tiene lados de 5, 7, y 9 unidades.

Triángulo II.- Este triángulo tiene lados de 9, 5 y 7 unidades.

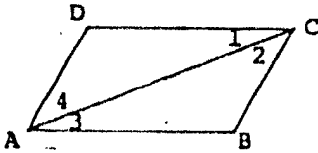
40. Triángulo I.- Este triángulo tiene un lado de 16 unidades y dos ángulos de 46° y 39° respectivamente. (El lado de 16 unidades está en medio de los ángulos de 46° y 39°).

Triángulo II.- Este triángulo tiene ángulos de 95° , 46° y 39° y el lado en medio de los ángulos de 46° y 39° es de 16 unidades.

En los casos siguientes se puede justificar que el $\triangle I$ es congruente con el $\triangle II$.
 Señala el respectivo criterio de congruencia.



En los casos siguientes, para poder justificar lo que se te pide, encuentra primero triángulos congruentes.

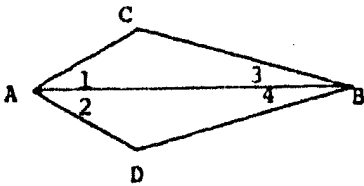


Datos:

- 1) $CD = AB$
- 2) $\angle 1 = \angle 3$

Justifica:

$AD = BC$

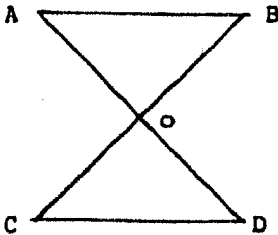


Datos:

- 1) $\angle 1 = \angle 2$
- 2) $\angle 3 = \angle 4$

Justifica:

$CB = DB$

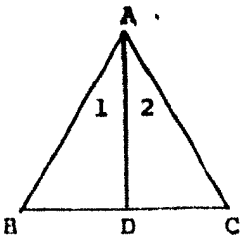


Datos:

- 1) $AO = OD$
- 2) $BO = OC$

Justifica:

$AB = CD$



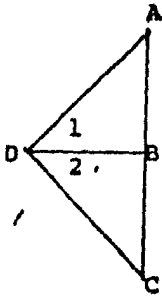
Datos:

- 1) EL $\triangle ABC$ es equilátero
- 2) $BD = DC$

Justifica:

$\angle 1 = \angle 2$

(e)

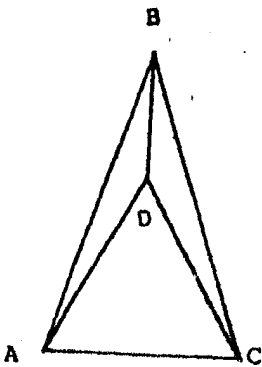
Datos:

- 1) BD es perpendicular a AC
- 2) $\angle 1 = \angle 2$

Justifica:

$$\angle A = \angle C$$

(f)

Datos:

- 1) El $\triangle ABC$ es equilátero
- 2) $AD = DC$

Justifica:

$$\angle BAD = \angle DCB$$

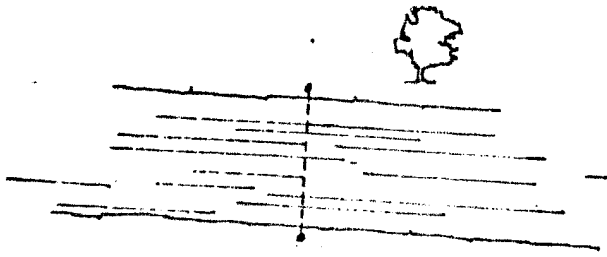
Nota: El ángulo se designa de cualquiera de las siguientes formas:

- 1.- Con la sola letra del vértice si hay únicamente un ángulo que tenga tal vértice.
- 2.- Con una letra minúscula o un número que se coloca entre los lados del ángulo en las cercanías del vértice.
- 3.- Por medio de tres letras mayúsculas, de las cuales la del vértice se halla en medio de las otras dos, que se colocan sobre los lados del ángulo.

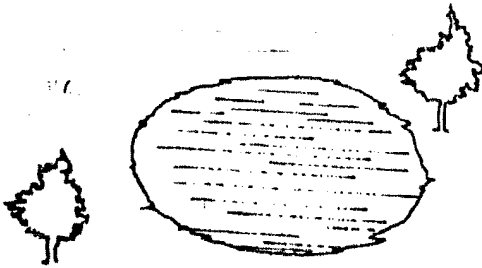
Resuelve los siguientes problemas utilizando los criterios de congruencia.

1.- En Valle de Bravo cerca de la casa de un amigo pasa un riachuelo.

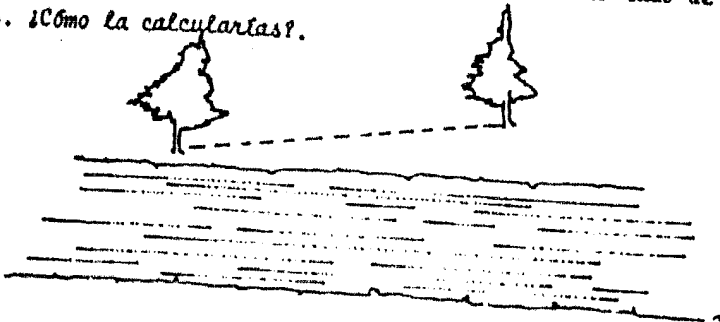
Sabiendo el que me gustan las matemáticas, me propuso que calculara su longitud sin atravesarlo. ¿Cómo lo harías tú?



2.- Encuentra la distancia que hay entre dos árboles que están a la orilla de un lago que impide la medición directa.



3.- Supongamos que te encuentras en la orilla de un río y quieres encontrar la distancia que hay entre dos árboles del otro lado de donde tú estás. ¿Cómo la calcularías?



CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

INTRODUCCION

El problema de construir figuras es uno de los más antiguos de las matemáticas y ha sido de gran importancia en geometría. Seguramente en un principio se pensó que la regla (no graduada) y el compás eran suficientes para llevar a cabo cualquier construcción geométrica; sin embargo muy pronto los geómetras griegos se enfrentaron con problemas aparentemente sencillos que no pudieron resolver utilizando solamente estos dos instrumentos. Estos problemas permanecieron vigentes hasta el Siglo XIX en que se estableció, con la ayuda del Algebra, que tipo de problemas de construcción tienen solución con estos instrumentos.

Cabe aclarar que, resolver un problema de construcción en matemáticas es un problema teórico; es decir, no se trata de construir en la práctica una figura geométrica con cierto grado de exactitud, sino demostrar que sin otra ayuda que los instrumentos escogidos, puede encontrarse teóricamente la solución suponiendo que nuestros instrumentos tienen la precisión ideal.

Un problema de construcción se plantea de la siguiente manera: de elementos dados (puntos, segmentos, rectas, ángulos, círculos, etc.) deben encontrarse otros elementos bajo las siguientes reglas:

- a) Solamente deben usarse ciertos instrumentos bien definidos.
- b) Cada uno de los instrumentos puede usarse de manera previamente determinada.
- c) La construcción debe terminarse en un número finito de pasos.

La restricción tradicional de utilizar como únicos instrumentos para construcciones geométricas la regla y el compás, se remonta a la antigüedad. Se piensa que fue Platón quien estableció la forma en que debían usarse estos instrumentos.

Debemos aclarar que aunque la regla y el compás son, ciertamente, -- los instrumentos más simples, restringirnos a ellos no es esencial en geometría. Existen instrumentos, algunos de los cuales hemos usado en unidades anteriores (regla graduada, escuadra, transportador), aparte de la regla y el compás y curvas distintas del círculo y la recta que amplían las posibilidades de construir figuras. Sin embargo, nos apegaremos al espíritu griego tradicional.

Los alcances constructivos de la regla y el compás, están caracterizados de la siguiente manera.

- 1) Puede trazarse una recta de un punto a otro.
- 2) Un segmento de recta puede prolongarse continuamente en línea -- recta.
- 3) Puede trazarse una circunferencia tomando cualquier centro y radio.

La regla es, por lo tanto, el instrumento que nos permite trazar rectas, no podemos utilizarla para medir.

A partir de la definición del uso que puede hacerse de la regla y el compás, se deriva que cualquier construcción con estos dos instrumentos -- debe ser una sucesión de las siguientes construcciones fundamentales.

1. Trazar la recta que pasa por dos puntos.
2. Determinar el punto de intersección de dos rectas.

3. Trazar un círculo con centro en un punto dado y de radio dado.
4. Determinar los puntos de intersección de dos círculos.
5. Determinar los puntos de intersección de un círculo y una recta.

Para hacer más sencillo el estudio de las construcciones las hemos dividido en tres secciones.

La primera en la Unidad III de congruencia de triángulos, la segunda en la Unidad IV de semejanza y la tercera en la Unidad VIII respecto a --
circunferencia.

Para todo problema de construcción consideramos dos partes:

1. La descripción de la construcción paso a paso.
2. La justificación de la construcción.

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

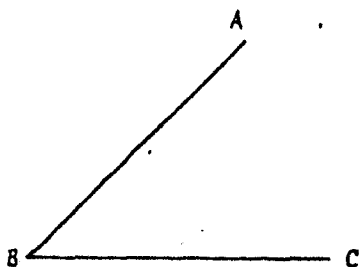
(1a. parte)

1a. construcción:

BISECCION DE UN ANGULO

Dibuja un ángulo y traza una recta que la divida en dos partes iguales.

(A dicha recta se le llama bisectriz)



Solución:

a) Construcción

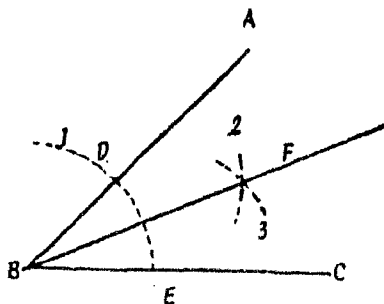


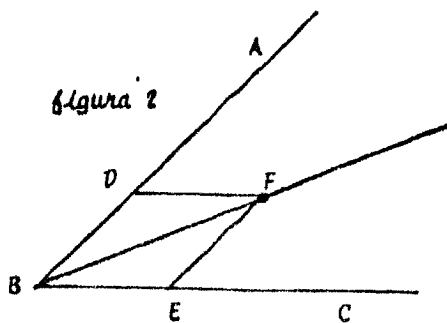
figura 1

- 1.- Sea el ángulo ABC el ángulo dado.
- 2.- Con centro en B y radio arbitrario, traza el arco de circunferencia 1.
- 3.- Sean D y E los puntos donde el arco 1 corta a los lados AB y CB del -
ángulo dado, respectivamente.
- 4.- Con centro en D y con el radio anterior, traza el arco de circunferencia 2.
- 5.- Con centro en E y con el mismo radio, traza el arco de circunferencia 3.

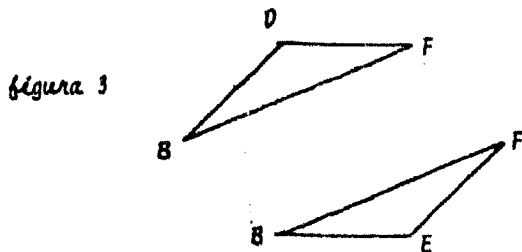
- 6.- Sea F el punto donde se cortan los arcos de circunferencia 2 y 3.
 7.- Se afirma que el segmento BF divide en dos ángulos iguales al ángulo ABC .

b) Justificación:

En la figura que ya se tiene construida (figura 1) traza los segmentos EF y DF (figura 2).



Observa que se formaron los triángulos BFD y BEF . ¿Serán congruentes? Para responder a esta pregunta, separemos los triángulos como se ve en la figura 3.



¿Qué sabemos de estos triángulos?

- i) $BD = BE$ por ser radios del arco 1 (1er paso).
- ii) $BF = BF$ por ser lado común.
- iii) $DF = EF$ por construcción (pasos 3 y 4).

De donde los triángulos BFD y BEF son congruentes por el criterio "LLL".

Luego, el $\angle DBF = \angle FBE$, lo cual se quería justificar.

2a. Construcción:

BISECCION DE UN SEGMENTO

Dibuja un segmento de recta y encuentra un punto que lo divida en dos partes iguales. A este punto se le llama el punto medio del segmento.



Solución:

a) Construcción.

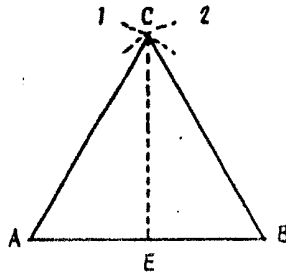


figura 1

- 1.- Sea AB el segmento dado.
- 2.- Con centro en A y radio AB, traza el arco de circunferencia 1.
- 3.- Con centro en B y radio BA, traza el arco de circunferencia 2.
- 4.- Sea C el punto donde se cortan los arcos de circunferencia 1 y 2.
- 5.- Traza los segmentos AC y BC.
- 6.- Bisecta el ángulo C (1a. construcción).
- 7.- Se afirma que el punto E, que es la intersección del segmento AB con la bisectriz CE, divide en dos partes iguales al segmento AB.

b) Justificación:

Usando la figura 2, justificaremos que los triángulos AEC y CEB son congruentes:

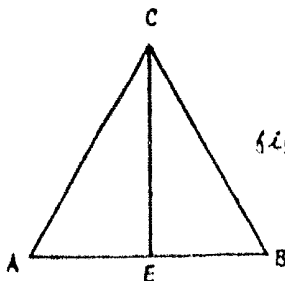
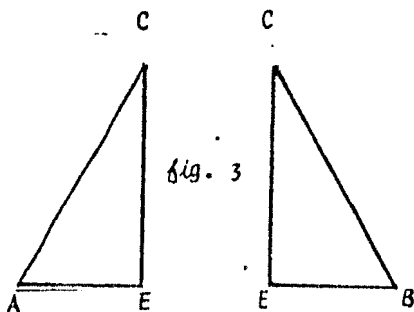


figura 2

Primero separemos los triángulos, como se observa en la figura 3.



¿Qué sabemos de estos triángulos?

- i) $AC = CB$ por construcción (pasos 1 y 2).
- ii) $\angle ACE = \angle ECB$ por ser CE la bisectriz del ángulo C .
- iii) $CE = CE$ por ser lado común.
- iv) $\triangle AEC \cong \triangle CEB$ por el criterio LAL.
- v) $AE = EB$, consecuencia del criterio.

Luego E divide en dos partes iguales al segmento AB .

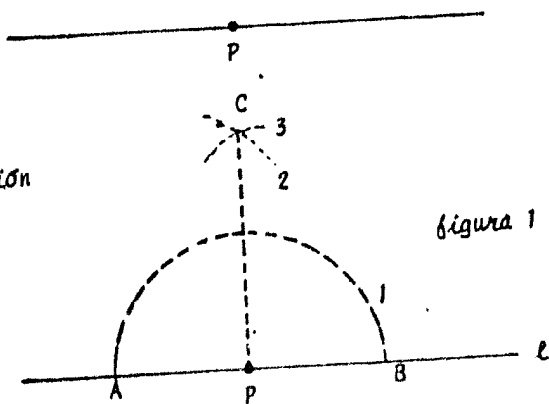
3a. Construcción:

LA PERPENDICULAR

Construye la perpendicular a una recta dada en un punto dado de ésta.

Solución:

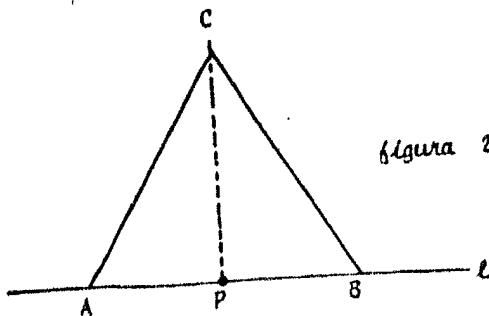
a) Construcción



- 1.- Sea l la recta dada y P el punto dado sobre ella.
- 2.- Con centro en P y un radio cualquiera se traza el arco 1.
- 3.- Sean A y B los puntos donde se intersectan el arco 1 y la recta l .
- 4.- Con centro en A y radio AB se traza el arco 2.
- 5.- Con centro en B y radio BA se traza el arco 3.
- 6.- Sea C el punto donde se intersectan los arcos 2 y 3.
- 7.- Se traza la recta que pasa por C y P .
- 8.- Afirmamos que CP es perpendicular a la recta dada l .

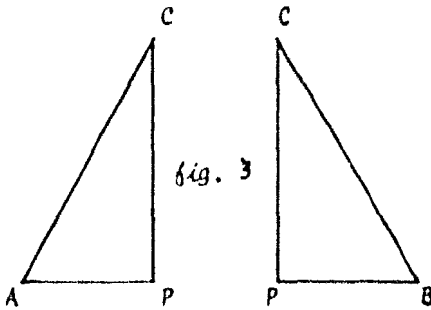
b) Justificación

En la figura 1, tracemos los segmentos AC y CE como se observa en la figura 2.



Justificaremos que el $\triangle APC$ y el $\triangle PBC$ son congruentes.

Separaremos los triángulos (figura 3).



- i) $AP = PB$ por ser radios del arco 1 (paso 1 y 2).
- ii) $AC = CB$ por construcción (pasos 4, 5 y 6).
- iii) $CP = CP$ por ser lado común.
- iv) $\triangle APC \cong \triangle PBC$, por el criterio LLL.

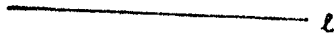
De donde $\angle APC = \angle CPB$, consecuencia del criterio y CP es perpendicular a AB .

EJERCICIOS.

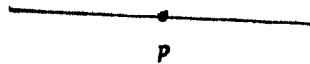
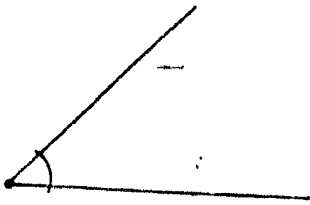
1.- Haz las siguientes construcciones, redacta su solución y justifícala.

1.- Traza una perpendicular a una recta dada desde un punto fuera de ella.

• - p



2.- Sobre una recta dada y en un punto de ella, construye un ángulo igual a un ángulo dado.



II.- Utilizando las construcciones hasta ahora estudiadas construye sin transportador.

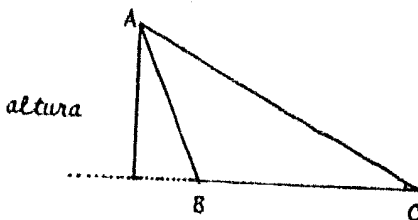
1.- Un ángulo de 45°

2.- Un ángulo de 30°

III.- Construye

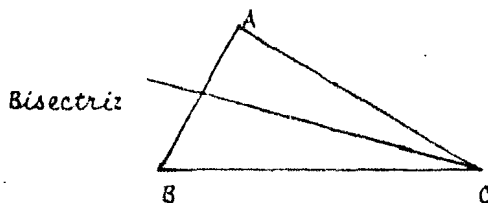
1.- Una paralela a una recta dada que pase por un punto fuera de ella.

2.- Las alturas de un triángulo dado.



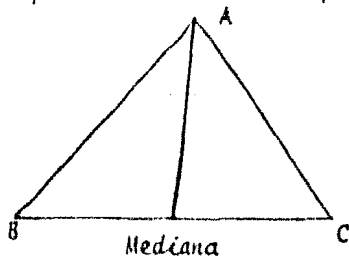
(Se llama altura de un triángulo al segmento de recta perpendicular a uno de sus lados y que pasa por el vértice opuesto).

3.- Las bisectrices de un triángulo dado.



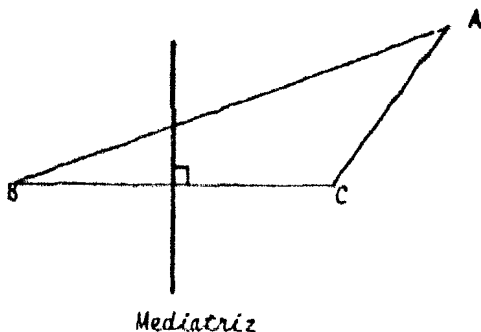
4.- Las medianas de un triángulo dado.

(Una mediana de un triángulo es el segmento de recta que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto).



5.- Las mediatrices de un triángulo dado.

(Una mediatriz de un lado de un triángulo es la perpendicular a ese lado en su punto medio).



UNIDAD IV

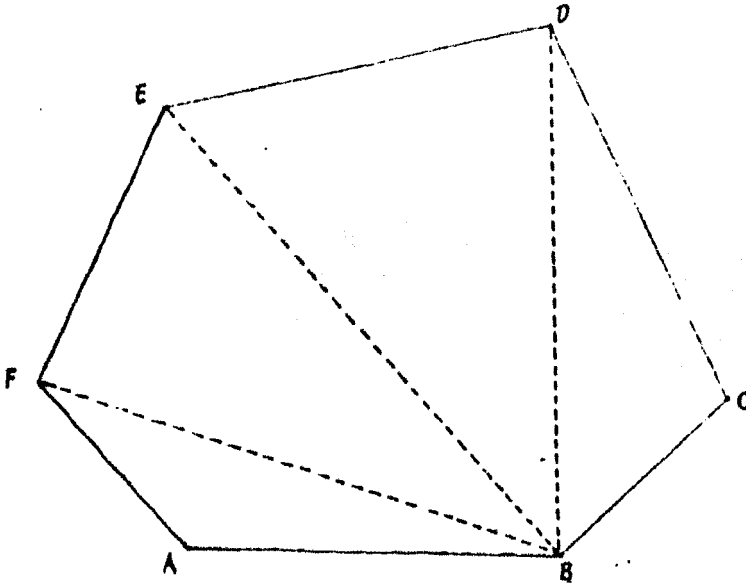
Semejanza de triángulos.

SEMEJANZA DE TRIANGULOS

1. LA ESCALA

Para representar un continente, un país, una ciudad, una célula, un cromosoma, etc., se hace necesario tener dibujos o fotografías a escala. La escala tiene la característica de disminuir o aumentar el tamaño de las cosas, conservando la misma forma.

En el fraccionamiento "El tejocote" se va a construir un mercado y los vecinos han conseguido un terreno de la forma siguiente.



$$AB = 50m$$

$$DE = 53m$$

$$FB = 74m$$

$$BC = 30m$$

$$EF = 40m$$

$$EB = 80m$$

$$CD = 55m$$

$$FA = 30m$$

$$DB = 70m$$

Ejercicio.

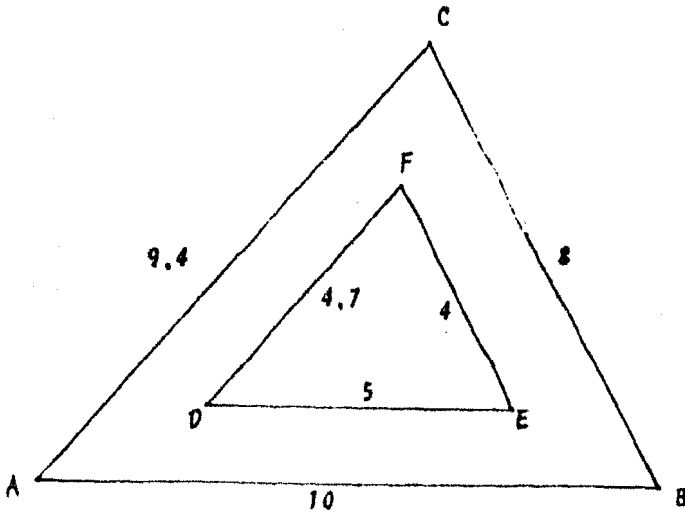
Dibuja un plano a escala del terreno con la convención de que 1 centímetro represente 10 metros sobre el terreno.

En el plano a escala que dibujes debes anotar la escala que usaste, en este caso debes escribir:

ESCALA 1 : 1000 centímetros

Esto, lo que significa es que cada centímetro en el plano representa 1000 centímetros en el terreno. Recuerda que 1000 centímetros es igual a 10 metros.

A manera de ejemplo, observa los siguientes triángulos.

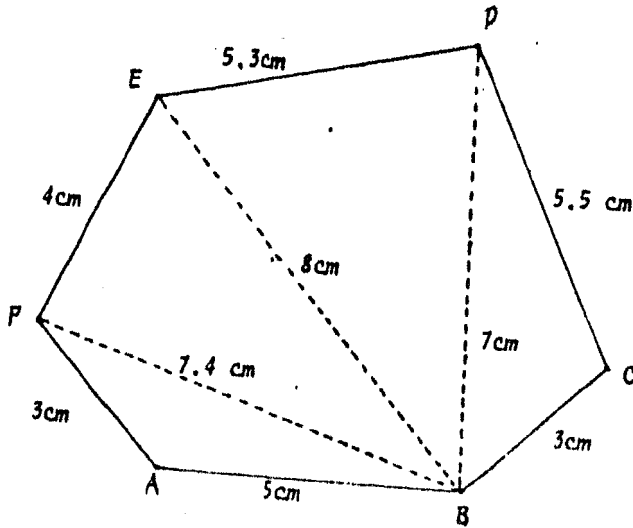


El triángulo DFE está a escala del triángulo ACB. La escala es:

ESCALA 1: 2 centímetros;

o sea, cada centímetro en el triángulo pequeño representa dos centímetros del triángulo grande.

Si seguiste las indicaciones anteriores el plano del mercado quedaría como se observa en la siguiente figura.



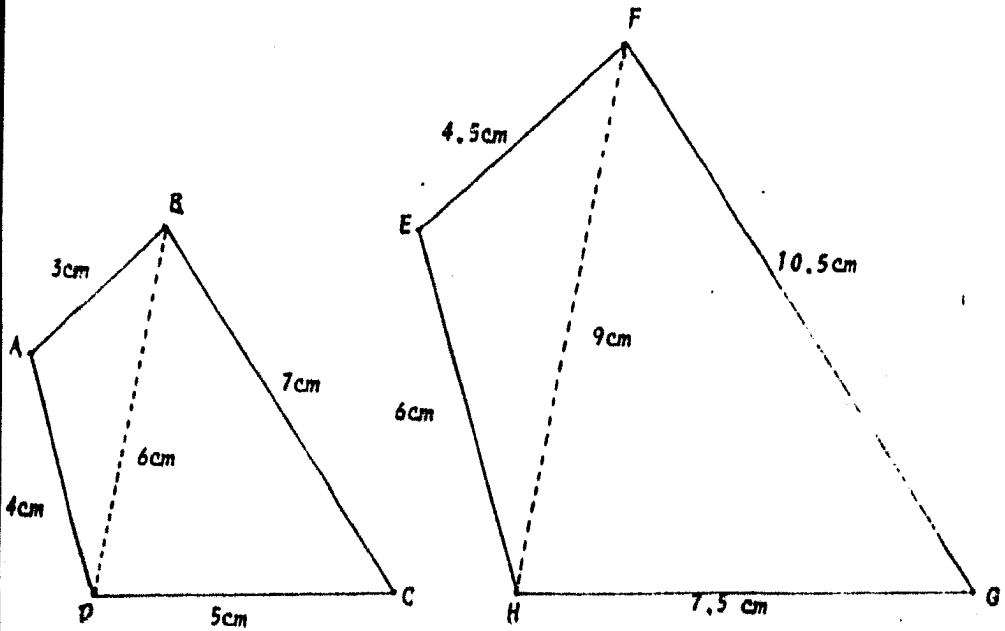
ESCALA 1: 1000 centímetros

Resuelve los siguientes ejercicios:

- Si mido en el plano a escala el segmento FD , ¿Podré saber cuánto mide la distancia FD pero ahora en el terreno?
- Mide en tu plano a escala el segmento FD y a continuación menciona cuánto mide la distancia FD en el terreno.
- Mide en tu plano a escala el segmento EC y menciona cuánto mide la distancia EC en el terreno.
- Construye un triángulo con las medidas 14, 16 y 10 centímetros. Después dibuja otro triángulo a escala del triángulo anterior de tal forma que la escala sea 1:2 centímetros, o sea que un centímetro en el triángulo a escala represente dos centímetros del triángulo original.

2. LA RAZON DE PROPORCIONALIDAD

En la figura siguiente el cuadrilátero ABCD está a escala del cuadrilátero EFGH y la escala es 1: 1.5 centímetros.



Sea, un centímetro del cuadrilátero ABCD representa un centímetro y medio del cuadrilátero EFGH.

Ejercicio: Multiplica cada lado del cuadrilátero ABCD por 1.5 ¿Se cumplen las siguientes igualdades?.

a) $AB \times 1.5 = EF$

d) $DA \times 1.5 = HE$

b) $BC \times 1.5 = FG$

e) $BD \times 1.5 = FH$

c) $CD \times 1.5 = GH$

f) $AC \times 1.5 = EG$

Pero, ¿cómo se puede conocer cuál es la escala?

Es muy sencillo, observa los siguientes cocientes:

- dividamos EF entre AB ; $\frac{4.5}{3} = 1.5$

- dividamos FG entre BC ; $\frac{10.5}{7} = 1.5$

- dividamos GH entre CD ; $\frac{7.5}{5} = 1.5$

- dividamos HE entre DA ; $\frac{6}{4} = 1.5$

- dividamos FH entre BD ; $\frac{9}{6} = 1.5$

A cada uno de los cocientes anteriores se les llama razón de proporcionalidad. Si te das cuenta, la razón de proporcionalidad nos dice cuál es la escala. Si alguno de los cinco cocientes hubiera sido diferente de 1.5, entonces el cuadrilátero ABCD no habría estado a escala del cuadrilátero EFGH.

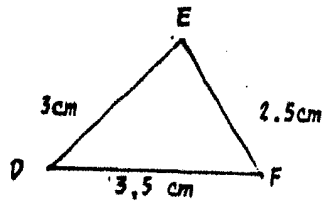
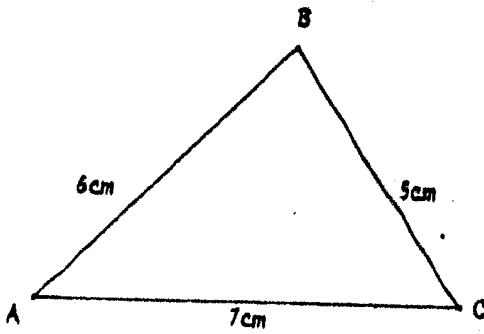
Ejercicios:

1.- Con respecto a los cuadriláteros anteriores, también el cuadrilátero EFGH está a escala del cuadrilátero ABCD.

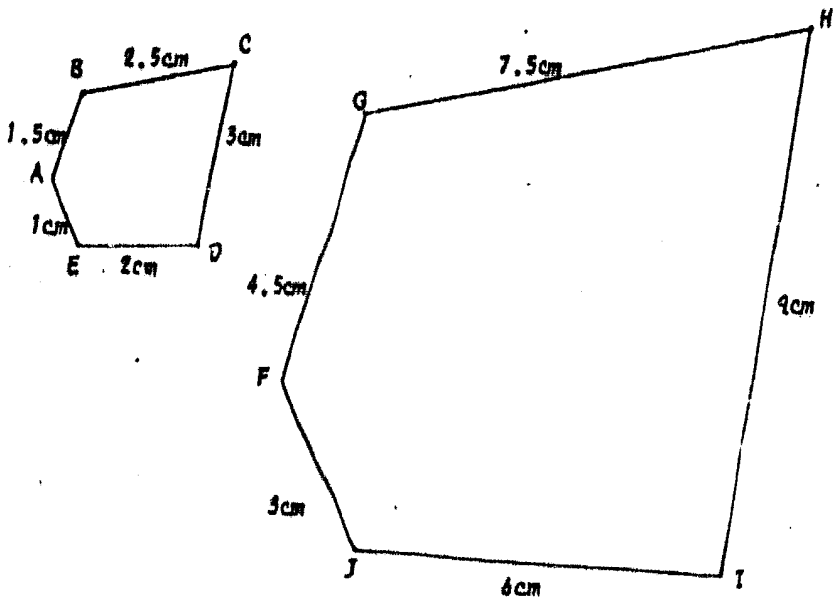
Encuentra la escala.

2.- El triángulo ABC está a escala del triángulo DEF.

Encuentra la razón de proporcionalidad y la escala.



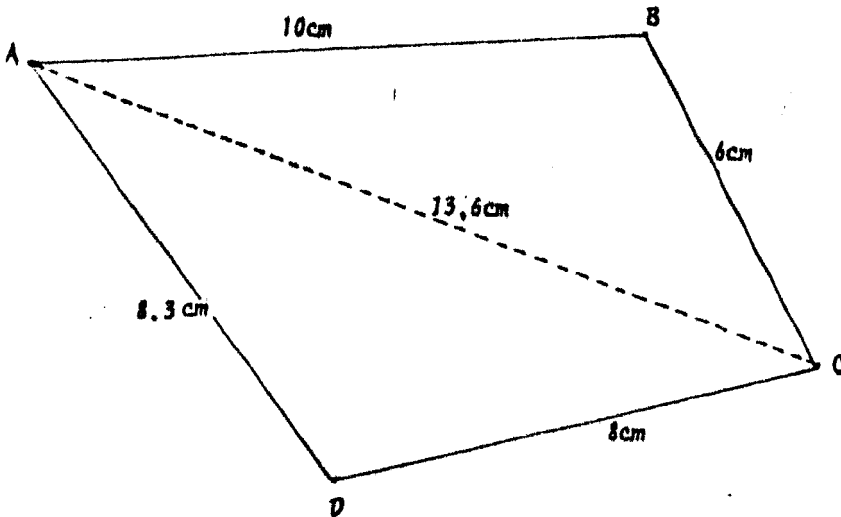
3.- El pentágono ABCDE está a escala del pentágono FGHIJ.
Encuentra la razón de proporcionalidad y la escala.



3. LOS LADOS PROPORCIONALES

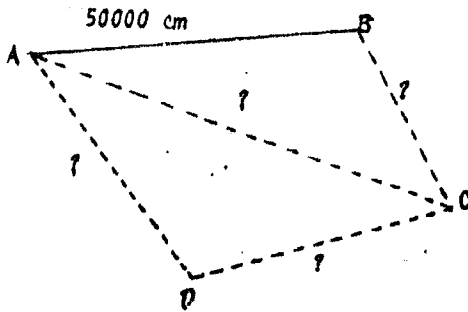
En el primer problema hablamos de planos a escala, ¿Si conocemos ciertas propiedades en el plano a escala, podremos conocer lo que sucede en el terreno? A continuación te pondremos un ejemplo con la finalidad de que entiendas la pregunta que te estamos formulando.

Imagina que nos dan un plano a escala de un terreno, en el cual, no anotaron la razón de proporcionalidad. Observa la siguiente figura.



PLANO A ESCALA

Si quisiéramos saber las dimensiones que tiene el terreno.
 ¿Bastaría con medir sólo uno de sus lados?. Considera que en
 el terreno el segmento representado por AB, mide 50000 cm.
 (500 metros). ¿Se puede con este único dato conocer las di-
 mensiones de los otros lados?.



Con los datos anteriores contesta las siguientes preguntas.

- Encuentra con que escala se hizo el plano (¿un centímetro - en el plano a cuántos centímetros corresponde en el terreno?).
- ¿Cuánto mide el lado BC en el terreno?
- ¿Cuánto mide el lado CD en el terreno?
- ¿Cuánto mide el lado DA en el terreno?
- ¿Cuánto mide el lado AC en el terreno?
- ¿Cuánto mide el lado BD en el terreno?

Antes de seguir leyendo, te sugerimos que resuelvas los ejerci-
 cios anteriores.

A continuación te daremos nuestra solución:

Solución al inciso (a):

Según los datos que tenemos, 10 centímetros en el plano a escala, corresponden a 50000 centímetros en el terreno. Observa en las dos figuras el valor del segmento AB. Eso quiere decir que 1 centímetro corresponde con 5000 centímetros, o sea la solución al inciso (a), es:

Escala 1: 5000 centímetros

Solución al inciso (b):

Como el plano está a escala del terreno, los lados correspondientes deben ser proporcionales, y como ya sabemos que la razón de proporcionalidad es 5000, entonces los 6 centímetros del segmento BC en el plano corresponden a 30000 centímetros (300 metros) en el terreno. Este resultado también lo podemos obtener al plantearnos la ecuación:

$$6 \times 5000 = BC$$

$$\text{o sea } BC = 30000$$

Observa que los lados del plano se relacionan con sus correspondientes del terreno por medio de la ecuación:

$$\text{Lado del plano} \times 5000 = \text{Lado del terreno}$$

Solución al inciso (c):

En forma análoga al inciso (b), tenemos

$$8 \times 5000 = CD$$

$$\text{o sea } CD = 40000$$

por lo tanto el lado CD del terreno mide 40000 centímetros. (400 metros).

Solución al inciso (d):

En forma análoga al inciso (b), tenemos

$$8.3 \times 5000 = PA$$

El lado PA del terreno mide 41500 centímetros (415 metros).

Solución al inciso (e):

Para encontrar el valor del lado AC del terreno, podemos proceder como en los incisos anteriores, sin embargo te mostraremos otra forma de encontrar el resultado. Por ser los lados correspondientes proporcionales, se debe cumplir que al dividir un lado del terreno entre el lado correspondiente del plano el cociente debe ser en todos los casos igual a 5000, en particular se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{50000 \text{ (lado AB del terreno)}}{10 \text{ (lado AB del plano)}} = \frac{AC \text{ (lado del terreno)}}{13.6 \text{ (lado AC del plano)}}$$

$$\frac{50000}{10} = \frac{AC}{13.6}$$

$$50000 \times 13.6 = 10 \times AC$$

$$\frac{50000 \times 13.6}{10} = AC$$

$$AC = 68000$$

El lado AC del terreno mide 68000 centímetros (680 metros).

Solución al inciso (f):

Para contestar esta pregunta primero tendremos que saber cuánto mide el segmento BD en el plano, para después encontrar la medida del lado correspondiente en el terreno. Midiendo el segmento BD en el plano encontramos que aproximadamente es de

8.75 centímetros, por lo tanto procediendo como en el inciso anterior, tenemos que:

$$\frac{BD \text{ (lado del terreno)}}{8.75 \text{ (lado BD del plano)}} = \frac{50000 \text{ (lado AB del terreno)}}{10 \text{ (lado AB del plano)}}$$

$$\frac{BD}{8.75} = \frac{50000}{10}$$

$$BD = \frac{50000 \times 8.75}{10}$$

$$BD = 43750$$

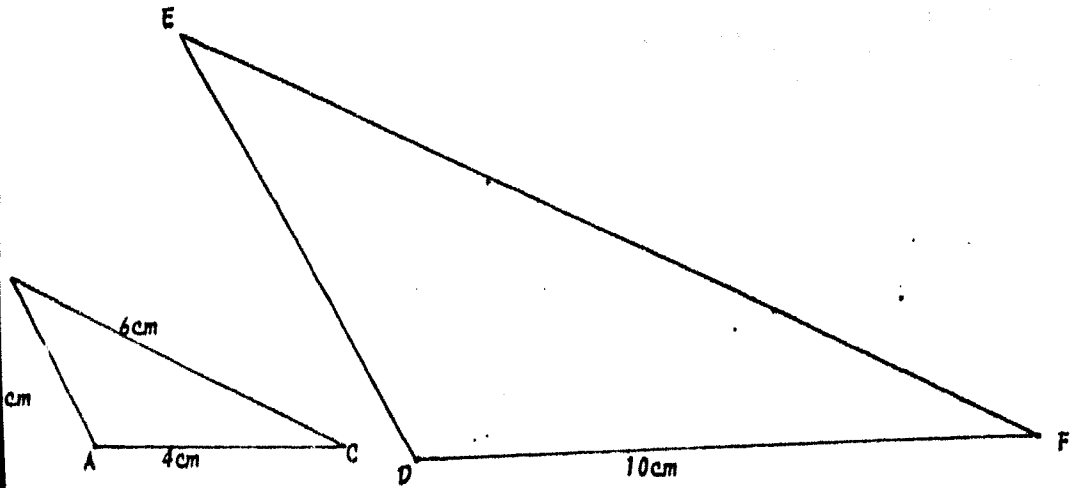
por lo tanto el lado BD mide aproximadamente 43750 centímetros (437.5 metros).

Hasta ahora hemos visto que con sólo saber la dimensión de un lado del terreno, podemos conocer los demás lados. Si no hubiéramos tenido este dato, ¿se hubieran podido conocer los demás lados del terreno? Después de haber analizado el problema, te habrás dado cuenta que no, porque el saber cuánto medía un lado, nos permitió conocer la razón de proporcionalidad y con ella la escala y los demás lados. ¿Basta entonces conocer la razón de proporcionalidad para saber todas las dimensiones del terreno? Te dejamos esta pregunta para que la pienses.

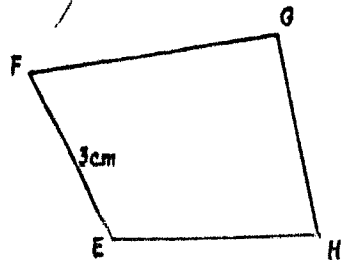
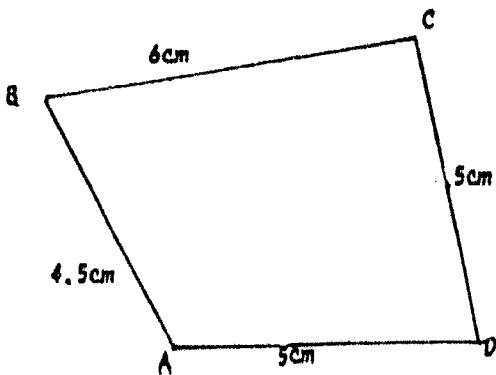
Ejercicios:

1.- El triángulo ABC está a escala del triángulo DEF.

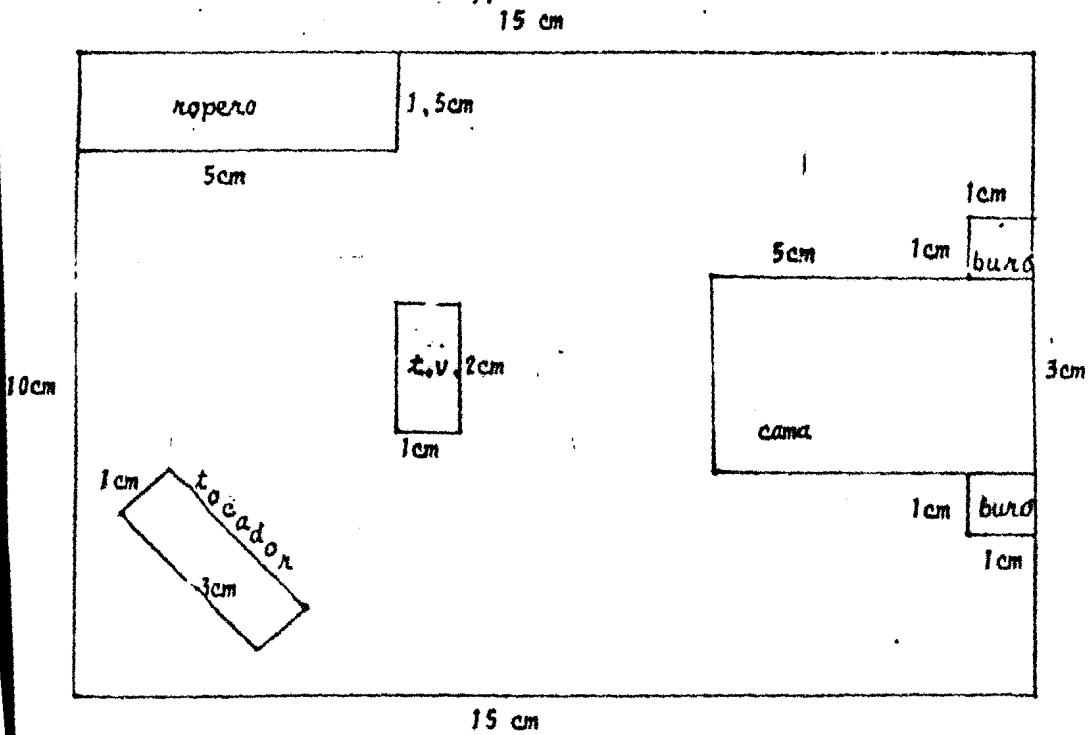
Encuentra la escala y las medidas de los lados DE y EF sin medirlos.



- 2.- El cuadrilátero ABCD está a escala del cuadrilátero EFGH.
Encuentra la escala y las medidas de los segmentos FG, GH
HE, sin medirlos.

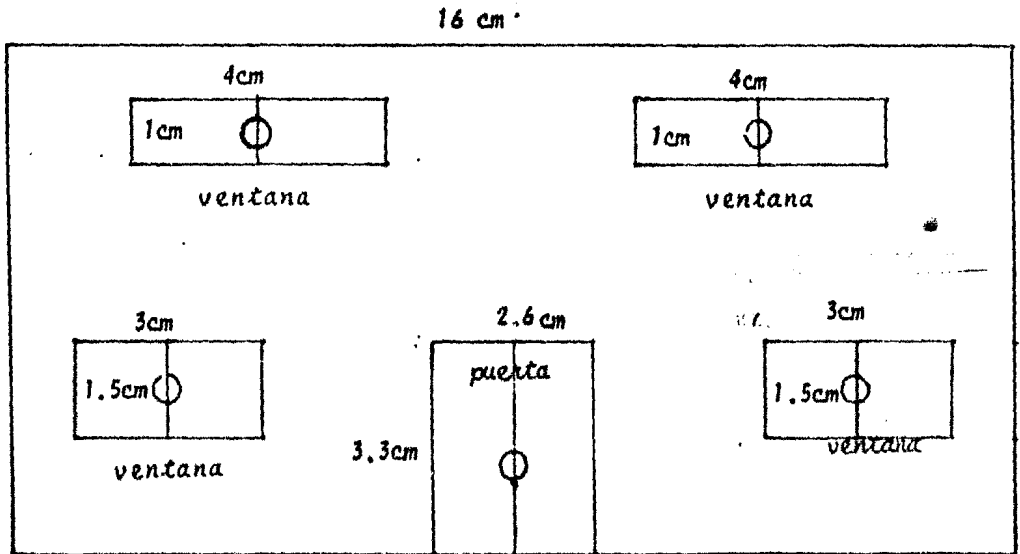


3.- A continuación se muestra el plano a escala de una recámara. Determina cuánto mide el largo y ancho de la - - cama, burós, ropero, tocador, televisión y de la recámara.



ESCALA 1: 50 centímetros

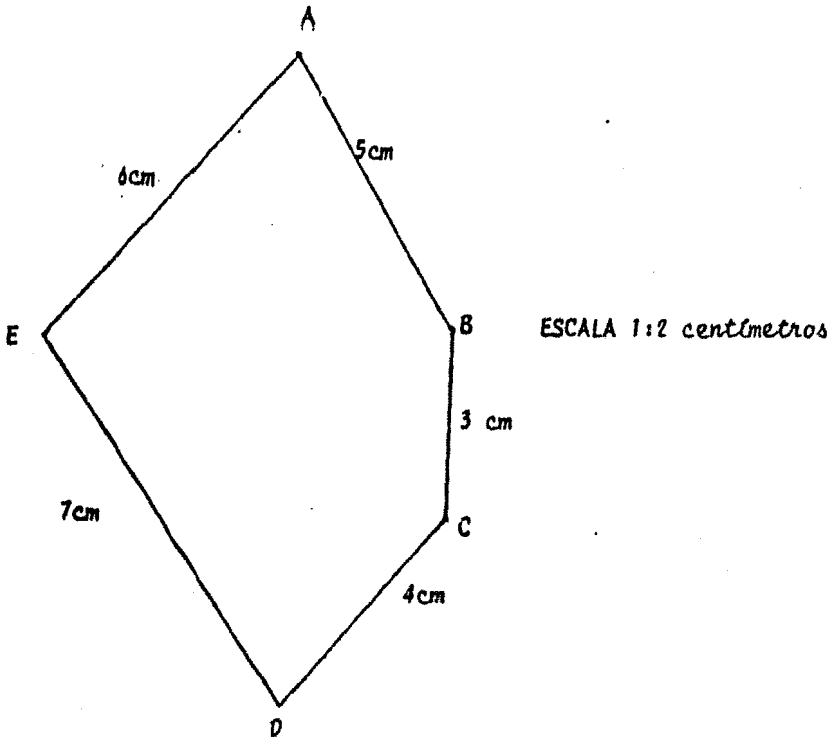
4.- A continuación se muestra el plano a escala de la fachada de una casa. Determina cuánto mide el largo y ancho de la fachada, la puerta y las ventanas.



4. LOS ANGULOS EN UN PLANO A ESCALA

Hagamos un problema en el cual queremos que utilices tus -- conocimientos sobre escalas. El problema consiste en lo -- siguiente:

A continuación te damos un plano a escala y te solicitamos que dibujes la figura original.



Como podrás observar, la escala nos dice que por cada centímetro del plano a escala la figura original debe tener dos centímetros. En el plano:

- AB mide 5 cm, por lo tanto el lado correspondiente en la figura original debe medir 10 cm.

- BC mide 3cm, por lo tanto el lado correspondiente en la figura original debe medir 6cm, etc.

¿Ya terminaste el dibujo que te solicitamos?

¿No?, está bien te esperamos un momento más.

Seguramente tuviste varios problemas al hacer el dibujo, como por ejemplo que te faltaba papel para dibujar la figura completa, pero bien finalmente ya la tienes.

Ahora te solicitamos que:

1.- Observes si tu figura tiene la misma forma que la figura a escala (recuerda que los dibujos a escala aumentan o disminuyen el tamaño de las cosas, pero conservan la misma forma).

2.- Mida cada uno de los lados de tu figura y veas si miden el doble que los lados de la figura a escala.

Después de medir los lados y compararlos, te pudiste haber encontrado con alguno de los siguientes resultados:

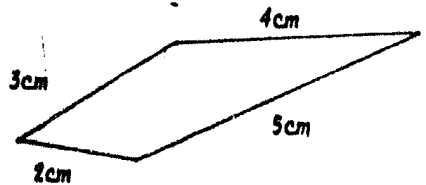
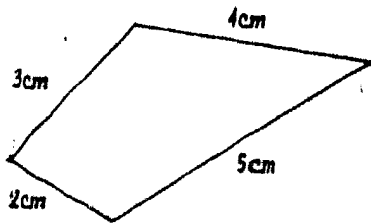
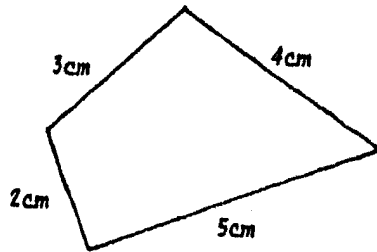
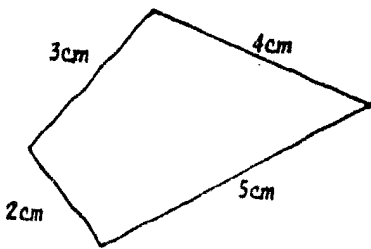
a) Los lados de tu figura miden el doble que los lados de la figura a escala, pero la figura no cerró.

b) La figura cerró pero no tiene la misma forma que la figura a escala.

Para los resultados a y b, te sugerimos que midas los ángulos de tu figura y los de la figura a escala, ¿qué encontraste?

Seguramente lo que obtuviste es que no todos los ángulos correspondientes miden lo mismo. Recuerda que cuando estudiamos la parte de Triángulos congruentes vimos que dos polígonos pueden tener las medidas de sus lados respectivamente iguales y sin

embargo no ser congruentes, ya que la forma, precisamente depende de que los ángulos correspondientes sean iguales. A manera de ejemplo, observa los siguientes cuadriláteros.



Vuelve a dibujar el pentágono, pero recuerda que los ángulos correspondientes deben ser iguales.

Bien, continuemos con el problema, ahora mide los segmentos AC, AD, BE y BD del plano a escala y compáralos con los -

segmentos correspondientes de la figura que dibujaste. ¿Qué resultados obtuviste? Lo que tuviste que haber encontrado, es que los segmentos de la figura original, tienen doble tamaño, que los segmentos del plano a escala. ¿Te sorprende esto?, -- claro que no, ya que precisamente la escala es 1:2 cm. En la siguiente página hemos dibujado la figura original; compárala con la que tú encontraste.

4 - 19

12cm

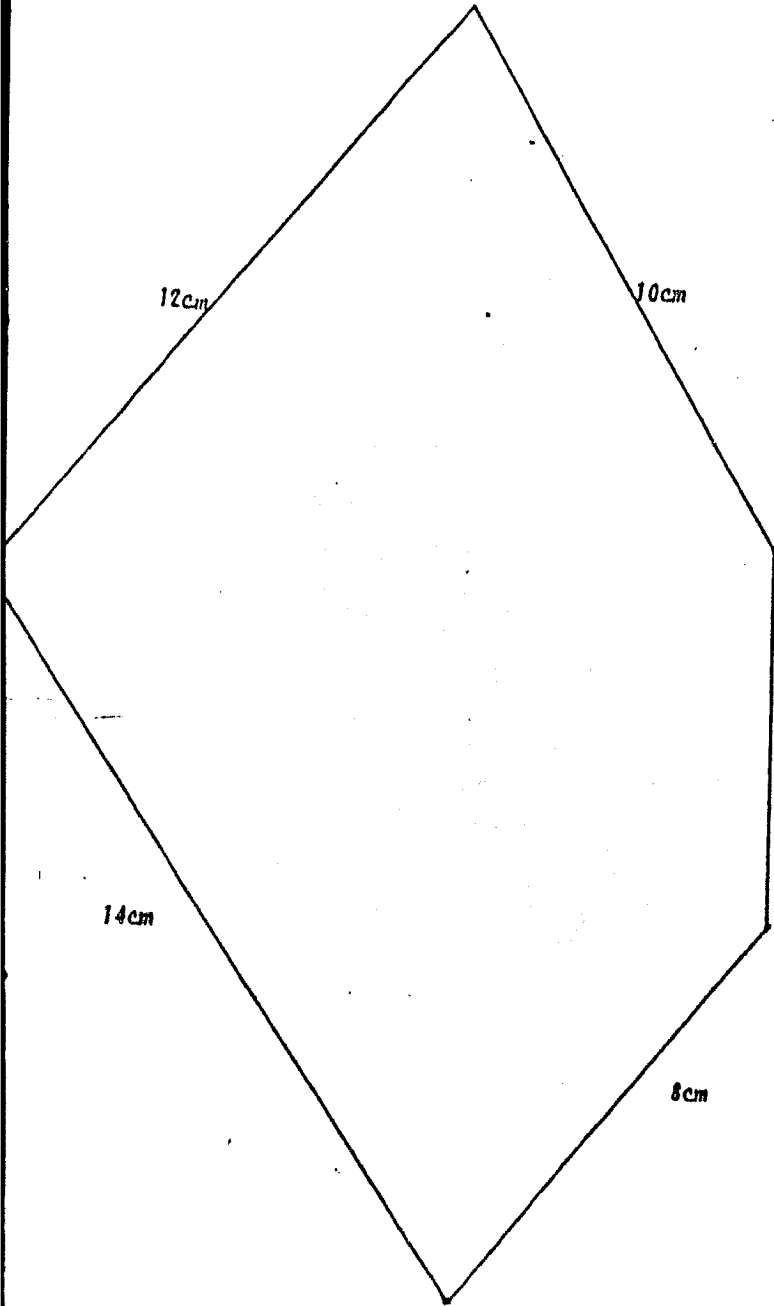
10cm

6cm

14cm

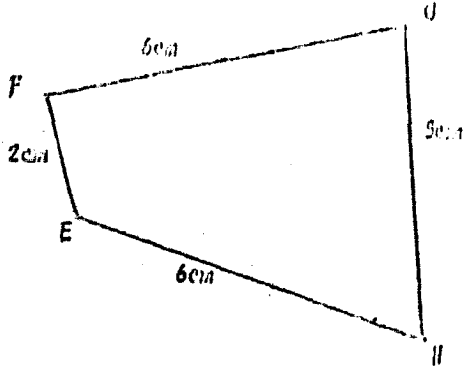
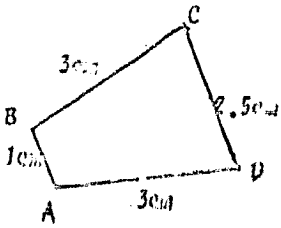
8cm

FIGURA ORIGINAL

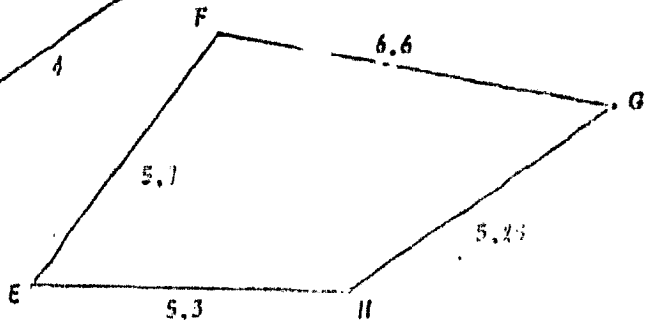
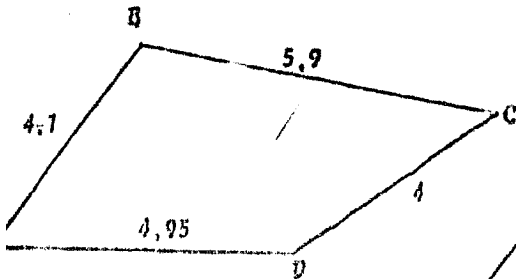


ejercicios:

- ¿Está el cuadrilátero ABCD a escala del cuadrilátero EFGH?
Si tu respuesta es afirmativa encuentra la escala, si no,
explica porqué no está a escala.

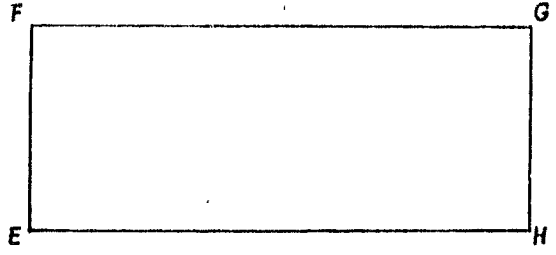
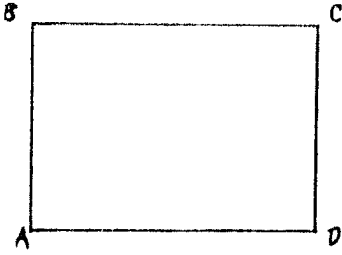


- ¿Está el cuadrilátero ABCD a escala del cuadrilátero EFGH?
Si tu respuesta es afirmativa encuentra la escala, en caso
contrario explica porqué no.

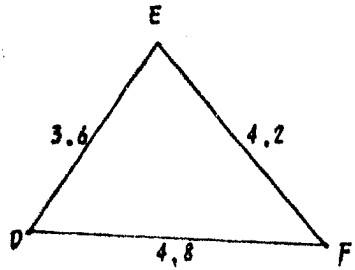
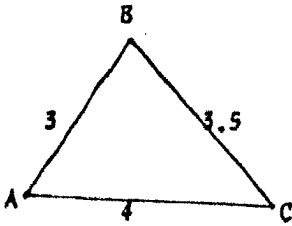


3.- ¿Está el rectángulo ABCD a escala del rectángulo EFGH?

Si tu respuesta es afirmativa encuentra la escala, en caso contrario explica porqué no.



4.- ¿Está el triángulo ABC a escala del triángulo DEF? Si tu respuesta es afirmativa encuentra la escala, en caso contrario explica porqué no.



Para resolver los cuatro ejercicios anteriores, debes recordar que un polígono está a escala de otro, cuando se cumple que:

- Sus lados son proporcionales, esto es, que la razón de proporcionalidad es la misma en todos los casos y
- Todos los ángulos correspondientes son iguales.

Solución:

- Para el primer ejercicio, nos encontramos que los lados sí son proporcionales, esto es:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{FG}{BC} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{GH}{CD} = \frac{5}{2.5} = 2$$

$$\frac{HE}{DA} = \frac{6}{3} = 2$$

Sin embargo si mides los ángulos de los dos cuadriláteros te encontrarás que:

$$\angle A \neq \angle E$$

$$\angle B \neq \angle F$$

$$\angle C \neq \angle G$$

$$\angle D \neq \angle H$$

Por lo tanto el cuadrilátero ABCD no está a escala del cuadrilátero EFGH.

- Para el segundo ejercicio, si mides los ángulos de los dos cuadriláteros, observarás que:

$$\angle A = \angle E$$

$$\angle B = \angle F$$

$$\angle C = \angle G$$

$$\angle D = \angle H$$

Sin embargo los lados no son proporcionales ya que:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{5.1}{4.1} = 1.243$$

$$\frac{FG}{BC} = \frac{6.6}{5.9} = 1.118$$

$$\frac{GH}{CD} = \frac{5.25}{4} = 1.312$$

$$\frac{HE}{DA} = \frac{5.3}{4.95} = 1.070$$

Para que el cuadrilátero ABCD estuviera a escala del cuadrilátero EFGA, además de tener los ángulos correspondientes iguales, las cuatro razones de proporcionalidad deber ser iguales y en este caso esto no se cumple, por lo tanto, no están a escala.

- Para el tercer ejercicio, los ángulos correspondientes son iguales, pero los lados no son proporcionales, por tanto, no están a escala.
- Para el cuarto ejercicio, los lados son proporcionales y -- los ángulos correspondientes son iguales.

5. EL FRACCIONAMIENTO

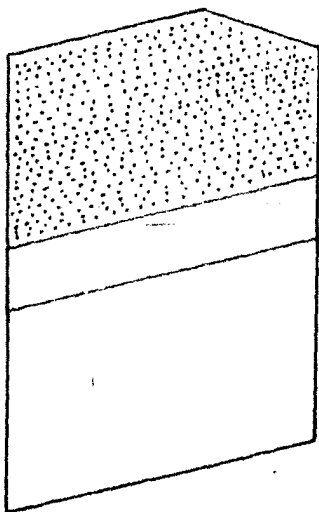
Hasta ahora hemos dicho que los planos a escala sirven para representar superficies grandes, pero en el caso que no queramos reducir, sino - - aumentar las dimensiones de una figura, ¿Podremos también usar los planos a escala?. Seguramente en alguna ocasión habrás visto los planos de un - - fraccionamiento. Suponte que compras un terreno y junto con los documentos de propiedad, te entregan un croquis del fraccionamiento. Observa la figura de la siguiente página. Si quisieras visualizar dónde quedará mejor la construcción de la casa, la alberca, el jardín, el estacionamiento, etc; y trataras de dibujar todo lo anterior en el croquis que te entregó el fraccionador, seguramente quedaría muy encimado, por lo cual, lo que - - más te conviene, es hacer un croquis de tu terreno, pero de mayor tamaño.

Si tu terreno fuera el que está sombreado (ver figura), te proponemos los siguientes ejercicios:

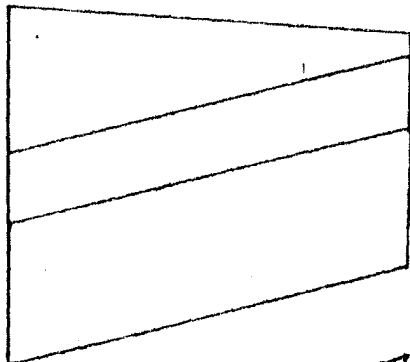
- 1.1 Dibuja el terreno sombreado lo más grande posible, pero con la condición de que quepa en una hoja tamaño carta.
- 2.1 Menciona cuál es la escala que usaste.

FRACCIONAMIENTO "EL PARAISO"

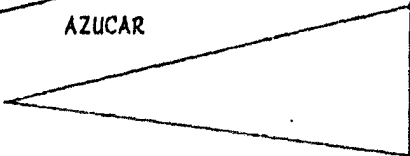
FRESAS



NARANJA



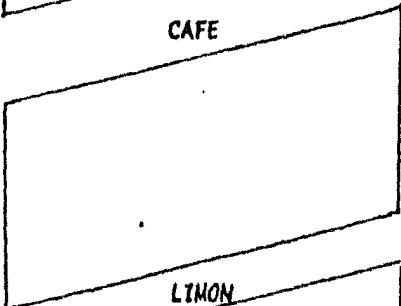
AZUCAR



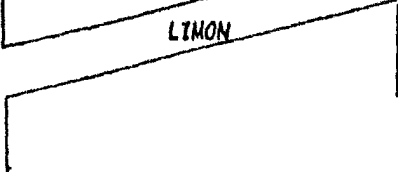
CANELA

JACARANDAS

CAFE



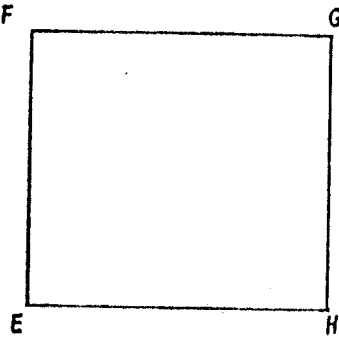
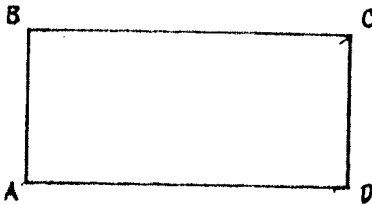
LIMON



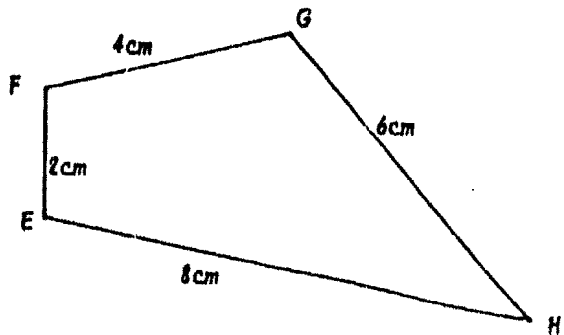
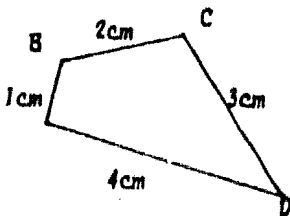
RESUMEN :

En los problemas anteriores hemos visto que:

- a) Si dos polígonos tienen respectivamente iguales sus ángulos, esto no garantiza que sus lados correspondientes sean proporcionales. Observa -- las siguientes figuras.



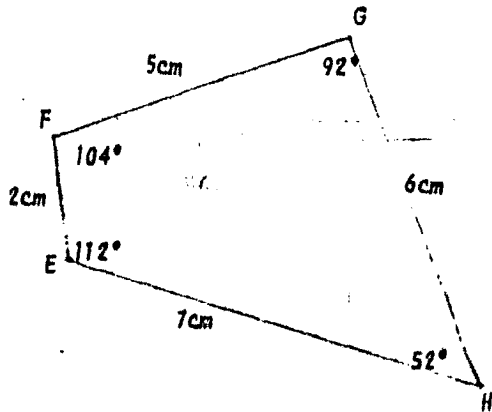
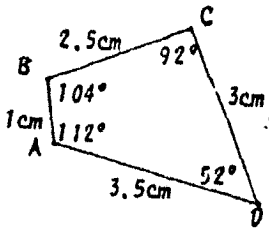
- b) Si dos polígonos tienen sus lados correspondientes proporcionales, esto no garantiza que sus ángulos correspondientes sean iguales. Observa -- las siguientes figuras.



Recuerda que lo anterior ya lo hablamos estudiado cuando vimos triángulos congruentes, en esa unidad vimos que en general los polígonos no son figuras rígidas, esto es, que pueden adoptar diferentes posiciones sin cambiar la longitud de sus lados.

De lo anterior concluimos que:

c) Para que dos polígonos estén a escala uno del otro, se requiere que sus lados correspondientes sean proporcionales y además que sus ángulos correspondientes sean iguales. Observa las siguientes figuras.



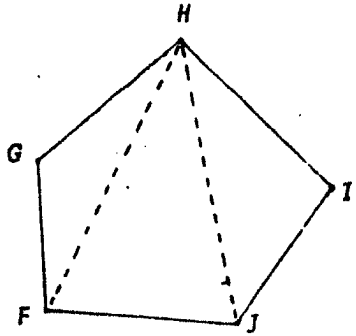
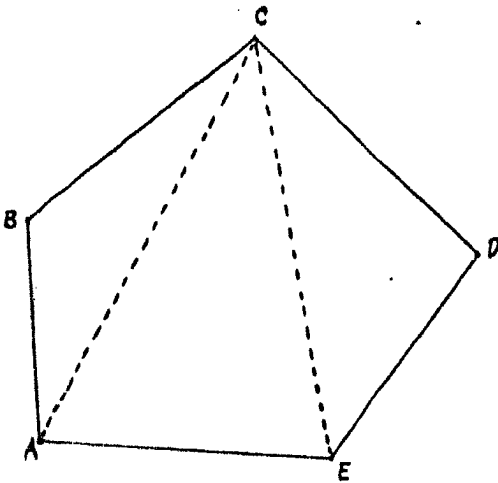
Pero en el caso del triángulo:

- i) Si los lados correspondientes son proporcionales, ¿los ángulos correspondientes serán iguales?
- ii) Si los ángulos correspondientes son iguales, ¿los lados correspondientes serán proporcionales?

Claro que sí, recuerda que cuando estudiamos triángulos congruentes encontramos que el triángulo es una figura rígida.

Por lo tanto, si quisieramos saber si dos polígonos están a escala uno de otro, bastaría triangularlos y hacer el análisis en base a los triángulos obtenidos.

Observa las siguientes figuras:



Los pentágonos anteriores se pueden triangular, quedando divididos en tres triángulos cada pentágono; para saber si el pentágono ABCDE está a escala del pentágono FGHIJ, contestemos las siguientes preguntas:

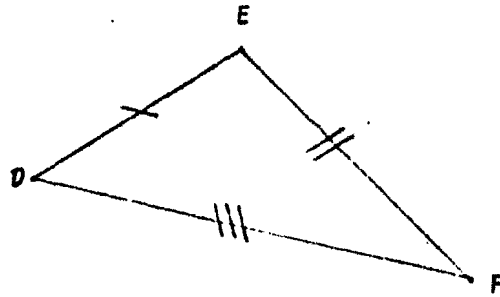
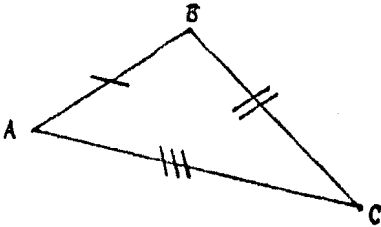
- i) ¿Está el triángulo ABC a escala del triángulo FGH?
- ii) ¿Está el triángulo ACE a escala del triángulo FHJ?
- iii) ¿Está el triángulo ECD a escala del triángulo JHI?

En caso que las tres preguntas anteriores sean afirmativas, diremos que el pentágono ABCDE está a escala del pentágono FGHIJ. En cambio, si alguno de los triángulos no está a escala de su correspondiente, entonces los pentágonos tampoco lo estarán.

A continuación resumiremos lo estudiado anteriormente refiriéndonos única-

mente a triángulos, el resumen lo haremos en las siguientes proposiciones.

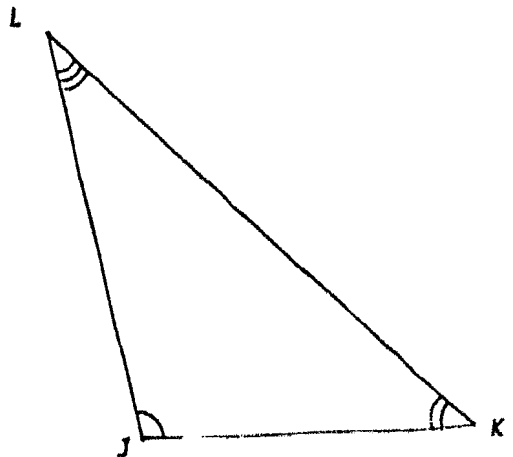
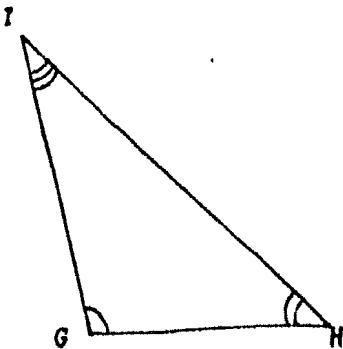
1a. Proposición: Si los lados de un triángulo ABC son proporcionales a los lados de otro triángulo DEF, entonces los ángulos del primero, son iguales a los ángulos del segundo.



O sea, si: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

entonces $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ y $\angle C = \angle F$.

2a. Proposición: Si los ángulos de un triángulo GHI son iguales a los ángulos de otro triángulo JKL, entonces los lados del primero son proporcionales a los lados del segundo.



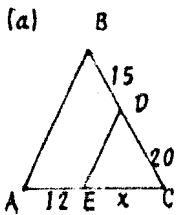
O sea, si: $\angle G = \angle J$; $\angle H = \angle K$, $\angle I = \angle L$;

entonces $\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL} = \frac{IG}{LJ}$

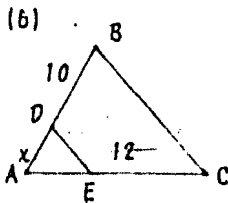
Nota: Cuando dos triángulos ABC y DEF, tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales, entonces, se dice que son semejantes y se simboliza de la siguiente forma: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Ejercicios:

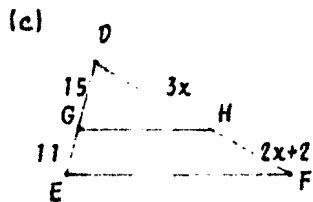
1.- Hallar x en los siguientes casos:



$AB \parallel ED$

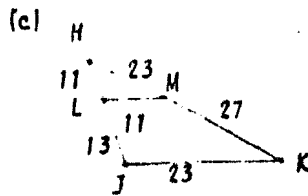
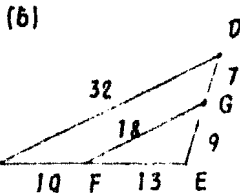
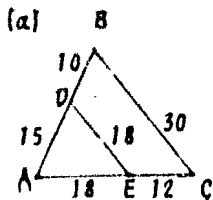


$DE \parallel BC$

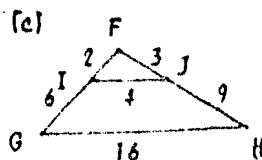
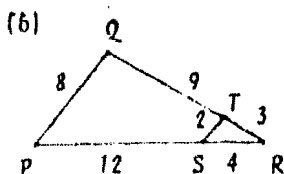
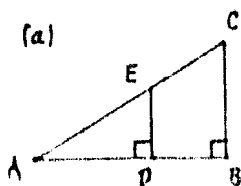


$GH \parallel EF$

- ¿En cuáles de los siguientes casos, es alguna recta paralela a uno de los lados del triángulo?



- ¿Son los siguientes triángulos semejantes?. Explica tu respuesta.



Solución:

Ejercicio 1.

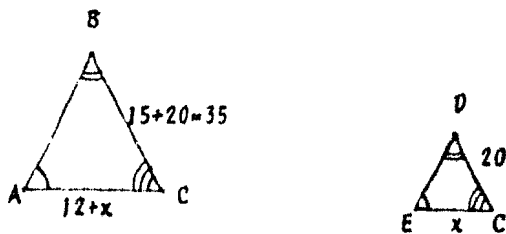
A continuación mostraremos como se resuelve el inciso a):

En este caso, nos indican que el segmento de recta AB es paralelo al segmento de recta ED, por lo tanto, haciendo uso de lo estudiado en rectas paralelas, tenemos que:

- i) $\angle BAC = \angle DEC$ (por ser ángulos correspondientes)
- ii) $\angle ABC = \angle EDC$ (por ser ángulos correspondientes)
- iii) $\angle ACB = \angle ECD$ (por ser un ángulo común a los dos triángulos)

Por lo anterior, tenemos que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

Esto quiere decir que sus lados deben ser proporcionales, separemos los dos triángulos para observar mejor los valores de los lados.



Como los lados son proporcionales se tiene que:

$$\frac{x}{12 + x} = \frac{20}{35}$$

Resolviendo esta ecuación de primer grado, obtenemos:

$$35x = 20(12 + x)$$

$$35x = 240 + 20x$$

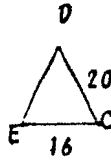
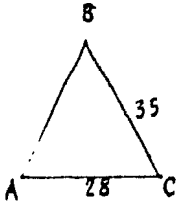
$$35x - 20x = 240$$

$$15x = 240$$

$$x = \frac{240}{15}$$

$$x = 16$$

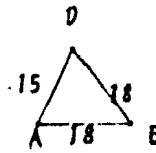
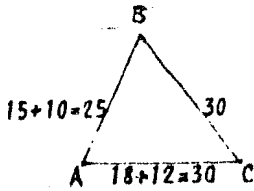
y los triángulos entonces tienen las siguientes dimensiones:



En forma análoga se resuelven los incisos (b) y (c).

Ejercicio 2.

A continuación te mostraremos como se resuelve el inciso (a). Separemos los dos triángulos a fin de ver si son semejantes.

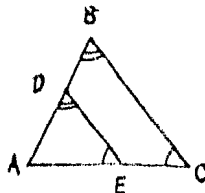


$$\frac{AB}{AD} = \frac{25}{15} = 1.666$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{30}{18} = 1.666$$

$$\frac{CA}{EA} = \frac{30}{18} = 1.666$$

Por lo tanto como sus lados son proporcionales, sus ángulos correspondientes deben ser iguales.



O sea, $\angle AED = \angle ACB$. Recordando lo referente a rectas paralelas, tenemos que dos ángulos correspondientes son iguales, por lo tanto DE debe ser paralela a BC. De forma análoga se resuelven los otros dos incisos.

Ejercicio 3.

Para contestar si los triángulos son semejantes, debes comprobar si los lados correspondientes son proporcionales, o bien si los ángulos correspondientes son iguales.

6. LA ALTURA DEL EDIFICIO

Una persona observa desde una ventana, un edificio de altura AB , que está enfrente y al otro lado de la calle, la persona mide los ángulos ACD y DCB ; se sabe que el ancho de la calle entre fachada y fachada es de 20m. (2000 centímetros). ¿Qué altura tiene el edificio?

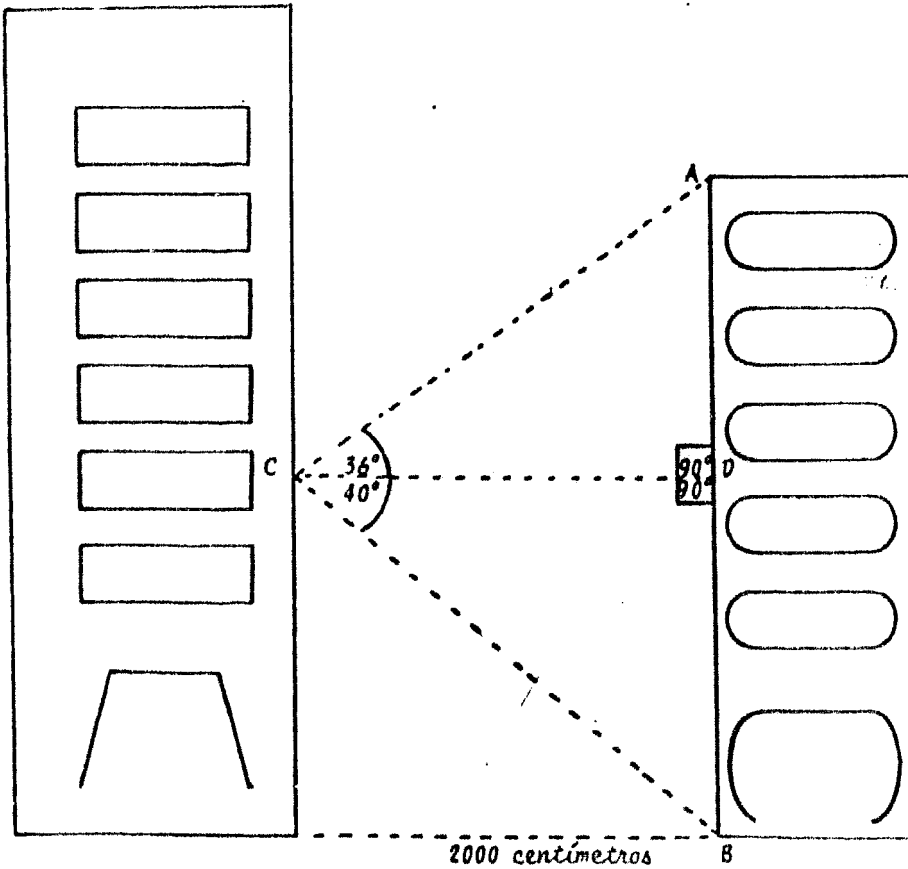


Figura 1

Si tú fueras la persona, ¿cómo encontrarías la altura del edificio?

Te proponemos que hagas lo siguiente.

a) Dibuja un triángulo que tenga un lado de 10cm, y que los ángulos adyacentes sean de 36° y 90° respectivamente (observa la figura 1).

b) ¿El triángulo que dibujaste es semejante (está a escala) a el triángulo CDA ?.

Si los triángulos resultaron ser semejantes, encuentra la razón de proporcionalidad; en caso contrario explica tu respuesta.

c) Mide con tu regla las magnitudes de los dos lados restantes del triángulo que dibujaste.

d) Usando la razón de proporcionalidad y las medidas de los lados del triángulo que dibujaste, encuentra el valor del segmento AD (observa la figura 1).

A continuación hemos resuelto el problema, compara la solución, con la que tu encontraste.

a) Primero dibujaremos el triángulo pedido (figura 2).

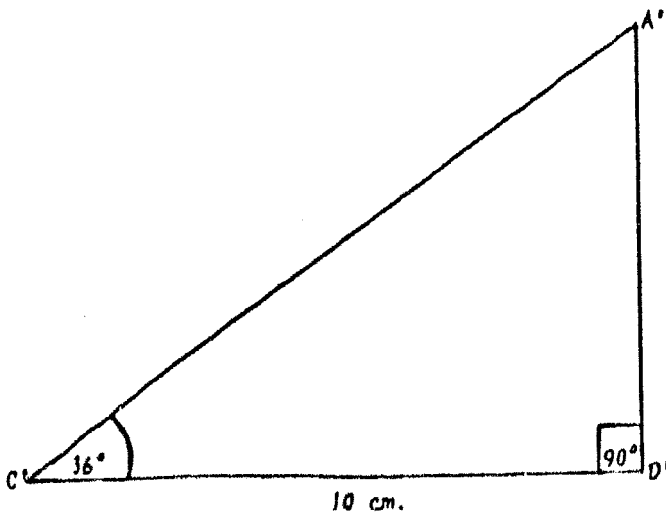


Figura 2

b) ¿ $\triangle CDA \sim \triangle C'D'A'$?

Recuerda que para que dos triángulos sean semejantes, basta con que sus tres ángulos correspondientes sean iguales.

En este caso, conocemos de cada triángulo dos ángulos, pero aplicando - lo estudiado en la primera unidad, encontramos que el tercer ángulo mide 54° , por lo tanto,

$$\triangle CDA \sim \triangle C'D'A'$$

y la razón de proporcionalidad es $\frac{2000}{10} = 200$ (observa que esto lo que

significa es que el triángulo CDA es 200 veces mayor que el triángulo - $C'D'A'$).

c) Midiendo los lados $C'A'$ y $A'D'$, encontramos que aproximadamente son - de:

$$C'A' = 12,3 \text{ cm} \quad \text{y} \quad A'D' = 7,1 \text{ cm}$$

d) Usando los datos anteriores y la razón de proporcionalidad, encontramos que:

$$AD = 200 \times 7,1 \text{ centímetros}$$

$$AD = 1420 \text{ centímetros}$$

$$AD = 14,20 \text{ metros}$$

e) En forma análoga, encontramos que:

$$DB = 200 \times 8,3 \text{ centímetros}$$

$$DB = 1660 \text{ centímetros}$$

$$DB = 16,60 \text{ metros}$$

f) Por lo tanto, la altura del edificio es:

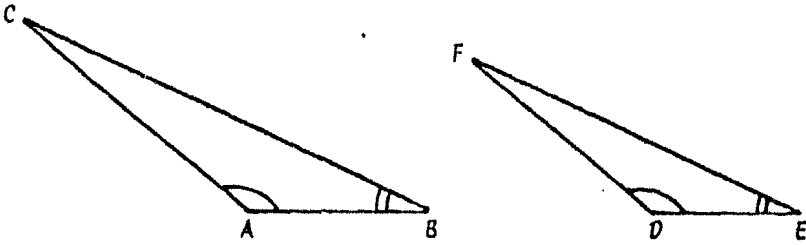
$$AB = AD + DB$$

$$AB = 14,20 + 16,60$$

$$AB = 30,80 \text{ metros}$$

Lo anterior lo vamos a resumir en la siguiente proposición.

3a. proposición: Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.



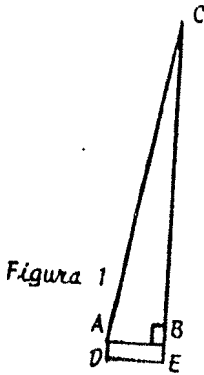
O sea, si $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$, entonces:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

7. EL MONUMENTO

El monumento de Washington, tiene 169.5 metros de altura.

Si un muchacho de 1.50 metros de estatura colocado a 30.5 metros de distancia del monumento mirara hacia la parte alta, ¿a qué distancia se encontraría su ojo de la parte alta del monumento? (Figura 1)



$$CE = 169.5 \text{ metros}$$

$$BE = 1.5 \text{ metros}$$

$$DE = AB = 30.5 \text{ metros}$$

$$CB = 168 \text{ metros}$$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$AC = ?$$

Para encontrar la distancia de su ojo a la parte alta del monumento, el muchacho construyó un triángulo como el que aparece en la figura 2.

A continuación midió el segmento $A'C'$, encontrando que este mide aproximadamente 17.1 centímetros. Con estos datos el muchacho realizó la operación.

$$AC = 1000 \times 17.1 \text{ centímetros}$$

$$AC = 17100 \text{ centímetros}$$

$$AC = 171 \text{ metros}$$

o sea, la distancia que hay del ojo del muchacho a la parte alta del monumento es de 171 metros.

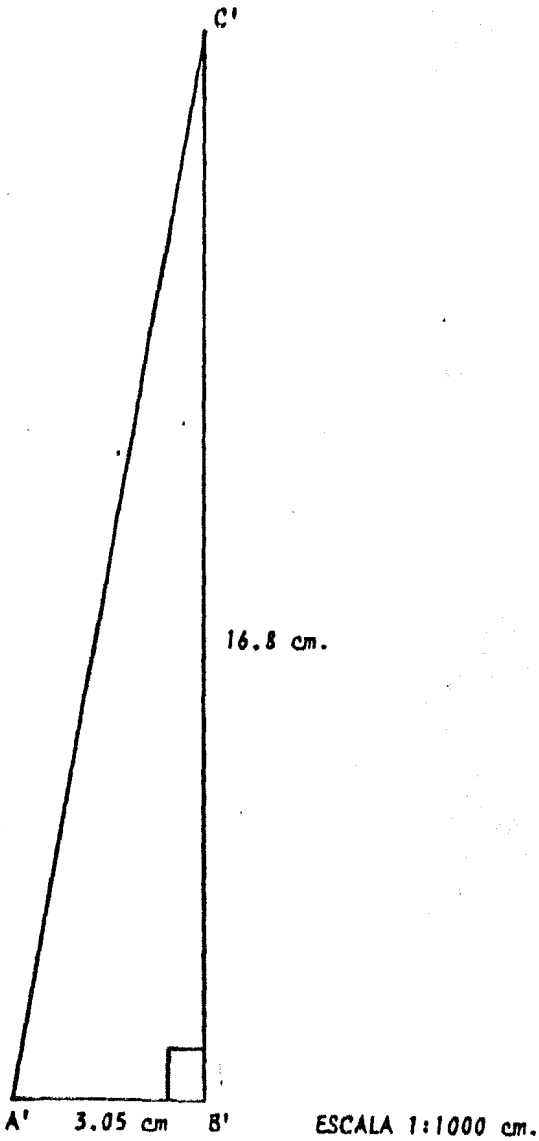
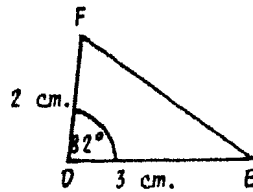
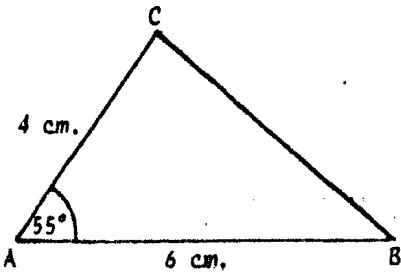


Figura 2

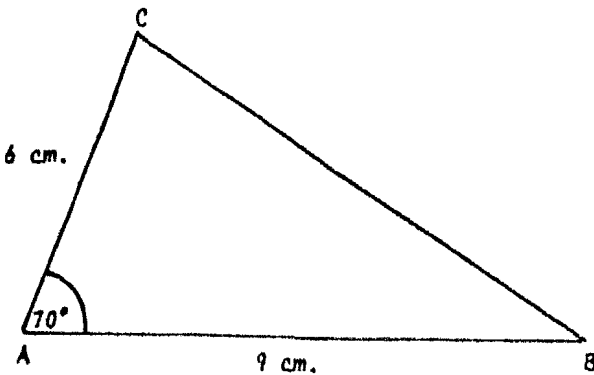
Ejercicios:

1.- Explica cómo es que el muchacho supo que el triángulo ABC es semejante al triángulo A'B'C'.

2.- ¿Son los siguientes triángulos semejantes?, Explica tu respuesta.

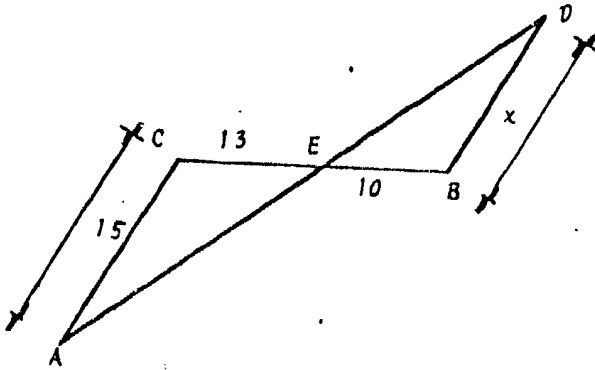


3.- Construye un triángulo semejante al triángulo ABC, sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2.

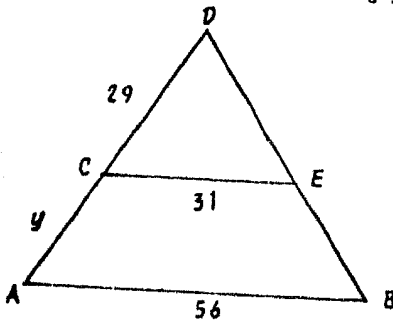


EJERCICIOS DE TRIANGULOS SEMEJANTES

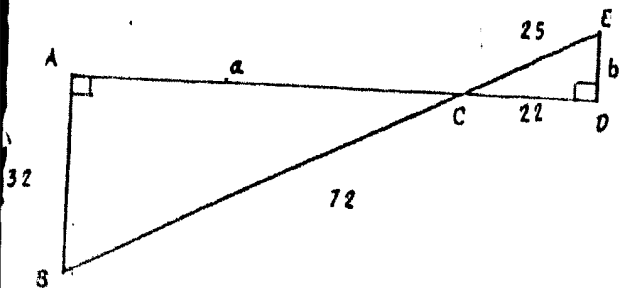
1.- En la siguiente figura, encuentra el valor de "x", sabiendo que $AC \parallel BD$.



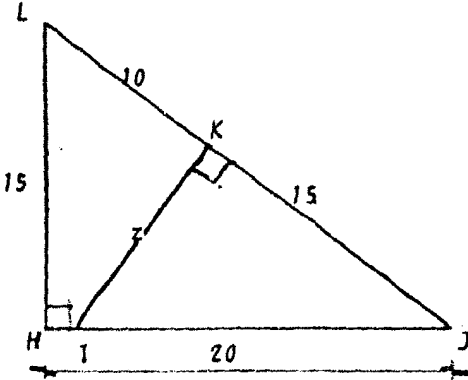
2.- Calcula el valor de "y" de la siguiente figura, sabiendo que $CE \parallel AB$.



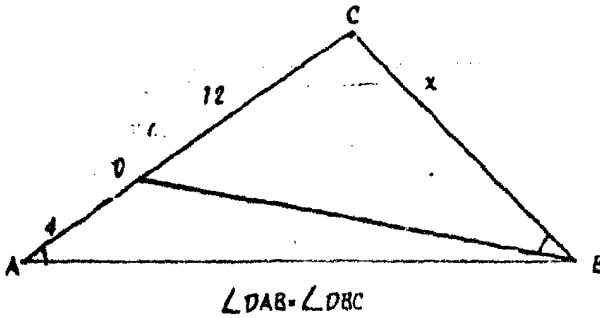
3.- Encuentra el valor de "a" y "b", en la siguiente figura.



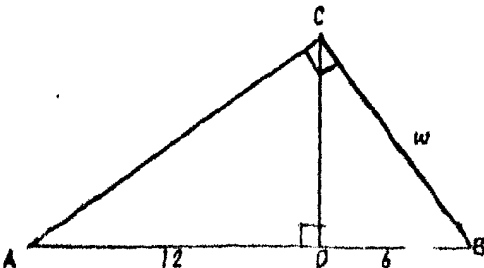
4.- Encuentra el valor de "z", en la siguiente figura.



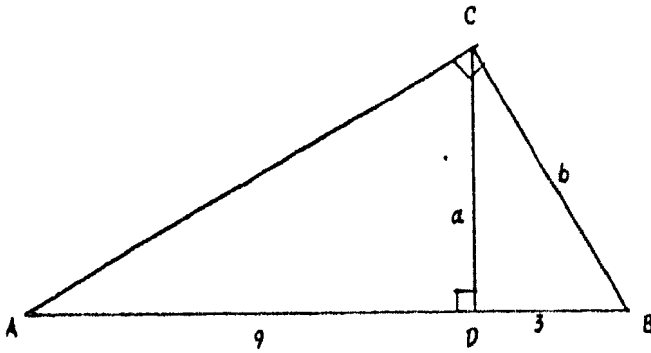
5.- Calcula el valor de "x", en la siguiente figura.



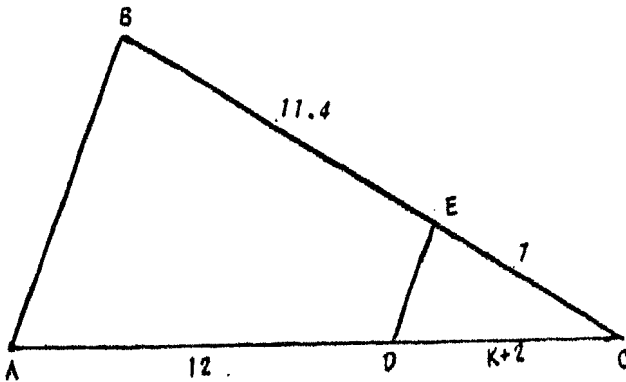
6.- Encuentra el valor de "w", en la siguiente figura.



7.- Encuentra el valor de "a" y "b", en la siguiente figura.



8.- Encuentra el valor de "K", sabiendo que $AB \parallel ED$ en la siguiente figura.

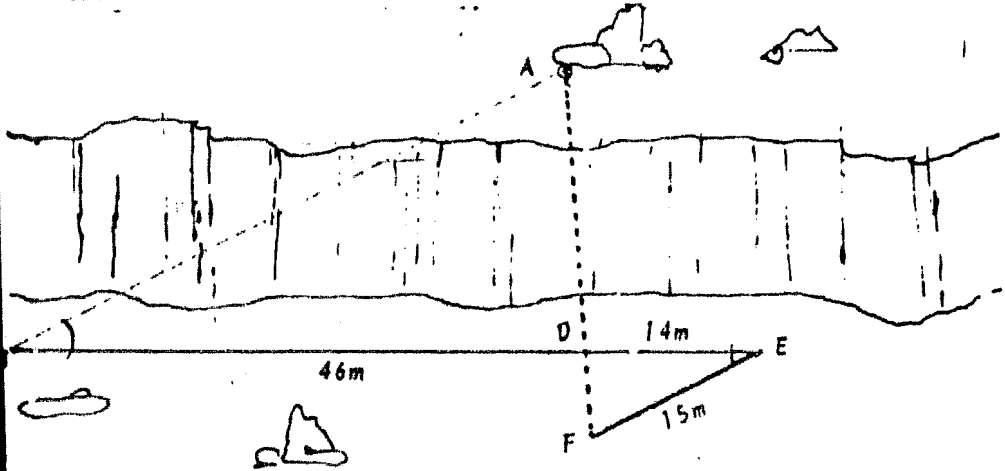


PROBLEMAS DE SEMEJANZA

En la unidad de congruencia de triángulos resolvimos problemas de distancias no accesibles, por ejemplo; el problema de Tales, el problema de la fuente, etc. En esta parte resolveremos problemas parecidos, pero ahora utilizando triángulos semejantes.

Problema 1.

Para encontrar la longitud entre dos puntos (A y B) que están separados por una barranca, como se observa en la siguiente figura, se procede de la siguiente manera:



Se colocan estacas como a continuación se indica, de tal manera, que el ángulo B sea igual al ángulo E.

Los triángulos ABD y DEF son semejantes ya que tienen dos ángulos respectivamente iguales a saber:

$$\angle B = \angle E \text{ por construcción}$$

$$\angle BDA = \angle EDF \text{ por ser opuestos por el vértice,}$$

por lo tanto sus lados correspondientes son proporcionales, esto es;

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BD}{DE};$$

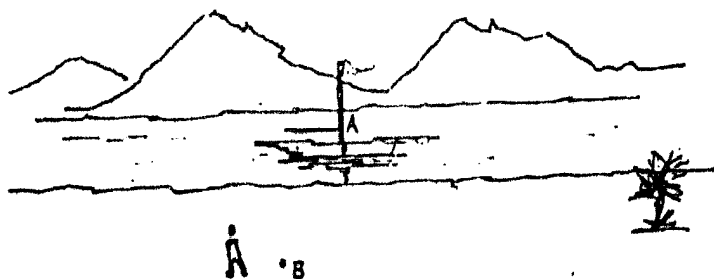
$$AB = \frac{BD \times EF}{DE}$$

Sustituyendo los valores de BD, DE y EF, tenemos que:

$$AB = \frac{46m \times 15m}{14m} = 49.28m$$

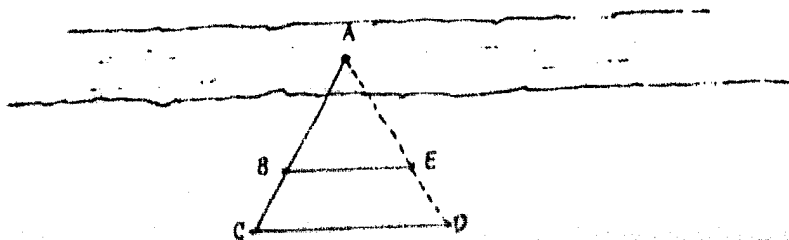
Problema 2.

Sepongamos que un barco se encuentra anclado en el punto A y que se quiere calcular la distancia que hay del barco al punto B.



La distancia de A a B se puede determinar de la siguiente manera:

- Escoge un punto C de tal manera que A, B y C estén alineados.
- Marca un punto D y traza el segmento CD. (Ve la siguiente figura).
- Traza una paralela a CD que pase por B.
- Escoge el punto E en esta paralela tal que A, E y D estén alineados.
- Mide BE, BC y CD.



Si suponemos que $BC = 3m$, $CD = 5m$ y $BE = 4m$. Calcula AB .

Los triángulos ABE y ACD son semejantes (¿podrás comprobarlo?).

$$AC = AB + BC ;$$

$$\text{tenemos que: } \frac{AB}{AB+BC} = \frac{BE}{CD} ; \quad AB = \frac{(AB + BC) \times BE}{CD}$$

$$AB \times CD = AB \times BE + BC \times BE ; \quad AB \times CD - AB \times BE = BC \times BE$$

$$AB(CD - BE) = BC \times BE ; \quad AB = \frac{BC \times BE}{CD - BE}$$

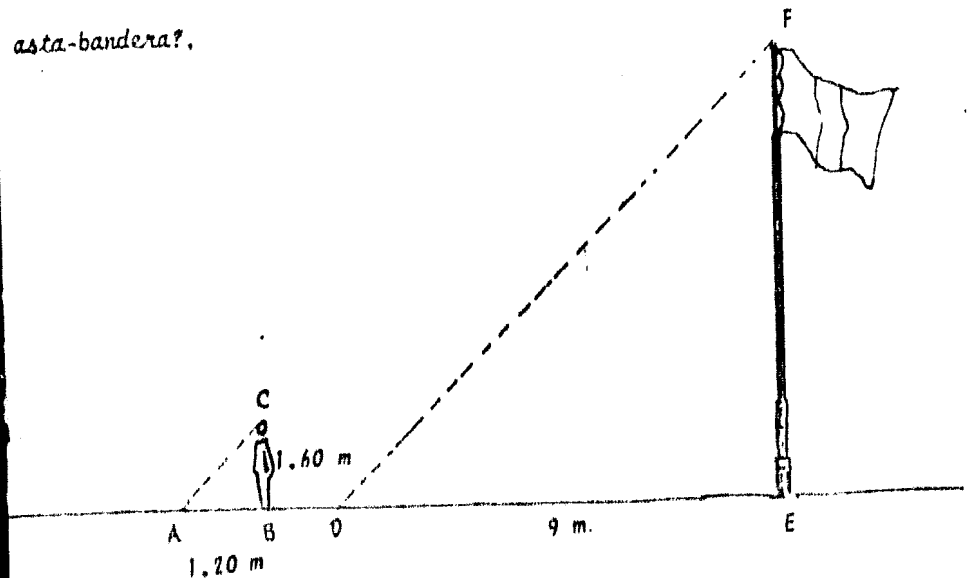
Substituyendo los valores de BC , CD y BE , se tiene:

$$AB = \frac{3m \times 4m}{5m - 4m} = 12m$$

Problema 3.

El esquema que aparece abajo ilustra cómo podría un estudiante determinar la altura del asta de una bandera por medio de la sombra que proyecta.

Supóngase que el estudiante mide 1.60m de estatura, que su sombra mide 1.20m y que la sombra del asta bandera mide 9m. ¿Qué altura tendrá el asta-bandera?



Si suponemos que los rayos caen paralelamente entonces se tendrá que - - -
 $\angle A = \angle D$ y los ángulos $\angle B = \angle E$ por ser rectos, por lo cual los triángulos ABC y DEF son semejantes, de donde los lados correspondientes son --
 proporcionales.

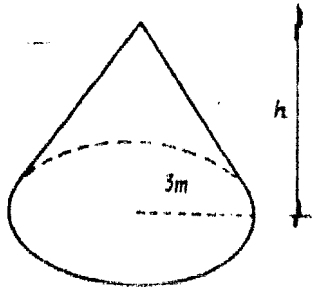
$$\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} \quad \text{despejando EF y sustituyendo los valores de AB, BC y DE se tiene}$$

$$EF = \frac{BC \times DE}{AB} = \frac{1,60\text{m} \times 9\text{m}}{1,20} = 12\text{m}$$

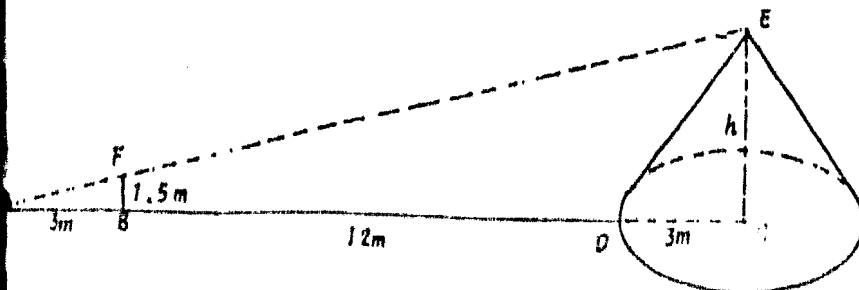
La altura del asta-bandera es de 12m.

Problema 4.

Usando semejanza de triángulos ¿Cómo calcular la altura de un cono si el radio del círculo de la base mide 3m?



De las diferentes maneras que se pueden utilizar para calcular la altura del cono una podría ser como la que se observa en la siguiente figura.



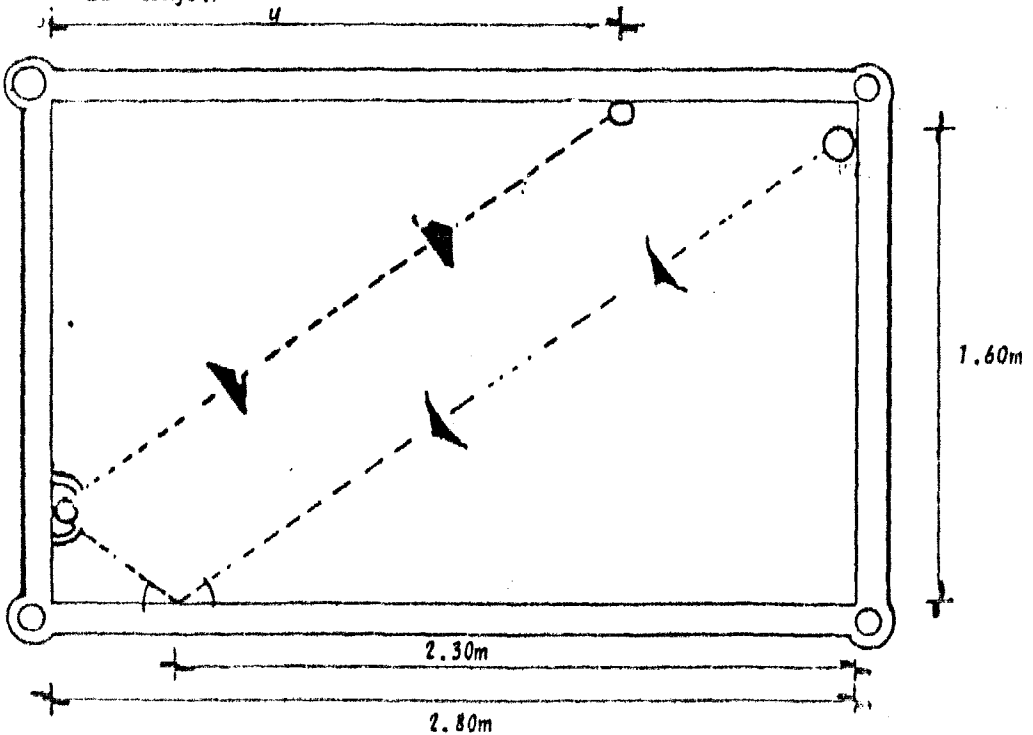
Los triángulos ABF y ACE son semejantes ya que $\angle A = \angle A$ por ser común a los dos triángulos y $\angle B = \angle C$ por ser rectos.

$$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} ; CE = \frac{AC \times BF}{AB}, \text{ sustituyendo los valores se tiene que}$$

$$CE = \frac{18m \times 1.5m}{3m} = 9m, \text{ es decir la altura del cono es de } 9m.$$

Ejercicios:

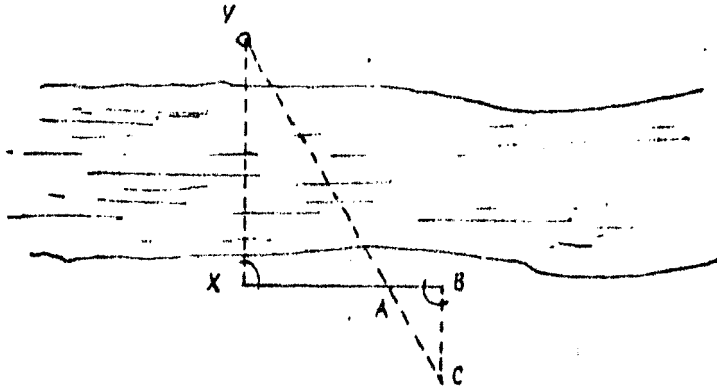
1.- En una mesa de billar, la bola blanca es impulsada como se muestra en el dibujo.



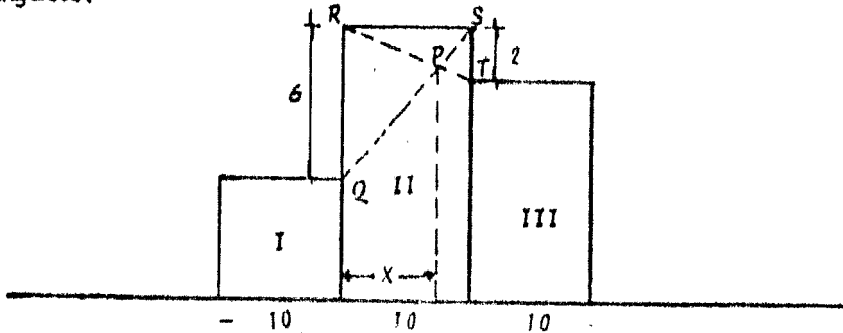
Supóngase que los ángulos marcados con el mismo número de arcos son iguales.

- Calcula la distancia x cuando la bola golpea la banda de la izquierda.
- Calcula la distancia u cuando la bola golpea la banda de arriba.

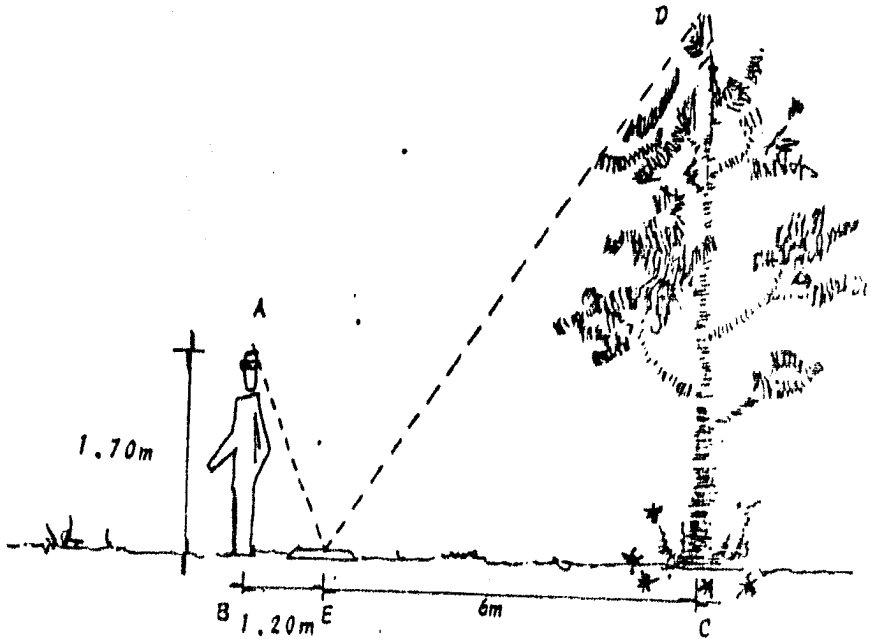
- 2.- Se mide el ancho de un río, como se indica en la siguiente figura. Los ángulos X y B son iguales, $AB = 1,50\text{m}$, $XA = 15\text{m}$ y $BC = 3,60\text{m}$. Calcula XY.



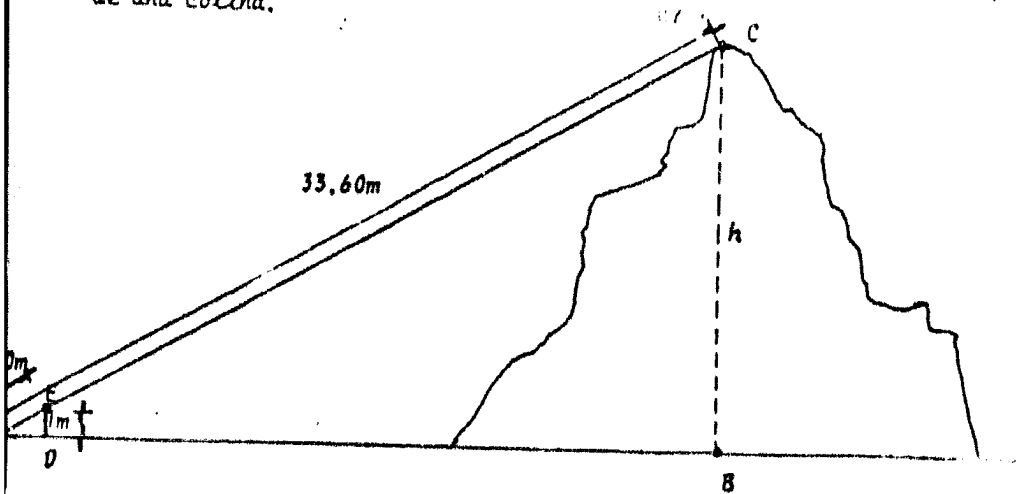
- 3.- Calcula el valor de x de la siguiente figura, donde I, II y III son recángulos.



- 4.- Los rayos de luz que inciden sobre un espejo, se reflejan con un ángulo igual al de incidencia. En el esquema que aparece en la siguiente hoja, una persona de $1,70\text{m}$, de altura encuentra que si coloca sobre el piso en el punto E, un espejo y retrocede $1,20\text{m}$, puede ver en el espejo la imagen de la copa de un árbol localizado a 6m , del espejo. ¿Cuál es la altura del árbol?



5.- Una cuerda esta tensada desde un punto al nivel de la tierra a la cima de una colina.



Una vara de 1 metro de longitud se coloca perpendicular al piso, de tal manera que su extremo está apoyado sobre la cuerda. La distancia de este extremo al punto A es de 1.20m. Se baja la cuerda y se mide. Su longitud es de 33.60m. ¿Cuál es la altura de la colina?

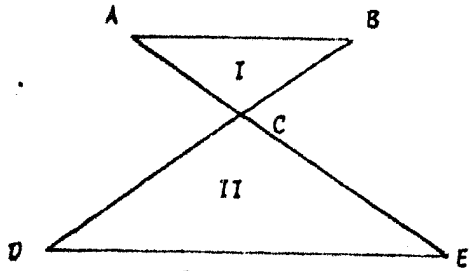
Ejercicios.

1.- Datos:

AB paralela a DE

Justifica:

$$\triangle ABC \sim \triangle DCE$$

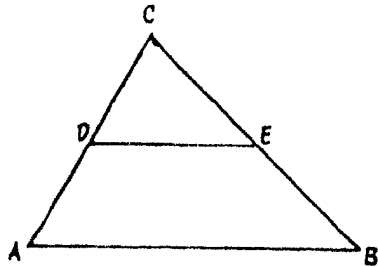


2.- Datos:

DE paralela a AB

Justifica:

$$\triangle ABC \sim \triangle DCE$$

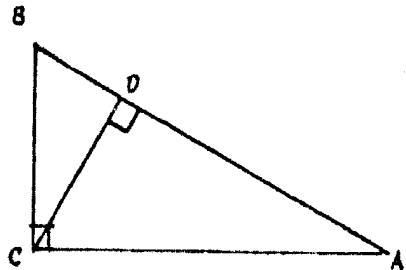


3.- Datos:

El $\angle BCA$ es recto, y CD es perpendicular a AB

Justifica:

$$\triangle ABC \sim \triangle CDB$$



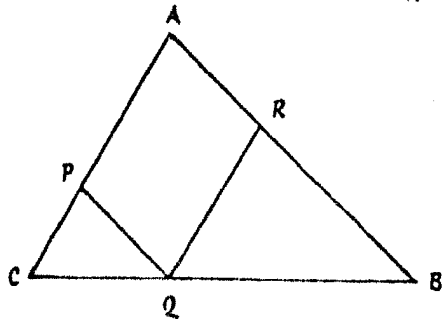
4.- Datos:

PQ paralela a AB

QR paralela a CA

Justifica:

$$\triangle PCQ \sim \triangle RQB$$



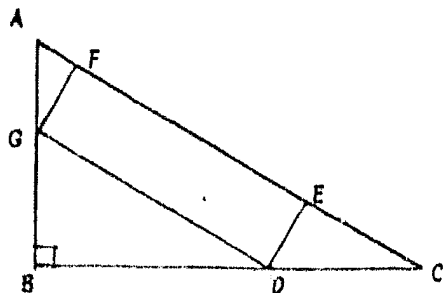
5.- Datos:

El $\angle ABC$ es recto

El cuadrilátero DEFG es un rectángulo.

Justifica:

$$\triangle AGF \sim \triangle EDC$$



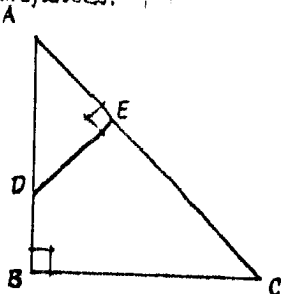
En los siguientes ejercicios para poder llegar a lo que se te pide, primero tienes que encontrar que triángulos son semejantes.

6.- Datos:

$\triangle AED$ y $\triangle ABC$ son rectos

Justifica:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

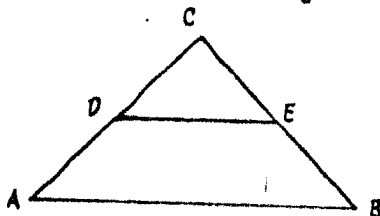


7.- Datos:

DE es paralela a AB

Justifica:

$$AB \times DC = AC \times DE$$



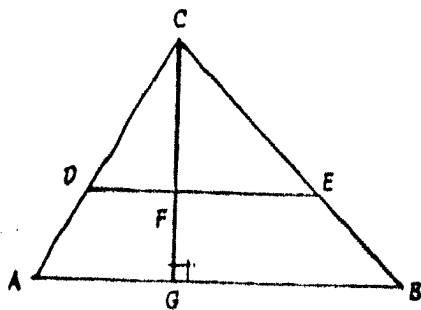
8.- Datos:

DE es paralela a AB

CG es perpendicular a AB

Justifica:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CG}{CF}$$



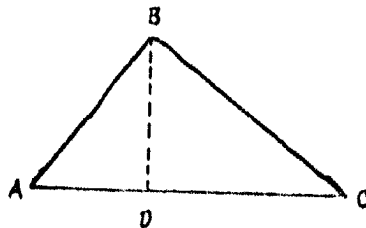
9.- Datos:

$\triangle ABC$ es recto

BD es perpendicular a AC

Justifica:

$$(BD)^2 = AD \times DC$$



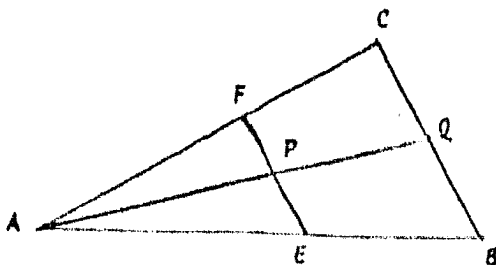
10.- Datos:

FE paralela a CB

AQ bisectriz del $\angle A$

Justifica:

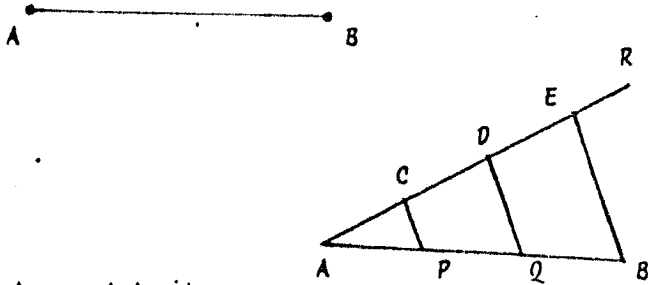
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AE}$$



CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

2a. parte

1a. Construcción, División de un segmento en tres partes iguales.



Solución:

a. Construcción:

- 1.- Sea AB el segmento por trisectar
- 2.- Traza a partir de A la recta AR.
- 3.- Sobre AR, se consideran tres segmentos AC, CD y DE iguales.
- 4.- Traza el segmento EB.
- 5.- Traza paralelas a EB que pasen por C y D.
- 6.- Sean P y Q los puntos de intersección de las paralelas que pasan por C y D respectivamente sobre AB.
- 7.- Se afirma que $AP = PQ = QB$.

b. Justificación:

- 1.- $AC = CD = DE$ por construcción, luego $AE = 3AC$ y $AD = 2AC$.
- 2.- Los triángulos APC y ABE son semejantes por ser CP y EB paralelas.
- 3.- $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AP}$, por la semejanza.
- 4.- Los triángulos APC y AQQ son semejantes por ser CP y DQ paralelas.

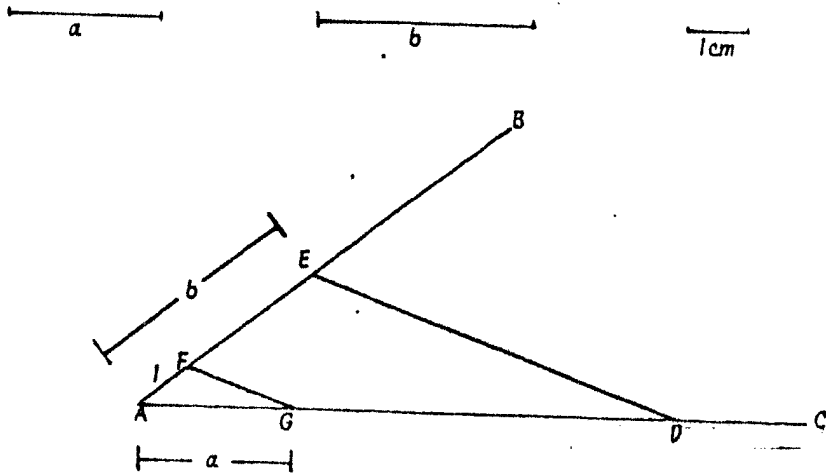
5.- $\frac{AD}{AC} = \frac{AQ}{AP}$, por la semejanza.

6.- $\frac{AB}{AP} = \frac{3}{1}$; $AB = 3 AP$ de (1) y (3).

7.- $\frac{AQ}{AP} = \frac{2}{1}$; $AQ = 2 AP$ de (1) y (5).

8.- $AP = PQ = QB$ de (6) y (7), lo cual se quería demostrar.

2a. Construcción: Construye un segmento que sea el producto de otros dos dados, si te dan además un segmento de un centímetro de longitud.



Solución:

a. Construcción:

- 1.- Sean a y b los segmentos dados.
 - 2.- Traza el ángulo BAC .
 - 3.- Coloca el segmento de un centímetro sobre AB , de tal manera que un extremo coincida con A . Llámalo F al otro extremo.
 - 4.- Coloca sobre el lado AC el segmento a y sobre el lado AB el segmento b , con un extremo en el vértice del ángulo BAC .
 - 5.- Traza el segmento FG cuyos extremos son el segmento de la unidad y el segmento a .
 - 6.- Traza una paralela al segmento FG que pase por el extremo del segmento b . Sea D el punto donde corta a AC .
- 1.- El segmento AD tiene la longitud deseada.

b. Justificación:

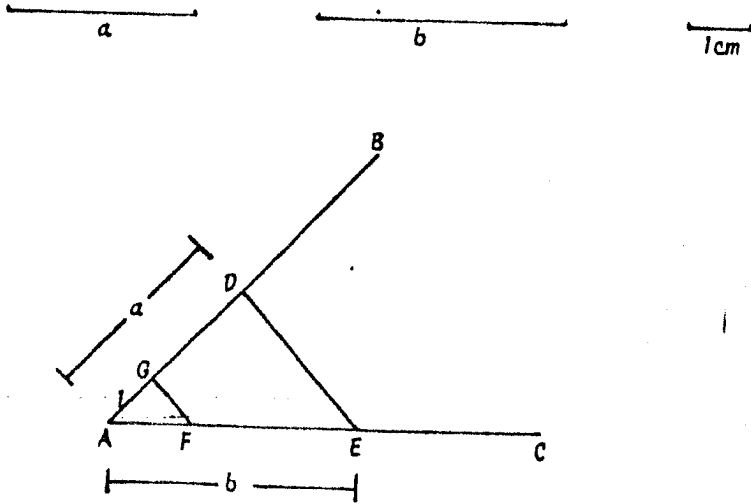
1.- Los triángulos AFG y ADE son semejantes por ser FG y ED paralelas.

$$2.- \frac{AD}{AG} = \frac{AE}{AF} \text{ por la semejanza.}$$

$$3.- AD = \frac{AG \cdot AE}{AF}, \text{ despejando AD de (2).}$$

$$4.- AD = \frac{a \cdot b}{l} = ab, \text{ sustituyendo los valores de AG, AE y AF en (3).}$$

3. Construcción: Construye un segmento cuya longitud sea el cociente de dos segmentos dados, si te dan además un segmento de un centímetro de longitud.



Solución:

a. Construcción:

- 1.- Sean a y b los segmentos dados con b mayor que a .
- 2.- Traza el ángulo BAC .
- 3.- Coloca el segmento de un centímetro sobre AB , de tal manera que un extremo coincida con A . Llama F al otro extremo.
- 4.- Coloca sobre el lado AC el segmento b y sobre el lado AB el segmento a , con un extremo en el vértice del ángulo BAC .
- 5.- Traza el segmento DE .
- 6.- Traza una paralela al segmento DE que pase por el extremo del segmento unitario. Sea F el punto donde corta a AC .
- 7.- El segmento AF tiene la longitud deseada.

b. Justificación:

1.- Los triángulos AGF y ADE son semejantes. Explica porqué.

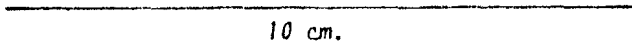
2.- $\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AE}$ por la semejanza.

3.- $AF = \frac{AG \cdot AE}{AD}$ despejando AF de (2).

4.- $AF = \frac{1 \cdot b}{a} = \frac{b}{a}$ sustituyendo los valores de AG, AE y AB en (3).

EJERCICIOS.

- 1.- Divide un segmento de 10cm en cuatro partes iguales,



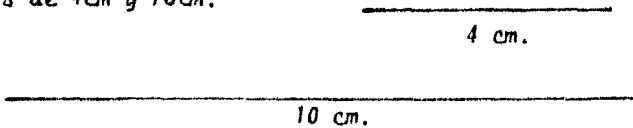
- 2.- Construye un segmento cuya longitud sea de 8cm a partir de dos segmentos de 2cm y 4cm de longitud.



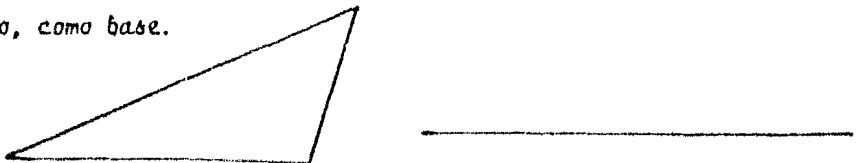
- 3.- Construye un segmento cuya longitud sea de 9cm a partir de un segmento de 3cm de longitud.



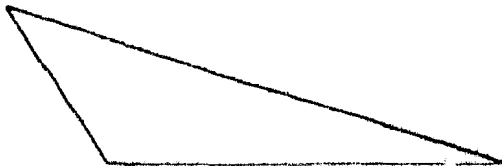
- 4.- Construye un segmento cuya longitud sea de 2,5cm a partir de dos segmentos de 4cm y 10cm.



- 5.- Construye un triángulo semejante a uno dado, a partir de un segmento dado, como base.



- 6.- Construye un triángulo semejante a uno dado y cuya base sea el doble de la correspondiente del triángulo dado.



UNIDAD V

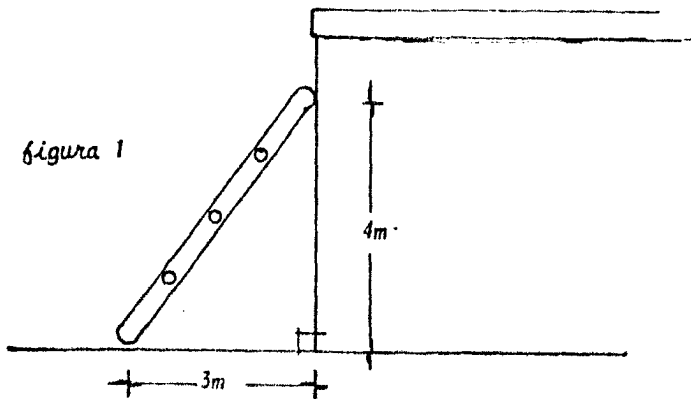
El teorema de Pitágoras.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras debe ser, seguramente, el más conocido de la geometría. Aún cuando casos particulares del Teorema eran conocidos mucho tiempo antes de Pitágoras, probablemente él fue el primero en dar una demostración general.

EL PROBLEMA DE LA ESCALERA

El pie de una escalera apoyada en una pared a una altura de 4m, queda a 3m de ésta. ¿Cuánto mide la escalera?. (figura 1).



Problemas como el anterior donde hay un triángulo rectángulo del que se conocen dos de sus lados y se quiere determinar el tercero, se pueden resolver fácilmente usando el Teorema de Pitágoras que estudiaremos en esta unidad.

El Teorema de Pitágoras como sabes se refiere a triángulos rectángulos y un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90° , los lados que forman el ángulo de 90° se llaman catetos y el tercer lado se llama hipotenusa. En la figura 2 se observa un triángulo rectángulo.

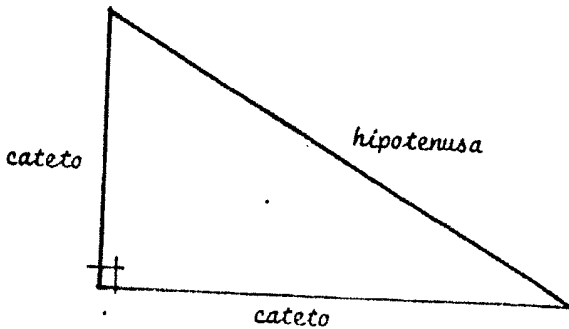


figura 2

UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS.

Se han dado cientos de demostraciones del Teorema de Pitágoras, aquí -- haremos una demostración usando triángulos semejantes y en la unidad de -- áreas daremos otras.

El Teorema de Pitágoras se enuncia de la siguiente manera:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa -- es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos. (fig.3)

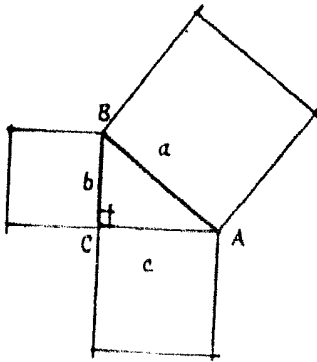


figura 3

Para su demostración consideremos un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c como se observa en la figura 4.

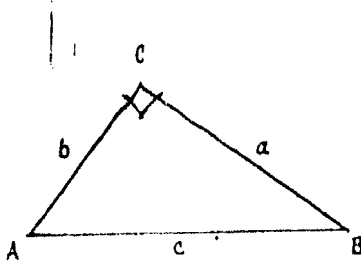


figura 4

El Teorema de Pitágoras podemos enunciarlo en función a la longitud de - sus lados como sigue:

"Si un triángulo es rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c entonces $a^2 + b^2 = c^2$ ".

Demostración:

Traza la altura CD del triángulo ABC (figura 5).

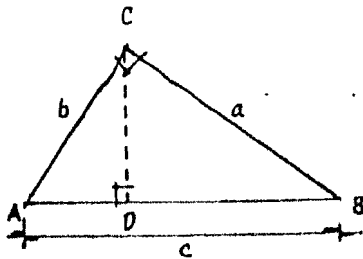


figura 5

Considera $AD = x$, $DB = y$ tal que $AB = c = x + y$ (figura 6).

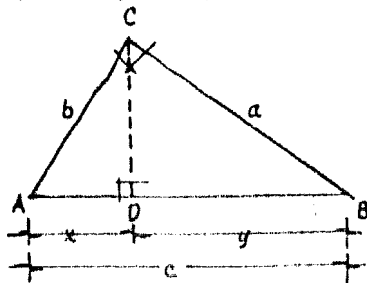


figura 6

Los triángulos ABC y ADC son semejantes ya que:

$\angle CAB = \angle CAD$ por ser común a los dos triángulos

$\angle ACB = \angle CDA$ por ser rectos.

De la semejanza de los triángulos ABC y ADC (figura 7), se obtiene;

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ sustituyendo los valores de AB, AC y AD se tiene}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{x}; b^2 = cx \quad (1)$$

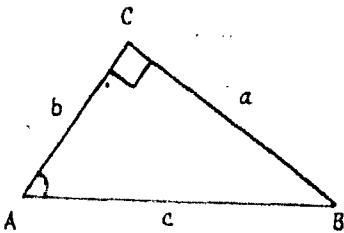
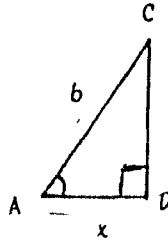


figura 7



Los triángulos ABC y CDB son semejantes ya que:

$$\angle ABC = \angle DBC \text{ por ser común a los dos triángulos}$$

$$\angle ACB = \angle CDB \text{ por ser rectos}$$

De la semejanza de los triángulos ABC y CDB (figura 8), se obtiene;

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} \text{ sustituyendo los valores de AB, AC y AD se tiene}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{y}; a^2 = cy \quad (2)$$

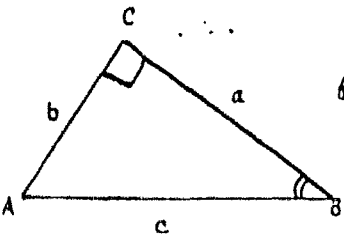
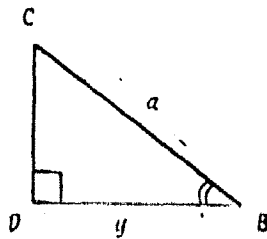


figura 8



Sumando las igualdades (1) y (2) se obtiene;

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$

$$= c(x+y)$$

como $x + y = c$, se tiene $a^2 + b^2 = c \cdot c = c^2$ quedando demostrado el Teorema.

Observación:

La hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos.

Analicemos por qué pasa esto.

Aplicando el Teorema de Pitágoras, al triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b e hipotenusa c se tiene $a^2 + b^2 = c^2$, luego,

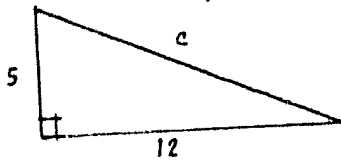
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{a^2} = a \quad \text{o} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{b^2} = b$$

es decir, la hipotenusa es siempre mayor que cualquiera de los catetos.

PROBLEMAS RESUELTOS.

1.- Resuelve los siguientes problemas aplicando el Teorema de Pitágoras.

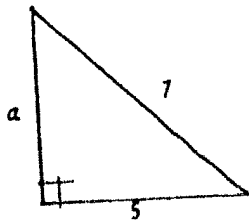
a) Calcula la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.



Sean $a = 5$ y $b = 12$, aplicando la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$ podemos obtener el valor de la hipotenusa c .

$$\begin{aligned} c^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 = 169 \\ c &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

b) Calcula el cateto "a" en el siguiente triángulo rectángulo.

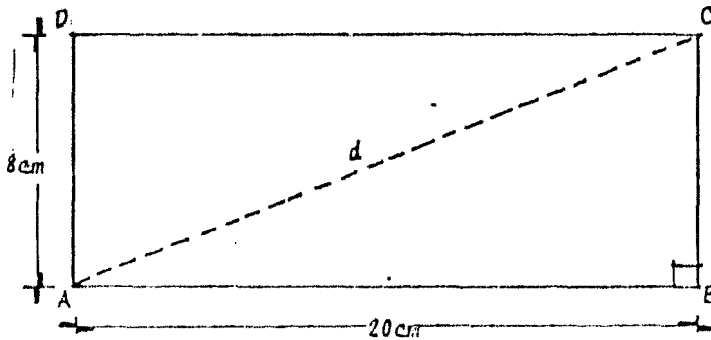


Sean $b = 5$ y $c = 7$, aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene;

$$\begin{aligned} 7^2 &= a^2 + 5^2 \quad \text{despejando "a" se tiene} \\ 49 - 25 &= a^2 \\ 24 &= a^2 \\ \sqrt{24} &= a \quad \text{o} \quad a = \sqrt{24} = 4,899 \end{aligned}$$

2.- Encuentra la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados son

8cm y 20cm.



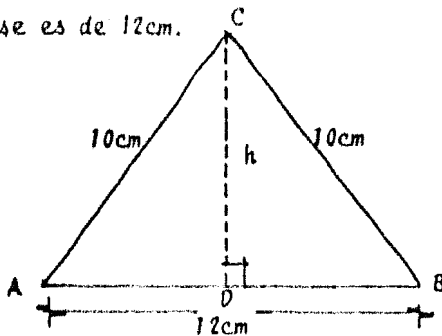
Consideremos a d como la diagonal del rectángulo y aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ABC cuyos catetos son 20cm y 8cm e hipotenusa d , tenemos;

$$d^2 = 20^2 + 8^2$$

$$= 400 + 64 = 464$$

$$d^2 = 464 \text{ o } d = \sqrt{464} = 21.54\text{cm.}$$

3.- Calcula la altura de un triángulo isósceles si sus lados iguales miden 10cm y su base es de 12cm.



Sea h la altura del triángulo isósceles, esta altura resulta ser mediatriz de la base AB (demuéstralo), luego $AD = 6\text{cm}$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ADC.

se tiene

$$10^2 = 6^2 + h^2$$

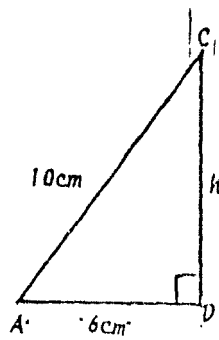
$$100 = 36 + h^2$$

$$100 - 36 = h^2$$

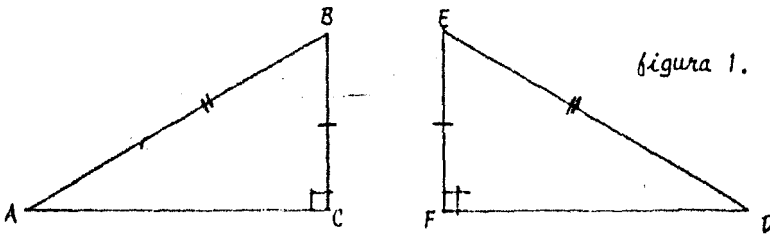
$$64 = h^2$$

$$\sqrt{64} = h$$

$$\underline{h = 8\text{cm}}$$



4.- Demuestra que dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de uno de ellos son iguales a sus correspondientes en el otro. (figura 1)



Para poder demostrar que los triángulos ABC y FED son congruentes hace falta comprobar que $AC = FD$.

Consideremos que $AB = x = ED$, $BC = y = EF$ y $AC = z$, $FD = w$. (figura 2)

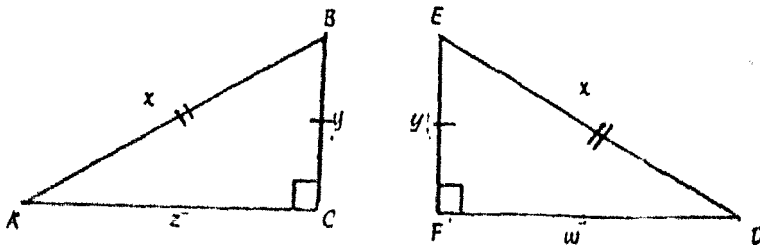


figura 2

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle ABC$ se tiene

$$x^2 = y^2 + z^2 \quad (1)$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle FED$ se tiene

$$x^2 = y^2 + w^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene $y^2 + z^2 = y^2 + w^2$

$$z^2 = w^2, \text{ como } z \text{ y } w \text{ son positivos}$$

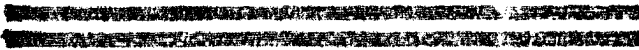
$$z = w$$

Luego $AC = FD$ y aplicando cualquiera de los criterios de congruencia LLL o LAL se tiene que el $\triangle ABC \cong \triangle FED$.

5.- Se quiere trazar un camino recto que comunique una casa con la carretera que pasa cerca de ella, si la carretera es recta en este tramo. ¿Cómo se trazaría el camino de modo que fuera lo más corto posible? (figura 1).



figura 1



Desde luego, hay muchas formas de comunicar la casa con la carretera mediante un camino corto (figura 2).

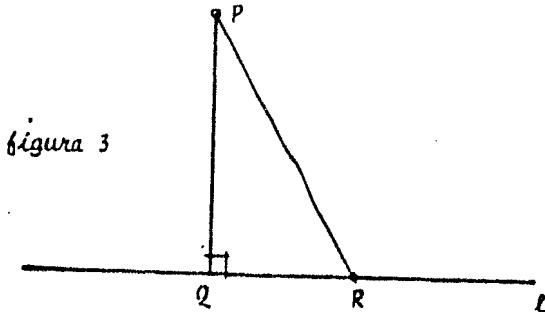


figura 2

¿Cuál será el más corto?

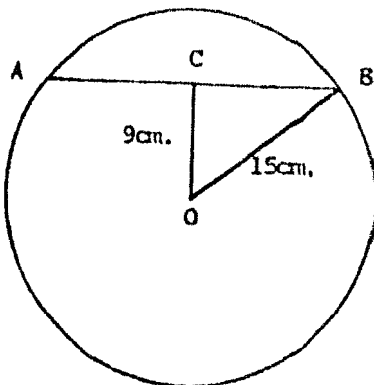
Consideremos a P como el punto donde está la casa y l la recta que representa a la carretera,

De todos los segmentos que se pueden trazar, tomemos el segmento PQ perpendicular a l y otro segmento cualquiera por ejemplo PR ,



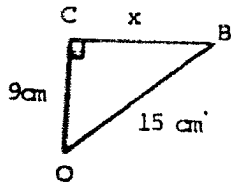
De esta manera, los puntos P , Q y R determinan un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento PR (figura 3). Como en todo triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cualquiera de los catetos, tenemos que $PR > PQ$, por lo tanto el segmento más corto de la casa P a la carretera l es el segmento perpendicular PQ .

6.- El radio de una circunferencia es de 15cm. Encuentra la longitud de una cuerda que está a 9cm. del centro.*



* La distancia de un punto a una recta se considera siempre como la más corta, o sea la que está sobre la perpendicular a la recta que pasa por el punto.

Sean AB la cuerda, OC la perpendicular a la cuerda AB y OB la hipotenusa del triángulo rectángulo OCB .



Sea $CB=x$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OCB se tiene -- que:

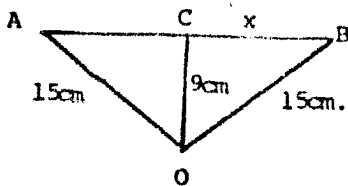
$$x^2 + 9^2 = 15^2$$

$$x^2 + 81 = 225$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \text{ cm.}$$

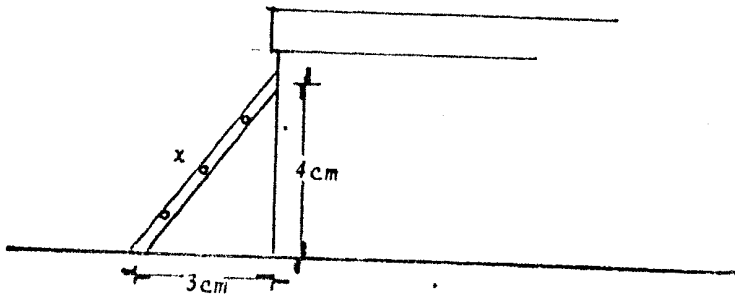
Si formamos el ΔAOC donde OC es el radio de la circunferencia, se puede probar que los triángulos AOC y BOC son congruentes, ya que son triángulos rectángulos y tienen iguales la hipotenusa y un cateto.



Luego $AC=CB$ y como $AB=AC+CB=12\text{cm} + 12\text{cm}$, tenemos que la longitud de -- la cuerda es de 24 cm.

Resuelve el "Problema de la Escalera".

Recordemos el problema por medio de la siguiente figura.



Sea x la longitud de la escalera.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado, se obtiene que:

$$3^2 + 4^2 = x^2$$

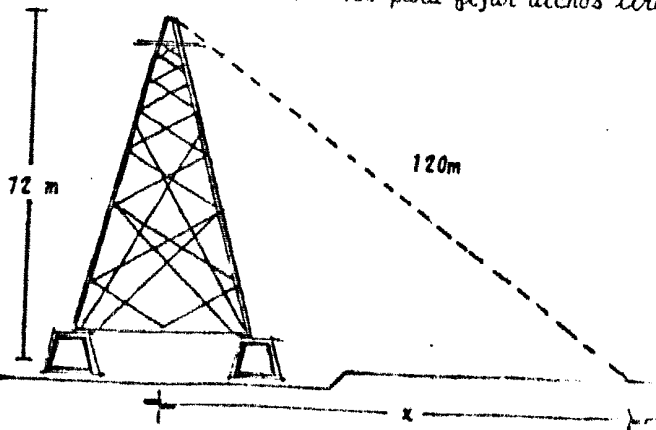
$$9 + 16 = x^2$$

$$25 = x^2$$

$$x = \sqrt{25} = 5$$

La longitud de la escalera es de 5m.

.- Para sostener la torre de una estación de radio de 72m de altura, se colocan tirantes de 120m para darle mayor estabilidad. Si se proyecta tender los tirantes desde la parte más alta de la torre. ¿A qué distancia del pie de la altura de ésta, deben construirse las bases para fijar dichos tirantes?

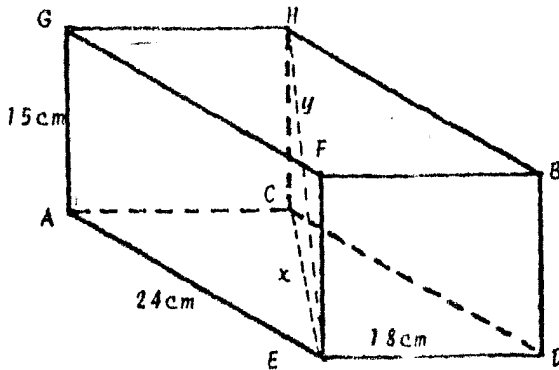


Consideremos a la variable x como la distancia que hay de la torre a las bases donde se deben colocar los tirantes,

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado, se obtiene;

$$\begin{aligned} 72^2 + x^2 &= 120^2 \\ 5184 + x^2 &= 14400 \\ x^2 &= 14400 - 5184 \\ x^2 &= 9216 \\ x &= \sqrt{9216} = 96m. \end{aligned}$$

9.- Encuentra la longitud de la diagonal de una caja, de 24cm de largo por 18cm de ancho por 15cm de altura.



Considerando la figura anterior, lo que se desea determinar es la longitud de EH,

Para encontrarla primero calculemos la longitud de la diagonal EC.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo EDC tenemos;

$$\begin{aligned} x^2 &= 18^2 + 24^2 \\ &= 324 + 576 \\ &= 900 \\ x &= \sqrt{900} = 30m. \end{aligned}$$

Apliquemos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ECH, obteniendo;

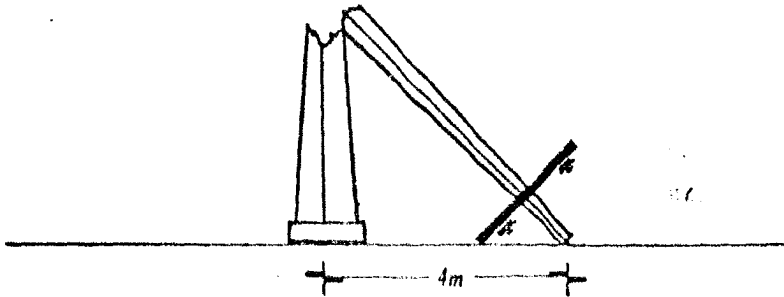
$$y^2 = 30^2 + 15^2$$

$$= 900 + 225$$

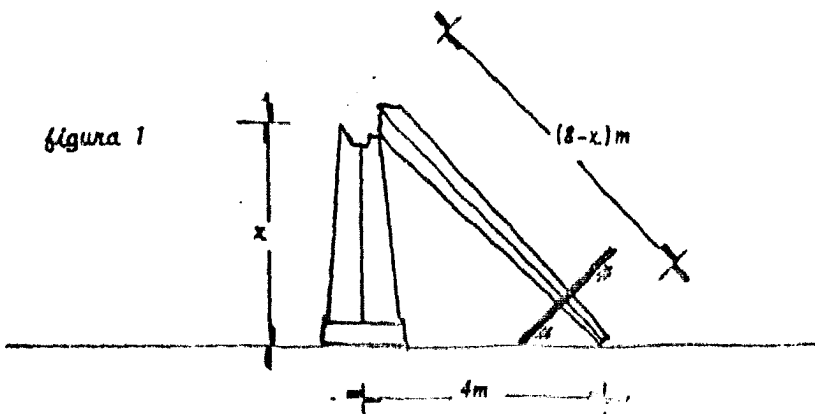
$$= 1125$$

$$y = \sqrt{1125} = 33,54 \text{ cm.}$$

10.- Un rayo partió un poste de 8m de altura como se observa en la siguiente figura. Si la punta quedó en el suelo a 4m de la base. ¿A qué altura se partió ese poste?



Si consideramos a x como la altura a la que se partió el poste y como la altura del poste es de 8m, la hipotenusa valdrá $(8-x)$ m (figura 1).



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura 1, se tiene;

$$x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$$

$$x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2$$

$$16 = 64 - 16x$$

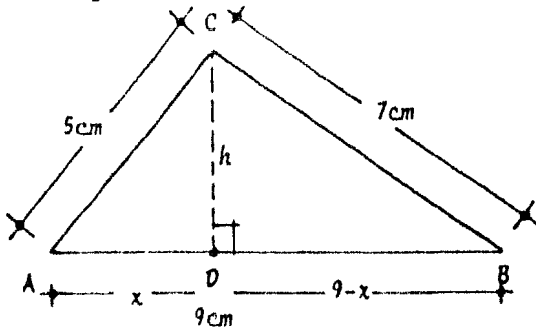
$$16x = 64 - 16$$

$$16x = 48$$

$$x = \frac{48}{16} = 3.$$

La altura a la que se partió el poste es de 3m.

11.- Calcula la altura de un triángulo de lados 5cm, 7cm y 9cm como se observa en la siguiente figura.



Sea $AD = x$, por lo que $DB = 9 - x$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ADC, tenemos:

$$(1) \quad x^2 + h^2 = 5^2$$

Aplicando el Teorema al triángulo rectángulo CDB, tenemos;

$$(2) \quad h^2 + (9 - x)^2 = 7^2$$

Despejando

h^2 de (1) se tiene:

$$(3) \quad h^2 = 25 - x^2$$

y despejando

h^2 de (2) se tiene:

$$(4) h^2 = 49 - (9 - x)^2$$

Igualando las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$25 - x^2 = 49 - (9 - x)^2$$

Desarrollando y simplificando:

$$25 - x^2 = 49 - (81 - 18x + x^2)$$

$$25 - x^2 = 49 - 81 + 18x - x^2$$

$$25 = -32 + 18x$$

$$57 = 18x$$

$$x = \frac{57}{18} = \frac{19}{6}$$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación (3) se tiene:

$$h^2 = 25 - \left(\frac{19}{6}\right)^2$$

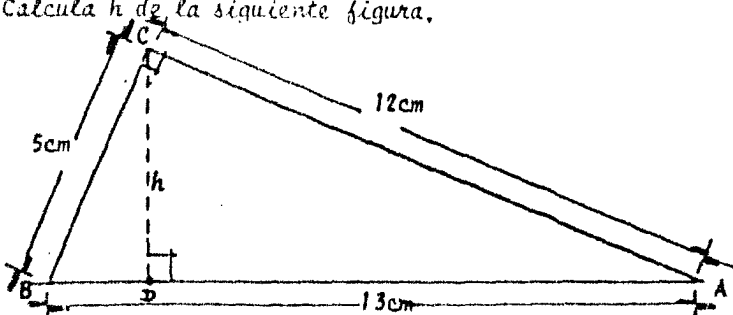
$$= 25 - \frac{361}{36}$$

$$= \frac{539}{36}$$

$$h = \sqrt{\frac{539}{36}} = 3.87 \text{ cm.}$$

Ejercicios:

- 1.- Si a y b son los catetos y c es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Calcula el lado que falta,
 - a) $a = 10\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$
 - b) $c = 32\text{m}$, $b = 12\text{m}$.
- 2.- Encuentra la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1m .
- 3.- Calcula la altura de un triángulo equilátero si sus lados miden 6m .
- 4.- El radio de una circunferencia es de 15cm . Encuentra la distancia del centro a una cuerda cuya longitud es de 18cm .
- 5.- Un árbol al caerse queda apoyado en un edificio de altura de 5m . Si el árbol está separado 2m del edificio. ¿Qué altura tiene el árbol?
- 6.- Encuentra la longitud de la diagonal de una caja de 6cm de largo, 4cm de ancho y 3cm de altura.
- 7.- Calcula h de la siguiente figura.



- 8.- Un conjunto de tres números positivos, tales como 3, 4 y 5 que son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo se llama Terna pitagórica. Si (a, b, c) es una terna pitagórica, es decir, satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Muestra que (ka, kb, kc) donde k es un número natural también lo es. Usa esto para construir otras ternas pitagóricas partiendo de $(3, 4, 5)$.

Nota: Los triángulos rectángulos cuyos lados son (a, b, c) y (ka, kb, kc) son semejantes. ¿Podrías decir por qué?

9.- Los griegos sabían que se puede establecer una terna pitagórica (a, b, c)

encontrando valores u y v , tales que:

i) u y v no tienen factores comunes

ii) uno es par y el otro impar

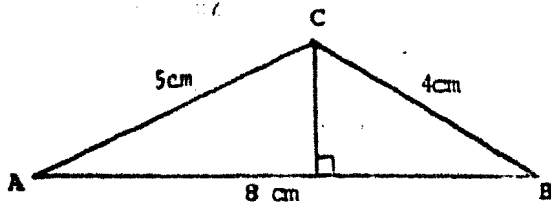
iii) $u > v$, y usando las fórmulas

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2.$$

Por ejemplo, si $u = 2$ y $v = 1$ entonces $a = 4$, $b = 3$ y $c = 5$. Usa-

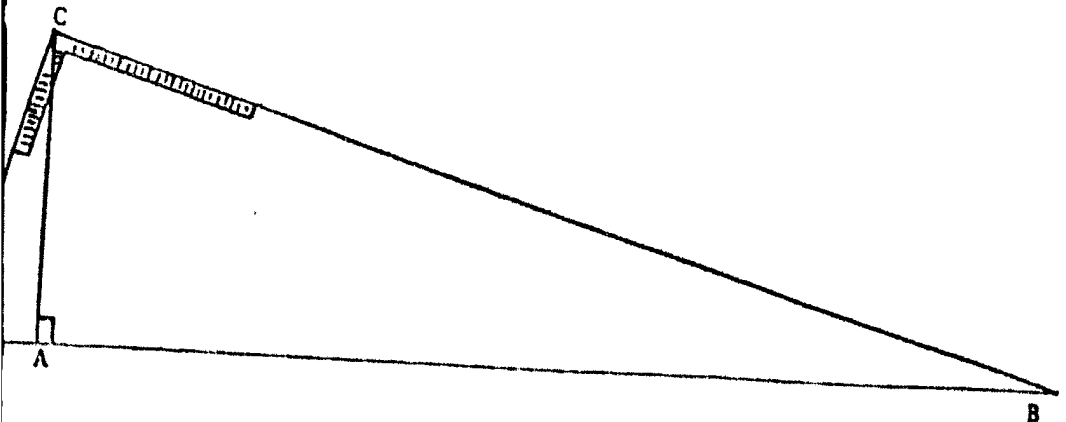
estas fórmulas para encontrar otras ternas pitagóricas.

10.- Calcula la altura de un triángulo de lados 4 cm, 5 cm y 8 cm como se observa en la siguiente figura.



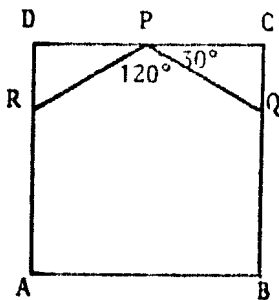
RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS APLICANDO LO ESTUDIADO EN CONGRUENCIA, SEMEJANZA O TEOREMA DE PITAGORAS.

1. Los lados de un triángulo son respectivamente 3cm, 4cm y 5cm. Se traza una paralela al lado de 4cm que corta al de 3cm a 1cm del vértice del ángulo mayor. Calcula los segmentos interceptados en el lado mayor.
2. Un terreno rectangular de 40m de largo por 30m de ancho tiene en medio un basurero que no permite una medición directa. Determina la longitud de la diagonal del terreno.
3. Se desea hacer un croquis de un terreno triangular cuyos lados son de 75m, 60m y 50m respectivamente. Si el lado mayor se dibuja de 5cm, ¿de qué longitud deben dibujarse los otros dos?
4. Una escuadra de carpintero colocada sobre un poste vertical en la forma en la que se indica en el dibujo, puede utilizarse para encontrar la distancia de un charco determinado por dos puntos. Un punto es la base del poste y el otro queda en la visual a lo largo de uno de los brazos de la escuadra. Si en el dibujo, $AC=2m$ y $AD=0.60 m$, encuentra la distancia de A a B.



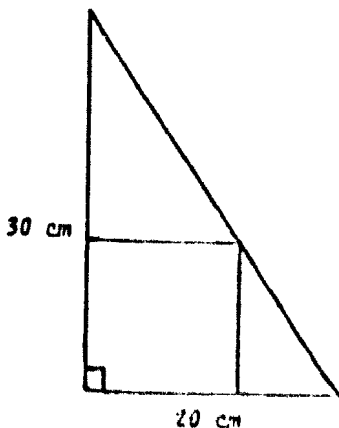
5. En el cuadrado ABCD, el punto P es el punto medio de DC, PQ y PR se han trazado de modo que $\angle QPC = 30^\circ$ y $\angle RPQ = 120^\circ$.

Demuestra que $PQ = PR$.

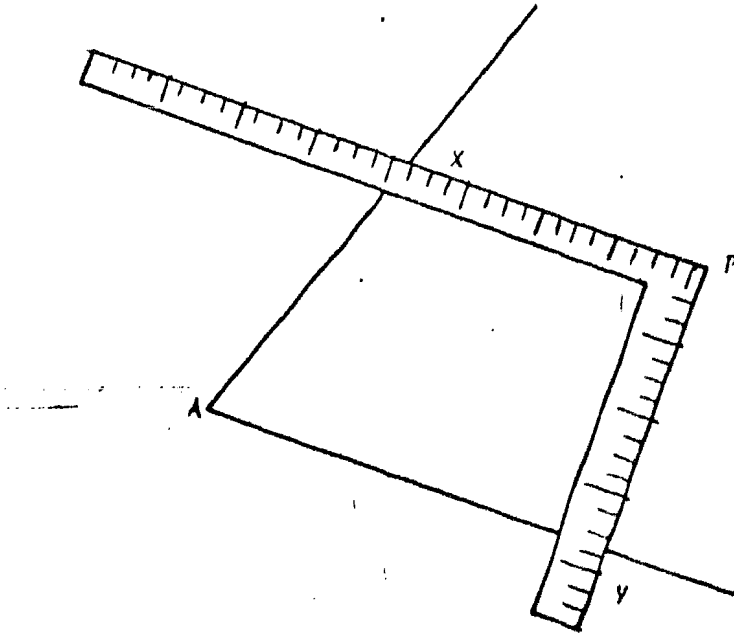


6. Se coloca una escalera de 20 m de largo contra la pared de un edificio, llegando hasta el marco inferior de una ventana situada a 16 m del piso. Si la altura de la ventana es de 2.5 m, ¿qué distancia se necesitaría deslazar el pie de la escalera para que ésta alcance el marco superior de ella?

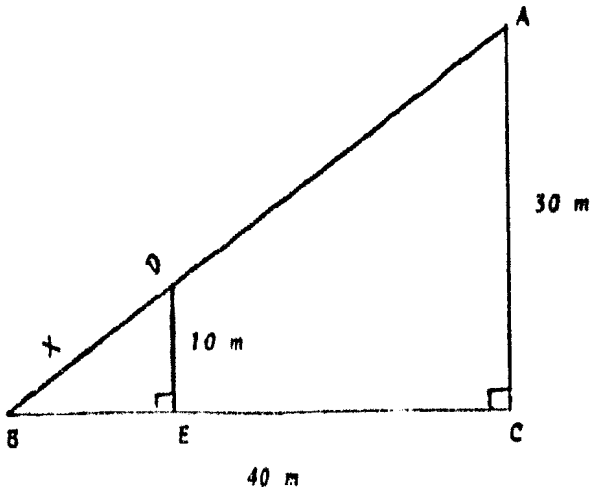
7. Se tiene un triángulo rectángulo de cartón. Los catetos miden 20 cm y 30 cm. Se recorta un cuadrado como se indica en la figura. Encuentra cuánto mide el lado del cuadrado recortado.



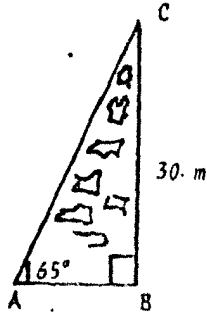
8. Se puede bisectar un ángulo usando una escuadra de carpintero de la siguiente manera; se toman dos puntos X , Y cada uno sobre un lado del ángulo de tal manera que $AX=AY$. Se coloca la escuadra tal que $PX=PY$, ¿por qué razón $\angle XAP = \angle YAP$?



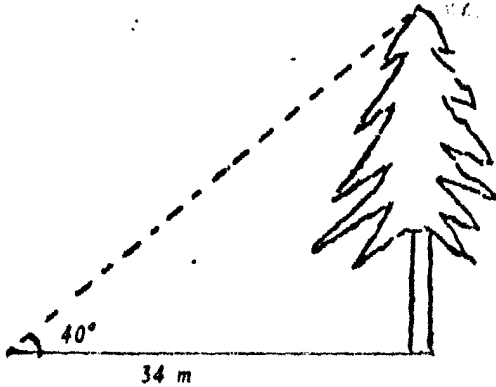
9. Calcula el valor x de la siguiente figura.



10. En una presa se desea construir un muro de contención. El ángulo CAB - debe de ser de 65° [observa la figura] y la altura del muro de 30 m. Calcula el ancho AB de la base del muro.

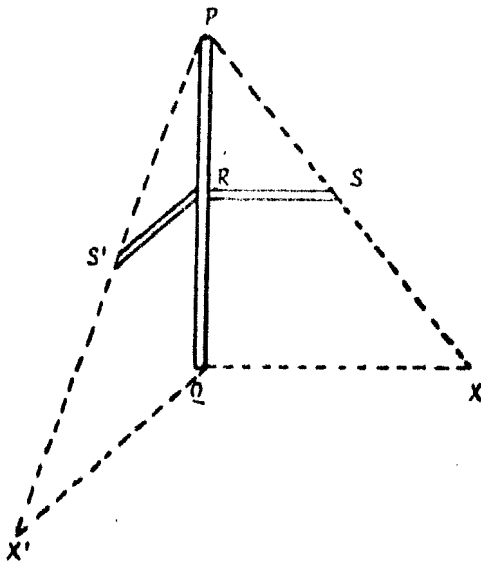


11. A 34 m del pie de un árbol (observa la figura), se forma un ángulo de 40° , ¿cuánto mide el árbol?

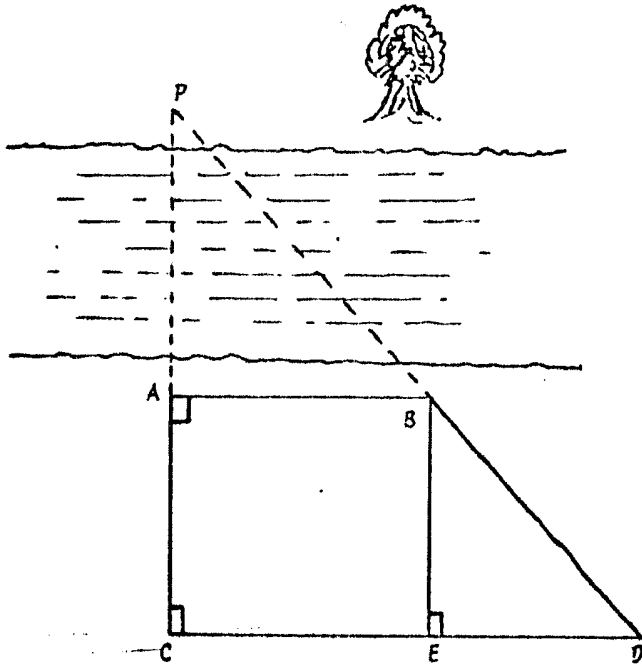


12. Un árbol se rompe a 10 m por encima del suelo. La parte alta toca el suelo a 13 m del pie del tronco, mientras que el otro extremo de la parte alta queda unido al tronco, ¿cuál es la altura del árbol?

13. Una escuadra de agrimensor tiene un poste vertical PQ y un barrote -- horizontal RS que se puede deslizar hacia arriba y hacia abajo sobre el -- poste PQ , (observa la figura). Supóngase que se dirige una visual de "P" a "X" y se mueve el barrote horizontal hasta lograr que S quede en el rayo PX ; después, se hace girar el aparato sobre el eje PQ y se dirige una visual a lo largo del rayo PS' para determinar X' . ¿Por qué razón $QX' = QX$?

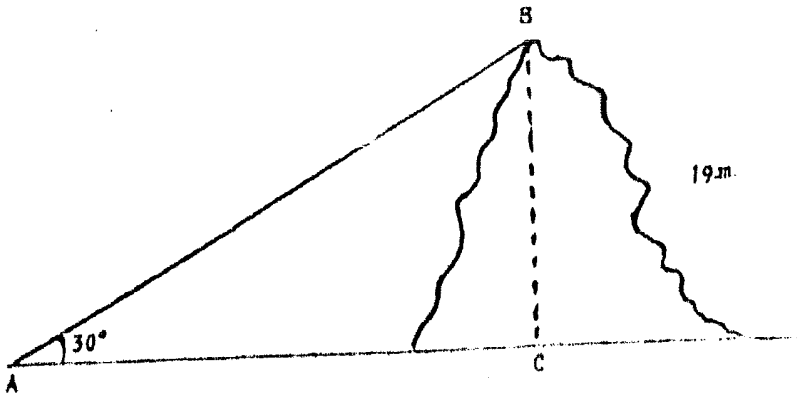


14. Para calcular el ancho AP de un río un muchacho hizo lo siguiente: Se colocó en un punto C el cual está alineado con A y P . Desde los puntos A y C trazo rectas perpendiculares a CA . Sobre la perpendicular que pasa por A eligió un punto arbitrario B y desde la perpendicular que pasa por C eligió un punto D que estuviera alineado con B y P , finalmente desde el punto B trazo el segmento BE paralelo a AC .



Demuestra que la distancia AP se puede calcular por medio de la expresión $AP = \frac{AB \times BE}{ED}$ donde AB, BE y ED pueden medirse directamente.

15. Se desea construir una calle que va de un llano hacia una colina, como se ve en la figura. La altura de la colina es de 19 m y se sabe que el mejor ángulo de inclinación es de 30° . ¿Desde dónde se debe comenzar a -- construir la calle, o sea, cuánto debe medir AC?



UNIDAD VI

Trigonometría .

TRIGONOMETRIA

1. PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN TRIANGULOS.

En las unidades anteriores hemos utilizado congruencia, semejanza y el teorema de Pitágoras para resolver problemas que involucran triángulos, sólo que, en algunos casos, la solución que encontramos no fue del todo exacta como se hubiera deseado.

A continuación escribiremos algunos de esos problemas y discutiremos su solución.

a) Desde lo alto de un faro de 30 metros sobre el nivel del mar, se observa una lancha anclada. ¿A qué distancia estará del faro?., (figura 1).

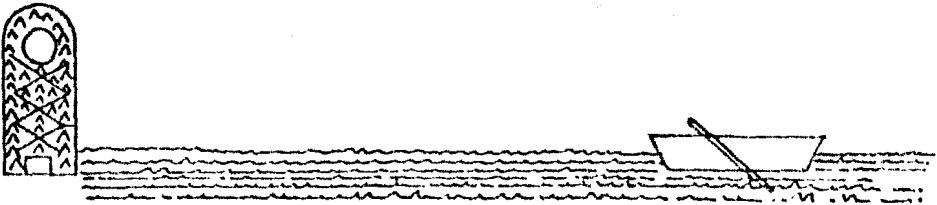


Figura 1

b) ¿Cómo podemos calcular la altura de una montaña?, (figura 2).

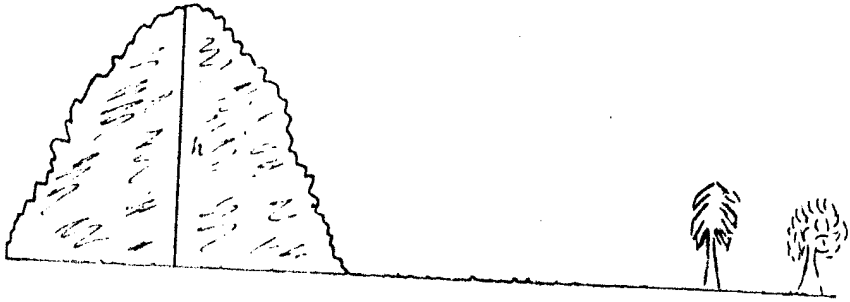


Figura 2

c) La longitud del péndulo de un reloj es de 50 cm. Si el ancho de la caja del reloj es de 45 cm. ¿Cuánto debe medir el ángulo BAC, para que al oscilar el péndulo, no pegue a las paredes del reloj? (El punto A está a la mitad de las paredes verticales). Observa la Figura 3

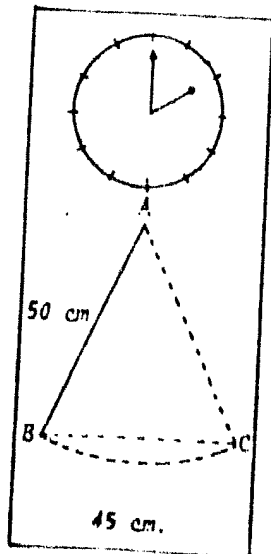


Figura 3

Planteamiento de los problemas.

a) Para resolver el problema representaremos al faro por el segmento AB y a la lancha por el punto C., (figura 4)

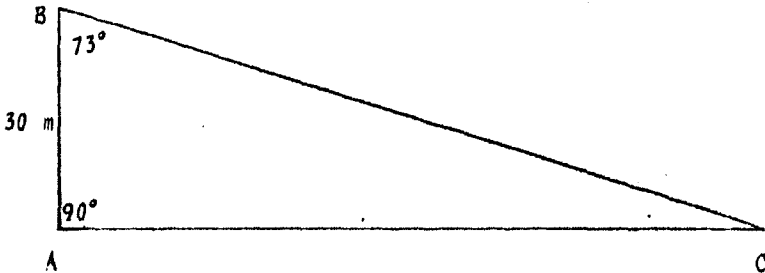


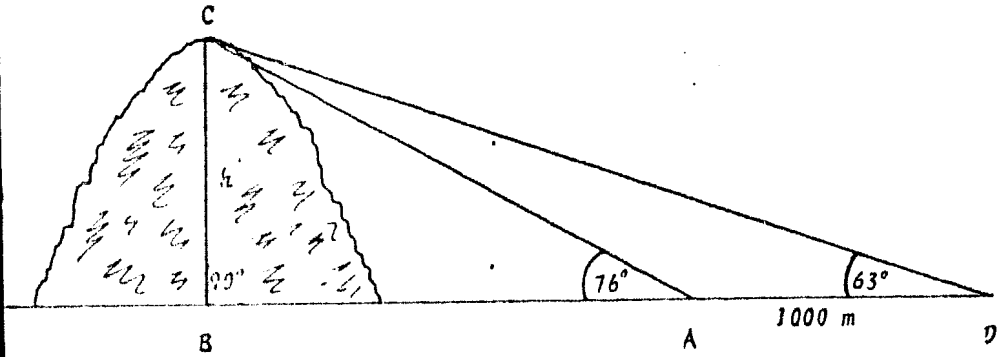
Figura 4

Medimos el ángulo que forman el faro con la visual que se dirige -- desde la parte alta del mismo hacia la lancha y encontramos que es de -- 73° , suponemos, además, que el faro forma un ángulo de 90° con el nivel del mar.

Con estos datos, cómo se puede encontrar la distancia AC?

En la unidad correspondiente a semejanza de triángulos, vimos que -- una forma de resolver este tipo de problemas consiste en formar un trián-- gulo semejante y en éste, medir el segmento que nos interesa. Te propone-- mos que hagas los cálculos.

b) Para este problema aunque quisieramos medir directamente la altura de la montaña, no podríamos; por lo tanto lo que haremos es lo siguiente: Desde el punto A medimos el ángulo BAC (supongamos que mide 76°). A con-- tinuación caminamos en línea recta 1000 metros y ahora medimos el ángulo ADC (supongamos que mide 63°). Observa la figura 5



Esta figura no está a escala

Figura 5

Como en el caso anterior, te proponemos que dibujes una figura a escala y en ella midas los segmentos requeridos.

c) Para asegurarnos que el péndulo no pegará en las paredes del reloj, -- supongamos que la distancia BC es de 40 cm., (figura 6).

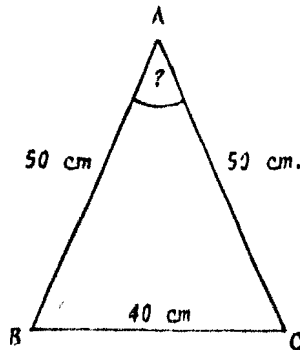


Figura 6

Dibuja un triángulo a escala y mide el ángulo solicitado.

2. RESOLUCION POR MEDICION DIRECTA.

A continuación resolveremos los tres problemas anteriores, utilizando lo estudiado en la unidad de semejanza de triángulos.

a) Para encontrar la distancia que existe del faro a la lancha dibujamos un triángulo a la escala 1:1000 cm. (Recuerda que esto significa, que cada centímetro en la figura a escala, representa 1000 centímetros (10 metros) de la situación real). Nosotros utilizamos la escala anterior, pero tu pudiste haber usado cualquier otra escala. Observa la figura 1

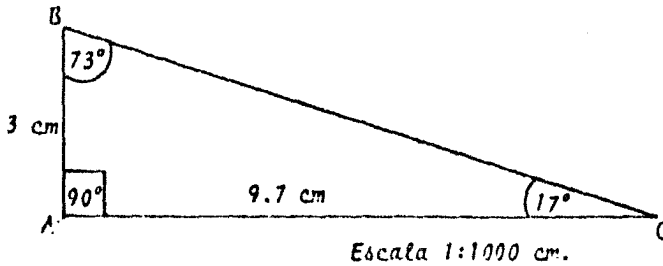


Figura 1

Midiendo el segmento AC en la figura 1, encontramos, que éste es aproximadamente de 9.7 cm. por lo tanto, si multiplicamos esta cantidad por la razón de proporcionalidad, sabremos qué distancia existe entre el faro y la lancha.

$$\text{Distancia} = 9.7 \text{ cm.} \times 1000$$

$$\text{Distancia} = 9700 \text{ cm,}$$

o sea, aproximadamente, la distancia es de 97 metros.

Ejercicios:

i) Explica, por qué el triángulo de la figura 1, es semejante con el triángulo imaginario que forman el faro y la lancha.

ii) Tanto en los problemas que involucren la medición de segmentos como de ángulos, es importante que las medidas que se hagan, sean lo más exacto posible, ya que, el error de uno o dos milímetros o uno o dos grados, nos altera la solución. A fin de clarificar lo anterior, te proponemos -- que encuentres la distancia del faro a la lancha, pero, ahora suponiendo que el ángulo en B es de 74° .

b) En este caso, la escala que utilizaremos para encontrar la altura de la montaña, será 1:20000 cm. Observa la figura 2. En esta figura, el segmento BC es aproximadamente de 18.5 cm. por lo tanto, multiplicando por la razón de proporcionalidad, encontramos:

$$\text{Altura} = 18.5 \text{ cm} \times 20000$$

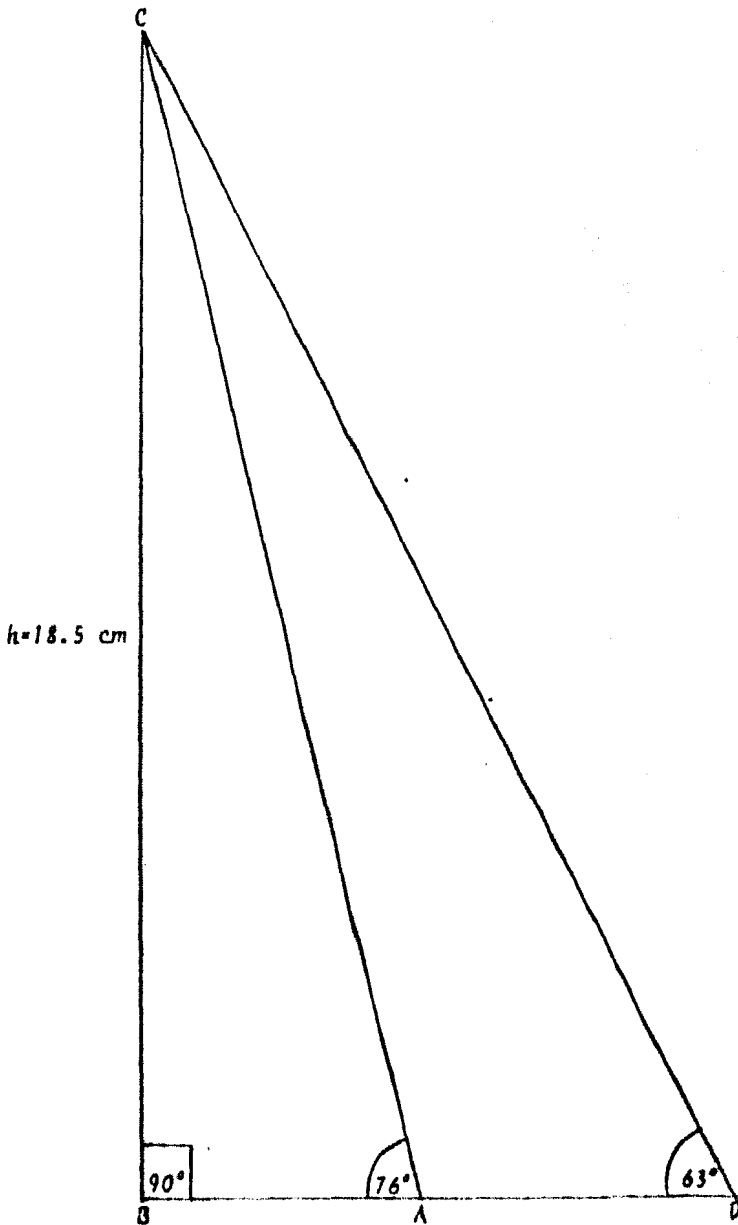
$$\text{Altura} = 370000 \text{ cm,}$$

o sea, aproximadamente la altura de la montaña es de 3700 metros.

Ejercicios:

i) Explica, por qué los triángulos de la figura 2, son semejantes con los triángulos imaginarios que se formaron con la montaña.

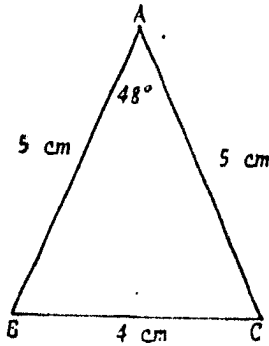
ii) Encuentra la altura de la montaña, pero, ahora considerando que el -- ángulo ADC es de 64° .



Escala 1:20000 cm.

Figura 2

Si la escala que utilizaremos para encontrar el ángulo solicitado será 1:10 cm. Observa la figura 3.



Escala 1:10 cm.

Figura 3

El ángulo BAC mide aproximadamente 48° .

Ejercicios:

i) Explica, por qué el triángulo de la figura 3, es semejante al triángulo imaginario que se forma al oscilar el péndulo del reloj.

ii) Si el ángulo BAC fuera de 52° , ¿pegaría el péndulo en las paredes del reloj?.

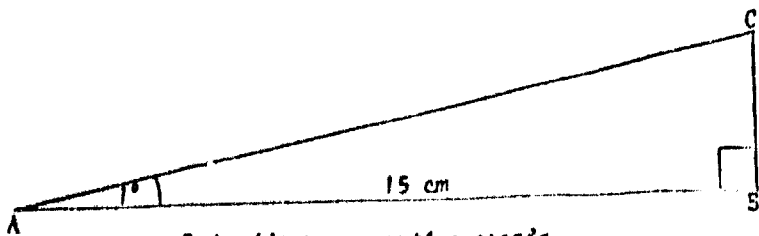
3. ERRORES EN LA MEDICIÓN DIRECTA

Los tres problemas anteriores los hemos podido resolver utilizando la medición de segmentos o ángulos en figuras semejantes, pero, ¿qué tan confiables son las soluciones encontradas?. A continuación marcaremos algunos inconvenientes que tiene el resolver los problemas, utilizando este método.

a) Los instrumentos que estamos utilizando (regla, transportador, compás) son poco precisos, por esto, en las figuras a escala, el medir o trazar un ángulo o bien un segmento con instrumentos de poca precisión, origina que los demás ángulos y lados se modifiquen y en este sentido la solución no será tan aproximada como se quiere.

A manera de ejemplo, diremos que el transportador que utilizamos no tiene minutos, ni segundos.

b) Existen problemas para los cuales es muy difícil hacer una figura a escala o bien el error que se puede cometer al medir y trazar aumenta. A fin de que entiendas lo que te estamos diciendo, te proponemos que dibujes un triángulo rectángulo, que tenga un ángulo de un grado y un lado de 15 centímetros, o sea $\angle A = 1^\circ$ y $AB = 15$ cm. A continuación mide los segmentos AC y CB, así como el ángulo C. (Figura 1).



Esta figura no está a escala

Figura 1

Ejercicios:

Después de haber medido los lados y los ángulos del triángulo de la figura 1. Contesta las siguientes preguntas.

i) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$?

ii) ¿Se cumple el teorema de Pitágoras?, esto es, $AC^2 = AB^2 + BC^2$?

A pesar de que los dibujos a escala que hicimos para resolver los -- problemas del faro, la montaña y el reloj, no fueron tan difíciles de trazar como el dibujo del triángulo anterior, también en ellos se cometieron errores; a continuación, escribiremos los resultados correctos para cada uno de los tres problemas.

1. En el caso de la distancia del faro a la lancha, la solución debe ser:

$$\text{Distancia} = 98.1255 \text{ metros.}$$

2. La altura de la montaña es:

$$\text{Altura} = 3843.2353 \text{ metros.}$$

3. Finalmente el ángulo que abarca el péndulo es:

$$\angle BAC = 47^\circ 09'$$

Pero, ¿cómo supimos cuáles eran los resultados correctos?. A continuación haremos un análisis de cómo hemos resuelto los problemas, para que finalmente encontremos una herramienta llamada trigonometría, con la cual, ya no necesitaremos medir directamente lados o ángulos, para conocer sus magnitudes.

4. DIVERSOS PROBLEMAS QUE SE PUEDEN PRESENTAR EN UN TRIÁNGULO.

En general en esta unidad, estudiaremos, cómo se resuelven los problemas que involucran triángulos, conociendo diferentes datos, por ejemplo:

a) Se conocen las magnitudes de los lados de un triángulo y se quiere saber cuánto miden los ángulos (Figura 1).

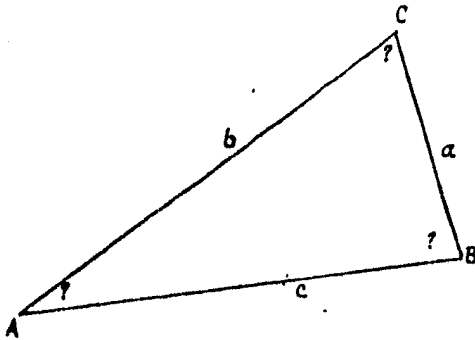


Figura 1

En este caso conocemos las magnitudes de a , b y c ; y desconocemos -- los valores de los ángulos A, B y C.

b) Se conocen dos ángulos de un triángulo y la magnitud de uno de sus lados y se quiere saber cuánto miden los otros dos lados y el tercer ángulo. (Figura 2).

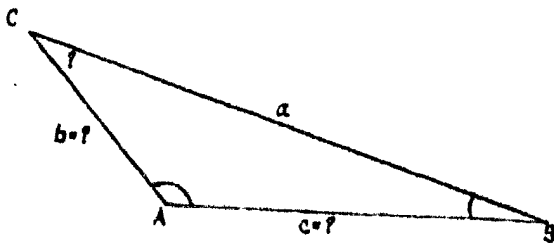


Figura 2

En este caso conocemos $\angle A$, $\angle B$ y lado a ; y desconocemos los lados b y c , así como el ángulo C .

c) Se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido por esos lados y se quiere saber cuánto miden los otros dos ángulos y el tercer lado (Figura 3).

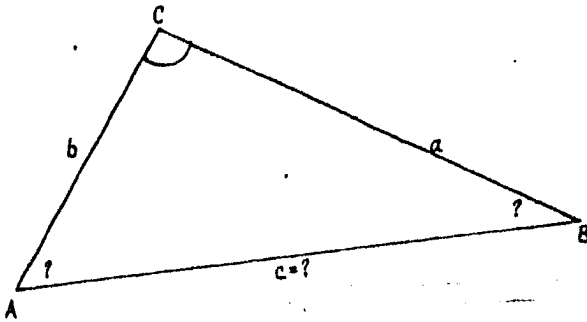


Figura 3

En este caso conocemos los lados a , b y el ángulo C ; y desconocemos los ángulos A y B , así como el lado c . En este último caso, si el ángulo que se conoce, no fuera el comprendido por los dos lados conocidos, entonces el problema puede tener dos, una o ninguna solución, dependiendo de las magnitudes de los lados y ángulos. Revisa lo estudiado en la unidad de congruencia de triángulos.

5. TRIANGULOS RECTANGULOS.

Para analizar como se resuelven los diversos tipos de problemas planteados anteriormente, empezaremos estudiando un caso particular, esto es, en esta parte el estudio lo haremos sobre triángulos rectángulos.

Calcula el valor de los catetos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 5 centímetros y que uno de los ángulos es de 60° - (Figura 1).

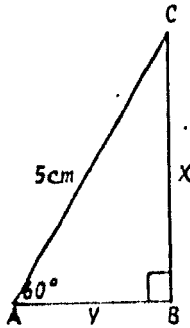


Figura 1

Una forma de solucionar este problema, consiste en dibujar un triángulo rectángulo con los datos que nos dieron y después medir directamente los catetos; sin embargo, ya vimos que este tipo de solución, no es del todo exacta.

Antes de resolver el problema, construiremos un triángulo equilátero de lados de 6 cm. y en él dibujaremos una de sus alturas (Figura 2).

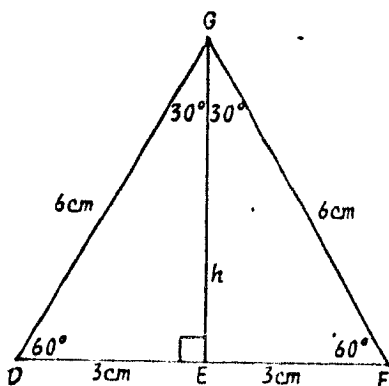


Figura 2

Ejercicios:

- a) Explica por qué los ángulos en el triángulo DEG, son de 30° , 60° y 90° .
 b) Explica por qué el lado DE en el triángulo DEG mide 3 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo DEG, podemos encontrar el valor del cateto EG.

$$DE^2 + EG^2 = DG^2$$

substituyendo

$$3^2 + h^2 = 6^2$$

$$9 + h^2 = 36$$

$$h^2 = 36 - 9$$

$$h^2 = 27$$

$$h = \sqrt{27}$$

$$h = 5.1961524$$

A continuación dibujaremos el triángulo DEG, con todos sus valores - (Figura 3).

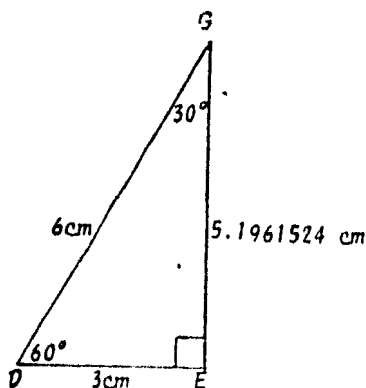


Figura 3

Es el triángulo DEG de la figura 3, semejante al triángulo ABC de la figura 17.

Bien, como $\triangle ABC \sim \triangle DEG$, entonces sus lados deben ser proporcionales, por tanto:

$$\frac{x}{5} = \frac{5.1961524}{6}$$

$$x = \frac{(5)(5.1961524)}{6}$$

$$x = \frac{25.980762}{6}$$

$$x = 4.330127$$

Esto significa que el valor del cateto BC = 4.330127 cm. De manera análoga, tenemos:

$$\frac{y}{5} = \frac{3}{6}$$

$$y = \frac{(5)(3)}{6}$$

$$y = 2.5$$

O sea, el cateto $AB = 2.5$ cm.

Si analizas la forma como resolvimos el problema, te darás cuenta, - que en esta ocasión, encontramos la medida de los catetos, sin necesidad de medirlos directamente.

Ejercicios.

1. Sin medir directamente y auxiliándote de la figura 3, encuentra los valores de a y b del siguiente triángulo rectángulo (Figura 4).

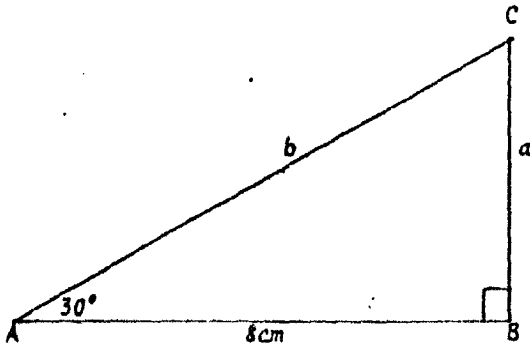


Figura 4

2. El triángulo ABC (figura 5), tiene un ángulo $A = 60^\circ$, $AC = 4$ metros $AB = 13$ metros. Calcula sin medir y auxiliándote de la figura 3:

- La altura h .
- El segmento AD .
- El lado BC (para encontrar este lado, aplica el teorema de Pitágoras).

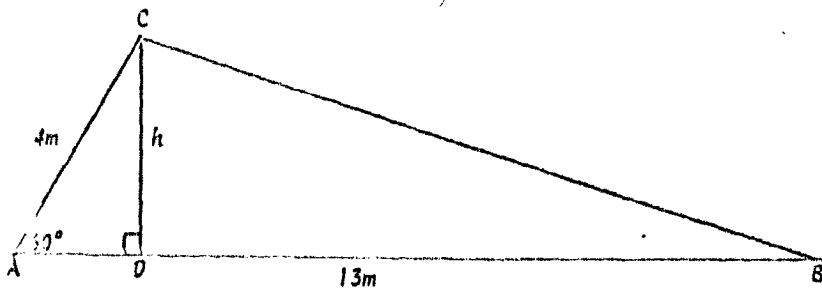


Figura 5

6. LOS COCIENTES.

En la unidad semejanza de triángulos, vimos que si dos o más triángulos son semejantes entonces sus lados son proporcionales. Observa las siguientes figuras.

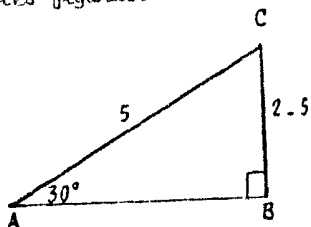


Fig. 1

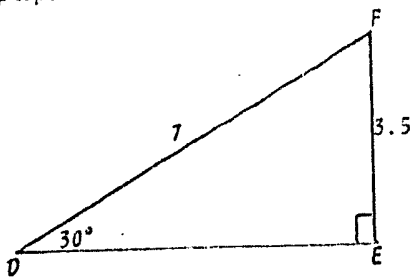


Fig. 2

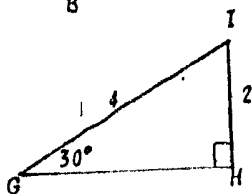


Fig. 3

Como $\triangle ABC \sim \triangle DEF \sim \triangle GHI$ entonces sus lados son proporcionales, es to es, se debe cumplir que:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF} = \frac{HI}{GI} = 0.5$$

O sea:

$$a) \frac{BC}{AC} = \frac{2.5}{5} = 0.5$$

$$b) \frac{EF}{DF} = \frac{3.5}{7} = 0.5$$

$$c) \frac{HI}{GI} = \frac{2}{4} = 0.5$$

A los lados de un triángulo rectángulo, que forman el ángulo de 90° , les hemos llamado catetos y al que se opone al ángulo de 90° hipotenusa. En esta unidad, para diferenciar a los dos catetos, los relacionaremos con los ángulos, esto es, en la figura 1, al segmento BC le llamaremos cateto opuesto al ángulo de 30° y al segmento AB le llamaremos cateto ad-

yacente al ángulo de 30° .

Con respecto al siguiente triángulo rectángulo (figura 4), tenemos:

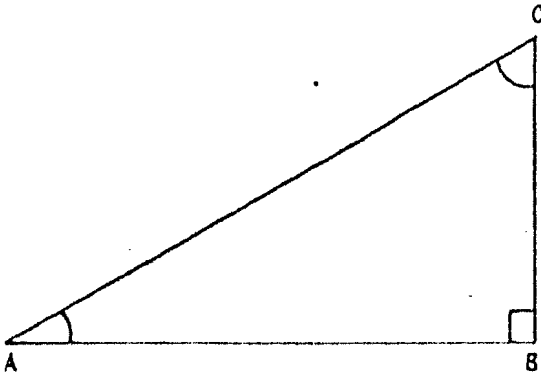


Figura 4

- a) BC es el cateto opuesto al ángulo A
- b) AB es el cateto adyacente al ángulo A
- c) AC es la hipotenusa.

Sin embargo, si ahora nos fijamos en el ángulo C, tenemos:

- a) BC es el cateto adyacente al ángulo C
- b) AB es el cateto opuesto al ángulo C
- c) AC es la hipotenusa.

Bien, regresando a las tres primeras figuras, te proponemos los siguientes ejercicios:

- a) Si dibujamos otro triángulo rectángulo que también tenga un ángulo de 30° y dividimos el cateto opuesto al ángulo de 30° entre la hipotenusa, - será este cociente igual a 0.57.

Utilizando este resultado, encontraremos los catetos del siguiente triángulo rectángulo (Figura 5).

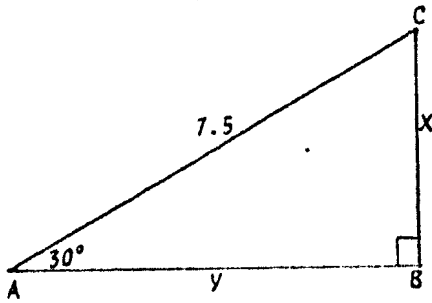


Figura 5

Sabemos que, el cociente del cateto opuesto al ángulo de 30° entre la hipotenusa es igual a 0.5, por tanto:

$$\frac{X}{7.5} = 0.5$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$X = (0.5)(7.5)$$

$$X = 3.75$$

Para encontrar el valor de "Y", apliquemos el teorema de Pitágoras:

$$y^2 + (3.75)^2 = (7.5)^2$$

$$y^2 = 56.25 - 14.0625$$

$$y^2 = 42.1875$$

$$y = \sqrt{42.1875}$$

$$y = 6.4951905$$

A manera de conclusión, diremos que el cociente del cual hemos estado hablando, se le conoce como el seno del ángulo 30° , esto es.

$$\text{Seno } 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto al } \angle 30^\circ}{\text{hipotenusa}} = 0.5$$

7. LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS

En los problemas anteriores analizamos, que cuando dos o más triángulos rectángulos son semejantes, entonces, sus lados son proporcionales. Y como los triángulos tienen tres lados entonces podemos, al combinar éstos, encontrar seis cocientes, a los cuales les llamaremos razones trigonométricas.

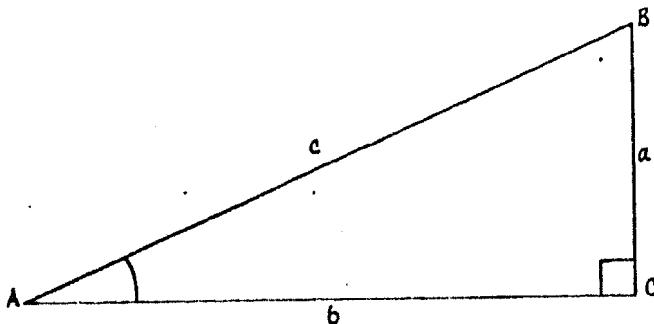


Figura 1

Los seis cocientes de los que estamos hablando son:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \text{ y } \frac{c}{a}.$$

Como estos cocientes dependen de los ángulos del triángulo, podemos relacionarlos con cada uno de ellos. Así, definimos.

(Con respecto al ángulo A, el cateto opuesto es "a" y el cateto adyacente es "b").

$$1) \text{ seno del ángulo A} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo A}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$2) \text{ coseno del ángulo A} = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo A}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$3) \text{ tangente del ángulo A} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo A}}{\text{cateto adyacente al ángulo A}} = \frac{a}{b}$$

$$4) \text{ cotangente del ángulo A} = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo A}}{\text{cateto opuesto al ángulo A}} = \frac{b}{a}$$

$$5) \text{ secante del ángulo } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al ángulo } A} = \frac{c}{b}$$

$$6) \text{ cosecante del ángulo } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al ángulo } A} = \frac{c}{a}$$

Las seis razones anteriores las podemos escribir en forma abreviada como sigue: (observa la figura 1).

$$1) \text{ sen } A = \frac{a}{c}$$

$$2) \text{ cos } A = \frac{b}{c}$$

$$3) \text{ tan } A = \frac{a}{b}$$

$$4) \text{ cot } A = \frac{b}{a}$$

$$5) \text{ sec } A = \frac{c}{b}$$

$$6) \text{ csc } A = \frac{c}{a}$$

Ejercicio: Con respecto al triángulo de la figura 2, encuentra las seis razones trigonométricas en relación al:

a) ángulo A

b) ángulo B

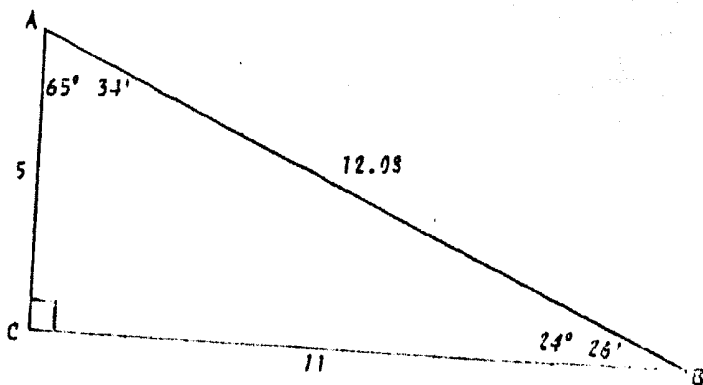


Figura 2

8. LAS TABLAS.

Hasta ahora hemos visto que todos los triángulos rectángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes; por lo tanto los seis cocientes que hemos llamado razones trigonométricas, son iguales para cada ángulo también.

En los triángulos de la figura 1, encontramos que:

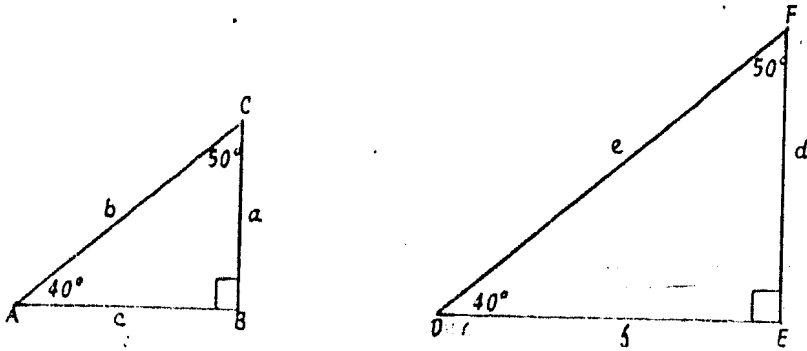


Figura 1

a) Con respecto al triángulo rectángulo ABC:

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo de } 50^\circ}{\text{hipotenusa}}$$

b) Con respecto al triángulo rectángulo DEF:

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{f}{e} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo de } 50^\circ}{\text{hipotenusa.}}$$

Lo que hasta el momento hemos encontrado es que seno de 50° en el triángulo ABC es igual a seno de 50° en el triángulo DEF, ya que:

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{c}{b}$$

$$\text{y } \text{sen } 50^\circ = \frac{f}{e}$$

pero $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$ porque los triángulos ABC y DEF son semejantes.

• De manera análoga, encontramos que el coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son iguales.

A continuación, encontraremos los valores de las razones trigonométricas para los ángulos 45° , 60° , y 30° .

1. Obtención de las razones trigonométricas para el ángulo de 45° . Consideremos un cuadrado de lado 1; usando el teorema de Pitágoras, encontramos que la diagonal AC mide $\sqrt{2}$. Observa la figura 2.

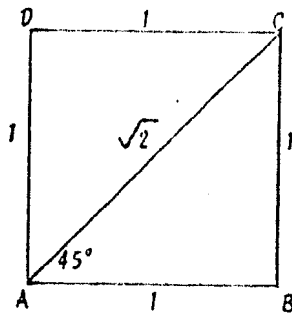


Figura 2

Como el ángulo $BAC = 45^\circ$ (explica por qué), tenemos:

$$a) \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d) \operatorname{cot} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$b) \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e) \operatorname{sec} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$c) \operatorname{tan} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$f) \operatorname{csc} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

2. Obtención de las razones trigonométricas para el ángulo de 60° . Consideremos un triángulo equilátero de lado 2, y en él, una de sus alturas. - Observa la figura 3.

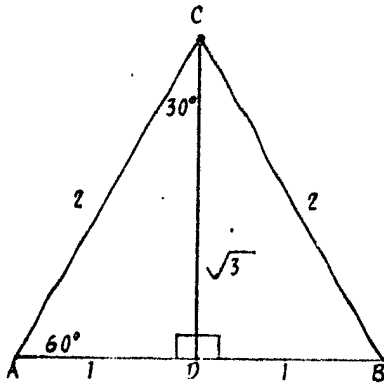


Figura 3

Entonces, $\angle CAD = 60^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = 1$ y $CD = \sqrt{3}$ (explica por qué), por lo --

tanto:

$$a) \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d) \operatorname{cot} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$b) \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$e) \operatorname{sec} 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$c) \operatorname{tan} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$f) \operatorname{csc} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Obtención de las razones trigonométricas para el ángulo de 30° . Utilizando los datos del inciso anterior, encontramos:

$$a) \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$d) \operatorname{cot} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$b) \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e) \operatorname{sec} 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$c) \operatorname{tan} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f) \operatorname{csc} 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

En la figura 4, aparece una tabla en la que hemos resumido las razones trigonométricas para los ángulos de 30° , 45° y 60° .

ANGULOS RAZONES	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Figura 4

Utilizando la tabla de la figura 4, resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra el valor del segmento AB, en el triángulo de la figura 5.

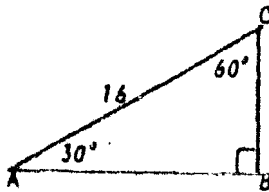


Figura 5

Para resolver este problema, lo primero que haremos es seleccionar una de las razones trigonométricas que relacione al segmento AC con el segmento AB. Para seleccionar la razón trigonométrica primero debemos fijarnos en un ángulo; en este caso podemos trabajar con cualquiera de los ángulos: con el de 60° o con el de 30° .

Tomemos por ejemplo el ángulo de 30° . Con respecto a este ángulo, AB es el cateto adyacente y AC es la hipotenusa; por lo tanto, podemos seleccionar al coseno de 30° , o bien a la secante de 30° .

Tenemos:

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{16}$$

pero, ya que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se tiene:

$$\frac{AB}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{2}$$

$$AB = \frac{16(1.7320508)}{2}$$

$$AB = \frac{27.7128128}{2}$$

$$AB = 13.8564064$$

Ejercicio: Encuentra el valor del segmento BC, utilizando alguna razón trigonométrica del ángulo de 60° . Observa la figura 5.

2. Encuentra el valor del segmento AC en el triángulo de la figura 6.

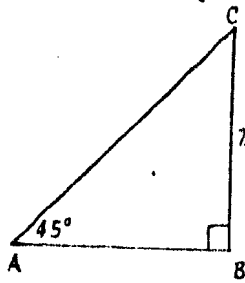


Figura 6

En este caso, existen dos razones trigonométricas que relacionan a los segmentos AC y BC. Estas razones son:

$$\text{i) } \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{7}{AC} \quad \text{y}$$

$$\text{ii) } \operatorname{csc} 45^\circ = \frac{AC}{7}$$

Como cualquiera de estas dos razones nos sirven, nosotros seleccionaremos:

$$\operatorname{csc} 45^\circ = \frac{AC}{7} \quad ,$$

ya que $\operatorname{csc} 45^\circ = \sqrt{2}$, tenemos:

$$\frac{AC}{7} = \sqrt{2}$$

$$AC = 7 (\sqrt{2})$$

$$AC = 7 (1.4142136)$$

$$AC = 9.8994952$$

Ejercicio: Encuentra el valor del segmento AB. Observa la figura 6.

3. Para encontrar el ancho de un río, un topógrafo procede de la siguiente manera: desde un punto A situado a un metro de distancia de una orilla (observa la figura 7) del río, dirige la vista a una piedra B, que -

está en la otra orilla, justamente enfrente. Después gira 90° formando el ángulo BAC y traza la recta AC . Sobre ella camina dos metros y desde el punto C mide el ángulo ACB , encontrando que este es de 60° . ¿Cuál es el ancho del río?

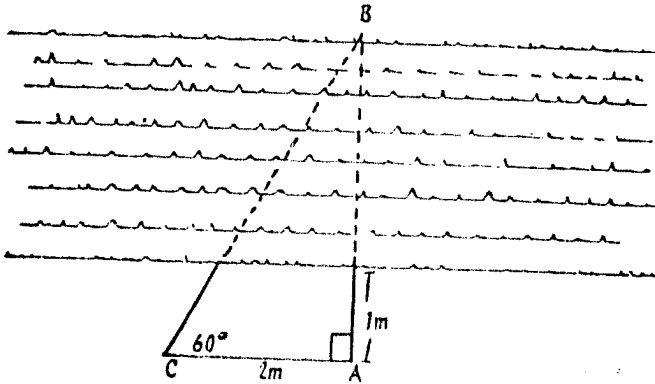


Figura 7

En este caso queremos encontrar el valor del segmento AB ; sabemos que $\angle C = 60^\circ$ y $AC = 2m$. Estos elementos los podemos relacionar por medio de la tangente de 60° o bien la cotangente de 60° . Hagamos lo siguiente:

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{2},$$

pero, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, por lo tanto:

$$\frac{AB}{2} = \sqrt{3}$$

$$AB = 2\sqrt{3}$$

$$AB = 2(1.7320508)$$

$$AB = 3.4641016$$

Para encontrar el ancho del río, al segmento AB le restamos un metro, quedando:

$$\text{Ancho del río} = 3.4641016-1$$

$$\text{Ancho del río} = 2.4641016 \text{ m.}$$

Ejercicio: Encuentra en la figura 7 el valor del segmento BC.

4. Encuentra el valor del segmento AB en el triángulo de la figura 8.

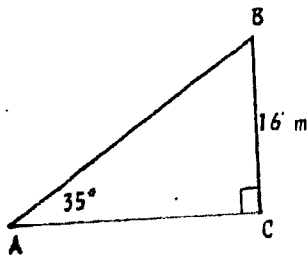


Figura 8

Para resolver este problema podemos usar la siguiente razón trigonométrica:

$$\text{sen } 35^\circ = \frac{16}{AB}$$

pero aquí existe el inconveniente que en la tabla de la figura 4, no aparece el valor para el seno de 35° . Por lo tanto, para resolver este problema, primero tendremos que encontrar el valor de seno de 35° .

Problemas de este tipo han aparecido desde la antigüedad, debido a esto se han creado formas para calcular los valores de las razones trigonométricas. Nosotros no vamos a explicar como se obtienen estos valores, y sólo te diremos que existen tablas trigonométricas las cuales contienen estos datos.

A manera de ejemplo, en la figura 9, aparece una parte de la tabla para el coseno.

C O S E N O

	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°
00'	0.86602540	0.85716730	0.84804810	0.83867057	0.82903757	0.81915204	0.80901699	0.79863551

Figura 9

Si observas, debajo de 35° , aparece el número 0.81915204, esto significa que con respecto a un triángulo rectángulo, que tenga un ángulo de 35° , el cociente que se obtiene al dividir el cateto adyacente al ángulo de 35° , entre la hipotenusa es 0.81915204. Observa la figura 10.

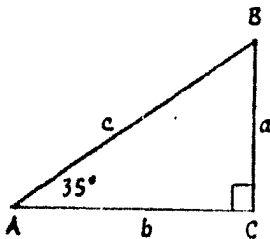


Figura 10

$$\text{O sea, } \cos 35^\circ = \frac{b}{c} = 0.81915204.$$

Es importante que observes que la última igualdad, no nos dice cuánto valen b y c , pero a cambio, nos informa sobre el valor del cociente.

En la siguiente sección aparece la explicación del uso de estas tablas trigonométricas.

Ejercicio: Resuelve el ejercicio de la figura 8.

9. USO DE LAS TABLAS TRIGONOMETRICAS.

A continuación haremos algunos señalamientos con respecto a las tablas trigonométricas.

a) Las tablas nos indican el valor de las razones trigonométricas para cada ángulo entre 0° y 90° ; esto es, si conocemos los valores de los ángulos de un triángulo rectángulo, entonces, por medio de las tablas podemos conocer el valor de los cocientes que se forman con los lados de ese triángulo.

Por ejemplo, si tenemos un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 37° , podemos saber cuanto vale el cociente $\frac{a}{c}$.

Con respecto a la figura 1:

- a = cateto opuesto al ángulo de 37° ,
- b = cateto adyacente al ángulo de 37° ,
- c = hipotenusa.

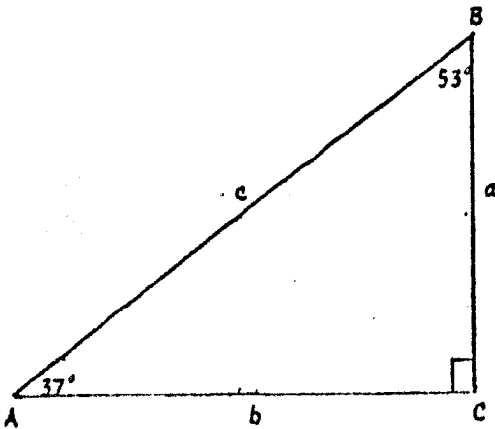


Figura 1

Para conocer el cociente $\frac{a}{c}$, lo único que tenemos que hacer es buscar en la tabla del seno el valor para el ángulo de 37° .

$$\text{sen } 37^\circ = \frac{a}{c}$$

$$\text{sen } 37^\circ = 0.60181502,$$

por lo tanto $\frac{a}{c} = 0.60181502.$

b) Si conocemos los valores de los lados de un triángulo rectángulo, por medio de las tablas, podemos conocer el valor de los ángulos.

Si tenemos un triángulo rectángulo de catetos 7 y 5 centímetros, - - ¿cuánto valdrá el ángulo A?

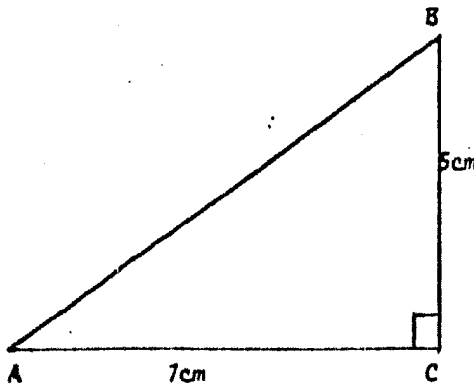


Figura 2

$$\text{Como: } \tan A = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo A}}{\text{cateto adyacente al ángulo A}} = \frac{5}{7},$$

$$\text{o sea } \tan A = 0.71428571$$

Lo que haremos para este problema, es buscar en la tabla de la tangente, el valor del ángulo para el cual la tangente vale 0.71428571. En trigonometría cuando se está buscando el valor de un ángulo, se acostumbra escribir:

$A = \text{ángulo cuya tangente es } 0.71428571$

o en forma abreviada:

$A = \text{áng tan } 0.71428571$

En este caso $A = 35^\circ 32'$

c) Desde la antigüedad y hasta tiempos muy recientes, se han construido - tablas trigonométricas para diferentes fines, como por ejemplo, para la - marina, astronomía, artillería, ingeniería, etc. En cada caso la preci-- sión requerida, obliga a que se utilice un tipo específico de tabla.

En Topografía se utilizan tablas de seis o siete cifras decimales pa - ra ángulos dados a intervalos de diez segundos.

En Astronomía se utilizaban tablas con ocho o diez cifras decimales para cada segundo. En algunas otras ramas científicas o bien para cálcu-- los ordinarios, basta con tablas de cuatro o cinco cifras decimales para ángulos dados de minuto en minuto.

Los primeros que hicieron tablas trigonométricas, fueron los griegos, en particular, Hiparco un astrónomo griego (190 a. C. - 120 a. C.) cons-- truyó unas tablas, que utilizó entre otras cosas, para construir un mapa, en el cual daba las posiciones exactas de algo más de mil estrellas entre las más brillantes.

Con el avance de la matemática y con el auxilio de las computadoras, en la actualidad se pueden construir tablas con tanta exactitud como se - desee.

En particular nosotros podríamos construir unas tablas trigonométri-- cas rudimentarias, dibujando triángulos rectángulos y en ellos midiendo - los lados; de esta manera iríamos obteniendo los valores de las razones - trigonométricas, pero el hacer esto, es equivalente a construir para cada

problema un triángulo semejante, con el inconveniente que cometeríamos muchos errores de medición.

Actualmente las calculadoras incluyen dentro de sus funciones, el cálculo de las razones trigonométricas, sin embargo y por considerar que no todo mundo tiene a la mano una calculadora, al final aparece un apéndice con unas tablas trigonométricas que fueron construidas con el auxilio de la microcomputadora APPLE II PLUS.

En estas tablas se puede encontrar los valores para el seno, coseno y tangente para cualquier ángulo dado en grados y minutos, entre cero y noventa grados.

A continuación se explica el uso de las tablas.

Supongamos que deseamos encontrar el valor del seno de $33^{\circ} 07'$; lo que haremos primero es fijarnos precisamente en la tabla del seno. A continuación, localizamos la columna que dice 33° y el renglón que marca $07'$. En la figura 3 aparece la parte de la tabla que nos interesa.

S E N O

	30°	31°	32°	33°	34°
00'	0.5000000	0.5150380	0.5299192	0.5446390	0.5591929
01'	0.5002519	0.5152873	0.5301659	0.5448829	0.5594340
02'	0.5005037	0.5155357	0.5304125	0.5451248	0.5596751
03'	0.5007553	0.5157839	0.5306591	0.5453707	0.5599161
04'	0.5010073	0.5160319	0.5309055	0.5456145	0.5601571
05'	0.5012590	0.5162792	0.5311521	0.5458562	0.5603981
06'	0.5015107	0.5165258	0.5313988	0.5460959	0.5606390
07'	0.5017623	0.5167717	0.5316449	0.5463342	0.5608795
08'	0.5020139	0.5170170	0.5318913	0.5465724	0.5611205
09'	0.5022653	0.5172617	0.5321373	0.5468090	0.5613614
10'	0.5025173	0.5175059	0.5323829	0.5470432	0.5616021

Figura 3

De la tabla obtenemos: $\text{sen } 33^{\circ} 07' = 0.54634562$

En caso que tengamos el problema inverso, esto es, que conozcamos el valor del cociente y que deseemos encontrar el valor del ángulo, el procedimiento que se hará es el inverso.

Encuentra el valor del ángulo A , sabiendo que el seno es igual a - - 0.51578590, esto es:

$$\text{sen } A = 0.51578590$$

Anteriormente ya dijimos que cuando se busca el valor de un ángulo, se acostumbra escribir,

$$A = \text{ang } \text{sen } 0.51578590$$

Procederemos, buscando en la tabla del seno el número 0.51578590. A simple vista parecería que buscar este número en toda la tabla del seno, es como buscar una aguja en un pajar; pero no es así, porque en el caso del seno, los números comienzan en cero y van aumentando en forma ordenada hasta llegar al uno.

En la figura 3, encontramos que precisamente el número que estamos buscando se encuentra en la columna correspondiente a 31° y en el renglón marcado con $03'$, por lo tanto.

$$\angle A = 31^{\circ} 03'$$

Veamos un ejemplo más, supongamos que:

$$\text{sen } B = 0.56122108 ,$$

y que queremos encontrar el ángulo B , es decir:

$$B = \text{ang } \text{sen } 0.56122108$$

Como en el ejemplo anterior lo que tenemos que hacer, es buscar el número 0.56122108 en la tabla del seno.

En este caso no vamos a encontrar exactamente este número, en su lu-

gar los números más parecidos que están en la tabla son: 0.56112065 y ---
0.56136140.

Tomamos el número 0.56112065 que es el que más se aproxima al que an-
damos buscando, finalmente obtenemos:

$$\angle B = 34^{\circ} 08'$$

En realidad el ángulo correcto es $34^{\circ} 08' 25''$; pero como nuestras ta-
blas no contienen valores para segundos el número 0.56122108 no está en -
ellas.

Finalmente diremos que en forma análoga se utilizan las tablas del -
coseno y la tangente.

Ejercicios:

1. Utilizando las tablas que aparecen en el apéndice encuentra los si-----
guientes valores:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $\text{sen } 38^{\circ}$ | d) $\text{cos } 89^{\circ} 42'$ |
| b) $\text{sen } 56^{\circ}$ | e) $\text{tan } 39^{\circ} 41'$ |
| c) $\text{cos } 71^{\circ} 35'$ | f) $\text{tan } 48^{\circ} 34'$ |

2. Utilizando las tablas que aparecen en el apéndice encuentra el valor -
de los ángulos A, B, C, D, E y F.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $\text{sen } A = 0.86945071$ | d) $D = \text{áng tan } 16.344178$ |
| b) $\text{cos } B = 0.86945071$ | e) $E = \text{áng cos } 0.9143$ |
| c) $\text{tan } C = 5.5859671$ | f) $F = \text{áng sen } 0.16923$ |

10. DETERMINACION DE LOS LADOS DE UN TRIANGULO RECTANGULO, CONOCIENDO UN ANGULO Y UN LADO.

Si la visual dirigida a un objeto está por encima de la horizontal - que pasa por el ojo de un observador, el ángulo que forman la horizontal y la visual recibe el nombre de ángulo de elevación del objeto, observa la figura 1.

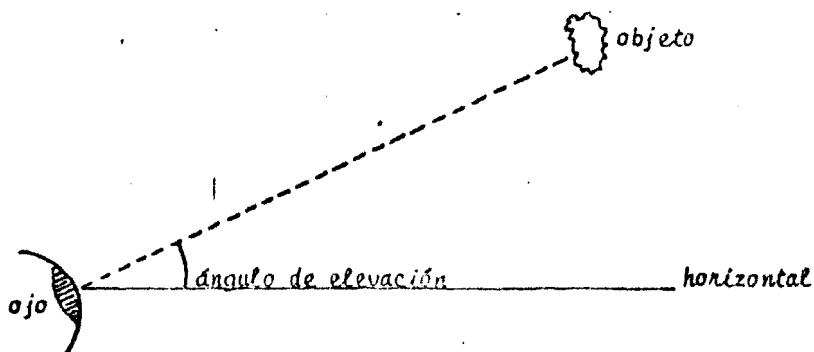


Figura 1

Si por el contrario la visual está por debajo de la horizontal, el ángulo correspondiente se llama ángulo de depresión del objeto, observa la figura 2.

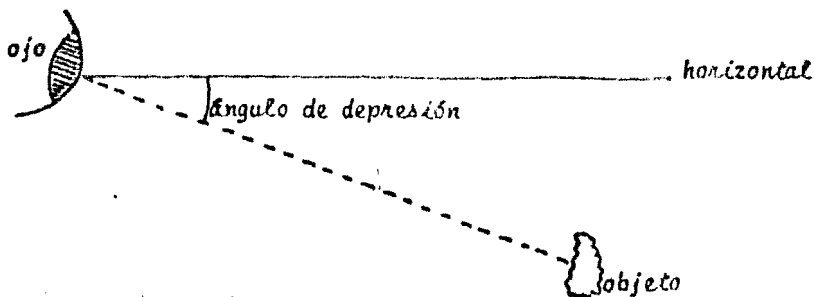


Figura 2

Problema 1. Desde un punto colocado a una distancia de 30 m de la base de una torre se midió el ángulo de elevación de la parte superior y se vio que era de $52^{\circ}16'$.

Calcula la altura de la torre, observa la figura 3.

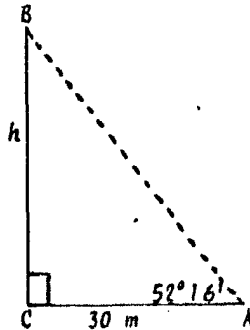


Figura 3

En este caso queremos calcular h y conocemos el ángulo de $52^{\circ}16'$, -- así como un cateto de 30 m.

Lo que haremos es buscar una razón trigonométrica que relacione h , $52^{\circ}16'$ y 30 m.

La razón que nos conviene es:

$$\tan 52^{\circ}16' = \frac{h}{30} ,$$

despejando h . tenemos:

$$h = 30 \tan 52^{\circ}16' .$$

Buscando el valor de $\tan 52^{\circ}16'$ en las tablas, encontramos que es de 1.29229428, substituyendo

$$h = 30 (1.29229428)$$

$$h = 38.7688284$$

Para usos prácticos podemos decir que la altura de la torre es de --
38.76 m .

Problema 2. A cierta hora del día, el ángulo de elevación de la parte superior de un árbol desde el punto final de la sombra es de $55^{\circ}30'$. -
Se sabe además que la sombra es de 25 m.

¿Cuál es la altura del árbol?, observa la figura 4.

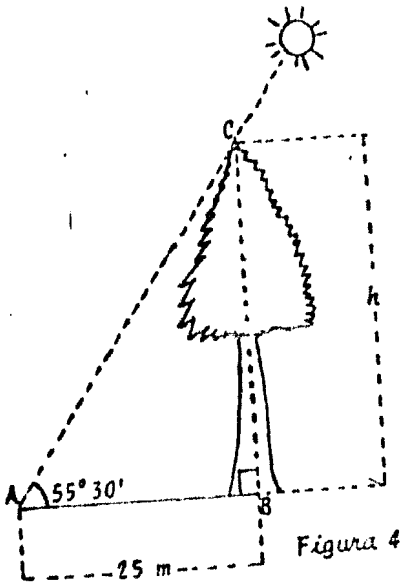


Figura 4

En este caso:

$$\tan 55^{\circ}30' = \frac{h}{25}$$

$$h = 25 \tan 55^{\circ}30'$$

$$h = 25 (1.45500903)$$

$$h = 36.37522675$$

Para usos prácticos podemos decir que la altura del árbol es de --

36.37 m.

Ejercicio. Desde lo alto de un acantilado de 50 metros sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de una embarcación es de 34° . Encuen-

tra a que distancia del acantilado está la embarcación, observa la figura

5.

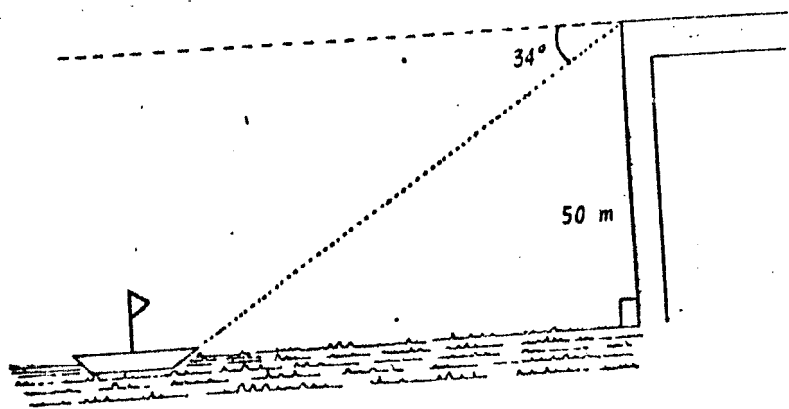


Figura 5

11. DETERMINACION DE LOS ANGULOS DE UN TRIANGULO RECTANGULO, CONOCIENDO - LOS LADOS.

Problema 1. Una escalera de mano de 10 m de largo está colocada de modo que alcanza una ventana que está a 7 m del suelo. Encuentra el ángulo de inclinación con respecto a la calle, observa la figura 1.

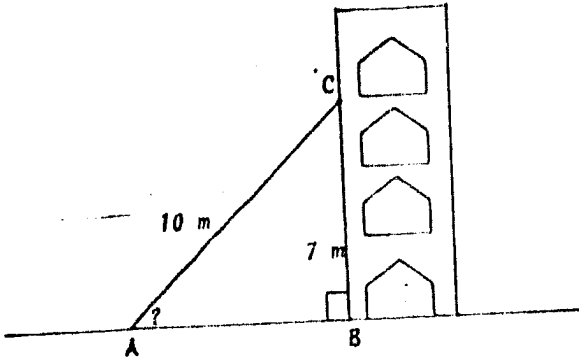


Figura 1

En este problema conocemos un cateto y la hipotenusa. Para relacionar lo con el ángulo A, la razón trigonométrica que nos conviene es:

$$\text{sen } A = \frac{7}{10}$$

$$\text{sen } A = 0.7$$

$$A = \text{dng sen } 0.7$$

$$A = 44^{\circ} 25'$$

Problema 2. Encuentra el valor de los ángulos A y B en el triángulo de la figura 2.

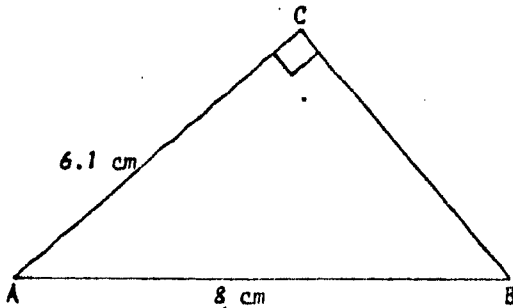


Figura 2

Para encontrar el valor del ángulo A, utilizamos el hecho de que el lado de 6.1 cm es el cateto adyacente al ángulo A.

$$\cos A = \frac{6.1}{8}$$

$$\cos A = 0.7625$$

$$A = \text{Ang} \cos 0.7625$$

$$A = 40^{\circ}19'$$

El cálculo del ángulo B, lo podemos hacer de dos formas. Por un lado, como la suma de los ángulos A, B y C debe ser de 180° , entonces:

$$40^{\circ}19' + 90^{\circ} + B = 180^{\circ}$$

$$B = 180^{\circ} - 130^{\circ}19'$$

$$B = 179^{\circ}60' - 130^{\circ}19'$$

$$B = 49^{\circ}41'$$

Recuerda que 60 segundos es equivalente a un minuto y que 60 minutos es equivalente a un grado, o sea,

$$60'' = 1'$$

$$y \quad 60' = 1^\circ$$

Por otro lado, como el cateto que mide 6.1 es opuesto al ángulo B, -
entonces:

$$\text{sen } B = \frac{6.1}{8}$$

$$\text{sen } B = 0.7625$$

$$B = \text{áng sen } 0.7625$$

$$B = 49^\circ 41'$$

Ejercicio. Encuentra el ángulo de elevación de la parte superior de un monumento de 30 m de alto, desde un punto que se encuentra a 20m de la base, observa la figura 3.

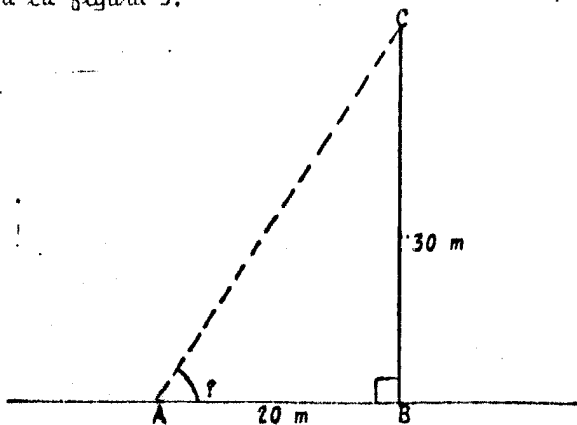


Figura 3

12. RAZONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS.

Si has observado las tablas trigonométricas que aparecen en el apéndice, te habrás dado cuenta que no incluyen los valores para la cotangente, secante, ni cosecante.

A continuación te mostramos una forma para calcular estos valores basándonos en las tablas que tenemos.

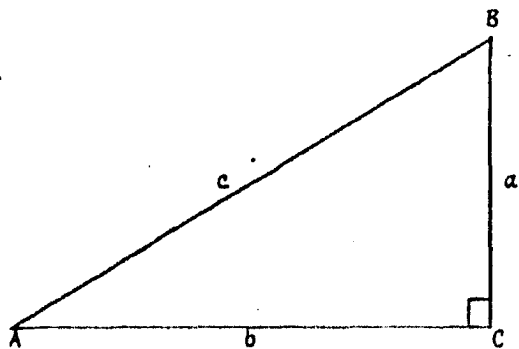


Figura 1

Con respecto al triángulo rectángulo de la figura 1, sabemos que:

1. $\text{sen } A = \frac{a}{c}$

4. $\text{cot } A = \frac{b}{a}$

2. $\text{cos } A = \frac{b}{c}$

5. $\text{sec } A = \frac{c}{b}$

3. $\text{tan } A = \frac{a}{b}$

6. $\text{csc } A = \frac{c}{a}$

al Multiplicando el seno del ángulo A por la cosecante del ángulo A, obtenemos:

$$\text{sen } A \text{ csc } A = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a} ,$$

$$\text{sen } A \text{ csc } A = \frac{ac}{ca} ,$$

$$\text{pero } ca = ac ,$$

$$\text{sen } A \text{ csc } A = \frac{ac}{ac} ,$$

$$\boxed{\operatorname{sen} A \operatorname{csc} A = 1} \dots\dots\dots I$$

por lo tanto $\boxed{\operatorname{csc} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}} \dots\dots\dots II$

La igualdad I, dice que, el producto del seno de un ángulo A por la cosecante del mismo ángulo A es igual a uno.

Ejemplos:

i) $\operatorname{sen} 36^\circ \cdot \operatorname{csc} 36^\circ = 1$

ii) $\operatorname{sen} 45^\circ 25' \cdot \operatorname{csc} 45^\circ 25' = 1$

iii) $\operatorname{sen} 76^\circ 16' \cdot \operatorname{csc} 76^\circ 16' = 1$

La igualdad II indica, que el valor de la cosecante de un ángulo A - es igual al cociente que se obtiene al dividir 1 entre el seno del ángulo A.

Ejemplo: Calcula el valor de $\operatorname{csc} 36^\circ 15'$.

Aplicando la igualdad II,

$$\operatorname{csc} 36^\circ 15' = \frac{1}{\operatorname{sen} 36^\circ 15'}$$

Calculando en las tablas el valor del seno de $36^\circ 15'$, tenemos:

$$\operatorname{csc} 36^\circ 15' = \frac{1}{0.59130965}$$

por tanto $\operatorname{csc} 36^\circ 15' = 1.6911613$

b) Multiplicando el coseno de A por la secante del ángulo A, obtenemos:

$$\cos A \cdot \sec A = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b},$$

$$\cos A \cdot \sec A = \frac{bc}{cb},$$

pero, $cb = bc,$

por tanto, $\cos A \cdot \sec A = \frac{bc}{bc}$

$$\boxed{\cos A \cdot \sec A = 1} \dots\dots\dots III$$

$$\boxed{\sec A = \frac{1}{\cos A}} \dots\dots\dots IV$$

La igualdad III, dice que el producto del coseno de un ángulo A por la secante del mismo ángulo es igual a uno.

Ejemplos:

$$\text{i) } \cos 51^\circ \cdot \sec 51^\circ = 1$$

$$\text{ii) } \cos 25^\circ \cdot \sec 25^\circ = 1$$

$$\text{iii) } \cos 88^\circ 23' \cdot \sec 88^\circ 23' = 1$$

La igualdad IV indica que el valor de la secante de un ángulo A es igual al cociente que se obtiene al dividir 1 entre el coseno del mismo ángulo.

Ejemplo: Calcula la secante de $39^\circ 40'$.

Aplicando la igualdad IV,

$$\sec 39^\circ 40' = \frac{1}{\cos 39^\circ 40'}$$

Calculando en las tablas el valor de coseno de $39^\circ 40'$, tenemos:

$$\sec 39^\circ 40' = \frac{1}{0.76977103}$$

$$\text{por tanto, } \sec 39^\circ 40' = 1.2990876$$

c) Multiplicando la tangente de A por la cotangente del mismo ángulo, obtenemos:

$$\tan A \cdot \cot A = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$$

$$\tan A \cdot \cot A = \frac{ab}{ba}$$

$$\text{pero, } ba = ab$$

$$\text{por tanto, } \tan A \cdot \cot A = \frac{ab}{ab}$$

$$\boxed{\tan A \cdot \cot A = 1} \dots\dots\dots V$$

$$\boxed{\cot A = \frac{1}{\tan A}} \dots\dots\dots VI$$

La igualdad V, dice que la tangente de un ángulo A por la cotangente del mismo ángulo es igual a 1.

Ejemplos:

i) $\tan 86^\circ \cdot \cot 86^\circ = 1$

ii) $\tan 28^\circ 30' \cdot \cot 28^\circ 30' = 1$

La igualdad VI muestra como podemos obtener el valor de la cotangente de un ángulo A.

Ejemplo: Calcula el valor de la cotangente del ángulo 39° .

Aplicando la igualdad VI,

$$\cot 39^\circ = \frac{1}{\tan 39^\circ}$$

Calculando el valor de la tangente de 39° en las tablas, tenemos:

$$\cot 39^\circ = \frac{1}{0.80978403}$$

$$\cot 39^\circ = 1.2348972,$$

Resumen: Las seis igualdades que hemos obtenido, se les conoce como

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS.

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{csc} A = 1 \dots\dots\dots \text{I}$$

$$\operatorname{csc} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} \dots\dots\dots \text{II}$$

$$\operatorname{cos} A \cdot \operatorname{sec} A = 1 \dots\dots\dots \text{III}$$

$$\operatorname{sec} A = \frac{1}{\operatorname{cos} A} \dots\dots\dots \text{IV}$$

$$\operatorname{tan} A \cdot \operatorname{cot} A = 1 \dots\dots\dots \text{V}$$

$$\operatorname{cot} A = \frac{1}{\operatorname{tan} A} \dots\dots\dots \text{VI}$$

Ejercicios:

1. Demuestra que:

a) $\operatorname{sen} B = \frac{1}{\operatorname{csc} B}$

b) $\operatorname{cos} B = \frac{1}{\operatorname{sec} B}$

c) $\operatorname{tan} B = \frac{1}{\operatorname{cot} B}$

2) Encuentra los siguientes valores:

a) $\cot 39^{\circ}20'$

b) $\sec 81^{\circ}$

c) $\csc 19^{\circ}29'$

13. OTRAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS.

Existen otras identidades trigonométricas que son útiles para hacer algunos cálculos; con respecto al triángulo rectángulo de la figura 1, tenemos:

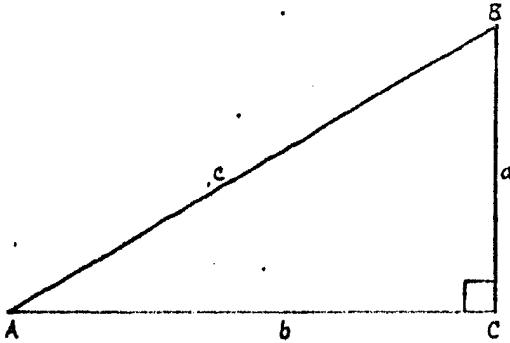


Figura 1

a) Dividiendo el seno del ángulo A entre el coseno del mismo ángulo, obtenemos:

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \dots\dots\dots \text{VI}$$

Según la definición de tangente del ángulo A, tenemos:

$$\tan A = \frac{a}{b} \dots\dots\dots \text{(2)}$$

por lo tanto de (1) y (2), concluimos

$$\boxed{\frac{\text{sen } A}{\text{cos } A} = \tan A} \dots\dots\dots \text{VII}$$

La igualdad VII dice que el cociente que se obtiene al dividir el seno de un ángulo A entre el coseno del mismo ángulo, es igual a la tangente del ángulo A.

Ejemplo: Sin hacer uso de la tabla de la tangente, encuentra el valor de la tangente de 49° .

Aplicando la igualdad VII,

$$\tan 49^\circ = \frac{\text{sen } 49^\circ}{\text{cos } 49^\circ}$$

Calculando en las tablas el valor para el seno de 49° y coseno de 49° , tenemos:

$$\tan 49^\circ = \frac{0.75470958}{0.65605903}$$

$$\tan 49^\circ = 1.1503684$$

b) Procediendo de manera análoga al inciso (a), obtenemos:

$$\frac{\text{cos } A}{\text{sen } A} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$$

por tanto, $\boxed{\frac{\text{cos } A}{\text{sen } A} = \text{cot } A} \dots\dots\dots \text{VIII}$

Ejemplo: En base a la igualdad VIII, calcula la cotangente de $43^\circ 18'$.

$$\text{cot } 43^\circ 18' = \frac{\text{cos } 43^\circ 18'}{\text{sen } 43^\circ 18'}$$

$$\text{cot } 43^\circ 18' = \frac{0.72777276}{0.68581335}$$

$$\text{cot } 43^\circ 18' = 1.0611742$$

Ejercicios:

1. En base a las igualdades VII y VIII, calcula:

a) $\tan 79^\circ 18'$

b) $\text{cot } 55^\circ 36'$

2. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

a) $\text{sen } A \cdot \text{cos } A = \tan A$

e) $\text{cos } A = \text{sen } A \cdot \text{cot } A$

b) $\text{sen } A = \text{cos } A \cdot \tan A$

f) $\text{sen } A = \frac{\text{cos } A}{\text{cot } A}$

c) $\text{cos } A = \frac{\text{sen } A}{\tan A}$

d) $\text{sen } A \cdot \text{cos } A = \text{cot } A$

14. RELACIONES PITAGORICAS.

A continuación relacionaremos el teorema de Pitágoras con las razones trigonométricas.

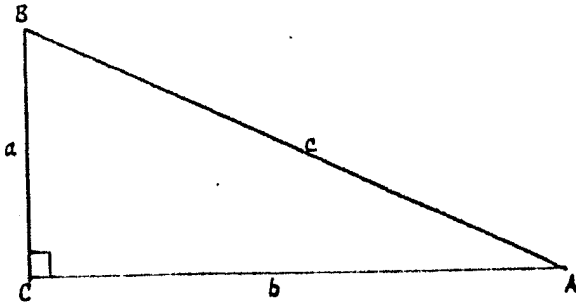


Figura 1

a) Por el teorema de Pitágoras, si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c ,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividimos cada miembro de la igualdad entre c^2 y tenemos:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

Podemos escribir esta igualdad de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Como $\text{sen } A = \frac{a}{c}$ y $\text{cos } A = \frac{b}{c}$, se tiene que:

$$(\text{sen } A)^2 + (\text{cos } A)^2 = 1 \dots\dots\dots (a)$$

En trigonometría se acostumbra escribir:

$$(\text{sen } A)^2 = \text{sen}^2 A,$$

$$(\text{cos } A)^2 = \text{cos}^2 A$$

Por tanto $\boxed{\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1} \dots\dots\dots IX$

b) Por el teorema de Pitágoras (figura 1):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividiendo cada uno de los miembros de la igualdad entre a^2 tenemos:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Como $\cot A = \frac{b}{a}$ y $\csc A = \frac{c}{a}$ se tiene que:

$$\boxed{1 + \cot^2 A = \csc^2 A} \dots\dots\dots X$$

c) Por el teorema de Pitágoras (figura 1-1):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividiendo cada uno de los miembros entre b^2 , obtenemos:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

Como $\tan A = \frac{a}{b}$ y $\sec A = \frac{c}{b}$, substituyendo

$$\boxed{\tan^2 A + 1 = \sec^2 A} \dots\dots\dots XI$$

A las igualdades IX, X y XI, se les conoce como relaciones Pitagóricas.

15. TRIANGULOS NO RECTANGULOS (PARTE UNO).

En los ejercicios anteriores hemos trabajado con triángulos rectángulos, pero, ¿y si en los problemas que queremos resolver los triángulos -- que aparecen no son rectángulos? . .

A continuación te proponemos algunos de ellos.

Problema 1. En el triángulo ABC (figura 1), encuentra el valor del ángulo B y de los lados a y b. :

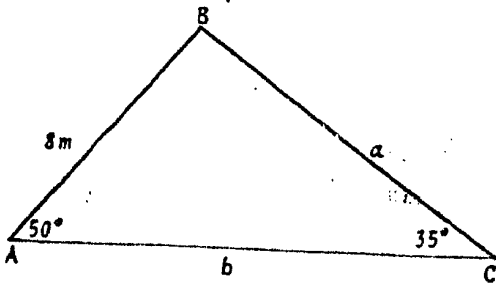


Figura 1

Solución:

a) Para encontrar el valor del ángulo B, recordemos que $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$; por lo tanto:

$$\angle B + 50^\circ + 35^\circ = 180^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 85^\circ$$

$$\angle B = 95^\circ$$

b) Para calcular el valor de a y b, no podemos usar directamente las razones trigonométricas, debido a que estas, sólo son válidas en triángulos rectángulos y en este caso ninguno de los ángulos es de 90° .

Busquemos entonces, como dividir el $\triangle ABC$ en triángulos rectángulos. Para esto trazamos una perpendicular al segmento AC y que pase por B (recuerda que esta perpendicular es una de las alturas del triángulo). Observa la figura 2.

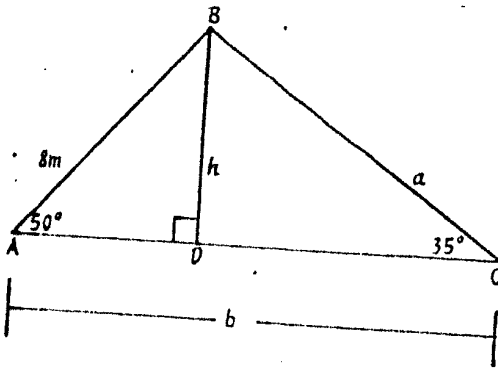


Figura 2

La altura BD divide al triángulo ABC en dos nuevos triángulos ABD y CBD, los cuales tienen un ángulo de 90°

Con respecto al triángulo rectángulo CBD, h es el cateto opuesto al ángulo de 35° , por lo tanto:

$$\text{sen } 35^\circ = \frac{h}{a}$$

$$h = a \text{ sen } 35^\circ \dots \dots \dots (1)$$

Con respecto al triángulo rectángulo ABD, h es el cateto opuesto al ángulo de 50° , por lo tanto:

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{h}{8}$$

$$h = 8 \text{ sen } 50^\circ \dots \dots \dots (2)$$

De (1) y (2), obtenemos:

$$a \text{ sen } 35^\circ = 8 \text{ sen } 50^\circ \dots \dots \dots (3)$$

$$a = \frac{8 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 35^\circ}$$

Calculando en las tablas los valores de seno de 50° y seno de 35° , --
obtenemos:

$$a = \frac{8(0.76604444)}{0.57357644}$$

$$a = \frac{6.12835552}{0.57357644}$$

$$a = 10.6844617$$

Ejercicio: En base a los resultados obtenidos calcula el valor de b.

Antes de continuar, observa que la igualdad (3),

$$a \operatorname{sen} 35^\circ = 8 \operatorname{sen} 50^\circ,$$

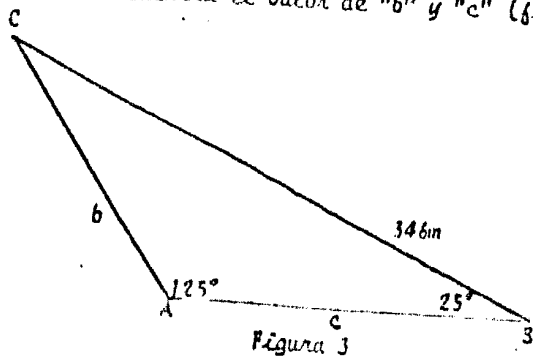
la podemos escribir:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} 35^\circ} \dots \dots \dots (4)$$

La igualdad (4) dice que el cociente de "a" entre seno de 50° es --
igual al cociente de 8 entre seno de 35° , observa que en la figura 1, "a"
es el lado que está enfrente del ángulo de 50° , mientras que 8 es el la-
do que está enfrente del ángulo de 35° .

Más adelante desarrollaremos una fórmula conocida con el nombre de --
la ley de los senos, con la cual, nos ahorraremos la mayoría de los pasos
que hicimos en este problema.

Problema 2. Encuentra el valor de "b" y "c" (figura 3).



Para encontrar el valor de "b", trazamos una perpendicular a la prolongación del lado BA y que pase por C (recuerda que esta perpendicular es una de las alturas del triángulo ABC). Observa la figura 4.

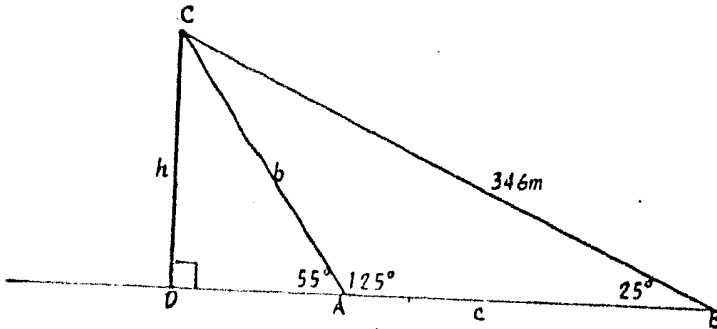


Figura 4

Como $\angle DAC + \angle BAC = 180^\circ$, entonces:

$$\angle DAC + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\angle DAC = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\angle DAC = 55^\circ \text{ (observa la figura 4)}$$

Con respecto al triángulo rectángulo ADC, h es el cateto opuesto al ángulo de 55° , por lo tanto:

$$\text{sen } 55^\circ = \frac{h}{b}$$

$$h = b \text{ sen } 55^\circ \dots \dots \dots (5)$$

En el triángulo rectángulo BDC, h es el cateto opuesto al ángulo de 25° , por lo tanto:

$$\text{sen } 25^\circ = \frac{h}{346}$$

$$h = 346 \text{ sen } 25^\circ \dots \dots \dots (6)$$

De las igualdades (5) y (6), concluimos que:

$$b \text{ sen } 55^\circ = 346 \text{ sen } 25^\circ \dots \dots \dots (7)$$

$$b = \frac{346 \operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 55^\circ}$$

Calculando en las tablas los valores para el seno de 25° y seno de 55° , obtenemos:

$$b = \frac{346(0.42261826)}{0.81915205}$$

$$b = \frac{146.22591796}{0.81915205}$$

$$b = 178.50889$$

Ejercicio: En base a los resultados obtenidos, encuentra el valor de c .

Observa que la igualdad (7),

$$b \operatorname{sen} 55^\circ = 346 \operatorname{sen} 25^\circ,$$

la podemos escribir:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{346}{\operatorname{sen} 55^\circ} \dots \dots \dots (8)$$

En la figura 4, se puede ver que el lado "b" está enfrente del ángulo de 25° , mientras que el lado que mide 346 está enfrente del ángulo de 125° , que es el suplemento del ángulo de 55° .

Problema 3. En el triángulo de la figura 5, calcula el valor de los ángulos A, B y del lado b.

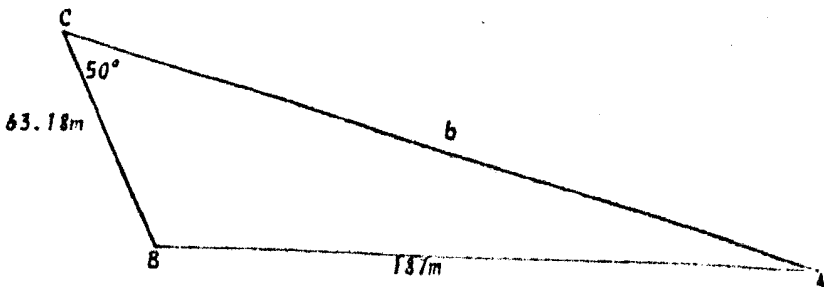
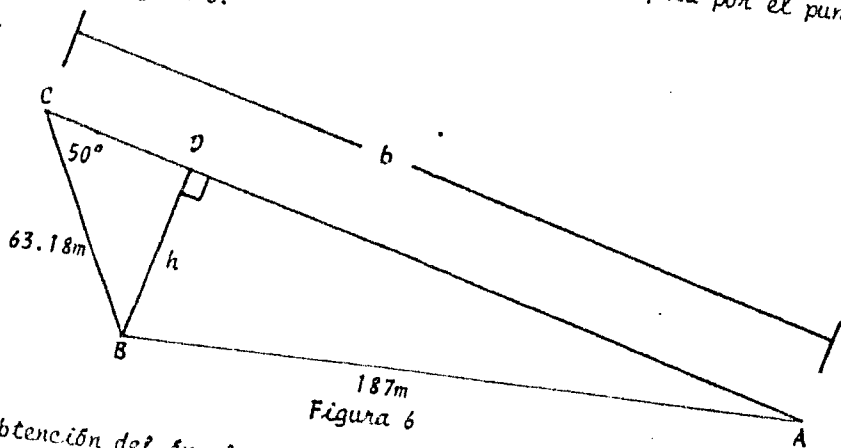


Figura 5

Este problema es muy parecido a los dos anteriores, sólo que en este caso la altura que nos conviene trazar es la que pasa por el punto B. Observa la figura 6.



al Obtención del ángulo A.

En el triángulo rectángulo ADB, h es el cateto opuesto al ángulo A, por lo tanto,

$$\text{sen } A = \frac{h}{187}$$

$$h = 187 \text{ sen } A \dots\dots\dots (9)$$

En el triángulo rectángulo BDC, h es el cateto opuesto al ángulo de 50°, por lo tanto,

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{h}{63.18}$$

$$h = 63.18 \text{ sen } 50^\circ \dots\dots\dots (10)$$

De las igualdades (9) y (10), concluimos que:

$$187 \text{ sen } A = 63.18 \text{ sen } 50^\circ \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{sen } A = \frac{63.18 \text{ sen } 50^\circ}{187}$$

Calculando en las tablas el valor de seno de 50°, tenemos:

$$\text{sen } A = \frac{63.18(0.76604444)}{187}$$

$$\text{sen } A = \frac{48.3986879}{187}$$

$$\text{sen } A = 0.25881651$$

por lo tanto,

$$A = \text{áng sen } (0.25881651)$$

$$\angle A = 15^\circ$$

b) Obtención del ángulo B.

$$\text{Como } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$15^\circ + \angle B + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 65^\circ$$

$$\angle B = 115^\circ$$

Ejercicios:

1. Utilizando los resultados encontrados, calcula el valor del lado b.
2. Encuentra el valor del ángulo A, en el triángulo de la figura 7.

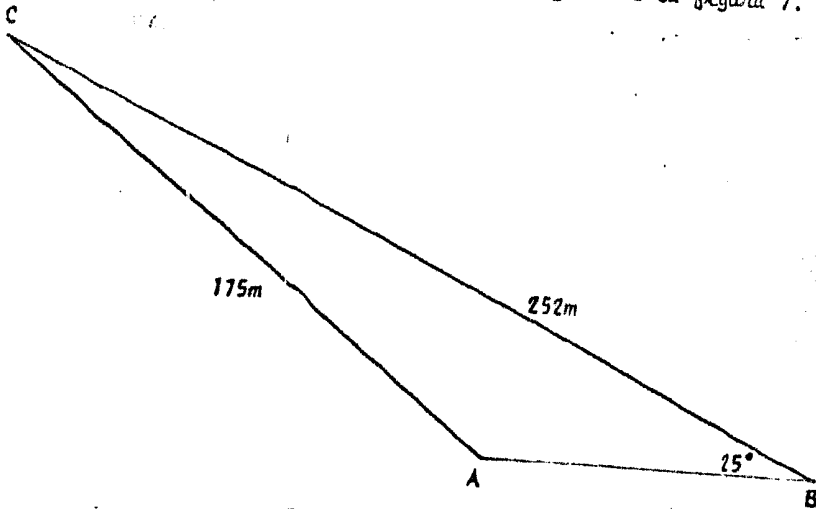


Figura 7

Para finalizar, te solicitamos que observes la igualdad (11),

$$187 \text{ sen } A = 63.18 \text{ sen } 50^\circ$$

esta igualdad la podemos escribir:

$$\frac{187}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{63.18}{\text{sen } A} \dots\dots\dots (12)$$

En la figura 5, se puede ver que el lado que mide 187 m, está enfrente del ángulo de 50° , mientras que el lado que mide 63.18 m está enfrente del ángulo A.

¿A qué crees que se deba que en los tres problemas que resolvimos, los lados se relacionan con los senos de los ángulos opuestos?

16. TRIANGULOS NO RECTANGULOS (PARTE DOS)

Problema 1. En la figura 1, hemos dibujado un triángulo; con los datos -- que se marcan, encuentra el valor del lado "a".

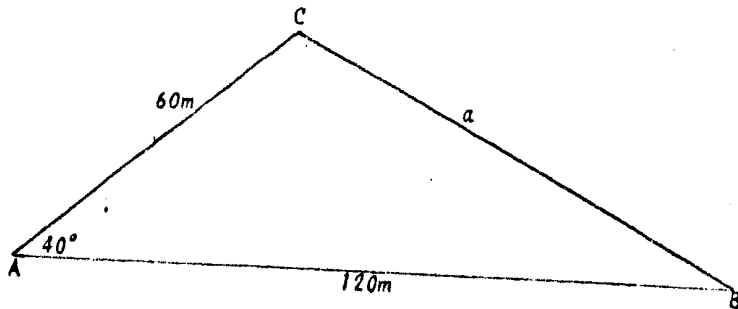


Figura 1

Para resolver este problema, trazaremos la altura $CD=h$; al segmento AD le llamaremos x , observa la figura 2.

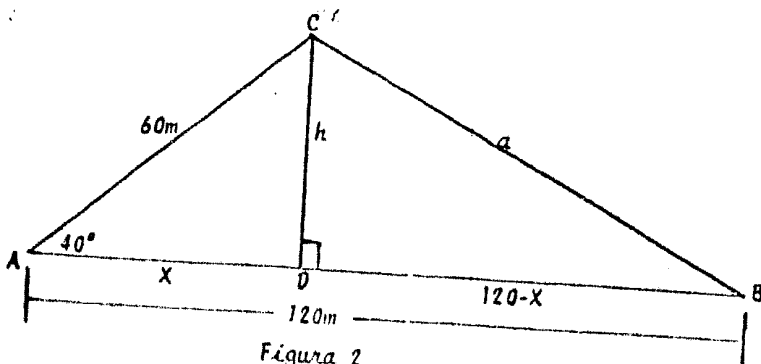


Figura 2

a) Como $AD+DB=AB$, substituyendo los valores, tenemos:

$$x + DB = 120, \text{ o sea } DB = 120 - x \text{ (figura 2)}$$

b) Con respecto al triángulo rectángulo ADC , h es el cateto opuesto al ángulo de 40° y el lado de $60m$ es la hipotenusa, por lo tanto:

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{h}{60}, \text{ despejando } h,$$

$$h = 60 \operatorname{sen} 40^\circ$$

$$h = 60(0.64278761)$$

$$h = 38.5672565 \dots\dots\dots (1)$$

c) En el mismo triángulo rectángulo ADC, X es el cateto adyacente al ángulo de 40° , por lo tanto:

$$\cos 40^\circ = \frac{X}{60}, \text{ despejando } X,$$

$$X = 60 \cos 40^\circ$$

$$X = 60(0.76604444)$$

$$X = 45.9626665 \dots\dots\dots (2)$$

d) Como $DB = 120 - X$, al substituir el valor de X,

$$DB = 120 - 45.9626665$$

$$DB = 74.0373335 \dots\dots\dots (3)$$

e) Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BDC, tenemos:

$$a^2 = h^2 + DB^2, \text{ substituyendo los valores de "h" y$$

$$"DB",$$

$$a^2 = (38.5672565)^2 + (74.0373335)^2$$

$$a^2 = 1487.4333 + 5481.5267$$

$$a^2 = 6968.96$$

$$a = \sqrt{6968.96}$$

$$a = 83.480297,$$

finalmente, hemos encontrado que $a = 83.48 \text{ m}$.

Ejercicio: Encuentra el valor de los ángulos B y C, (figura 1).

PROBLEMA 2. Encuentra el valor de los ángulos de un triángulo, sabiendo que los lados son de 18m; 30m y 36m. Además menciona que ángulo es el opuesto a cada uno de los lados.

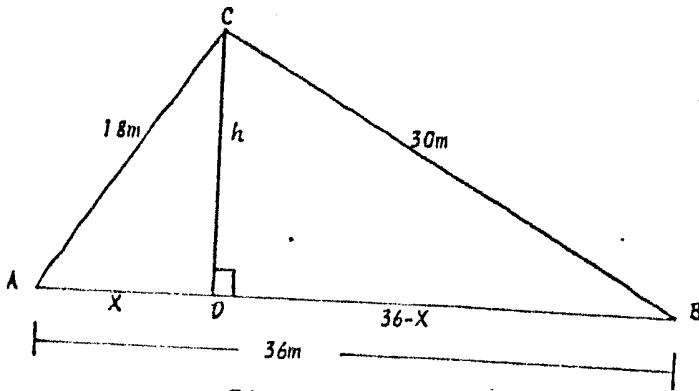


Figura 3

Para resolver el problema, en la figura 3, hemos trazado una de las alturas del triángulo ABC, a esta altura le hemos llamado $CD = h$; en el mismo triángulo de la figura 1, al segmento AD le llamamos x , por lo tanto el segmento $DB = 36 - x$.

a) Obtención del ángulo A.

Con respecto al triángulo rectángulo ADC, h es el cateto opuesto al ángulo A y el lado de 18m es la hipotenusa, por tanto:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{18}, \text{ despejando } h,$$

$$h = 18 \operatorname{sen} A \dots\dots\dots (4)$$

En el mismo triángulo rectángulo ADC, x es el cateto adyacente al ángulo A, por lo tanto:

$$\operatorname{cos} A = \frac{x}{18}, \text{ despejando } x,$$

$$x = 18 \operatorname{cos} A \dots\dots\dots (5)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BDC, obtenemos:

$$(36-x)^2 + h^2 = 30^2, \text{ desarrollando los cuadrados.}$$

$$36^2 - 2(36)x + x^2 + h^2 = 30^2, \text{ substituyendo } h, x,$$

$$36^2 - 2(36)(18 \operatorname{cos} A) + (18 \operatorname{cos} A)^2 + (18 \operatorname{sen} A)^2 = 30^2, \text{ o sen,}$$

$1296 - 1296 \cos A + 324 \cos^2 A + 324 \operatorname{sen}^2 A = 900$, factorizando
 $1296 - 1296 \cos A + 324 (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) = 900$, pero en una de las secciones anteriores, encontramos que $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, por lo tanto:

$$1296 - 1296 \cos A + 324 (1) = 900$$

despejando coseno de A,

$$- 1296 \cos A = 900 - 1296 - 324$$

$$- 1296 \cos A = -720$$

$$\cos A = \frac{-720}{-1296} = \frac{720}{1296}$$

$$\cos A = 0.5555556$$

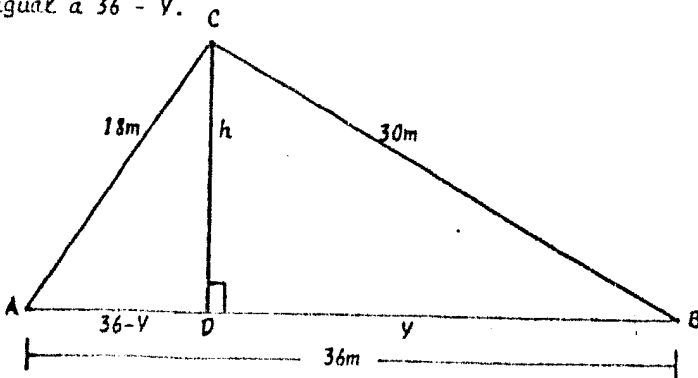
despejando A,

$$A = \text{áng} \cos (0.5555556)$$

$A = 56^\circ 15'$, este ángulo es el que está opuesto al

Lado de 30 m.

b) Para encontrar el valor del ángulo B, en la figura 4, hemos trazado la altura $CD = h$; y al segmento DB , le hemos llamado y , por lo tanto el segmento AD es igual a $36 - y$.



procediendo en forma análoga, encontramos que:

$$h = 30 \operatorname{sen} B \dots\dots\dots (6)$$

$$y = 30 \cos B \dots\dots\dots (7)$$

$$(36 - y)^2 + h^2 = 18^2 \dots\dots\dots (8)$$

Desarrollando el resultado (8) y substituyendo los resultados (6) y (7), encontramos que:

$$B = \text{áng} \cos .0.86666667$$

$$B = 29^\circ 56'$$

este ángulo es el que está opuesto al lado de 18m

Ejercicios:

- a) Desarrolla todos los pasos que se omitieron en el cálculo del ángulo B.
- b) Encuentra el valor del ángulo C.

17. EL CIRCULO TRIGONOMETRICO.

Dibuja un círculo de radio 1. Antes de dibujarlo es importante que establezcas, si el radio es de 1 centímetro, 1 metro, 1 kilómetro, en --- otras palabras, debes decir en que unidad de medida lo vas a dibujar.

A continuación te recordamos algunas unidades de medida que conoces:

1 milímetro (si el metro lo divides en mil partes, obtienes un milímetro)

1 centímetro (si el metro lo divides en cien partes, obtienes un centímetro)

1 decímetro (si el metro lo divides en diez partes, obtienes un decímetro)

1 metro

1 decámetro (10 metros)

1 kilómetro (1000 metros)

Todas las unidades de medida, escritas anteriormente, están en relación al metro.

Bien, regresando al círculo que te estamos solicitando, dibújalo utilizando una unidad de medida arbitraria, es decir, puedes tomar como unidad, por ejemplo, el siguiente segmento, observa la figura 1.

Dependiendo del problema, podemos tomar unidades mayores o menores.

1 unidad

Figura 1

Con esta unidad dibujaremos nuestro círculo. Observa la figura 2.

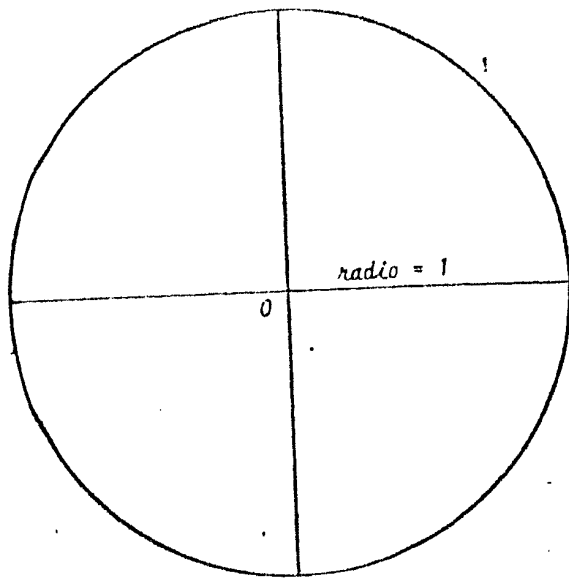
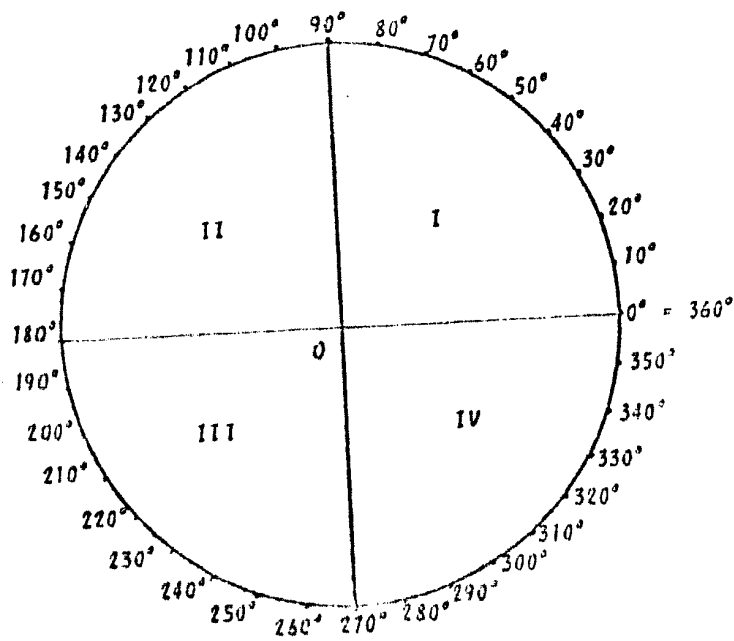


Figura 2

A continuación traza dos rectas perpendiculares entre sí, que se corten en el centro del círculo.

En el círculo de radio 1, vamos a poner marcas, para indicar grados de 10 en 10. Observa la figura 3.



Si te fijas lo que hemos obtenido es una especie de transportador.

En el círculo de la figura 3, observa lo siguiente:

a) Las líneas perpendiculares dividen al círculo en 4 regiones iguales. - Estas regiones reciben el nombre de cuadrantes y las hemos marcado con -- Los números I, II, III y IV.

b) En el cuadrante I, aparecen los ángulos de 0° a 90° ;
 en el cuadrante II, aparecen los ángulos de 90° a 180° ;
 en el cuadrante III, aparecen los ángulos de 180° a 270° ;
 en el cuadrante IV, aparecen los ángulos de 270° a 360° .

c) Como fuimos poniendo marcas de 10° en 10° , llegó el momento en que al hacer la suma $350^\circ + 10^\circ = 360^\circ$, la marca de 360° quedó encima de la de 0° , entonces, si siguiéramos sumando, encontraríamos que:

$$370^\circ \cong 10^\circ$$

$$380^\circ \cong 20^\circ$$

$$390^\circ \cong 30^\circ$$

$$400^\circ \cong 40^\circ \text{ etc. } *$$

Por lo tanto, si nos dan un ángulo mayor de 360° , para encontrar su equivalente, lo que haremos es dividirlo entre 360 y el residuo nos marcará el ángulo equivalente.

Ejemplo: ¿qué ángulo es equivalente a 1586° ?

$$360 \overline{) 1586} \begin{array}{r} 4 \\ 144 \\ \hline 146 \end{array}$$

Por lo tanto, $1586^\circ \cong 146^\circ$. El cociente nos indica el número de vueltas que dio el ángulo, en este caso dio 4 vueltas.

Por lo anterior, en trigonometría sólo nos interesará hablar de ángulos entre cero y trescientos sesenta grados.

* El símbolo \cong significa que son equivalentes.

Ejercicios:

1. Encuentra los ángulos equivalentes de 1286° , 5381° , 4261°
2. Indica en qué cuadrante se encuentran los ángulos 3596° , 741° , 393° , - - 1248° .

18. ANGULOS MAYORES DE 90° .

Anteriormente definimos al seno, coseno, tangente, etc., para ángulos entre cero y noventa grados, sin embargo existen problemas en los cuales - se requiere trabajar con ángulos mayores de noventa grados.

Lo que haremos a continuación es definir al seno, coseno y tangente - para ángulos entre cero y trescientos sesenta grados.

Definición del seno.

En las siguientes figuras, aparecen cuatro círculos unitarios y en cada uno de ellos, un triángulo rectángulo. Les llamamos círculos unitarios o trigonométricos a los círculos de radio uno (recuerda que estamos usando unidades arbitrarias).

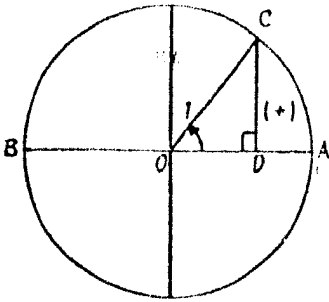


Figura 1

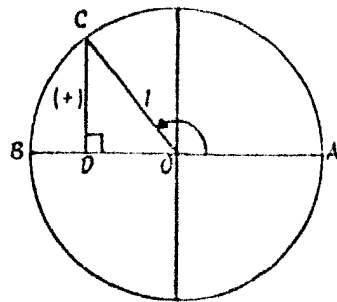


Figura 2

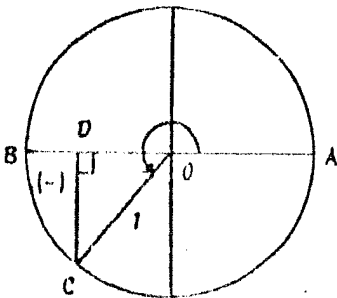


Figura 3

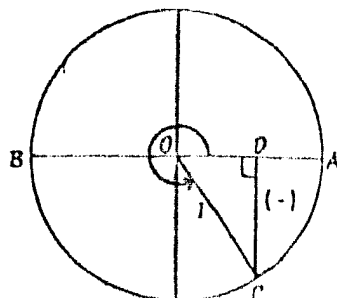


Figura 4

Definiremos al seno del ángulo AOC como el segmento CD (el ángulo AOC en los cuatro casos lo estamos midiendo en el sentido contrario a las manecillas del reloj).

El ángulo AOC en la figura 1 está en el primer cuadrante.

El ángulo AOC en la figura 2 está en el segundo cuadrante.

El ángulo AOC en la figura 3 está en el tercer cuadrante.

El ángulo AOC en la figura 4 está en el cuarto cuadrante.

En el caso de las figuras 1 y 2, tomaremos el valor del segmento CD como positivo, por lo tanto.

$$\text{sen } (\sphericalangle AOC) = CD$$

Y en el caso de las figuras 3 y 4, tomaremos el valor del segmento CD como negativo, por lo tanto.

$$\text{sen } (\sphericalangle AOC) = - CD.$$

Fíjate que en el caso de ángulos entre cero y noventa grados esta nueva definición coincide con la que ya teníamos, esto es, para los ángulos que están en el primer cuadrante, la nueva definición dice:

$$\text{sen } (\sphericalangle AOC) = CD.$$

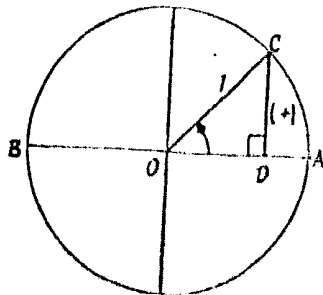


Figura 5

La definición que dimos para el seno en la sección 7 dice que el seno de un ángulo, es igual al cateto opuesto al ángulo entre la hipotenusa, por lo tanto en la figura 5, tenemos:

$$\text{sen } (\angle AOC) = \frac{CD}{1},$$

o sea, $\text{sen } (\angle AOC) = CD.$

De lo anterior, concluimos que para calcular los valores del seno para ángulos entre cero y noventa grados, podemos usar las mismas tablas que aparecen en el apéndice.

Antes de decirte como calcular en las tablas trigonométricas los valores para el seno de ángulos mayores de 90° , queremos que observes el siguiente ejemplo:

Según la definición que hemos dado en esta sección, tenemos: En la figura 6 el seno de 35° es igual al segmento CD y en la figura 7 el seno de 145° es igual al segmento EF, o sea:

$$\text{sen } 35^\circ = CD$$

$$\text{y } \text{sen } 145^\circ = EF$$

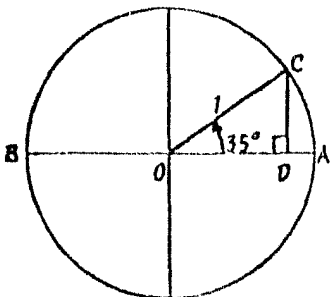


Figura 6

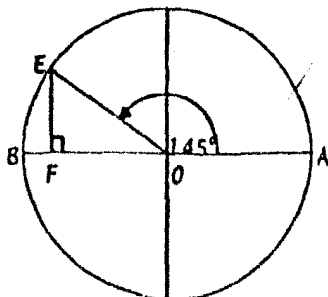


Figura 7

Observa que el $\triangle COD$ es congruente con el $\triangle FOE$, porque:

i) $\angle COD = \angle FOE$ (fíjate en las figuras 6 y 7).

ii) $OC = OE$.

iii) $\angle DCO = \angle OEF$ (explica porqué).

Por lo tanto $CD = EF$.

O sea: $\text{sen } 35^\circ = \text{sen } 145^\circ$.

Observa que 145° se puede expresar como $145^\circ = 180^\circ - 35^\circ$, por lo tanto:

$$\text{sen } 145^\circ = \text{sen } (180^\circ - 35^\circ) = \text{sen } 35^\circ.$$

Esta igualdad nos indica que el seno de 145° , es igual al seno de su suplemento.

Como ya hablamos dicho, para calcular los valores del seno para ángulos entre cero y noventa grados, usaremos las mismas tablas que aparecen en el apéndice.

Regresando a nuestro ejemplo, tenemos que:

$$\text{sen } 35^\circ = 0.57357644,$$

por lo tanto: $\text{sen } 145^\circ = 0.57357644$.

En general, el seno de un ángulo entre 90° y 180° , es igual al seno del suplemento. Para probar esto, te pedimos que:

Ejercicio: Demuestra que $\text{sen } (180^\circ - A) = \text{sen } A$, A es un ángulo-cualquiera entre cero y noventa grados, (observa la figura 8).

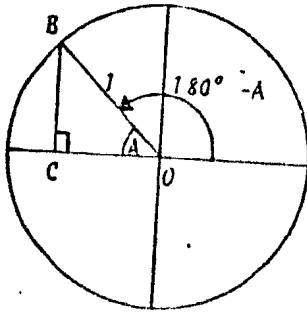


Figura 8

Ejemplo. Para calcular el seno de 132° , procedemos buscando el suplemento de 132° , en este caso tenemos:

$$180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$$

por lo tanto:

$$\text{sen } 132^\circ = \text{sen } (180^\circ - 48^\circ) = \text{sen } 48^\circ$$

como $\text{sen } 48^\circ = 0.74314483$, entonces:

$$\text{sen } 132^\circ = 0.74314483$$

Ejercicio: Calcula el seno de 165° , 140° , 175° , 100° .

Definición del coseno.

En forma análoga definiremos al coseno; en las figuras 9, 10, 11 y 12 hemos dibujado cuatro círculos unitarios y en cada uno de ellos un - triángulo rectángulo.

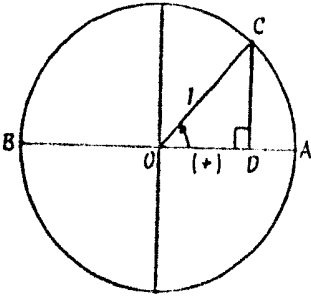


Figura 9

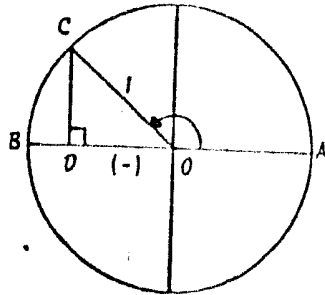


Figura 10

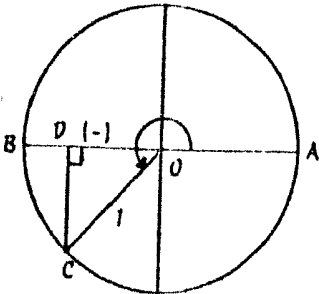


Figura 11

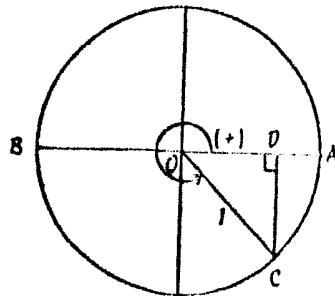


Figura 12

Definiremos al coseno del ángulo AOC como el segmento OD (el ángulo AOC en los cuatro casos lo estamos midiendo en el sentido contrario a las manecillas del reloj).

En el caso de las figuras 9 y 12, tomaremos el valor del segmento - OD como positivo, por lo tanto:

$$\cos (\sphericalangle AOC) = OD$$

Y en el caso de las figuras 10 y 11, tomaremos el valor del segmento OD como negativo, por lo tanto:

$$\cos (\sphericalangle AOC) = -OD$$

Fíjate que también en el caso del coseno, para ángulos entre cero y noventa grados, esta nueva definición coincide con la que dimos en la sección 7, esto es, en esa sección dijimos que el coseno de un ángulo es igual al cateto adyacente al ángulo entre la hipotenusa, aplicando esta definición al triángulo rectángulo de la figura 13, tenemos:

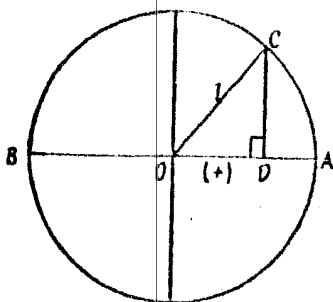


Figura 13

$$\cos (\sphericalangle AOC) = \frac{OD}{1},$$

o sea

$$\cos (\sphericalangle AOC) = OD$$

De lo anterior, concluimos que para calcular los valores del coseno para ángulos entre cero y noventa grados, podemos usar las mismas tablas que aparecen en el apéndice.

Ejemplo. Calcula el coseno de 153° .

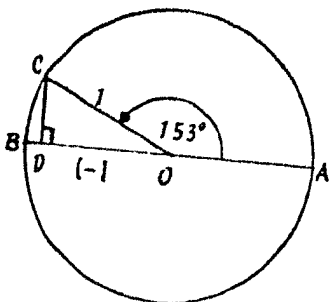


Figura 14

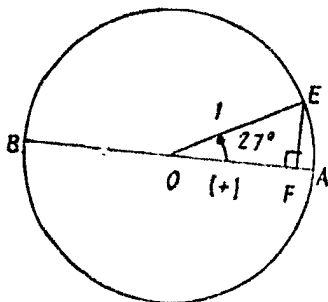


Figura 15

En la figura 14 hemos dibujado el ángulo de 153° y en la figura 15 el ángulo suplementario.

Según la definición que hemos dado en esta sección, tenemos:

$$\cos 153^\circ = -OD$$

$$\text{y } \cos 27^\circ = OF$$

Observa que el $\triangle ODC$ es congruente con el $\triangle EFO$, porque:

- i) $\angle COD = \angle FOE$ (los dos miden 27°)
- ii) $OC = OE$ (los dos miden 1 unidad)
- iii) $\angle ODC = \angle OEF$ (los dos miden 63°)

Por lo tanto $OD = OF$.

$$\text{O sea: } \cos 153^\circ = -\cos 27^\circ.$$

Calculando el valor para el coseno de 27° , tenemos:

$$\cos 153^\circ = - (0.89100652)$$

$$\cos 153^\circ = - 0.89100652$$

En forma análoga al caso del seno, hemos encontrado que:

$$\cos 153^\circ = \cos (180^\circ - 27^\circ) = -\cos 27^\circ.$$

En general, el coseno de un ángulo entre 90° y 180° , es igual a menos el coseno del suplemento. Para probar esto, te pedimos que:

Ejercicio: Demuestra que $\cos (180^\circ - A) = -\cos A$, A es un ángulo cualquiera entre cero y noventa grados.

Ejemplo. Para calcular el coseno de 125° , procedemos buscando el suplemento de 125° , en este caso,

$$180^\circ - 125^\circ = 55^\circ,$$

por lo tanto

$$\cos 125^\circ = \cos (180^\circ - 55^\circ) = -\cos 55^\circ$$

como

$$\cos 55^\circ = 0.57357644, \text{ entonces}$$

$$\cos 125^\circ = -0.57357644$$

Ejercicio: Calcula el coseno de 174° , 162° , 100° , 133° .

Definición de la tangente.

En las figuras 16, 17, 18 y 19 aparecen cuatro círculos unitarios y en cada uno de ellos un triángulo rectángulo.

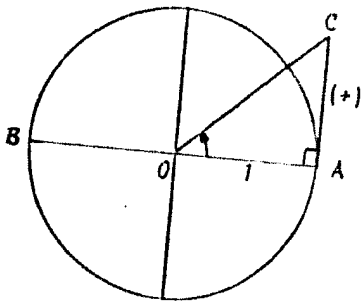


Figura 16

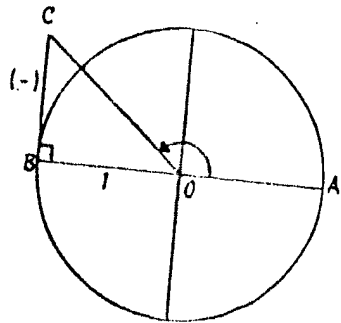


Figura 17

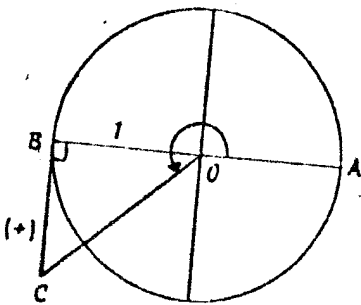


Figura 18

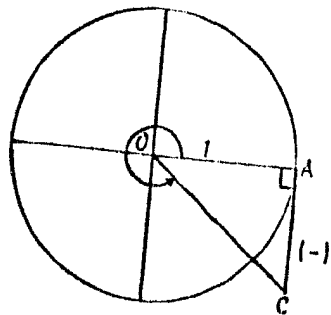


Figura 19

Definiremos a la tangente del ángulo AOC como el segmento:

- i) En el caso de la figura 16, $\tan(\angle AOC) = AC$
- ii) En el caso de la figura 17, $\tan(\angle AOC) = -BC$
- iii) En el caso de la figura 18, $\tan(\angle AOC) = BC$
- iv) En el caso de la figura 19, $\tan(\angle AOC) = -AC$

Como en el caso del seno y coseno, para ángulos entre cero y noventa grados, esta nueva definición coincide con la que dimos en la sección 7. Por lo tanto, también para calcular la tangente entre cero y noventa grados, podemos usar las mismas tablas que aparecen en el apéndice.

En forma análoga al seno y coseno, se puede probar que la tangente de un ángulo entre 90° y 180° , es igual a menos la tangente del suplemento. Para probar esto, te pedimos que:

Ejercicio. Demuestra que $\tan (180^\circ - A) = -\tan A$, A es un ángulo cualquiera entre cero y noventa grados.

Ejemplo. Para calcular la tangente de 146° , procedemos buscando el suplemento de 146° , en este caso,

$$180^\circ - 146^\circ = 34^\circ,$$

por lo tanto

$$\tan 146^\circ = \tan (180^\circ - 34^\circ) = -\tan 34^\circ$$

$$\tan 34^\circ = 0.67450852, \text{ entonces}$$

$$\tan 146^\circ = -0.67450852$$

Ejercicios:

1. Calcula la tangente de 172° , 125° , 179° , 132° .
2. Calcula el seno de 200° , 270° y 310° .
3. Calcula el coseno de 210° , 280° y 320° .
4. Calcula la tangente de 220° , 290° , 330° .

19. LEY DE LOS SENOS.

En la sección 15, te pedimos que observarás que los lados de un triángulo se relacionan con los senos de los ángulos opuestos.

A continuación vamos a encontrar una igualdad conocida como ley de los senos, la cual dice:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Observa la figura 1.

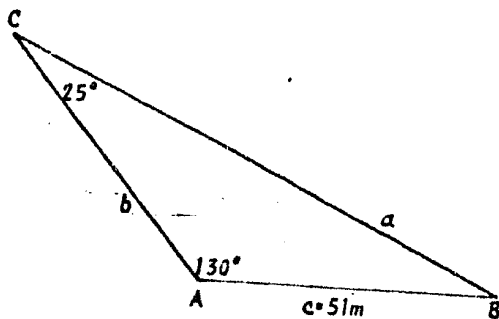


Figura 1

Esta ley es útil cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a alguno de los dos lados conocidos, o bien, cuando se conocen dos ángulos y un lado (recuerda que cuando conocemos dos ángulos, inmediatamente podemos saber cuánto mide el tercero).

En el ejemplo de la figura 1, conocemos dos ángulos y un lado, en este caso podemos utilizar la ley como sigue:

$$\frac{a}{\text{sen } 130^\circ} = \frac{51}{\text{sen } 25^\circ}$$

Te darás cuenta que ha quedado una ecuación de primer grado, que al resolverla nos dará el valor del segmento "a".

Demostración de la ley de los senos.

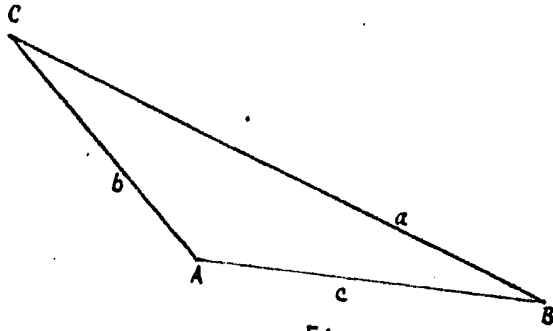


Figura 2

a) En el triángulo ABC de la figura 2, tracemos la altura $CD = h$. Observa la figura 3.

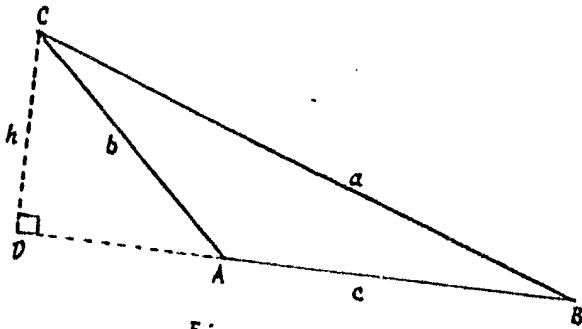


Figura 3

Con respecto al triángulo rectángulo CDB, h es el cateto opuesto al ángulo B y a es la hipotenusa, por lo tanto:

$$\text{sen } B = \frac{h}{a},$$

despejando h , tenemos:

$$h = a \text{ sen } B \dots\dots\dots (1)$$

En el triángulo rectángulo CDA, h es el cateto opuesto al ángulo CAD y b es la hipotenusa, por lo tanto:

$$\text{sen } (\angle CAD) = \frac{h}{b},$$

despejando h , tenemos:

$$h = b \text{ sen } (\angle CAD),$$

pero como el ángulo A (figura 2) es mayor de 180° ,

$$\text{sen } A = \text{sen } (180^\circ - \angle CAD) = \text{sen } (\angle CAD)$$

por lo tanto:

$$h = b \text{ sen } A \dots\dots\dots(2)$$

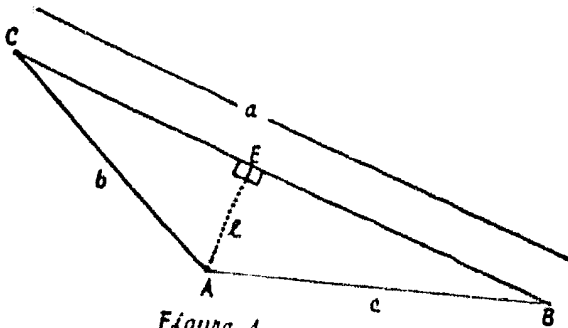
De las igualdades (1) y (2) obtenemos:

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A.$$

Esta última igualdad la podemos escribir como:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \dots\dots\dots(3)$$

b) En el triángulo ABC de la figura 2, tracemos la altura $AE = \ell$. Observa la figura 4.



En el triángulo rectángulo AEC , ℓ es el cateto opuesto al ángulo C y b es la hipotenusa, por lo tanto:

$$\text{sen } C = \frac{\ell}{b},$$

despejando ℓ ,

$$\ell = b \text{ sen } C \dots\dots\dots(4)$$

Análogamente, en el triángulo rectángulo AEB, l es el cateto opuesto al ángulo B y c es la hipotenusa, por lo tanto:

$$\text{sen B} = \frac{l}{c},$$

despejando l , $l = c \text{ sen B} \dots\dots\dots(5)$

De las igualdades (4) y (5) obtenemos:

$$b \text{ sen C} = c \text{ sen B}.$$

Esta última igualdad la podemos escribir como:

$$\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}} \dots\dots\dots(6)$$

Finalmente de los resultados (3) y (6), concluimos:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}} \dots\dots\dots(7)$$

A el resultado (7), se le acostumbra llamar ley de los senos, esta ley dice:

Ley de los senos. En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto son iguales.

Como ya habíamos mencionado, la ley de los senos, se puede usar cuando en un triángulo cualquiera, se conocen:

- a) Dos ángulos y un lado, o
- b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Observa que el primer caso, es equivalente a dar tres ángulos y un lado, porque el tercer ángulo se puede calcular.

Ejemplos:

1. Encuentra el valor del lado a de la figura 1.

Utilizando la ley de los senos encontramos que:

$$\frac{a}{\text{sen } 130^\circ} = \frac{51}{\text{sen } 25^\circ}$$

Desarrollando esta ecuación de primer grado,

$$a = \frac{51 (\text{sen } 130^\circ)}{\text{sen } 25^\circ}$$

y como

$$\text{sen } 130^\circ = \text{sen } (180^\circ - 50^\circ) = \text{sen } 50^\circ,$$

se tiene

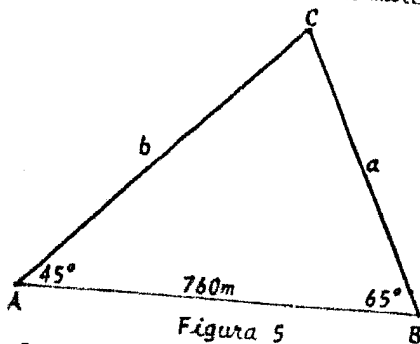
$$a = \frac{51 (\text{sen } 50^\circ)}{\text{sen } 25^\circ}$$

$$a = \frac{51(0.76604444)}{0.42261826}$$

por lo tanto,

$$a = 92.443394$$

2. Dos guardabosques descubren una fogata clandestina. Si el vigía más cercano es el que debe acudir, ¿cuál de ellos tiene que ir y cuánto tendrá que caminar? En la figura 5, aparecen marcados los datos.



En la figura 5, estamos suponiendo que uno de los guardabosques se encuentra en el punto A, el segundo en el punto B y la fogata en el punto C.

En este caso conocemos dos ángulos y el tercero lo podemos determinar haciendo uso de:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

substituyendo,

$$45^\circ + 65^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 105^\circ$$

$$\angle C = 75^\circ$$

Apliquemos la ley de los senos para encontrar el valor de "a".

$$\frac{a}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{760}{\text{sen } 75^\circ}$$

$$a = \frac{760(\text{sen } 45^\circ)}{\text{sen } 75^\circ}$$

$$a = \frac{760(0.70710678)}{0.96592583}$$

$$a = 556.35861,$$

esto significa que el guardabosques que se encuentra en el punto B, tendría que caminar 556.35 metros.

Apliquemos la ley de los senos para encontrar el valor de "b".

$$\frac{b}{\text{sen } 65^\circ} = \frac{760}{\text{sen } 75^\circ}$$

$$b = \frac{760(\text{sen } 65^\circ)}{\text{sen } 75^\circ}$$

$$b = \frac{760(0.90630779)}{0.96592583}$$

$$b = 713.09194,$$

esto significa que el guardabosques que se encuentra en el punto A, está a 713.09 metros de la fogata, por lo tanto el guardabosques que tiene que acudir es el que se encuentra en el punto B y tendrá que caminar 556.35 m.

3. Un niño sale de su casa, la cual está en una calle inclinada y camina 250 m., hasta llegar a una calle horizontal; ya estando en ésta, camina -- 100 m. Si el ángulo C es de 37° como se muestra en la figura 6, ¿cuánto mide el ángulo A?

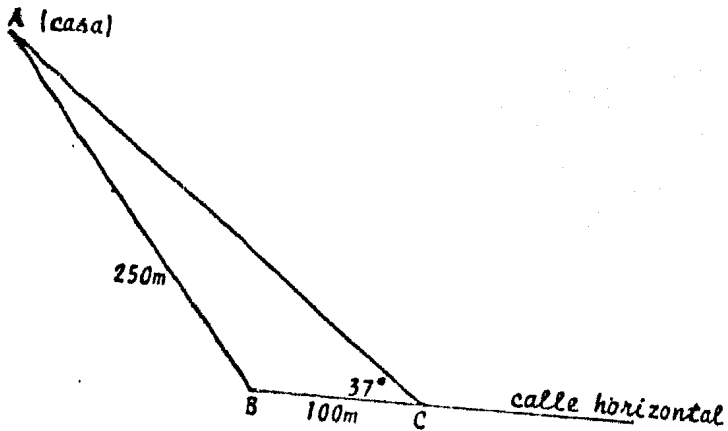


Figura 6

Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{250}{\text{sen } 37^\circ} = \frac{100}{\text{sen } A}$$

desarrollando,

$$250 \text{ sen } A = 100 \text{ sen } 37^\circ$$

$$\text{sen } A = \frac{100 \text{ sen } 37^\circ}{250}$$

$$\text{sen } A = \frac{100(0.60181502)}{250}$$

$$\text{sen } A = 0.24072601, \text{ por lo tanto,}$$

$$A = \text{ang sen } 0.24072601$$

$$A = 13^\circ 55'$$

Ejercicios:

1. Calcula el valor del lado "b" y el ángulo B en la figura 1.
2. Calcula el valor del ángulo B y del lado AC en la figura 6.

20. LEY DE LOS COSENOS.

Existen problemas para los cuales no se puede usar la ley de los senos, un ejemplo es el siguiente.

1. Encuentra el valor del lado "a" en la figura 1.

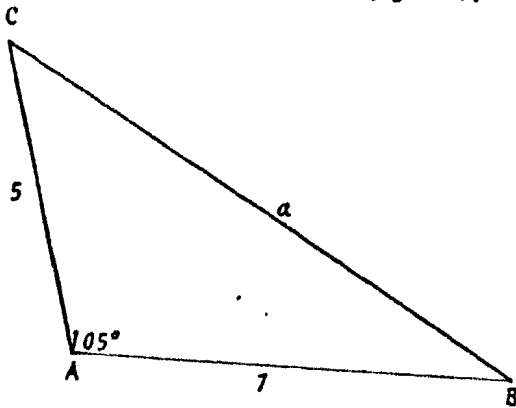


Figura 1

En este caso, si usáramos la ley de los senos, tendríamos:

$$\frac{a}{\sin 105^\circ} = \frac{5}{\sin B}$$

$$a = \frac{5 \sin 105^\circ}{\sin B} \dots\dots\dots (a)$$

o bien,

$$\frac{a}{\sin 105^\circ} = \frac{7}{\sin C}$$

$$a = \frac{7 \sin 105^\circ}{\sin C} \dots\dots\dots (b)$$

Si observas las igualdades (a) y (b) te darás cuenta que para encontrar el valor de "a", tendríamos primero que conocer el valor del ángulo B o bien el valor del ángulo C.

Para resolver problemas del estilo anterior, vamos a desarrollar una igualdad conocida como ley de los cosenos, la cual dice:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Observa la figura 2.

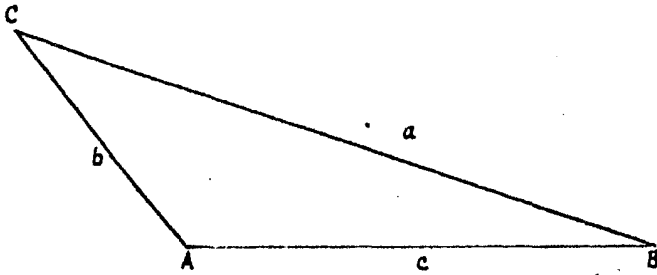


Figura 2

Esta ley se aplica cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido por esos dos lados o bien cuando se conocen los tres lados.

En el ejemplo de la figura 1, conocemos dos lados y el ángulo comprendido por esos lados, en este caso podemos utilizar la ley como sigue:

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos 105^\circ$$

Al resolver la igualdad anterior obtendremos el valor de "a".

Demostración de la Ley de los cosenos.

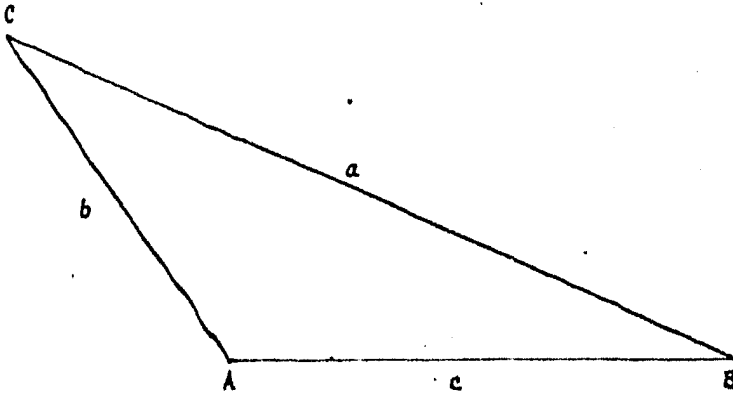


Figura 3

a) En el triángulo ABC de la figura 3, tracemos la altura $CD = h$, observa la figura 4. En la misma figura hemos llamado x al segmento DA.

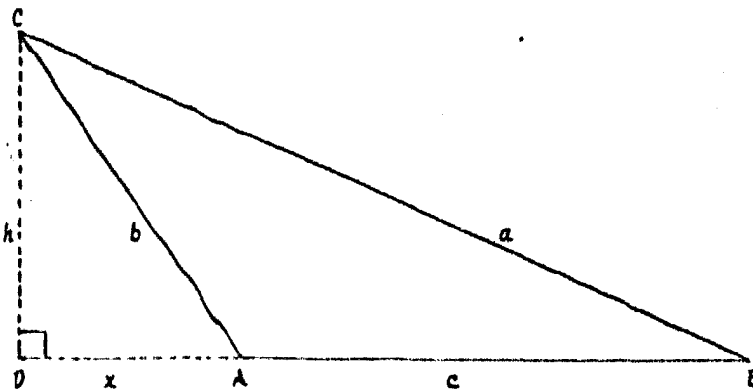


Figura 4

b) En el triángulo rectángulo ADC, h es el cateto opuesto al ángulo CAD, x es el cateto adyacente y b es la hipotenusa, por lo tanto:

$$\text{sen } (\sphericalangle CAD) = \frac{h}{b},$$

despejando h , $h = b \text{ sen } (\sphericalangle CAD) \dots\dots\dots (1)$

Por otra parte, tenemos:

$$\text{cos } (\sphericalangle CAD) = \frac{x}{b},$$

despejando x , $x = b \text{ cos } (\sphericalangle CAD) \dots\dots\dots (2)$

Como el ángulo A es mayor de 180° (le estamos llamando A al ángulo -
BAC), entonces según lo visto en la sección 18,

$$\text{sen } A = \text{sen } (180^\circ - \sphericalangle CAD) = \text{sen } (\sphericalangle CAD)$$

$$\text{y } \text{cos } A = \text{cos } (180^\circ - \sphericalangle CAD) = - \text{cos } (\sphericalangle CAD)$$

Substituyendo estas dos igualdades en (1) y (2), tenemos:

$$h = b \text{ sen } A \dots\dots\dots (3)$$

$$x = -b \text{ cos } A \dots\dots\dots (4)$$

c) Aplicando al teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BVC, tenemos

$$a^2 = h^2 + (x+c)^2$$

desarrollando el binomio,

$$a^2 = h^2 + x^2 + 2xc + c^2 \dots\dots\dots (5)$$

substituyendo las igualdades (3) y (4) en la igualdad (5), tenemos:

$$a^2 = (b \text{ sen } A)^2 + (-b \text{ cos } A)^2 + 2(-b \text{ cos } A)(c) + c^2$$

Desarrollando, $a^2 = b^2 \text{ sen}^2 A + b^2 \text{ cos}^2 A - 2bc \text{ cos } A + c^2$

factorizando, $a^2 = b^2 (\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A) - 2bc \text{ cos } A + c^2$.

En la sección 14 vimos que $\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$, por lo tanto substituyen-
do,

$$a^2 = b^2 (1) - 2bc \text{ cos } A + c^2,$$

reacomodando, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ cos } A \dots\dots\dots (6)$

A esta última igualdad se le conoce como ley de los cosenos.

Ley de los cosenos (1a. forma). El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Como ya habíamos mencionado al principio, la ley de los cosenos se utiliza, cuando en un triángulo cualquiera se conocen: Dos lados y el ángulo comprendido por ellos.

La misma ley de los cosenos, se puede expresar en otra forma.

Si de la igualdad (6), despejamos al coseno de A, obtendremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \dots\dots\dots (6)$$

$$a^2 + 2bc \cos A = b^2 + c^2$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} \dots\dots\dots (7)$$

La igualdad (7) se conoce como la segunda forma de la Ley de los cosenos, la cual se enuncia:

Ley de los cosenos (2a. forma). El coseno de un ángulo cualquiera de un triángulo es igual a una fracción cuyo numerador es la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, menos el tercer lado al cuadrado, y cuyo denominador es el doble producto de los lados que forman el ángulo.

La ley de los cosenos en esta segunda forma, se utiliza cuando se conocen los tres lados de un triángulo cualquiera.

Ejemplos:

1. Un triángulo tiene dos lados de 35m y 20m respectivamente y el ángulo entre estos lados es de 39° . Calcula el valor del tercer lado.

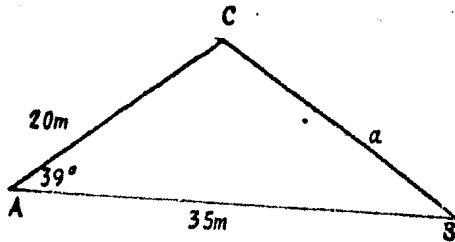


Figura 5

En este caso podemos aplicar la ley de los cosenos (1a. forma).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Substituyendo los datos, tenemos.

$$a^2 = 20^2 + 35^2 - 2(20)(35) \cos 39^\circ$$

$$a^2 = 400 + 1225 - 1400 (0.77714596)$$

$$a^2 = 1625 - 1088.0043468$$

$$a^2 = 536.9956532$$

$$a = \sqrt{536.9956532}$$

$$a = 23.173167$$

En la práctica podemos decir que el tercer lado mide 23.17m.

2. En un triángulo de lados 21m, 28m y 42m, calcula el ángulo que se opone al lado de 21m.

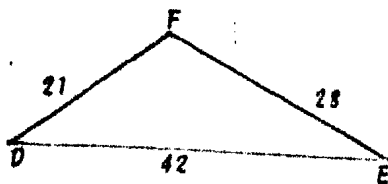


Figura 6

Aplicando la segunda forma de la ley de los cosenos.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

En este problema, como lo que buscamos es el valor del ángulo E, entonces:

$$\cos E = \frac{28^2 + 42^2 - 21^2}{2(28)(42)}$$

$$\cos E = \frac{784 + 1764 - 441}{2352}$$

$$\cos E = \frac{2107}{2352}$$

$$\cos E = 0.8958333$$

$$E = \text{ang.} \cos 0.8958333$$

$$E = 26^\circ 23'$$

Ejercicios:

1. Encuentra los valores de los ángulos B y C del ejemplo 1 (figura 5).
2. Encuentra los valores de los ángulos D y F del ejemplo 2 (figura 6).
3. Demuestra la ley de los cosenos con respecto a la figura 7. Esto es de muestra que se cumple que:

$$d^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos D$$

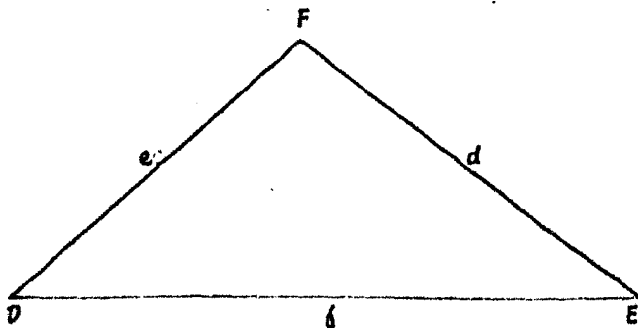


Figura 7

4. Calcula el valor de los segmentos CD y BC . Te sugerimos que primero -- calcules el valor de la diagonal BD .

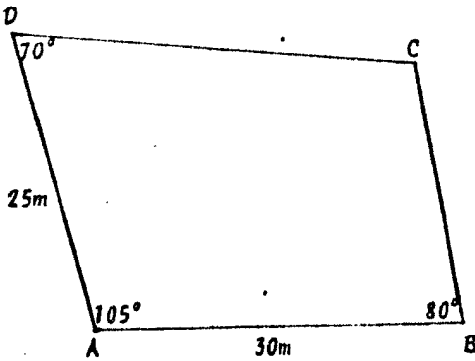


Figura 8

UNIDAD VII

Areas.

A R E A S

1. INTRODUCCION

Desde los tiempos más antiguos, la medición de áreas de las superficies ha sido una práctica importante y necesaria. A los antiguos egipcios, sus gobernantes les asignaban parcelas estableciendo un impuesto anual por ellas. Cuando el río inundaba una parte de alguno, el propietario tenía que pagar impuesto sobre la parte no inundada, en proporción al impuesto total que se había fijado.

Los antiguos babilonios y egipcios pudieron desarrollar una serie de reglas prácticas para medir áreas de figuras geométricas sencillas. En la actualidad, los topógrafos han desarrollado el arte de medir la tierra en forma precisa.

El ingeniero, el arquitecto, el hojalatero, el carpintero y el artista encuentran que un conocimiento exacto referente a las áreas es fundamental para el buen desempeño de sus profesiones.

Quienquiera que desee comprar un terreno se interesa en conocer el área del mismo. Cuando una persona construye una casa, tiene que interesarse en el área probable de construcción.

2. UNIDADES DE MEDIDA

Cuando medimos la longitud de un segmento rectilíneo, determinamos -- cuantas unidades de una medida lineal están contenidas en él. Si no contáramos con una unidad común de medida se podría presentar la ---- siguiente situación.

Supongamos que se quiere hacer un marco para una fotografía y se mide su largo y ancho usando cualquier objeto que se tenga cerca.

Los resultados de medir las dimensiones de la fotografía podrían ser las siguientes:

Unidad de medida	largo	ancho
lápiz	3 lápices	2 lápices
palillo	6 palillos	4 palillos
dado	15 dados	13 dados

Si llevarámos cualquiera de las medidas anteriores a un carpintero, - para que nos hiciera el marco, lo más probable es que no podría hacerlo, a menos que, por ejemplo llevarámos el lápiz con el que medimos la fotografía, ya que hay lápices de diversos tamaños. Comentarios análogos se pueden hacer para cada una de las otras medidas. Por tanto, se necesita alguna unidad común para hacer posible el suministro de alguna interpretación uniforme de las medidas.

En los tiempos actuales, han llegado a ser usual varias unidades de medida por acuerdo general. Por ejemplo, tenemos ciertas unidades lineales universalmente adoptadas para medir distancias;

milímetro = $1/1000$ de metro

centímetro = $1/100$ de metro

decímetro = $1/10$ de metro

decámetro = 10 metros

hectómetro = 100 metros

kilómetro = 1000 metros

Unidades de tiempo, por ejemplo:

segundo = $1/60$ de minuto

hora = 60 minutos

Y unidades de peso, por ejemplo:

miligramo = $1/1000$ de gramo

centígramo = $1/100$ de gramo

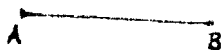
decígramo = $1/10$ de gramo

decagramo = 10 gramos

hectogramo = 100 gramos

kilogramo = 1000 gramos

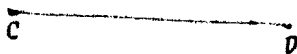
Supongamos que quisieramos medir el siguiente segmento AB.



Para medir longitudes pequeñas como el segmento AB usualmente se usa como unidad común de medida el centímetro.

En este caso el segmento mide 3 centímetros (compruébelo).

Si ahora se tuviera un segmento como el CD,



que mide más de 4 centímetros pero menos de 5 centímetros, para poder determinar con exactitud su longitud se puede usar como unidad común de medida el milímetro. El segmento CD mide 44 milímetros que convertidos a centímetros resultan 4,4 centímetros.

Por otro lado si quisieramos medir la distancia que hay de la Ciudad -

de México a Puebla usar cualquiera de las unidades de medidas anteriores sería muy difícil, por lo que en este caso se utiliza el kilómetro.

Como se puede observar las unidades que se usan con más frecuencia son el milímetro, el centímetro, el metro y el kilómetro.

Andlogamente, medir el área de una región plana, es cuestión de determinar cuantas unidades comunes de medida de área contiene la región. Por lo común, la unidad usual de área es el área de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud.

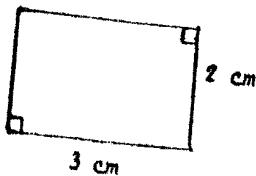
El área se mide en unidades cuadradas. Lo que usualmente se conoce como el cuadrado unitario es una región cuadrada cuyo lado es de un centímetro. Si la unidad de longitud es de un centímetro el cuadrado unitario es un centímetro cuadrado. Si la unidad de longitud es de un metro, el cuadrado unitario es un metro cuadrado. Las expresiones centímetro cuadrado, metro cuadrado, se abrevian cm^2 , m^2 respectivamente.

La unidad de medida elegida debe, desde luego, ser adecuada para que pueda adaptarse a la región que se mide, como en el caso de la unidad de longitud.

Entonces, el área es igual al número de veces que el cuadrado unitario se usa para cubrir completamente la superficie.

Ejemplo:

Calcula el área de un rectángulo que tenga la base de 3cm. y la altura de 2cm de longitud.

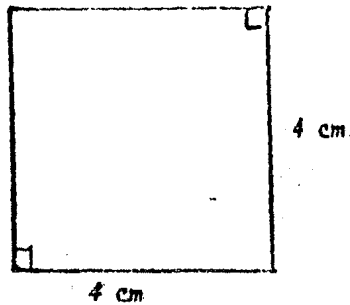


3. AREA DEL CUADRADO

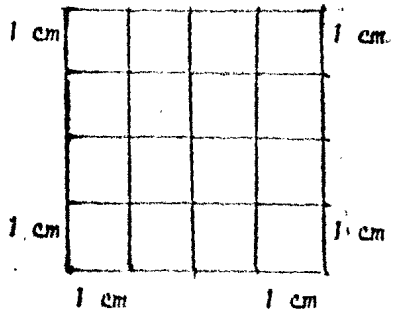
Hasta ahora se ha visto que para poder calcular el área de una región se necesita ver el número de cuadrados unitarios que se usan para cubrir totalmente la región. En esta parte se obtendrá una fórmula para el área del cuadrado de lado arbitrario l , pero primero analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Calcula el área de un cuadrado de lado 4 cm.



Consideremos como cuadrado unitario un centímetro cuadrado. Dividiendo el cuadrado anterior de la siguiente manera:

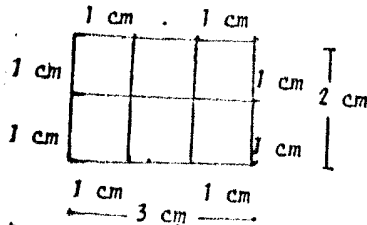


Se observa que el cuadrado tiene un área de 16cm^2 .

Para determinar el área del rectángulo, consideremos un cuadrado unitario o unidad de área de un centímetro cuadrado.



Veamos cuántos cuadrados unitarios cubren el rectángulo.



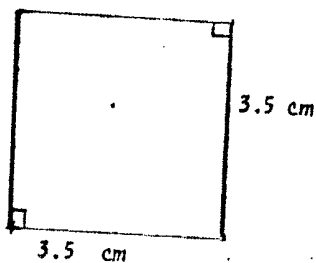
Se puede decir, entonces, que el área del rectángulo es de 6cm^2 , ya que caben 6 cuadrados unitarios exactamente.

Ejercicios:

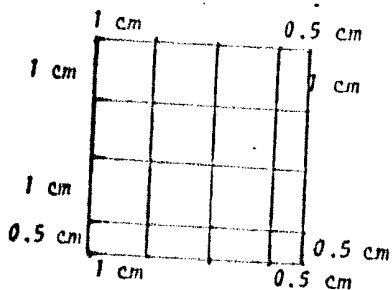
- 1.- Determina la unidad adecuada para medir, en cada caso:
 - a) La altura de un edificio de cinco pisos
 - b) El diámetro de un tornillo
 - c) La longitud de una pluma
 - d) La distancia de Oaxaca a Veracruz.
- 2.- Calcula el área de un rectángulo de base 5cm y de altura 3cm.
- 3.- Calcula el área de un terreno cuadrado de lado 10m.
- 4.- Calcula el área de un rectángulo de base 3.5cm y de altura 4cm.

Ejemplo 2.

Calcula el área de un cuadrado de lado 3.5 cm.

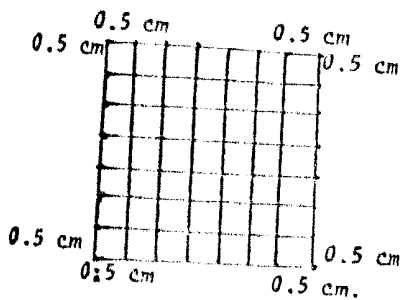


Si consideramos otra vez el cm^2 como cuadrado unitario, observamos que no es posible determinar el área con exactitud, ya que nos sobran pequeñas regiones que son menores que el cuadrado unitario.



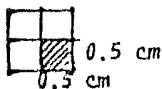
Para poder determinar el área del cuadrado podemos proceder de dos formas:

Primera: Si consideramos un cuadrado unitario a uno cuyos lados miden 0.5 cm.



Como se observa caben 49 cuadrados unitarios de longitud 0.5 cm. de lado,

Ahora si queremos expresar esta área en cm^2 , vemos que cuatro de estos cuadrados unitarios nos darán un cuadrado de 1cm^2 .



Luego hay 12 cuadrados de lado 1 cm y un cuadrado unitario de 0.25cm^2 , por lo que el área del cuadrado es de 12.25cm^2

Segunda: Si consideramos como cuadrado unitario a uno cuyo lado mida - 1 mm, entonces los 3.5 cm se convertirán en 35 mm y los lados del cuadrado quedarían divididos en 35 partes, por lo que se formarían 1225 cuadrados-unitarios de 1mm^2 .

Como cada lado del cuadrado de un centímetro se dividió en 10 partes, - entonces caben 100 cuadrados de lado un milímetro, es decir,

$$1\text{cm}^2 = 100\text{mm}^2$$

Entonces el área del cuadrado de lado 3.5 cm es de 12.25cm^2 .

De manera análoga se puede ver que si tenemos un cuadrado unitario de - un metro de lado y el lado del cuadrado se divide en decímetros, entonces en el cuadrado de lado un metro caben 100 cuadrados de lado un decímetro, - es decir,

$$1\text{m}^2 = 100\text{dm}^2$$

Si el cuadrado de un metro de lado lo dividiéramos en milímetros, ten-
dríamos que:

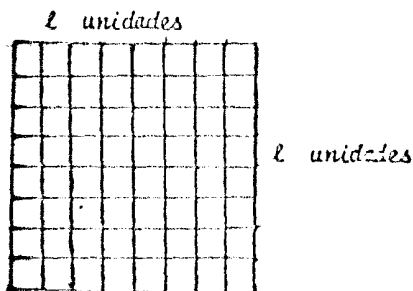
$$1\text{m}^2 = 100,000\text{mm}^2$$

Aunque es correcto pensar en el área de un cuadrado intuitivamente, - como el número de cuadrados unitarios que podemos colocar dentro de él, es más

sencillo calcular el área del cuadrado por medio de una fórmula.

El área de un cuadrado de lado l es $l^2 = l \cdot l$.

Como en los ejemplos anteriores, si se considera que l es un entero entonces se dividen los lados en l partes iguales, para obtener $l \times l$ cuadrados unitarios.

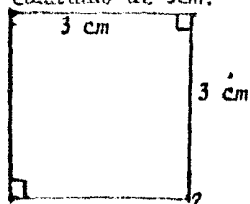


En caso de que l no sea entero se convierte a otra unidad menor, por ejemplo, si el lado l del cuadrado es de 3.5 cm entonces el lado l se convierte a 35mm.

Se obtiene el número de cuadrados unitarios de 1 mm^2 . Se puede después convertir a otra unidad como cm^2 o m^2 .

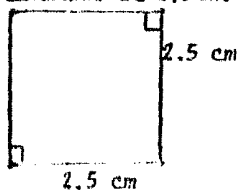
Ejemplos:

1.- Calcula el área de un cuadrado de 3cm.



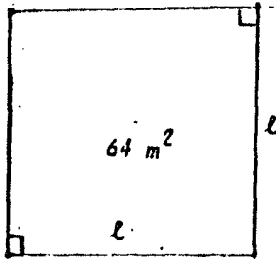
Utilizando la fórmula se obtiene 9cm^2 .

2.- Calcula el área de un cuadrado de 2.5cm.



Con la fórmula nos estamos ahorrando la conversión de cm a mm y de mm^2 a cm^2 , ya que aplicandola directamente se obtiene que el área del cuadrado es $2.5\text{cm} \times 2.5\text{cm} = 6.25\text{cm}^2$.

3.- Determina la longitud de un cuadrado de área 64m^2 .



En este ejemplo, se conoce el área del cuadrado y lo que se quiere es determinar la longitud de su lado. Aplicando la fórmula del área del cuadrado, se tiene:

$$64 = l^2, \quad l = \sqrt{64} = 8$$

El lado del cuadrado es de 8m.

Ejercicios:

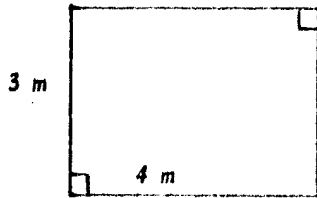
- 1.- Calcula el área de un cuadrado de 5cm de lado.
- 2.- Determina el área de un cuadrado de 7,6m de lado
- 3.- Calcula la longitud del lado de un cuadrado de área 49cm^2 .
- 4.- Calcula la longitud del lado de un cuadrado de área 16m^2 .
- 5.- Calcula el área de un cuadrado de 2cm de lado. ¿Qué le sucede al área del cuadrado si duplicamos la longitud de su lado? ¿Qué sucede si la triplicamos? ¿Y si la reducimos a la mitad?

4. EL AREA DEL RECTANGULO

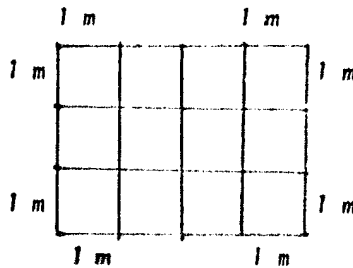
Encontremos ahora la fórmula para el área del rectángulo. Analicemos primero los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Calcula el área de un rectángulo de base 4 metros y de altura 3 metros.



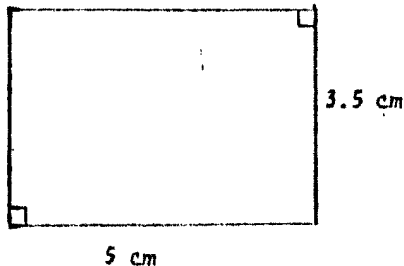
Consideremos un cuadrado unitario de lado un metro y dividamos el rectángulo de la siguiente manera:



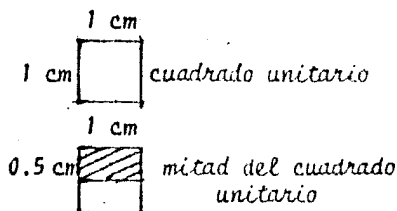
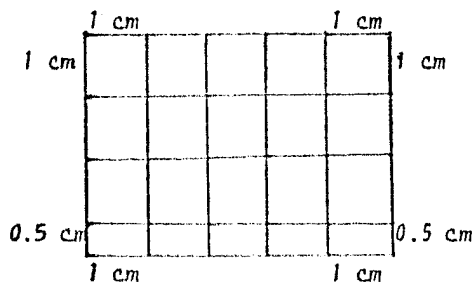
Se observa que hay 12 cuadrados unitarios, luego el área del rectángulo es de $12m^2$.

Ejemplo 2.

Calcula el área de un rectángulo de base 5 cm y la altura 3,5 cm.



Si consideramos como cuadrado unitario uno que tenga de lado un centímetro entonces habrá 15 unidades completas y 5 mitades de unidades cuadradas (ve la figura).



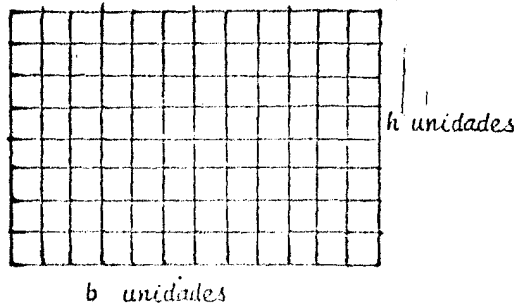
Las 5 mitades de cuadrados unitarios son equivalentes a 2 unidades cuadradas más una mitad, haciendo un total de 17.5 cm^2 , ya que la mitad de un cuadrado unitario es la mitad de 1 cm^2 o sea 0.5 cm^2 .

También se puede calcular el área del rectángulo convirtiendo los centímetros a milímetros como se hizo en el ejemplo 2 del cuadrado, para después convertir los mm^2 obtenidos a cm^2 . Observa que el resultado obtenido es igual a $5 \text{ cm} \times 3.5 \text{ cm}$.

Si generalizamos lo observado en los ejemplos podemos ver que el área de un rectángulo de base b unidades y altura h unidades es igual a $b \cdot h$ unidades cuadradas, luego la fórmula del área del rectángulo de base b y altura h es:

$$\text{Área del rectángulo} = b \cdot h$$

Dividamos la base en b partes iguales y a la altura en h partes iguales, entonces, se obtienen $b \cdot h$ cuadrados unitarios. Observa la figura.



En el caso de que alguna o las dos de sus dimensiones no sea entera se convierte a otra unidad menor, por ejemplo si la base es de 5cm y la altura de 3.5cm se convierten a 50mm y 35mm respectivamente, obtenida el área del rectángulo en mm^2 se convierten a cm^2 o m^2 .

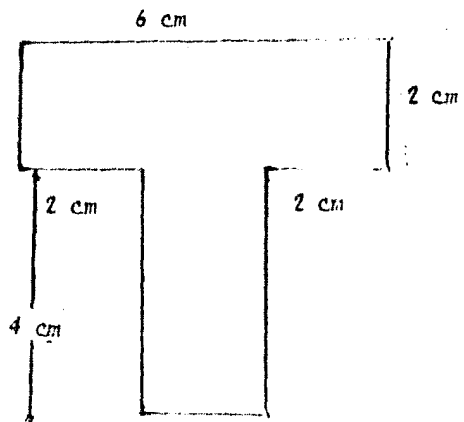
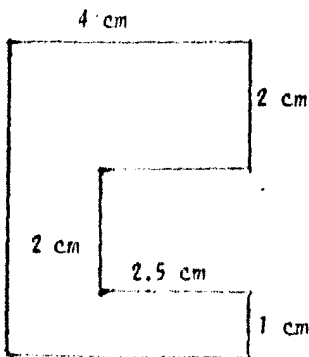
Ejemplo:

Calcula el área de un terreno rectangular de base 9m y de altura 20m.

Utilizando la fórmula del área del rectángulo al terreno se obtiene que su área es de $9\text{m} \times 20\text{m} = 180\text{m}^2$.

Ejercicios.

- 1.- Calcula el área de un rectángulo de base 5cm y de altura 7cm.
- 2.- Encuentra el área de un rectángulo, si su base es de 2.5m y su altura es de 1.25m.
- 3.- Encuentra el área de cada una de las siguientes figuras.



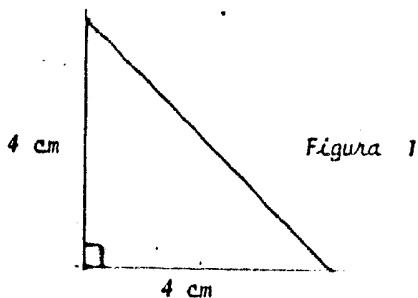
4.- Calcula el área de un rectángulo de base 4cm y altura 3cm.

Ahora calcula el área de un rectángulo que tenga el doble de base que el anterior pero de la misma altura y el área de un rectángulo de base y altura doble que el del primer rectángulo.

5. AREA DEL TRIANGULO.

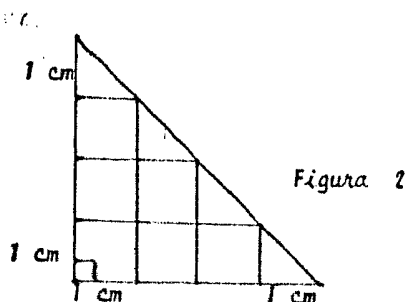
Ahora deduciremos la fórmula del área de un triángulo, empezando con un triángulo rectángulo.

1. Determina el área del siguiente triángulo (figura 1).

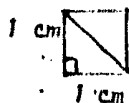


Primera solución:

Dividamos el triángulo como se observa en la figura 2.



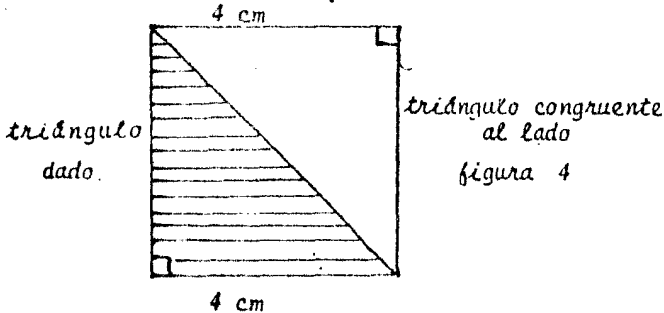
En el triángulo caben 6 cuadrados unitarios más cuatro triángulos, pero con cada dos de los triángulos, formamos un cuadrado unitario (figura 3).



De donde el área del triángulo es de 8cm^2 .

Segunda solución:

Se coloca un triángulo congruente al triángulo dado de tal manera -- que se forme un cuadrado (figura 4).



Calculando el área del cuadrado formado, se obtiene 16cm^2 , pero como el triángulo sombreado es la mitad del cuadrado, el área del triángulo dado es de 8cm^2 .

2. Calcula el área del siguiente triángulo (figura 5)

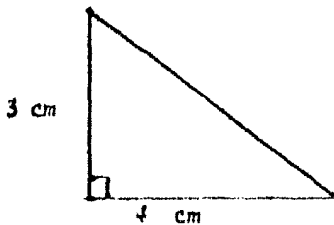
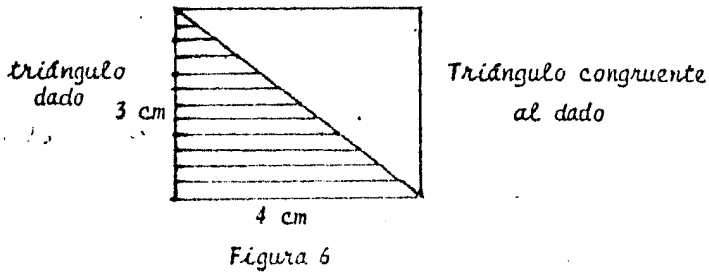


Figura 5

Utilizar el método de inscribir cuadrados unitarios como hemos visto resulta poco práctico, por lo que utilizaremos el segundo método analizado en el ejercicio anterior.

Coloque un triángulo congruente al dado de tal manera que se forme un rectángulo (figura 6).



Calculando el área del rectángulo formado, se obtiene 12cm^2 , pero como el triángulo sombreado es la mitad del rectángulo, el área del triángulo dado es de 6cm^2 .

3. Determina la fórmula para el área de triángulo rectángulo de base b y altura h (figura 7).

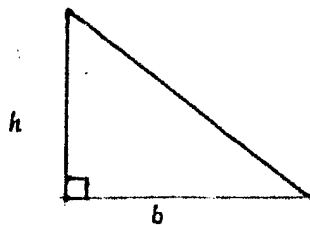


Figura 7

Coloquemos un triángulo congruente al triángulo dado de tal manera - que se obtenga un rectángulo (figura 8).

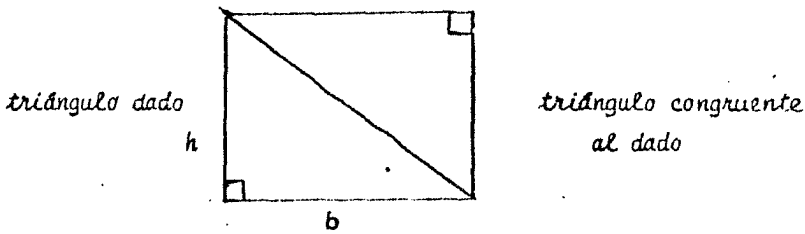


Figura 8

El área del rectángulo formado es $b \cdot h$, como el área del rectángulo es dos veces la del triángulo, entonces el área del triángulo dado es la mitad del rectángulo:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ejemplos:

1. Determina el área de un triángulo rectángulo de base 9 cm y altura 5 cm

$$\begin{aligned} \text{Área del triángulo} &= \frac{9 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}}{2} = \frac{45 \text{ cm}^2}{2} \\ &= 22.5 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

2. Calcula el área de un triángulo de base 5 cm y de altura 3 cm (figura 9).

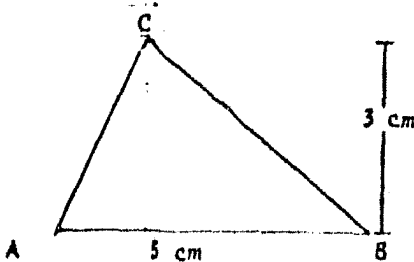


Figura 9

La fórmula hasta ahora obtenida solo la podemos utilizar para trián-

gulos rectángulos, como el triángulo dado no es rectángulo, lo que haremos es trazar la altura desde el vértice C para obtener dos triángulos rectángulos, a saber, el $\triangle ADC$ y el $\triangle CDB$ (figura 10).

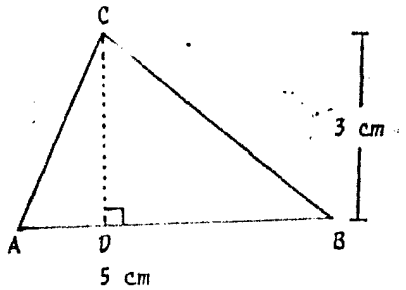


Figura 10

Supongamos que $AD = x$, $DB = y$, tal que $x+y = 5$ (figura 11).

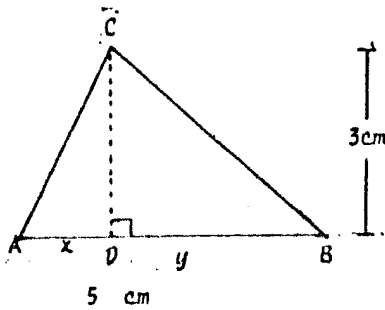


Figura 11

El área del $\triangle ADC$ es $\frac{3x}{2}$ y el área del $\triangle CDB$ es $\frac{3y}{2}$.

Como el área del $\triangle ABC = \text{Área del } \triangle ADC + \text{Área del } \triangle CDB$

$$= \frac{3x}{2} + \frac{3y}{2} = \frac{3}{2}(x+y); \quad x+y = 5$$

$$= \frac{3}{2}(5) = \frac{15}{2}$$

Luego el área del triángulo dado es de $\frac{15\text{cm}^2}{2}$

Usando el procedimiento para calcular el área del triángulo anterior,

encuentra una fórmula para calcular el área de un triángulo no rectángulo de base b y altura h (figura 12).

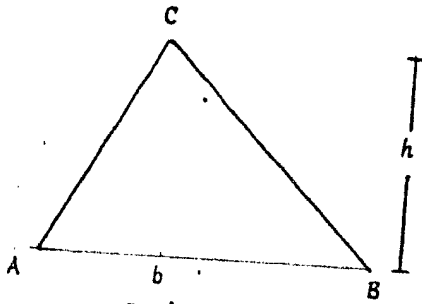


Figura 12

Tracemos la altura CD del $\triangle ABC$ (figura 13).

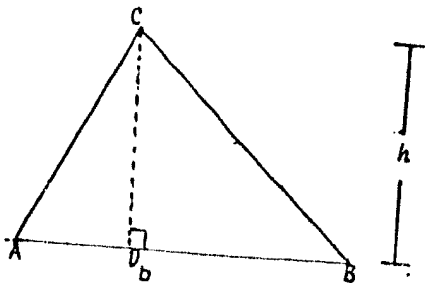


Figura 13

Consideramos a $AD = x$, $DB = y$ tal que $x + y = b$ (figura 14).

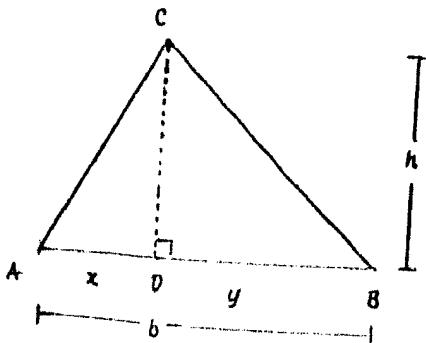


Figura 14

El área del $\triangle ADC$ es $\frac{xh}{2}$ y el área del $\triangle CDB$ es $\frac{yh}{2}$

Como el área del $\triangle ABC = \text{Área del } \triangle ADC + \text{Área del } \triangle CDB$

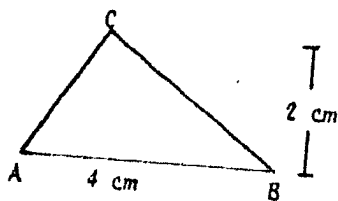
$$= \frac{xh}{2} + \frac{yh}{2}$$

$$= \frac{(x+y)h}{2} \text{ donde } x+y = b$$

$$= \frac{b \cdot h}{2}$$

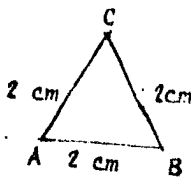
Ejemplos:

1. Calcula el área del siguiente triángulo.



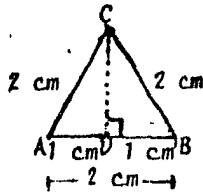
Utilizando la fórmula del área del triángulo, se tiene que el área -- del triángulo ABC es $\frac{(4\text{cm})(2\text{cm})}{2} = 4 \text{ cm}^2$

2. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 2cm.



Para poder utilizar la fórmula del área de un triángulo lo primero - que debemos hacer es calcular su altura.

Tracemos la altura CD del $\triangle ABC$ (observa la figura).



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo DBC , obtenemos

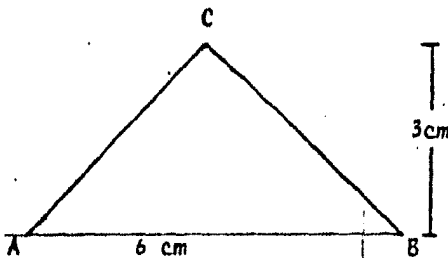
$$CD^2 + 1^2 = 2^2$$

$$CD = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

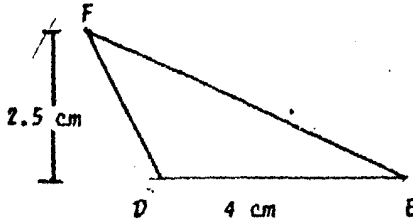
$$\text{Entonces el área del } \triangle ABC = \frac{(2 \text{ cm})(\sqrt{3} \text{ cm})}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Ejercicios:

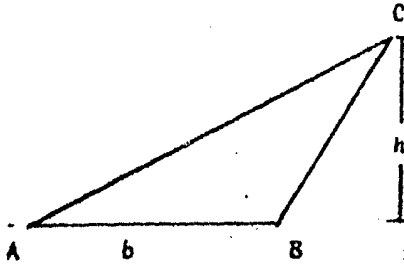
1. Calcula el área de un triángulo rectángulo de base 4 cm y de altura 5 cm.
2. Calcula el área del siguiente triángulo.



3. Determina el área del siguiente triángulo.

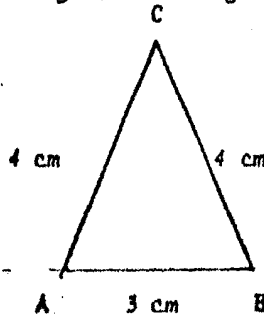


4. Encuentra una fórmula para el área de un triángulo de base b y de altura h como el siguiente.



¿ Es la fórmula la misma que la de los triángulos anteriores?

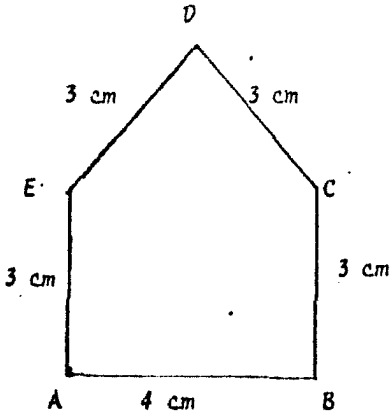
5. Calcula el área del siguiente triángulo isósceles.



6. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un área de 32cm^2 .

¿Cuáles son las longitudes de sus lados?

7. Encuentra el área del pentágono ABCDE.



6. AREAS DE OTROS POLIGONOS

Para encontrar las fórmulas que nos den el área de otros polígonos, -- emplearemos ahora la fórmula para encontrar el área de un triángulo en lugar de inscribir cuadrados unitarios, como lo hicimos anteriormente.

AREA DEL TRAPECIO

Determina el área del trapecio * ABCD que se observa en la figura 1.

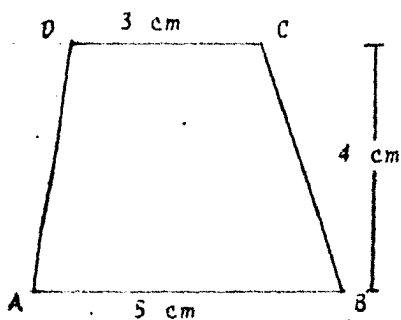


Figura 1

Tracemos la diagonal BD para obtener los triángulos ADB y DBC (fig. 2).

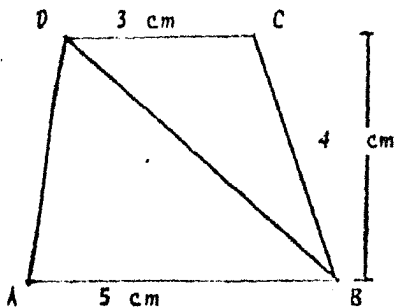


Figura 2

- * Un cuadrilátero es un trapecio si al menos un par de lados opuestos -- son paralelos. Los lados paralelos son las bases del trapecio y a la mayor se le llama base mayor y al otro, base menor.

$$\therefore \text{El área del } \triangle ABD = \frac{5\text{cm} (4\text{cm})}{2\text{cm}} = 10\text{cm}^2$$

$$\text{y el área del } \triangle DBC = \frac{3\text{cm} (4\text{cm})}{2\text{cm}} = 6\text{cm}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Como el área del trapecio } ABCD &= \text{Área del } \triangle ABD + \text{Área del } \triangle DBC \\ &= 10\text{cm}^2 + 6\text{cm}^2 \\ &= 16\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Ahora, usando el método de triangular la figura, determinaremos el área del trapecio $MNPQ$, de base mayor B , base menor b y altura h (figura 3).

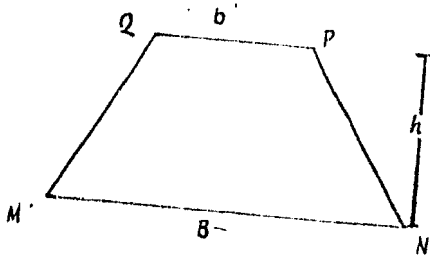


Figura 3

Tracemos la diagonal QN para formar los triángulos MNQ y QNP (figura 4).

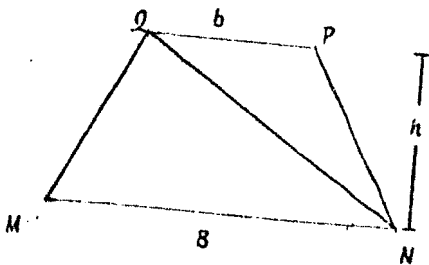


Figura 4

$$\text{El área del } \triangle MNQ = \frac{B \cdot h}{2}$$

$$\text{y el área del } \triangle QNP = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como el área del trapecio $MNOQ = \text{Área del } \triangle MNQ + \text{Área del } \triangle QNP$

$$= \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$= \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Luego la fórmula para calcular el área de un trapecio de base mayor B , base menor b y altura h es:

$$\text{Área del trapecio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Ejemplo:

Calcula el área de un trapecio de base mayor de 10cm, base menor de 5cm y de altura 3cm.

En este caso $B = 10\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$ y $h = 3\text{cm}$. Aplicando la fórmula del trapecio, se tiene:

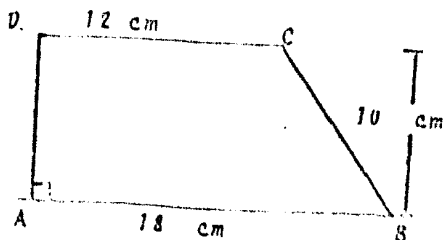
$$\text{Área del trapecio} = \frac{(10\text{cm} + 5\text{cm})(3\text{cm})}{2} = \frac{45}{2} \text{ cm}^2$$

$$= 22.5\text{cm}^2$$

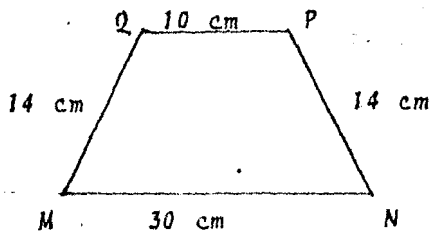
Ejercicios:

1.- Encuentra el área de un trapecio que tiene de base mayor 42cm, de base menor 24cm y de altura 14cm.

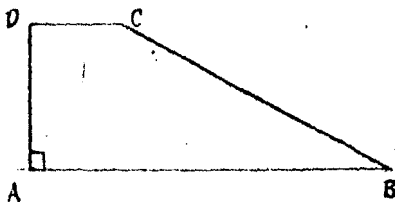
2.- Calcula el área del siguiente trapecio.



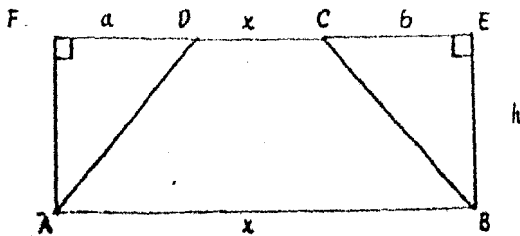
3.- Calcula el área del siguiente trapecio.



4.- En el trapecio ABCD, $\angle A = 90^\circ$. Si $AB = 23\text{ cm}$, $CD = 6\text{ cm}$, $\angle B = 30^\circ$, calcula su área.



5.- Deduzca la fórmula para el área del trapecio ABCD, calculando el área del rectángulo ABEF y sustrayendo las áreas de los triángulos ADF y CBE.



AREA DEL HEXAGONO REGULAR*

Determina el área de un hexágono regular de lado 4cm.

Para resolver este problema, lo primero que tenemos que hacer es dibujar el hexágono regular. Para ello dibujemos una circunferencia de radio 4cm y dividamos la circunferencia en seis arcos iguales utilizando como medida la longitud de su radio (figura 1).

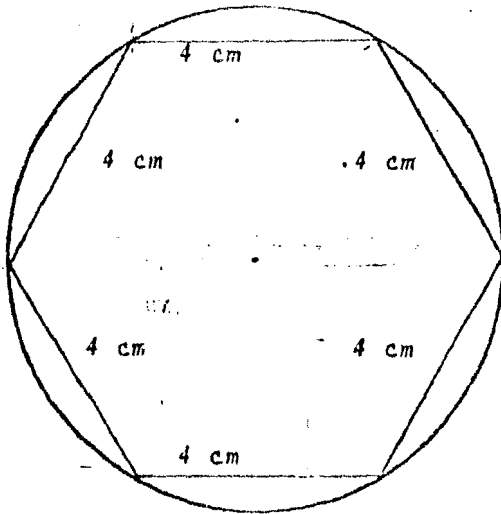


Figura 1

Se afirma que el hexágono construido es regular y de lado 4cm. Para comprobarlo, se divide el hexágono en seis triángulos a partir del centro de la circunferencia (figura 2),

* Un hexágono es regular si, y sólo si sus lados y sus ángulos son iguales.

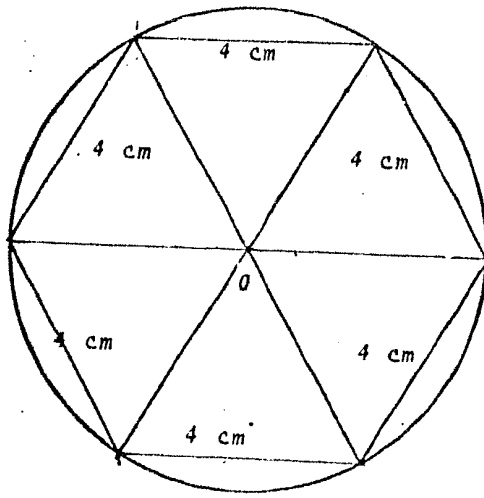


Figura 2

Y se demuestra que los seis triángulos formados son congruentes y equilateros. Se te pide que lo hagas.

El área del hexágono entonces será seis veces el área de uno de los triángulos.

Calculemos el área de alguno de los triángulos (figura 3)

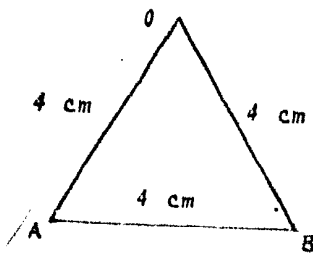


Figura 3

Para calcular la altura h del $\triangle ABO$, usemos la razón trigonométrica seno aplicada al $\angle 60^\circ$ del $\triangle ADO$ (figura 4).

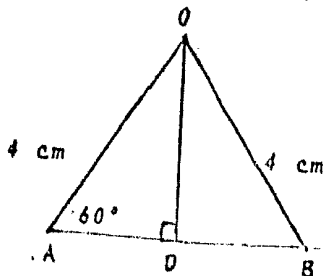


Figura 4

$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{h}{4}$$

$$h = 4 \text{ sen } 60^\circ$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

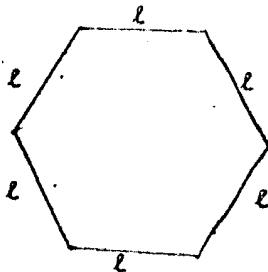
$$= 2 \sqrt{3}$$

$$\therefore h = 2 \sqrt{3} \text{ cm.}$$

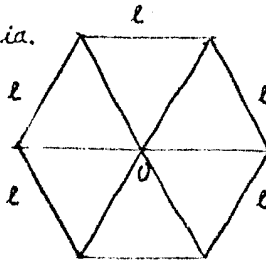
Luego el área del triángulo es $\frac{(4\text{cm})(2\sqrt{3}\text{ cm})}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

El área del hexágono regular es $6(4\sqrt{3})\text{cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 41.57 \text{ cm}^2$.

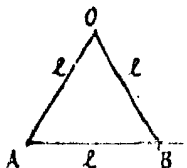
Ahora, encontraremos una fórmula para calcular el área de un hexágono regular de lado l .



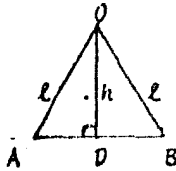
Dividamos el hexágono regular en seis triángulos congruentes a partir del centro de la circunferencia.



Calculemos el área de un triángulo.



La altura h del triángulo OAB se puede calcular usando la razón trigonométrica seno aplicada al $\angle 60^\circ$ del $\triangle ADO$.



$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{h}{l}$$

$$h = l \text{ sen } 60^\circ$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

El área del $\triangle OAB$ es $\frac{l \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l \right)}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

Luego el área del hexágono regular de lado l es:

$$6 \left(\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{2} \sqrt{3} l^2.$$

Llevemos esta fórmula a una que sea más fácil de recordar.

$$\begin{aligned} \frac{6}{4} \sqrt{3} l^2 &= \frac{6}{2} l \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l \right) \text{ como } h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \\ &= \frac{6l}{2} (h) \end{aligned}$$

Pero $6l$ es el perímetro* del hexágono regular, al que simbolizaremos - por P . Luego el área del hexágono regular de lado l es

$$\frac{P \cdot h}{2}$$

* La suma de las longitudes de los lados de un polígono se llama perímetro del polígono.

Normalmente a la altura de cualquiera de los triángulos del hexágono se le llama apotema, al que simbolizaremos por la letra a , luego la fórmula se simplifica a:

$$\frac{Pa}{2} \text{ donde } P = 6l \text{ y } a = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Ejemplo:

Calcula el área de un hexágono regular de lado 3cm.

En este caso el perímetro P es de 18cm y el apotema es de $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm.

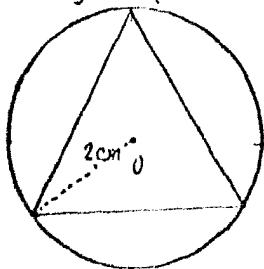
Luego, el área del hexágono regular es:

$$\frac{(18\text{cm})\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\text{cm}\right)}{2} = \frac{27}{2}\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$= 23.38\text{cm}^2$$

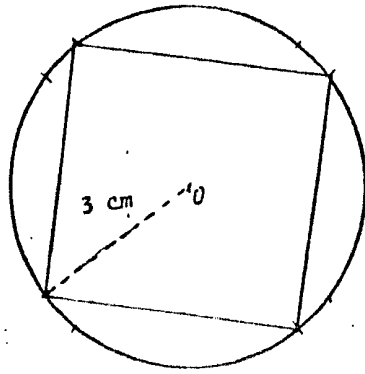
Ejercicios:

- 1.- Calcula el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 2cm.



- 2.- Determina una fórmula para el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio r , en función de su perímetro y su apotema.
- 3.- Calcula el área de un hexágono regular de lado 5cm.
- 4.- Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de ...

radio 3cm.



- 5.- Determina una fórmula para el área de un cuadrado inscrito en una --
circunferencia de radio r en función de su perímetro y su apotema.*
- 6.- El apotema de un hexágono regular mide 6cm. Encuentra su área.
- 7.- Encuentra el lado del hexágono regular cuya área es $54\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
- 8.- Determina el área de un polígono regular de 8 lados inscrito en una --
circunferencia de radio 4cm.
- 9.- Determina una fórmula para el área de un polígono regular de 8 lados--
inscrito en una circunferencia r . ¿Resulta ser la misma que la del --
triángulo ó del cuadrado?.

Apotema de un polígono regular es el segmento perpendicular
trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados.

7. OTRAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITAGORAS.

En la unidad V demostramos el teorema de Pitágoras usando semejanza de triángulos. Ahora daremos dos demostraciones diferentes calculando áreas.

1a. Demostración.

Consideremos el triángulo rectángulo ABC de catetos a y b e hipotenusa c (figura 1).

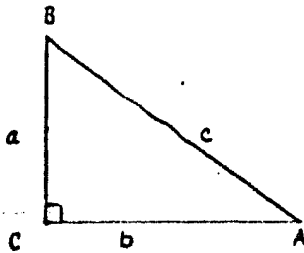


Figura 1

Demostraremos que $a^2 + b^2 = c^2$, es decir, que en el triángulo rectángulo ABC la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, ya que

- a^2 es el área del cuadrado de Lado a
- b^2 es el área del cuadrado de Lado b y
- c^2 es el área del cuadrado de Lado c . (figura 2).

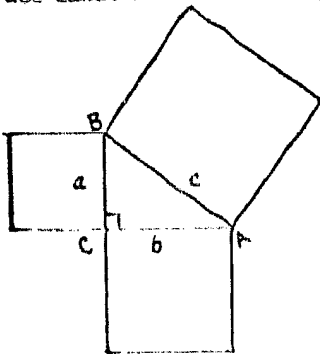


Figura 2

Demostración:

Construyamos el cuadrado $WXYZ$ con lados de longitud $a+b$. En cada esquina del cuadrado coloquemos un triángulo congruente con el $\triangle ABC$ (figura 3).

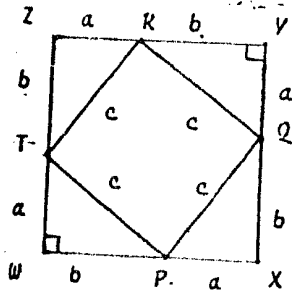


Figura 3

Probaremos que el cuadrilátero $PQRT$ de la figura 3 es un cuadrado, para ello consideremos los triángulos TWP y PXQ (figura 4).

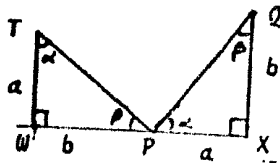


Figura 4

Los triángulos TWP y PXQ son congruentes, por lo tanto

$$\angle PTW = \angle QPX = \alpha \text{ y } \angle WPT = \angle XQP = \beta.$$

Como la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 90° , en nuestro caso, $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces el $\angle TPQ$ es un ángulo de 90° ya que: $\angle WPT + \angle TPQ + \angle QPX = 180^\circ$

$$\alpha + \angle TPQ + \beta = 180^\circ$$

$$90^\circ + \angle TPQ = 180^\circ$$

$$\angle TPQ = 90^\circ$$

De manera análoga se puede demostrar que los ángulos $\angle PQR$, $\angle QRT$ y $\angle RTP$ son de 90° . Se te deja como ejercicio.

Como la figura $PQRT$ es un cuadrado de lado c , su área es c^2 .

El área del cuadrado $WXYZ = \text{área del cuadrado } PQRT + 4(\text{área del triángulo } ABC)$.

Esto es,

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \left(\frac{a \cdot b}{2} \right)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ lo cual se quería demostrar.}$$

2a. Demostración:

Consideremos el triángulo rectángulo ABC de catetos a y b e hipotenusa c (figura 1).

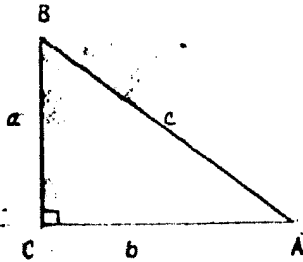


Figura 1

A partir del $\triangle ABC$, construyamos el segmento BD tal que sea prolongación de CB e igual a b . Después tracemos DE perpendicular a BD de tal manera que DE sea igual a " a ", y por último se trazan los segmentos EB y EA como se observa en la figura 2.

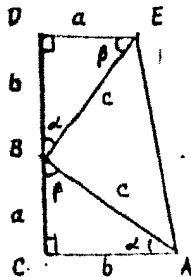


Figura 2

Probaremos que el $\triangle EBA$ es rectángulo de catetos de longitud c .

Los triángulos DBE y ABC son congruentes, por lo tanto

$$\angle DBE = \angle CAB = \alpha \quad \text{y} \quad \angle BED = \angle ABC = \beta.$$

El $\angle BEA$ es de 90° ya que:

$$\angle DBE + \angle EBA + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle \alpha + \angle EBA + \angle \beta = 180^\circ$$

$$90^\circ + \angle EBA = 180^\circ$$

$$\angle EBA = 90^\circ$$

Luego el $\triangle EBA$ es un triángulo rectángulo de catetos de longitud c .

El cuadrilátero $AEDC$ es un trapecio, ya que DE y CA son paralelos.

Área del trapecio $AEDC = 2(\text{área del } \triangle ABC) + \text{área del } \triangle EBA$.

$$\frac{(a+b) \cdot (a+b)}{2} = \frac{2(ab)}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ lo cual se quería demostrar.}$$

Ejercicios:

1. Considera un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c (figura 1).

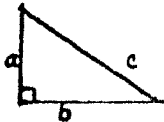
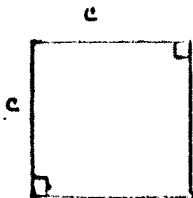


Figura 1

El cateto b es mayor que el cateto a

Construye un cuadrado de lado c (figura 2)



Coloca cuatro triángulos rectángulos como el triángulo dado, en el cuadrado de lado c , como se observa en la figura 3.

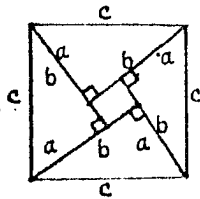


Figura 3

Usando la figura 3 demuestra el teorema de Pitágoras.

2. Considera un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c (figura 1).

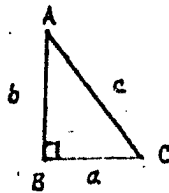


Figura 1

El cateto b es mayor que el cateto a

Construye la figura 2.

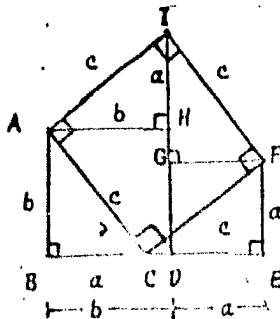


Figura 2

Utiliza la figura 2 para demostrar el teorema de Pitágoras.

Sugerencia:

Calcula el área de toda la figura de dos maneras diferentes.

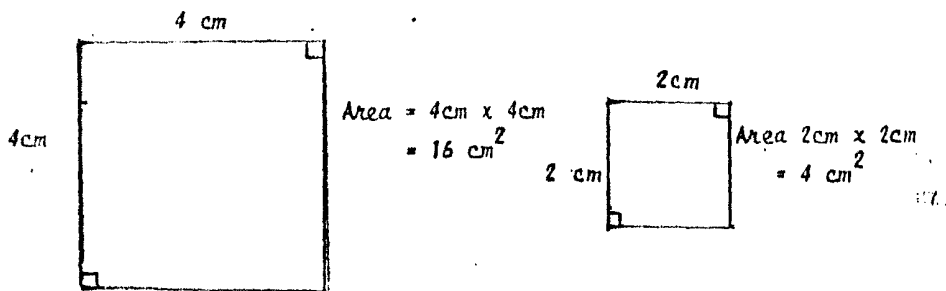
Por un lado considera el cuadrado $ACFI$ y los triángulos ABC y CEF y por el otro considera los cuadrados $ABDH$ y $DEFG$ y los triángulos AHI y IGF .

8. AREAS DE FIGURAS SEMEJANTES.

Cuando encontramos la fórmula para un cuadrado de lado l , en uno de los ejercicios planteamos lo siguiente:

Si tenemos un cuadrado de lado 2cm. y calculamos su área. ¿Qué le sucede al área del cuadrado si duplicamos la longitud de sus lados?

Lo primero que se nos podría ocurrir, tal vez, es que al duplicar la longitud de los lados del cuadrado se duplica el área. Esto es incorrecto, calculemos sus áreas.



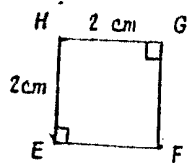
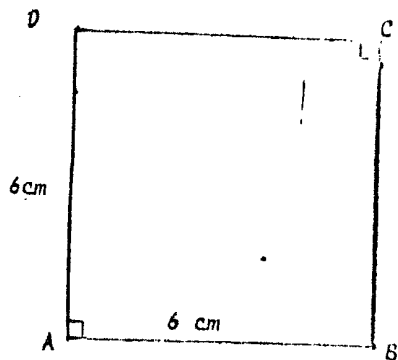
El área del cuadrado de lado 4cm es el cuádruplo del área del cuadrado de lado 2cm.

Este ejemplo nos muestra que la razón de las áreas de dos cuadrados semejantes (en este caso $4 = \frac{16}{4}$) no es igual a su razón de semejanza ($2 = \frac{4}{2}$).

¿Sucederá lo mismo para cualquier par de cuadrados? ¿Y para cualquier par de polígonos semejantes? Antes de contestar las preguntas, resolvamos los siguientes ejercicios.

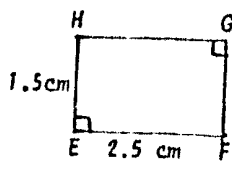
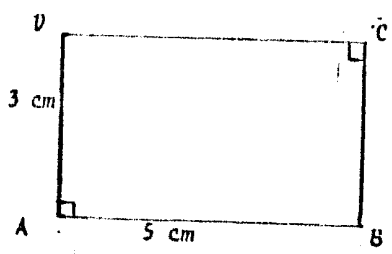
EJERCICIOS:

1. Los siguientes cuadrados son semejantes.



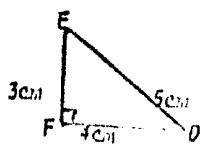
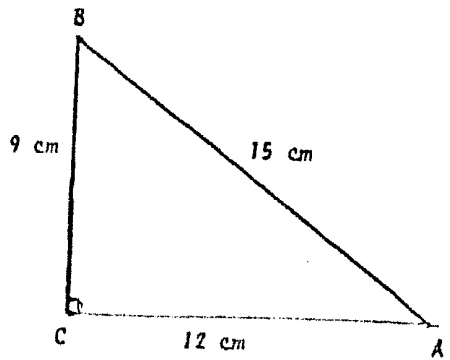
Encuentra la razón del área del cuadrado ABCD al área del cuadrado EFGH

2. Los siguientes rectángulos son semejantes



Encuentra la razón del área del rectángulo ABCD al área del rectángulo EFGH.

3. Los siguientes triángulos son semejantes.



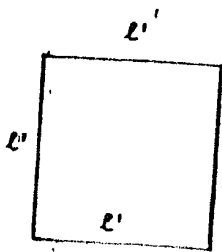
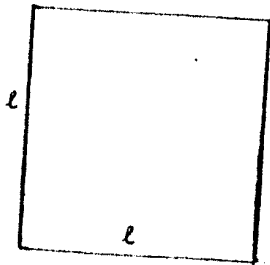
Encuentra la razón del área del triángulo ABC al área del triángulo DEF.

Observa en los ejercicios que la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza de los polígonos.

Veamos que esto es cierto para cualquier par de cuadrados.

Consideremos dos cuadrados cuyos lados miden l y l' unidades respectivamente y cuya razón de semejanza sea k , es decir:

$$\frac{l}{l'} = k$$



Las áreas de estos cuadrados serán: $A = l^2$, $A' = (l')^2$.

Como $\frac{l}{l'} = k$ se tiene que $l = k l'$

Va que $A = l^2$ y $l = k l'$, sustituyendo el valor de l en A se tiene:

$$A = (k l')^2 = k^2 (l')^2$$

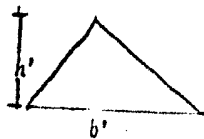
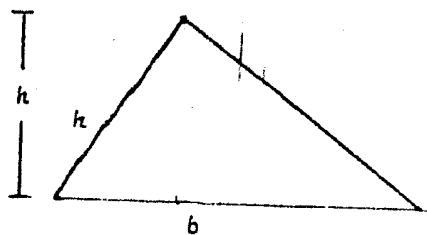
Entonces la razón entre las dos áreas es: $\frac{A}{A'} = \frac{k^2 (l')^2}{(l')^2} = k^2$

Esto es:

La razón entre las áreas de dos cuadrados cualesquiera es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Como ejercicio, se te propone que encuentres la razón entre las áreas

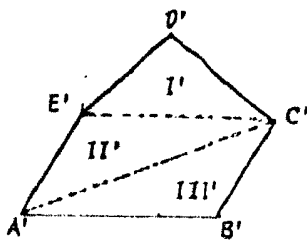
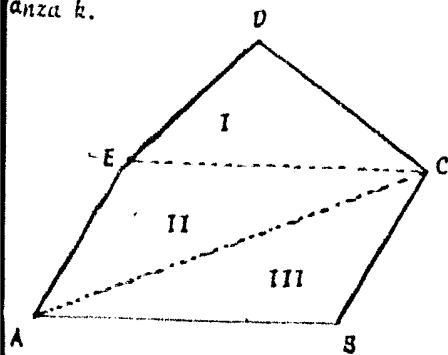
de los siguientes triángulos, cuya razón de semejanza sea $\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k$



Si hiciste el ejercicio habrás observado que la razón entre las áreas es el cuadrado de su razón de semejanza, ¡lo mismo que en los cuadrados!

Teniendo ya este resultado, fácilmente se puede encontrar la relación que hay entre las áreas de los polígonos semejantes, ya que por lo estudiado en congruencia o semejanza, estos polígonos se pueden triangular de manera que los triángulos respectivos sean semejantes y con razón de semejanza igual a k .

Por ejemplo, consideremos dos pentágonos semejantes con razón de semejanza k .



Área del pentágono ABCDE = Área del triángulo I + Área del triángulo II +
+ Área del triángulo III

Área del pentágono A'B'C'D'E' = Área del triángulo I' + Área del triángulo II' +
+ Área del triángulo III'

Si comparamos las áreas de los triángulos correspondientes, hallamos -
que:

$$\frac{\text{Area del triángulo I}}{\text{Area del triángulo I}'} = k^2 \text{ y, por lo tanto}$$

$$\text{Area del triángulo I} = k^2 \text{ Area del triángulo I}'$$

$$\frac{\text{Area del triángulo II}}{\text{Area del triángulo II}'} = k^2 \text{ y, por lo tanto}$$

$$\text{Area del triángulo II} = k^2 \text{ Area del triángulo II}'$$

$$\frac{\text{Area del triángulo III}}{\text{Area del triángulo III}'} = k^2 \text{ y, por lo tanto}$$

$$\text{Area del triángulo III} = k^2 \text{ Area del triángulo III}'$$

$$\text{Como el Area del pentágono ABCDE} = \text{Area triángulo I} + \text{Area triángulo II} + \\ + \text{Area triángulo III} =$$

$$= k^2 \text{ Area triángulo I}' + k^2 \text{ Area triángulo II}' + k^2 \text{ Area triángulo III}'$$

$$= k^2 (\text{Area triángulo I}' + \text{Area triángulo II}' + \text{Area triángulo III}')$$

$$= k^2 (\text{Area del pentágono A'B'C'D'E}')$$

Y por consiguiente:

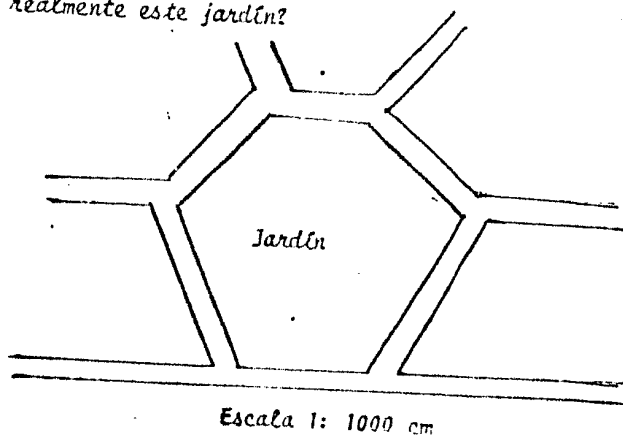
$$\frac{\text{Area del pentágono ABCD}}{\text{Area del pentágono A'B'C'D'E}'} = k^2$$

Se usa el mismo método para demostrar que:

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

EJEMPLO:

Un jardín ocupa en un plano una superficie de 16cm^2 . ¿Cuál es el área que ocupa realmente este jardín?

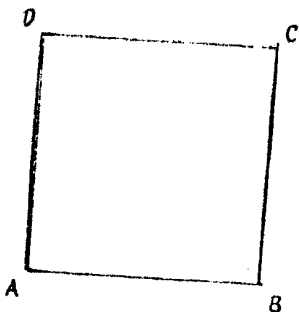


Como cada centímetro de jardín en el plano representa 1000cm (10 m) en la realidad, la razón de semejanza es 1000 . Val que la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de la semejanza, entonces el área que ocupa realmente este jardín es de $16 \times (1000)^2 \text{ cm}^2 = 16000000 \text{ cm}^2$ que convertidos a m^2 se obtienen 1600 m^2 .

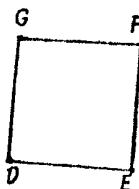
EJERCICIOS:

1. Los siguientes polígonos son semejantes, usando los datos que se dan, encuentra lo que se pide.

a)



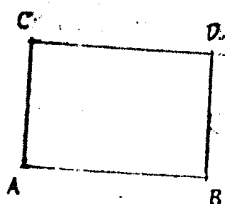
Razón de semejanza
4



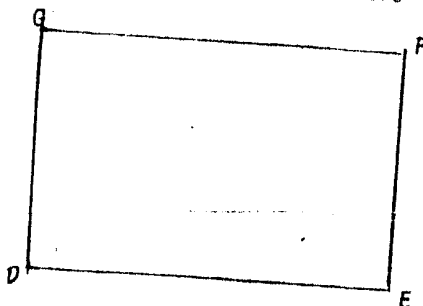
Área del cuadrado DEFG = ?

Área del cuadrado ABCE = 64 m^2

b)

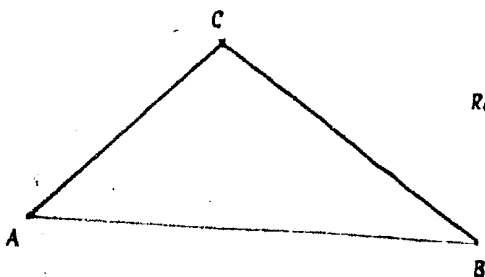


Razón de semejanza
 $1/2$



Razón entre las áreas de los rectángulos = ?

c)



Razón de semejanza
5



Área del $\Delta ABC = ?$

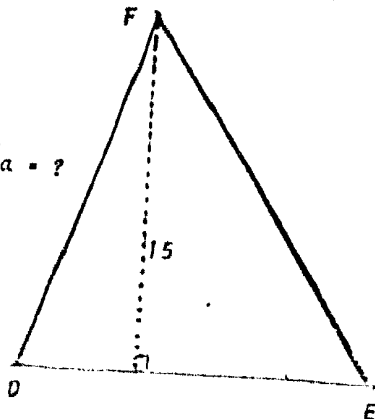
Área del $\Delta DEF = 12 \text{ cm}^2$

d)

Razón de semejanza = ?



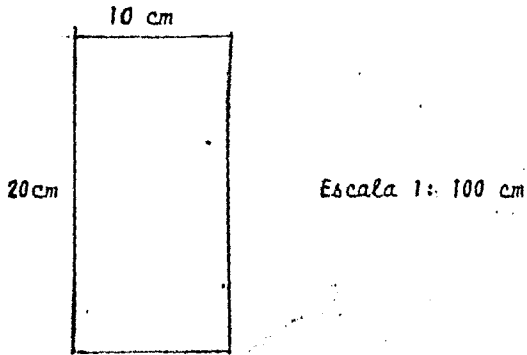
Área del $\Delta ABC = ?$



Área del $\Delta DEF = ?$

Razón de las áreas = $\frac{7}{9}$

2. El croquis de un terreno rectangular es como el que se muestra en la siguiente figura.



Calcula el área que ocupa realmente el terreno.

9. AREA DE POLIGONOS IRREGULARES.

Cuando iniciamos el estudio de congruencia de triángulos con el problema de hacer el croquis de un terreno para pagar el impuesto predial, nos encontramos que para poder hacer el croquis era necesario que se nos diera un dato adicional; una diagonal ó un ángulo, además de los cuatro lados conocidos.

Si suponemos que el croquis del terreno es como el que se observa en la figura 1, calcula el área del terreno.

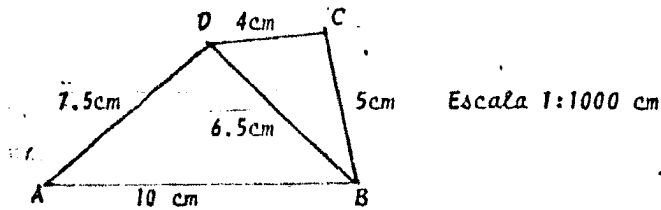


Figura 1

Para calcular el área del terreno, lo primero que haremos es calcular el área del croquis y multiplicar el resultado por el cuadrado de su razón de semejanza.

Para poder aplicar la fórmula del área del triángulo al triángulo ABD ó al triángulo DBC necesitamos conocer la base y la altura de los triángulos, por ejemplo en el triángulo ABD (figura 2) podemos considerar a AB como base pero no conocemos su altura. Para poderla determinar podemos aplicar el teorema de Pitágoras o Trigonometría. En este caso utilizaremos Trigonometría por parecernos menos laborioso.

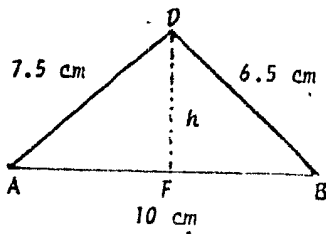


Figura 2.

Aplicando la ley de los cosenos al triángulo ABD tenemos:

$$(6.5)^2 = (7.5)^2 + 10^2 - 2(7.5)(10) \cos A$$

Despejando $\cos A$ se tiene:

$$\cos A = \frac{(7.5)^2 + 10^2 - (6.5)^2}{2(7.5)(10)} = \frac{56.25 + 100 - 42.25}{150}$$

$$= \frac{114}{150} = 0.76$$

De donde el ángulo $A = 40^\circ 32'$

Aplicando la razón $\text{sen} A$ al ángulo A del triángulo AFD se obtiene

$$\text{sen} A = \frac{h}{7.5}; h = 7.5 \text{ sen} A$$

$$h = 7.5 \text{ sen}(40^\circ 32')$$

$$= 7.5 (0.64989033)$$

$$= 7.5 (0.65) = 4.875$$

Por lo tanto el área del triángulo ABD es:

$$\frac{10 \text{ cm} (4.875 \text{ cm})}{2} = \frac{48.75}{2} \text{ cm}^2$$

$$= 24.375 \text{ cm}^2$$

Para encontrar el área del triángulo DBC se procede de la misma manera se obtiene que su área es 9.99 cm^2 . Verifica el resultado.

Sumando las áreas de los triángulos ABD y DBC se obtiene que el área del cuadrilátero ABCD es de 34.365 cm^2 .

El área del terreno es entonces $34,365 \times (1000)^2 \text{ cm}^2$, que es equivalente a 34365 m^2 ya que $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$.

En general si queremos calcular el área de un polígono irregular, lo primero que tenemos que hacer es triangularlo de manera que los triángulos no se traslapen y cubran toda la región poligonal dada (figura 3).

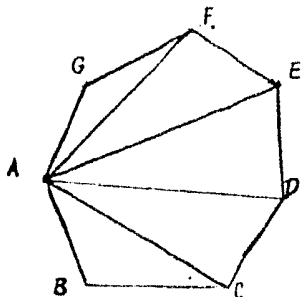
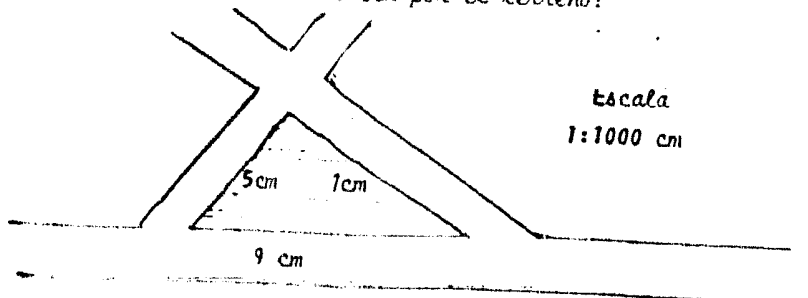


Figura 3

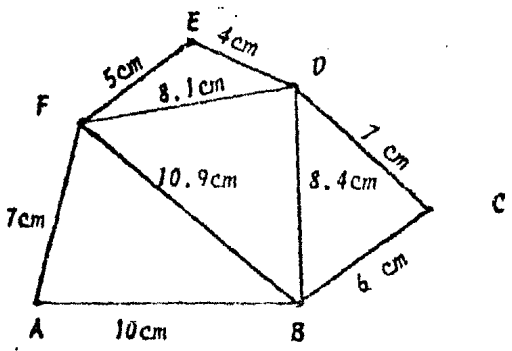
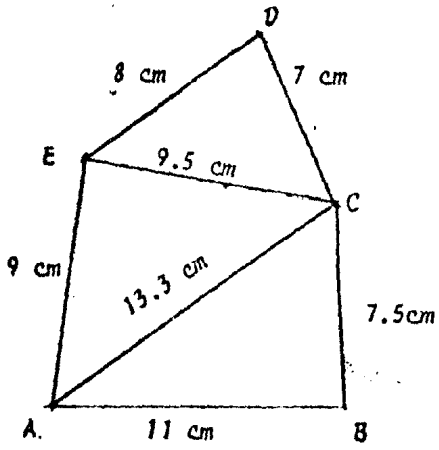
De esta manera se calculará el área de cada triángulo y al sumarlas se obtendrá el área del polígono.

EJERCICIOS:

- 1.- Una persona tiene un terreno en forma triangular, como se observa en la siguiente figura. Si desea venderlo y sabe que el m^2 está a \$10,000.00 ¿cuánto dinero recibirá por el terreno?



- 2.- Calcula el área de los siguientes polígonos:



10. AREA DEL CIRCULO.

Cuando estudiaste en el sexto año de primaria, te enseñaron a calcular la longitud de la circunferencia usando la fórmula.

$$C = \pi \cdot d,$$

donde C representa la longitud de la circunferencia, d lo que mide el diámetro y π es un número aproximadamente igual a 3.1416.

Para encontrar el valor aproximado de π se te pidió que hicieras lo siguiente:

1. Conseguir una rueda (bastidor de costura, aro, círculo de cartón, etc.), un cordón o hilo y una regla graduada.
2. Colocar el cordón alrededor de la rueda, para encontrar la longitud de la circunferencia.
3. Medir el diámetro de la rueda.
4. Dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro.

Al cociente que resulta de dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro se le conoce con el nombre de pi y se denota por la letra griega π .

Ejercicios:

- 1) Construye un círculo de cartón de radio 2 cm., mide la longitud de la circunferencia y divídela entre el diámetro.

- 2) Haz lo mismo para otros círculos de cartón de radio 3 cm, 4 cm y 10 cm respectivamente.

De los resultados que obtuviste en los ejercicios 1 y 2, te habrás dado cuenta que los cocientes que encontraste son muy parecidos, a pesar de que los círculos son de diferentes tamaños.

A continuación veremos que independientemente de la longitud del diámetro del círculo, el cociente que resulta al dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro es constante.

Consideremos dos círculos diferentes de radios r y R respectivamente, probaremos que $\frac{\ell}{2r} = \frac{L}{2R}$ donde ℓ y L son las longitudes de las circunferencias de radios r y R respectivamente (Figura 1).

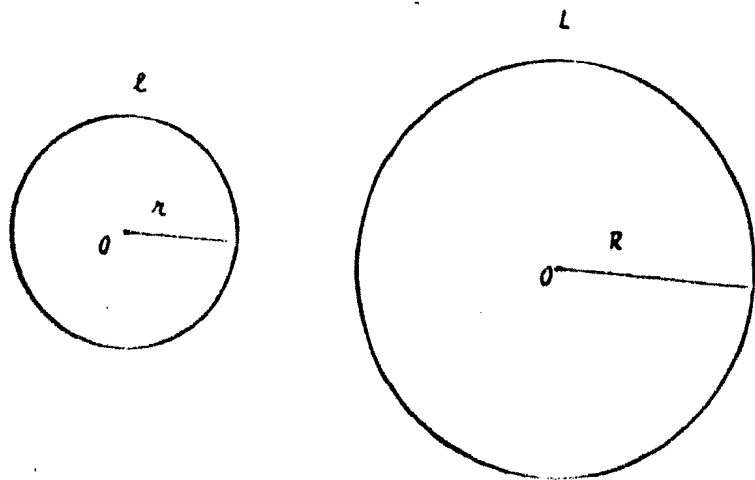


Figura 1

Inscribamos polígonos regulares de n lados a ambos círculos. (Figura 2).

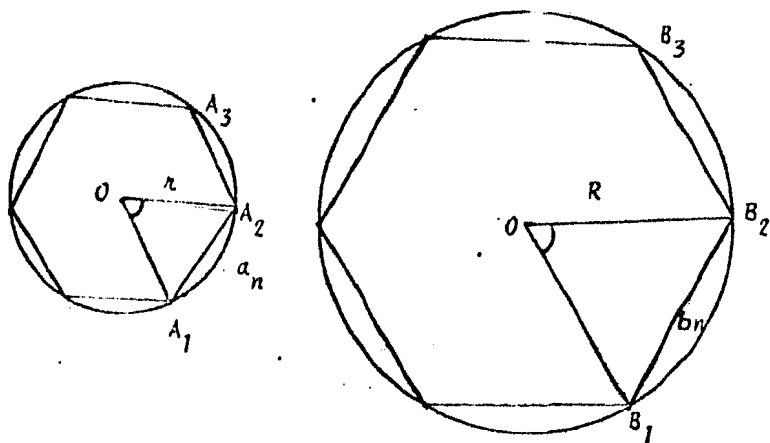


Figura 2

Supongamos que a_n es la longitud de cada uno de los lados del polígono inscrito al círculo de radio r y que b_n es la longitud de cada uno de los lados del polígono inscrito al círculo de radio R , (figura 2).

Verifica que los triángulos OA_1A_2 y OB_1B_2 son semejantes y - que por lo tanto:

$$\frac{a_n}{r} = \frac{b_n}{R} \dots \dots (1)$$

Multiplicando por n a la igualdad (1), se tiene

$$\frac{na_n}{r} = \frac{nb_n}{R}$$

De manera que, si $l_n = na_n$ y $L_n = nb_n$ son los perímetros de los polígonos, entonces:

$$\frac{l_n}{r} = \frac{L_n}{R}$$

Ahora observa los siguientes polígonos inscritos en el círculo.
(figura 3).

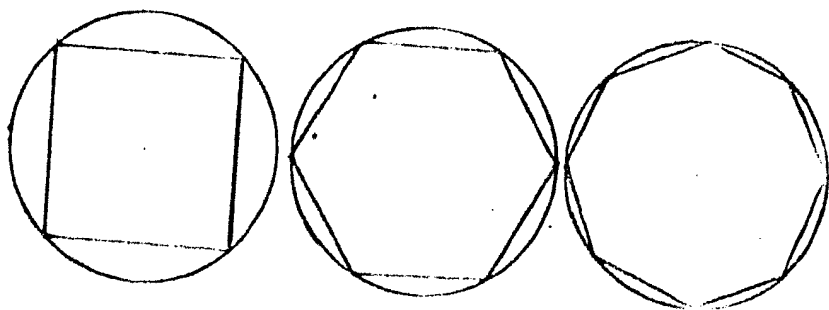


Figura 3

Fíjate que cuando aumenta el número de lados del polígono inscrito se tiene que el perímetro se acerca cada vez más a la longitud de la circunferencia.

De donde
$$\frac{l}{n} = \frac{L}{R} \dots (2)$$

Multiplicando por $1/2$ a la igualdad (2), se tiene

$$\frac{l}{2n} = \frac{L}{2R}$$

$$\frac{l}{d} = \frac{L}{D}, \text{ ya que } d = 2r \text{ y } D = 2R.$$

Esto prueba que el cociente de la longitud de la circunferencia y el diámetro es una constante: π

A partir de que $\pi = \frac{C \text{ (longitud de la circunferencia)}}{d \text{ (diámetro)}}$, se

obtiene la fórmula para la longitud de la circunferencia

$$C = \pi \cdot d ,$$

que es la que ya conocíamos .

Ejercicios.

- 1) Rafael fue comisionado para hacer los aros de los tableros de una cancha de baloncesto . Se le dijo que el radio del aro es de 20 cm. ¿Cuánto alamborón utilizará para hacer los dos aros?.
- 2) A una de las ruedas de una bicicleta se le ha colocado un cuenta-vueltas; el radio de cada rueda es de 30 cm. Si el cuenta-vueltas marca que la rueda ha dado 120 vueltas, determina los metros que ha recorrido.

De manera análoga se puede obtener la fórmula del área del círculo.

Consideremos un círculo de radio r y un polígono regular de n lados inscrito al círculo (figura 4)

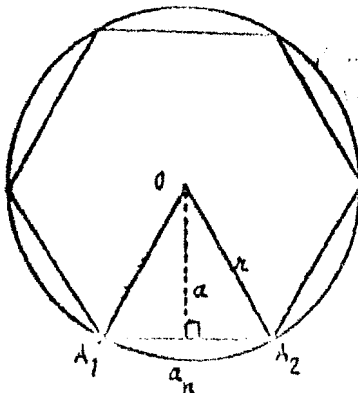


Figura 4

Si la longitud de cada uno de los lados de este polígono regular inscrito es a_n , entonces el perímetro P_n del polígono es $P_n = na_n$

y el área A_n es: $A_n = \frac{P_n \cdot a}{2}$, donde a es la altura de cada triángulo, es decir, el apotema del polígono.

Se ve que cuando el número de lados del polígono inscrito crece, el perímetro P_n del polígono se acerca al perímetro P del círculo, el apotema a del polígono al radio r del círculo y el área A_n del polígono al área A del círculo (Ve la figura 3).

Podemos entonces escribir.

$$A = \frac{P \cdot r}{2}, \text{ como } P = \pi d \text{ se obtiene}$$

$$A = \frac{\pi d \cdot r}{2} \text{ pero } d = 2r, \text{ de donde}$$

$$A = \frac{\pi (2r) \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Por último, calculemos el valor de π usando nuestros conocimientos de áreas de polígonos y trigonometría.

Para poder determinar el valor de π nos basaremos en una idea muy antigua propuesta por el sabio griego Antifón alrededor del año 430 a. de C y desarrollado subsecuentemente por el matemático griego Eudoxio. A este método se le conoce como el "método de exhaustión".

Cuando se aplica a un círculo de radio r , el método de exhaustión de Eudoxio consiste en aproximar el área del círculo por una sucesión de polígonos inscritos o circunscritos que dan cada vez una mejor aproximación.

Empezaremos calculando el área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio r . (figura 5).

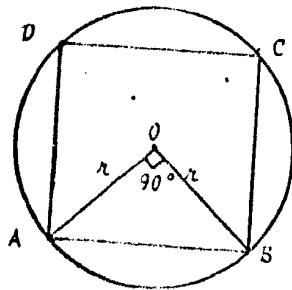


Figura 5

El cuadrado inscrito puede ser dividido en cuatro triángulos congruentes, luego el área del cuadrado es la suma de las áreas de los triángulos.

Calculemos primero el área del triángulo ABO (figura 5).

El triángulo ABO es rectángulo e isósceles, de donde su área es $\frac{r^2}{2}$; el área del cuadrado ABCD es entonces $4 \left(\frac{r^2}{2} \right) = 2r^2$.

Otra forma de hacerlo es calculando primero la base y la altura del triángulo ABO usando trigonometría (figura 6).

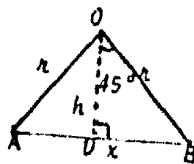


Figura 6

Aplicando las razones seno y coseno al ángulo de 45° del triángulo OOB , se obtiene

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{x}{r} : x = r \text{ sen } 45^\circ = r (1/\sqrt{2})$$

$$\text{Luego } AB = 2r (1/\sqrt{2})$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{h}{r} : h = r \text{ cos } 45^\circ = r (1/\sqrt{2}).$$

El área del triángulo ABO es :

$$\frac{2r (1/\sqrt{2}) (1/\sqrt{2}) r}{2} = r^2/2$$

El área del cuadrado $ABCD$ es entonces $4(r^2/2) = 2r^2$.

Ahora calculemos el área de un cuadrado circunscrito en un círculo de radio r (figura 7).

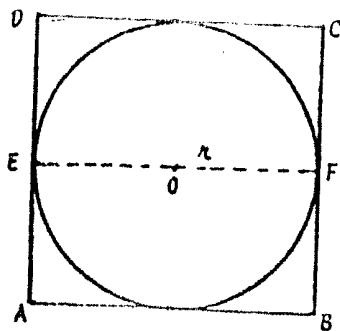
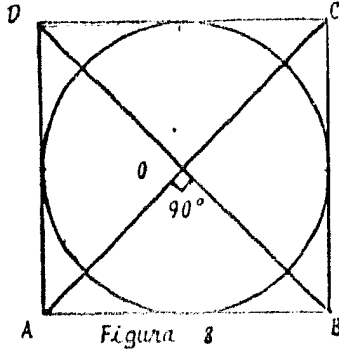


Figura 7

Como el diámetro EF es igual al lado AB o DC , el lado del cuadrado es $2r$, luego el área del cuadrado $ABCD$ es $(2r)^2 = 4r^2$.

Otra forma de calcular el área del cuadrado circunscrito es la siguiente:

El cuadrado circunscrito puede ser dividido en cuatro triángulos congruentes (figura 8). El área del cuadrado es la suma de las áreas de los triángulos.



Calculemos el área del triángulo ABO (figura 9);

Aplicando la razón tangente al ángulo de 45° del triángulo ODB (figura 9).

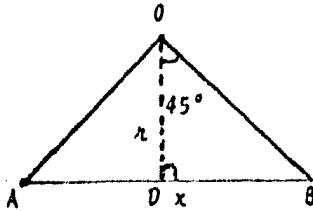


figura 9

Se obtiene, $\tan 45^\circ = \frac{x}{r}$; $x = r \tan 45^\circ = r$,

luego $AB = 2r$

El área del triángulo ABO es:

$$\frac{2r(r)}{2} = r^2$$

El área del cuadrado ABCD es entonces $4r^2$

Como:

Área del cuadrado inscrito < Área del círculo < Área del cuadrado circunscrito

$$2r^2 < \pi r^2 < 4r^2$$

$$2 < \pi < 4$$

Para poder obtener una mejor aproximación de π , hagámoslo ahora para un octágono regular.

Empecemos calculando el área de un octágono regular inscrito en un círculo de radio r (figura 10).

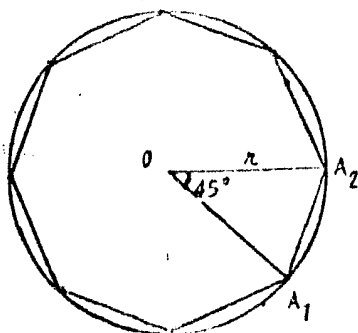


figura 10

El octágono inscrito puede ser dividido en ocho triángulos congruentes. El área del octágono es la suma de las áreas de los triángulos.

Calculemos el área del triángulo A_1A_2O (figura 11)

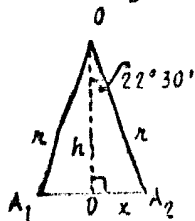


Figura 11

Aplicando las razones seno y coseno al ángulo de $22^{\circ}30'$ del triángulo OOA_2 , se obtiene.

$$\text{Sen}(22^{\circ}30') = \frac{x}{r} ; x = r \text{ sen } (22^{\circ}30')$$

$$= r (0.38268343)$$

$$\text{luego } A_1A_2 = 2r (0.38268343)$$

$$\text{cos } (22^{\circ}30') = \frac{h}{r} ; h = r \text{ cos } (22^{\circ}30')$$

$$= r (0.92387953)$$

El área del triángulo A_1A_2O es:

$$\frac{2r (0.38268343) (0.92387953) r}{2} = 0.353553387 r^2$$

El área del octágono regular inscrito es:

$$8(0.353553387) r^2 = 2.828427096 r^2$$

Ahora calculemos el área de un octágono regular circunscrito en un círculo de radio r (figura 12).

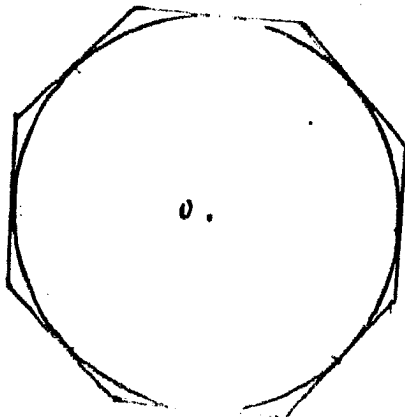


Figura 12

El octágono regular circunscrito puede ser dividido en ocho triángulos congruentes (figura 13). El área del octágono regular es la suma de las áreas de los triángulos.

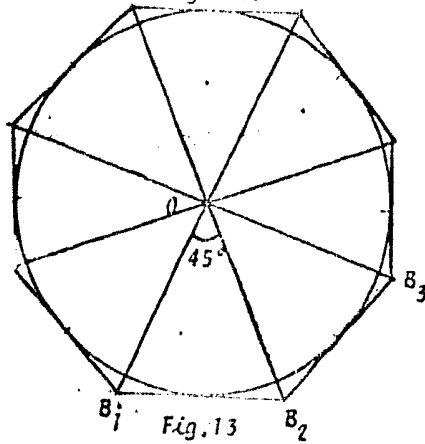


Fig. 13

Calculemos el área del triángulo $B_1 B_2 O$ (figura 14).

Aplicando la razón tangente al ángulo de $22^\circ 30'$ del triángulo OB_2O (figura 14)

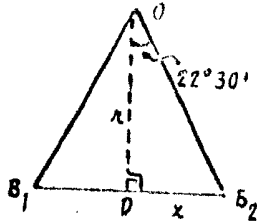


Figura 14

$$\begin{aligned} \tan (22^\circ 30') &= \frac{x}{r}; \quad x = r \tan (22^\circ 30') \\ &= r (0.41421356) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } B_1 B_2 = 2r (0.41421356)$$

El área del triángulo $B_1 B_2 O$ es:

$$\frac{2r(0.41421356)(r)}{2} = 0.41421356 r^2$$

El área del octágono regular circunscrito es entonces

$$8(0.41421356) r^2 = 3.31370848 r^2$$

como,

Área del octágono regular inscrito < área del círculo < área del octágono regular circunscrito.

$$2.828427096 r^2 < \pi r^2 < 3.31370848 r^2$$

$$2.828427096 < \pi < 3.31370848$$

que resulta ser una mejor aproximación que la obtenida para el caso del cuadrado.

Nota: Observa que cuando aumenta el número de lados del polígono regular inscrito o circunscrito, cada vez se va obteniendo una mejor aproximación, de π .

Se cuenta que Arquímedes comenzó con un hexágono y duplicando el número de lados llegó hasta los polígonos de 96 lados con los cuales consiguió la aproximación.

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

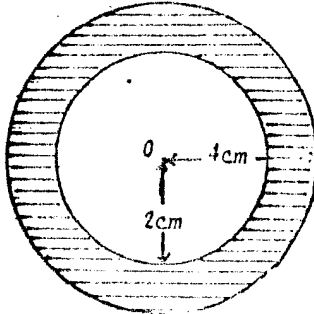
que en notación decimal es:

$$3.14084507 < \pi < 3.142857143$$

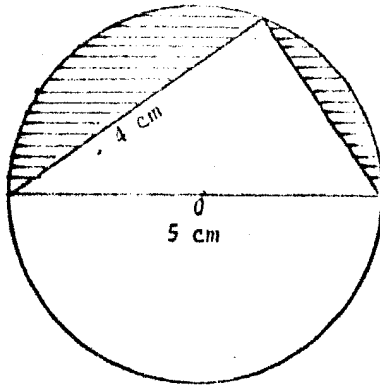
Ejercicios:

- 1) Calcula el área de un círculo de radio 7 cm, considera que $\pi = 3.1416$.
- 2) Encuentra el área de un círculo de diámetro 4 cm.

- 3) Encuentra el área de un círculo cuya circunferencia es de 24 cm.
- 4) Encuentra el área de la región sombreada.



- 5) Encuentra el área de la región sombreada.



- 6) Calcula la aproximación de π utilizando polígonos regulares inscritos y circunscritos.

a) 6 lados

b) 10 lados

11. AREA DE REGIONES IRREGULARES.

Hasta el momento hemos encontrado fórmulas para calcular el área de polígonos regulares o irregulares. Sin embargo, ¿cómo podremos encontrar el área de regiones que tengan bordes no rectos?

El problema de la hoja.

En un grupo de biología, el profesor dejó como tarea determinar el área de una hoja, como la que se observa en la figura 1.

Si te propusieran este problema, ¿cómo lo harías?

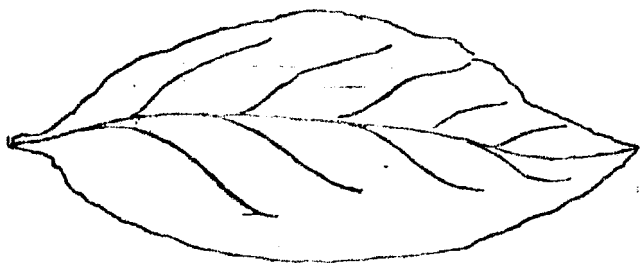


Figura 1

Encontrar el área de esta hoja con las fórmulas hasta ahora desarrolladas no es fácil, ya que ninguna se puede utilizar directamente. Sin embargo la podemos encontrar de una manera aproximada empleando el método visto en la parte de unidad de medida.

Consideremos un cuadrado unitario de lado un centímetro y veamos cuántas veces cabe este cuadrado en la hoja (figura 2).

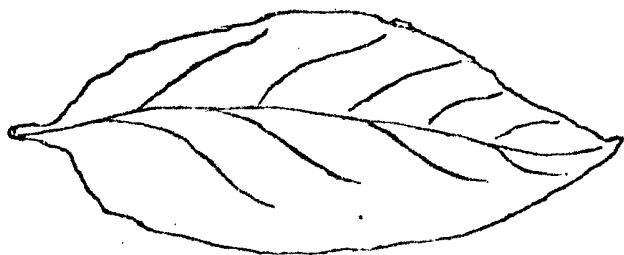


Figura 2

Si superponemos una cuadrícula a la hoja, algunos de los cuadrados quedan completamente en el interior de la hoja, otros parcialmente y otros afuera (figura 3).

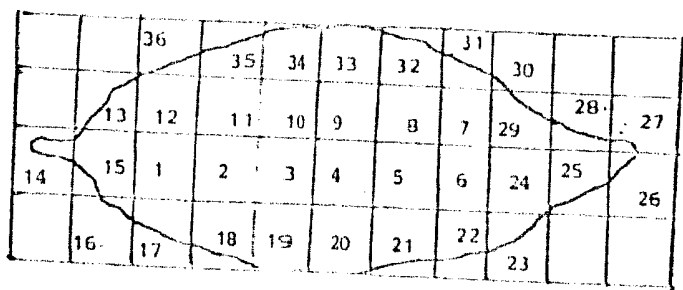


Figura 3

Si contamos los cuadrados de la cuadrícula que están contenidos en la hoja y contamos también los que intersectan a la hoja podemos decir que el área de la hoja es mayor que 12 cm^2 y menor que 36 cm^2 , es decir,

$$12 \text{ cm}^2 < \text{área de la hoja} < 36 \text{ cm}^2.$$

En este primer intento observamos que la aproximación encontrada no es muy buena. Para encontrar una mejor aproximación, podemos usar una cuadrícula más pequeña, por ejemplo que cada lado del cuadrado sea $1/2 \text{ cm}$. En esta los rectas están separadas $1/2 \text{ cm}$ y cada cuadrado tiene un área de

$$(1/2 \text{ cm}) (1/2 \text{ cm}) = 1/4 \text{ cm}^2 \text{ (figura 4).}$$

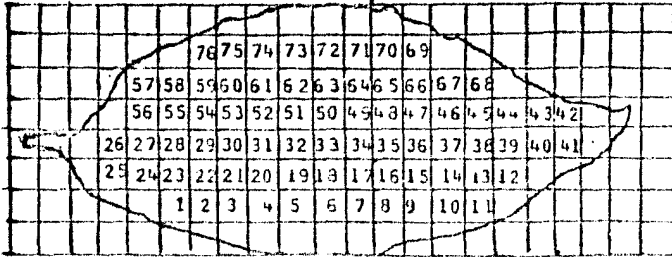


Figura 4

Empleando esta nueva cuadrícula encontramos 76 cuadrados en el interior de la hoja y 47 cuadrados contenidos parcialmente, luego el área de la hoja está entre 19cm^2 y 30.75cm^2 , es decir,

$$19\text{cm}^2 < \text{área de la hoja} < 30.75\text{cm}^2.$$

Una buena aproximación se puede obtener calculando el promedio de las dos o sea: $\frac{19\text{cm}^2 + 30.75\text{cm}^2}{2} = 24.875\text{cm}^2$.

Si deseáramos calcular el área con mayor aproximación, debemos usar una cuadrícula cuyos cuadrados sean más pequeños, por ejemplo que cada lado sea de $1/4\text{cm}$.

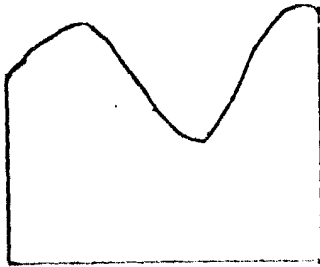
Repetiendo este procedimiento una y otra vez nos vamos acercando más y más al área de la hoja, o lo que es lo mismo, obtenemos cada vez aproximaciones mejores.

En la práctica sólo damos unos cuantos pasos, los que el problema real requiera o permita.

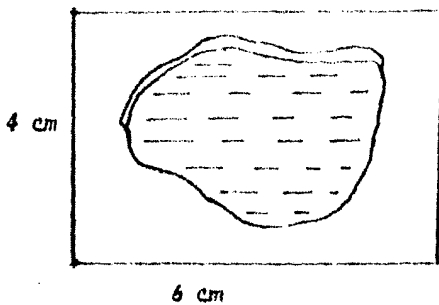
EJERCICIOS:

- 1.- Dibuja un triángulo rectángulo isósceles con lados iguales de 3 cm. Primero aproxima su área empleando cuadrículas de 1 cm y de $1/2\text{cm}$ después compara la aproximación obtenida con su área.

- 2.- Traza una circunferencia de radio 4cm. Aproxima su área empleando una cuadrícula de un cm.; y una cuadrícula de 1/2 cm. Sabemos que el área es 16π . ¿Qué valor obtuviste para π ?
- 3.- Recoge una hoja y dibújala sobre una hoja de papel. Aproxima su área, primero empleando una cuadrícula de un cm; y de 1/2 cm después.
- 4.- Calcula el área aproximadamente de la siguiente figura.



- 5.- Calcula el área de una piscina, suponiendo que está llena de agua, como se observa en el siguiente croquis.



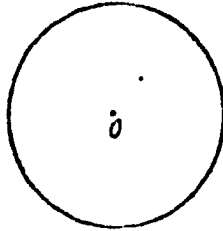
Escala 1: 100 cm

UNIDAD VIII.

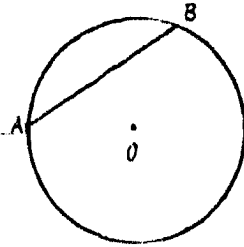
La circunferencia.

1. RADIO PERPENDICULAR A UNA CUERDA

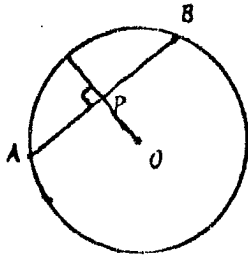
Dibuja una circunferencia con centro en O .



Traza una cuerda AB



Traza una recta que pase por el centro O y sea perpendicular a AB.



Llamémosle P al punto de intersección de la cuerda AB con el radio perpendicular a ella.

¿Cómo son los segmentos AP y PB ? Médelos.

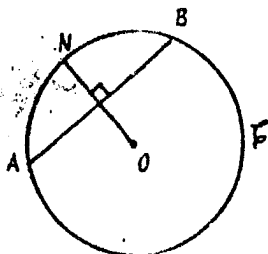
Repite los pasos anteriores para otra circunferencia y otra cuerda.

Enuncia una proposición que creas que se cumple con respecto a una cuerda y el radio perpendicular a ella.

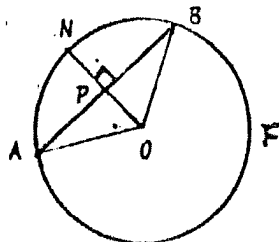
Proposición:

El radio perpendicular a una cuerda la corta en el punto medio.

Demostración.



1. Sea Γ un círculo con centro en O .
2. Sea AB una cuerda y ON el radio perpendicular a ella.
3. Traza los segmentos AO y BO .

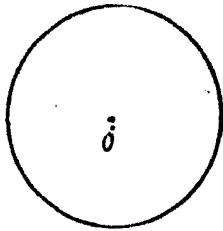


4. Sea P el punto de intersección de AB y ON .
5. Los triángulos APQ y BPO son rectángulos por ser ON perpendicular a AB .
6. $AO=OB$ por ser radios de la misma circunferencia.
7. $PQ=PO$ por ser cateto común.
8. $\triangle APO \cong \triangle BPO$ por ser rectángulos y tener iguales la hipotenusa y un cateto.

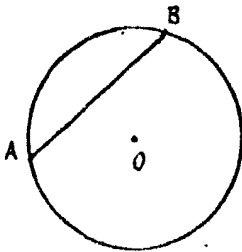
Por lo tanto $AP=PB$ y P es el punto medio de la cuerda AB .

2. PUNTO MEDIO DE UNA CUERDA

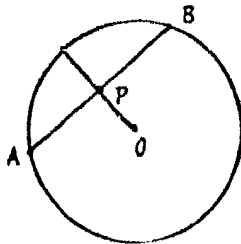
Dibuja una circunferencia con centro en O .



Traza una cuerda AB .



Traza un radio que pase por P el punto medio de AB .



¿Cómo son los ángulos $AP O$ y OPB ? Mídelos.

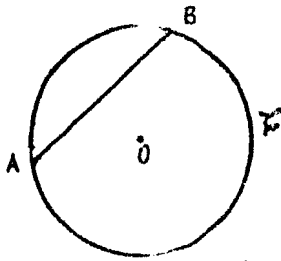
Repite los pasos anteriores para otra circunferencia y otra cuerda.

Enuncia una proposición que creas que se cumpla con respecto a una cuerda y el radio que pasa por el punto medio de la cuerda.

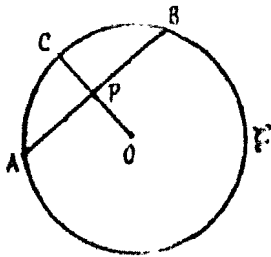
Proposición.

Si un radio de una circunferencia pasa por el punto medio de una cuerda entonces el radio y la cuerda son perpendiculares.

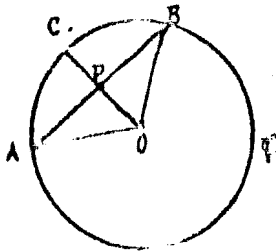
Demostración:



1. Sea \mathbb{P} un círculo con centro en O y AB una cuerda.
2. Sea P el punto medio de AB y OC el radio que pasa por P .



3. Traza los segmentos AO y BO .



4. $AO = BO$ por ser radios de la misma circunferencia.

5. $AP = PB$ por ser P punto medio de AB .

6. $PO = PO$ por ser común a los triángulos APQ y BPO .

7. $\triangle APQ \cong \triangle BPO$ por tener sus tres lados iguales (LLL), por tanto $\angle APQ = \angle OPB$ y AB es perpendicular a OC .

3. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS DADOS.

Dados dos puntos traza una circunferencia que pase por ellos.

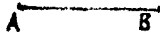


1a. Solución.

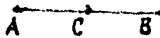
Sean A y B los puntos dados.



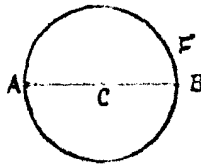
Traza el segmento AB.



Considera el punto medio C de AB



Con centro en C y radio CB traza la circunferencia \mathcal{F} , quedando resuelto el problema.

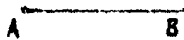


2a. Solución.

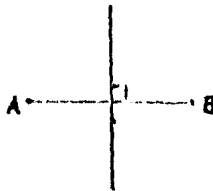
Sean A y B los puntos dados



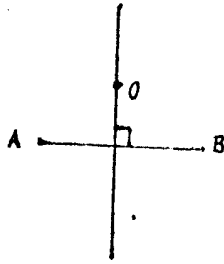
Traza el segmento AB.



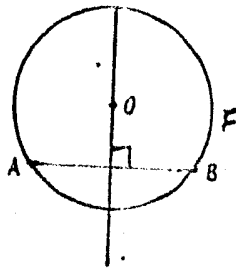
Traza la mediatriz del segmento AB.



Sea O un punto cualquiera sobre la mediatriz.



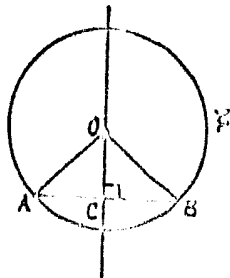
Con centro en O y radio OA traza la circunferencia \mathcal{F} .



Se afirma que \mathcal{F} pasa por los puntos dados A y B .

Demostración:

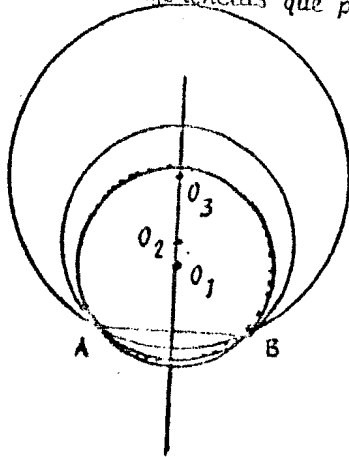
1. Traza los segmentos AO y OB en la figura anterior.



2. Sea C el punto donde se intersectan el segmento AB y la mediatriz.
3. $AC=CB$ por ser OC mediatriz de AB .
4. $\angle ACO = \angle BCO$ por ser rectas.
5. $OC=OC$ por ser común.
6. $\triangle ACO \cong \triangle OCB$ por el criterio LAL, por tanto.
 $AO=OB$, luego entonces la circunferencia \mathcal{C} con centro en O pasa por A y B .

Nota:

Observa que esta construcción es válida para cualquier punto sobre la mediatriz del segmento AB , por lo tanto se puede trazar un número infinito de circunferencias que pasan por A y B .



4. CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS NO COLINEALES

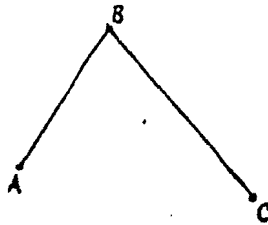
Dados tres puntos no-colineales traza una circunferencia que los contenga.

B

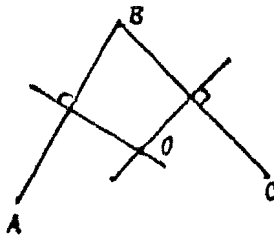
A C

Sean A, B y C los puntos no-colineales dados.

Traza los segmentos AB y BC

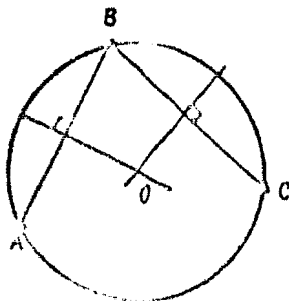


Traza las mediatrices de los segmentos AB y BC.



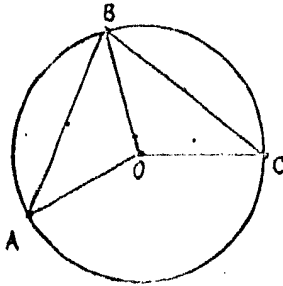
Sea O el punto de intersección de las mediatrices.

Con centro en O y radio OA construye la circunferencia.



Se afirma que la circunferencia anterior pasa por los puntos A, B y C.

Demostración:



1. $AO = BO$ Por estar O en la mediatriz del segmento AB.

(problema anterior) .

2. $BO = CO$ Por estar O en la mediatriz del segmento BC.

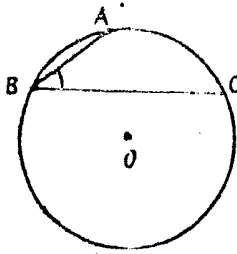
Por consiguiente $AO = BO = CO$

Luego, la circunferencia con centro en O y radio AO pasa por los puntos -

A, B y C.

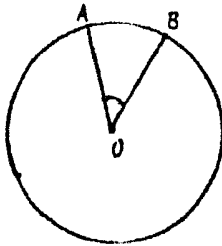
5. ANGULO INSCRITO Y ANGULO CENTRAL.

a) Un ángulo está inscrito en una circunferencia si su vértice está en la circunferencia y cada uno de sus lados intersecta a la circunferencia en un punto distinto del vértice.



$\angle ABC$ es un ángulo inscrito.

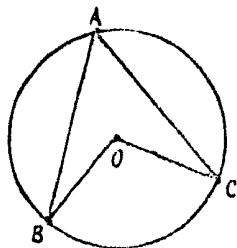
b) Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de ella.



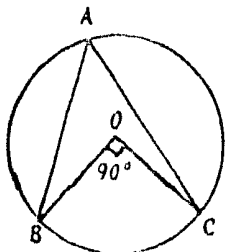
$\angle AOB$ es un ángulo central.

Ejercicios

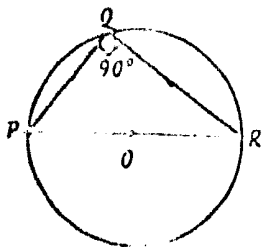
i) En la siguiente figura mide el ángulo central BOC y el ángulo inscrito BAC.



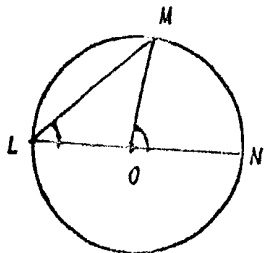
- i) En la siguiente figura, si el ángulo central BOC es de 90°
¿Cuánto mide el ángulo inscrito BAC?



- iii) Si en la siguiente figura el ángulo inscrito PQR es de 90° , ¿Cuánto mide el ángulo central POR?



- v) En la siguiente figura mide el ángulo central MON y el ángulo inscrito MLN .



Enuncia una proposición que creas que se cumple con respecto a las medidas de los ángulos inscritos en comparación con la de los ángulos centrales respectivos.

Proposición:

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la del ángulo central, cuando abarcan el mismo arco.

demostración.

- Simboliza al ángulo inscrito como "x" y al ángulo central como "y" (figura 1).

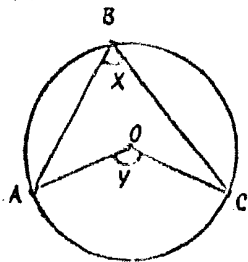


Figura 1

Trazar los segmentos BO y AC . (figura 2).

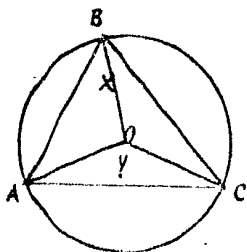


Figura 2

3. Los triángulos AOB , BOC y AOC son isósceles, ¿podrías decir por qué?
4. $\angle BAO = \angle OBA$, $\angle OBC = \angle OCB$ y $\angle OAC = \angle ACO$ (figura 3).

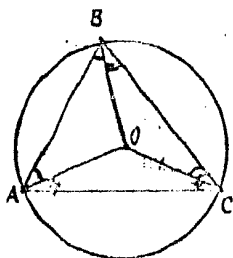


Figura 3.

5. Simboliza a los ángulos iguales del $\triangle AOB$ como "a", a los ángulos iguales del $\triangle BOC$ como "b" y a los del $\triangle AOC$ como "c". (figura 4).

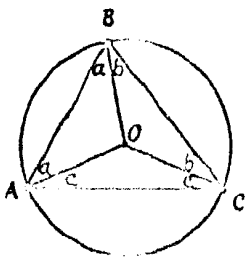


Figura 4

6. Ya que $\angle a + \angle a + \angle b + \angle b + \angle c + \angle c = 180^\circ$, por ser la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC y que

$\angle X = \angle a + \angle b$ (figura 1 y 4), se obtiene

$$2(\angle X + \angle c) = 180^\circ \dots \dots (1)$$

7. Además $\angle y + \angle c + \angle c = 180^\circ \dots \dots (2)$

8. Igualando (1) y (2), se tiene que:

$$2(\angle X + \angle c) = \angle y + 2(\angle c)$$

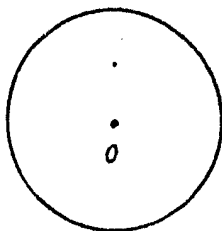
$$2(\angle X) = \angle y$$

$$\angle X = \frac{\angle y}{2}$$

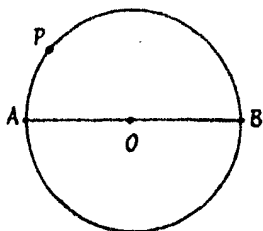
Quedando demostrado lo que se quería.

6. ANGULO OPUESTO AL DIAMETRO

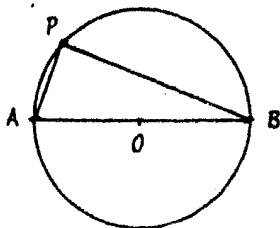
Dibuja una circunferencia con centro en O .



Traza un diámetro AB de la circunferencia y considera un punto P sobre ella, diferente de los extremos del diámetro.

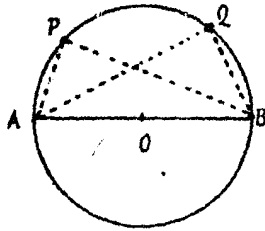


Forma el $\triangle APB$.



Mide el $\angle APB$

Considera otros puntos sobre la circunferencia, diferentes de A , B y P .



Forma el $\triangle AQB$ y mide el $\angle AQB$.

Enuncia una proposición que creas que se cumple con respecto al ángulo -- inscrito que abarca un diámetro.

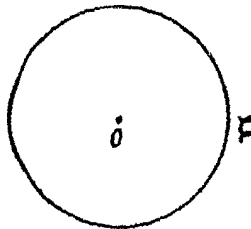
¿Cómo podremos saber que se cumple la proposición anterior para cualquier circunferencia?

Proposición:

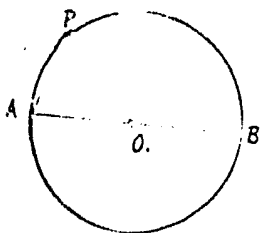
Dado un punto sobre la circunferencia, el ángulo inscrito con vértice en el punto dado, que abarca un diámetro, es de 90° .

Demostración.

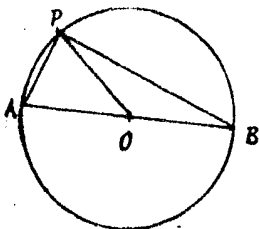
1. Sea F un círculo con centro en O .



2. Sea AB un diámetro y P un punto sobre ella diferente de A y B .



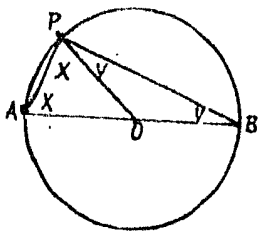
3. Forma los triángulos APO y POB.



4. Los triángulos APO y POB son isósceles. ¿Podrías decir por qué?

5. $\angle PAO = \angle OPA$ y $\angle OPB = \angle OBP$. ¿Podrías decir por qué?

6. Simboliza los ángulos iguales del $\triangle APO$ como "x" y a los ángulos - - iguales del $\triangle POB$ como "y".



7. $\angle x + \angle x + \angle y + \angle y = 180^\circ$, utilizando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180° .

8. Como el $\angle APB = \angle X + \angle Y$ se tiene de (7) que

$$\angle APB + \angle APB = 180^\circ$$

$$2(\angle APB) = 180^\circ \text{ por lo tanto}$$

$$\angle APB = 90^\circ,$$

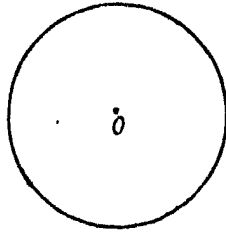
quedando demostrado lo que se quería.

LA TANGENTE

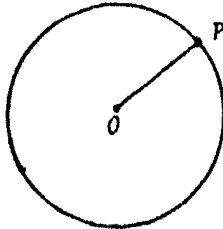
Construye la recta tangente a una circunferencia dada, en un punto da
de esta.

Una tangente a una circunferencia es una recta que toca a la cir-
cunferencia en un solo punto.

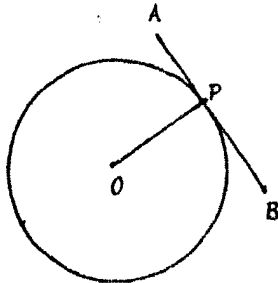
Dibuja una circunferencia en centro en O .



Considera un punto P sobre la circunferencia y traza el radio OP .



Por el punto P traza una recta AB perpendicular a OP .

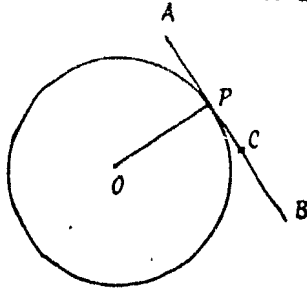


es la tangente buscada.

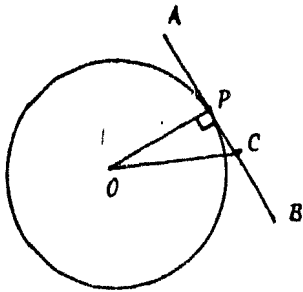
onstración.

mos demostrar que la recta trazada solamente toca al punto P de la --
unferencia.

Sea C un punto cualquiera en la recta distinto de P .



traza el segmento OC



El $\triangle OPC$ es rectángulo, ya que OP es perpendicular a AB .

OC es la hipotenusa por oponerse al ángulo recto.

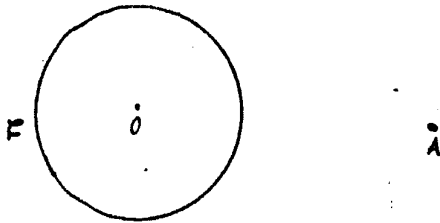
OC es mayor que OP ya que la hipotenusa es siempre mayor que cualquiera
los catetos.

Como OP es el radio de la circunferencia y $OC > OP$, C no
está en la circunferencia. Como C es un punto arbitrario
sobre la recta AB , P es el único punto que está en la recta
y en la circunferencia.

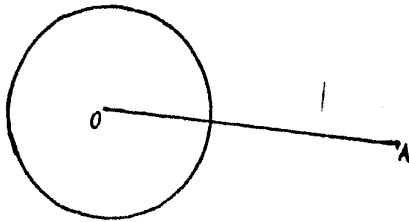
8. TANGENTES A LA CIRCUNFERENCIA DESDE UN PUNTO FUERA DE ELLA.

Desde un punto exterior a una circunferencia dada, construye las tan gentes a esa circunferencia.

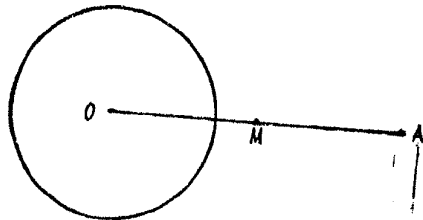
Sea F la circunferencia con centro en O , y A un punto exte-
rior a ella.



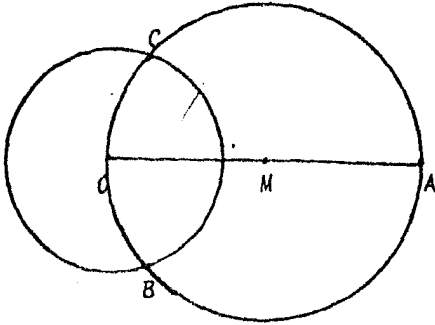
Traza el segmento OA .



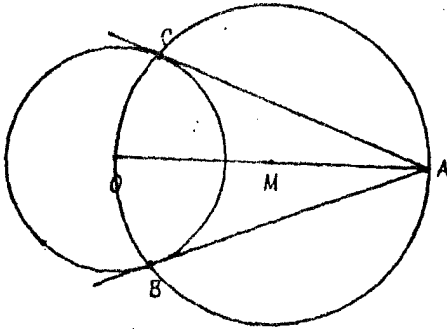
Encuentra el punto medio M de OA .



Con centro en M y radio MO traza una circunferencia que intersecte a la circunferencia dada en B y C . Esta pasa por A .

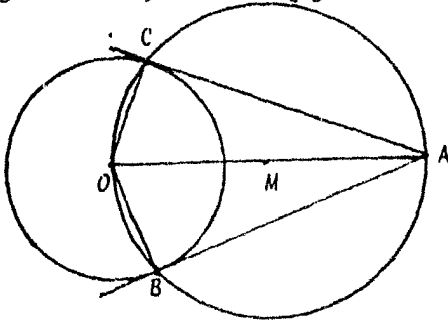


Las rectas BA y CA son las tangentes pedidas.



Demostración.

1. Traza los segmentos OC y OB de la figura anterior.

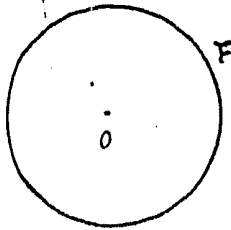


2. Los ángulos $\angle UCA$ y $\angle OBA$ son rectos por ser inscritos opuestos a un diámetro.

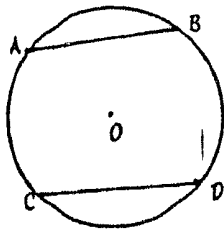
3. AB es perpendicular al radio OB y AC es perpendicular al radio OC por lo tanto AB y AC son las tangentes pedidas.

EJERCICIOS

1. Dibuja una circunferencia F .



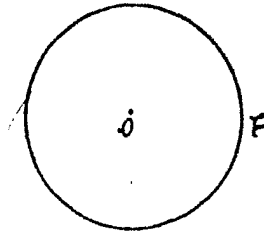
Demuestra que dos cuerdas de la misma longitud están a la misma distancia del centro. (Ve el ejercicio 6 de la página 5 - 10).



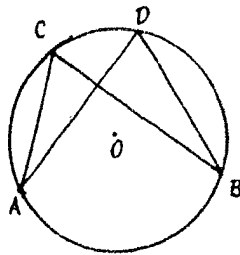
Sugerencias:

- Traza por el centro O perpendiculares a las cuerdas y llama M y N a los puntos determinados en AB y CD respectivamente.
- Forma los triángulos AOM y CNO y demuestra que son congruentes.

2. Dibuja una circunferencia Γ .



Considera dos o más ángulos inscritos que abarquen al mismo arco.

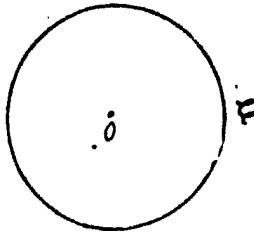


Demuestra que todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarquen el mismo arco son iguales. Por ejemplo en la figura anterior, demuestra que el $\angle ACB = \angle ADB$ por abarcar el mismo arco AB.

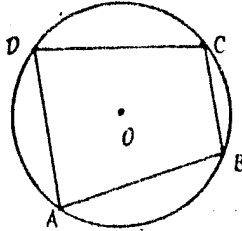
Sugerencias:

- a) Traza los segmentos OA y OB.
- b) Utiliza la relación del ángulo inscrito con respecto al ángulo central

3. Dibuja una circunferencia Γ .



Traza un cuadrilátero que tenga sus vértices sobre la circunferencia.



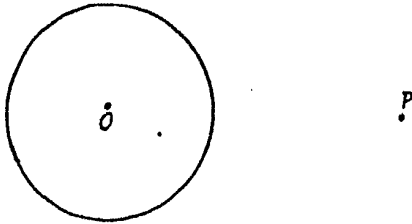
Demuestra que la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito* en una circunferencia es de 180° , es decir, demuestra que el $\angle A + \angle C = 180^\circ$ y $\angle D + \angle B = 180^\circ$.

Sugerencias:

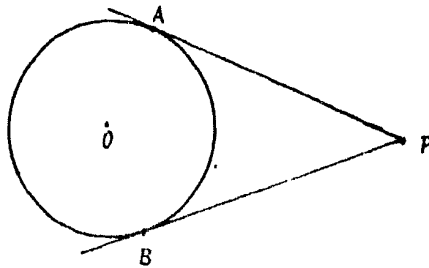
- Traza los segmentos OD y OB.
- Utiliza la relación del ángulo inscrito con respecto al ángulo central.

*Un polígono está inscrito en una circunferencia cuando todos sus lados son cuerdas de la circunferencia.

4. Dibuja una circunferencia y considera un punto fuera de ella.



Traza las rectas que son tangentes a la circunferencia y que pasan por el punto dado P .

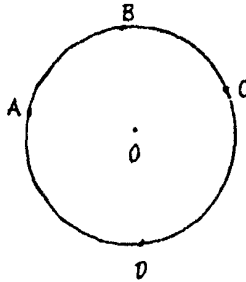


Demuestra que si desde un punto fuera de una circunferencia se trazan dos tangentes a ella entonces las distancias del punto dado a los puntos de tangencia son iguales.

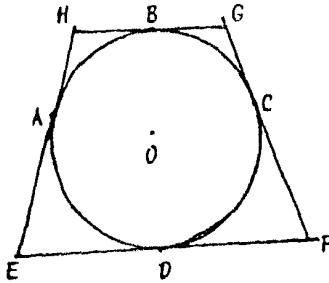
Sugerencias:

- Trazan los radios OA y OB y la recta OP .
- Demuestra que los triángulos OAP y OBP son congruentes.

3. Dibuja una circunferencia y considera cuatro puntos sobre ella.



Traza rectas tangentes a la circunferencia en los puntos dados y llama E, F, G y H a las intersecciones de las tangentes.



Demuestra que la suma de los lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia son iguales, es decir, que:

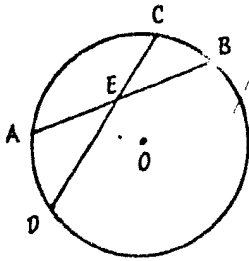
$$EF + GH = HE + FG.$$

Se dice que un polígono está circunscrito a una circunferencia cuando to dos sus lados son tangentes a la circunferencia.

Supercencias:

- a) Utiliza el resultado del ejercicio anterior para los puntos E, F, G y H
- b) Suma las igualdades.

6. Dibuja una circunferencia y traza dos cuerdas que se intersecten.



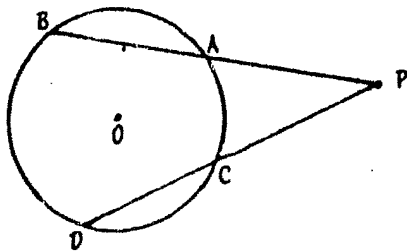
Demuestra que $AE \cdot EB = DE \cdot EC$.

Sugerencias:

a) Traza los segmentos AC y BD.

b) Demuestra que los triángulos AEC y DEB son semejantes.

7. Dibuja una circunferencia y traza dos secantes* desde un punto dado exterior a ella.



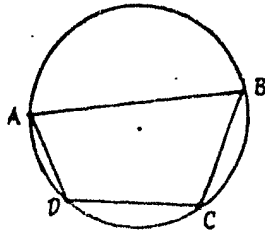
*Una recta que corta a una circunferencia en dos puntos se llama secante.
Demuestra que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Sugerencias:

a) Traza los segmentos AD y BC.

b) Demuestra que los triángulos PCB y PAD son semejantes.

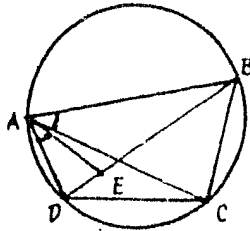
8. Dibuja una circunferencia e inscribe un cuadrilátero.



Traza las diagonales AC y BD y demuestra que $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Sugerencias:

a) Traza el segmento AE de tal manera que $\angle DAE = \angle CAB$.

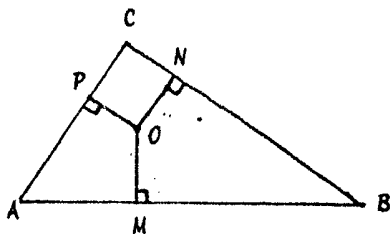


b) Demuestra que los triángulos DAE y CAB son semejantes y encuentra la igualdad $AD \cdot BC = ED \cdot AC$. (1)

c) Demuestra que los triángulos ADC y AEB son semejantes y encuentra la igualdad $AB \cdot CD = BE \cdot AC$. (2)

d) Suma las igualdades (1) y (2) y utiliza el hecho de que $DE + EB = DB$.

Dibuja un triángulo e inscribe en él una circunferencia.



ugerencias:

1) Traza las bisectrices del triángulo y llama O a su punto de intersección.

Traza perpendiculares a los lados del triángulo desde O .

Sean M , N y P los puntos de intersección de estas perpendiculares con los lados AB , BC y CA respectivamente.

Traza la circunferencia con centro en O y radio OM . Esta es la circunferencia pedida.

Demuestra que los triángulos AMO y AOP ; MOB y BON ; NOC y COP son congruentes para demostrar que $OM=ON=OP$.

EJERCICIOS DE CONSTRUCCION

1. Dados dos puntos y una distancia r traza la circunferencia que pase -- por los dos puntos y de radio r .
2. Dado un triángulo rectángulo traza la circunferencia que pase por los vértices.
3. Construye una tangente a una circunferencia dada que sea paralela a -- una cuerda dada.
4. Dada una circunferencia construye un triángulo isósceles que tenga como base a una cuerda dada y el otro vértice este sobre la circunferencia.
5. Traza una perpendicular que pase por un extremo de un segmento dado, -- sin prolongarlo.
6. Dada una circunferencia y un segmento fuera de ella, traza una tangente paralela al segmento dado.
7. Dada una circunferencia y un punto interior, traza una cuerda que tenga como punto medio el punto dado.
8. Construye una tangente a una circunferencia que sea perpendicular a -- una recta dada que no intersecte a la circunferencia.

APENDICE

TABLA TRIGONOMETRICA PARA EL

S E N O

	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

	010	011	020	030	040	050	060	070	080	090
00'	0.00000000	0.01745241	0.034089950	0.05233596	0.06975647	0.08715574	0.10452846	0.12186934	0.13917310	0.15643447
01'	0.00029089	0.01774325	0.03519021	0.05262644	0.07003463	0.08744552	0.10481775	0.12215866	0.13946119	0.15672177
02'	0.00058170	0.01803409	0.03548091	0.05291693	0.07033682	0.08773529	0.10510704	0.12244676	0.13974915	0.15700905
03'	0.00087246	0.01832493	0.03577162	0.05320740	0.07062698	0.08802585	0.10539631	0.12273546	0.14003722	0.15729633
04'	0.00116355	0.01861577	0.03606232	0.05349788	0.07091714	0.08831481	0.10568557	0.12302414	0.14032524	0.15758359
05'	0.00145444	0.01890661	0.03635301	0.05378835	0.07120730	0.08860456	0.10597483	0.12331281	0.14061324	0.15787087
06'	0.00174533	0.01919744	0.03664371	0.05407881	0.07149744	0.08889430	0.10626407	0.12360148	0.14090123	0.15815815
07'	0.00203622	0.01948828	0.03693440	0.05436927	0.07178759	0.08918403	0.10655331	0.12389013	0.14118921	0.15844529
08'	0.00232710	0.01977911	0.03722509	0.05465973	0.07207772	0.08947376	0.10684254	0.12417877	0.14147718	0.15873249
09'	0.00261799	0.02006994	0.03751577	0.05495018	0.07236785	0.08976347	0.10713175	0.12446740	0.14176514	0.15901969
10'	0.00290888	0.02036077	0.03780646	0.05524063	0.07265797	0.09005318	0.10742096	0.12475602	0.14205308	0.15930687
11'	0.00319976	0.02065159	0.03809713	0.05553107	0.07294809	0.09034289	0.10771016	0.12504463	0.14234101	0.15959404
12'	0.00349065	0.02094242	0.03838781	0.05582151	0.07323820	0.09063258	0.10799934	0.12533323	0.14262893	0.15988119
13'	0.00378154	0.02123324	0.03867848	0.05611194	0.07352833	0.09092227	0.10828854	0.12562182	0.14291684	0.16016833
14'	0.00407242	0.02152407	0.03896915	0.05640236	0.07381840	0.09121195	0.10857771	0.12591040	0.14320474	0.16045545
15'	0.00436331	0.02181489	0.03925982	0.05669279	0.07410849	0.09150162	0.10886688	0.12619897	0.14349262	0.16074257
16'	0.00465419	0.02210570	0.03955048	0.05698321	0.07439858	0.09179128	0.10915603	0.12648753	0.14378049	0.16102966
17'	0.00494508	0.02239652	0.03984114	0.05727362	0.07468865	0.09208094	0.10944518	0.12677607	0.14406835	0.16131675
18'	0.00523596	0.02268733	0.04013179	0.05756403	0.07497873	0.09237059	0.10973431	0.12706461	0.14435620	0.16160382
19'	0.00552685	0.02297815	0.04042244	0.05785443	0.07526879	0.09266023	0.11002344	0.12735313	0.14464404	0.16189090
20'	0.00581773	0.02326896	0.04071309	0.05814483	0.07555885	0.09294986	0.11031254	0.12764165	0.14493186	0.16217792
21'	0.00610861	0.02355976	0.04100374	0.05843522	0.07584891	0.09323949	0.11060166	0.12793015	0.14521967	0.16246495
22'	0.00639950	0.02385057	0.04129438	0.05872561	0.07613895	0.09352910	0.11089076	0.12821864	0.14550747	0.16275197
23'	0.00669038	0.02414138	0.04158502	0.05901599	0.07642899	0.09381871	0.11117985	0.12850713	0.14579526	0.16303897
24'	0.00698124	0.02443218	0.04187533	0.05930637	0.07671903	0.09410831	0.11146893	0.12879566	0.14608303	0.16332594
25'	0.00727214	0.02472298	0.04216604	0.05959675	0.07700906	0.09439791	0.11175800	0.12908406	0.14637094	0.16361294
26'	0.00756302	0.02501378	0.04245676	0.05988712	0.07729908	0.09468749	0.11204706	0.12937251	0.14665885	0.16389990
27'	0.00785390	0.02530457	0.04274747	0.06017748	0.07758909	0.09497707	0.11233612	0.12966094	0.14694628	0.16418683
28'	0.00814478	0.02559537	0.04303818	0.06046784	0.07787918	0.09526666	0.11262516	0.12994937	0.14723400	0.16447378
29'	0.00843566	0.02588616	0.04332877	0.06075819	0.07816910	0.09555628	0.11291419	0.13023779	0.14752171	0.16476070
30'	0.00872654	0.02617695	0.04361939	0.06104854	0.07845910	0.09584575	0.11320321	0.13052619	0.14780941	0.16504761
31'	0.00901741	0.02646774	0.04391000	0.06133888	0.07874908	0.09613530	0.11349223	0.13081459	0.14809710	0.16533450
32'	0.00930829	0.02675852	0.04420060	0.06162922	0.07903907	0.09642483	0.11378123	0.13110297	0.14838477	0.16562138
33'	0.00959916	0.02704930	0.04449120	0.06191955	0.07932904	0.09671434	0.11407023	0.13139134	0.14867243	0.16590824
34'	0.00989004	0.02734008	0.04478180	0.06220988	0.07961991	0.09700388	0.11435913	0.13167970	0.14896008	0.16619507
35'	0.01018091	0.02763086	0.04507240	0.06250020	0.07992087	0.09729340	0.11464819	0.13196805	0.14924772	0.16648193
36'	0.01047178	0.02792164	0.04536300	0.06279052	0.08019892	0.09758290	0.11493715	0.13225639	0.14953534	0.16676875
37'	0.01076266	0.02821241	0.04565358	0.06308083	0.08048887	0.09787240	0.11522611	0.13254472	0.14982296	0.16705555
38'	0.01105353	0.02850318	0.04594416	0.06337114	0.08077881	0.09816188	0.11551505	0.13283303	0.15011055	0.16734235
39'	0.01134440	0.02879395	0.04623474	0.06366144	0.08106875	0.09845134	0.11580399	0.13312134	0.15039814	0.16762913
40'	0.01163527	0.02908472	0.04652531	0.06395173	0.08135867	0.09874083	0.11609291	0.13340963	0.15068571	0.16791589
41'	0.01192613	0.02937548	0.04681588	0.06424202	0.08164860	0.09903030	0.11638182	0.13369791	0.15097327	0.16820264
42'	0.01221700	0.02966624	0.04710645	0.06453231	0.08193851	0.09931975	0.11667074	0.13398619	0.15126089	0.16848938
43'	0.01250787	0.02995700	0.04739701	0.06482259	0.08222842	0.09960920	0.11695963	0.13427445	0.15154836	0.16877610
44'	0.01279873	0.03024776	0.04768757	0.06511286	0.08251832	0.09989863	0.11724852	0.13456269	0.15183588	0.16906281
45'	0.01308960	0.03053851	0.04797813	0.06540313	0.08280821	0.10018806	0.11753748	0.13485093	0.15212339	0.16934950
46'	0.01338046	0.03082924	0.04826868	0.06569339	0.08309809	0.10047748	0.11782626	0.13513916	0.15241088	0.16963618
47'	0.01367132	0.03112001	0.04855923	0.06598365	0.08338797	0.10076689	0.11811512	0.13542737	0.15269837	0.16992285
48'	0.01396219	0.03141076	0.04884977	0.06627390	0.08367784	0.10105630	0.11840397	0.13571557	0.15298584	0.17020954
49'	0.01425304	0.03170150	0.04914031	0.06656415	0.08396771	0.10134569	0.11869281	0.13600376	0.15327329	0.17049618
50'	0.01454390	0.03199224	0.04943084	0.06685439	0.08425757	0.10163508	0.11898163	0.13629194	0.15356074	0.17078276
51'	0.01483475	0.03228298	0.04972137	0.06714462	0.08454742	0.10192446	0.11927045	0.13658011	0.15384817	0.17106937
52'	0.01512561	0.03257372	0.05001190	0.06743485	0.08483726	0.10221383	0.11955924	0.13686827	0.15413559	0.17135594
53'	0.01541646	0.03286445	0.05030242	0.06772507	0.08512709	0.10250319	0.11984803	0.13715641	0.15442299	0.17164254
54'	0.01570732	0.03315518	0.05059294	0.06801529	0.08541692	0.10279254	0.12013684	0.13744455	0.15471039	0.17192916
55'	0.01599817	0.03344591	0.05088345	0.06830550	0.08570674	0.10308188	0.12042562	0.13773267	0.15499777	0.17221565
56'	0.01628902	0.03373663	0.05117396	0.06859571	0.08599656	0.10337121	0.12071438	0.13802078	0.15528513	0.17250218
57'	0.01657987	0.03402735	0.05146447	0.06888591	0.08628637	0.10366054	0.12100314	0.13830888	0.15557249	0.17278871
58'	0.01687072	0.03431807	0.05175497	0.06917610	0.08657617	0.10394986	0.12129188	0.13859696	0.15585983	0.17307521
59'	0.01716156	0.03460878	0.05204546	0.06946629	0.08686596	0.10423916	0.12158062	0.13888504	0.15614715	0.17336178

	180	119	129	139	149	159	169	179	189	199
00'	0.17364810	0.19080908	0.20791169	0.22495105	0.24192190	0.25891905	0.27543736	0.29239719	0.30901699	0.32558016
01'	0.17393464	0.19109453	0.20819623	0.22523448	0.24220413	0.25911001	0.27591494	0.29284907	0.30929363	0.32584310
02'	0.17422109	0.19138005	0.20848073	0.22551708	0.24248623	0.25938095	0.27619655	0.29292801	0.30957024	0.32611810
03'	0.17450752	0.19166555	0.20876521	0.22580127	0.24276855	0.25966108	0.27647411	0.29300613	0.30984683	0.32639315
04'	0.17479394	0.19195104	0.20904968	0.22608463	0.24305072	0.25994278	0.27675565	0.29308422	0.31012339	0.32666810
05'	0.17508034	0.19223651	0.20933413	0.22636798	0.24333280	0.26022365	0.27703516	0.29316228	0.31039992	0.32694301
06'	0.17536673	0.19252197	0.20961856	0.22665131	0.24361501	0.26050451	0.27731465	0.29324033	0.31067643	0.32721790
07'	0.17565310	0.19280741	0.20990298	0.22693462	0.24389719	0.26078534	0.27759412	0.29331834	0.31095291	0.32749276
08'	0.17593946	0.19309283	0.21018738	0.22721791	0.24417922	0.26106615	0.27787357	0.29339633	0.31122937	0.32776759
09'	0.17622580	0.19337823	0.21047176	0.22750118	0.24446139	0.26134694	0.27815299	0.29347430	0.31150579	0.32804240
10'	0.17651213	0.19366362	0.21075612	0.22778443	0.24474334	0.26162771	0.27843238	0.29355224	0.31178219	0.32831718
11'	0.17679844	0.19394900	0.21104047	0.22806766	0.24502538	0.26190844	0.27871178	0.29363016	0.31205857	0.32859193
12'	0.17708480	0.19423435	0.21132480	0.22835087	0.24530739	0.26218918	0.27899111	0.29370805	0.31233492	0.32886665
13'	0.17737102	0.19451969	0.21160911	0.22863406	0.24558938	0.26246988	0.27927043	0.29378592	0.31261124	0.32914134
14'	0.17765729	0.19480502	0.21189340	0.22891724	0.24587115	0.26275054	0.27954974	0.29386378	0.31288754	0.32941601
15'	0.17794355	0.19509032	0.21217767	0.22920039	0.24615329	0.26303122	0.27982901	0.29394158	0.31316381	0.32969045
16'	0.17822978	0.19537561	0.21246191	0.22948353	0.24643527	0.26331185	0.28010827	0.29401937	0.31344005	0.32996456
17'	0.17851601	0.19566089	0.21274617	0.22976664	0.24671713	0.26359244	0.28038750	0.29409713	0.31371627	0.33023894
18'	0.17880222	0.19594614	0.21303039	0.23004974	0.24699901	0.26387305	0.28066671	0.29417487	0.31399244	0.33051439
19'	0.17908841	0.19623139	0.21331459	0.23033281	0.24728088	0.26415362	0.28094589	0.29425259	0.31426862	0.33078892
20'	0.17937459	0.19651661	0.21359877	0.23061587	0.24756272	0.26443314	0.28122505	0.29433028	0.31454476	0.33106342
21'	0.17966075	0.19680182	0.21388294	0.23089891	0.24784454	0.26471469	0.28150419	0.29440754	0.31482087	0.33133789
22'	0.17994690	0.19708701	0.21416709	0.23118193	0.24812635	0.26499518	0.28178330	0.29448459	0.31509695	0.33161233
23'	0.18023303	0.19737218	0.21445123	0.23146493	0.24840813	0.26527566	0.28206239	0.29456120	0.31537301	0.33188675
24'	0.18051915	0.19765734	0.21473533	0.23174790	0.24868999	0.26555612	0.28234144	0.29463799	0.31564904	0.33216113
25'	0.18080525	0.19794248	0.21501942	0.23203086	0.24897163	0.26583655	0.28262050	0.29471463	0.31592504	0.33243549
26'	0.18109133	0.19822761	0.21530350	0.23231380	0.24925334	0.26611694	0.28289952	0.29479109	0.31620107	0.33270982
27'	0.18137740	0.19851271	0.21558755	0.23259672	0.24953504	0.26639725	0.28317851	0.29486734	0.31647697	0.33298412
28'	0.18166346	0.19879780	0.21587159	0.23287962	0.24981672	0.26667771	0.28345748	0.30015090	0.31675289	0.33325840
29'	0.18194950	0.19908288	0.21615561	0.23316250	0.25009837	0.26695806	0.28373642	0.30042834	0.31702879	0.33353264
30'	0.18223553	0.19936793	0.21643961	0.23344534	0.25038000	0.26723838	0.28401535	0.30070580	0.31730466	0.33380686
31'	0.18252154	0.19965297	0.21672360	0.23372821	0.25066162	0.26751867	0.28429424	0.30098321	0.31758050	0.33408105
32'	0.18280753	0.19993800	0.21700756	0.23401103	0.25094321	0.26779895	0.28457312	0.30126040	0.31785632	0.33435521
33'	0.18309351	0.20022300	0.21729151	0.23429383	0.25122478	0.26807920	0.28485197	0.30153796	0.31813210	0.33462934
34'	0.18337947	0.20050799	0.21757544	0.23457661	0.25150633	0.26835943	0.28513079	0.30181530	0.31840787	0.33490345
35'	0.18366542	0.20079297	0.21785935	0.23485937	0.25178785	0.26863964	0.28540959	0.30209261	0.31868360	0.33517752
36'	0.18395135	0.20107792	0.21814324	0.23514211	0.25206936	0.26891982	0.28568837	0.30236989	0.31895931	0.33545157
37'	0.18423727	0.20136286	0.21842704	0.23542484	0.25235084	0.26919988	0.28596712	0.30264715	0.31923499	0.33572559
38'	0.18452317	0.20164778	0.21871097	0.23570754	0.25263231	0.26948012	0.28624585	0.30292438	0.31951065	0.33599958
39'	0.18480905	0.20193269	0.21899481	0.23599022	0.25291375	0.26976024	0.28652455	0.30320159	0.31978627	0.33627354
40'	0.18509492	0.20221757	0.21927862	0.23627288	0.25319517	0.27004033	0.28680323	0.30347877	0.32006187	0.33654748
41'	0.18538078	0.20250244	0.21956242	0.23655552	0.25347657	0.27032040	0.28708189	0.30375593	0.32033745	0.33682138
42'	0.18566664	0.20278730	0.21984620	0.23683815	0.25375795	0.27060045	0.28736052	0.30403306	0.32061299	0.33709526
43'	0.18595244	0.20307213	0.22012997	0.23712075	0.25403930	0.27088047	0.28763913	0.30431011	0.32088851	0.33736911
44'	0.18623825	0.20335695	0.22041371	0.23740333	0.25432064	0.27116047	0.28791771	0.30458725	0.32116400	0.33764293
45'	0.18652404	0.20364175	0.22069744	0.23768589	0.25460195	0.27144045	0.28819627	0.30486430	0.32143947	0.33791672
46'	0.18680982	0.20392654	0.22098114	0.23796843	0.25488324	0.27172041	0.28847480	0.30514133	0.32171490	0.33819048
47'	0.18709557	0.20421130	0.22126483	0.23825094	0.25516451	0.27200034	0.28875331	0.30541833	0.32199031	0.33846422
48'	0.18738132	0.20449605	0.22154850	0.23853346	0.25544574	0.27228025	0.28903180	0.30569531	0.32226570	0.33873792
49'	0.18766704	0.20478078	0.22183215	0.23881594	0.25572699	0.27256013	0.28931024	0.30597226	0.32254105	0.33901160
50'	0.18795275	0.20506550	0.22211578	0.23909840	0.25600819	0.27284000	0.28958869	0.30624918	0.32281638	0.33928525
51'	0.18823845	0.20535020	0.22239939	0.23938084	0.25628937	0.27311984	0.28986711	0.30652608	0.32309168	0.33955887
52'	0.18852410	0.20563488	0.22268299	0.23966326	0.25657054	0.27339965	0.29014549	0.30680295	0.32336695	0.33983246
53'	0.18880978	0.20591954	0.22296654	0.23994566	0.25685168	0.27367945	0.29042386	0.30707980	0.32364220	0.34010720
54'	0.18909544	0.20620419	0.22325012	0.24022804	0.25713278	0.27395922	0.29070219	0.30735662	0.32391742	0.34038190
55'	0.18938108	0.20648881	0.22353363	0.24051040	0.25741389	0.27423897	0.29098051	0.30763341	0.32419261	0.34065706
56'	0.18966672	0.20677342	0.22381717	0.24079274	0.25769494	0.27451969	0.29125880	0.30791019	0.32446777	0.34093253
57'	0.18995229	0.20705802	0.22410067	0.24107506	0.25797602	0.27479939	0.29153870	0.30818692	0.32474291	0.34119998
58'	0.19023788	0.20734259	0.22438415	0.24135734	0.25825795	0.27507807	0.29181830	0.30846364	0.32501802	0.34146740
59'	0.19052344	0.20762715	0.22466761	0.24163964	0.25853966	0.27535773	0.29209752	0.30874033	0.32529310	0.34173478

	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°
00'	0.34202914	0.35836795	0.37460659	0.39073113	0.40673664	0.42261824	0.43837115	0.45399950	0.46951154	0.48480962
01'	0.34229537	0.35863950	0.37487829	0.39099888	0.40700237	0.42288188	0.43863258	0.45424946	0.46972838	0.48506402
02'	0.34256478	0.35891102	0.37514594	0.39126659	0.40726805	0.42314546	0.43899397	0.45450879	0.46993816	0.48531837
03'	0.34283605	0.35918252	0.37541557	0.39153427	0.40753371	0.42340900	0.43935533	0.45476788	0.47020190	0.48557269
04'	0.34310929	0.35945398	0.37568517	0.39180192	0.40779933	0.42367251	0.43971664	0.45502693	0.47045880	0.48582696
05'	0.34338451	0.35972541	0.37595473	0.39206954	0.40806491	0.42393599	0.44007793	0.45528594	0.47071576	0.48608119
06'	0.34365970	0.35999681	0.37622426	0.39233712	0.40833046	0.42419942	0.43993917	0.45554491	0.47097188	0.48633538
07'	0.34393685	0.36026818	0.37649274	0.39260467	0.40859598	0.42446282	0.44020038	0.45580384	0.47122844	0.48658953
08'	0.34421598	0.36053952	0.37676123	0.39287218	0.40886146	0.42472619	0.44046155	0.45606274	0.47148500	0.48684364
09'	0.34449708	0.36081083	0.37702967	0.39313966	0.40912690	0.42498952	0.44072268	0.45632159	0.47174150	0.48709771
10'	0.34478025	0.36108211	0.37730007	0.39340711	0.40939232	0.42525281	0.44098378	0.45658041	0.47200076	0.48735173
11'	0.34506539	0.36135335	0.37757145	0.39367453	0.40965769	0.42551807	0.44124489	0.45683919	0.47226108	0.48760572
12'	0.34535250	0.36162457	0.37784379	0.39394191	0.40992303	0.42578929	0.44150585	0.45709793	0.47252377	0.48785964
13'	0.34564168	0.36189574	0.37811610	0.39420926	0.41018834	0.42606248	0.44176664	0.45735663	0.47278711	0.48811356
14'	0.34593291	0.36216685	0.37838837	0.39447657	0.41045362	0.42633863	0.44202778	0.45761529	0.47305241	0.48836742
15'	0.34622620	0.36243804	0.37866062	0.39474384	0.41071885	0.42661674	0.44228869	0.45787392	0.47331967	0.48862124
16'	0.34652155	0.36270913	0.37893283	0.39501111	0.41098406	0.42689682	0.44254956	0.45813250	0.47358789	0.48887502
17'	0.34681898	0.36298020	0.37920501	0.39527832	0.41124923	0.42717893	0.44281040	0.45839105	0.47385702	0.48913876
18'	0.34711850	0.36325123	0.37947716	0.39554550	0.41151436	0.42746206	0.44307119	0.45864956	0.47412721	0.48940245
19'	0.34742014	0.36352223	0.37974928	0.39581275	0.41177946	0.42774823	0.44333195	0.45890802	0.47439831	0.48966611
20'	0.34772392	0.36379321	0.37999336	0.39607988	0.41204452	0.42803637	0.44359267	0.45916645	0.47467027	0.48992972
21'	0.34802987	0.36406415	0.38026192	0.39634685	0.41230955	0.42832646	0.44385335	0.45942485	0.47494309	0.49019329
22'	0.34833799	0.36433506	0.38052743	0.39661390	0.41257455	0.42861852	0.44411400	0.45968320	0.47521677	0.49045682
23'	0.34864839	0.36460594	0.38079312	0.39688097	0.41283951	0.42891265	0.44437461	0.45994151	0.47549133	0.49072031
24'	0.34896105	0.36487678	0.38105903	0.39714789	0.41310443	0.42920883	0.44463518	0.46019979	0.47576672	0.49098375
25'	0.34927598	0.36514760	0.38132519	0.39741484	0.41336932	0.42950709	0.44489573	0.46045802	0.47604297	0.49124716
26'	0.34959320	0.36541839	0.38159159	0.39768175	0.41363417	0.42980740	0.44515621	0.46071622	0.47631999	0.49151052
27'	0.34991273	0.36568915	0.38185805	0.39794863	0.41389899	0.43010978	0.44541667	0.46097438	0.47659747	0.49177384
28'	0.35023457	0.36595987	0.38212458	0.39821548	0.41416378	0.43041625	0.44567709	0.46123249	0.47687521	0.49203703
29'	0.35055874	0.36623056	0.38239147	0.39848229	0.41442853	0.43072483	0.44593747	0.46149057	0.47715320	0.49230016
30'	0.35088525	0.36650123	0.38265843	0.39874907	0.41469324	0.43103541	0.44619781	0.46174861	0.47743147	0.49256325
31'	0.35121411	0.36677188	0.38292516	0.39901581	0.41495792	0.43134803	0.44645812	0.46200662	0.47771003	0.49282627
32'	0.35154534	0.36704249	0.38319166	0.39928253	0.41522257	0.43166163	0.44671839	0.46226458	0.47798884	0.49308923
33'	0.35187895	0.36731303	0.38345832	0.39954920	0.41549618	0.43197629	0.44697862	0.46252250	0.47826791	0.49335216
34'	0.35221496	0.36758357	0.38372504	0.39981585	0.41576975	0.43229190	0.44723882	0.46278039	0.47854723	0.49361502
35'	0.35255337	0.36785408	0.38399164	0.40008246	0.41604229	0.43260840	0.44749897	0.46303823	0.47882684	0.49387782
36'	0.35289418	0.36812455	0.38425832	0.40034903	0.41630479	0.43292585	0.44775909	0.46329604	0.47910666	0.49414057
37'	0.35323740	0.36839500	0.38452503	0.40061558	0.41656726	0.43324406	0.44801917	0.46355380	0.47938673	0.49440327
38'	0.35358303	0.36866541	0.38479164	0.40088208	0.41682974	0.43356304	0.44827921	0.46381153	0.47966707	0.49466592
39'	0.35393106	0.36893580	0.38505823	0.40114856	0.41709219	0.43388288	0.44853921	0.46406922	0.47994766	0.49492852
40'	0.35428150	0.36920615	0.38532472	0.40141500	0.41735466	0.43420359	0.44879918	0.46432687	0.48022841	0.49519107
41'	0.35463445	0.36947647	0.38559121	0.40168140	0.41761707	0.43452486	0.44905911	0.46458448	0.48050932	0.49545357
42'	0.35498991	0.36974676	0.38585764	0.40194778	0.41787942	0.43484609	0.44931900	0.46484205	0.48079040	0.49571602
43'	0.35534788	0.37001702	0.38612408	0.40221412	0.41814173	0.43516718	0.44957885	0.46509958	0.48107163	0.49597843
44'	0.35570836	0.37028724	0.38639049	0.40248042	0.41840395	0.43548824	0.44983867	0.46535707	0.48135292	0.49624079
45'	0.35607134	0.37055744	0.38665686	0.40274669	0.41866617	0.43580926	0.45009844	0.46561452	0.48163437	0.49650310
46'	0.35643682	0.37082760	0.38692320	0.40301293	0.41892839	0.43613024	0.45035818	0.46587193	0.48191588	0.49676546
47'	0.35680480	0.37109773	0.38718954	0.40327913	0.41919060	0.43645119	0.45061798	0.46612931	0.48219745	0.49702777
48'	0.35717528	0.37136784	0.38745589	0.40354530	0.41945289	0.43677211	0.45087754	0.46638664	0.48247912	0.49729002
49'	0.35754826	0.37163791	0.38772219	0.40381143	0.41971513	0.43709299	0.45113717	0.46664394	0.48276081	0.49755223
50'	0.35792374	0.37190794	0.38798851	0.40407753	0.41997734	0.43741384	0.45139675	0.46690119	0.48304252	0.49781439
51'	0.35830172	0.37217795	0.38825482	0.40434360	0.42023941	0.43773464	0.45165630	0.46715841	0.48332421	0.49807650
52'	0.35868220	0.37244793	0.38852114	0.40460963	0.42050545	0.43805539	0.45191581	0.46741558	0.48360592	0.49833857
53'	0.35906518	0.37271787	0.38878745	0.40487562	0.42077145	0.43837618	0.45217528	0.46767272	0.48388755	0.49860059
54'	0.35945066	0.37298778	0.38905373	0.40514159	0.42103741	0.43869691	0.45243471	0.46792982	0.48416918	0.49886256
55'	0.35983864	0.37325766	0.38931994	0.40540752	0.42129934	0.43901754	0.45269410	0.46818687	0.48445081	0.49912449
56'	0.36022912	0.37352751	0.38958611	0.40567341	0.42156124	0.43933831	0.45295346	0.46844839	0.48473241	0.49938637
57'	0.36062210	0.37379733	0.38985229	0.40593927	0.42182310	0.43965904	0.45321278	0.46870987	0.48501391	0.49964819
58'	0.36101758	0.37406712	0.39011834	0.40620510	0.42208492	0.43997971	0.45347206	0.46897131	0.48529531	0.49990994
59'	0.36141556	0.37433697	0.39038423	0.40647089	0.42234661	0.44029634	0.45373138	0.46923270	0.48557670	0.50017164

	30 ^o	31 ^o	32 ^o	33 ^o	34 ^o	35 ^o	36 ^o	37 ^o	38 ^o	39 ^o
60 ^o	0.5000000	0.5150380	0.5299126	0.5446394	0.5591929	0.5735744	0.5877825	0.6018150	0.6156618	0.6293203
61 ^o	0.5002519	0.5152879	0.5301659	0.5448827	0.5594304	0.5738146	0.5880205	0.6020473	0.6158907	0.6295443
62 ^o	0.5005037	0.5155367	0.5304125	0.5451266	0.5597512	0.5740529	0.5882558	0.6022755	0.6161192	0.6297724
63 ^o	0.5007555	0.5157859	0.5306591	0.5453707	0.5599164	0.5742910	0.5884913	0.6025117	0.6163481	0.6299934
64 ^o	0.5010073	0.5160359	0.5309056	0.5456145	0.5601571	0.5745291	0.5887261	0.6027430	0.6165725	0.6302242
65 ^o	0.5012590	0.5162843	0.5311521	0.5458582	0.5603981	0.5747672	0.5889613	0.6029756	0.6168049	0.6304504
66 ^o	0.5015107	0.5165333	0.5313985	0.5461019	0.5606390	0.5750052	0.5891963	0.6032079	0.6170358	0.6306751
67 ^o	0.5017623	0.5167823	0.5316449	0.5463456	0.5608795	0.5752432	0.5894317	0.6034397	0.6172647	0.6309015
68 ^o	0.5020139	0.5170314	0.5318913	0.5465892	0.5611205	0.5754811	0.5896663	0.6036719	0.6174925	0.6311271
69 ^o	0.5022655	0.5172803	0.5321376	0.5468328	0.5613614	0.5757190	0.5899012	0.6039037	0.6177223	0.6313528
70 ^o	0.5025170	0.5175292	0.5323839	0.5470763	0.5616021	0.5759568	0.5901361	0.6041351	0.6179511	0.6315783
71 ^o	0.5027685	0.5177781	0.5326301	0.5473198	0.5618427	0.5761940	0.5903709	0.6043673	0.6181797	0.6318038
72 ^o	0.5030200	0.5180270	0.5328762	0.5475632	0.5620838	0.5764323	0.5906057	0.6045991	0.6184084	0.6320293
73 ^o	0.5032713	0.5182758	0.5331224	0.5478067	0.5623239	0.5766699	0.5908408	0.6048307	0.6186369	0.6322548
74 ^o	0.5035226	0.5185245	0.5333684	0.5480494	0.5625644	0.5769072	0.5910750	0.6050624	0.6188654	0.6324804
75 ^o	0.5037739	0.5187732	0.5336145	0.5482923	0.5628049	0.5771451	0.5913095	0.6052935	0.6190939	0.6327053
76 ^o	0.5040252	0.5190219	0.5338605	0.5485353	0.5630455	0.5773827	0.5915441	0.6055251	0.6193223	0.6329305
77 ^o	0.5042764	0.5192705	0.5341065	0.5487787	0.5632852	0.5776202	0.5917787	0.6057569	0.6195507	0.6331557
78 ^o	0.5045276	0.5195191	0.5343525	0.5490222	0.5635260	0.5778573	0.5920131	0.6059884	0.6197793	0.6333808
79 ^o	0.5047787	0.5197676	0.5345980	0.5492652	0.5637663	0.5780950	0.5922475	0.6062197	0.6200079	0.6336057
80 ^o	0.5050298	0.5200161	0.5348441	0.5495089	0.5640065	0.5783323	0.5924819	0.6064510	0.6202354	0.6338307
81 ^o	0.5052809	0.5202645	0.5350900	0.5497519	0.5642467	0.5785695	0.5927162	0.6066823	0.6204634	0.6340559
82 ^o	0.5055318	0.5205129	0.5353358	0.5499945	0.5644868	0.5788068	0.5929505	0.6069135	0.6206917	0.6342805
83 ^o	0.5057826	0.5207613	0.5355817	0.5502377	0.5647269	0.5790440	0.5931847	0.6071423	0.6209199	0.6345051
84 ^o	0.5060333	0.5210096	0.5358280	0.5504807	0.5649670	0.5792811	0.5934189	0.6073754	0.6211478	0.6347301
85 ^o	0.5062840	0.5212579	0.5360739	0.5507235	0.5652070	0.5795182	0.5936530	0.6076069	0.6213752	0.6349552
86 ^o	0.5065347	0.5215061	0.5363192	0.5509662	0.5654469	0.5797553	0.5938870	0.6078379	0.6216031	0.6351797
87 ^o	0.5067852	0.5217543	0.5365641	0.5512090	0.5656868	0.5799923	0.5941210	0.6080687	0.6218315	0.6354041
88 ^o	0.5070357	0.5220024	0.5368098	0.5514517	0.5659268	0.5802292	0.5943550	0.6082977	0.6220592	0.6356287
89 ^o	0.5072860	0.5222505	0.5370545	0.5516944	0.5661669	0.5804661	0.5945889	0.6085263	0.6222869	0.6358534
90 ^o	0.5075363	0.5224985	0.5372991	0.5519369	0.5664072	0.5807029	0.5948229	0.6087543	0.6225144	0.6360782
91 ^o	0.5077866	0.5227465	0.5375437	0.5521793	0.5666474	0.5809395	0.5950566	0.6089821	0.6227426	0.6363025
92 ^o	0.5080368	0.5229943	0.5377881	0.5524218	0.5668875	0.5811764	0.5952905	0.6092108	0.6229704	0.6365265
93 ^o	0.5082869	0.5232424	0.5380324	0.5526644	0.5671271	0.5814131	0.5955248	0.6094393	0.6231973	0.6367513
94 ^o	0.5085369	0.5234903	0.5382765	0.5529068	0.5673677	0.5816493	0.5957571	0.6096643	0.6234248	0.6369752
95 ^o	0.5087868	0.5237381	0.5385205	0.5531492	0.5676082	0.5818844	0.5959895	0.6098913	0.6236524	0.6371993
96 ^o	0.5090366	0.5239859	0.5387642	0.5533915	0.5678485	0.5821229	0.5962248	0.6101451	0.6238796	0.6374239
97 ^o	0.5092863	0.5242336	0.5390078	0.5536338	0.5680881	0.5823597	0.5964589	0.6103761	0.6241061	0.6376481
98 ^o	0.5095359	0.5244813	0.5392511	0.5538762	0.5683256	0.5825952	0.5966918	0.6106060	0.6243316	0.6378721
99 ^o	0.5097854	0.5247289	0.5394945	0.5541186	0.5685618	0.5828323	0.5969252	0.6108363	0.6245561	0.6380961
100 ^o	0.5100348	0.5249765	0.5397378	0.5543603	0.5687982	0.5830686	0.5971585	0.6110662	0.6247805	0.6383200
101 ^o	0.5102841	0.5252241	0.5399811	0.5546020	0.5690345	0.5833049	0.5973919	0.6112968	0.6250051	0.6385439
102 ^o	0.5105333	0.5254716	0.5402243	0.5548443	0.5692705	0.5835412	0.5976251	0.6115270	0.6252296	0.6387678
103 ^o	0.5107824	0.5257191	0.5404675	0.5550866	0.5695068	0.5837771	0.5978583	0.6117571	0.6254546	0.6389916
104 ^o	0.5110314	0.5259665	0.5407108	0.5553281	0.5697427	0.5840135	0.5980918	0.6119875	0.6256795	0.6392153
105 ^o	0.5112803	0.5262139	0.5409539	0.5555692	0.5700076	0.5842496	0.5983240	0.6122178	0.6259047	0.6394390
106 ^o	0.5115290	0.5264612	0.5411971	0.5558108	0.5702425	0.5844857	0.5985575	0.6124472	0.6261301	0.6396627
107 ^o	0.5117776	0.5267085	0.5414403	0.5560530	0.5704787	0.5847212	0.5987905	0.6126771	0.6263579	0.6398861
108 ^o	0.5120261	0.5269558	0.5416834	0.5562956	0.5707135	0.5849576	0.5990236	0.6129070	0.6265831	0.6401097
109 ^o	0.5122745	0.5272031	0.5419265	0.5565373	0.5709484	0.5851935	0.5992565	0.6131368	0.6268099	0.6403331
110 ^o	0.5125228	0.5274504	0.5421694	0.5567789	0.5711820	0.5854294	0.5994893	0.6133664	0.6270351	0.6405565
111 ^o	0.5127710	0.5276977	0.5424123	0.5570205	0.5714157	0.5856652	0.5997221	0.6135956	0.6272636	0.6407799
112 ^o	0.5130191	0.5279443	0.5426551	0.5572621	0.5716483	0.5859010	0.5999549	0.6138260	0.6274919	0.6410032
113 ^o	0.5132671	0.5281916	0.5428979	0.5575035	0.5718810	0.5861367	0.6001875	0.6140564	0.6277205	0.6412265
114 ^o	0.5135150	0.5284388	0.5431405	0.5577451	0.5721145	0.5863723	0.6004203	0.6142850	0.6279486	0.6414493
115 ^o	0.5137628	0.5286857	0.5433831	0.5579865	0.5723564	0.5866079	0.6006528	0.6145141	0.6281767	0.6416726
116 ^o	0.5140105	0.5289326	0.5436256	0.5582279	0.5725982	0.5868435	0.6008853	0.6147417	0.6284047	0.6418958
117 ^o	0.5142581	0.5291790	0.5438679	0.5584695	0.5728401	0.5870793	0.6011175	0.6149705	0.6286326	0.6421187
118 ^o	0.5145056	0.5294253	0.5441103	0.5587105	0.5730819	0.5873144	0.6013500	0.6152029	0.6288601	0.6423414
119 ^o	0.5147529	0.5296715	0.5443525	0.5589512	0.5733231	0.5875498	0.6015826	0.6154323	0.6290840	0.6425645

	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490
00'	0.64278761	0.65609103	0.66913061	0.68199036	0.69465837	0.70710678	0.71933980	0.73135370	0.74314483	0.75470958
01'	0.64301042	0.65627954	0.66933675	0.68221107	0.69498257	0.70731244	0.71954184	0.73155206	0.74333944	0.75490839
02'	0.64323317	0.65649799	0.66956284	0.68242373	0.69507675	0.70751804	0.71974382	0.73175035	0.74353299	0.75509113
03'	0.64345587	0.65671739	0.66977887	0.68263633	0.69528558	0.70772358	0.71994573	0.73194858	0.74372847	0.75528181
04'	0.64367851	0.65693673	0.66999484	0.68284903	0.69549489	0.70792906	0.72014759	0.73214675	0.74392289	0.75547243
05'	0.64390110	0.65715602	0.67021076	0.68306135	0.69570387	0.70813448	0.72034938	0.73234484	0.74411725	0.75566298
06'	0.64412363	0.65737525	0.67042662	0.68327377	0.69591280	0.70833984	0.72055111	0.73254290	0.74431155	0.75585347
07'	0.64434611	0.65759442	0.67064242	0.68348614	0.69612166	0.70854514	0.72075278	0.73274088	0.74450578	0.75604389
08'	0.64456854	0.65781391	0.67085817	0.68369845	0.69633047	0.70875038	0.72095980	0.73293880	0.74469995	0.75623426
09'	0.64479091	0.65803320	0.67107386	0.68391070	0.69653922	0.70895556	0.72115595	0.73313666	0.74489406	0.75642455
10'	0.64501322	0.65825216	0.67128949	0.68412289	0.69674798	0.70916068	0.72135580	0.73333444	0.74508810	0.75661478
11'	0.64523548	0.65847056	0.67150507	0.68433503	0.69695653	0.70936574	0.72155886	0.73353219	0.74528208	0.75680495
12'	0.64545769	0.65868946	0.67172059	0.68454711	0.69716510	0.70957074	0.72176023	0.73372987	0.74547600	0.75699504
13'	0.64567984	0.65890830	0.67193605	0.68475913	0.69737362	0.70977568	0.72196153	0.73392748	0.74566986	0.75718510
14'	0.64590194	0.65912709	0.67215146	0.68497109	0.69758207	0.70998056	0.72216278	0.73412502	0.74586355	0.75737507
15'	0.64612398	0.65934582	0.67236681	0.68518299	0.69779046	0.71018538	0.72236394	0.73432251	0.74605708	0.75756499
16'	0.64634597	0.65956449	0.67258210	0.68539484	0.69799880	0.71039014	0.72256509	0.73451993	0.74625104	0.75775483
17'	0.64656790	0.65978311	0.67279734	0.68560662	0.69820729	0.71059484	0.72276615	0.73471730	0.74644444	0.75794462
18'	0.64678978	0.66000167	0.67301251	0.68581835	0.69841529	0.71079947	0.72296715	0.73491460	0.74663818	0.75813434
19'	0.64701160	0.66022017	0.67322764	0.68603003	0.69862344	0.71100405	0.72316809	0.73511183	0.74683166	0.75832399
20'	0.64723337	0.66043863	0.67344270	0.68624164	0.69883154	0.71120857	0.72336896	0.73530901	0.74702507	0.75851358
21'	0.64745509	0.66065702	0.67365770	0.68645317	0.69903958	0.71141303	0.72356978	0.73550612	0.74721842	0.75870311
22'	0.64767675	0.66087536	0.67387266	0.68666468	0.69924756	0.71161743	0.72377054	0.73570317	0.74741174	0.75889257
23'	0.64789835	0.66109364	0.67408755	0.68687613	0.69945548	0.71182177	0.72397123	0.73590016	0.74760532	0.75908197
24'	0.64811990	0.66131187	0.67430239	0.68708751	0.69966334	0.71202605	0.72417186	0.73609709	0.74779809	0.75927131
25'	0.64834144	0.66152912	0.67451717	0.68729883	0.69987114	0.71223026	0.72437243	0.73629395	0.74799119	0.75946058
26'	0.64856284	0.66174615	0.67473189	0.68751018	0.70007899	0.71243442	0.72457294	0.73649075	0.74818422	0.75964978
27'	0.64878422	0.66196291	0.67494656	0.68772131	0.70028657	0.71263852	0.72477339	0.73668749	0.74837719	0.75983893
28'	0.64900553	0.66218421	0.67516116	0.68793245	0.70049419	0.71284256	0.72497378	0.73688417	0.74857010	0.76002800
29'	0.64922683	0.66240216	0.67537572	0.68814354	0.70070178	0.71304653	0.72517411	0.73708076	0.74876294	0.76021702
30'	0.64944805	0.66262005	0.67558921	0.68835459	0.70090927	0.71325045	0.72537437	0.73727734	0.74895572	0.76040597
31'	0.64966922	0.66283788	0.67580445	0.68856555	0.70111671	0.71345431	0.72557502	0.73747283	0.74914945	0.76059485
32'	0.64989033	0.66305566	0.67601903	0.68877647	0.70132410	0.71365810	0.72577477	0.73766806	0.74934310	0.76078367
33'	0.65011138	0.66327338	0.67623335	0.68898732	0.70153143	0.71386184	0.72597480	0.73786342	0.74953668	0.76097243
34'	0.65033238	0.66349103	0.67644761	0.68919812	0.70173870	0.71406551	0.72617482	0.73806029	0.74973021	0.76116112
35'	0.65055333	0.66370866	0.67666182	0.68940894	0.70194590	0.71426913	0.72637478	0.73825916	0.74992367	0.76134975
36'	0.65077422	0.66392621	0.67687657	0.68961954	0.70215305	0.71447268	0.72657456	0.73845804	0.75011707	0.76153831
37'	0.65099505	0.66414371	0.67709084	0.68983017	0.70236014	0.71467617	0.72677451	0.73865614	0.75031034	0.76172681
38'	0.65121583	0.66436115	0.67730410	0.69004073	0.70256718	0.71487941	0.72697428	0.73885450	0.75050350	0.76191524
39'	0.65143656	0.66457854	0.67751555	0.69025124	0.70277415	0.71508291	0.72717399	0.73904350	0.75069669	0.76210361
40'	0.65165723	0.66479587	0.67773200	0.69046169	0.70298106	0.71528629	0.72737364	0.73923243	0.75088980	0.76229199
41'	0.65187785	0.66501314	0.67794586	0.69067208	0.70318791	0.71548954	0.72757323	0.73943529	0.75108212	0.76248016
42'	0.65209841	0.66523034	0.67815967	0.69088241	0.70339478	0.71569273	0.72777276	0.73963110	0.75127444	0.76266833
43'	0.65231891	0.66544752	0.67837347	0.69109269	0.70360144	0.71589587	0.72797222	0.73982694	0.75146680	0.76285644
44'	0.65253936	0.66566462	0.67858711	0.69130290	0.70380811	0.71609894	0.72817163	0.74002251	0.75165928	0.76304449
45'	0.65275975	0.66588167	0.67880075	0.69151306	0.70401473	0.71630194	0.72837097	0.74021803	0.75185181	0.76323247
46'	0.65298009	0.66609864	0.67901432	0.69172314	0.70422129	0.71650549	0.72857025	0.74041368	0.75204357	0.76342039
47'	0.65320038	0.66631559	0.67922784	0.69193319	0.70442778	0.71670778	0.72876949	0.74060917	0.75223527	0.76360824
48'	0.65342061	0.66653247	0.67944131	0.69214318	0.70463421	0.71691061	0.72896863	0.74080460	0.75243149	0.76379603
49'	0.65364087	0.66674929	0.67965474	0.69235310	0.70484050	0.71711338	0.72916772	0.74099966	0.75262804	0.76398373
50'	0.65386109	0.66696606	0.67986806	0.69256296	0.70504690	0.71731608	0.72936674	0.74119526	0.75282499	0.76417141
51'	0.65408194	0.66718277	0.68008135	0.69277283	0.70525316	0.71751873	0.72956573	0.74139050	0.75302194	0.76435901
52'	0.65430277	0.66739942	0.68029458	0.69298251	0.70545934	0.71772131	0.72976464	0.74158568	0.75321882	0.76454654
53'	0.65452392	0.66761602	0.68050775	0.69319220	0.70566549	0.71792384	0.72996349	0.74178079	0.75341574	0.76473407
54'	0.65474481	0.66783273	0.68072087	0.69340183	0.70587157	0.71812630	0.73016228	0.74197584	0.75361269	0.76492146
55'	0.65496546	0.66804904	0.68093393	0.69361140	0.70607759	0.71832878	0.73036100	0.74217083	0.75380965	0.76510874
56'	0.65518604	0.66826547	0.68114693	0.69382091	0.70628355	0.71853110	0.73055967	0.74236575	0.75400651	0.76529589
57'	0.65540617	0.66848184	0.68135988	0.69403036	0.70648945	0.71873332	0.73075827	0.74256062	0.75420337	0.76548321
58'	0.65562615	0.66869815	0.68157274	0.69423974	0.70669528	0.71893554	0.73095681	0.74275542	0.75440008	0.76567036
59'	0.65584647	0.66891441	0.68178559	0.69444909	0.70690106	0.71913770	0.73115529	0.74295015	0.75459673	0.76585743

	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°
10°	0.7266454	0.7271459	0.7280105	0.7298355	0.8001170	0.8151520	0.8290375	0.8386705	0.8480810	0.8571670
11°	0.7272339	0.7277389	0.7288191	0.7308105	0.8011879	0.8163186	0.8292020	0.8388286	0.8482021	0.8573170
12°	0.7279127	0.7284195	0.7296380	0.7317050	0.8023582	0.8174956	0.8293278	0.8389529	0.8483265	0.8574409
13°	0.7286809	0.7291885	0.7304272	0.7325339	0.8036093	0.8187527	0.8295925	0.8392154	0.8485922	0.8575643
14°	0.7295414	0.7300499	0.7313088	0.7334342	0.8049321	0.8200146	0.8298676	0.8394897	0.8487641	0.8576880
15°	0.7304983	0.7309968	0.7322658	0.7343997	0.8063104	0.8212810	0.8306501	0.8399341	0.8492129	0.8578116
16°	0.7315535	0.7320420	0.7333112	0.7354541	0.8077352	0.8225454	0.8319146	0.8411984	0.8504771	0.8579351
17°	0.7327088	0.7331873	0.7344566	0.7366086	0.8092074	0.8238077	0.8331768	0.8424604	0.8517390	0.8580586
18°	0.7339662	0.7344347	0.7357040	0.7378560	0.8107284	0.8250680	0.8344370	0.8437204	0.8529989	0.8581821
19°	0.7353267	0.7357852	0.7370545	0.7392065	0.8123074	0.8263272	0.8356961	0.8449793	0.8542577	0.8583055
20°	0.7367902	0.7372487	0.7385180	0.7406699	0.8139442	0.8275844	0.8369531	0.8462362	0.8555145	0.8584288
21°	0.7383577	0.7388162	0.7400855	0.7422374	0.8156384	0.8288395	0.8382081	0.8474910	0.8567692	0.8585520
22°	0.7400292	0.7404877	0.7417570	0.7439089	0.8173890	0.8301425	0.8395108	0.8487935	0.8580715	0.8586752
23°	0.7418057	0.7422642	0.7435335	0.7456854	0.8191950	0.8314974	0.8408654	0.8501479	0.8594357	0.8588000
24°	0.7436872	0.7441457	0.7454150	0.7475669	0.8210400	0.8328522	0.8422200	0.8515023	0.8607899	0.8591250
25°	0.7456747	0.7461332	0.7474025	0.7495544	0.8229290	0.8342069	0.8435745	0.8528566	0.8621724	0.8594590
26°	0.7477672	0.7482257	0.7494950	0.7516469	0.8248620	0.8355616	0.8449290	0.8542109	0.8635549	0.8597930
27°	0.7499647	0.7504232	0.7516925	0.7538444	0.8268450	0.8369162	0.8462834	0.8555651	0.8649388	0.8601270
28°	0.7522672	0.7527257	0.7539950	0.7561469	0.8288680	0.8383707	0.8477378	0.8570193	0.8663234	0.8604610
29°	0.7546747	0.7551332	0.7564025	0.7585544	0.8309310	0.8398252	0.8491922	0.8584735	0.8677077	0.8607950
30°	0.7571872	0.7576457	0.7589150	0.7610669	0.8330440	0.8412796	0.8506465	0.8599276	0.8690924	0.8611290
31°	0.7598047	0.7602632	0.7615325	0.7636844	0.8352070	0.8427338	0.8520905	0.8613814	0.8704766	0.8614630
32°	0.7625272	0.7629857	0.7642550	0.7664069	0.8374200	0.8441879	0.8535444	0.8628721	0.8719677	0.8617970
33°	0.7653547	0.7658132	0.7670825	0.7692344	0.8396830	0.8456426	0.8549989	0.8643634	0.8734534	0.8621310
34°	0.7682872	0.7687457	0.7699150	0.7720669	0.8419960	0.8470972	0.8564534	0.8659041	0.8749394	0.8624650
35°	0.7713247	0.7717832	0.7729525	0.7751044	0.8443690	0.8485518	0.8579079	0.8673684	0.8764541	0.8628000
36°	0.7744672	0.7749257	0.7760950	0.7782469	0.8468020	0.8500054	0.8593614	0.8688119	0.8770397	0.8631350
37°	0.7777147	0.7781732	0.7793425	0.7814944	0.8492950	0.8515100	0.8608222	0.8703634	0.8776864	0.8634700
38°	0.7810672	0.7815257	0.7826950	0.7848469	0.8518480	0.8530750	0.8623404	0.8718149	0.8791274	0.8638050
39°	0.7845247	0.7849832	0.7861525	0.7883044	0.8542410	0.8546954	0.8639614	0.8732724	0.8805749	0.8641400
40°	0.7880872	0.7885457	0.7897150	0.7918669	0.8566940	0.8561492	0.8654154	0.8747294	0.8820274	0.8644750
41°	0.7917547	0.7922132	0.7933825	0.7955344	0.8592070	0.8576616	0.8669274	0.8761849	0.8834814	0.8648100
42°	0.7955272	0.7959857	0.7971550	0.7993069	0.8617800	0.8592362	0.8685014	0.8777324	0.8849284	0.8651450
43°	0.7994947	0.8000532	0.8012225	0.8033744	0.8644130	0.8618216	0.8710864	0.8802334	0.8863804	0.8654800
44°	0.8035572	0.8041157	0.8052850	0.8074369	0.8671060	0.8644146	0.8746794	0.8837264	0.8897734	0.8658150
45°	0.8077147	0.8082732	0.8094425	0.8115944	0.8698490	0.8671576	0.8762224	0.8852294	0.8912764	0.8661500
46°	0.8120072	0.8125657	0.8137350	0.8158869	0.8726520	0.8699606	0.8789254	0.8878924	0.8938394	0.8664850
47°	0.8164247	0.8169832	0.8181525	0.8203044	0.8756150	0.8728236	0.8817884	0.8907554	0.8967024	0.8668200
48°	0.8209572	0.8215157	0.8226850	0.8248369	0.8786380	0.8758466	0.8848114	0.8937784	0.8997254	0.8671550
49°	0.8256047	0.8261632	0.8273325	0.8294844	0.8817210	0.8789296	0.8878944	0.8968614	0.9028084	0.8674900
50°	0.8303572	0.8309157	0.8320850	0.8342369	0.8848640	0.8820726	0.8910374	0.8999944	0.9059414	0.8678250
51°	0.8352147	0.8357732	0.8369425	0.8390944	0.8880670	0.8852756	0.8942404	0.9031974	0.9091444	0.8681600
52°	0.8401772	0.8407357	0.8419050	0.8440569	0.8913300	0.8885386	0.8975034	0.9064604	0.9124074	0.8684950
53°	0.8452447	0.8458032	0.8469725	0.8491244	0.8946530	0.8918616	0.9008264	0.9097834	0.9157304	0.8688300
54°	0.8504172	0.8509757	0.8521450	0.8542969	0.8980360	0.8952446	0.9042094	0.9131664	0.9191134	0.8691650
55°	0.8556947	0.8562532	0.8574225	0.8595744	0.9014790	0.8986876	0.9076524	0.9166094	0.9225564	0.8695000
56°	0.8610772	0.8616357	0.8628050	0.8649569	0.9050820	0.9022906	0.9112554	0.9202124	0.9261594	0.8698350
57°	0.8665647	0.8671232	0.8682925	0.8704444	0.9087450	0.9059536	0.9149184	0.9238754	0.9298224	0.8701700
58°	0.8721572	0.8727157	0.8738850	0.8760369	0.9124680	0.9096766	0.9186414	0.9275984	0.9335454	0.8705050
59°	0.8778547	0.8784132	0.8795825	0.8817344	0.9162510	0.9134596	0.9224244	0.9313814	0.9373284	0.8708400

	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°
00'	0.86602540	0.87461971	0.88294759	0.89100653	0.89897905	0.90683079	0.91354546	0.92010485	0.92718384	0.93427234	0.94137043	0.94847813
01'	0.86617081	0.87476070	0.88308412	0.89113055	0.89902153	0.90684309	0.91366373	0.92061847	0.92772927	0.93480643	0.94184913	0.94895743
02'	0.86631615	0.87490161	0.88322057	0.89127050	0.89904893	0.90685530	0.91378193	0.92073302	0.92784014	0.93491741	0.94196011	0.94906841
03'	0.86646141	0.87504245	0.88335352	0.89140237	0.89917626	0.90696765	0.91390006	0.92084540	0.92795252	0.93503000	0.94207271	0.94918101
04'	0.86660660	0.87518322	0.88349325	0.89153416	0.89930351	0.90707989	0.91401810	0.92095807	0.92806519	0.93514277	0.94218548	0.94930378
05'	0.86675165	0.87532391	0.88363294	0.89166589	0.89943048	0.90729150	0.91413607	0.92107218	0.92817930	0.93527698	0.94231369	0.94944149
06'	0.86689675	0.87546453	0.88377263	0.89179753	0.89955770	0.90749402	0.91425396	0.92118541	0.92828654	0.93539948	0.94244120	0.94957919
07'	0.86704172	0.87560507	0.88391071	0.89192910	0.89968480	0.90769845	0.91437177	0.92129856	0.92839369	0.93550659	0.94256871	0.94971690
08'	0.86718661	0.87574554	0.88403771	0.89206060	0.89981175	0.90789880	0.91448950	0.92141164	0.92850080	0.93561370	0.94269622	0.94985461
09'	0.86733143	0.87588594	0.88417344	0.89219202	0.89993862	0.90794110	0.91460716	0.92152463	0.92860793	0.93572081	0.94282372	0.94999232
10'	0.86747618	0.87602626	0.88430949	0.89232336	0.90006541	0.90753330	0.91472474	0.92163755	0.92871506	0.93582791	0.94295123	0.95012994
11'	0.86762085	0.87616651	0.88444527	0.89245463	0.90019213	0.90765543	0.91484224	0.92175039	0.92882217	0.93593502	0.94307874	0.95026765
12'	0.86776548	0.87630668	0.88458098	0.89258589	0.90031877	0.90777748	0.91495976	0.92186313	0.92892928	0.93604213	0.94320625	0.95040536
13'	0.86791009	0.87644678	0.88471671	0.89271714	0.90044534	0.90789946	0.91507702	0.92197584	0.92903639	0.93614920	0.94333377	0.95054307
14'	0.86805464	0.87658681	0.88485216	0.89284798	0.90057183	0.90802135	0.91519429	0.92208844	0.92914300	0.93625627	0.94346129	0.95068078
15'	0.86819922	0.87672676	0.88498764	0.89297895	0.90069824	0.90814317	0.91531148	0.92220097	0.92925553	0.93636334	0.94358881	0.95081849
16'	0.86834372	0.87686664	0.88512304	0.89310983	0.90082458	0.90826492	0.91542866	0.92231347	0.92936800	0.93647087	0.94371633	0.95095620
17'	0.86848836	0.87700644	0.88525837	0.89324045	0.90095084	0.90838659	0.91554563	0.92242597	0.92948049	0.93657794	0.94384386	0.95109391
18'	0.86863315	0.87714617	0.88539363	0.89337139	0.90107702	0.90850818	0.91566259	0.92253809	0.92959293	0.93668501	0.94397139	0.95123162
19'	0.86877760	0.87728582	0.88552881	0.89350205	0.90120313	0.90862963	0.91577949	0.92265031	0.92970537	0.93679208	0.94409892	0.95136933
20'	0.86892219	0.87742540	0.88566391	0.89363264	0.90132916	0.90875119	0.91589628	0.92276245	0.92981780	0.93689915	0.94422645	0.95150704
21'	0.86906655	0.87756490	0.88579894	0.89376315	0.90145512	0.90887249	0.91601301	0.92287451	0.92993024	0.93700622	0.94435398	0.95164475
22'	0.86921074	0.87770434	0.88593398	0.89389359	0.90158100	0.90899377	0.91612966	0.92298649	0.93004267	0.93711330	0.94448151	0.95178246
23'	0.86935491	0.87784369	0.88606870	0.89402395	0.90170680	0.90911498	0.91624622	0.92309839	0.93015461	0.93722033	0.94460904	0.95192017
24'	0.86949933	0.87798298	0.88620358	0.89415424	0.90183253	0.90923611	0.91636273	0.92321022	0.93026633	0.93732735	0.94473657	0.95205788
25'	0.86964358	0.87812219	0.88633831	0.89428445	0.90195818	0.90935716	0.91647915	0.92332197	0.93037805	0.93743437	0.94486410	0.95219559
26'	0.86978781	0.87826132	0.88647297	0.89441458	0.90208375	0.90947814	0.91659549	0.92343364	0.93048950	0.93754132	0.94499163	0.95233330
27'	0.86993256	0.87840038	0.88660755	0.89454464	0.90220925	0.90959904	0.91671175	0.92354523	0.93060481	0.93764833	0.94511916	0.95247101
28'	0.87007697	0.87853937	0.88674205	0.89467462	0.90233467	0.90971986	0.91682794	0.92365674	0.93072019	0.93775535	0.94524669	0.95260872
29'	0.87022124	0.87867828	0.88687648	0.89480455	0.90246002	0.90984060	0.91694405	0.92376818	0.93083550	0.93786237	0.94537422	0.95274643
30'	0.87036550	0.87881711	0.88701083	0.89493436	0.90258529	0.90996127	0.91706008	0.92387953	0.93095075	0.93796939	0.94550175	0.95288414
31'	0.87050980	0.87895588	0.88714511	0.89506412	0.90271048	0.91008186	0.91717603	0.92399081	0.93106592	0.93807643	0.94562928	0.95302185
32'	0.87065420	0.87909456	0.88727932	0.89519380	0.90283559	0.91019378	0.91729190	0.92410201	0.93118103	0.93818345	0.94575681	0.95315956
33'	0.87079859	0.87923318	0.88741345	0.89532340	0.90296063	0.91032281	0.91740770	0.92421314	0.93129615	0.93829047	0.94588434	0.95329727
34'	0.87094287	0.87937172	0.88754750	0.89545293	0.90308560	0.91044317	0.91752342	0.92432418	0.93141126	0.93840149	0.94601187	0.95343498
35'	0.87108719	0.87951018	0.88768148	0.89558238	0.90321048	0.91056346	0.91763906	0.92443515	0.93152637	0.93851251	0.94613940	0.95357269
36'	0.87123151	0.87964857	0.88781539	0.89571174	0.90333529	0.91068366	0.91775463	0.92454603	0.93164149	0.93862353	0.94626703	0.95371040
37'	0.87137583	0.87978689	0.88794929	0.89584108	0.90346003	0.91080379	0.91787011	0.92465684	0.93175660	0.93873455	0.94639466	0.95384811
38'	0.87152015	0.87992513	0.88808317	0.89597041	0.90358489	0.91092384	0.91798552	0.92476758	0.93187176	0.93884557	0.94652229	0.95398582
39'	0.87166447	0.88006330	0.88821645	0.89610954	0.90370977	0.91104382	0.91810085	0.92487823	0.93198691	0.93895659	0.94665002	0.95412353
40'	0.87180879	0.88020139	0.88835025	0.89624851	0.90383377	0.91116371	0.91821611	0.92498880	0.93210209	0.93906717	0.94677765	0.95426124
41'	0.87195311	0.88033941	0.88848378	0.89638751	0.90395820	0.91128353	0.91833128	0.92509930	0.93221727	0.93917785	0.94690528	0.95439895
42'	0.87209742	0.88047736	0.88861723	0.89652648	0.90408255	0.91140328	0.91844648	0.92520972	0.93233245	0.93928843	0.94703291	0.95453666
43'	0.87224174	0.88061522	0.88875041	0.89666548	0.90420683	0.91152294	0.91856140	0.92532006	0.93244763	0.93939901	0.94716044	0.95467437
44'	0.87238605	0.88075302	0.88888391	0.89680445	0.90433102	0.91164253	0.91867635	0.92543032	0.93256281	0.93950959	0.94728797	0.95481208
45'	0.87253037	0.88089074	0.88901714	0.89694324	0.90445515	0.91176204	0.91879111	0.92554051	0.93267800	0.93962017	0.94741550	0.95494979
46'	0.87267468	0.88102839	0.88915030	0.89708136	0.90457919	0.91188148	0.91890601	0.92565061	0.93279319	0.93973075	0.94754303	0.95508750
47'	0.87281891	0.88116596	0.88928237	0.89721990	0.90470316	0.91200084	0.91902071	0.92576064	0.93290833	0.93984131	0.94767056	0.95522521
48'	0.87296315	0.88130345	0.88941437	0.89735837	0.90482705	0.91212012	0.91913534	0.92587059	0.93302352	0.93995189	0.94779809	0.95536292
49'	0.87310738	0.88144088	0.88954530	0.89749678	0.90495087	0.91223932	0.91924989	0.92598046	0.93313871	0.94006247	0.94792562	0.95550063
50'	0.87325162	0.88157822	0.88967621	0.89763516	0.90507461	0.91235845	0.91936437	0.92609025	0.93325390	0.94017305	0.94805315	0.95563834
51'	0.87339585	0.88171550	0.88980714	0.89777332	0.90519827	0.91247750	0.91947877	0.92620000	0.93336909	0.94028364	0.94816373	0.95577605
52'	0.87354008	0.88185269	0.88993806	0.89791148	0.90532183	0.91259646	0.91959303	0.92630975	0.93348428	0.94039423	0.94827432	0.95591376
53'	0.87368431	0.88198982	0.89006893	0.89804957	0.90544537	0.91271536	0.91970733	0.92641950	0.93359947	0.94050481	0.94838491	0.95605147
54'	0.87382854	0.88212687	0.89019981	0.89818758	0.90556880	0.91283418	0.91982150	0.92652925	0.93371466	0.94061540	0.94849550	0.95618918
55'	0.87397277	0.88226384	0.89033072	0.89832551	0.90569214	0.91295293	0.91993559	0.92663900	0.93382985	0.94072600	0.94860609	0.95632689
56'	0.87411699	0.88240074	0.89046163	0.89846332	0.90581544	0.91307158	0.92004960	0.92674875	0.93394504	0.94083659	0.94871668	0.95646460
57'	0.87426122	0.88253757	0.89059246	0.89860115	0.90593864	0.91319017	0.92016353	0.92685850	0.93406023	0.94094717	0.94882727	0.95659631
58'	0.87440545	0.88267432	0.89072325	0.89873895	0.90606177	0.91330867	0.92027730	0.92696825	0.93417542	0.94105776	0.94893786	0.95672802
59'	0.87454968	0.88281099	0.89085404	0.89887674	0.90618482	0.91342711	0.92039116	0.92707800	0.93429061	0.94116835	0.94904845	0.95685973

	704	714	724	734	744	754	764	774	784	794
60	0.93187262	0.94551858	0.95105632	0.95630476	0.96126170	0.96592583	0.97029573	0.97437007	0.97814760	0.98162718
61	0.93178207	0.94561523	0.95114637	0.95630977	0.96134184	0.96600167	0.97036606	0.97443546	0.97820805	0.98168265
62	0.93169144	0.94570782	0.95123614	0.95647469	0.96142189	0.96607824	0.97043631	0.97450577	0.97827839	0.98173803
63	0.93160073	0.94580233	0.95132582	0.95655954	0.96150187	0.96615132	0.97050647	0.97457600	0.97834867	0.98179332
64	0.931510594	0.94589870	0.95141534	0.95664430	0.96158176	0.96622632	0.97057856	0.97464615	0.97841986	0.98184819
65	0.931420808	0.94599610	0.95150496	0.95672898	0.96166158	0.96629724	0.97064656	0.97469621	0.97848996	0.98190367
66	0.9313312812	0.94609536	0.95159448	0.95681358	0.96174131	0.96637608	0.97071648	0.97474619	0.97855899	0.98195871
67	0.9312418710	0.94619454	0.95168377	0.95689811	0.96182096	0.96645504	0.97078632	0.97479609	0.97862833	0.98201368
68	0.9311525699	0.94629365	0.95177261	0.95698255	0.96190053	0.96653351	0.97085608	0.97484601	0.97869769	0.98206856
69	0.9310634881	0.94639267	0.95186126	0.95706691	0.96198002	0.96661200	0.97092575	0.97489565	0.97876686	0.98212336
70	0.9309745254	0.94649161	0.95194913	0.95715118	0.96205943	0.96669043	0.97099534	0.97494529	0.97883625	0.98217807
71	0.9308857220	0.94659046	0.95203703	0.95723538	0.96213875	0.96676884	0.97106485	0.97501487	0.97890582	0.98223270
72	0.9307970877	0.94668922	0.95212493	0.95731950	0.96221799	0.96684723	0.97113428	0.97508436	0.97897539	0.98228725
73	0.9307085727	0.94678796	0.95221282	0.95740353	0.96229716	0.96692565	0.97120363	0.97515376	0.97904483	0.98234172
74	0.9306201778	0.94688659	0.95230078	0.95748749	0.96237624	0.96700406	0.97127299	0.97522308	0.97911419	0.98239610
75	0.9305318022	0.94698513	0.95238930	0.95757126	0.96245524	0.96708249	0.97134207	0.97529232	0.97918357	0.98245040
76	0.9304434272	0.94708359	0.95247844	0.95765515	0.96253416	0.96716096	0.97141117	0.97536168	0.97925288	0.98250461
77	0.9303550524	0.94718198	0.95256700	0.95773877	0.96261299	0.96723931	0.97148019	0.97543105	0.97932230	0.98255875
78	0.9302666775	0.94728028	0.95265548	0.95782258	0.96269175	0.96731764	0.97154912	0.97550044	0.97939178	0.98261280
79	0.9301783026	0.94737858	0.95274408	0.95790605	0.96277109	0.96739593	0.97161797	0.97556985	0.97946126	0.98266676
80	0.9300899277	0.94747684	0.95283280	0.95798951	0.96284991	0.96747422	0.97168674	0.97563928	0.97953084	0.98272075
81	0.9300015528	0.94757509	0.95292144	0.95807270	0.96292752	0.96755255	0.97175543	0.97570870	0.97960042	0.98277445
82	0.9299131779	0.94767335	0.95301046	0.95815621	0.96300595	0.96763084	0.97182404	0.97577816	0.97967000	0.98282816
83	0.9298248030	0.94777161	0.95309933	0.95823943	0.96308430	0.96770917	0.97189256	0.97584757	0.97973957	0.98288186
84	0.9297364281	0.94786987	0.95318866	0.95832258	0.96316257	0.96778745	0.97196100	0.97591708	0.97980918	0.98293535
85	0.9296480532	0.94796813	0.95327808	0.95840564	0.96324075	0.96786578	0.97202936	0.97598561	0.97987879	0.98298882
86	0.9295596783	0.94806639	0.95336741	0.95848862	0.96331886	0.96794411	0.97209764	0.97605415	0.97994830	0.98304220
87	0.9294713034	0.94816463	0.95345614	0.95857152	0.96339688	0.96802244	0.97216593	0.97612267	0.97999785	0.98309550
88	0.9293829285	0.94826287	0.95354485	0.95865434	0.96347482	0.96810077	0.97223424	0.97619122	0.98006740	0.98314872
89	0.9292945536	0.94836111	0.95363356	0.95873709	0.96355266	0.96817917	0.97230257	0.97625951	0.98013691	0.98320186
90	0.9292061787	0.94845935	0.95372227	0.95881984	0.96363045	0.96825763	0.97237094	0.97632780	0.98020642	0.98325499
91	0.9291178038	0.94855759	0.95381098	0.95890231	0.96370815	0.96833604	0.97243937	0.97639609	0.98027593	0.98330808
92	0.9290294289	0.94865583	0.95389913	0.95898481	0.96378576	0.96841449	0.97250784	0.97646438	0.98034544	0.98336117
93	0.9289410540	0.94875407	0.95398728	0.95906731	0.96386330	0.96849294	0.97257637	0.97653267	0.98041495	0.98341426
94	0.9288526791	0.94885231	0.95407543	0.95914955	0.96394075	0.96857143	0.97264489	0.97660096	0.98048446	0.98346735
95	0.9287643042	0.94895055	0.95416358	0.95923181	0.96401812	0.96864992	0.97271342	0.97666925	0.98055397	0.98352044
96	0.9286759293	0.94904879	0.95425173	0.95931407	0.96409549	0.96872841	0.97278195	0.97673754	0.98062348	0.98357353
97	0.9285875544	0.94914703	0.95433988	0.95939634	0.96417281	0.96880684	0.97285048	0.97680583	0.98069299	0.98362662
98	0.9284991795	0.94924527	0.95442803	0.95947860	0.96425012	0.96888527	0.97291901	0.97687412	0.98076250	0.98367971
99	0.9284108046	0.94934351	0.95451618	0.95956086	0.96432743	0.96896370	0.97298754	0.97694241	0.98083201	0.98373280
100	0.9283224297	0.94944175	0.95460433	0.95964312	0.96440474	0.96904213	0.97305607	0.97701070	0.98090152	0.98378589
101	0.9282340548	0.94954000	0.95469248	0.95972538	0.96448205	0.96912056	0.97312460	0.97707919	0.98097103	0.98383898
102	0.9281456799	0.94963824	0.95478063	0.95980764	0.96455936	0.96919900	0.97319313	0.97714768	0.98104054	0.98389207
103	0.9280573050	0.94973648	0.95486878	0.95989090	0.96463667	0.96927744	0.97326166	0.97721617	0.98111005	0.98394516
104	0.9279689301	0.94983472	0.95495693	0.95997416	0.96471398	0.96935588	0.97333019	0.97728466	0.98117956	0.98400000
105	0.9278805552	0.94993296	0.95504508	0.96005742	0.96479129	0.96943432	0.97339872	0.97735315	0.98124907	0.98405484
106	0.9277921803	0.95003120	0.95513323	0.96014068	0.96486860	0.96951276	0.97346725	0.97742164	0.98131858	0.98410968
107	0.9277038054	0.95012944	0.95522138	0.96022394	0.96494591	0.96959120	0.97354078	0.97749013	0.98138809	0.98416452
108	0.9276154305	0.95022768	0.95530953	0.96030720	0.96502319	0.96966964	0.97361431	0.97755862	0.98145760	0.98421936
109	0.9275270556	0.95032592	0.95539768	0.96039046	0.96509972	0.96974808	0.97368784	0.97762711	0.98152661	0.98427420
110	0.9274386807	0.95042416	0.95548583	0.96047372	0.96517627	0.96982652	0.97376137	0.97769560	0.98159562	0.98432904
111	0.9273503058	0.95052240	0.95557398	0.96055698	0.96525272	0.96990506	0.97383490	0.97776409	0.98166463	0.98438388
112	0.9272619309	0.95062064	0.95566213	0.96064024	0.96532927	0.96998360	0.97390843	0.97783258	0.98173364	0.98443872
113	0.9271735560	0.95071888	0.95575028	0.96072350	0.96540572	0.97006214	0.97398196	0.97790107	0.98180265	0.98449356
114	0.9270851811	0.95081712	0.95583843	0.96080676	0.96548227	0.97014068	0.97405549	0.97796956	0.98187166	0.98454840
115	0.9270000000	0.95091536	0.95592658	0.96089002	0.96555882	0.97021920	0.97412902	0.97803805	0.98194067	0.98460324
116	0.9269148191	0.95101360	0.95601473	0.96097328	0.96563537	0.97029772	0.97420745	0.97810654	0.98200968	0.98465808
117	0.9268296382	0.95111184	0.95610288	0.96105654	0.96571192	0.97037624	0.97428588	0.97817503	0.98207869	0.98471292
118	0.9267444573	0.95121008	0.95619103	0.96113980	0.96578647	0.97045476	0.97436431	0.97824352	0.98214770	0.98476776
119	0.9266592764	0.95130832	0.95627918	0.96122306	0.96586102	0.97053328	0.97444274	0.97831201	0.98221671	0.98482260
120	0.9265740955	0.95140656	0.95636733	0.96130632	0.96593557	0.97061180	0.97452117	0.97837950	0.98228572	0.98487744
121	0.9264889146	0.95150480	0.95645548	0.96138958	0.96601002	0.97069032	0.97460010	0.97844799	0.98235473	0.98493228
122	0.9264037337	0.95160304	0.95654363	0.96147284	0.96608817	0.97076884	0.97467903	0.97851648	0.98242374	0.98498712
123	0.9263185528	0.95170128	0.95663178	0.96155610	0.96616632	0.97084736	0.97475796	0.97858497	0.98249275	0.98504196
124	0.9262333719	0.95179952	0.95671993	0.96163936	0.96624447	0.97092588	0.97483689	0.97865346	0.98256176	0.98509680
125	0.9261481910	0.95189776	0.95680808	0.96172262	0.96632262	0.97100440	0.97491582	0.97872195	0.98263077	0.98515164
126	0.9260630101	0.95199600	0.95689623	0.96180588	0.96640077	0.97108292	0.97499475	0.97879044	0.98269978	0.98520648
127	0.9259778292	0.95209424	0.95698438	0.96188914	0.96647902	0.97116144	0.97507368	0.97885893	0.98276879	0.98526132
128	0.9258926483	0.95219248	0.95707253	0.96197240	0.96655727	0.97124000	0.97515261	0.97892742	0.98283780	0.98531616
129	0.9258074674	0.95229072	0.95716068	0.96205566	0.96663552	0.97131852	0.97523154	0.97899616	0.98290681	0.98537100
130	0.9257222865	0.95238896	0.95724883	0.96213892	0.96671377	0.97139704	0.97531047	0.97906489	0.98297582	0.98542584
131	0.9256371056	0.95248720	0.95733698	0.96222218	0.96679202	0.97147556	0.97538940	0.97913363	0.98304483	0.98548068
132	0.9255519247	0.95258544	0.95742513	0.96230544	0.96687027	0.97155408	0.97546833	0.97920237	0.98311384	0.98553552
133	0.9254667438	0.95268368	0.95751328	0.96238870	0.96694852	0.97163260	0.97554726	0.97927113	0.98318285	0.98559036
134	0.9253815629	0.95278192</								

	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°
00'	0.98480775	0.98768834	0.99026807	0.99254615	0.99452190	0.99619470	0.99754405	0.99862954	0.99939083	0.99984770
01'	0.98485822	0.98773380	0.99030851	0.99258156	0.99455226	0.99622701	0.99757636	0.99866185	0.99942314	0.99988001
02'	0.98490861	0.98779118	0.99035322	0.99262627	0.99459724	0.99627176	0.99762111	0.99870660	0.99946849	0.99992536
03'	0.98495892	0.98784448	0.99039794	0.99267098	0.99464224	0.99631648	0.99766586	0.99875149	0.99951338	0.99997073
04'	0.98500914	0.98789769	0.99044266	0.99271569	0.99468724	0.99636122	0.99771059	0.99880612	0.99955827	0.99999608
05'	0.98505927	0.98795082	0.99048738	0.99276040	0.99473224	0.99640596	0.99775533	0.99885075	0.99960316	0.99999608
06'	0.98510933	0.98799987	0.99053210	0.99280511	0.99477724	0.99645070	0.99780007	0.99889538	0.99964805	0.99999608
07'	0.98515930	0.98804883	0.99057682	0.99284982	0.99482224	0.99649544	0.99784481	0.99893991	0.99969294	0.99999608
08'	0.98520918	0.98809779	0.99062154	0.99289453	0.99486724	0.99654018	0.99788955	0.99898454	0.99973783	0.99999608
09'	0.98525899	0.98814675	0.99066626	0.99293924	0.99491224	0.99658492	0.99793429	0.99902917	0.99978272	0.99999608
10'	0.98530871	0.98819571	0.99071098	0.99298395	0.99495724	0.99662966	0.99797903	0.99907381	0.99982761	0.99999608
11'	0.98535835	0.98824467	0.99075570	0.99302866	0.99500224	0.99667440	0.99802377	0.99911845	0.99987250	0.99999608
12'	0.98540799	0.98829363	0.99080042	0.99307337	0.99504724	0.99671914	0.99806851	0.99916314	0.99991739	0.99999608
13'	0.98545737	0.98834259	0.99084514	0.99311808	0.99509224	0.99676388	0.99811325	0.99920803	0.99996228	0.99999608
14'	0.98550676	0.98839155	0.99088986	0.99316279	0.99513724	0.99680862	0.99815799	0.99925292	0.99999608	0.99999608
15'	0.98555606	0.98844051	0.99093458	0.99320750	0.99518224	0.99685336	0.99820273	0.99929781	0.99999608	0.99999608
16'	0.98560528	0.98848947	0.99097930	0.99325221	0.99522724	0.99689810	0.99824747	0.99934270	0.99999608	0.99999608
17'	0.98565442	0.98853843	0.99102402	0.99329692	0.99527224	0.99694284	0.99829221	0.99938759	0.99999608	0.99999608
18'	0.98570347	0.98858739	0.99106874	0.99334163	0.99531724	0.99698758	0.99833695	0.99943248	0.99999608	0.99999608
19'	0.98575244	0.98863635	0.99111346	0.99338634	0.99536224	0.99703232	0.99838171	0.99947737	0.99999608	0.99999608
20'	0.98580133	0.98868531	0.99115818	0.99343105	0.99540724	0.99707706	0.99842645	0.99952226	0.99999608	0.99999608
21'	0.98585013	0.98873427	0.99120290	0.99347576	0.99545224	0.99712180	0.99847119	0.99956715	0.99999608	0.99999608
22'	0.98589895	0.98878323	0.99124762	0.99352047	0.99549724	0.99716654	0.99851593	0.99961204	0.99999608	0.99999608
23'	0.98594776	0.98883219	0.99129234	0.99356518	0.99554224	0.99721128	0.99856067	0.99965693	0.99999608	0.99999608
24'	0.98599657	0.98888115	0.99133706	0.99360989	0.99558724	0.99725602	0.99860541	0.99970182	0.99999608	0.99999608
25'	0.98604538	0.98893011	0.99138178	0.99365460	0.99563224	0.99730076	0.99865015	0.99974671	0.99999608	0.99999608
26'	0.98609419	0.98897907	0.99142650	0.99369931	0.99567724	0.99734550	0.99869489	0.99979160	0.99999608	0.99999608
27'	0.98614300	0.98902803	0.99147122	0.99374402	0.99572224	0.99739024	0.99873963	0.99983649	0.99999608	0.99999608
28'	0.98619181	0.98907699	0.99151594	0.99378873	0.99576724	0.99743498	0.99878437	0.99988138	0.99999608	0.99999608
29'	0.98624062	0.98912595	0.99156066	0.99383344	0.99581224	0.99747972	0.99882911	0.99992627	0.99999608	0.99999608
30'	0.98628943	0.98917491	0.99160538	0.99387815	0.99585724	0.99752446	0.99887385	0.99997116	0.99999608	0.99999608
31'	0.98633824	0.98922387	0.99165010	0.99392286	0.99590224	0.99756920	0.99891859	0.99999608	0.99999608	0.99999608
32'	0.98638705	0.98927283	0.99169482	0.99396757	0.99594724	0.99761394	0.99896333	0.99999608	0.99999608	0.99999608
33'	0.98643586	0.98932179	0.99173954	0.99401228	0.99599224	0.99765868	0.99900807	0.99999608	0.99999608	0.99999608
34'	0.98648467	0.98937075	0.99178426	0.99405699	0.99603724	0.99770342	0.99905281	0.99999608	0.99999608	0.99999608
35'	0.98653348	0.98941971	0.99182898	0.99410170	0.99608224	0.99774816	0.99909755	0.99999608	0.99999608	0.99999608
36'	0.98658229	0.98946867	0.99187370	0.99414641	0.99612724	0.99779290	0.99914229	0.99999608	0.99999608	0.99999608
37'	0.98663110	0.98951763	0.99191842	0.99419112	0.99617224	0.99783764	0.99918703	0.99999608	0.99999608	0.99999608
38'	0.98667991	0.98956659	0.99196314	0.99423583	0.99621724	0.99788238	0.99923177	0.99999608	0.99999608	0.99999608
39'	0.98672872	0.98961555	0.99200786	0.99428054	0.99626224	0.99792712	0.99927651	0.99999608	0.99999608	0.99999608
40'	0.98677753	0.98966451	0.99205258	0.99432525	0.99630724	0.99797186	0.99932125	0.99999608	0.99999608	0.99999608
41'	0.98682634	0.98971347	0.99209730	0.99436996	0.99635224	0.99801660	0.99936599	0.99999608	0.99999608	0.99999608
42'	0.98687515	0.98976243	0.99214202	0.99441467	0.99639724	0.99806134	0.99941073	0.99999608	0.99999608	0.99999608
43'	0.98692396	0.98981139	0.99218674	0.99445938	0.99644224	0.99810608	0.99945547	0.99999608	0.99999608	0.99999608
44'	0.98697277	0.98986035	0.99223146	0.99450409	0.99648724	0.99815082	0.99950021	0.99999608	0.99999608	0.99999608
45'	0.98702158	0.98990931	0.99227618	0.99454880	0.99653224	0.99819556	0.99954495	0.99999608	0.99999608	0.99999608
46'	0.98707039	0.98995827	0.99232090	0.99459351	0.99657724	0.99824030	0.99958969	0.99999608	0.99999608	0.99999608
47'	0.98711920	0.99000723	0.99236562	0.99463822	0.99662224	0.99828504	0.99963443	0.99999608	0.99999608	0.99999608
48'	0.98716801	0.99005619	0.99241034	0.99468293	0.99666724	0.99832978	0.99967917	0.99999608	0.99999608	0.99999608
49'	0.98721682	0.99010515	0.99245506	0.99472764	0.99671224	0.99837452	0.99972391	0.99999608	0.99999608	0.99999608
50'	0.98726563	0.99015411	0.99250000	0.99477235	0.99675724	0.99841926	0.99976865	0.99999608	0.99999608	0.99999608
51'	0.98731444	0.99020307	0.99254472	0.99481706	0.99680224	0.99846400	0.99981339	0.99999608	0.99999608	0.99999608
52'	0.98736325	0.99025203	0.99258944	0.99486177	0.99684724	0.99850874	0.99985813	0.99999608	0.99999608	0.99999608
53'	0.98741206	0.99030099	0.99263416	0.99490648	0.99689224	0.99855348	0.99990287	0.99999608	0.99999608	0.99999608
54'	0.98746087	0.99034995	0.99267888	0.99495119	0.99693724	0.99859822	0.99994761	0.99999608	0.99999608	0.99999608
55'	0.98750968	0.99039891	0.99272360	0.99499590	0.99698224	0.99864296	0.99999235	0.99999608	0.99999608	0.99999608
56'	0.98755849	0.99044787	0.99276832	0.99504061	0.99702724	0.99868770	0.99999608	0.99999608	0.99999608	0.99999608
57'	0.98760730	0.99049683	0.99281304	0.99508532	0.99707224	0.99873244	0.99999608	0.99999608	0.99999608	0.99999608
58'	0.98765611	0.99054579	0.99285776	0.99513003	0.99711724	0.99877718	0.99999608	0.99999608	0.99999608	0.99999608
59'	0.98770492	0.99059475	0.99290248	0.99517474	0.99716224	0.99882192	0.99999608	0.99999608	0.99999608	0.99999608

TABLA TRIGONOMETRICA PARA EL
C O S E N O

	0°	30°	45°	60°	90°
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

000	010	020	030	040	050	060	070	080	090
1.00000000	0.99984770	0.99939083	0.99862954	0.99756405	0.99619470	0.99452190	0.99254615	0.99026807	0.98768934
0.99999996	0.99984258	0.99938043	0.99861427	0.99754372	0.99616930	0.99449145	0.99251666	0.99022754	0.98764279
0.99999983	0.99983737	0.99937335	0.99859892	0.99752330	0.99614982	0.99447391	0.99249506	0.99018493	0.98759716
0.99999962	0.99983209	0.99935999	0.99858348	0.99750280	0.99613024	0.99444800	0.99247392	0.99016424	0.98755145
0.99999932	0.99982671	0.99934554	0.99856796	0.99748221	0.99611076	0.99442209	0.99245364	0.99014346	0.98750565
0.99999894	0.99982125	0.99933101	0.99855236	0.99746154	0.99609128	0.99439660	0.99243375	0.99012268	0.98745977
0.99999848	0.99981571	0.99931649	0.99853667	0.99744078	0.99607180	0.99437074	0.99241319	0.99010190	0.98741381
0.99999793	0.99981009	0.99930197	0.99852090	0.99741994	0.99605232	0.99434483	0.99239294	0.98998112	0.98736774
0.99999729	0.99980437	0.99928745	0.99850504	0.99739902	0.99603284	0.99431892	0.99237270	0.98996034	0.98732143
0.99999657	0.99979858	0.99927294	0.99848918	0.99737801	0.99601336	0.99429301	0.99235270	0.98993956	0.98727541
0.99999577	0.99979270	0.99925842	0.99847307	0.99735692	0.99599388	0.99426710	0.99233270	0.98991878	0.98722911
0.99999488	0.99978673	0.99924391	0.99845694	0.99733574	0.99597440	0.99424119	0.99231270	0.98989800	0.98718319
0.99999391	0.99978068	0.99922940	0.99844077	0.99731448	0.99595492	0.99421528	0.99229270	0.98987722	0.98713717
0.99999285	0.99977455	0.99921489	0.99842448	0.99729313	0.99593544	0.99418937	0.99227270	0.98985644	0.98709115
0.99999171	0.99976833	0.99920037	0.99840812	0.99727170	0.99591596	0.99416346	0.99225270	0.98983566	0.98704513
0.99999048	0.99976203	0.99918586	0.99839167	0.99725019	0.99589648	0.99413755	0.99223270	0.98981488	0.98700000
0.99998917	0.99975564	0.99917135	0.99837514	0.99722859	0.99587700	0.99411164	0.99221270	0.98979410	0.98695497
0.99998777	0.99974917	0.99915684	0.99835852	0.99720690	0.99585752	0.99408573	0.99219270	0.98977332	0.98691000
0.99998633	0.99974264	0.99914233	0.99834182	0.99718513	0.99583804	0.99405982	0.99217270	0.98975254	0.98686507
0.99998473	0.99973597	0.99912782	0.99832503	0.99716328	0.99581856	0.99403391	0.99215270	0.98973176	0.98682024
0.99998308	0.99972924	0.99911331	0.99830816	0.99714134	0.99579908	0.99400800	0.99213270	0.98971100	0.98677541
0.99998134	0.99972243	0.99909880	0.99829120	0.99711932	0.99577960	0.99398209	0.99211270	0.98969022	0.98673058
0.99997953	0.99971554	0.99908429	0.99827416	0.99709722	0.99576012	0.99395618	0.99209270	0.98966944	0.98668575
0.99997762	0.99970855	0.99906978	0.99825704	0.99707503	0.99574064	0.99393027	0.99207270	0.98964866	0.98664092
0.99997563	0.99970149	0.99905527	0.99823983	0.99705275	0.99572116	0.99390436	0.99205270	0.98962788	0.98660000
0.99997356	0.99969434	0.99904076	0.99822253	0.99703039	0.99570168	0.99387845	0.99203270	0.98960710	0.98655517
0.99997140	0.99968711	0.99902625	0.99820514	0.99700795	0.99568220	0.99385254	0.99201270	0.98958632	0.98651034
0.99996916	0.99967979	0.99901174	0.99818769	0.99698542	0.99566272	0.99382663	0.99199270	0.98956554	0.98646551
0.99996683	0.99967239	0.99899723	0.99817015	0.99696781	0.99564324	0.99380072	0.99197270	0.98954476	0.98642068
0.99996442	0.99966490	0.99898272	0.99815252	0.99695011	0.99562376	0.99377481	0.99195270	0.98952398	0.98637585
0.99996192	0.99965733	0.99896821	0.99813480	0.99693241	0.99560428	0.99374890	0.99193270	0.98950320	0.98633102
0.99995934	0.99964967	0.99895370	0.99811700	0.99691474	0.99558480	0.99372300	0.99191270	0.98948242	0.98628619
0.99995668	0.99964193	0.99893919	0.99810000	0.99689700	0.99556532	0.99369709	0.99189270	0.98946164	0.98624136
0.99995393	0.99963410	0.99892468	0.99808290	0.99687920	0.99554584	0.99367118	0.99187270	0.98944086	0.98619653
0.99995109	0.99962619	0.99891017	0.99806580	0.99686149	0.99552636	0.99364527	0.99185270	0.98942008	0.98615170
0.99994817	0.99961820	0.99889566	0.99804845	0.99684373	0.99550688	0.99361936	0.99183270	0.98939930	0.98610687
0.99994517	0.99961012	0.99888115	0.99803100	0.99682600	0.99548740	0.99359345	0.99181270	0.98937852	0.98606204
0.99994208	0.99960195	0.99886664	0.99801340	0.99680824	0.99546792	0.99356754	0.99179270	0.98935774	0.98601721
0.99993891	0.99959370	0.99885213	0.99799580	0.99679053	0.99544844	0.99354163	0.99177270	0.98933696	0.98597238
0.99993565	0.99958537	0.99883762	0.99797815	0.99677281	0.99542896	0.99351573	0.99175270	0.98931618	0.98592755
0.99993231	0.99957695	0.99882311	0.99796050	0.99675514	0.99540948	0.99349000	0.99173270	0.98929540	0.98588272
0.99992888	0.99956845	0.99880860	0.99794285	0.99673746	0.99538992	0.99346409	0.99171270	0.98927462	0.98584000
0.99992537	0.99955984	0.99879409	0.99792520	0.99671978	0.99537044	0.99343818	0.99169270	0.98925384	0.98579517
0.99992177	0.99955119	0.99877958	0.99790755	0.99670211	0.99535096	0.99341227	0.99167270	0.98923306	0.98575034
0.99991818	0.99954243	0.99876507	0.99788990	0.99668443	0.99533148	0.99338636	0.99165270	0.98921228	0.98570551
0.99991433	0.99953359	0.99875056	0.99787231	0.99666675	0.99531200	0.99336045	0.99163270	0.98919150	0.98566068
0.99991048	0.99952467	0.99873605	0.99785472	0.99664907	0.99529252	0.99333454	0.99161270	0.98917072	0.98561585
0.99990654	0.99951564	0.99872154	0.99783713	0.99663139	0.99527304	0.99330863	0.99159270	0.98915000	0.98557102
1.99990252	0.99950645	0.99870703	0.99781954	0.99661371	0.99525356	0.99328272	0.99157270	0.98912922	0.98552619
0.99989842	0.99949738	0.99869252	0.99780195	0.99659603	0.99523408	0.99325681	0.99155270	0.98910844	0.98548136
0.99989423	0.99948812	0.99867801	0.99778436	0.99657835	0.99521460	0.99323090	0.99153270	0.98908766	0.98543653
0.99988994	0.99947877	0.99866350	0.99776677	0.99656067	0.99519512	0.99320500	0.99151270	0.98906688	0.98539170
0.99988550	0.99946934	0.99864899	0.99774918	0.99654299	0.99517564	0.99317909	0.99149270	0.98904610	0.98534687
0.99988114	0.99945992	0.99863448	0.99773159	0.99652531	0.99515616	0.99315318	0.99147270	0.98902532	0.98530204
0.99987663	0.99945022	0.99861997	0.99771400	0.99650763	0.99513668	0.99312727	0.99145270	0.98900454	0.98525721
0.99987202	0.99944053	0.99860546	0.99769641	0.99648995	0.99511720	0.99310136	0.99143270	0.98898376	0.98521238
0.99986733	0.99943074	0.99859095	0.99767882	0.99647227	0.99509772	0.99307545	0.99141270	0.98896298	0.98516755
0.99986254	0.99942090	0.99857644	0.99766123	0.99645459	0.99507824	0.99304954	0.99139270	0.98894220	0.98512272
0.99985765	0.99941094	0.99856193	0.99764364	0.99643691	0.99505876	0.99302363	0.99137270	0.98892142	0.98507789
0.99985273	0.99940094	0.99854742	0.99762605	0.99641923	0.99503928	0.99300315	0.99135270	0.98890064	0.98503306

	189	111	120	130	140	150	160	170	180	190
00	0.98406725	0.98162718	0.97814760	0.97437006	0.97029573	0.96592583	0.96126170	0.95630476	0.95105652	0.94551858
01	0.98405728	0.98157144	0.97808708	0.97430459	0.97022531	0.96585500	0.96118148	0.95621968	0.95098459	0.94542383
02	0.98404731	0.98151601	0.97802648	0.97423903	0.97015482	0.96578509	0.96110317	0.95613450	0.95089756	0.94532901
03	0.98403734	0.98146030	0.97796579	0.97417339	0.97008424	0.96571466	0.96102479	0.95604925	0.95081053	0.94523414
04	0.98402737	0.98140450	0.97790502	0.97410766	0.97001358	0.96564402	0.96094633	0.95596392	0.95072350	0.94513912
05	0.98401740	0.98134863	0.97784417	0.97404186	0.96994284	0.96557337	0.96086844	0.95587851	0.95063646	0.94504401
06	0.98400743	0.98129266	0.97778324	0.97397597	0.96987202	0.96550273	0.96079055	0.95579300	0.95054941	0.94494891
07	0.98399746	0.98123662	0.97772222	0.97391000	0.96980111	0.96543208	0.96071266	0.95570744	0.95046237	0.94485380
08	0.98398749	0.98118049	0.97766112	0.97384394	0.96973012	0.96536143	0.96063477	0.95562189	0.95037532	0.94475869
09	0.98397752	0.98112428	0.97760000	0.97377781	0.96965905	0.96529078	0.96055688	0.95553633	0.95028827	0.94466358
10	0.98396755	0.98106799	0.97753867	0.97371159	0.96958796	0.96522013	0.96047899	0.95545074	0.95020122	0.94456847
11	0.98395758	0.98101161	0.97747732	0.97364529	0.96951667	0.96514948	0.96040110	0.95536519	0.95011417	0.94447336
12	0.98394761	0.98095514	0.97741589	0.97357890	0.96944535	0.96507883	0.96032321	0.95527964	0.95002712	0.94437825
13	0.98393764	0.98089861	0.97735439	0.97351244	0.96937395	0.96494019	0.96024532	0.95519409	0.94994007	0.94428314
14	0.98392767	0.98084199	0.97729279	0.97344589	0.96930247	0.96486160	0.96016743	0.95510854	0.94985292	0.94418803
15	0.98391770	0.98078528	0.97723111	0.97337924	0.96923091	0.96478302	0.96008954	0.95502299	0.94976587	0.94409292
16	0.98390773	0.98072849	0.97716935	0.97331255	0.96915927	0.96470443	0.95997165	0.95493744	0.94967882	0.94400781
17	0.98389776	0.98067162	0.97710750	0.97324575	0.96908754	0.96462584	0.95989316	0.95485189	0.94959174	0.94391270
18	0.98388779	0.98061466	0.97704557	0.97317887	0.96901573	0.96454725	0.95981467	0.95476634	0.94950469	0.94382759
19	0.98387782	0.98055762	0.97698357	0.97311191	0.96894394	0.96446866	0.95973618	0.95468079	0.94941764	0.94374248
20	0.98386785	0.98050050	0.97692147	0.97304487	0.96887217	0.96439007	0.95965769	0.95459524	0.94933059	0.94365737
21	0.98385788	0.98044329	0.97685930	0.97297792	0.96880040	0.96431148	0.95957920	0.95450969	0.94924354	0.94357226
22	0.98384791	0.98038600	0.97679704	0.97291054	0.96872868	0.96423289	0.95950071	0.95442414	0.94915649	0.94348715
23	0.98383794	0.98032863	0.97673470	0.97284325	0.96865696	0.96415430	0.95942222	0.95433859	0.94906944	0.94340204
24	0.98382797	0.98027117	0.97667222	0.97277589	0.96858514	0.96407571	0.95934373	0.95425304	0.94898239	0.94331693
25	0.98381800	0.98021364	0.97660977	0.97270842	0.96851326	0.96400712	0.95926524	0.95416749	0.94889534	0.94323182
26	0.98380803	0.98015602	0.97654719	0.97264089	0.96844137	0.96392853	0.95918675	0.95408194	0.94880829	0.94314671
27	0.98379806	0.98009831	0.97648451	0.97257327	0.96836949	0.96385000	0.95910826	0.95400139	0.94872124	0.94306160
28	0.98378809	0.98004053	0.97642174	0.97250557	0.96829731	0.96377142	0.95902977	0.95392084	0.94863419	0.94297649
29	0.98377812	0.97998266	0.97635893	0.97243779	0.96822503	0.96369284	0.95895128	0.95384029	0.94854714	0.94289138
30	0.98376815	0.97992471	0.97629601	0.97236992	0.96815273	0.96361425	0.95887279	0.95375974	0.94846009	0.94280627
31	0.98375818	0.97986667	0.97623303	0.97230197	0.96808045	0.96353566	0.95879430	0.95367919	0.94837304	0.94272116
32	0.98374821	0.97980855	0.97617002	0.97223394	0.96800817	0.96345708	0.95871581	0.95359864	0.94828599	0.94263605
33	0.98373824	0.97975035	0.97610674	0.97216583	0.96793579	0.96337849	0.95863732	0.95351809	0.94820094	0.94255094
34	0.98372827	0.97969220	0.97604351	0.97209764	0.96786351	0.96329990	0.95855883	0.95343754	0.94811589	0.94246583
35	0.98371830	0.97963400	0.97598018	0.97202936	0.96779124	0.96322131	0.95848034	0.95335700	0.94803084	0.94238072
36	0.98370833	0.97957525	0.97591676	0.97196100	0.96771897	0.96314272	0.95840185	0.95327645	0.94794579	0.94229561
37	0.98369836	0.97951672	0.97585327	0.97189256	0.96764651	0.96306413	0.95832336	0.95319590	0.94786074	0.94221050
38	0.98368839	0.97945819	0.97578969	0.97182404	0.96757423	0.96298554	0.95824487	0.95311535	0.94777569	0.94212539
39	0.98367842	0.97940000	0.97572602	0.97175543	0.96750197	0.96290695	0.95816638	0.95303480	0.94769064	0.94204028
40	0.98366845	0.97934162	0.97566222	0.97168674	0.96742969	0.96282836	0.95808789	0.95295425	0.94760559	0.94195517
41	0.98365848	0.97928317	0.97559845	0.97161797	0.96735741	0.96275000	0.95800940	0.95287370	0.94752054	0.94187006
42	0.98364851	0.97922481	0.97553454	0.97154912	0.96728513	0.96267161	0.95793091	0.95279315	0.94743549	0.94178495
43	0.98363854	0.97916636	0.97547055	0.97148019	0.96721285	0.96259322	0.95785242	0.95271260	0.94735044	0.94170000
44	0.98362857	0.97910767	0.97540648	0.97141111	0.96714000	0.96251483	0.95777393	0.95263205	0.94726539	0.94161495
45	0.98361860	0.97904857	0.97534232	0.97134207	0.96706714	0.96243644	0.95769544	0.95255150	0.94718034	0.94152990
46	0.98360863	0.97898919	0.97527809	0.97127289	0.96699428	0.96235805	0.95761695	0.95247095	0.94709529	0.94144485
47	0.98359866	0.97892963	0.97521376	0.97120363	0.96692142	0.96227966	0.95753846	0.95239040	0.94701024	0.94135980
48	0.98358869	0.97887039	0.97514935	0.97113428	0.96684856	0.96220127	0.95745997	0.95230985	0.94692519	0.94127475
49	0.98357872	0.97881086	0.97508487	0.97106485	0.96677570	0.96212288	0.95738148	0.95222930	0.94684014	0.94118970
50	0.98356875	0.97875132	0.97502039	0.97099534	0.96670284	0.96204449	0.95730299	0.95214875	0.94675509	0.94110465
51	0.98355878	0.97869180	0.97495585	0.97092575	0.96663000	0.96196610	0.95722450	0.95206820	0.94667004	0.94101960
52	0.98354881	0.97863228	0.97489129	0.97085618	0.96655715	0.96188771	0.95714601	0.95198765	0.94658499	0.94093455
53	0.98353884	0.97857274	0.97482669	0.97078663	0.96648430	0.96180932	0.95706752	0.95190710	0.94650000	0.94084950
54	0.98352887	0.97851320	0.97476210	0.97071708	0.96641144	0.96173093	0.95698903	0.95182655	0.94641495	0.94076445
55	0.98351890	0.97845366	0.97469751	0.97064753	0.96633858	0.96165254	0.95691054	0.95174600	0.94632990	0.94067940
56	0.98350893	0.97839412	0.97463292	0.97057798	0.96626562	0.96157415	0.95683205	0.95166545	0.94624485	0.94059435
57	0.98349896	0.97833458	0.97456833	0.97050843	0.96619306	0.96149576	0.95675356	0.95158490	0.94615980	0.94050930
58	0.98348899	0.97827504	0.97450374	0.97043888	0.96612147	0.96141737	0.95667507	0.95150435	0.94607475	0.94042425
59	0.98347902	0.97821550	0.97443915	0.97036933	0.96605000	0.96133898	0.95659658	0.95142380	0.94600000	0.94033920
60	0.98346905	0.97815596	0.97437456	0.97030000	0.96597853	0.96126059	0.95651809	0.95134325	0.94592500	0.94025415

	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°
00'	0.93969262	0.93358043	0.92718285	0.92050485	0.91354546	0.90630779	0.89879405	0.89104652	0.88294759	0.87461971
01'	0.93959309	0.93347814	0.92707485	0.92039114	0.91342710	0.90618481	0.89866649	0.89076443	0.88281099	0.87447364
02'	0.93949348	0.93337178	0.92696576	0.92027730	0.91330847	0.90606176	0.89853886	0.89047425	0.88246743	0.87433751
03'	0.93939379	0.93326734	0.92685660	0.92016353	0.91319617	0.90593864	0.89841115	0.89061060	0.88253757	0.87421630
04'	0.93929403	0.93316281	0.92674735	0.92004959	0.91307158	0.90581544	0.89828337	0.89047032	0.88260774	0.87410001
05'	0.93919418	0.93305821	0.92663803	0.91993558	0.91295293	0.90569216	0.89815551	0.89034528	0.88267384	0.87397366
06'	0.93909425	0.93295353	0.92652863	0.91982150	0.91283418	0.90556880	0.89802758	0.89021280	0.88274687	0.87384722
07'	0.93899425	0.93284878	0.92641915	0.91970733	0.91271536	0.90544537	0.89789956	0.89008025	0.88198982	0.87372072
08'	0.93889416	0.93274394	0.92630960	0.91959309	0.91259647	0.90532166	0.89777148	0.88994763	0.88185249	0.87359414
09'	0.93879400	0.93263902	0.92619996	0.91947877	0.91247749	0.90519827	0.89764331	0.88981493	0.88171549	0.87346746
10'	0.93869375	0.93253403	0.92609025	0.91936437	0.91235845	0.90507461	0.89751508	0.88968215	0.88157822	0.87334076
11'	0.93859343	0.93242895	0.92598045	0.91924989	0.91223932	0.90495087	0.89738676	0.88954930	0.88144087	0.87321406
12'	0.93849302	0.93232380	0.92587058	0.91913534	0.91212012	0.90482705	0.89725837	0.88941637	0.88130345	0.87308736
13'	0.93839254	0.93221857	0.92576064	0.91902071	0.91200084	0.90470314	0.89712990	0.88928337	0.88116596	0.87296066
14'	0.93829198	0.93211326	0.92565061	0.91890600	0.91188148	0.90457919	0.89700136	0.88915029	0.88102838	0.87283396
15'	0.93819134	0.93200787	0.92554050	0.91879121	0.91176204	0.90445515	0.89687274	0.88901714	0.88089074	0.87270726
16'	0.93809061	0.93190240	0.92543032	0.91867634	0.91164253	0.90433102	0.89674405	0.88888391	0.88075302	0.87258056
17'	0.93798989	0.93179685	0.92532006	0.91856140	0.91152294	0.90420683	0.89661528	0.88875061	0.88061522	0.87245386
18'	0.93788933	0.93169123	0.92520972	0.91844638	0.91140328	0.90408255	0.89648643	0.88861723	0.88047735	0.87232716
19'	0.93778878	0.93158552	0.92509930	0.91833128	0.91128353	0.90395820	0.89635751	0.88848378	0.88033941	0.87220046
20'	0.93768824	0.93147974	0.92498880	0.91821611	0.91116371	0.90383377	0.89622851	0.88835025	0.88020139	0.87207376
21'	0.93758768	0.93137388	0.92487823	0.91810085	0.91104382	0.90370927	0.89610944	0.88821665	0.88006330	0.87194706
22'	0.93748712	0.93126793	0.92476757	0.91798552	0.91092384	0.90358468	0.89598037	0.88808297	0.87992913	0.87182036
23'	0.93738655	0.93116192	0.92465684	0.91787011	0.91080379	0.90346003	0.89585106	0.88794921	0.87979489	0.87169366
24'	0.93728599	0.93105582	0.92454603	0.91775433	0.91068363	0.90333529	0.89572176	0.88781539	0.87966057	0.87156696
25'	0.93718543	0.93094964	0.92443515	0.91763804	0.91056346	0.90321048	0.89559238	0.88768148	0.87952618	0.87144026
26'	0.93708487	0.93084338	0.92432418	0.91752234	0.91044317	0.90308560	0.89545293	0.88754750	0.87939171	0.87131356
27'	0.93698430	0.93073705	0.92421314	0.91740700	0.91032281	0.90296063	0.89532340	0.88741345	0.87925718	0.87118686
28'	0.93688374	0.93063063	0.92410201	0.91729170	0.91020249	0.90283559	0.89519380	0.88727932	0.87912256	0.87106016
29'	0.93678318	0.93052414	0.92399081	0.91717603	0.91008184	0.90271048	0.89506412	0.88714511	0.87898758	0.87093346
30'	0.93668261	0.93041757	0.92387953	0.91706007	0.90996127	0.90258528	0.89493436	0.88701083	0.87885281	0.87080676
31'	0.93658202	0.93031092	0.92376816	0.91694404	0.90984060	0.90246002	0.89480453	0.88687648	0.87871804	0.87068006
32'	0.93648143	0.93020419	0.92365674	0.91682794	0.90971984	0.90233467	0.89467462	0.88674205	0.87858336	0.87055336
33'	0.93638082	0.93009738	0.92354523	0.91671175	0.90959904	0.90220925	0.89454464	0.88660754	0.87844868	0.87042666
34'	0.93628021	0.92999050	0.92343361	0.91659549	0.90947814	0.90208375	0.89441458	0.88647296	0.87831400	0.87030000
35'	0.93617960	0.92988353	0.92332197	0.91647915	0.90935716	0.90195818	0.89428454	0.88633831	0.87817932	0.87017336
36'	0.93607904	0.92977649	0.92321022	0.91636273	0.90923611	0.90183253	0.89415474	0.88620358	0.87804464	0.87004666
37'	0.93597843	0.92966936	0.92309833	0.91624627	0.90911498	0.90170680	0.89402395	0.88606878	0.87791000	0.86992000
38'	0.93587782	0.92956214	0.92298649	0.91612966	0.90899377	0.90158100	0.89389339	0.88593389	0.87777534	0.86979336
39'	0.93577721	0.92945488	0.92287450	0.91601301	0.90887249	0.90145517	0.89376215	0.88579894	0.87764066	0.86966666
40'	0.93567660	0.92934752	0.92276244	0.91589628	0.90875113	0.90132916	0.89363144	0.88566391	0.87750600	0.86954000
41'	0.93557600	0.92924016	0.92265031	0.91577949	0.90862969	0.90120313	0.89350025	0.88552891	0.87737134	0.86941336
42'	0.93547540	0.92913257	0.92253809	0.91566259	0.90850818	0.90107702	0.89337139	0.88539363	0.87723666	0.86928666
43'	0.93537480	0.92902498	0.92242579	0.91554563	0.90838659	0.90095084	0.89324045	0.88525837	0.87710200	0.86916000
44'	0.93527420	0.92891730	0.92231342	0.91542851	0.90826492	0.90082458	0.89310983	0.88512304	0.87696734	0.86903336
45'	0.93517360	0.92880955	0.92220097	0.91531148	0.90814317	0.90069824	0.89297895	0.88498764	0.87683266	0.86890666
46'	0.93507300	0.92870172	0.92208844	0.91519429	0.90802135	0.90057183	0.89284798	0.88485216	0.87669800	0.86878000
47'	0.93497240	0.92859381	0.92197584	0.91507707	0.90789945	0.90044534	0.89271694	0.88471660	0.87656334	0.86865336
48'	0.93487180	0.92848589	0.92186215	0.91495987	0.90777748	0.90031877	0.89258582	0.88458098	0.87642866	0.86852666
49'	0.93477120	0.92837776	0.92174824	0.91484224	0.90765543	0.90019213	0.89245463	0.88444527	0.87629400	0.86840000
50'	0.93467060	0.92826942	0.92163455	0.91472474	0.90753330	0.90006541	0.89232336	0.88430949	0.87615934	0.86827336
51'	0.93457000	0.92816139	0.92152063	0.91460716	0.90741109	0.89993862	0.89219201	0.88417364	0.87602466	0.86814666
52'	0.93446940	0.92805309	0.92140614	0.91448950	0.90728881	0.89981175	0.89206059	0.88403771	0.87589000	0.86802000
53'	0.93436880	0.92794471	0.92129185	0.91437177	0.90716645	0.89968480	0.89192910	0.88390171	0.87575534	0.86789336
54'	0.93426820	0.92783623	0.92117731	0.91425394	0.90704401	0.89955778	0.89179753	0.88376543	0.87562066	0.86776666
55'	0.93416760	0.92772772	0.92106271	0.91413607	0.90692150	0.89943048	0.89166588	0.88362948	0.87548600	0.86764000
56'	0.93406700	0.92761918	0.92094807	0.91401810	0.90679891	0.89930351	0.89153416	0.88349325	0.87535134	0.86751336
57'	0.93396640	0.92751061	0.92083348	0.91390005	0.90667625	0.89917625	0.89140237	0.88335782	0.87521666	0.86738666
58'	0.93386580	0.92740164	0.92071873	0.91378193	0.90655350	0.89904893	0.89127049	0.88322205	0.87508200	0.86726000
59'	0.93376520	0.92729270	0.92060408	0.91366373	0.90643068	0.89892153	0.89113855	0.88308612	0.87494734	0.86713336

	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
00'	0.86602540	0.85716730	0.84804810	0.83867037	0.82903757	0.81915204	0.80901499	0.79863551	0.788021075	0.77714594
01'	0.86592942	0.85701745	0.84782971	0.83835210	0.82867487	0.81878951	0.80859458	0.79806042	0.78730163	0.77626287
02'	0.86582337	0.85686745	0.84757364	0.83805357	0.82827121	0.81818182	0.80786498	0.79728525	0.78645244	0.775477971
03'	0.86571687	0.85671752	0.84735833	0.83781946	0.827854927	0.817865119	0.80750375	0.79711002	0.786147319	0.775059648
04'	0.86561037	0.85656745	0.84724303	0.83760268	0.82783836	0.817848410	0.80743253	0.79703473	0.786029387	0.77491319
05'	0.86550387	0.85641730	0.84712764	0.83738754	0.82782238	0.817831495	0.80731124	0.79705936	0.78611448	0.774822983
06'	0.86540142	0.85626708	0.847012192	0.837171872	0.82780633	0.817814972	0.80719488	0.79708393	0.78624961	0.77474941
07'	0.86530558	0.85611679	0.846896731	0.83705983	0.82779022	0.817798242	0.80717804	0.79710843	0.78635558	0.77468292
08'	0.86521011	0.85596643	0.846781262	0.83704087	0.827773403	0.817781505	0.80716167	0.79713266	0.786457591	0.774617936
09'	0.86511444	0.85581600	0.846665787	0.837024183	0.827757077	0.817764742	0.80714541	0.79715723	0.786539624	0.774554974
10'	0.86501877	0.85566549	0.846550304	0.837008273	0.827740744	0.817748011	0.807129378	0.79718153	0.786621453	0.77449206
11'	0.86492319	0.85551491	0.846434814	0.836992356	0.827724404	0.817731254	0.807113208	0.79720575	0.786703675	0.77442938
12'	0.86482749	0.85536426	0.846319317	0.836976431	0.827708057	0.817714490	0.807097401	0.79722992	0.786785689	0.774366949
13'	0.86473184	0.85521354	0.846203812	0.836960500	0.827691704	0.817697719	0.807081494	0.79725401	0.786867497	0.774304661
14'	0.86463617	0.85506274	0.846088301	0.836944561	0.827675343	0.817681004	0.807065458	0.79727804	0.786949193	0.774242442
15'	0.86454051	0.854911874	0.845972782	0.836928616	0.827658975	0.817664155	0.807049460	0.79730200	0.787030698	0.774180264
16'	0.86444484	0.85476093	0.845857254	0.836912663	0.827642600	0.817647364	0.807033475	0.79732590	0.787111681	0.774118119
17'	0.86434917	0.85460992	0.845741723	0.836896703	0.827626218	0.817630565	0.807017404	0.79734972	0.787192462	0.774056042
18'	0.86425351	0.85445893	0.845626183	0.836880736	0.827609829	0.817613759	0.807001348	0.79737348	0.787273037	0.773993919
19'	0.86415784	0.85430787	0.845510634	0.836864762	0.827593434	0.817596944	0.806985304	0.79739717	0.787353605	0.773931849
20'	0.86406217	0.85415684	0.845395082	0.836848781	0.827577031	0.817580169	0.806969373	0.79742080	0.787434156	0.773869769
21'	0.86396651	0.85400581	0.845279520	0.836832793	0.827560623	0.817563300	0.806953413	0.797444435	0.787514662	0.773807819
22'	0.86387084	0.85385476	0.845163951	0.836816798	0.827544204	0.817546467	0.806937459	0.797468064	0.787595169	0.773745869
23'	0.86377517	0.85370372	0.845048376	0.836800796	0.827527781	0.817529627	0.806921508	0.797491694	0.787675676	0.773683919
24'	0.86367951	0.85355267	0.844932801	0.836784786	0.827511350	0.817512780	0.806905560	0.797515324	0.787756183	0.773621969
25'	0.86358384	0.85340162	0.844817226	0.836768770	0.827494912	0.817495925	0.806889614	0.797538954	0.787836690	0.773560019
26'	0.86348817	0.85325057	0.844701651	0.836752754	0.827478447	0.817479065	0.806873674	0.797562584	0.787917197	0.773498069
27'	0.86339251	0.85309952	0.844586076	0.836736738	0.827461977	0.817462195	0.806857734	0.797586214	0.787997704	0.773436119
28'	0.86329684	0.85294847	0.844470501	0.836720722	0.827445507	0.817445325	0.806841794	0.797609844	0.788078211	0.773374169
29'	0.86320117	0.85279742	0.844354926	0.836704706	0.827429032	0.817428440	0.806825854	0.797633474	0.788158718	0.773312219
30'	0.86310551	0.85264637	0.844239351	0.836688690	0.827412562	0.817411555	0.806809914	0.797657104	0.788239225	0.773250269
31'	0.86300984	0.85249532	0.844123776	0.836672674	0.827396087	0.817394670	0.806793974	0.797680734	0.788319732	0.773188319
32'	0.86291417	0.85234427	0.844008201	0.836656658	0.827379612	0.817377785	0.806778034	0.797704364	0.788400239	0.773126369
33'	0.86281851	0.85219322	0.843892626	0.836640642	0.827363137	0.817360890	0.806762094	0.797727994	0.788480746	0.773064419
34'	0.86272284	0.85204217	0.843777051	0.836624626	0.827346662	0.817344005	0.806746154	0.797751624	0.788561253	0.773002469
35'	0.86262717	0.85189112	0.843661476	0.836608610	0.827330187	0.817327120	0.806730214	0.797775254	0.788641760	0.772940519
36'	0.86253151	0.85174007	0.843545901	0.836592594	0.827313712	0.817310235	0.806714274	0.797798884	0.788722267	0.772878569
37'	0.86243584	0.85158902	0.843430326	0.836576578	0.827297237	0.817293350	0.806698334	0.797822514	0.788802774	0.772816619
38'	0.86234017	0.85143797	0.843314751	0.836560562	0.827280762	0.817276465	0.806682394	0.797846144	0.788883281	0.772754669
39'	0.86224451	0.85128692	0.843199176	0.836544546	0.827264287	0.817259580	0.806666454	0.797869774	0.788963788	0.772692719
40'	0.86214884	0.85113587	0.843083601	0.836528530	0.827247812	0.817242695	0.806650514	0.797893404	0.789044295	0.772630769
41'	0.86205317	0.85098482	0.842968026	0.836512514	0.827231337	0.817225810	0.806634574	0.797917034	0.789124802	0.772568819
42'	0.86195751	0.85083377	0.842852451	0.836496498	0.827214862	0.817208925	0.806618634	0.797940664	0.789205309	0.772506869
43'	0.86186184	0.85068272	0.842736876	0.836480482	0.827198387	0.817192040	0.806602694	0.797964294	0.789285816	0.772444919
44'	0.86176617	0.85053167	0.842621301	0.836464466	0.827181912	0.817175155	0.806586754	0.797987924	0.789366323	0.772382969
45'	0.86167051	0.85038062	0.842505726	0.836448450	0.827165437	0.817158270	0.806570814	0.798011554	0.789446830	0.772321019
46'	0.86157484	0.85022957	0.842390151	0.836432434	0.827148962	0.817141385	0.806554874	0.798035184	0.789527337	0.772259069
47'	0.86147917	0.85007852	0.842274576	0.836416418	0.827132487	0.817124500	0.806538934	0.798058814	0.789607844	0.772197119
48'	0.86138351	0.84992747	0.842159001	0.836400402	0.827116012	0.817107615	0.806522994	0.798082444	0.789688351	0.772135169
49'	0.86128784	0.84977642	0.842043426	0.836384386	0.827099537	0.817090730	0.806507054	0.798106074	0.789768858	0.772073219
50'	0.86119217	0.84962537	0.841927851	0.836368370	0.827083062	0.817073845	0.806491114	0.798129704	0.789849365	0.772011269
51'	0.86109651	0.84947432	0.841812276	0.836352354	0.827066587	0.817056960	0.806475174	0.798153334	0.789929872	0.771949319
52'	0.86100084	0.84932327	0.841696701	0.836336338	0.827050112	0.817040075	0.806459234	0.798176964	0.789999979	0.771887369
53'	0.86090517	0.84917222	0.841581126	0.836320322	0.827033637	0.817023190	0.806443294	0.798200594	0.790070086	0.771825419
54'	0.86080951	0.84902117	0.841465551	0.836304306	0.827017162	0.817006305	0.806427354	0.798224224	0.790140193	0.771763469
55'	0.86071384	0.84887012	0.841350001	0.836288290	0.827000687	0.816989420	0.806411414	0.798247854	0.790210300	0.771701519
56'	0.86061817	0.84871907	0.841234426	0.836272274	0.826984212	0.816972535	0.806395474	0.798271484	0.790280407	0.771639569
57'	0.86052251	0.84856802	0.841118851	0.836256258	0.826967737	0.816955650	0.806379534	0.798295114	0.790350514	0.771577619
58'	0.86042684	0.84841697	0.841003276	0.836240242	0.826951262	0.816938765	0.806363594	0.798318744	0.790420621	0.771515669
59'	0.86033117	0.84826592	0.840887701	0.836224226	0.826934787	0.816921880	0.806347654	0.798342374	0.790490728	0.771453719

490	491	492	493	494	495	496	497	498	499
0.7241444	0.72429958	0.72431482	0.72435370	0.72432080	0.720710478	0.69426337	0.69113236	0.69113041	0.69205903
0.72415743	0.72431871	0.724295015	0.72415529	0.72419370	0.720450106	0.69446009	0.69122559	0.69113441	0.692583946
0.724162035	0.72431777	0.724275542	0.723995821	0.72418254	0.720609578	0.69456666	0.69122276	0.691129015	0.692561984
0.724169321	0.72431677	0.724256062	0.723952607	0.724173332	0.720448944	0.69467333	0.69122167	0.691124164	0.692540107
0.724172801	0.72431571	0.724236575	0.723909547	0.724165104	0.720286355	0.69478001	0.69122049	0.691119347	0.692518044
0.724175074	0.72431458	0.724217083	0.723866100	0.724156280	0.720123759	0.69488668	0.69121930	0.691114504	0.692496065
0.724177340	0.72431341	0.724197593	0.723822628	0.724147430	0.720001559	0.69499335	0.69121811	0.691109657	0.692474081
0.724179606	0.72431224	0.724178107	0.723779154	0.724138580	0.719879359	0.69510002	0.69121692	0.691104810	0.692452092
0.724181872	0.72431107	0.724158621	0.723735682	0.724129730	0.719757159	0.69520669	0.69121573	0.691100000	0.692430096
0.724184138	0.72430990	0.724139135	0.723692210	0.724120880	0.719634959	0.69531336	0.69121454	0.691095189	0.692408106
0.724186404	0.72430873	0.724119649	0.723648738	0.724112030	0.719512759	0.69542003	0.69121335	0.691090378	0.692386116
0.724188670	0.72430756	0.724100163	0.723605266	0.724103180	0.719390559	0.69552670	0.69121216	0.691085567	0.692364126
0.724190936	0.72430639	0.724080677	0.723561794	0.724094330	0.719268359	0.69563337	0.69121097	0.691080756	0.692342136
0.724193202	0.72430522	0.724061191	0.723518322	0.724085480	0.719146159	0.69574004	0.69120978	0.691075945	0.692320146
0.724195468	0.72430405	0.724041705	0.723474850	0.724076630	0.719023959	0.69584671	0.69120859	0.691071134	0.692298156
0.724197734	0.72430288	0.724022219	0.723431378	0.724067780	0.718901759	0.69595338	0.69120740	0.691066323	0.692276166
0.724199999	0.72430171	0.724002733	0.723387906	0.724058930	0.718779559	0.69606005	0.69120621	0.691061512	0.692254176
0.724202265	0.72430054	0.723983247	0.723344434	0.724050080	0.718657359	0.69616672	0.69120502	0.691056701	0.692232186
0.724204531	0.72429937	0.723963761	0.723300962	0.724041230	0.718535159	0.69627339	0.69120383	0.691051890	0.692210196
0.724206797	0.72429820	0.723944275	0.723257490	0.724032380	0.718412959	0.69638006	0.69120264	0.691047079	0.692188206
0.724209063	0.72429703	0.723924789	0.723214018	0.724023530	0.718290759	0.69648673	0.69120145	0.691042268	0.692166216
0.724211329	0.72429586	0.723905303	0.723170546	0.724014680	0.718168559	0.69659340	0.69120026	0.691037457	0.692144226
0.724213595	0.72429469	0.723885817	0.723127074	0.724005830	0.718046359	0.69670007	0.69119907	0.691032646	0.692122236
0.724215861	0.72429352	0.723866331	0.723083602	0.723996980	0.717924159	0.69680674	0.69119788	0.691027835	0.692100246
0.724218127	0.72429235	0.723846845	0.723040130	0.723988130	0.717801959	0.69691341	0.69119669	0.691023024	0.692078256
0.724220393	0.72429118	0.723827359	0.723000000	0.723979280	0.717679759	0.69702008	0.69119550	0.691018213	0.692056266
0.724222659	0.72428999	0.723807873	0.722959870	0.723970430	0.717557559	0.69712675	0.69119431	0.691013402	0.692034276
0.724224925	0.72428882	0.723788387	0.722919740	0.723961580	0.717435359	0.69723342	0.69119312	0.691008591	0.692012286
0.724227191	0.72428765	0.723768901	0.722879610	0.723952730	0.717313159	0.69734009	0.69119193	0.691003780	0.691990296
0.724229457	0.72428648	0.723749415	0.722839480	0.723943880	0.717190959	0.69744676	0.69119074	0.691000000	0.691968306
0.724231723	0.72428531	0.723729929	0.722800000	0.723935030	0.717068759	0.69755343	0.69118955	0.690996215	0.691946316
0.724233989	0.72428414	0.723710443	0.722759870	0.723926180	0.716946559	0.69766010	0.69118836	0.690992424	0.691924326
0.724236255	0.72428297	0.723690957	0.722719740	0.723917330	0.716824359	0.69776677	0.69118717	0.690988633	0.691902336
0.724238521	0.72428180	0.723671471	0.722679610	0.723908480	0.716702159	0.69787344	0.69118598	0.690984842	0.691880346
0.724240787	0.72428063	0.723651985	0.722639480	0.723899630	0.716579959	0.69798011	0.69118479	0.690981051	0.691858356
0.724243053	0.72427946	0.723632500	0.722599350	0.723890780	0.716457759	0.69808678	0.69118360	0.690977260	0.691836366
0.724245319	0.72427829	0.723613014	0.722559220	0.723881930	0.716335559	0.69819345	0.69118241	0.690973469	0.691814376
0.724247585	0.72427712	0.723593529	0.722519090	0.723873080	0.716213359	0.69830012	0.69118122	0.690969678	0.691792386
0.724249851	0.72427595	0.723574043	0.722478960	0.723864230	0.716091159	0.69840679	0.69118003	0.690965887	0.691770396
0.724252117	0.72427478	0.723554557	0.722438830	0.723855380	0.715968959	0.69851346	0.69117884	0.690962096	0.691748406
0.724254383	0.72427361	0.723535071	0.722398700	0.723846530	0.715846759	0.69862013	0.69117765	0.690958305	0.691726416
0.724256649	0.72427244	0.723515585	0.722358570	0.723837680	0.715724559	0.69872680	0.69117646	0.690954514	0.691704426
0.724258915	0.72427127	0.723496100	0.722318440	0.723828830	0.715602359	0.69883347	0.69117527	0.690950723	0.691682436
0.724261181	0.72427010	0.723476614	0.722278310	0.723819980	0.715480159	0.69894014	0.69117408	0.690946932	0.691660446
0.724263447	0.72426893	0.723457129	0.722238180	0.723811130	0.715357959	0.69904681	0.69117289	0.690943141	0.691638456
0.724265713	0.72426776	0.723437643	0.722198050	0.723802280	0.715235759	0.69915348	0.69117170	0.690939350	0.691616466
0.724267979	0.72426659	0.723418157	0.722157920	0.723793430	0.715113559	0.69926015	0.69117051	0.690935559	0.691594476
0.724270245	0.72426542	0.723398671	0.722117790	0.723784580	0.714991359	0.69936682	0.69116932	0.690931768	0.691572486
0.724272511	0.72426425	0.723379185	0.722077660	0.723775730	0.714869159	0.69947349	0.69116813	0.690927977	0.691550496
0.724274777	0.72426308	0.723359699	0.722037530	0.723766880	0.714746959	0.69958016	0.69116694	0.690924186	0.691528506
0.724277043	0.72426191	0.723340213	0.721997400	0.723758030	0.714624759	0.69968683	0.69116575	0.690920395	0.691506516
0.724279309	0.72426074	0.723320727	0.721957270	0.723749180	0.714502559	0.69979350	0.69116456	0.690916604	0.691484526
0.724281575	0.72425957	0.723301241	0.721917140	0.723740330	0.714380359	0.69990017	0.69116337	0.690912813	0.691462536
0.724283841	0.72425840	0.723281755	0.721877010	0.723731480	0.714258159	0.70000684	0.69116218	0.690909022	0.691440546
0.724286107	0.72425723	0.723262269	0.721836880	0.723722630	0.714135959	0.70011351	0.69116099	0.690905231	0.691418556
0.724288373	0.72425606	0.723242783	0.721796750	0.723713780	0.714013759	0.70022018	0.69115980	0.690901440	0.691396566
0.724290639	0.72425489	0.723223297	0.721756620	0.723704930	0.713891559	0.70032685	0.69115861	0.690897649	0.691374576
0.724292905	0.72425372	0.723203811	0.721716490	0.723696080	0.713769359	0.70043352	0.69115742	0.690893858	0.691352586
0.724295171	0.72425255	0.723184325	0.721676360	0.723687230	0.713647159	0.70054019	0.69115623	0.690890067	0.691330596
0.724297437	0.72425138	0.723164839	0.721636230	0.723678380	0.713524959	0.70064686	0.69115504	0.690886276	0.691308606
0.724299703	0.72425021	0.723145353	0.721596100	0.723669530	0.713402759	0.70075353	0.69115385	0.690882485	0.691286616
0.724301969	0.72424904	0.723125867	0.721555970	0.723660680	0.713280559	0.70086020	0.69115266	0.690878694	0.691264626
0.724304235	0.72424787	0.723106381	0.721515840	0.723651830	0.713158359	0.70096687	0.69115147	0.690874903	0.691242636
0.724306501	0.72424670	0.723086895	0.721475710	0.723642980	0.713036159	0.70107354	0.69115028	0.690871112	0.691220646
0.724308767	0.72424553	0.723067409	0.721435580	0.723634130	0.712913959	0.70118021	0.69114909	0.690867321	0.691198656
0.724311033	0.72424436	0.723047923	0.721395450	0.723625280	0.712791759	0.70128688	0.69114790	0.690863530	0.691176666
0.724313299	0.72424319	0.723028437	0.721355320	0.723616430	0.712669559	0.70139355	0.69114671	0.690859739	0.691154676
0.724315565	0.72424202	0.723008951	0.721315190	0.723607580	0.712547359	0.70150022	0.69114552	0.690855948	0.691132686
0.724317831	0.72424085	0.722989465	0.721275060	0.723598730	0.712425159	0.70160689	0.69114433	0.690852157	0.691110696
0.724320097	0.72423968	0.722970000	0.721234930	0.723589880	0.712302959	0.70171356	0.69114314	0.690848366	0.691088706
0.724322363	0.72423851	0.722950514	0.721194800	0.723581030	0.712180759	0.70182023	0.69114195	0.690844575	0.691066716
0.724324629	0.72423734	0.722931028	0.721154670	0.723572180	0.712058559	0.70192690	0.69114076	0.690840784	0.691044726
0.724326895	0.72423617	0.722911542	0.721114540	0.723563330	0.711936359	0.70203357	0.69113957	0.690836993	0.691022736
0.724329161	0.72423500	0.722892056	0.721074410	0.723554480	0.711814159	0.70214024	0.69113838	0.690833202	0.691000746
0.724331427	0.72423383	0.722872570	0.721034280	0.723545630	0.711691959	0.70224691	0.69113719	0.690829411	0.690978756
0.724333693	0.72423266	0.722853084	0.720994150						

	589	519	529	539	549	559	569	579	589	599
0.64278291	0.62920391	0.61546147	0.60181502	0.58778525	0.57357844	0.55919290	0.54463703	0.52991926	0.51503808	
0.64296475	0.62909430	0.61543223	0.60158268	0.58754989	0.57333813	0.55895172	0.54439505	0.52967256	0.51476871	
0.64314659	0.62888616	0.61540292	0.60135029	0.58731448	0.57309978	0.55871049	0.54415102	0.52945800	0.51453431	
0.64332843	0.62867816	0.61537357	0.60111785	0.58707903	0.57286137	0.55846922	0.54390693	0.52924398	0.51429982	
0.64351027	0.62847016	0.61534417	0.60088542	0.58684352	0.57262292	0.55822792	0.54366283	0.52903216	0.51406537	
0.64369211	0.62826216	0.61531471	0.60065282	0.58660796	0.57238442	0.55798653	0.54341866	0.52882852	0.51383083	
0.64387395	0.62805416	0.61528526	0.60042022	0.58637236	0.57214587	0.55774511	0.54317445	0.52862483	0.51359633	
0.64405579	0.62784616	0.61525580	0.60018758	0.58613670	0.57190728	0.55750364	0.54293019	0.52842114	0.51336183	
0.64423763	0.62763816	0.61522635	0.59995488	0.58590099	0.57166863	0.55726213	0.54268589	0.52821745	0.51312733	
0.64441947	0.62743016	0.61519689	0.59971824	0.58566524	0.57142994	0.55702057	0.54244154	0.52801376	0.51289283	
0.64460131	0.62722216	0.61516744	0.59948150	0.58542943	0.57119125	0.55677897	0.54219714	0.52781007	0.51265833	
0.64478315	0.62701416	0.61513799	0.59924476	0.58519358	0.57095254	0.55653731	0.54195270	0.52760638	0.51242383	
0.64496499	0.62680616	0.61510854	0.59900802	0.58495767	0.57071357	0.55629562	0.54170821	0.52740269	0.51218933	
0.64514683	0.62659816	0.61507909	0.59877128	0.58472172	0.57047460	0.55605387	0.54146368	0.52719900	0.51195483	
0.64532867	0.62639016	0.61504964	0.59853454	0.58448572	0.57023575	0.55581207	0.54121910	0.52700531	0.51172033	
0.64551051	0.62618216	0.61502019	0.59829780	0.58424966	0.56999674	0.55557023	0.54097447	0.52681162	0.51148583	
0.64569235	0.62597416	0.61499074	0.59806106	0.58401355	0.56977573	0.55532834	0.54072980	0.52661793	0.51125083	
0.64587419	0.62576616	0.61496129	0.59782432	0.58377741	0.56955465	0.55508641	0.54048508	0.52642424	0.51101633	
0.64605603	0.62555816	0.61493184	0.59758758	0.58354121	0.56932952	0.55484443	0.54024032	0.52623055	0.51078183	
0.64623787	0.62535016	0.61490239	0.59735084	0.58330496	0.56910835	0.55460240	0.53999551	0.52603686	0.51054733	
0.64641971	0.62514216	0.61487294	0.59711410	0.58306866	0.56888712	0.55436032	0.53975066	0.52584317	0.51031283	
0.64660155	0.62493416	0.61484349	0.59687736	0.58283231	0.56866585	0.55411822	0.53950575	0.52564948	0.51007833	
0.64678339	0.62472616	0.61481404	0.59664062	0.58259591	0.56844458	0.55387613	0.53926081	0.52545579	0.50984383	
0.64696523	0.62451816	0.61478459	0.59640388	0.58235947	0.56822316	0.55363401	0.53901582	0.52526210	0.50960933	
0.64714707	0.62431016	0.61475514	0.59616714	0.58212307	0.56799174	0.55339155	0.53877078	0.52506841	0.50937483	
0.64732891	0.62410216	0.61472569	0.59593040	0.58188647	0.56776028	0.55314924	0.53852569	0.52487472	0.50914033	
0.64751075	0.62389416	0.61469624	0.59569366	0.58164983	0.56752877	0.55290688	0.53828065	0.52468103	0.50890583	
0.64769259	0.62368616	0.61466679	0.59545692	0.58141318	0.56729721	0.55266448	0.53803540	0.52448734	0.50867133	
0.64787443	0.62347816	0.61463734	0.59522018	0.58117649	0.56706560	0.55242203	0.53779018	0.52429365	0.50843683	
0.64805627	0.62327016	0.61460789	0.59498344	0.58093975	0.56683394	0.55217953	0.53754492	0.52410000	0.50820233	
0.64823811	0.62306216	0.61457844	0.59474670	0.58070295	0.56660224	0.55193708	0.53729961	0.52390631	0.50796783	
0.64841995	0.62285416	0.61454899	0.59451000	0.58046611	0.56637053	0.55169439	0.53705425	0.52371262	0.50773333	
0.64860179	0.62264616	0.61451954	0.59427326	0.58022922	0.56613877	0.55145176	0.53680885	0.52351893	0.50749883	
0.64878363	0.62243816	0.61449009	0.59403652	0.58000000	0.56590700	0.55120912	0.53656340	0.52332524	0.50726433	
0.64896547	0.62223016	0.61446064	0.59379978	0.57976295	0.56567524	0.55096643	0.53631791	0.52313155	0.50702983	
0.64914731	0.62202216	0.61443119	0.59356304	0.57952580	0.56544348	0.55072375	0.53607238	0.52293786	0.50679533	
0.64932915	0.62181416	0.61440174	0.59332630	0.57928865	0.56521172	0.55048107	0.53582683	0.52274417	0.50656083	
0.64951099	0.62160616	0.61437229	0.59308956	0.57905150	0.56497996	0.55023836	0.53558117	0.52255048	0.50632633	
0.64969283	0.62139816	0.61434284	0.59285282	0.57881435	0.56474820	0.55000000	0.53533549	0.52235679	0.50609183	
0.64987467	0.62119016	0.61431339	0.59261608	0.57857720	0.56451644	0.54975731	0.53509020	0.52216310	0.50585733	
0.65005651	0.62098216	0.61428394	0.59237934	0.57834005	0.56428468	0.54951462	0.53484491	0.52196941	0.50562283	
0.65023835	0.62077416	0.61425449	0.59214260	0.57810290	0.56405292	0.54927193	0.53460000	0.52177572	0.50538833	
0.65042019	0.62056616	0.61422504	0.59190586	0.57786575	0.56382116	0.54902924	0.53435511	0.52158203	0.50515383	
0.65060203	0.62035816	0.61419559	0.59166912	0.57762860	0.56358940	0.54878655	0.53411022	0.52138834	0.50491933	
0.65078387	0.62015016	0.61416614	0.59143238	0.57739145	0.56335764	0.54854386	0.53386533	0.52119465	0.50468483	
0.65096571	0.61994216	0.61413669	0.59119564	0.57715430	0.56312588	0.54830117	0.53362044	0.52100096	0.50445033	
0.65114755	0.61973416	0.61410724	0.59095890	0.57691715	0.56289412	0.54805848	0.53337555	0.52080727	0.50421583	
0.65132939	0.61952616	0.61407779	0.59072216	0.57668000	0.56266236	0.54781579	0.53313066	0.52061358	0.50398133	
0.65151123	0.61931816	0.61404834	0.59048542	0.57644285	0.56243060	0.54757310	0.53288577	0.52041989	0.50374683	
0.65169307	0.61911016	0.61401889	0.59024868	0.57620570	0.56219884	0.54733041	0.53264088	0.52022620	0.50351233	
0.65187491	0.61890216	0.61398944	0.59001194	0.57596855	0.56196708	0.54708772	0.53239599	0.52003251	0.50327783	
0.65205675	0.61869416	0.61396000	0.58977520	0.57573140	0.56173532	0.54684503	0.53215110	0.51983882	0.50304333	
0.65223859	0.61848616	0.61393055	0.58953846	0.57549425	0.56150356	0.54660234	0.53190621	0.51964513	0.50280883	
0.65242043	0.61827816	0.61390110	0.58930172	0.57525710	0.56127180	0.54635965	0.53166132	0.51945144	0.50257433	
0.65260227	0.61807016	0.61387165	0.58906498	0.57502000	0.56104004	0.54611696	0.53141643	0.51925775	0.50233983	
0.65278411	0.61786216	0.61384220	0.58882824	0.57478285	0.56080828	0.54587427	0.53117154	0.51906406	0.50210533	
0.65296595	0.61765416	0.61381275	0.58859150	0.57454570	0.56057652	0.54563158	0.53092965	0.51887037	0.50187083	
0.65314779	0.61744616	0.61378330	0.58835476	0.57430855	0.56034476	0.54538889	0.53068776	0.51867668	0.50163633	
0.65332963	0.61723816	0.61375385	0.58811802	0.57407140	0.56011300	0.54514620	0.53044587	0.51848299	0.50140183	
0.65351147	0.61703016	0.61372440	0.58788128	0.57383425	0.55988124	0.54490351	0.53020398	0.51828930	0.50116733	
0.65369331	0.61682216	0.61369495	0.58764454	0.57359710	0.55964948	0.54466082	0.53000000	0.51809561	0.50093283	
0.65387515	0.61661416	0.61366550	0.58740780	0.57336000	0.55941772	0.54441813	0.52979611	0.51790192	0.50069833	
0.65405699	0.61640616	0.61363605	0.58717106	0.57312285	0.55918596	0.54417544	0.52959222	0.51770823	0.50046383	
0.65423883	0.61619816	0.61360660	0.58693432	0.57288570	0.55895420	0.54393275	0.52938833	0.51751454	0.50022933	
0.65442067	0.61599016	0.61357715	0.58669758	0.57264855	0.55872244	0.54369006	0.52918444	0.51732085	0.50000000	
0.65460251	0.61578216	0.61354770	0.58646084	0.57241140	0.55848068	0.54344737	0.52898055	0.51712716	0.49976553	
0.65478435	0.61557416	0.61351825	0.58622410	0.57217425	0.55823892	0.54320468	0.52877666	0.51693347	0.49953103	
0.65496619	0.61536616	0.61348880	0.58598736	0.57193710	0.55800000	0.54296199	0.52857277	0.51673978	0.49929653	
0.65514803	0.61515816	0.61345935	0.58575062	0.57170000	0.55775824	0.54271930	0.52836888	0.51654609	0.49906203	
0.65532987	0.61495016	0.61342990	0.58551388	0.57146285	0.55751648	0.54247661	0.52816500	0.51635240	0.49882753	
0.65551171	0.61474216	0.61340045	0.58527714	0.57122570	0.55727472	0.54223392	0.52796111	0.51615871	0.49859303	
0.65569355	0.61453416	0.61337100	0.58504040	0.57098855	0.55703296	0.54199123	0.52775722	0.51596502	0.49835853	
0.65587539	0.61432616	0.61334155	0.58480366	0.57075140	0.55679120	0.54174854	0.52755333	0.51577133	0.49812403	
0.65605723	0.61411816	0.61331210	0.58456692	0.57051425	0.55654944	0.54150585	0.52734944	0.51557764	0.49788953	
0.65623907	0.61391016	0.61328265	0.58433018	0.57027710	0.55630768	0.54126316	0.52714555	0.51538395	0.49765503	
0.65642091	0.61370216	0.61325320	0.58409344	0.57004000	0.55606592	0.54102047	0.52694166	0.51519026	0.49742053	
0.65660275	0.61349416	0.61322375	0.58385670	0.56980285	0.55582416	0.54077778	0.5267			

	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690
0	0.48000000	0.48080967	0.48161934	0.48242901	0.48323868	0.48404835	0.48485802	0.48566769	0.48647736	0.48728703
1	0.48709806	0.48790773	0.48871740	0.48952707	0.49033674	0.49114641	0.49195608	0.49276575	0.49357542	0.49438509
2	0.49547408	0.49628375	0.49709342	0.49790309	0.49871276	0.49952243	0.50033210	0.50114177	0.50195144	0.50276111
3	0.50414700	0.50495667	0.50576634	0.50657601	0.50738568	0.50819535	0.50900502	0.50981469	0.51062436	0.51143403
4	0.51310700	0.51391667	0.51472634	0.51553601	0.51634568	0.51715535	0.51796502	0.51877469	0.51958436	0.52039403
5	0.52305700	0.52386667	0.52467634	0.52548601	0.52629568	0.52710535	0.52791502	0.52872469	0.52953436	0.53034403
6	0.53420700	0.53501667	0.53582634	0.53663601	0.53744568	0.53825535	0.53906502	0.53987469	0.54068436	0.54149403
7	0.54270700	0.54351667	0.54432634	0.54513601	0.54594568	0.54675535	0.54756502	0.54837469	0.54918436	0.55000000
8	0.55000000	0.55080967	0.55161934	0.55242901	0.55323868	0.55404835	0.55485802	0.55566769	0.55647736	0.55728703
9	0.55868331	0.55949298	0.56030265	0.56111232	0.56192199	0.56273166	0.56354133	0.56435100	0.56516067	0.56597034
0	0.56764072	0.56845039	0.56925996	0.57006963	0.57087930	0.57168897	0.57249864	0.57330831	0.57411798	0.57492765
1	0.57638506	0.57719473	0.57800440	0.57881407	0.57962374	0.58043341	0.58124308	0.58205275	0.58286242	0.58367209
2	0.58532750	0.58613717	0.58694684	0.58775651	0.58856618	0.58937585	0.59018552	0.59099519	0.59180486	0.59261453
3	0.59455900	0.59536867	0.59617834	0.59698801	0.59779768	0.59860735	0.59941702	0.60022669	0.60103636	0.60184603
4	0.60358800	0.60439767	0.60520734	0.60601701	0.60682668	0.60763635	0.60844602	0.60925569	0.61006536	0.61087503
5	0.61240700	0.61321667	0.61402634	0.61483601	0.61564568	0.61645535	0.61726502	0.61807469	0.61888436	0.61969403
6	0.62140700	0.62221667	0.62302634	0.62383601	0.62464568	0.62545535	0.62626502	0.62707469	0.62788436	0.62869403
7	0.63068331	0.63149298	0.63230265	0.63311232	0.63392199	0.63473166	0.63554133	0.63635100	0.63716067	0.63797034
8	0.63964072	0.64045039	0.64125996	0.64206963	0.64287930	0.64368897	0.64449864	0.64530831	0.64611798	0.64692765
9	0.64887000	0.64967967	0.65048934	0.65129901	0.65210868	0.65291835	0.65372802	0.65453769	0.65534736	0.65615703
0	0.65805700	0.65886667	0.65967634	0.66048601	0.66129568	0.66210535	0.66291502	0.66372469	0.66453436	0.66534403
1	0.66732700	0.66813667	0.66894634	0.66975601	0.67056568	0.67137535	0.67218502	0.67299469	0.67380436	0.67461403
2	0.67688331	0.67769298	0.67850265	0.67931232	0.68012199	0.68093166	0.68174133	0.68255100	0.68336067	0.68417034
3	0.68614072	0.68695039	0.68775996	0.68856963	0.68937930	0.69018897	0.69100000	0.69180967	0.69261934	0.69342901
4	0.69538506	0.69619473	0.69700440	0.69781407	0.69862374	0.69943341	0.70024308	0.70105275	0.70186242	0.70267209
5	0.70455900	0.70536867	0.70617834	0.70698801	0.70779768	0.70860735	0.70941702	0.71022669	0.71103636	0.71184603
6	0.71340700	0.71421667	0.71502634	0.71583601	0.71664568	0.71745535	0.71826502	0.71907469	0.71988436	0.72069403
7	0.72240700	0.72321667	0.72402634	0.72483601	0.72564568	0.72645535	0.72726502	0.72807469	0.72888436	0.72969403
8	0.73068331	0.73149298	0.73230265	0.73311232	0.73392199	0.73473166	0.73554133	0.73635100	0.73716067	0.73797034
9	0.73964072	0.74045039	0.74125996	0.74206963	0.74287930	0.74368897	0.74449864	0.74530831	0.74611798	0.74692765
0	0.74887000	0.74967967	0.75048934	0.75129901	0.75210868	0.75291835	0.75372802	0.75453769	0.75534736	0.75615703
1	0.75805700	0.75886667	0.75967634	0.76048601	0.76129568	0.76210535	0.76291502	0.76372469	0.76453436	0.76534403
2	0.76732700	0.76813667	0.76894634	0.76975601	0.77056568	0.77137535	0.77218502	0.77299469	0.77380436	0.77461403
3	0.77688331	0.77769298	0.77850265	0.77931232	0.78012199	0.78093166	0.78174133	0.78255100	0.78336067	0.78417034
4	0.78614072	0.78695039	0.78775996	0.78856963	0.78937930	0.79018897	0.79100000	0.79180967	0.79261934	0.79342901
5	0.79538506	0.79619473	0.79700440	0.79781407	0.79862374	0.79943341	0.80024308	0.80105275	0.80186242	0.80267209
6	0.80455900	0.80536867	0.80617834	0.80698801	0.80779768	0.80860735	0.80941702	0.81022669	0.81103636	0.81184603
7	0.81340700	0.81421667	0.81502634	0.81583601	0.81664568	0.81745535	0.81826502	0.81907469	0.81988436	0.82069403
8	0.82240700	0.82321667	0.82402634	0.82483601	0.82564568	0.82645535	0.82726502	0.82807469	0.82888436	0.82969403
9	0.83068331	0.83149298	0.83230265	0.83311232	0.83392199	0.83473166	0.83554133	0.83635100	0.83716067	0.83797034
0	0.83964072	0.84045039	0.84125996	0.84206963	0.84287930	0.84368897	0.84449864	0.84530831	0.84611798	0.84692765
1	0.84887000	0.84967967	0.85048934	0.85129901	0.85210868	0.85291835	0.85372802	0.85453769	0.85534736	0.85615703
2	0.85805700	0.85886667	0.85967634	0.86048601	0.86129568	0.86210535	0.86291502	0.86372469	0.86453436	0.86534403
3	0.86732700	0.86813667	0.86894634	0.86975601	0.87056568	0.87137535	0.87218502	0.87299469	0.87380436	0.87461403
4	0.87688331	0.87769298	0.87850265	0.87931232	0.88012199	0.88093166	0.88174133	0.88255100	0.88336067	0.88417034
5	0.88614072	0.88695039	0.88775996	0.88856963	0.88937930	0.89018897	0.89100000	0.89180967	0.89261934	0.89342901
6	0.89538506	0.89619473	0.89700440	0.89781407	0.89862374	0.89943341	0.90024308	0.90105275	0.90186242	0.90267209
7	0.90455900	0.90536867	0.90617834	0.90698801	0.90779768	0.90860735	0.90941702	0.91022669	0.91103636	0.91184603
8	0.91340700	0.91421667	0.91502634	0.91583601	0.91664568	0.91745535	0.91826502	0.91907469	0.91988436	0.92069403
9	0.92240700	0.92321667	0.92402634	0.92483601	0.92564568	0.92645535	0.92726502	0.92807469	0.92888436	0.92969403
0	0.93068331	0.93149298	0.93230265	0.93311232	0.93392199	0.93473166	0.93554133	0.93635100	0.93716067	0.93797034
1	0.93964072	0.94045039	0.94125996	0.94206963	0.94287930	0.94368897	0.94449864	0.94530831	0.94611798	0.94692765
2	0.94887000	0.94967967	0.95048934	0.95129901	0.95210868	0.95291835	0.95372802	0.95453769	0.95534736	0.95615703
3	0.95805700	0.95886667	0.95967634	0.96048601	0.96129568	0.96210535	0.96291502	0.96372469	0.96453436	0.96534403
4	0.96732700	0.96813667	0.96894634	0.96975601	0.97056568	0.97137535	0.97218502	0.97299469	0.97380436	0.97461403
5	0.97688331	0.97769298	0.97850265	0.97931232	0.98012199	0.98093166	0.98174133	0.98255100	0.98336067	0.98417034
6	0.98614072	0.98695039	0.98775996	0.98856963	0.98937930	0.99018897	0.99100000	0.99180967	0.99261934	0.99342901
7	0.99538506	0.99619473	0.99700440	0.99781407	0.99862374	0.99943341	1.00024308	1.00105275	1.00186242	1.00267209
8	1.00455900	1.00536867	1.00617834	1.00698801	1.00779768	1.00860735	1.00941702	1.01022669	1.01103636	1.01184603
9	1.01340700	1.01421667	1.01502634	1.01583601	1.01664568	1.01745535	1.01826502	1.01907469	1.01988436	1.02069403

	789	710	729	730	740	754	760	770	780	790
00'	0.34292914	0.32554615	0.30901499	0.29237170	0.27563735	0.25801904	0.24192189	0.22495105	0.20791169	0.19080899
01'	0.34174478	0.32529310	0.30674033	0.29209351	0.27535772	0.25853806	0.24163964	0.22466761	0.20762715	0.19052344
02'	0.34142339	0.32501802	0.30646364	0.29181530	0.27507807	0.25825705	0.24135736	0.22438185	0.20734259	0.19023767
03'	0.34119978	0.32474291	0.30618692	0.29153706	0.27479839	0.25797602	0.24107506	0.22409615	0.20705802	0.18995229
04'	0.34098253	0.32446779	0.30591018	0.29125880	0.27451869	0.25769496	0.24079274	0.22381717	0.20677342	0.18966668
05'	0.34076395	0.32419261	0.30563304	0.29098051	0.27423897	0.25741389	0.24051040	0.22353365	0.20648881	0.18938107
06'	0.34054395	0.32391742	0.30535662	0.29070219	0.27395922	0.25713279	0.24022804	0.22325301	0.20620418	0.18909544
07'	0.34032252	0.32364220	0.30507980	0.29042385	0.27367945	0.25685167	0.23994566	0.22297656	0.20591954	0.18880979
08'	0.339953245	0.32336695	0.30480295	0.29014549	0.27339965	0.25657053	0.23966326	0.22269829	0.20563488	0.18852413
09'	0.33958586	0.32309168	0.30452606	0.28986710	0.27311983	0.25628937	0.23938084	0.22242301	0.20535019	0.18823845
10'	0.33921824	0.32281638	0.30424918	0.28958869	0.27284000	0.25600919	0.23909840	0.22214578	0.20506550	0.18795275
11'	0.33885116	0.32254105	0.30397225	0.28931026	0.27256013	0.25572698	0.23881594	0.221873215	0.20478078	0.18766704
12'	0.33848472	0.32226569	0.30369530	0.28903180	0.27228025	0.25544576	0.23853345	0.22160483	0.20449605	0.18738131
13'	0.33811893	0.32199031	0.30341833	0.28875331	0.27200034	0.25516451	0.23825095	0.22134083	0.20421130	0.18709557
14'	0.33775308	0.32171490	0.30314133	0.28847480	0.27172040	0.25488324	0.23796843	0.22108114	0.20392653	0.18680981
15'	0.33738717	0.32143946	0.30286430	0.28819627	0.27144045	0.25460195	0.23768589	0.22082743	0.20364175	0.18652403
16'	0.33702128	0.32116400	0.30258724	0.28791771	0.27116047	0.25432063	0.23740333	0.22057371	0.20335695	0.18623824
17'	0.33665541	0.32088851	0.30231017	0.28763913	0.27088047	0.25403930	0.23712075	0.22031997	0.20307213	0.18595244
18'	0.33628952	0.32061299	0.30203306	0.28736052	0.27060044	0.25375794	0.23683814	0.22006620	0.20278729	0.18566661
19'	0.33592364	0.32033744	0.30175594	0.28708189	0.27032040	0.25347657	0.23655552	0.21981242	0.20250244	0.18538078
20'	0.33555777	0.32006187	0.30147877	0.28680323	0.27004033	0.25319517	0.23627288	0.21955862	0.20221757	0.18509492
21'	0.33519192	0.31978627	0.30120159	0.28652455	0.26976024	0.25291375	0.23599022	0.21930481	0.20193268	0.18480905
22'	0.33482608	0.31951044	0.30092438	0.28624585	0.26948012	0.25263230	0.23570754	0.21905109	0.20164778	0.18452317
23'	0.33446025	0.31923499	0.30064715	0.28596712	0.26919998	0.25235080	0.23542483	0.21880211	0.20136286	0.18423727
24'	0.33409443	0.31895931	0.30036989	0.28568837	0.26891982	0.25206936	0.23514231	0.21854824	0.20107792	0.18395135
25'	0.33372862	0.31868360	0.30009260	0.28540959	0.26863963	0.25178785	0.23485937	0.21829435	0.20079298	0.18366542
26'	0.33336281	0.31840786	0.29981529	0.28513079	0.26835943	0.25150632	0.23457661	0.21804044	0.20050809	0.18337947
27'	0.33299701	0.31813210	0.29953796	0.28485156	0.26807920	0.25122477	0.23429383	0.21778651	0.20022300	0.18309351
28'	0.33263121	0.31785631	0.29926060	0.28457231	0.26779895	0.25094321	0.23401109	0.21753256	0.19993800	0.18280755
29'	0.33226541	0.31758050	0.29898321	0.28429294	0.26751867	0.25066167	0.23372823	0.21727860	0.19965297	0.18252154
30'	0.33190000	0.31730465	0.29870580	0.28401334	0.26723837	0.25038000	0.23344536	0.21702464	0.19936793	0.18223553
31'	0.33153460	0.31702879	0.29842834	0.28373362	0.26695805	0.25009837	0.23316250	0.21677066	0.19908288	0.18194950
32'	0.33116920	0.31675289	0.29815090	0.28345349	0.26667770	0.24981671	0.23287967	0.21651669	0.19879780	0.18166346
33'	0.33080381	0.31647696	0.29787341	0.28317351	0.26639733	0.24953504	0.23259672	0.21626275	0.19851271	0.18137740
34'	0.33043842	0.31620102	0.29759589	0.28289351	0.26611696	0.24925334	0.23231380	0.21600884	0.19822760	0.18109133
35'	0.33007303	0.31592504	0.29731836	0.28261359	0.26583655	0.24897162	0.23203086	0.21575492	0.19794248	0.18080525
36'	0.32970764	0.31564904	0.29704079	0.28233361	0.26555612	0.24868989	0.23174790	0.21550103	0.19765734	0.18051914
37'	0.32934225	0.31537300	0.29676320	0.28205363	0.26527566	0.24840812	0.23146492	0.21524711	0.19737218	0.18023303
38'	0.32897686	0.31509695	0.29648559	0.28177330	0.26499518	0.24812635	0.23118192	0.21499293	0.19708701	0.17994689
39'	0.32861147	0.31482087	0.29620798	0.28149291	0.26471468	0.24784454	0.23089891	0.21473824	0.19680182	0.17966075
40'	0.32824608	0.31454475	0.29593028	0.28121255	0.26443316	0.24756272	0.23061587	0.21448357	0.19651661	0.17937459
41'	0.32788069	0.31426862	0.29565259	0.28093189	0.26415162	0.24728088	0.23033280	0.21422891	0.19623136	0.17908841
42'	0.32751530	0.31399245	0.29537487	0.28065111	0.26387025	0.24699901	0.23004973	0.21397423	0.19594614	0.17880221
43'	0.32714991	0.31371626	0.29509713	0.28037050	0.26358926	0.24671713	0.22976664	0.21371956	0.19566089	0.17851601
44'	0.32678452	0.31344005	0.29481937	0.28008987	0.26330815	0.24643522	0.22948352	0.21346493	0.19537561	0.17822979
45'	0.32641913	0.31316381	0.29454157	0.27980901	0.26302712	0.24615329	0.22920039	0.21321026	0.19509032	0.17794354
46'	0.32605374	0.31288753	0.29426374	0.27952832	0.26274605	0.24587115	0.22891723	0.21295559	0.19480501	0.17765729
47'	0.32568835	0.31261124	0.29398592	0.27924740	0.26246488	0.24558937	0.22863406	0.21270090	0.19451969	0.17737102
48'	0.32532296	0.31233492	0.29370805	0.27896610	0.26218371	0.24530738	0.22835087	0.21244617	0.19423435	0.17708473
49'	0.32495757	0.31205857	0.29343016	0.27868465	0.26190244	0.24502537	0.22806764	0.21219144	0.19394899	0.17679844
50'	0.32459218	0.31178219	0.29315224	0.27840328	0.26162127	0.24474334	0.22778442	0.21193671	0.19366362	0.17651213
51'	0.32422679	0.31150579	0.29287430	0.27812179	0.26134009	0.24446129	0.22750117	0.21168198	0.19337823	0.17622580
52'	0.32386140	0.31122936	0.29259633	0.27784035	0.26105891	0.24417922	0.22721790	0.21142725	0.19309282	0.17593941
53'	0.32349601	0.31095291	0.29231834	0.27755891	0.26077754	0.24389715	0.22693463	0.21117252	0.19280740	0.17565300
54'	0.32313062	0.31067643	0.29204030	0.27727745	0.26049605	0.24361501	0.22665131	0.21091779	0.19252196	0.17536673
55'	0.32276523	0.31039992	0.29176228	0.27700516	0.26021465	0.24333288	0.22636806	0.21066304	0.19223651	0.17508034
56'	0.32240000	0.31012339	0.29148422	0.27673285	0.25993277	0.24305072	0.22608478	0.21040829	0.19195104	0.17479393
57'	0.32203461	0.30984683	0.29120613	0.27646051	0.25965107	0.24276854	0.22580127	0.21015354	0.19166555	0.17450752
58'	0.32166922	0.30957024	0.29092800	0.27618815	0.25936895	0.24248635	0.22551768	0.20988073	0.19138005	0.17422108
59'	0.32130383	0.30929363	0.29064987	0.27591576	0.25908681	0.24220413	0.22523408	0.20960523	0.19109453	0.17393464

	800	810	820	830	840	850	860	870	880	890
81	0.17364818	0.15643444	0.13917319	0.12186934	0.10452846	0.08713574	0.06979567	0.05232595	0.03489949	0.01745240
82	0.17307521	0.15585982	0.13859696	0.12129188	0.10394985	0.08657616	0.06916629	0.05204546	0.03460878	0.01741856
83	0.17278870	0.15552748	0.13830887	0.12100313	0.10366054	0.08628636	0.06888591	0.05146447	0.03402735	0.01657987
84	0.17252018	0.15528513	0.13802078	0.12071439	0.10337121	0.08599656	0.06859571	0.05117394	0.03373663	0.01628902
85	0.17225165	0.15499776	0.13773267	0.12042561	0.10308188	0.08570674	0.06830558	0.05088345	0.03344590	0.01599817
86	0.17198210	0.15471039	0.13744454	0.12013684	0.10279254	0.08541692	0.06801529	0.05059294	0.03315518	0.01570732
87	0.17171357	0.15442299	0.13715641	0.11984805	0.10250318	0.08512709	0.06772507	0.05030242	0.03286445	0.01541646
88	0.17144504	0.15413559	0.13686827	0.11955925	0.10221382	0.08483724	0.06743485	0.05001190	0.03257372	0.01512561
89	0.17117651	0.15384817	0.13658011	0.11927045	0.10192445	0.08454741	0.06714462	0.04972137	0.03228300	0.01483475
90	0.17090798	0.15356074	0.13629194	0.11898163	0.10163508	0.08425754	0.06685439	0.04943084	0.03199224	0.01454398
91	0.17063945	0.15327329	0.13600376	0.11869280	0.10134569	0.08396771	0.06656416	0.04914031	0.03170150	0.01425321
92	0.17037092	0.15298586	0.13571557	0.11840397	0.10105630	0.08367784	0.06627390	0.04884977	0.03141076	0.01396244
93	0.16992285	0.15269836	0.13542737	0.11811512	0.10076689	0.08338797	0.06598365	0.04855922	0.03112002	0.01367167
94	0.16947478	0.15241088	0.13513916	0.11782626	0.10047748	0.08309809	0.06569339	0.04826868	0.03082924	0.01338090
95	0.16902671	0.15212338	0.13485093	0.11753740	0.10018806	0.08280821	0.06540313	0.04797813	0.03053851	0.01309013
96	0.16857864	0.15183588	0.13456269	0.11724852	0.09999843	0.08251831	0.06511286	0.04768757	0.03024776	0.01280036
97	0.16813057	0.15154835	0.13427444	0.11695963	0.09960819	0.08222841	0.06482259	0.04739701	0.02995700	0.01251059
98	0.16768250	0.15126082	0.13398618	0.11667073	0.09931795	0.08193851	0.06453231	0.04710645	0.02966624	0.01222082
99	0.16723443	0.15097327	0.13369791	0.11638183	0.09902829	0.08164859	0.06424202	0.04681588	0.02937548	0.01193105
00	0.16678636	0.15068571	0.13340963	0.11609291	0.09873803	0.08135867	0.06395173	0.04652531	0.02908492	0.01164128
01	0.16633829	0.15039814	0.13312134	0.11580399	0.09844813	0.08106875	0.06366144	0.04623473	0.02879435	0.01135151
02	0.16589022	0.15011055	0.13283303	0.11551505	0.09815818	0.08077883	0.06337110	0.04594416	0.02850378	0.01106174
03	0.16544215	0.14982295	0.13254472	0.11522610	0.09786823	0.08048897	0.06308083	0.04565357	0.02821321	0.01077197
04	0.16499408	0.14953534	0.13225639	0.11493715	0.09757829	0.08019892	0.06279052	0.04536299	0.02792264	0.01048220
05	0.16454601	0.14924772	0.13196805	0.11464818	0.09728833	0.07990897	0.06250020	0.04507240	0.02763208	0.01019243
06	0.16409794	0.14896011	0.13167970	0.11435921	0.09699838	0.07961901	0.06220988	0.04478180	0.02734151	0.00990266
07	0.16364987	0.14867243	0.13139134	0.11407022	0.09670843	0.07932904	0.06191955	0.04449120	0.02705093	0.00961289
08	0.16320180	0.14838477	0.13110297	0.11378123	0.09641843	0.07903906	0.06162922	0.04420060	0.02676036	0.00932312
09	0.16275373	0.14809710	0.13081458	0.11349223	0.09612843	0.07874908	0.06133888	0.04391000	0.02646978	0.00903335
10	0.16230566	0.14780941	0.13052619	0.11320321	0.09583843	0.07845909	0.06104854	0.04361938	0.02617920	0.00874358
11	0.16185759	0.14752171	0.13023779	0.11291419	0.09554843	0.07816910	0.06075819	0.04332877	0.02588861	0.00845381
12	0.16140952	0.14723400	0.12994937	0.11262516	0.09525843	0.07787910	0.06046784	0.04303816	0.02559803	0.00816404
13	0.16096145	0.14694627	0.12966094	0.11233611	0.09496843	0.07758909	0.06017748	0.04274754	0.02530745	0.00787427
14	0.16051338	0.14665854	0.12937250	0.11204706	0.09467843	0.07729907	0.05988711	0.04245695	0.02501687	0.00758450
15	0.16006531	0.14637079	0.12908405	0.11175800	0.09438843	0.07700903	0.05959675	0.04216634	0.02472636	0.00729473
16	0.15961724	0.14608303	0.12879560	0.11146893	0.09409843	0.07671903	0.05930637	0.04187572	0.02443578	0.00700496
17	0.15916917	0.14579525	0.12850712	0.11117985	0.09380843	0.07642903	0.05901599	0.04158510	0.02414519	0.00671519
18	0.15872110	0.14550747	0.12821864	0.11089076	0.09351843	0.07613903	0.05872561	0.04129448	0.02385461	0.00642542
19	0.15827303	0.14521967	0.12793015	0.11060166	0.09322843	0.07584903	0.05843522	0.04100386	0.02356403	0.00613565
20	0.15782496	0.14493188	0.12764165	0.11031255	0.09293843	0.07555903	0.05814483	0.04071324	0.02327345	0.00584588
21	0.15737689	0.14464403	0.12735313	0.11002344	0.09264843	0.07526903	0.05785443	0.04042262	0.02298287	0.00555611
22	0.15692882	0.14435620	0.12706461	0.10973431	0.09235843	0.07497903	0.05756403	0.04013200	0.02269229	0.00526634
23	0.15648075	0.14406835	0.12677609	0.10944517	0.09206843	0.07468903	0.05727362	0.03984138	0.02240171	0.00497657
24	0.15603268	0.14378049	0.12648752	0.10915603	0.09177843	0.07439903	0.05698320	0.03955076	0.02211113	0.00468680
25	0.15558461	0.14349262	0.12619897	0.10886687	0.09148843	0.07410903	0.05669279	0.03926014	0.02182055	0.00439703
26	0.15513654	0.14320474	0.12591040	0.10857771	0.09119843	0.07381903	0.05640238	0.03896952	0.02152997	0.00410726
27	0.15468847	0.14291684	0.12562182	0.10828854	0.09090843	0.07352903	0.05611194	0.03867890	0.02123939	0.00381749
28	0.15424040	0.14262893	0.12533323	0.10799935	0.09061843	0.07323903	0.05582150	0.03838828	0.02094881	0.00352772
29	0.15379233	0.14234101	0.12504463	0.10771016	0.09032843	0.07294903	0.05553107	0.03809766	0.02065823	0.00323795
30	0.15334426	0.14205309	0.12475602	0.10742096	0.09003843	0.07265903	0.05524062	0.03780704	0.02036765	0.00294818
31	0.15289619	0.14176513	0.12446740	0.10713175	0.08974843	0.07236903	0.05495018	0.03751642	0.02007707	0.00265841
32	0.15244812	0.14147718	0.12417877	0.10684253	0.08945843	0.07207903	0.05465973	0.03722580	0.01978649	0.00236864
33	0.15199999	0.14118921	0.12389013	0.10655331	0.08916843	0.07178903	0.05436927	0.03693518	0.01949591	0.00207887
34	0.15155192	0.14090123	0.12360147	0.10626407	0.08887843	0.07149903	0.05407881	0.03664456	0.01920533	0.00178910
35	0.15110385	0.14061324	0.12331281	0.10597482	0.08858843	0.07120903	0.05378835	0.03635393	0.01891475	0.00149933
36	0.15065578	0.14032523	0.12302414	0.10568557	0.08829843	0.07091903	0.05349789	0.03606331	0.01862417	0.00120956
37	0.15020771	0.14003721	0.12273544	0.10539631	0.08800843	0.07062903	0.05320740	0.03577269	0.01833359	0.00091979
38	0.14975964	0.13974919	0.12244674	0.10510701	0.08771843	0.07033903	0.05291692	0.03548207	0.01804301	0.00062992
39	0.14931157	0.13946115	0.12215804	0.10481770	0.08742843	0.07004903	0.05262644	0.03519145	0.01775243	0.00034015

TABLA TRIGONOMETRICA PARA LA
T A N G E N T E

	0°	30°	45°	60°	90°
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

000	010	020	030	040	050	060	070	080	090
00	0.0000000	0.01745506	0.03492677	0.05240778	0.06982681	0.08724866	0.10461024	0.12227456	0.14000000
01	0.00029089	0.01774604	0.03521202	0.05269947	0.07021913	0.08778179	0.10539935	0.12307985	0.14082740
02	0.00058178	0.01803702	0.03550827	0.05309117	0.07051146	0.08807492	0.10569247	0.12337515	0.14113315
03	0.00087266	0.01832801	0.03579953	0.05337808	0.07079300	0.08836808	0.10598662	0.12367048	0.14143845
04	0.00116355	0.01861900	0.03608579	0.05367460	0.07107415	0.08866124	0.10628079	0.12396582	0.14174375
05	0.00145444	0.01891099	0.03637704	0.05396633	0.07135851	0.08895442	0.10657497	0.12426119	0.14204903
06	0.00174533	0.01920298	0.03666834	0.05425806	0.07164609	0.08924782	0.10686917	0.12455658	0.14235430
07	0.00203622	0.01949498	0.03695962	0.05454981	0.07193728	0.08954094	0.10716339	0.12485200	0.14265957
08	0.00232710	0.01978698	0.03725091	0.05484157	0.07222856	0.08983406	0.10745743	0.12514743	0.14296481
09	0.00261799	0.02007898	0.03754220	0.05513333	0.07252009	0.09012731	0.10775168	0.12544288	0.14327003
10	0.00290889	0.02037098	0.03783350	0.05542510	0.07281187	0.09042057	0.10804616	0.12573836	0.14357524
11	0.00319978	0.02066298	0.03812481	0.05571689	0.07310294	0.09071384	0.10834045	0.12603386	0.14388045
12	0.00349067	0.02095491	0.03841612	0.05600868	0.07339461	0.09100713	0.10863476	0.12632938	0.14418566
13	0.00378156	0.02124683	0.03870745	0.05629048	0.07368787	0.09130043	0.10892909	0.12662492	0.14449087
14	0.00407245	0.02153875	0.03899877	0.05657229	0.07398235	0.09159376	0.10922344	0.12692048	0.14479608
15	0.00436335	0.02183068	0.03929011	0.05685412	0.07427814	0.09188709	0.10951781	0.12721607	0.14510129
16	0.00465424	0.02212211	0.03958145	0.05713595	0.07457534	0.09218044	0.10981220	0.12751167	0.14540650
17	0.00494513	0.02241404	0.03987279	0.05741779	0.07487305	0.09247381	0.11010660	0.12780730	0.14571171
18	0.00523603	0.02270597	0.04016415	0.05770164	0.07517136	0.09276720	0.11040103	0.12810295	0.14601692
19	0.00552693	0.02299791	0.04045551	0.05798550	0.07547022	0.09306059	0.11069547	0.12839863	0.14632213
20	0.00581782	0.02328984	0.04074688	0.05827133	0.07576957	0.09335401	0.11098993	0.12869432	0.14662734
21	0.00610872	0.02358178	0.04103825	0.05855825	0.07606940	0.09364744	0.11128441	0.12899004	0.14693255
22	0.00639961	0.02387372	0.04132963	0.05884618	0.07637022	0.09394089	0.11157891	0.12928578	0.14723776
23	0.00669051	0.02416566	0.04162102	0.05913510	0.07667164	0.09423435	0.11187343	0.12958154	0.14754300
24	0.00698141	0.02445760	0.04191242	0.05942605	0.07697361	0.09452823	0.11216797	0.12987732	0.14784825
25	0.00727231	0.02474954	0.04220382	0.05971807	0.07727614	0.09482213	0.11246253	0.13017313	0.14815350
26	0.00756322	0.02504148	0.04249523	0.05999980	0.07757915	0.09511614	0.11275711	0.13046886	0.14845875
27	0.00785413	0.02533342	0.04278665	0.06028367	0.07788272	0.09541037	0.11305170	0.13076461	0.14876400
28	0.00814504	0.02562536	0.04307807	0.06056969	0.07818685	0.09570491	0.11334632	0.13106048	0.14906925
29	0.00843595	0.02591730	0.04336950	0.06085684	0.07849152	0.09599974	0.11364105	0.13135638	0.14937450
30	0.00872686	0.02620924	0.04366094	0.06114512	0.07879671	0.09629485	0.11393581	0.13165230	0.14967975
31	0.00901777	0.02650118	0.04395239	0.06143460	0.07910210	0.09659024	0.11423068	0.13194824	0.14998500
32	0.00930868	0.02679312	0.04424384	0.06172519	0.07940761	0.09688589	0.11452561	0.13224420	0.15029025
33	0.00959959	0.02708506	0.04453530	0.06201680	0.07971324	0.09718169	0.11482069	0.13254029	0.15059550
34	0.00989050	0.02737700	0.04482677	0.06230861	0.07999987	0.09747832	0.11511581	0.13283640	0.15090075
35	0.01018141	0.02766894	0.04511825	0.06260063	0.08029633	0.09777518	0.11541106	0.13313263	0.15120600
36	0.01047232	0.02796088	0.04540973	0.06289287	0.08059399	0.09807230	0.11570643	0.13342898	0.15151125
37	0.01076323	0.02825282	0.04570123	0.06318544	0.08089187	0.09837005	0.11599794	0.13372545	0.15181650
38	0.01105414	0.02854476	0.04599273	0.06347827	0.08119006	0.09866806	0.11629455	0.13402204	0.15212175
39	0.01134505	0.02883670	0.04628423	0.06377139	0.08148856	0.09896634	0.11659120	0.13431869	0.15242700
40	0.01163596	0.02912864	0.04657575	0.06406481	0.08178728	0.09926487	0.11688794	0.13461546	0.15273225
41	0.01192687	0.02942058	0.04686727	0.06435850	0.08208621	0.09956364	0.11718471	0.13491224	0.15303750
42	0.01221778	0.02971252	0.04715880	0.06465246	0.08238525	0.09986267	0.11748150	0.13520903	0.15334275
43	0.01250869	0.02999996	0.04745034	0.06494669	0.08268456	0.10016190	0.11777831	0.13550588	0.15364800
44	0.01279960	0.03029190	0.04774189	0.06524119	0.08298414	0.10046308	0.11807514	0.13580276	0.15395325
45	0.01309051	0.03058384	0.04803344	0.06553596	0.08328399	0.10076441	0.11837600	0.13609963	0.15425850
46	0.01338142	0.03087578	0.04832500	0.06583099	0.08358411	0.10106599	0.11867691	0.13639653	0.15456375
47	0.01367233	0.03116772	0.04861658	0.06612627	0.08388450	0.10136781	0.11897787	0.13669346	0.15486900
48	0.01396324	0.03145966	0.04890816	0.06642181	0.08418515	0.10166984	0.11927887	0.13699042	0.15517425
49	0.01425415	0.03175160	0.04919975	0.06671761	0.08448606	0.10197209	0.11957991	0.13728740	0.15547950
50	0.01454506	0.03204354	0.04949134	0.06701369	0.08478723	0.10227454	0.11988100	0.13758440	0.15578475
51	0.01483597	0.03233548	0.04978293	0.06730994	0.08508866	0.10257721	0.12018214	0.13788143	0.15609000
52	0.01512688	0.03262742	0.05007456	0.06760636	0.08539035	0.10288009	0.12048534	0.13817848	0.15639525
53	0.01541779	0.03291936	0.05036619	0.06790296	0.08569229	0.10318319	0.12078861	0.13847554	0.15670050
54	0.01570870	0.03321130	0.05065782	0.06819974	0.08599448	0.10348654	0.12109194	0.13877261	0.15700575
55	0.01600000	0.03350324	0.05094945	0.06849671	0.08629692	0.10379014	0.12139534	0.13906968	0.15731100
56	0.01629130	0.03379518	0.05124108	0.06879387	0.08659961	0.10409399	0.12169871	0.13936674	0.15761625
57	0.01658260	0.03408712	0.05153272	0.06909121	0.08690255	0.10439809	0.12200214	0.13966381	0.15792150
58	0.01687390	0.03437906	0.05182436	0.06938874	0.08720564	0.10470244	0.12230561	0.13996088	0.15822675
59	0.01716520	0.03467100	0.05211600	0.06968646	0.08750888	0.10500694	0.12260914	0.14026394	0.15853200

	180°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°
00°	0.17632698	0.19428031	0.21255656	0.23068819	0.24932800	0.26794919	0.28674539	0.30573068	0.32491970	0.34432761
01°	0.17662693	0.19468221	0.21286061	0.23117460	0.24963700	0.26826099	0.28706022	0.30604879	0.32524132	0.34465302
02°	0.17692491	0.19498414	0.21316470	0.23148106	0.24994603	0.26857284	0.28737510	0.30636659	0.32556301	0.34497650
03°	0.17722692	0.19528610	0.21346892	0.23178755	0.25025512	0.26888473	0.28769504	0.30668517	0.32588476	0.34529804
04°	0.17752694	0.19558810	0.21377299	0.23209409	0.25056425	0.26919667	0.28800503	0.30700345	0.32620659	0.34561954
05°	0.17782703	0.19589013	0.21407719	0.23240067	0.25087342	0.26950367	0.28832007	0.30732107	0.32652845	0.34594031
06°	0.17812713	0.19619220	0.21438142	0.23270729	0.25118264	0.26980207	0.28863517	0.30764178	0.32685038	0.34626105
07°	0.17842726	0.19649430	0.21468570	0.23301395	0.25149190	0.27013280	0.28895032	0.30795862	0.32717238	0.34658125
08°	0.17872743	0.19679644	0.21499031	0.23332065	0.25180121	0.27044494	0.28926552	0.30827712	0.32749443	0.34690272
09°	0.17902767	0.19709861	0.21529437	0.23362740	0.25211057	0.27075713	0.28958078	0.30859568	0.32781655	0.34722565
10°	0.17932785	0.19740082	0.21559876	0.23393418	0.25241996	0.27106934	0.28989609	0.30891430	0.32813873	0.34754865
11°	0.17962811	0.19770306	0.21590319	0.23424101	0.25272941	0.27138165	0.29021144	0.30923299	0.32846097	0.34787121
12°	0.17992840	0.19800533	0.21620765	0.23454788	0.25303890	0.27169399	0.29052266	0.30955171	0.32878327	0.34819364
13°	0.18022872	0.19830764	0.21651216	0.23485479	0.25334844	0.27200637	0.29083432	0.30987050	0.32910563	0.34851604
14°	0.18052907	0.19860999	0.21681670	0.23516175	0.25365807	0.27231881	0.29114784	0.31018935	0.32942806	0.34883930
15°	0.18082946	0.19891237	0.21712128	0.23546874	0.25396765	0.27263129	0.29146125	0.31050825	0.32975055	0.34916253
16°	0.18112987	0.19921478	0.21742590	0.23577578	0.25427722	0.27294383	0.29177502	0.31082722	0.33007310	0.34948573
17°	0.18143032	0.19951723	0.21773056	0.23608286	0.25458780	0.27325641	0.29208923	0.31114624	0.33039571	0.34980899
18°	0.18173080	0.19981972	0.21803526	0.23638998	0.25489840	0.27356904	0.29240284	0.31146532	0.33071838	0.35013232
19°	0.18203131	0.20012224	0.21834000	0.23669715	0.25520861	0.27388173	0.29271625	0.31178445	0.33104111	0.35045561
20°	0.18233185	0.20042479	0.21864477	0.23700435	0.25551647	0.27419446	0.29302951	0.31210365	0.33136391	0.35077898
21°	0.18263243	0.20072738	0.21894959	0.23731160	0.25582637	0.27450724	0.29334279	0.31242291	0.33168677	0.35110250
22°	0.18293304	0.20103001	0.21925444	0.23761889	0.25613632	0.27482007	0.29365604	0.31274221	0.33200969	0.35142629
23°	0.18323367	0.20133267	0.21955933	0.23792623	0.25644632	0.27513296	0.29396929	0.31306158	0.33233268	0.35175026
24°	0.18353434	0.20163537	0.21986426	0.23823360	0.25675638	0.27544589	0.29428261	0.31338100	0.33265572	0.35207441
25°	0.18383505	0.20193810	0.22016923	0.23854102	0.25706645	0.27575887	0.29459621	0.31370094	0.33297883	0.35239875
26°	0.18413578	0.20224087	0.22047424	0.23884846	0.25737658	0.27607191	0.29490828	0.31402093	0.33330203	0.35272326
27°	0.18443655	0.20254367	0.22077928	0.23915599	0.25768676	0.27638499	0.29522051	0.31434093	0.33362524	0.35304794
28°	0.18473735	0.20284651	0.22108437	0.23946354	0.25799699	0.27669812	0.29553280	0.31466092	0.33394854	0.35337280
29°	0.18503818	0.20314939	0.22138950	0.23977113	0.25830726	0.27701151	0.29584521	0.31498091	0.33427191	0.35369784
30°	0.18533904	0.20345220	0.22169466	0.24007876	0.25861758	0.27732434	0.29615774	0.31530090	0.33459532	0.35402305
31°	0.18563994	0.20375505	0.22199987	0.24038643	0.25892795	0.27763733	0.29647039	0.31562082	0.33491870	0.35434833
32°	0.18594087	0.20405823	0.22230511	0.24069415	0.25923837	0.27795057	0.29678314	0.31594082	0.33524215	0.35467374
33°	0.18624183	0.20436125	0.22261039	0.24100192	0.25954883	0.27826355	0.29709627	0.31626085	0.33556569	0.35499929
34°	0.18654283	0.20466430	0.22291572	0.24130972	0.25985933	0.27857799	0.29740958	0.31658094	0.33588924	0.35532499
35°	0.18684385	0.20496739	0.22322108	0.24161755	0.26016989	0.27889148	0.29772323	0.31690105	0.33621338	0.35565074
36°	0.18714491	0.20527052	0.22352648	0.24192546	0.26048049	0.27920502	0.29803695	0.31722169	0.33653718	0.35597664
37°	0.18744601	0.20557368	0.22383192	0.24223340	0.26079114	0.27951861	0.29835071	0.31754207	0.33686105	0.35630271
38°	0.18774713	0.20587688	0.22413741	0.24254137	0.26110183	0.27983225	0.29866454	0.31786212	0.33718497	0.35662896
39°	0.18804829	0.20618012	0.22444293	0.24284940	0.26141125	0.28014594	0.29897841	0.31818293	0.33750897	0.35695540
40°	0.18834948	0.20648339	0.22474849	0.24315746	0.26172337	0.28045968	0.29929235	0.31850390	0.33783302	0.35728201
41°	0.18865070	0.20678670	0.22505409	0.24346557	0.26203420	0.28077348	0.29960633	0.31882422	0.33815714	0.35760876
42°	0.18895196	0.20709004	0.22535973	0.24377372	0.26234509	0.28108732	0.30001438	0.31914601	0.33848131	0.35793564
43°	0.18925325	0.20739343	0.22566541	0.24408192	0.26265602	0.28140122	0.30032318	0.31946825	0.33880557	0.35826265
44°	0.18955458	0.20769684	0.22597114	0.24439016	0.26296700	0.28171517	0.30063483	0.31979184	0.33912998	0.35858983
45°	0.18985593	0.20800030	0.22627690	0.24469844	0.26327803	0.28202917	0.30094854	0.32011252	0.33945472	0.35891719
46°	0.19015732	0.20830379	0.22658270	0.24500677	0.26358910	0.28234322	0.30126304	0.32042525	0.33977970	0.35924461
47°	0.19045875	0.20860732	0.22688854	0.24531514	0.26390023	0.28265732	0.30157804	0.32073843	0.34010320	0.35957216
48°	0.19076020	0.20891088	0.22719443	0.24562356	0.26421140	0.28297148	0.30189310	0.32105168	0.34042777	0.35989985
49°	0.19106169	0.20921449	0.22750035	0.24593202	0.26452261	0.28328516	0.30220835	0.32136508	0.34075240	0.36022766
50°	0.19136322	0.20951813	0.22780631	0.24624052	0.26483388	0.28359994	0.30252527	0.32167874	0.34107710	0.36055567
51°	0.19166477	0.20982180	0.22811237	0.24654907	0.26514520	0.28391425	0.30284236	0.32199275	0.34140185	0.36088381
52°	0.19196636	0.21012551	0.22841836	0.24685766	0.26545656	0.28422861	0.30315974	0.32230708	0.34172668	0.36121207
53°	0.19226799	0.21042926	0.22872445	0.24716630	0.26576797	0.28454303	0.30347655	0.32262169	0.34205157	0.36154057
54°	0.19256966	0.21073305	0.22903057	0.24747498	0.26607948	0.28485749	0.30379323	0.32293620	0.34237653	0.36186949
55°	0.19287134	0.21103688	0.22933674	0.24778371	0.26639099	0.28517201	0.30411000	0.32325146	0.34270154	0.36219863
56°	0.19317307	0.21134074	0.22964295	0.24809248	0.26670249	0.28548658	0.30442686	0.32356697	0.34302663	0.36252791
57°	0.19347483	0.21164464	0.22994920	0.24840129	0.26701409	0.28580026	0.30474376	0.32388278	0.34335178	0.36285728
58°	0.19377662	0.21194858	0.23025549	0.24871015	0.26732574	0.28611588	0.30506074	0.32419782	0.34367699	0.36318685
59°	0.19407845	0.21225253	0.23056182	0.24901905	0.26763744	0.28643061	0.30537783	0.32451313	0.34400227	0.36351665

	299	210	220	230	240	250	260	270	280	290
00	0.36397023	0.38384403	0.40402623	0.42447462	0.44522869	0.46630766	0.48773259	0.50952545	0.53170943	0.55430903
01	0.36429949	0.38419782	0.40436464	0.42481816	0.44557728	0.46666185	0.48809772	0.50989191	0.53208262	0.55468938
02	0.36462922	0.38453169	0.40470313	0.42516159	0.44592597	0.46710163	0.48854296	0.51025680	0.53245592	0.55506980
03	0.36495882	0.38486562	0.40504170	0.42550510	0.44627474	0.46737051	0.48881351	0.51062216	0.53282936	0.55545033
04	0.36528849	0.38519964	0.40538035	0.42584870	0.44662361	0.46767249	0.48911735	0.51099193	0.53320286	0.55583110
05	0.36561822	0.38553372	0.40571908	0.42619238	0.44697257	0.46800795	0.48953430	0.51135885	0.53357651	0.55621192
06	0.36594803	0.38586789	0.40605789	0.42653615	0.44732162	0.46843423	0.48989494	0.51172585	0.53395027	0.55659286
07	0.36627791	0.38620212	0.40639678	0.42688000	0.44767076	0.46887890	0.49025570	0.51209297	0.53432415	0.55697392
08	0.36660784	0.38653644	0.40673575	0.42722394	0.44801999	0.46914384	0.49061655	0.51246019	0.53469815	0.55735511
09	0.36693789	0.38687082	0.40707480	0.42756796	0.44836931	0.46949882	0.49097751	0.51282753	0.53507226	0.55773646
10	0.36726797	0.38720529	0.40741394	0.42791207	0.44871872	0.46985388	0.49133857	0.51319497	0.53544649	0.55811783
11	0.36759813	0.38753982	0.40775315	0.42825627	0.44906822	0.47020903	0.49169973	0.51356253	0.53582083	0.55849942
12	0.36792836	0.38787444	0.40809244	0.42860055	0.44942822	0.47056428	0.49206100	0.51393019	0.53619530	0.55888111
13	0.36825864	0.38820913	0.40843181	0.42894491	0.44978845	0.47091963	0.49242377	0.51429798	0.53656987	0.55926292
14	0.36858903	0.38854389	0.40877127	0.42928937	0.45011726	0.47127508	0.49278385	0.51466585	0.53694457	0.55964485
15	0.36891948	0.38887873	0.40911080	0.42963391	0.45044615	0.47163062	0.49314543	0.51503384	0.53731938	0.56002691
16	0.36924999	0.38921365	0.40945042	0.42997853	0.45081711	0.47198624	0.49350711	0.51540195	0.53769431	0.56040910
17	0.36958058	0.38954864	0.40979011	0.43032324	0.45116717	0.47234200	0.49386889	0.51577016	0.53806936	0.56079149
18	0.36991123	0.38988371	0.41012989	0.43066804	0.45151731	0.47269783	0.49423078	0.51613849	0.53844452	0.56117383
19	0.37024194	0.39021885	0.41046975	0.43101292	0.45186755	0.47305377	0.49459278	0.51650692	0.53881981	0.56155638
20	0.37057274	0.39055407	0.41080969	0.43135789	0.45221788	0.47340980	0.49495487	0.51687557	0.53919520	0.56193906
21	0.37090363	0.39088937	0.41114971	0.43170295	0.45256830	0.47376593	0.49531708	0.51724413	0.53957072	0.56232187
22	0.37123457	0.39122474	0.41148981	0.43204809	0.45291881	0.47412216	0.49567938	0.51761290	0.53994636	0.56270480
23	0.37156558	0.39156019	0.41182999	0.43239332	0.45326942	0.47447849	0.49604179	0.51798177	0.54032211	0.56308786
24	0.37189667	0.39189571	0.41217028	0.43273864	0.45362012	0.47483491	0.49640431	0.51835077	0.54069798	0.56347104
25	0.37222782	0.39223132	0.41251060	0.43308405	0.45397091	0.47519143	0.49676693	0.51871987	0.54107397	0.56385433
26	0.37255905	0.39256699	0.41285103	0.43342954	0.45432179	0.47554806	0.49712966	0.51908908	0.54145008	0.56423778
27	0.37289035	0.39290273	0.41319154	0.43377527	0.45467277	0.47590478	0.49749479	0.51945851	0.54182631	0.56462104
28	0.37322172	0.39323858	0.41353213	0.43412078	0.45502384	0.47626160	0.49785542	0.51982784	0.54220265	0.56500503
29	0.37355316	0.39357449	0.41387291	0.43446653	0.45537500	0.47661851	0.49821846	0.52019739	0.54257912	0.56538884
30	0.37388468	0.39391048	0.41421356	0.43481237	0.45572626	0.47697553	0.49858141	0.52056705	0.54295570	0.56577279
31	0.37421627	0.39424654	0.41455440	0.43515830	0.45607760	0.47733245	0.49894484	0.52093682	0.54333240	0.56615684
32	0.37454793	0.39458268	0.41489532	0.43550432	0.45642804	0.47768946	0.49930821	0.52130671	0.54370922	0.56654103
33	0.37487966	0.39491889	0.41523632	0.43585042	0.45677858	0.47804718	0.49967148	0.52167670	0.54408616	0.56692533
34	0.37521146	0.39525519	0.41557741	0.43619661	0.45713221	0.47840459	0.50003484	0.52204681	0.54446322	0.56730979
35	0.37554334	0.39559156	0.41591857	0.43654289	0.45747893	0.47876211	0.50039892	0.52241703	0.54484040	0.56769437
36	0.37587529	0.39592801	0.41625982	0.43688926	0.45782575	0.47911972	0.50076320	0.52278737	0.54521770	0.56807906
37	0.37620731	0.39626453	0.41660116	0.43723571	0.45817245	0.47947743	0.50112658	0.52315781	0.54559522	0.56846389
38	0.37653940	0.39660114	0.41694257	0.43758225	0.45851946	0.47983525	0.50149057	0.52352837	0.54597266	0.56884884
39	0.37687157	0.39693782	0.41728407	0.43792889	0.45886675	0.48019316	0.50185467	0.52389904	0.54635031	0.56923392
40	0.37720381	0.39727458	0.41762565	0.43827561	0.45921395	0.48055117	0.50221888	0.52426983	0.54672809	0.56961913
41	0.37753613	0.39761142	0.41796731	0.43862241	0.45956123	0.48090929	0.50258319	0.52464073	0.54710599	0.57000447
42	0.37786851	0.39794833	0.41830904	0.43896931	0.45990861	0.48126750	0.50294740	0.52501174	0.54748401	0.57038993
43	0.37820097	0.39828532	0.41865089	0.43931629	0.46026109	0.48162581	0.50331213	0.52538266	0.54786215	0.57077552
44	0.37853350	0.39862248	0.41899280	0.43966337	0.46055365	0.48198423	0.50367676	0.52575340	0.54824041	0.57116124
45	0.37886611	0.39895955	0.41933488	0.44001053	0.46084631	0.48234274	0.50404149	0.52612445	0.54861879	0.57154709
46	0.37919879	0.39929677	0.41967688	0.44035778	0.46113907	0.48270126	0.50440634	0.52649562	0.54899729	0.57193306
47	0.37953156	0.39963408	0.42001905	0.44070512	0.46143119	0.48306007	0.50477129	0.52686699	0.54937591	0.57231917
48	0.37986437	0.39997146	0.42036129	0.44105255	0.46172487	0.48341889	0.50513635	0.52723819	0.54975485	0.57270548
49	0.38019726	0.40030893	0.42070362	0.44140007	0.46201791	0.48377781	0.50550151	0.52761200	0.55013352	0.57309176
50	0.38053024	0.40064647	0.42104604	0.44174748	0.46231105	0.48413682	0.50586679	0.52798793	0.55051250	0.57347825
51	0.38086328	0.40098409	0.42138854	0.44209537	0.46261428	0.48449594	0.50623217	0.52836593	0.55089181	0.57386485
52	0.38119645	0.40132179	0.42173112	0.44244316	0.46301761	0.48485516	0.50659766	0.52874610	0.55127084	0.57425162
53	0.38152968	0.40165957	0.42207379	0.44279104	0.46338103	0.48521449	0.50696323	0.52912837	0.55165019	0.57463850
54	0.38186287	0.40199742	0.42241654	0.44313900	0.46374854	0.48557399	0.50732893	0.52951274	0.55202966	0.57502550
55	0.38219621	0.40233536	0.42275937	0.44348670	0.46410620	0.48593343	0.50769477	0.52989924	0.55240925	0.57541264
56	0.38252963	0.40267337	0.42310229	0.44383504	0.46446487	0.48629324	0.50806064	0.53028785	0.55278897	0.57579991
57	0.38286312	0.40301147	0.42344530	0.44418344	0.46482367	0.48665279	0.50842679	0.53067659	0.55316880	0.57618730
58	0.38319668	0.40334964	0.42378839	0.44453176	0.46518257	0.48701267	0.50879285	0.53106591	0.55354876	0.57657483
59	0.38353032	0.40368789	0.42413156	0.44488018	0.46553957	0.48737225	0.50915918	0.53145634	0.55392885	0.57696248

400	410	420	430	440	450	460	470	480	490
0.83909643	0.86928674	0.90040404	0.93251508	0.96568877	1.00000000	1.03553031	1.07234871	1.11061251	1.15036941
0.83959545	0.86979757	0.90093090	0.93365907	0.96625109	1.00058194	1.03613331	1.07299431	1.11126241	1.15104447
0.84009151	0.87030665	0.90145803	0.93480334	0.96681372	1.00116423	1.03673667	1.07364029	1.11191273	1.15172098
0.84058782	0.87082000	0.90199554	0.93414793	0.96737667	1.00174685	1.03734039	1.07424667	1.11253697	1.15239795
0.84108436	0.87133161	0.90255313	0.93469281	0.96793993	1.00232982	1.03794448	1.07487344	1.11312463	1.15307543
0.84158116	0.87184347	0.90304109	0.93523798	0.96850352	1.00291312	1.03854893	1.07550061	1.11386621	1.15375324
0.84207819	0.87235560	0.90354934	0.93578345	0.96906742	1.00349676	1.03915375	1.07612816	1.11451821	1.15443157
0.84257547	0.87286798	0.90409985	0.93632921	0.96963163	1.00408075	1.03975893	1.07675611	1.11517044	1.15511036
0.84307299	0.87338063	0.90462685	0.93687527	0.97019617	1.00466507	1.04036448	1.07738445	1.11582349	1.15576960
0.84357075	0.87389356	0.90515573	0.93742163	0.97076102	1.00524974	1.04097040	1.07801319	1.11647676	1.15646930
0.84406874	0.87440670	0.90568520	0.93796829	0.97132620	1.00583475	1.04157668	1.07864232	1.11713046	1.15714946
0.84456702	0.87492013	0.90621472	0.93851525	0.97189169	1.00642018	1.04218334	1.07927194	1.11778458	1.15783007
0.84506552	0.87543382	0.90674463	0.93906250	0.97245751	1.00700580	1.04279036	1.07990176	1.11843913	1.15851115
0.84556426	0.87594777	0.90727462	0.93961006	0.97302364	1.00759184	1.04339774	1.08053208	1.11909411	1.15919268
0.84606325	0.87646199	0.90780529	0.94015791	0.97359009	1.00817822	1.04400550	1.08116279	1.11974951	1.15987467
0.84656249	0.87697644	0.90833604	0.94070607	0.97415687	1.00876494	1.04461363	1.08179390	1.12040534	1.16055713
0.84706197	0.87749120	0.90886708	0.94125452	0.97472397	1.00935201	1.04522212	1.08242541	1.12106160	1.16124004
0.84756170	0.87800620	0.90939839	0.94180327	0.97529138	1.00993943	1.04583099	1.08305731	1.12171828	1.16192342
0.84806167	0.87852166	0.90992999	0.94235233	0.97585912	1.01052719	1.04644022	1.08368962	1.12237539	1.16260725
0.84856189	0.87903699	0.91046186	0.94290168	0.97642719	1.01111530	1.04704983	1.08432232	1.12303294	1.16329155
0.84906236	0.87955278	0.91099402	0.94345134	0.97699557	1.01170375	1.04765981	1.08495542	1.12369091	1.16397632
0.84956308	0.88006884	0.91152646	0.94400130	0.97756428	1.01229255	1.04827016	1.08558892	1.12434931	1.16466154
0.85006404	0.88058516	0.91205919	0.94455156	0.97813331	1.01288149	1.04888088	1.08622282	1.12500814	1.16534724
0.85056525	0.88110174	0.91259218	0.94510212	0.97870267	1.01347119	1.04949198	1.08685512	1.12566741	1.16603339
0.85106671	0.88161859	0.91312548	0.94565299	0.97927235	1.01406103	1.05010345	1.08748718	1.12632711	1.16672002
0.85156841	0.88213571	0.91365905	0.94620416	0.97984235	1.01465121	1.05071529	1.08812693	1.12698723	1.16740711
0.85207037	0.88265308	0.91419291	0.94675543	0.98041268	1.01524175	1.05132751	1.08876244	1.12764780	1.16809466
0.85257258	0.88317070	0.91472705	0.94730741	0.98098334	1.01583264	1.05194010	1.08939825	1.12830879	1.16878267
0.85307503	0.88368844	0.91526147	0.94785949	0.98155432	1.01642387	1.05255306	1.09003466	1.12897022	1.16947118
0.85357773	0.88420692	0.91579618	0.94841187	0.98212563	1.01701546	1.05316641	1.09067138	1.12963208	1.17016014
0.85408068	0.88472526	0.91633117	0.94896457	0.98269726	1.01760739	1.05378012	1.09130850	1.13029438	1.17084948
0.85458389	0.88524397	0.91686645	0.94951754	0.98326922	1.01819969	1.05439422	1.09194602	1.13095712	1.17153946
0.85508734	0.88576295	0.91740202	0.95007086	0.98384151	1.01879231	1.05500849	1.09258395	1.13162029	1.17222993
0.85559104	0.88628220	0.91793987	0.95062447	0.98441413	1.01938530	1.05562354	1.09322229	1.13228390	1.17292047
0.85609500	0.88680171	0.91847400	0.95117838	0.98498707	1.01997894	1.05623876	1.09386103	1.13294794	1.17361198
0.85660020	0.88732149	0.91901013	0.95173260	0.98556034	1.02057233	1.05685437	1.09450018	1.13361243	1.17430376
0.85710566	0.88784154	0.91954743	0.95228713	0.98613394	1.02116638	1.05747035	1.09513974	1.13427735	1.17499582
0.85761133	0.88836186	0.92008413	0.95284196	0.98670787	1.02176077	1.05808671	1.09577970	1.13494271	1.17568825
0.85811723	0.88888245	0.92062142	0.95339710	0.98728213	1.02235552	1.05870345	1.09642007	1.13560851	1.17638194
0.85862331	0.88940331	0.92115899	0.95395255	0.98785672	1.02295043	1.05932057	1.09706085	1.13627475	1.17707544
0.85912961	0.88992444	0.92169685	0.95450831	0.98843164	1.02354659	1.05993807	1.09770204	1.13694143	1.17776979
0.85964629	0.89044583	0.92223500	0.95506438	0.98900689	1.02414190	1.06055594	1.09834364	1.13760855	1.17846452
0.86016326	0.89096750	0.92277344	0.95562074	0.98958247	1.02473807	1.06117422	1.09896545	1.13827611	1.17915952
0.86068052	0.89148944	0.92331217	0.95617744	0.99015839	1.02533459	1.06179287	1.09958737	1.13894412	1.17985511
0.86119809	0.89201164	0.92385110	0.95673444	0.99073463	1.02593148	1.06241189	1.10020780	1.13961256	1.18055117
0.86171593	0.89253412	0.92439049	0.95729174	0.99131121	1.02652871	1.06303131	1.10081414	1.14028146	1.18124770
0.86223407	0.89305687	0.92493009	0.95784936	0.99188812	1.02712631	1.06365110	1.10142579	1.14095079	1.18194472
0.86275243	0.89357990	0.92546977	0.95840728	0.99246536	1.02772426	1.06427128	1.10203186	1.14162057	1.18264222
0.86327101	0.89410319	0.92600915	0.95896552	0.99304294	1.02832256	1.06489184	1.10264434	1.14229079	1.18334020
0.86378989	0.89462676	0.92654856	0.95952407	0.99362085	1.02892123	1.06551278	1.10324974	1.14296167	1.18403856
0.86430908	0.89515060	0.92708918	0.96008293	0.99419909	1.02952025	1.06613412	1.10385854	1.14363328	1.18473759
0.86482858	0.89567471	0.92762943	0.96064210	0.99477767	1.03011964	1.06675583	1.10447827	1.14430415	1.18543703
0.86534837	0.89619909	0.92817378	0.96120159	0.99535658	1.03071938	1.06737794	1.10509240	1.14497451	1.18613692
0.86586846	0.89672375	0.92871541	0.96176139	0.99593583	1.03131948	1.06800042	1.10570749	1.14564461	1.18683716
0.86638884	0.89724868	0.92925734	0.96232150	0.99651542	1.03191995	1.06862330	1.10632193	1.14631512	1.18753761
0.86690951	0.89777389	0.92979957	0.96288193	0.99709534	1.03252077	1.06924656	1.10693691	1.14698608	1.18823833
0.86743048	0.89829937	0.93034208	0.96344267	0.99767560	1.03312196	1.06987021	1.10755121	1.14765688	1.18893957
0.86795174	0.89882513	0.93088489	0.96400372	0.99825619	1.03372350	1.07049424	1.10816654	1.14832794	1.18964109
0.86847329	0.89935116	0.93142799	0.96456509	0.99883712	1.03432541	1.07111868	1.10879139	1.14900164	1.19034451
0.86899514	0.89987746	0.93197133	0.96512677	0.99941839	1.03492748	1.07174350	1.10941634	1.14967280	1.19104888

	500	510	520	530	540	550	560	570	580	590
01	1.18173359	1.23487715	1.27994163	1.22704482	1.37438192	1.42814808	1.48256094	1.53984494	1.60033452	1.66427948
02	1.18245384	1.23563190	1.28070935	1.32784828	1.37722421	1.42903256	1.48349162	1.54084604	1.60137088	1.66527661
03	1.18316263	1.23634718	1.28147765	1.32865237	1.37806718	1.42991785	1.48442309	1.54182799	1.60240820	1.66647480
04	1.18386768	1.23718298	1.28224651	1.32945708	1.37891082	1.43080387	1.48535535	1.54281083	1.60344449	1.66757406
05	1.18457362	1.23782932	1.28301595	1.33026241	1.37975514	1.43169663	1.48628842	1.54379455	1.60448575	1.66867438
06	1.18527984	1.23857419	1.28378597	1.33106837	1.38060014	1.43257814	1.48722230	1.54477916	1.60552598	1.66977470
07	1.18598658	1.23931258	1.28455654	1.33187495	1.38144582	1.43346638	1.48815699	1.54576465	1.60656718	1.67087824
08	1.18669379	1.24005151	1.28532773	1.33268215	1.38229217	1.43435536	1.48909249	1.54675102	1.60760935	1.67198178
09	1.18740158	1.24078997	1.28609942	1.33348998	1.38313921	1.43524529	1.49002880	1.54773829	1.60865251	1.67308388
10	1.18810971	1.24152897	1.28687179	1.33429844	1.38398693	1.43613556	1.49096592	1.54872644	1.60969663	1.67419207
11	1.18881840	1.24226850	1.28764469	1.33510753	1.38483532	1.43702677	1.49190385	1.54971549	1.61074174	1.67529833
12	1.18952759	1.24300854	1.28841817	1.33591724	1.38568442	1.43791873	1.49284261	1.55070542	1.61178782	1.67640448
13	1.20023728	1.24374916	1.28919223	1.33672759	1.38653419	1.43881143	1.49378216	1.55169626	1.61283489	1.67751560
14	1.20094744	1.24449029	1.28996687	1.33753856	1.38738465	1.43970489	1.49472254	1.55268798	1.61388294	1.67862651
15	1.20165813	1.24523197	1.29074209	1.33835012	1.38823579	1.44059909	1.49566374	1.55368000	1.61493197	1.67973670
16	1.20236931	1.24597417	1.29151789	1.33916240	1.38908713	1.44149404	1.49660576	1.55467412	1.61598199	1.68084688
17	1.20308098	1.24671692	1.29229428	1.33997528	1.38994014	1.44238974	1.49754860	1.55566954	1.61703300	1.68195614
18	1.20379315	1.24746021	1.29307125	1.34078878	1.39079333	1.44328620	1.49849226	1.55666636	1.61808499	1.68306550
19	1.20450582	1.24820403	1.29384881	1.34160292	1.39164726	1.44418340	1.49943674	1.55766408	1.61913798	1.68417578
20	1.20521899	1.24894840	1.29462695	1.34241770	1.39250195	1.44508136	1.50038205	1.55866270	1.62019196	1.68528648
21	1.20593264	1.24969331	1.29540564	1.34323311	1.39335713	1.44598028	1.50132818	1.55966232	1.62124693	1.68639750
22	1.20664683	1.25043874	1.29618499	1.34404916	1.39421311	1.44687955	1.50227514	1.56065916	1.62230290	1.68750845
23	1.20736150	1.25118475	1.29696489	1.34486584	1.39507978	1.44777979	1.50322293	1.56165400	1.62335987	1.68861946
24	1.20807667	1.25193128	1.29775339	1.34568314	1.39594715	1.44868677	1.50417155	1.56265742	1.62441783	1.68973052
25	1.20879225	1.25267836	1.29854646	1.34650114	1.39681522	1.44959252	1.50512099	1.56365842	1.62547680	1.69084165
26	1.20950853	1.25342598	1.29936813	1.34731975	1.39768498	1.45050650	1.50607127	1.56465899	1.62653676	1.69195279
27	1.21022521	1.25417415	1.30020900	1.34813900	1.39855344	1.45142830	1.50702238	1.56566247	1.62759773	1.69306394
28	1.21094240	1.25492287	1.30106825	1.34895899	1.39942360	1.45235293	1.50797433	1.56666897	1.62865971	1.69417529
29	1.21166009	1.25567213	1.30193669	1.34977943	1.40029448	1.45328448	1.50892711	1.56767219	1.62972249	1.69528685
30	1.21237829	1.25642194	1.30281073	1.35060061	1.40116603	1.45421707	1.50988073	1.56868182	1.63078668	1.69639843
31	1.21309700	1.25717230	1.30368137	1.35142243	1.40203829	1.45515093	1.51083519	1.56969557	1.63185168	1.69751011
32	1.21381622	1.25792320	1.30455860	1.35229481	1.40291129	1.45608512	1.51179049	1.57070936	1.63291569	1.69862192
33	1.21453594	1.25867466	1.30544243	1.35316803	1.40378493	1.45702039	1.51274662	1.57172464	1.63398472	1.69973364
34	1.21525617	1.25942666	1.30633285	1.35404243	1.40465931	1.45795732	1.51370360	1.57274125	1.63505276	1.70084559
35	1.21597749	1.26017922	1.30722897	1.35491816	1.40553440	1.45889493	1.51466142	1.57375939	1.63612132	1.70195784
36	1.21669881	1.26093233	1.30812678	1.35579428	1.40641029	1.45983321	1.51562009	1.57477816	1.63719189	1.70307032
37	1.21742019	1.26168500	1.30902520	1.35667070	1.40728649	1.46077169	1.51657960	1.57579766	1.63826298	1.70418307
38	1.21814161	1.26243821	1.30992432	1.35754843	1.40816339	1.46171049	1.51753994	1.57681848	1.63933510	1.70529594
39	1.21886307	1.26319199	1.31082414	1.35842646	1.40904069	1.46264969	1.51840117	1.57784003	1.64040824	1.70640893
40	1.21958458	1.26394631	1.31172466	1.35930480	1.40991842	1.46358926	1.51926232	1.57886244	1.64148144	1.70752212
41	1.22030613	1.26470119	1.31262586	1.36018333	1.41079659	1.46452919	1.52012443	1.57988509	1.64255479	1.70863551
42	1.22102772	1.26545662	1.31352773	1.36106303	1.41167519	1.46546948	1.52098657	1.58090794	1.64362729	1.70974901
43	1.22174935	1.26621267	1.31442928	1.36194390	1.41255424	1.46641007	1.52184812	1.58193109	1.64470004	1.71086261
44	1.22247101	1.26696926	1.31533051	1.36282503	1.41343364	1.46735086	1.52270983	1.58295444	1.64577294	1.71197631
45	1.22319270	1.26772639	1.31623143	1.36370633	1.41431339	1.46829385	1.52357170	1.58397799	1.64684609	1.71309011
46	1.22391441	1.26848406	1.31713204	1.36458780	1.41519349	1.46923704	1.52443373	1.58500174	1.64791949	1.71420401
47	1.22463613	1.26924227	1.31803235	1.36546943	1.41607394	1.47018043	1.52529592	1.58602569	1.64899309	1.71531801
48	1.22535785	1.27000092	1.31893235	1.36635123	1.41695474	1.47112302	1.52615827	1.58704984	1.65006689	1.71643211
49	1.22607957	1.27076011	1.31983194	1.36723319	1.41783589	1.47206581	1.52702077	1.58807419	1.65114089	1.71754631
50	1.22680129	1.27151972	1.32073113	1.36811531	1.41871729	1.47300840	1.52788342	1.58909874	1.65221509	1.71866061
51	1.22752301	1.27227973	1.32163092	1.36900750	1.41960894	1.47395109	1.52874612	1.59012349	1.65328939	1.71977501
52	1.22824473	1.27304014	1.32253031	1.36990985	1.42050083	1.47489388	1.52960893	1.59114834	1.65436369	1.72088951
53	1.22896645	1.27380095	1.32342930	1.37081235	1.42139287	1.47583677	1.53047184	1.59217339	1.65543809	1.72200401
54	1.22968817	1.27456216	1.32432800	1.37171499	1.42228506	1.47677976	1.53133485	1.59319844	1.65651249	1.72311851
55	1.23040989	1.27532367	1.32522630	1.37261773	1.42317740	1.47772285	1.53219796	1.59422359	1.65758689	1.72423301
56	1.23113161	1.27608538	1.32612420	1.37352057	1.42406989	1.47866594	1.53306117	1.59524874	1.65866129	1.72534751
57	1.23185333	1.27684719	1.32702180	1.37442351	1.42496253	1.47960913	1.53392448	1.59627399	1.65973569	1.72646201
58	1.23257505	1.27760900	1.32791900	1.37532645	1.42585527	1.48055232	1.53478789	1.59729924	1.66080989	1.72757651
59	1.23329677	1.27837081	1.32881580	1.37622939	1.42674811	1.48149561	1.53565130	1.59832449	1.66188409	1.72869101

	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690
00'	1.73205080	1.80404775	1.86072646	1.96261050	2.05030384	2.14450691	2.24403676	2.35585235	2.47506184	2.405089706
01'	1.73321494	1.80528601	1.86204698	1.964012265	2.05181845	2.14613659	2.24779422	2.35775899	2.47714122	2.60735577
02'	1.73438024	1.80652857	1.86336895	1.96543641	2.05333380	2.14776830	2.24955604	2.35966824	2.47923859	2.609625993
03'	1.73554674	1.80776643	1.86469236	1.96685179	2.05485310	2.14940205	2.25132211	2.36158012	2.48131896	2.611899593
04'	1.73671441	1.80900060	1.86601723	1.96826880	2.05637315	2.15103784	2.25308850	2.36349443	2.48340734	2.61417659
05'	1.73788324	1.81023208	1.86734335	1.96968742	2.05789502	2.15267568	2.25485722	2.36541177	2.48548872	2.61645712
06'	1.73905329	1.81146987	1.86866733	1.97110767	2.05941871	2.15431558	2.25662824	2.36731554	2.48757813	2.61874112
07'	1.74022451	1.81274297	1.86990057	1.97252955	2.06094423	2.15595753	2.25840162	2.36925397	2.48967056	2.62102861
08'	1.74139491	1.81399939	1.87133128	1.97395307	2.06247158	2.15740154	2.26017731	2.37117904	2.49176602	2.62331958
09'	1.74256705	1.81523912	1.87266345	1.97537822	2.06400076	2.15924762	2.26195534	2.37310678	2.49386453	2.62561404
10'	1.74374328	1.81646917	1.87399708	1.97680501	2.06553178	2.16089576	2.26373571	2.37503718	2.49596608	2.62791265
11'	1.74492326	1.81774054	1.87533219	1.97823344	2.06706464	2.16259598	2.26551843	2.37697025	2.49807669	2.63021354
12'	1.74610783	1.81899324	1.87666876	1.97966351	2.06859925	2.16419828	2.26730350	2.37890596	2.50018735	2.63251857
13'	1.74729679	1.82024726	1.87800682	1.98109524	2.07013590	2.16585264	2.26909093	2.38084441	2.50228798	2.63482713
14'	1.74848435	1.82150262	1.87934635	1.98252861	2.07167430	2.16750912	2.27088071	2.38278551	2.50440289	2.63713922
15'	1.74968111	1.82275930	1.90068736	1.98396364	2.07321457	2.16916768	2.27267287	2.38472932	2.50651978	2.63945487
16'	1.75088198	1.82401732	1.90202986	1.98540032	2.07475669	2.17078333	2.27446740	2.38667582	2.50863977	2.64177458
17'	1.75208225	1.82527667	1.90337384	1.98683867	2.07630067	2.17249107	2.27626430	2.38862502	2.51076284	2.64409685
18'	1.75328463	1.82653736	1.90471931	1.98827866	2.07784652	2.17415593	2.27806358	2.39057694	2.51289890	2.64642320
19'	1.75448921	1.82779939	1.90606628	1.98972033	2.07939423	2.17582288	2.27986525	2.39252157	2.51503931	2.64875313
20'	1.75569591	1.82906277	1.90741473	1.99116270	2.08094383	2.17749195	2.28166930	2.39448893	2.51718502	2.65108666
21'	1.75690470	1.83032749	1.90876419	1.99260592	2.08249529	2.17916314	2.28347576	2.39644901	2.51933255	2.65343279
22'	1.75811564	1.83159355	1.91011415	1.99405047	2.08404864	2.18083644	2.28528454	2.39841183	2.52148292	2.65578254
23'	1.75932868	1.83286097	1.91146911	1.99550379	2.08560387	2.18251187	2.28709598	2.40037739	2.52363672	2.65813698
24'	1.76054384	1.83412974	1.91282357	1.99695389	2.08716100	2.18418943	2.28890955	2.40234570	2.52579198	2.66049237
25'	1.76176112	1.83539984	1.91417954	1.99840859	2.08872001	2.18586812	2.29072565	2.40431675	2.52795138	2.66284849
26'	1.76298053	1.83667134	1.91553702	1.99985902	2.09028092	2.18755895	2.29254416	2.40629057	2.53011105	2.66520476
27'	1.76420205	1.83794418	1.91689602	2.00131415	2.09184373	2.18925492	2.29436510	2.40826715	2.53226549	2.66756129
28'	1.76542571	1.83921838	1.91825654	2.00277076	2.09340844	2.19092103	2.29618648	2.41024650	2.53443210	2.66991828
29'	1.76665149	1.84049395	1.91961857	2.00422948	2.09497506	2.19258930	2.29800928	2.41222844	2.53660229	2.67227554
30'	1.76787940	1.84177088	1.92098222	2.00568970	2.09654359	2.19425673	2.29983454	2.41421255	2.53877679	2.67464248
31'	1.76910946	1.84304918	1.92234734	2.00715163	2.09811404	2.19592921	2.30167324	2.41620176	2.54095507	2.67701952
32'	1.77034163	1.84432895	1.92371280	2.00861526	2.09968644	2.19760705	2.30315939	2.41819174	2.54313654	2.67940244
33'	1.77157594	1.84560990	1.92508194	2.01008060	2.10126068	2.19929376	2.30554260	2.42018506	2.54532130	2.68179349
34'	1.77281243	1.84689232	1.92645411	2.01154764	2.10293689	2.20108305	2.30791608	2.42218117	2.54751259	2.68419225
35'	1.77405104	1.84817612	1.92782252	2.01301643	2.10461503	2.20278431	2.30962663	2.42418010	2.54970644	2.68659724
36'	1.77529179	1.84946130	1.92919556	2.01448693	2.106299510	2.20448776	2.31084364	2.42618185	2.55190293	2.68900896
37'	1.77653469	1.85074787	1.93056895	2.01595915	2.10797711	2.20634939	2.31250514	2.42818642	2.55410277	2.69142692
38'	1.77777973	1.85203582	1.93194258	2.01743310	2.10966106	2.20790121	2.31455713	2.43019383	2.55630555	2.69385144
39'	1.77902693	1.85332516	1.93332646	2.01890878	2.11074496	2.20946122	2.31640760	2.43220408	2.55851080	2.69628183
40'	1.77927637	1.85461589	1.93471098	2.02038619	2.11233480	2.21132344	2.31826057	2.43421717	2.56071841	2.69871839
41'	1.78052800	1.85590802	1.93609646	2.02184535	2.11392460	2.21303784	2.32011404	2.43623313	2.56292849	2.70116233
42'	1.78178184	1.85720154	1.93748350	2.02330624	2.11551635	2.21475449	2.32197401	2.43825193	2.56514176	2.70361255
43'	1.78303794	1.85849644	1.93887080	2.02476898	2.11711004	2.21647333	2.32383450	2.44027361	2.56735831	2.70606898
44'	1.78429624	1.85979278	1.94025825	2.02623312	2.11870574	2.21819439	2.32569570	2.44229818	2.56957824	2.70853193
45'	1.78555674	1.86109050	1.94164597	2.02769936	2.12030338	2.21991767	2.32756303	2.44432558	2.57180252	2.71100160
46'	1.78681944	1.86238943	1.94303486	2.02926729	2.12190300	2.22164319	2.32943108	2.44635589	2.57401180	2.71347749
47'	1.78808437	1.86369014	1.94442391	2.03083749	2.12355459	2.22337093	2.33130167	2.44838909	2.57621911	2.71595924
48'	1.78935131	1.86499231	1.94581325	2.03240834	2.12510817	2.22510090	2.33317488	2.45042519	2.57842539	2.71844604
49'	1.79062033	1.86629548	1.94720256	2.03398151	2.12671372	2.22682312	2.33505347	2.45246419	2.58063076	2.72093803
50'	1.79189143	1.86760025	1.94859715	2.03555645	2.12832127	2.22856739	2.33692967	2.45450611	2.58283636	2.72343554
51'	1.79316460	1.86890645	1.94999231	2.03713316	2.12993690	2.23030430	2.33880594	2.45655094	2.58504211	2.72593804
52'	1.79444082	1.87021406	1.95139187	2.03871165	2.13155238	2.23204327	2.34069282	2.45859870	2.58724803	2.72844519
53'	1.79571910	1.87152310	1.95279241	2.03979191	2.13315593	2.23378450	2.34259871	2.46064938	2.58945411	2.73095695
54'	1.79699953	1.87283357	1.95419341	2.04125376	2.13477194	2.23552799	2.34446718	2.46270302	2.59166036	2.73347264
55'	1.79828209	1.87414547	1.95559502	2.04271779	2.13638890	2.23727375	2.34633623	2.46475959	2.59386682	2.73599340
56'	1.79956674	1.87545879	1.95699739	2.04418441	2.13800850	2.23902179	2.34821187	2.46681911	2.59607344	2.73851931
57'	1.80085347	1.87677355	1.95839937	2.04577082	2.13963807	2.24077210	2.35014809	2.46888359	2.59828049	2.74105016
58'	1.80214231	1.87808875	1.95979713	2.04738002	2.14125366	2.24252470	2.35204481	2.47094703	2.60048809	2.74359595
59'	1.80343329	1.87940538	1.96119996	2.04899103	2.14287927	2.24427959	2.35394833	2.47301545	2.60269657	2.74614770

	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°
60'	2.74747741	2.90421086	3.07748352	3.27085260	3.48741442	3.73205078	4.01078090	4.33147584	4.70443007	5.14455397
61'	2.74996609	2.90695755	3.08073247	3.27425879	3.49124700	3.73639794	4.01575694	4.33723155	4.71136657	5.15255542
62'	2.75245876	2.90970889	3.08378689	3.27767147	3.49508736	3.74075456	4.02074460	4.34300176	4.71812556	5.16059824
63'	2.75495543	2.91246489	3.08684680	3.28109068	3.49893555	3.74512047	4.02574395	4.34878660	4.72490112	5.16853124
64'	2.75745609	2.91522556	3.08991120	3.28451440	3.50279158	3.74949429	4.03075501	4.35458068	4.73169534	5.17647850
65'	2.75996078	2.91799092	3.09298312	3.28794860	3.50665548	3.75388149	4.03577805	4.36040029	4.73850028	5.18443148
66'	2.76246949	2.92076097	3.09605957	3.29138754	3.51052725	3.75827627	4.04081249	4.36622924	4.74534003	5.19232433
67'	2.76498224	2.92353574	3.09914157	3.29483299	3.51440695	3.76268046	4.04585898	4.37207305	4.75219067	5.20024575
68'	2.76749902	2.92631323	3.10222913	3.29828504	3.51829458	3.76709470	4.05091736	4.37793172	4.75906027	5.20819453
69'	2.77001967	2.92909946	3.10532227	3.30174373	3.52219020	3.77151843	4.05598768	4.38380534	4.76594893	5.21614427
70'	2.77254478	2.93188894	3.10842099	3.30520007	3.52609379	3.77595188	4.06104897	4.38969394	4.77285671	5.22516643
71'	2.77507377	2.93468218	3.11152534	3.30868108	3.53000540	3.78039508	4.06614430	4.39559762	4.77978996	5.23391151
72'	2.77760484	2.93748068	3.11463530	3.31215977	3.53392505	3.78484806	4.07127608	4.40151640	4.78672394	5.24268351
73'	2.78014401	2.94028398	3.11775090	3.31564518	3.53785278	3.78931086	4.07639918	4.40745037	4.79369563	5.25148333
74'	2.78268528	2.94309208	3.12087216	3.31913732	3.54178859	3.79378349	4.08151982	4.41339956	4.80068071	5.25880549
75'	2.78523068	2.94590499	3.12399910	3.32263820	3.54573252	3.79826603	4.08666247	4.41936605	4.80768535	5.26715137
76'	2.78778020	2.94872273	3.12713172	3.32614187	3.54968460	3.80275848	4.09181775	4.42534391	4.81470962	5.27552548
77'	2.79033394	2.95154529	3.13027004	3.32965431	3.55364484	3.80724607	4.09698512	4.43133918	4.82175356	5.28392501
78'	2.79289167	2.95437252	3.13341409	3.33317357	3.55761328	3.81177326	4.10214493	4.43793499	4.82881731	5.29235424
79'	2.79545364	2.95720501	3.13656386	3.33669966	3.56158994	3.81629556	4.10737619	4.44437619	4.83590692	5.30080179
80'	2.79801978	2.96004217	3.13971941	3.34023259	3.56557465	3.82082810	4.11256141	4.44941808	4.84300450	5.30927927
81'	2.80059910	2.96288422	3.14289771	3.34377841	3.56956893	3.82537043	4.11777838	4.45547561	4.85012811	5.31778291
82'	2.80318441	2.96573118	3.14604780	3.34732192	3.57356933	3.82992329	4.12300786	4.46154086	4.85727187	5.32633144
83'	2.80577433	2.96858305	3.14922069	3.35087273	3.57757934	3.83448610	4.12824990	4.46763390	4.86443583	5.33494956
84'	2.80836265	2.97143986	3.15239941	3.35443029	3.58159751	3.83905910	4.13350554	4.47374280	4.87162010	5.34363269
85'	2.81095139	2.97430161	3.15558395	3.35800079	3.58562406	3.84364232	4.13877184	4.47986254	4.87882474	5.35238254
86'	2.81354078	2.97716830	3.15877435	3.36169966	3.58965903	3.84823581	4.14405184	4.48600035	4.88604988	5.36089974
87'	2.81613040	2.98003998	3.16197061	3.36551567	3.59370241	3.85283959	4.14934457	4.49215317	4.89329559	5.36936291
88'	2.81872029	2.98291664	3.16517276	3.36934526	3.59775427	3.85743371	4.15465011	4.49832208	4.90056193	5.37800372
89'	2.82131444	2.98579828	3.16839081	3.37319812	3.60181467	3.86202819	4.15996848	4.50439015	4.90784904	5.38681713
90'	2.82391287	2.98868495	3.17159478	3.37709340	3.60588348	3.86671257	4.16529973	4.51070847	4.91515699	5.39551712
91'	2.82651559	2.99157644	3.17481469	3.38099409	3.60998090	3.87135640	4.17064393	4.51692607	4.92248586	5.40429021
92'	2.82911426	2.99447335	3.17804055	3.38513187	3.61404688	3.87601810	4.17600110	4.52316003	4.92983574	5.41306950
93'	2.83171839	2.99737513	3.18127238	3.38929379	3.61818145	3.88068049	4.18137132	4.52941642	4.93720674	5.42191877
94'	2.83432859	3.00028196	3.18451020	3.39347485	3.62234466	3.88535733	4.18675460	4.53567730	4.94459893	5.43077491
95'	2.83694157	3.00319388	3.18775402	3.39766308	3.62653554	3.89004478	4.19215102	4.54196073	4.95201244	5.43965911
96'	2.83955830	3.00611099	3.19095384	3.40185050	3.63074708	3.89474283	4.19756040	4.54822679	4.95944731	5.44857145
97'	2.84217928	3.00903300	3.19425975	3.40613814	3.63496634	3.89945154	4.20298343	4.55457756	4.96690367	5.45751210
98'	2.84480363	3.01196023	3.19752168	3.40502100	3.63924434	3.90417094	4.20841953	4.56091107	4.97439162	5.46649155
99'	2.84743004	3.01489260	3.20078970	3.40938814	3.64428911	3.90893108	4.21386848	4.56726142	4.98188124	5.47547679
100'	2.85006248	3.01783011	3.20406360	3.41326254	3.64904668	3.91364199	4.21933173	4.57362865	4.98940262	5.48445813
101'	2.85269911	3.02077280	3.20734400	3.41664425	3.65312108	3.91839371	4.22480797	4.58001286	4.99694587	5.49345633
102'	2.85535173	3.02372065	3.21063034	3.41973328	3.65738433	3.92315627	4.23029766	4.58641409	5.00451107	5.50244451
103'	2.85801679	3.02667369	3.21392283	3.42342966	3.65956647	3.92792971	4.23580089	4.59283243	5.01202925	5.51143759
104'	2.86068427	3.02963194	3.21722146	3.42713341	3.66375750	3.93271467	4.24131749	4.59926795	5.01970774	5.52000039
105'	2.86335402	3.03259541	3.22052629	3.43084555	3.66795751	3.93750939	4.24680182	4.60572070	5.02733945	5.52857234
106'	2.86602682	3.03556411	3.22383732	3.43456311	3.67216647	3.94231571	4.25239225	4.61219078	5.03493448	5.53723789
107'	2.86870148	3.03853805	3.22715455	3.43828910	3.67638443	3.94713396	4.25795009	4.61867823	5.04266995	5.54595518
108'	2.87137808	3.04151727	3.23047803	3.44202255	3.68061144	3.95196150	4.26352172	4.62518315	5.05036900	5.55476629
109'	2.87405607	3.04450174	3.23380774	3.44576349	3.68484749	3.95680104	4.26910720	4.63170559	5.05809069	5.56357564
110'	2.87673570	3.04749153	3.23714374	3.44951194	3.68909263	3.96165174	4.27470655	4.63824562	5.06583513	5.57237669
111'	2.87941708	3.05048660	3.24048802	3.45326791	3.69334690	3.96651362	4.28031985	4.64480031	5.07360244	5.58120111
112'	2.88210027	3.05348701	3.24384341	3.45703144	3.69761033	3.97138674	4.28594716	4.65137878	5.08139273	5.58995126
113'	2.88478520	3.05649274	3.24718952	3.46080255	3.70188292	3.97672114	4.29158849	4.65797205	5.08952604	5.59872641
114'	2.88747248	3.05950393	3.25055979	3.46458125	3.70616474	3.98116685	4.29724395	4.66458321	5.09760255	5.61396769
115'	2.89016173	3.06252028	3.25391840	3.46836758	3.71045572	3.98607390	4.30291356	4.67121233	5.10490231	5.62344424
116'	2.89285204	3.06554211	3.25725421	3.47216156	3.71475619	3.99099235	4.30859737	4.67805950	5.11278548	5.63294729
117'	2.89554357	3.06856933	3.26067281	3.47596421	3.71906575	3.99592223	4.31429545	4.68452477	5.12069210	5.64246570
118'	2.89823619	3.07160197	3.26405962	3.47979755	3.72338472	4.00086360	4.32000785	4.69120825	5.12862233	5.65201519
119'	2.90093081	3.07464002	3.26745288	3.48365861	3.72771305	4.00581647	4.32573463	4.69790998	5.13657624	5.66165679

	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°
00'	5.67128175	6.31375143	7.11534964	8.14434430	9.51436429	11.4300521	14.3004659	19.0811260	28.4362517	57.2899555
01'	5.68949457	6.32526003	7.13041890	8.16397844	9.54101617	11.4684741	14.3464958	19.1879291	28.8770871	58.2611667
02'	5.69643935	6.33761247	7.14553072	8.18370400	9.56799464	11.5071533	14.4212293	19.2952930	29.1220529	59.2658934
03'	5.70034626	6.34960912	7.16070553	8.20352375	9.59499197	11.54680924	14.4822729	19.4051320	29.3711039	60.3259119
04'	5.71012554	6.36165013	7.17924362	8.22343926	9.62204840	11.5852939	14.5409328	19.5155529	29.6244974	61.3823763
05'	5.71991124	6.37373581	7.19942553	8.24348036	9.64934730	11.62474606	14.6059140	19.6227953	29.8822971	62.4991439
06'	5.72974159	6.38596637	7.20661153	8.26355460	9.67679977	11.66449950	14.6685289	19.7402702	30.1446171	63.4567322
07'	5.739737875	6.39804212	7.22204213	8.28375776	9.70440730	11.70450031	14.7316783	19.8545984	30.4115784	64.8577793
08'	5.749498984	6.41026322	7.23753768	8.30405847	9.73212110	11.74477751	14.7953714	19.9702196	30.6833059	66.1054620
09'	5.75941213	6.42253001	7.25339259	8.32445757	9.76097254	11.78533229	14.8596150	20.0871993	30.9599266	67.4019443
10'	5.76934870	6.43484271	7.26572537	8.34495564	9.78917298	11.8261663	14.9244164	20.2055538	31.2415748	68.7500746
11'	5.77935977	6.44720181	7.28441823	8.36555348	9.81641385	11.8672818	14.9897802	20.3253049	31.5252899	70.1533260
12'	5.78943245	6.45960692	7.30017791	8.38632981	9.84481836	11.9084821	15.0557222	20.4464953	31.8205137	71.6150590
13'	5.79943797	6.47205897	7.31600461	8.40735137	9.87338209	11.9503702	15.1222415	20.5691137	32.1180969	73.1339928
14'	5.80950145	6.48455728	7.33189978	8.4275292	9.90212229	11.9923491	15.1893484	20.6932187	32.4212924	74.7291519
15'	5.81965713	6.49710493	7.34783093	8.44895717	9.93160850	12.0344721	15.2570511	20.8183258	32.7302621	75.3379399
16'	5.82991715	6.50974982	7.36389147	8.47006500	9.96007231	12.0771920	15.3255576	20.9459355	33.0451705	76.1263227
17'	5.84028166	6.52233957	7.37999079	8.49127704	9.98930487	12.1200620	15.3942756	21.0744627	33.3661928	79.943170
18'	5.85075399	6.53502920	7.39615414	8.51259414	10.01847078	12.1632354	15.4631136	21.2049477	33.6925535	81.6927193
19'	5.86133509	6.54776713	7.41239774	8.53401708	10.0482826	12.2067153	15.5339801	21.3369051	34.0273033	83.344999
20'	5.87203415	6.56055371	7.42870828	8.55554664	10.0783308	12.2505052	15.6047837	21.4704000	34.3677683	85.9397797
21'	5.882841395	6.57338915	7.44503538	8.57718359	10.1079540	12.2946983	15.6762328	21.6054284	34.7151122	88.1455590
22'	5.893759315	6.58627390	7.46555566	8.59929397	10.1380537	12.3390279	15.7493366	21.7425678	35.0695935	90.423175
23'	5.904791374	6.59922770	7.47805744	8.622978115	10.1693314	12.3837676	15.8211040	21.8812500	35.4322795	92.9234113
24'	5.91593747	6.61219179	7.49455137	8.64727210	10.1987887	12.4299307	15.8945444	22.0217091	35.8025525	95.4994562
25'	5.92729213	6.62522568	7.51131763	8.66482339	10.2294273	12.4782729	15.9693659	22.1647799	36.1775919	98.1791797
26'	5.93885454	6.63833091	7.52905700	8.68200368	10.2602438	12.5199417	16.0434815	22.3089399	36.5624579	101.104979
27'	5.95053157	6.65144478	7.54846982	8.70307050	10.2912548	12.5659946	16.1189974	22.4540950	36.9559992	104.170341
28'	5.96232411	6.66464359	7.56175661	8.73171945	10.3244721	12.6125397	16.1951249	22.6019931	37.3579931	107.476459
29'	5.97423438	6.67786759	7.57371782	8.75424592	10.3582271	12.6591242	16.2721739	22.7518976	37.7686977	110.897073
30'	5.98626400	6.69115615	7.58952482	8.77488729	10.3951969	12.7082084	16.3494549	22.9037654	38.1889456	114.53319
31'	5.99841131	6.70449551	7.61286542	8.79944449	10.4171590	12.7536339	16.4292783	23.0576759	38.6197369	118.501555
32'	6.01067159	6.71789907	7.63805333	8.82251844	10.4491120	12.8014165	16.5074549	23.2136655	39.0567681	122.727927
33'	6.02304756	6.73133401	7.66471728	8.84551014	10.4812609	12.8495563	16.5873957	23.3717760	39.5009919	127.221100
34'	6.03553717	6.74483172	7.68445829	8.86832047	10.5136064	12.8980573	16.6688114	23.5320515	39.9545754	132.219471
35'	6.04814245	6.75838249	7.69207684	8.89195301	10.5461195	12.9476237	16.7474139	23.6949360	40.4358243	137.507411
36'	6.060861025	6.77198665	7.69957336	8.91520070	10.5789848	12.9961595	16.82319142	23.8592755	40.9174032	143.217077
37'	6.073693470	6.78564454	7.717174850	8.93837247	10.6118413	13.0457491	16.8952047	24.0263297	41.4105951	149.484932
38'	6.086639847	6.79935842	7.734880265	8.96224660	10.6449917	13.0952565	16.9699548	24.1957124	41.9137865	156.259328
39'	6.099719786	6.81312267	7.75253651	8.98578416	10.6783482	13.1461282	17.0407233	24.3675092	42.4334602	163.700128
40'	6.094438800	6.82694359	7.77035043	9.00982594	10.7119124	13.1968927	17.1693363	24.5417563	42.9640731	171.295338
41'	6.089351732	6.84081947	7.78824514	9.03379309	10.7454865	13.2480303	17.2559809	24.7185104	43.5081173	180.321358
42'	6.10463595	6.85475073	7.806422107	9.05788650	10.7796724	13.2995737	17.3431538	24.8979327	44.0661079	190.964192
43'	6.11779918	6.86873768	7.82427883	9.08210727	10.8138721	13.3515176	17.4313848	25.0797557	44.6389914	202.219680
44'	6.12897947	6.88278959	7.84241903	9.10645628	10.8482876	13.4038663	17.5205149	25.2643600	45.2261362	214.257353
45'	6.14023019	6.89687987	7.86044214	9.13093466	10.8829212	13.4564250	17.6105593	25.4529742	45.8279742	227.181543
46'	6.15150482	6.91103579	7.87894679	9.15554341	10.9177744	13.5097983	17.7015238	25.6441311	46.4448574	241.551240
47'	6.16281709	6.92524879	7.89773954	9.18029358	10.9528501	13.5633910	17.7934411	25.8384812	47.0953281	264.446322
48'	6.17416640	6.93951913	7.91581301	9.20515630	10.9881530	13.6174028	17.8863100	26.0337347	47.7994978	287.475777
49'	6.18558658	6.95384722	7.93437570	9.23016253	11.0236740	13.6719555	17.9901499	26.2293772	48.4420792	312.521199
50'	6.19702788	6.96823343	7.95392231	9.25532037	11.0594308	13.7267375	18.0797468	26.4315992	49.1036711	343.773454
51'	6.20851049	6.98267984	7.97375539	9.28057997	11.0954162	13.7820394	18.1708040	26.6366999	49.8157286	381.973462
52'	6.22003465	6.99718145	7.99057549	9.30599343	11.1316437	13.8379244	18.2645337	26.8445833	50.5805007	429.717220
53'	6.23160957	7.01174402	8.00949333	9.33154454	11.1680995	13.8940444	18.3555341	27.0555559	51.3001529	491.101
54'	6.24323154	7.02636145	8.02957950	9.35723540	11.2047801	13.9507190	18.4444782	27.2714849	52.0802643	572.955099
55'	6.25490727	7.04104312	8.04756454	9.38306811	11.2417115	14.0079351	18.5344727	27.4934555	52.8921034	687.547731
56'	6.266633130	7.05579039	8.06647923	9.40901927	11.2789553	14.0645867	18.6255612	27.7117392	53.7085974	859.434753
57'	6.278429671	7.07059327	8.08600408	9.43515293	11.3163017	14.1235359	18.7187531	27.9372319	54.5612915	1145.91219
58'	6.290290503	7.08545720	8.10532979	9.46141125	11.3539494	14.1829299	18.8160762	28.1701496	55.4441517	1718.86631
59'	6.302208652	7.10038251	8.12480494	9.48781478	11.3918844	14.2411133	18.9155216	28.3993949	56.3505840	2437.71778

TANGENTE

BIBLIOGRAFIA

1. J. Piaget, G. Choquet, J. Dieudonne', R. Thom y otros, "La enseñanza de las matemáticas modernas". Alianza - Editorial, España, 1980.
2. Comisión Internacional de enseñanza de la Matemática. "Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática", - volumen III, UNESCO, 1973.
3. Secretaría de Divulgación del Colegio de Ciencias y Hu- manidades, "Documenta número 1, UNAM.
4. Farrington, Benjamin y otros. "Filosofía del futuro". - Cia. general de Ediciones, México, 1962.
5. Hans-Freudenthal, "Mathematics as an educational Task", Printed in the Netherlands by D. Reidel, Dordrecht, - 1973.
6. Emma Castelnuovo, "Geometría Intuitiva", Editorial Labor, S.A., España, 1966.
7. Emilio Lluís Riera, Humberto Cárdenas trigos y otros, - "Apuntes de geometría", CECSA, México, 1976.
8. Margaret Wiscamb, "Geometría, un enfoque intuitivo", - Trillas, México, 1976.
9. Juan José Rivaud Morayta, "Trigonometría", Limusa, Méxi- co, 1984.
10. Guadalupe Lucio, Nieves Martínez de la Escalera, Rodolfo San Agustín, "Un poco de geometría", UNAM, 1979.

ADEMAS, SE REVISARON LOS SIGUIENTES LIBROS:

1. Moise, Downs, "Geometría Moderna". Fondo Educativo Interamericano, S.A., USA., 1970.
2. Mervis L. Keedy, Charles W. Nelson, "Geometría, una moderna introducción", CECSA, México, 1968.
3. Edwin M. Hemmerling, "Geometría Elemental", Limusa, México, 1971.
4. J.E. Thompson, "Geometría", UTHEA, México, 1975.
5. Wentworth y Smith, "Geometría", Ginn y compañía, U.S.A., 1915.
6. J.A. Baldor, "Geometría plana y del espacio y trigonometría". Cultura Centroamericana, S.A. Madrid, 1981.
7. Dr. Antonio Paz, "Geometría III", Minerva, New York, - 1963.
8. Jurgensen, Donnelly, Dolciani, "Geometría Moderna, estructura y método" Publicaciones cultural, S.A. México, 1972.
9. Nichols, Palmer, Schacht, "Geometría Moderna". CECSA, - México, 1975.
10. Barnett Rich, "Geometría plana con coordenadas". - Mc. Graw Hill, México, 1982.