7 g

15

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA

Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tesis
que para obtener el Título de
Matemática

presenta

Claudia Gómez Kulschner

1984

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sobre Algebras de Gelfand

1 Algebras de Banach

Uno de los objetos centrales en el Análisis Funcional es el estudio de los espacios vectoriales normados. Quizás en un nivel introductorio el foco de atención está restringido a la estructura vectorial y topológica de dichos espacios; sin embargo, una buena cantidad de ellos tienen mayor riqueza, especialmente desde el punto de vista algebraico. Por ejemplo, muchos de los espacios normados, mediante una multiplicación son álgebras, y con respecto a la norma dada, la multiplicación es continua.

En este capítulo consideraremos álgebras sobre los números complejos ($\mathbb{C}$) y nuestra atención estará en aquéllas donde el espacio normado es un espacio de Banach, es decir, en Algebras de Banach. Nuestro concepto de Algebras de Banach incluye el que sean álgebras con unidad; así mismo, trabajaremos esencialmente con álgebras conmutativas.

Cuatro secciones constituyen este capítulo, en la primera daremos las definiciones y algunos teoremas que además de formar parte de la teoría general, servirán de base para el trabajo que desarrollaremos en los demás capítulos. En la segunda sección definiremos el espectro de un elemento del álgebra y mediante un par de propiedades interesantes probaremos el teorema de Gelfand-Mazur (cuya validez depende de la hipótesis de que todas las álgebras con las que trabajaremos son complejas). La tercera sección está dedicada a los ideales maximales y aquí simplemente revisaremos la relación que hay entre la estructura "algebraica" y "geométrica" de un álgebra a través de los ideales; profundizaremos un poco más sobre esto, en el siguiente capítulo. Finalmente en la cuarta sección trabajaremos con algunas propiedades importantes de ciertas funcionales lineales llamadas caracteres, hasta definir por último la transformada de Gelfand.

§ Preliminares

1.1 Definición.

Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Llamaremos a E espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-e.v.t.) si

i) E es espacio topológico

ii) $+ : E \times E \longrightarrow E$ y $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$
$(x, y) \longmapsto x+y$ $\qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$

son funciones continuas

1.2 Definición.

Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Diremos que E es normado si existe una función $\| \; \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\| \; \|$ es norma. Es decir,

i) $\forall_{x \in E} \quad \|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ii) $\forall_{x \in E} \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii) $\forall_{x, y \in E} \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1.3 Observación.

Si E es normado, entonces E resulta ser e.v.t. con la topología inducida por la norma.

1.4 Definición.

Si E es normado, diremos que E es álgebra normada si se cumplen las condiciones siguientes: i) E es álgebra, es decir existe
$$M : E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto xy$$
(multiplicación en E) tal que M es bilineal y

ii) si $x, y \in E$ $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$

1.5 Nota.

Más adelante probaremos que la condición ii) de 1.4 es equivalente a que la multiplicación en E sea continua.

1.6 Definición.

Si E es normado, y respecto a la norma E es completo, diremos que E es de Banach.

1.7 Definición.

Sea E un espacio de Banach, entonces E es un álgebra de Banach si i) E es álgebra normada

ii) M (como en 1.4) es asociativa y existe $\mathbb{1} \in E$ tal que $\mathbb{1}$ es unidad

1.8 Ejemplos.

1.8.1. El conjunto de los números complejos es un álgebra de Banach.

1.8.2. $C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \,/\, f \text{ es continua}\}$ donde X es compacto y Hausdorff, con la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,/\, x \in X\}$ y con el producto definido como el producto de funciones es un álgebra de Banach.

1.8.3. $C^*(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \,/\, f \text{ es continua y acotada en } X\}$

con la norma como en 1.8.2 es un álgebra de Banach.

1.8.4. $\mathcal{L}_b(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ el espacio de matrices de $n \times n$ con la norma $\|a\| = \max |a_{ij}|$.

1.8.5. E de Banach,

$\mathcal{L}(E, E) = \{T : E \to E \,/\, T \text{ es lineal y continua}\}$

y si $f \in \mathcal{L}(E, E)$ $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$

entonces $(\mathcal{L}(E, E), \|\ \|)$ es álgebra de Banach.

Observemos que el hecho de tener una unidad en E no implica que con la norma de éste se tenga $\|\mathbb{1}\| = 1$; pues si E es álgebra normada $\|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}\mathbb{1}\| \leq \|\mathbb{1}\|\,\|\mathbb{1}\|$ de donde $1 \leq \|\mathbb{1}\|$. Sin embargo, siempre se puede encontrar una norma $\|\ \|'$ en E que resulte ser equivalente a $\|\ \|$, es decir, que haga de $(E, \|\ \|')$ un álgebra normada donde la norma de la unidad sea 1. Para esto, definimos

$$\|\ \|' : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|' = \sup_{0 \neq z \in E} \frac{\|xz\|}{\|z\|}$$

con lo que tenemos una nueva norma en E.

1.9 Proposición.

$\|\ \|$ y $\|\ \|'$ son equivalentes.

demostración:

Recordemos, dos normas η y η' son equivalentes, si para todo $x \in E$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que: $\alpha\eta(x) \leq \eta'(x) \leq \beta\eta(x)$; entonces, sea $x \in E$

como M (forma bilineal en $\mathcal{E}$) es continua, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\|xy\| \leq \beta \|x\| \|y\|$ y tenemos

$$\|x\|' = \sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\|xz\|}{\|z\|} \leq \sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\beta \|x\| \|z\|}{\|z\|}$$
$$= \beta \|x\|$$

por otro lado tenemos

$$\frac{\|x\|}{\|\mathbb{1}\|} \leq \sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\|xz\|}{\|z\|} = \|x\|',$$

de donde $\|x\| \leq \|\mathbb{1}\| \|x\|'$, si $\alpha := \|\mathbb{1}\|$ entonces

$$\frac{1}{\alpha} \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$$

■

1.10 Proposición.

Si $x, y \in \mathcal{E}$, $\|xy\|' \leq \|x\|' \|y\|'$

demostración:

Por definición de $\| \, \|'$ tenemos,

$$\|xy\|' = \sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\|xyz\|}{\|z\|}$$
$$= \sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\|xyz\|}{\|yz\|} \frac{\|yz\|}{\|z\|}$$
$$\leq \left(\sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\|xyz\|}{\|yz\|} \right) \left(\sup_{0 \neq z \in \mathcal{E}} \frac{\|yz\|}{\|z\|} \right)$$
$$= \|x\|' \|y\|'$$

por lo tanto $\|xy\|' \leq \|x\|' \|y\|'$

■

De las dos últimas proposiciones tenemos que $(\mathcal{E}, \| \|')$ es un álgebra normada, así que, de aquí en adelante siempre que se tenga un álgebra normada con unidad $\mathbb{1}$, supondremos que $\|\mathbb{1}\| = 1$.

1.11 Teorema.

Si $\mathcal{E}$ es álgebra normada, entonces son equivalentes:

i) la multiplicación en $\mathcal{E}$, M es continua y

ii) si $x, y \in \mathcal{E}$ $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$

demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Como M es continua, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|xy\| \leq c\|x\|\|y\|$, y se tiene ii) pues se puede suponer que $\|\mathbb{1}\| = 1$ y reemplazar la norma original por otra equivalente.

ii) $\Rightarrow$ i) Basta probar que

$$M : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{es continua en}$$
$$(x, y) \longmapsto xy$$

$(0,0)$; es decir, queremos que

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\substack{\delta_1 > 0 \\ \delta_2 > 0}} \ \|x\| < \delta_1 \text{ y } \|y\| < \delta_2 \Rightarrow \|xy\| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ tal que $\|x\| < \delta$ y $\|y\| < \delta$, entonces, como $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$, M es continua.

■

1.12 Definiciones

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach,

i) $x \in \mathcal{E}$ tiene inverso izquierdo en $\mathcal{E}$ si existe $y \in \mathcal{E}$ tal que $yx = \mathbb{1}$ (y se llama inverso izquierdo de x)

ii) $x \in \mathcal{E}$ tiene inverso derecho en $\mathcal{E}$ si existe $z \in \mathcal{E}$ tal que $xz = \mathbb{1}$ (z se llama inverso derecho de x)

1.13 Definición

Sean $\mathcal{E}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{E}$; entonces x es invertible si existe $w \in \mathcal{E}$ tal que $wx = \mathbb{1} = xw$. Llamaremos a w inverso multiplicativo de x y lo denotaremos por x^{-1}.

El conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{E}$ será denotado por $\mathcal{I}(\mathcal{E})$.

1.14 Proposición.

Sea $\mathcal{E}$ un álgebra de Banach entonces $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ es grupo bajo la multiplicación.

demostración:

Bastará ver que si $e, f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ entonces $ef \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$.

En efecto, como $e, f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$, existen $e', f' \in \mathcal{E}$ tales que $e'e = \mathbb{1} = ee'$ y $f'f = \mathbb{1} = ff'$; entonces $f'e' \in \mathcal{E}$ y es inverso multiplicativo de ef ya que

$$f'e'(ef) = f'(e'e)f = f'f = \mathbb{1} \quad \text{y}$$
$$ef(f'e') = e(ff')e' = ee' = \mathbb{1}$$

de donde $ef \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$.

$\blacksquare$

Gracias a la estructura algebraica de $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ se tiene el siguiente

1.15 Corolario

Si $e \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$, entonces e tiene un único inverso multiplicativo.

Es fácil ver que $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ es un abierto de $\mathcal{E}$, para eso demostraremos algunas proposiciones.

1.16 Lema.

Si E es álgebra de Banach y $x \in E$ es tal que $\|x\| < 1$, entonces $(\mathbb{1} + x) \in \mathcal{J}(E)$. Es decir, la bola unitaria con centro en $\mathbb{1}$ es invertible.

demostración:

Consideremos

$$y = \mathbb{1} - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j$$

como $\|x\| < 1$

la serie anterior es absolutamente convergente (es decir, $\sum \|x\|^j < \infty$) esto es, $y_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j$ es de Cauchy

y como E es de Banach, $y \in E$.

Veamos ahora que $y(\mathbb{1}+x) = (\mathbb{1}+x)y = \mathbb{1}$ es decir $y = (\mathbb{1}+x)^{-1}$, basta probar $(\mathbb{1}+x)y = \mathbb{1}$ por como está definida y (en serie de potencias).

Observemos que

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j \xrightarrow[n \to \infty]{} y$$

así que, por la continuidad de la

multiplicación,

$$(\mathbb{1}+x)y_n \longrightarrow (\mathbb{1}+x)y$$

y como $(\mathbb{1}+x)y_n = \mathbb{1} + (-1)^{n+1}x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}$

así que

$$(\mathbb{1}+x)y_n \longrightarrow (\mathbb{1}+x)y = \mathbb{1}$$

que es lo que queríamos ver.

■

1.17 Teorema.

Si $u \in \mathcal{I}(E)$, $v \in E$ y son tales que $\|v\| < \|u^{-1}\|^{-1}$, entonces $u+v \in \mathcal{I}(E)$.

demostración:

Como $\|v\| < \|u^{-1}\|^{-1}$ y E es álgebra de Banach, entonces

$$\|u^{-1}v\| \leq \|u^{-1}\|\|v\| < 1$$

pero $(u+v) = u(\mathbb{1}+u^{-1}v)$; entonces, por el lema anterior $(\mathbb{1}+u^{-1}v) \in \mathcal{I}(E)$ y por lo tanto $u+v \in \mathcal{I}(E)$.

■

1.18 Corolario

$\mathcal{I}(E)$ es abierto en E

demostración:

Sea $x \in \mathcal{I}(E)$ y sea $\varepsilon = \dfrac{1}{\|x^{-1}\|} > 0$

Consideramos

$D_\varepsilon(x) = \{z \in \mathcal{E} / \|z - x\| < \varepsilon\}$, el disco con centro en x y radio ε; ahora sea $y \in D_\varepsilon(x)$, entonces

$$\|y - x\| < \varepsilon = \frac{1}{\|x^{-1}\|}$$

y por el teorema anterior tenemos que $x + (y - x) \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$, es decir, $y \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$, de donde $D_\varepsilon(x) \subset \mathcal{I}(\mathcal{E})$ y por lo tanto $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ es abierto.

■

La siguiente proposición es inmediata del Lema 1.16.

1.19 Proposición

$\mathcal{I}(\mathcal{E})$ contiene a $\mathcal{G} := \{x \in \mathcal{E} / \|x - \mathbb{1}\| < 1\}$

1.20 Teorema

Si $h : \mathcal{I}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{E})$ es función,

$$e \longmapsto e^{-1}$$

entonces h es homeomorfismo.

demostración

Como el inverso es único, h es inyectiva. Por definición de h, es suprayectiva.

Ahora, como h es su propia inversa, bastará probar que h es continua, es decir, que si $u, v \in \mathcal{I}(E)$ $(u+v)^{-1} \longrightarrow u^{-1}$ si $v \longrightarrow 0$.

Como $v \longrightarrow 0$ podemos fijarnos únicamente en v tal que $\|v\| \leq \|u^{-1}\|^{-1}$ y así

$$
\begin{aligned}
(u+v)^{-1} &= [u(\mathbb{1} + u^{-1}v)]^{-1} \\
&= (\mathbb{1} + u^{-1}v)^{-1} u^{-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (u^{-1}v)^j u^{-1}
\end{aligned}
$$

donde la suma converge uniformemente a $(u+v)^{-1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{v \to 0} (u+v)^{-1} &= \lim_{v \to 0} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (u^{-1}v)^j\right] u^{-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\lim_{v \to 0} (-1)^j (u^{-1}v)^j\right] u^{-1} \\
&= \mathbb{1}\, u^{-1} \\
&= u^{-1}
\end{aligned}
$$

por lo tanto h es continua y así h es homeomorfismo. ■

1.21 Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad, una funcional lineal h en $\mathcal{A}$ es multiplicativa si, para todos $a, b \in \mathcal{A}$, $h(ab) = h(a)h(b)$. (h también se llama forma multiplicativa).

§El Teorema de Gelfand-Mazur

1.22 Definiciones

Si $\mathcal{E}$ es álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $a \in \mathcal{E}$, entonces el espectro de a es el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} / a - \lambda \mathbb{1}$ es no invertible$\}$ y lo denotaremos por $\sigma(a)$.

El radio espectral de a es el

$$\sup \{ |\lambda| / \lambda \in \sigma(a) \}$$

y lo denotaremos por $r_\sigma(a)$.

1.23 Ejemplo

Si $\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = \{T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / T$ es lineal$\}$ x, una matriz de $n \times n$, entonces $\sigma(x)$ el espectro de x, es el conjunto de valores propios de x.

1.24 Teorema

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $x \in \mathcal{E}$, entonces $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$.

demostración

Sea

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$\lambda \longmapsto a - \lambda \mathbb{1}$$

claramente f es función continua

en $\mathbb{C}$. Ahora, como $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ es abierto por el corolario 1.18, entonces $\mathcal{G}(\mathcal{E})^c$ es cerrado y por lo tanto $f^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{E})^c) = \{\lambda \in \mathbb{C} / a - \lambda \mathbb{1} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})^c\}$
$= \sigma(a)$ es cerrado.

Ahora, si $|\lambda| > \|a\|$, entonces

$$1 > \frac{\|a\|}{|\lambda|} = \left\| \frac{a}{\lambda} \right\|$$

por lo tanto, por el lema 1.16, $\mathbb{1} - \frac{a}{\lambda} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})$ y entonces

$$a - \lambda \mathbb{1} = -\lambda\left(\mathbb{1} - \frac{a}{\lambda}\right) \in \mathcal{G}(\mathcal{E})$$

de donde $\lambda \notin \sigma(a)$ y así, si $\lambda \in \sigma(a)$, $|\lambda| \leq \|a\|$; es decir, $\sigma(a)$ es acotado.

Tenemos entonces que $\sigma(a)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{C}$, por lo tanto es compacto.

La prueba de que $\sigma(a) \neq \phi$ requiere del uso del teorema de Liouville(*) y no la presentaremos aquí. Véase para esto [4] y [8]. ■

(*) "Toda función entera, acotada, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es constante".

1.25 Corolario (Teorema de Gelfand - Mazur).

El único campo de Banach sobre $\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ (Un campo de Banach $\mathcal{E}$, es un álgebra de Banach donde todos los elementos son invertibles menos el cero).

demostración:

Sea $\mathcal{E}$ un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. $\mathbb{C} \subset \mathcal{E}$, en el sentido de que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos $\lambda \mathbb{1}$, su correspondiente en $\mathcal{E}$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{E}$ es también campo y sea $x \in \mathcal{E}$. Por el teorema anterior $\sigma(x) \neq \phi$, es decir, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $x - z\mathbb{1}$ es no invertible, pero $\mathcal{E}$ es campo, por lo tanto, el único no invertible es el cero, entonces $x - z\mathbb{1} = 0$, de donde $x = z\mathbb{1}$. Esto es, la asociación $\lambda \longleftrightarrow \lambda\mathbb{1}$ es un isomorfismo (*) de álgebras entre $\mathcal{E}$ y $\mathbb{C}$.

■

(*) Nótese que este isomorfismo es "isométrico" pues $|z| = |z\mathbb{1}| = \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{E}$ y $\forall z \in \mathbb{C}$.

1.26 Teorema (Fórmula del Radio Espectral)
Si E es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $x \in E$, entonces el radio espectral de x es el $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

La demostración de este teorema aparece en [4] y no la presentaremos aquí.

§ Ideales Maximales

1.27 Definición

Si $\mathfrak{X}$ es un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$, entonces un subconjunto M de $\mathfrak{X}$ es variedad lineal, si M es cerrado bajo la suma y la multiplicación por elementos de $\mathbb{K}$.

1.28 Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\mathcal{J}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$; diremos que $\mathcal{J}$ es un ideal bilateral de $\mathcal{A}$, si

i) $\mathcal{J}$ es una variedad lineal en $\mathcal{A}$

y ii) Si $a \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{J}$, entonces $ax \in \mathcal{J}$ y $xa \in \mathcal{J}$

En lo sucesivo simplemente lo llamaremos ideal pues no habrá lugar a confusión; sin embargo observemos que el nombre encierra la idea de que $\mathcal{J}$ absorbe la multiplicación por elementos del álgebra tanto por la izquierda como por la derecha.

Observemos también que si $\mathcal{J}$ es un ideal de un álgebra $\mathcal{A}$ con unidad y $\mathcal{J} \cap \mathcal{I}(\mathcal{A}) \neq \phi$ entonces $\mathcal{J} = \mathcal{A}$.

En efecto, sea $a \in \mathcal{A}$ y sea $x \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}(\mathcal{A})$, entonces $ax \in \mathcal{J}$ y como $x \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, existe $x^{-1} \in \mathcal{A}$ y así tenemos que $(ax)x^{-1} = a(xx^{-1}) = a\mathbb{1} = a \in \mathcal{J}$

1.29 Definiciones

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathcal{A}$, llamaremos a $\mathcal{J}$ ideal propio si $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$.

Un ideal en $\mathcal{A}$ es máximo (o maximal) cuando se trate de un ideal propio en $\mathcal{A}$ que no esté contenido en ningún ideal propio mayor.

Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ al conjunto de ideales máximos en $\mathcal{A}$.

1.30 Proposición

Sea $\mathcal{E}$ un álgebra de Banach,

entonces, todo ideal máximo en $\mathcal{E}$ es cerrado.

demostración:

Sea $I \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, entonces por la continuidad de la multiplicación $\overline{I}$ es también un ideal e $I \subset \overline{I}$, así que $I = \overline{I}$ ó $\overline{I} = \mathcal{E}$.

Ahora, como I es propio, no contiene elementos invertibles de $\mathcal{E}$, es decir, $I \cap \mathcal{I}(\mathcal{E}) = \phi$ y como $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ es abierto por el corolario 1.18, se tiene que $\overline{I} \subset \mathcal{E} \setminus \mathcal{I}(\mathcal{E})$, por lo tanto $\overline{I} \neq \mathcal{E}$ y tenemos $I = \overline{I}$.

■

1.31 Proposición

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach e I es un ideal cerrado en $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}/I$ es un álgebra de Banach.

(Para la demostración ver [4]).

1.32 Teorema

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ (conmutativa) e I es un ideal maximal en $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}/I \cong \mathbb{C}$.

demostración:

Como I es maximal, I es cerrado (por la prop. 1.30). Ahora, por 1.31, $\mathcal{E}/I$ es un álgebra de Banach. Más aún $\mathcal{E}/I$ es campo por ser $\mathcal{E}$ anillo conmutativo e I ideal maximal; por lo tanto, por el teorema de Gelfand-Mazur $\mathcal{E}/I \cong \mathbb{C}$

■

1.33 Proposición

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach conmutativa sobre $\mathbb{C}$ e I es un ideal maximal en $\mathcal{E}$, entonces I es un hiperplano cerrado.

demostración:

Como I es maximal, es cerrado. Por la proposición anterior, $\operatorname{codim} I = \dim \mathcal{E}/I = 1$, por lo tanto I es hiperplano.

■

Más adelante hablaremos so-
bre la Topología de Gelfand, pa-
ra lo que retomaremos algunos de
los conceptos y propiedades vistos
en esta sección.

§ Caracteres

Hemos visto en la sección anterior que los ideales maximales de un álgebra de Banach, $\mathcal{E}$, compleja conmutativa son hiperplanos cerrados de $\mathcal{E}$. Este hecho no es nada más una caracterización "geométrica" de los ideales maximales de $\mathcal{E}$, pues recordemos que, si $\mathcal{H}$ es un hiperplano cerrado, entonces existe una funcional lineal $l : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $\mathcal{H}$ es precisamente el kernel de l y viceversa. De ahí que, si $\mathcal{H} = \ker l$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ se tiene $\mathcal{H} = \ker \alpha l$ (ver [8])

Es decir, que si I es un hiperplano cerrado, I determina una familia

$$\mathcal{L} = \{ \lambda f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \}$$

donde I es el kernel de cada λf.

Ahora, como $\mathbb{1} \notin I$ podemos asociarle a I una única funcional $\chi \in \mathcal{L}$ con la propiedad de que $\chi(\mathbb{1}) = 1$.

En efecto, sea $\psi \in \mathcal{L}$, como $\mathbb{1} \notin \mathcal{I}$, $\psi(\mathbb{1}) \neq 0$, es decir, existe $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\psi(\mathbb{1}) = \gamma$; entonces $\chi := \frac{1}{\gamma}\psi$ es tal que $\chi(\mathbb{1}) = 1$.

Supongamos ahora que $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{L}$ son tales que $\chi_1(\mathbb{1}) = 1$ y $\chi_2(\mathbb{1}) = 1$, entonces $\chi_1(\mathbb{1}) = \chi_2(\mathbb{1})$, es decir, $\chi_1(\mathbb{1}) - \chi_2(\mathbb{1}) = 0$, de donde $(\chi_1 - \chi_2)(\mathbb{1}) = 0$ y como $(\chi_1 - \chi_2)(\lambda \mathbb{1}) = \lambda(\chi_1 - \chi_2)(\mathbb{1})$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que $(\chi_1 - \chi_2)(\lambda\mathbb{1}) = 0$. Por otro lado, como $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{L}$, $\chi_1(\mathcal{I}) = \chi_2(\mathcal{I}) = 0$, es decir $(\chi_1 - \chi_2)(\mathcal{I}) = 0$. Como $\mathcal{I}$ es hiperplano $\mathcal{E} \cong \mathcal{I} \oplus \langle \mathbb{1} \rangle$, de donde $(\chi_1 - \chi_2) \equiv 0$ y por lo tanto $\chi_1 = \chi_2$.

Sin embargo podemos asociar a $\chi \in \mathcal{L}$ con $\mathcal{I}$ de otra forma:

Consideremos la composición de la proyección canónica $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{I}$ con el isomorfismo i dado entre $\mathcal{E}/\mathcal{I}$ y $\mathbb{C}$ (ver 1.32). Como

$$i \circ \pi : \begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/\mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathbb{1} & \longmapsto & \dot{\mathbb{1}} & \longleftrightarrow & 1 \end{array}$$

entonces $\chi = i \circ \pi$.

Más aún, es fácil ver que χ es una forma multiplicativa y que $\|\chi\| = 1$.

Veamos:

Sean $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$; entonces los podemos expresar como

$$e_1 = \lambda_1 \mathbb{1} + h_1 \qquad \text{donde } h_1, h_2 \in \mathcal{I}$$
$$e_2 = \lambda_2 \mathbb{1} + h_2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\chi(e_1 e_2) &= \chi((\lambda_1 \mathbb{1} + h_1)(\lambda_2 \mathbb{1} + h_2)) \\
&= \chi(\lambda_1 \lambda_2 \mathbb{1} + h_3), \quad h_3 \in \mathcal{I} \\
&= i(\lambda_1 \lambda_2 \mathbb{1}) \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \\
&= \chi(e_1)\chi(e_2)
\end{aligned}$$

Ahora, como $\chi(\mathbb{1}) = 1$, $\|\chi\| \geq 1$;

y
$$\begin{aligned}
\|\chi\| &= \sup_{\|e\|=1} |\chi(e)| = \sup_{\|e\|=1} |i \circ \pi(e)| \\
&\leq \sup_{\|e\|=1} \|i\| \, \|\pi\| \, \|e\| \\
&= \|\pi\| \quad \text{pues } \|i\| = 1 \text{ ya que } i \text{ es isomorfismo} \\
&= \sup_{\|e\|=1} |\pi(e)| \\
&\leq \sup_{\|e\|=1} \|e\| \\
&= 1, \quad \text{por lo tanto } \|\chi\| \leq 1
\end{aligned}$$

y así $\|\chi\| = 1$ ■

1.34 Definición.

Sean $\mathcal{E}$ un álgebra de Banach y $\mathcal{E}^*$ su dual algebraico (1), $u \in \mathcal{E}^*$ es un carácter en $\mathcal{E}$ si u es forma multiplicativa tal $u(\mathbb{1}) = 1$ (2). Si $N = \ker u$, entonces u es el carácter de N.

1.35 Teorema.

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach conmutativa, entonces f es el carácter de un ideal maximal si y sólo si f es forma lineal multiplicativa y $f(\mathbb{1}) = 1$.

demostración:

"$\Rightarrow$" Es claro, por la definición de carácter.

"$\Leftarrow$" Sea $I = \ker f$, como f es lineal, I es un hiperplano.

Sean $x \in I$ y $y \in \mathcal{E}$

$f(xy) = f(x) f(y)$ pues f es multiplicativa y como $f(x) = 0$, $f(xy) = 0$, por lo tanto $xy \in I$ y así I es ideal.

---

(1) Si $\mathcal{E}$ es $\mathbb{K}$-e.v., su dual algebraico es $\mathcal{E}^* := \{ f : \mathcal{E} \to \mathbb{K} \,/\, f \text{ es lineal} \}$

(2) A veces $u(\mathbb{1})$ se denota por $\langle u, \mathbb{1} \rangle$

Como $\dim \mathcal{E}/I = 1$ pues I es hiperplano, entonces I es maximal.

$\blacksquare$

1.36 Proposición

Si u es carácter en $\mathcal{E}$, entonces u es continua.

demostración:

Sea $I = \ker u$, entonces u es carácter de I. Por el teorema anterior I es ideal maximal y por lo tanto es un hiperplano cerrado y entonces u es continua. (ver [1], [8]).

$\blacksquare$

1.37 Proposición

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach conmutativa y $a \in \mathcal{E}$, entonces a es invertible si y sólo si $\langle f, a \rangle \neq 0$ para todo carácter $f \in \mathcal{E}'$ (1)

demostración:

$a \in \mathcal{I}(\mathcal{E}) \Leftrightarrow a \notin I$ para todo ideal maximal en $\mathcal{E}$ y por el teorema 1.35 $a \notin I \Leftrightarrow \langle f, a \rangle \neq 0$ para todo carácter $f \in \mathcal{E}'$

$\blacksquare$

---

(1) $\mathcal{E}'$ es el dual topológico, $\mathcal{E}' := \{h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K} / h$ es lineal y continua$\}$ y por 1.36 si f es carácter, $f \in \mathcal{E}'$

Un corolario muy interesante del Teorema 1.35 y de la proposición anterior es el siguiente. Su importancia radica en que establece que es lo mismo conocer el espectro de $a \in \mathcal{E}$, que conocer las imágenes bajo todos los caracteres de $\mathcal{E}$.

1.38 Corolario

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach conmutativa, $a \in \mathcal{E}$, $\sigma(a)$ es el espectro de a y

$S(a) = \{ \langle f, a \rangle \,/\, f \in \mathcal{E}' \text{ y } f \text{ es carácter} \}$

entonces $\sigma(a) = S(a)$

demostración:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(a) &\iff (a - \lambda \mathbb{1}) \text{ es no invertible} \\ &\iff \text{existe } f \in \mathcal{E}', \text{ carácter tal que } \langle f, a - \lambda \mathbb{1} \rangle = 0, \\ &\quad \text{es decir, } \langle f, a \rangle = \lambda \end{aligned}$$

■

1.39 Definición y Notación

$Sp(\mathcal{E})$ es el conjunto de caracteres en $\mathcal{E}$.

Observemos que $Sp(\mathcal{E}) \subset S'$ bajo la topología fuerte en $\mathcal{E}'$, donde S' es la esfera unitaria en $\mathcal{E}'$; $S' = \{f: \mathcal{E} \to \mathbb{K} \,/\, \|f\| \leq 1\}$ y la topología fuerte en $\mathcal{E}'$ es precisamente la topología generada en $\mathcal{E}'$ por la norma: $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.

Sin embargo a $\mathcal{E}'$ le podemos dar otra topología. Consideremos el caso sobre $\mathbb{C}$, entonces si a $\mathbb{C}^{\mathcal{E}} = \{f: \mathcal{E} \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ es función}\}$ le damos la topología producto (que es justamente la de la convergencia puntual) que está definida por la familia de seminormas $p_e(e') = |e'(e)|$ para todo $e \in \mathcal{E}$; como $\mathcal{E}' \subset \mathbb{C}^{\mathcal{E}}$, a la topología inducida en $\mathcal{E}'$ por la que acabamos de describir en $\mathbb{C}^{\mathcal{E}}$ se le llama la topología débil-estrella (usualmente se denota por σ^*, ó $\sigma(\mathcal{E}', \mathcal{E})$) la cual resulta ser Hausdorff.

1.40 Teorema

$Sp(\mathcal{E})$ es débil-estrella compacto.

demostración:

Por el teorema de Alaoglu, para el caso de espacios normados; la bola unitaria en $\mathcal{E}'$ es σ^*-compacto; bastará probar entonces que $Sp(\mathcal{E})$ es σ^*-cerrado.

Sea $f \in \overline{Sp(\mathcal{E})}$, entonces existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de caracteres en $\mathcal{E}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n \to f$.

Si $x, y \in \mathcal{E}$, tenemos:

$$f(xy) = \lim_{n\to\infty} f_n(xy) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) f_n(y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \lim_{n\to\infty} f_n(y)$$

$$= f(x) f(y)$$

Además

$$f(\mathbb{1}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbb{1}) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

y por lo tanto $f \in Sp(\mathcal{E})$, lo que completa la prueba. ■

Sea $\mathcal{E}$ un álgebra de Banach compleja, sabemos que para cada $x \in \mathcal{E}$

existe una función σ^*-continua $\hat{x} : S' \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\hat{x}(f) = \langle f, x \rangle = f(x)$. Como $Sp(\mathcal{E}) \subset S'$, entonces $\hat{x}|_{Sp(\mathcal{E})}$ resulta también σ^*-continua, es decir, $\hat{x} \in C(Sp(\mathcal{E}))$.

Más aún, como $Sp(\mathcal{E})$ es compacto y Hausdorff, $C(Sp(\mathcal{E}))$ es álgebra de Banach [Ver ejemplo 1.8.2]

1.41 Definición.

Si $\mathcal{E}$ es un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{E}$, $\hat{x}$ es la transformada de Gelfand de x.

1.42 Observaciones.

i) La función
$$h : \mathcal{E} \longrightarrow C(Sp(\mathcal{E}))$$
$$x \longmapsto \hat{x}$$
es homomorfismo de álgebras.

demostración:

Sean $a, b \in \mathcal{E}$
$$h(a+b) = \widehat{(a+b)} : Sp(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto \langle f, a+b \rangle$$
pero $\langle f, a+b \rangle = f(a+b)$

y como f es lineal,

$f(a+b) = f(a) + f(b) = \hat{a}(f) + \hat{b}(f)$

por lo tanto $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$, esto es $h(a+b) = h(a) + h(b)$

análogamente $h(\lambda a) = \widehat{\lambda a} = \lambda \hat{a}$
$$= \lambda h(a)$$

Además,

$$\widehat{ab}(f) = \langle f, ab \rangle = f(ab) = f(a) f(b) = \hat{a}(f) \hat{b}(f)$$

para todo $f \in Sp(\mathcal{E})$, por lo tanto h preserva la multiplicación.

■

h se conoce como el homomorfismo de Gelfand.

ii) La norma en $C(Sp(\mathcal{E}))$ es decreciente, pues si $a \in \mathcal{E}$

$$\|\hat{a}\|_{C(Sp(\mathcal{E}))} = \sup_{f \in Sp(\mathcal{E})} |\hat{a}(f)|$$
$$= \sup_{f \in Sp(\mathcal{E})} |\langle f, a \rangle|$$
$$\leq \|f\| \, \|a\|$$
$$= 1 \, \|a\|_{\mathcal{E}}$$

■

iii) El rango de $\hat{a}$ es

$$\hat{a}(Sp(\mathcal{E})) = \sigma(a)$$

2 Algebras de Gelfand

§ Definiciones y Notación

2.1 Definiciones

Sea $\mathbb{F}$ un campo, una valuación en $\mathbb{F}$ es una función $|\ |: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

i) $\forall_{x \in \mathbb{F}}\ |x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ii) $\forall_{x, y \in \mathbb{F}}\ |xy| = |x||y|$

iii) $\forall_{x, y \in \mathbb{F}}\ |x+y| \leq |x| + |y|$

Un campo con una valuación es un campo valuado.

2.2 Observaciones

i) El valor de $1_{\mathbb{F}}$, la unidad en $\mathbb{F}$ es 1.

ii) Una valuación $|\ |$ define una métrica de la siguiente manera

$$\rho(x, y) := |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

Con respecto a esta métrica la suma y la multiplicación son continuas.

2.3 Definición

Sea $(\mathbb{F}, |\ |)$ un campo valuado

Si $|\ |$ satisface la desigualdad fuerte del triángulo, es decir,

iii') $\forall_{x,y \in F} \quad |x+y| \leq \text{máx}(|x|, |y|)$

entonces la valuación es no arquimediana (1)

2.4 Ejemplos.

2.4.1 Si $\mathbb{K}$ es campo, la función $|\ |$, en la cual $|k| = 1$ para todo $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$ y $|0| = 0$, es una valuación no arquimediana que se llama la valuación trivial (2).

2.4.2 Los valores absolutos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, $|\ |_{\mathbb{R}}$ y $|\ |_{\mathbb{C}}$, son ejemplos de valuaciones arquimedianas

2.4.3 La restricción de $|\ |_{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{Q}$ es una valuación. Sin embargo en $\mathbb{Q}$ existen otras valuaciones muy importantes, las valuaciones p-ádicas $|\ |_p$ definidas para cada primo p como sigue:

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$

---

(1) Cuando se cumple (iii) únicamente de 2.1 (la desigualdad del triángulo), la valuación es arquimediana.

(2) Es fácil ver que la topología inducida por esta valuación es discreta.

y $\alpha = 0$, $|\alpha|_p = 0$.
Si $\alpha \neq 0$, se puede expresar de manera única como $\alpha = p^m \frac{a}{b}$ donde $m, a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $(a,b) = 1$ y $p \nmid ab$, entonces $|\alpha|_p = |p^m \frac{a}{b}|_p = p^{-m}$.

Las valuaciones p-ádicas son no arquimedianas.

2.4.4 Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 1$, para cada $a \in \mathbb{C}$ definimos $|0|_a = 0$ y $\left|(x-a)^m \frac{f(x)}{g(x)}\right|_a = c^{-m}$ si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $(x-a) \nmid f(x)g(x)$. $|\ |_a$ definida así, es una valuación no arquimediana de $\mathbb{C}(x)$.

Observemos que si la valuación es no arquimediana y ρ es la métrica inducida (ver 2.2) entonces $\rho(a,c) \leq \text{máx}(\rho(a,b), \rho(b,c))$
A una métrica que satisface la desigualdad anterior se le llama ultramétrica.

2.5 Definiciones

Sean $\mathbb{K}$ un campo y $(E, \| \|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Si $\| \|$ satisface:

$$\forall_{x, y \in E} \quad \|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

entonces $\| \|$ es una norma no arquimediana y se dice que E es un espacio normado no arquimediano.

2.6 Observaciones

i) Todo espacio normado no arquimediano es un espacio normado.

ii) Si $E \neq \{0\}$ es no arquimediano entonces $\mathbb{K}$ es no arquimediano

2.7 Definición

De acuerdo con las definiciones anteriores un álgebra no arquimediana es un álgebra normada (def. 1.4) con norma no arquimediana

En lo sucesivo trabajaremos con Algebras de Banach no arquimedianas (1) definidas sobre un campo completo con respecto a una valuación no arquimediana y no trivial y los denotaremos por $\mathbb{X}$ y $\mathbb{F}$ respectivamente.

Recordemos que nuestro concepto de álgebras de Banach incluye el que tengan un elemento unidad que hemos denotado por $\mathbb{1}$, y como hemos visto en el capítulo anterior, en estas condiciones podemos suponer que $\|\mathbb{1}\| = 1$. Vamos a suponer también que todas las álgebras son conmutativas. Finalmente, $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ denotará el conjunto de los ideales maximales de $\mathbb{X}$.

Cuando mencionemos el "caso clásico" nos referiremos a la teoría de álgebras de Banach sobre el campo complejo.

2.8 Observación

En general, el conjunto de valores de $\mathbb{F}$, $(|\mathbb{F}|)$ no tiene por qué ser igual al conjunto de valores de $\mathfrak{X}$, $(\|\mathfrak{X}\|)$, la igualdad depende de la existencia de vectores unitarios. En nuestro trabajo supondremos para garantizar que existen vectores unitarios que

$$\|\mathfrak{X}\| = \{\|x\| / x \in \mathfrak{X}\} = \{|\mu| / \mu \in \mathbb{F}\} = |\mathbb{F}|.$$

§ Algebras de Gelfand

Hemos visto que si M es un ideal maximal de un álgebra de Banach compleja $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}/M \cong \mathbb{C}$. Sin embargo si $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ el campo $\mathfrak{X}/M$ puede ser una extensión propia (1) de $\mathbb{F}$, es decir, el Teorema de Gelfand - Mazur no tiene su correspondiente en el caso no-arquimediano, lo que ha motivado el estudio de las álgebras que tengan, en este sentido, un mejor comportamiento.

2.9 Definición

$\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand, si $\mathfrak{X}/M \cong \mathbb{F}$ para cada ideal maximal M de $\mathfrak{X}$.

2.10 Ejemplos

2.10.1 Sea T un conjunto y

$$\mathfrak{X} = \{ f : T \longrightarrow \mathbb{F} \ / \ f \text{ es acotada} \}$$

---

(1) Recordemos, una extensión de campo es un monomorfismo $i : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$, donde $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ son campos. Usualmente $\mathbb{K}$ se identifica con $i(\mathbb{K})$ y así i puede ser vista como inclusión y $\mathbb{K}$ como subcampo de $\mathbb{L}$. Bajo esta circunstancia $\mathbb{L}$ es una extensión de $\mathbb{K}$.

$\mathfrak{X}$ es normado con la norma del supremo y las operaciones en $\mathfrak{X}$ están definidas puntualmente. Los ideales maximales son de la forma $M_t = \{f \in \mathfrak{X} / f(t) = 0\}$, entonces se puede probar que $\mathfrak{X}/M \cong \mathbb{F}$ para cada ideal maximal de $\mathfrak{X}$ (Ver [6]).

2.10.2 Si $\mathcal{K}$ es un espacio compacto, $C(\mathcal{K}) = \{f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{F} / f \text{ es continua}\}$ es un álgebra de Gelfand

2.10.3 El álgebra de las series de potencias formales $\sum a_n z^n$ tales que $a_n \longrightarrow 0$, donde $a_n \in \mathbb{F}$, $z \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, es también un álgebra de Gelfand.

2.10.4 El álgebra l^∞ de las sucesiones acotadas de elementos de $\mathbb{F}$ no es un álgebra de Gelfand si $\mathbb{F}$ no es localmente compacto.

2.10.5 En el ejemplo 2.10.3 el álgebra no es de Gelfand si $\mathbb{F}$ no es algebraicamente cerrado.

2.10.6 El álgebra de las series de potencias formales $\sum a_n z^n$ tales que $\sup |a_n| < \infty$ no es un álgebra de Gelfand.

2.11 Teorema

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Banach commutativa, entonces

$$h: \mathfrak{M}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{Sp}(\mathfrak{X})$$

$$M \longmapsto f \quad \text{tal que } f^{-1}(0) = M$$

es una función biyectiva.

demostración:

"h es función"

En efecto, el carácter es único (ver la construcción de los caracteres)

"h es biyectiva"

Es claro que es suprayectiva; ahora sean $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ tales que $h(M_1) = h(M_2)$, entonces $f_1^{-1}(0) = M_1$ y $f_1^{-1}(0) = M_2$, es decir, $f_1(M_1) = 0 = f_1(M_2)$, entonces $f_1(M_1 - M_2) = 0$ de donde $M_1 = M_2$ y por lo tanto h es inyectiva. ■

Ahora, si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand, a cada $x \in \mathfrak{X}$ le asociamos la función $\hat{x}$ definida como sigue:

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$M \longmapsto x + M$$

es decir, a cada ideal maximal de $\mathfrak{X}$ le corresponde la clase residual módulo M.

Observemos también que $\mathfrak{X} = \langle \mathbb{1} \rangle \oplus M$ y entonces $x = \lambda \mathbb{1} + m$ con $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

2.12 Teorema

Sea $\mathfrak{X}$ un álgebra de Gelfand. Si $x \in \mathfrak{X}$, el siguiente es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\hat{x}"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathfrak{X}/M \arrow[d, "\varphi"] \\
Sp(\mathfrak{X}) \arrow[r, "g_x"'] & \mathbb{F}
\end{tikzcd}$$

donde φ es el isomorfismo definido por $\varphi(x+M) = \varphi(\lambda \mathbb{1} + m + M)$
$= \varphi(\lambda \mathbb{1} + M) = \lambda$

y $g_x(f) = f(x)$ para todo $f \in Sp(\mathfrak{X})$.

demostración:

Sea $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{X})$

$\varphi \circ \hat{x}(M) = \varphi(\hat{x}(M)) = \varphi(x+M) = \lambda$

y como

$g_x \circ h\,(M) = g_x(h(M)) = g_x(f)$ donde $f^{-1}(0) = M$

$$
\begin{aligned}
&= f(x) \\
&= f(\lambda \mathbb{1} + m) \\
&= f(\lambda \mathbb{1}) + f(m) \quad \text{pues } f \in Sp(\mathfrak{X}) \\
&\qquad \text{y como } m \in M \\
&= f(\lambda \mathbb{1}) + 0 \\
&= f(\lambda \mathbb{1}) \\
&= \lambda f(\mathbb{1}) \\
&= \lambda 1 = \lambda
\end{aligned}
$$

entonces el diagrama conmuta

∎

§ La Topología de Gelfand

2.13 Definición.

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand sobre $\mathbb{F}$, entonces la Topología de Gelfand es la topología definida en $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ menos fina (1), que hace continua a $\hat{x}$ para cada $x \in \mathfrak{X}$ y la denotaremos por $\mathcal{O}_G$.

Análogamente al caso clásico, podemos considerar en $\mathfrak{Sp}(\mathfrak{X})$ la topología σ^*, es decir, la restricción de la topología en $\mathfrak{X}'$ inducida por la topología producto en $\mathbb{F}^{\mathfrak{X}}$. Observemos que, como en las álgebras complejas, la topología σ^* es la mínima (la inicial) que hace continua a g_x (ver 2.12).

En el primer capítulo demostramos para el caso clásico que $\mathfrak{Sp}(\mathfrak{X})$ es σ^*-compacto. Dicha prueba

---

(1) La topología "menos fina" (la más débil), es la que tiene menos abiertos. También se le llama la topología inicial.

dependió de que para álgebras sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ se tiene el teorema de Alaoglu, nos preguntamos si es posible mantener esta propiedad en una situación más general. Para responder esto estudiaremos qué relación hay entre $(\mathcal{M}(\mathfrak{X}), \mathcal{O}_G)$ y $(\mathcal{S}p(\mathfrak{X}), \sigma^*)$ como espacios topológicos.

2.14 Teorema.

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand sobre $\mathbb{F}$, entonces $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ con la topología de Gelfand es homeomorfo a $\mathcal{S}p(\mathfrak{X})$ con la topología débil-estrella.

demostración:

Sea $h: \mathcal{M}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathcal{S}p(\mathfrak{X})$ como en 2.11, por lo tanto h es biyectiva y entonces existe h^{-1}, la función inversa de h. Sean $\hat{x}$ y g_x como en 2.12 para cada $x \in \mathfrak{X}$ y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{M}(\mathfrak{X}), \mathcal{O}_G) \arrow[rr, "\hat{x}"] \arrow[dr, shift right, "h"'] & \circlearrowleft & \mathbb{F} \\ & (\mathcal{S}p(\mathfrak{X}), \sigma^*) \arrow[ul, shift right, "h^{-1}"'] \arrow[ur, "g_x"'] & \end{tikzcd}$$

Como la topología τ^* es la inicial(1) respecto a g_x y $g_x \circ h = \hat{x}$ que es continua, entonces h es continua.

Análogamente, como $\mathcal{O}_G$ es la topología inicial respecto a $\hat{x}$ y $\hat{x} \circ h^{-1} = g_x$ que es continua, entonces h^{-1} es continua y por lo tanto h es homeomorfismo.

$\blacksquare$

2.15 Teorema

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand sobre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}$ es localmente compacto entonces $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ es $\mathcal{O}_G$-compacto.

demostración:

Sea $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{X})$, si identificamos a M con la función $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{F}$

$$x \longmapsto x+M$$

entonces $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ puede verse como subconjunto del producto de $\mathbb{F}_x = \{ \mu \in \mathbb{F} \,/\, |\mu| \leq \|x\| \}$, pues

---

(1) Ver [10]

$|f(x)| = \inf\limits_{m\in M} \|x+m\|$, como $0 \in M$

entonces $\inf\limits_{m\in M} \|x+m\| \leq \|x\|$ y por

lo tanto $|f(x)| \leq \|x\|$, de donde $f \in \prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathbb{F}_x$.

Si consideramos en $\prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathbb{F}_x$ la to-

pología producto y en $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ la topología inducida, claramente $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ es subespacio de $\prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathbb{F}_x$. Más

aún, $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ es cerrado en el producto, para ver esto,
sea $f \in \overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{X})}$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un ideal maximal M en la vecindad $V(f, x, y, xy, \varepsilon)$
de donde

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \text{máx}\big(|f(xy) - (xy+M)|, |(x+M)(y+M) - f(x)f$$

claramente $|f(xy) - (xy+M)| < \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned}
|(x+M)(y+M) - f(x)f(y)| &= |(x+M)(y+M) - f(x)(y+M) + \\
&\qquad f(x)(y+M) - f(x)f(y)| \\
&= |[(x+M) - f(x)](y+M) + \\
&\qquad f(x)[(y+M) - f(y)]| \\
&\leq \text{máx}\big(|(x+M) - f(x)||y+M|, \\
&\qquad |f(x)||(y+M) - f(y)|\big)
\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \text{ máx}\left(|y+M|, |f(x)|\right)$$

por lo tanto

$|(x+M)(y+M) - f(x)f(y)| < \varepsilon$

y tenemos entonces que

$|f(xy) - f(x)f(y)| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$ así

$$f(xy) = f(x)f(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ahora si $M \in V(f, x, y, x+y, \varepsilon)$

$$|f(x+y) - (f(x)+f(y))| = |f(x+y) - ((x+y)+M) + ((x+M)+(y+M)) - (f(x)+f(y))|$$

$$\leq \text{máx}\left(|f(x+y) - ((x+y)+M)|, |((x+M)+(y+M)) - (f(x)+f(y))|\right)$$

es claro que $|f(x+y) - ((x+y)+M)| < \varepsilon$

Veamos entonces

$$|((x+M)+(y+M)) - (f(x)+f(y))| = |((x+M) - f(x)) + ((y+M) - f(y))|$$

$$\leq \text{máx}\left(|(x+M) - f(x)|, |(y+M) - f(y)|\right)$$

pero $|(x+M) - f(x)| < \varepsilon$ y

$|(y+M) - f(y)| < \varepsilon$

por lo tanto

$|f(x+y) - (f(x)+f(y))| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$ así

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Análogamente para $M \in V(f, x, \lambda x, \varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
|f(\lambda x) - \lambda f(x)| &= |f(\lambda x) - (\lambda x + M) + (\lambda x + M) \\
&\qquad - \lambda f(x)| \\
&\leq \text{máx}\,(|f(\lambda x) - (\lambda x + M)|, \\
&\qquad |\lambda|\,|(x+M) - f(x)|) \\
&\leq \text{máx}\,(\varepsilon, |\lambda|\,\varepsilon) \\
&\leq \varepsilon\,\text{máx}\,(1, |\lambda|)
\end{aligned}
$$

de donde

$$|f(\lambda x) - \lambda f(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 ,$$

y por lo tanto

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Finalmente si $M \in V(f, \mathbb{1}, \varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
|f(\mathbb{1}) - 1| &= |f(\mathbb{1}) - 1 + (\mathbb{1} + M) - (\mathbb{1} + M)| \\
&\leq \text{máx}\,(|f(\mathbb{1}) - (\mathbb{1} + M)|, |1 - (\mathbb{1} + M)|
\end{aligned}
$$

de donde $|f(\mathbb{1}) - 1| < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$

y $\qquad f(\mathbb{1}) = 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (4)$

Entonces, de (1), (2), (3) y (4), $f \in Sp(\mathfrak{X})$, ahora si K es el kernel de f, entonces $K \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ y K se identifica con f, por lo tanto $f \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, es decir, $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ es cerrado.

Ahora, como $\mathbb{F}$ es localmente compacto, $\mathbb{F}_x$ son compactos para cada $x \in \mathfrak{X}$, por lo tanto, por el Teorema de Tychonoff, $\prod_{x \in \mathfrak{X}} \mathbb{F}_x$ es compacto y como

$\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ es cerrado en $\prod_{x \in \mathfrak{X}} \mathbb{F}_x$, por

lo tanto $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ es compacto; pero la topología de Gelfand es más débil que la inducida por el producto, entonces $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ es $\mathcal{O}_G$ - compacto.

■

2.16 Corolario

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand sobre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}$ es localmente compacto, entonces $Sp(\mathfrak{X})$ es σ^* - compacto.

demostración

Como $(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}), \mathcal{O}_G)$ es homeomorfo a $(Sp(\mathfrak{X}), \sigma^*)$, entonces por el teorema anterior $Sp(\mathfrak{X})$ es σ^* - compacto ■

2.17 Observación

Como la topología σ^* es Hausdorff siempre, entonces O_G también es Hausdorff.

Como en el caso clásico, definimos el espectro de $x \in \mathfrak{X}$, donde $\mathfrak{X}$ es álgebra de Gelfand, como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{F} \,/\, x - \lambda \mathbb{1} \text{ es no invertible}\}$$

y el radio espectral de x como

$$r_\sigma(x) = \sup \{|\lambda| \,/\, \lambda \in \sigma(x)\}$$

Es fácil ver, ya que se prueba análogamente al caso clásico (1), que

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \{f(x) \in \mathbb{F} \,/\, f \in Sp(\mathfrak{X})\}\\ &= \{x + M \,/\, M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})\}\end{aligned}$$

2.18 Proposición

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand sobre $\mathbb{F}$, entonces el radio espectral es "no arquimediano"

---

(1) En general, si $\mathfrak{X}$ es un álgebra sobre $\mathbb{K}$, conmutativa con unidad (no necesariamente normada) entonces $\sigma(x) = \{x + M / M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})\} \cap \mathbb{K}$.

demostración:

$$
\begin{aligned}
r_\sigma(x+y) &= \sup_{m(\mathfrak{X})} |(x+y)+M| \\
&= \sup_{m(\mathfrak{X})} |(x+M)+(y+M)| \\
&\leq \sup_{m(\mathfrak{X})} \text{máx}\,(|x+M|, |y+M|) \\
&= \text{máx}\left(\sup_{m(\mathfrak{X})} |x+M|, \sup_{m(\mathfrak{X})} |y+M|\right) \\
&= \text{máx}\,(r_\sigma(x), r_\sigma(y))
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$r_\sigma(x+y) \leq \text{máx}\,(r_\sigma(x), r_\sigma(y))$$

∎

2.19 Teorema

Si $\mathfrak{X}$ es un álgebra de Gelfand sobre $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ localmente compacto y $x \in \mathfrak{X}$, entonces $\sigma(x)$ es compacto y no vacío.

demostración:

Sea $g_x : Sp(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathbb{F}$ como en 2.12, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
g_x(Sp(\mathfrak{X})) &= \{ g_x(f) \,/\, f \in Sp(\mathfrak{X}) \} \\
&= \{ f(x) \in \mathbb{F} \,/\, f \in Sp(\mathfrak{X}) \} \\
&= \sigma(x)
\end{aligned}
$$

Como g_x es σ^*-continua y $Sp(\mathfrak{X})$ es σ^*-compacto, entonces $g_x(Sp(\mathfrak{X})) = \sigma(x)$ es compacto en $\mathbb{F}$.

Ahora, $\{x+M \,/\, M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})\} \neq \phi$ pues $\mathfrak{X}$ es álgebra conmutativa con unidad y por lo tanto tiene ideales maximales, pero $\{x+M \,/\, M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})\} = \sigma(x)$, entonces $\sigma(x) \neq \phi$

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] Bosch, C., _Apuntes de Análisis Funcional_, México, 1980.

[2] Díaz, A.; Ramírez, A.; Tomás, F., _Teoría de los Números Algebraicos_, Monografías del Inst. de Mat., UNAM, México, 1975.

[3] Domínguez, J. M., _Una nota sobre las Algebras de Banach regulares no-arquimedianas_, Rev. Mat. Hisp.-Amer., 41, 1981.

[4] Espinosa, R., _La Figura Espectral de un Operador_, Tesis prof., Ciencias, UNAM, México, 1981.

[5] Larsen, R., _Banach Algebras an introduction_, Marcel Dekker, New York, 1973.

[6] Narici, L., <u>On Nonarchimedean Banach Algebras</u>, Arch. Math., 19, (428-435), 1968.

[7] Narici, L.; Beckenstein, E.; Bachman, G.; <u>Functional Analysis and Valuation Theory</u>, Marcel Dekker, New York, 1971.

[8] Rabinowitz, P., <u>Functional Analysis</u> (Laurent Schwartz), Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., 1964.

[9] Rickart, C., <u>General Theory of Banach Algebras</u>, Krieger Pub. Co., Huntington, New York, 1974.

[10] Salicrup, G., <u>Apuntes de Topología</u>, México, 1980.

[11] Van Rooij, A.C.M., *Non-Archimedean Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1978.