UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL TEOREMA DE RADON - NIKODYM

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO PRESENTA:

JOSE LUIS CARBALLIDO CARRANZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE DE 1984.

Indice.

Introducción.

En este Trabajo, estudiamos primero algunas de las propiedades de las funciones realvaluadas definidas sobre un intervalo, nos ocupamos, principalmente de las condiciones bajo las cuales se cumplen las igualdades: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ (1) y $\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$ (2)

Para esto, estudiamos la familia de las funciones absolutamente continuas que son las funciones para las que se cumple (2) y que forman un subespacio del espacio vectorial de las funciones de variación acotada

Posteriormente, descomponemos a las funciones de variación acotada en sumandos, uno de los cuales es una función absolutamente continua, este último resultado, es el Teorema de descomposición de Lebesgue.

En seguida extendemos el concepto de derivada, a espacios de medida abstractos, y generalizamos algunos de los resultados ya obtenidos para funciones realvaluadas. En particular obtenemos el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de descomposición de Lebesgue para medidas definidas en espacios abstractos

Aprovecho estas líneas para agradecer profundamente, a mi amigo, Guillermo Grabinsky su dirección para la elaboración de esta Tesis

Capitulo I.

Recordemos algunas nociones que serán útiles en la 1ª parte de este trabajo.

1.1 Def. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$, definimos $f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ y $f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$. Para $x_0 = a, b$ se definen sólo los límites $f(a^+)$ y $f(b^-)$, los números $f(x_0) - f(x_0^-)$ y $f(x_0^+) - f(x_0)$ son los saltos izquierdo y derecho, respectivamente, de la función f en el punto x_0.

Considerando que si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función creciente, entonces la función $-f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es decreciente y viceversa, consideraremos sólo funciones crecientes en todos nuestros resultados sobre funciones monótonas.

1.2 Lema. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente, para todo $x_0 \in (a,b)$, $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ existen, y si $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ son puntos arbitrarios, entonces: $f(a^+) - f(a) + \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] + f(b) - f(b^-) \leq f(b) - f(a)$.

Dem: Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión con valores en $[a,b]$ t.q. $x_n < x_0$ $\forall n$ y $x_n \to x_0$, entonces $\{f(x_n)\}$ es un conjunto acotado pues $f(a) \leq f(x_n) \leq f(b)$ $\forall n$. Por el Teorema de Bolzano Weierstrass $\{f(x_n)\}$ tiene un punto límite α y $\alpha \leq \sup\{f(x_n)\}$. Si suponemos $\alpha < \sup\{f(x_n)\}$ entonces $\exists x_k$ t.q. $\alpha < f(x_k)$, como $x_k < x_0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ existe

N.t. $\forall s>N$, $x_0>x_s>x_k$ $\therefore$ $\forall s>N$ $f(x_s)\geq f(x_k)>\alpha$ $\therefore$ α no puede ser punto límite, ésto es una contradicción $\therefore$ $\alpha=\sup\{f(x_n)\}$, y por ser f creciente $\alpha=\lim f(x_n)$.

Sea $\{y_n\}_n\subset[a,b]$ otra sucesión t.q. $y_n<x_0$ $\forall n$ y $y_n\to x_0$. Se concluye como antes $\lim f(y_n)$ existe. Sea $\beta=\lim f(y_n)=\sup\{f(y_n)\}_n$. Hay que probar que $\alpha=\beta$. Supongamos que $\alpha<\beta$, entonces existe y_k t.q. $f(y_k)>\alpha$. Como $y_k<x_0$ y $\lim x_n=x_0$, $\exists$ N t.q. $\forall n>N$, $x_n>y_k$ $\therefore$ $f(x_n)\geq f(y_k)>\alpha$ $\forall n>N$, lo cual no es posible pues $\alpha=\sup\{f(x_n)\}$ $\therefore$ $\alpha\geq\beta$; análogamente se obtiene $\beta\geq\alpha$ $\therefore$ $\alpha=\beta$ y por lo tanto $f(x_0^-)$ existe. De manera análoga se prueba que $f(x_0^+)$ existe.

La segunda parte del lema se prueba como sigue:

Supongamos que $a=x_0<x_1<\dots<x_n<b=x_{n+1}$ y elijamos puntos $y_0,\dots,y_n$ t.q. $x_k<y_k<x_{k+1}$ para $k=0,1,\dots,n$. entonces:

$f(x_k^+)-f(x_k^-)\leq f(y_k)-f(y_{k-1})$ $\forall k=1,2,\dots,n$ $\quad f(a^+)-f(a)\leq f(y_0)-f(a)$ y

$f(b)-f(b^-)\leq f(b)-f(y_n)$. Sumando estas desigualdades se obtiene:

$$[f(a^+)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]+[f(b)-f(b^-)]\leq f(b)-f(a)\quad //$$

<u>1.3 Corolario</u>. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente, entonces, para cada $\epsilon>0$ dada, f sólo tiene un número finito de discontinuidades en los cuales el salto es mayor que ϵ.

Dem: Por el lema anterior todas las discontinuidades de una función creciente son de 1ª especie (i.e. existen los límites por la derecha y por la izquierda).

Si $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ son puntos de discontinuidad con salto mayor que ϵ entonces se sigue del lema 1.2. que $n\epsilon \le f(b)-f(a)$ y por consiguiente $n \le \frac{f(b)-f(a)}{\epsilon}$ //.

Como consecuencia de los lemas anteriores obtenemos:

1.4 Teorema. El conjunto de puntos de discontinuidad de una función creciente $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es a lo más numerable y si $x_1, x_2, \dots$ son todos los puntos interiores de discontinuidad entonces:

$$[f(a^+)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]+[f(b)-f(b^-)] \le f(b)-f(a). \quad (1).$$

Dem: Sean $H=\{x\in[a,b] \text{ t.q. } f \text{ es discontinua en } x\}$ y

$H_k=\{x\in H : f(x^+)-f(x^-) > \frac{1}{k}\}$. Claramente $H=\bigcup_k H_k$; como H_k es finito $\forall k$, se concluye que H es, a lo más, numerable.

La desigualdad (1) se sigue de la desigualdad:

$$[f(a^+)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]+[f(b)-f(b^-)] \le f(b)-f(a)$$ al hacer $n\to\infty$ //

1.5 Definición: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente, y sea $\{x_k\}_k$ el conjunto de discontinuidades de f. La función $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por: $s(a)=0$, $s(x)=[f(a^+)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]+f(x)-f(x^-)$

para $x \in (a,b]$ es llamada la función de saltos de la función f, y, es claramente creciente.

1.6 Teorema. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ creciente y $s:[a,b] \to \mathbb{R}$ su función de saltos, entonces la función $\phi:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = f(x) - s(x)$ es creciente y continua.

Dem: Sean $x, y \in [a,b]$ ∋ $a \le x < y \le b$, aplicando la desigualdad (1) de 1.4 al intervalo $[x,y]$ se obtiene $s(y) - s(x) \le f(y) - f(x) \Rightarrow$ $\phi(x) \le \phi(y)$ y ϕ es creciente

Ahora, de la desigualdad $s(y) - s(x) \le f(y) - f(x)$, al hacer $y \to x$ se obtiene $s(x^+) - s(x) \le f(x^+) - f(x)$. Por otro lado, de la definición de la función s se tiene: $f(x^+) - f(x) \le s(y) - s(x)$ para $y > x$. Tomando el límite cuando $y \to x$ obtenemos que $f(x^+) - f(x) \le s(x^+) - s(x)$ $\therefore$ $f(x^+) - f(x) = s(x^+) - s(x)$ $\therefore$ $\phi(x^+) = \phi(x)$.

De manera análoga $\phi(x^-) = \phi(x)$ $\therefore$ ϕ es continua.

Por consiguiente, toda función creciente $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ puede escribirse como la suma de su función de saltos y una función continua creciente.

A continuación definimos el concepto de cubierta de Vitali para subconjuntos de $\mathbb{R}$, el cual puede generalizarse para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y que tiene diversas aplicaciones al análisis.

1.7. Definición. Sea $E \subset \mathbb{R}$ y M una familia de intervalos cerrados. (ninguno consistente de un solo punto). Si para todo $x \in E$ y todo $\epsilon > 0$. existe un intervalo cerrado. $I = I(x)$ de M. $\cdot\ni\cdot$ $x \in I$ y $\lambda(I) < \epsilon$ (donde λ denota la medida de Lebesgue). entonces se dice que E es cubierto por la familia M en el sentido de Vitali

1.8 Teorema de Vitali. Si un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}$. es cubierto por una familia M de intervalos cerrados, en el sentido de Vitali, entonces es posible encontrar una familia finita o numerable de intervalos cerrados $\{I_k\} \subset M$. tal que $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ $(k \neq k')$ y $\lambda^*(E - \bigcup_k I_k) = 0$. (donde λ^* denota la medida exterior).

La demostración que damos. se debe a S. Banach (1924).

Dem: Sea Δ un conjunto abierto arbitrario, con $E \subset \Delta$. Sea M_0 el. conjunto de los intervalos de M que están completamente contenidos en Δ. Ya que Δ es abierto, es claro que M_0 también cubre a E en el sentido de Vitali

Sea $I_1 \in M_0$ arbitrario. Si $E \subset I_1$ se tiene la proposición, en caso. contrario se elige una sucesión de intervalos como sigue:

supongamos que se han elegido $I_1, \ldots, I_n$ con $I_j \cap I_k = \emptyset$ $(j \neq k)$.

Si $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ó $\lambda^*(E - \bigcup_{k=1}^{n} I_k) = 0$ se termina la construcción, Si $\lambda^*(E-\bigcup_{K=1}^{n} I_K) \neq 0$, entonces sea $F_n = \bigcup_{K=1}^{n} I_K$ y $G_n = \Delta - F_n$, consideremos todos aquellos intervalos de M_0 contenidos en G_n. (Esta familia no es vacía, pues G_n es abierto, $E-\bigcup_{K=1}^{n} I_K \neq \emptyset$ y M_0 es cubierta de Vitali de E).

Las longitudes de estos intervalos están acotadas (por ejemplo, $\lambda(\Delta)$ es una cota).

Sea $K_n = \sup\{\lambda(I) : I \in M_0, I \subset G_n\}$, y sea I_{n+1} uno de estos intervalos para el cual $\lambda(I_{n+1}) > \frac{1}{2} K_n$. Como $I_{n+1} \subset G_n$, se tiene que $I_{n+1} \cap I_K = \emptyset$ $\forall K \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si el proceso de construcción no termina en un número finito de pasos, se obtiene una sucesión $\{I_K\}_{K \in \mathbb{N}}$ de intervalos disjuntos dos a dos.

Probemos que $\lambda^*(E-\bigcup_{K=1}^{\infty} I_K) = 0$.

Para esto, construimos para cada K, un intervalo cerrado D_K que tiene el mismo punto medio que I_K pero 5 veces la longitud de I_K: $\lambda(D_K) = 5\lambda(I_K)$. Como los I_K son disjuntos y todos están contenidos en Δ se tiene que $\sum_{K=1}^{\infty} \lambda(I_K) \leq \lambda(\Delta) < \infty$ $\therefore$ $\sum_{K=1}^{\infty} \lambda(D_K) < \infty$.

Para probar que $\lambda^*(E-\bigcup_{K=1}^{\infty} I_K) = 0$ es suficiente mostrar que:

$E-\bigcup_{K=1}^{\infty} I_K \subset \bigcup_{K=i}^{\infty} D_K$ $\forall i$, pues entonces $\lambda^*(E-\bigcup_{K=1}^{\infty} I_K) \leq \lambda^*(\bigcup_{K=i}^{\infty} D_K)$.

y $\lambda^*(\bigcup_{K=i}^{\infty} D_K) \leq \sum_{K=i}^{\infty} \lambda^*(D_K) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$

Sea $x \in E-\bigcup_{K=1}^{\infty} I_K$ entonces $x \in G_i$ $\forall i$, fijemos un índice i, como

G_i es abierto existe un intervalo I de M_0 tal que $x \in I \subset G_i$, sin embargo, es imposible tener $I \subset G_n \; \forall n$., ya que de ésto se seguiría $\lambda(I) \leq K_n < 2\lambda(I_{n+1}) \; \forall n$, lo cual es absurdo pues $\lambda(I_n) \to 0$. Se tiene entonces que, para algún n. $I \cap F_n \neq \emptyset$. Sea n_0 el índice más pequeño tal que $I \cap F_{n_0} \neq \emptyset$, entonces $I \cap F_i = \emptyset \; \forall i \in \{1, \ldots n_0-1\}$.

Como $I \cap F_{n_0-1} = \emptyset$ y $I \cap F_{n_0} \neq \emptyset$ se tiene que $I \cap I_{n_0} \neq \emptyset$ y como $\lambda(I) \leq K_{n_0-1} < 2\lambda(I_{n_0})$ se concluye que si $x \in d$, dist $(x$, punto medio de $I_{n_0}) \leq$ $\leq 2\lambda(I_{n_0}) + \frac{1}{2}\lambda(I_{n_0}) = \frac{5}{2}\lambda(I_{n_0})$ $\therefore$ $I \subset D_{n_0} \Rightarrow I \subset \bigcup_{K=i}^{\infty} D_K$ pues $n_0 > i$ por lo tanto $x \in \bigcup_{K=i}^{\infty} D_K$ //

Una forma modificada, pero equivalente del Teorema de Vitali es como sigue:

<u>1.9. Teorema.</u> Si un conjunto acotado E es cubierto por una familia M de intervalos cerrados en el sentido de Vitali, entonces $\forall \epsilon > 0$, existe una colección finita $I_1, I_2 \ldots I_n$ de intervalos cerrados disjuntos por parejas de la familia M para la cual $\lambda^*(E - \bigcup_{K=1}^{n} I_K) < \epsilon$.

Dem: Sea Δ cualquier intervalo abierto que contiene a E y sea M_0 consistente de los intervalos de M contenidos completamente en Δ, M_0 cubre E en el sentido de Vitali. Aplicando el Teorema anterior a M_0 se construye un sistema $\{I_K\}$ de intervalos disjuntos por parejas tal que:

$\lambda^*(E-\cup I_k)=0$. Si la familia I_k es finita el Teorema queda probado, si es infinita, se tiene $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k) \leq \lambda(\Delta)<\infty \Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n+1}^{\infty}\lambda(I_k)<\epsilon$.

y como $E-\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset (E-\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)\cup(\bigcup_{n+1}^{\infty} I_k)$ se tiene: $\lambda^*(E-\bigcup_{k=1}^{n} I_k) \leq$

$\leq \lambda^*(E-\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)+\lambda^*(\bigcup_{n+1}^{\infty} I_k)<\epsilon$. pues $\lambda^*(E-\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)=0$. //

Hemos probado que 1.8 implica 1.9, a continuación probamos el recíproco.

Supongamos las hipótesis del Teorema 1.8. Sea Δ un conjunto abierto tal que $E\subset\Delta$. Sea M_0 el subconjunto de intervalos de M que están completamente contenidos en Δ, como Δ es abierto, es claro que M_0 cubre E en el sentido de Vitali. Sea $\{\epsilon_i\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{i\to\infty}\epsilon_i=0$

Sabemos que existe una familia finita $\{I_1,\dots,I_{n_1}\}\subset M_0$ tal que: $\lambda^*(E-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k)<\epsilon_1$. Ahora bien, el conjunto $E-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k$ es acotado y $E-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k \subset \Delta-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k$, este último conjunto es abierto, por lo tanto, el conjunto de intervalos de M_0 contenidos en $\Delta-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k$ es una cubierta de Vitali de $E-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k=E'$, existe entonces un conjunto finito $\{I_{n_1+1},\dots,I_{n_2}\}$ de intervalos de M_0 tal que $I_r\subset\Delta-\bigcup_{k=1}^{n_1} I_k$ $\forall r\in\{n_1+1,\dots,n_2\}$ y tal que: $\lambda^*(E'-\bigcup_{k=n_1+1}^{n_2} I_k)<\epsilon_2$.

Definiendo inductivamente $E^m=E^{m-1}-\bigcup_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} I_k$. existen intervalos de de Mo. $I_{n_m+1}, \ldots, I_{n_{m+1}}$ ajenos con los intervalos de $k\in\{1,2,\ldots,n_m\}$. Tal que.

$\lambda^*(E^m - \bigcup_{k=n_m+1}^{n_{m+1}} I_k) < \epsilon_{m+1}$, si para algún m se tiene $\lambda^*(E^m - \bigcup_{n_m+1}^{n_{m+1}} I_k) = 0$,

entonces, observando que. $E^m - \bigcup_{n_m+1}^{n_{m+1}} I_k = E - \bigcup_{k=1}^{n_{m+1}} I_k$, concluimos que:

$\lambda^*(E - \bigcup_{k=1}^{n_{m+1}} I_k) = 0$ y la demostración Termina, si éste no es el caso., consideramos $E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y como $E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset E^m - \bigcup_{n_m+1}^{n_{m+1}} I_k$ $\forall m$. se Tiene:

$\lambda^*(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) < \epsilon_m$ $\forall m$. $\therefore$ $\lambda^*(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0$ //.

Lo que pretendemos ahora, es mostrar que una función monótona, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. tiene una derivada finita casi dondequiera, y que esta derivada es integrable; para esto, haremos uso del Teorema 1.8 y de algunas definiciones y lemas.

1.10 Def: Un número $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. se llama número derivado de la función f en x_0, si existe una sucesión $\{h_n\}$, $h_n \neq 0$ $\forall n$ $\ni$. $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \alpha$. En símbolos: $\alpha = Df(x_0)$ significa que α es. un número derivado. de f en x_0.

Ejemplo. Sea ψ la función de Dirichlet $\psi(x) = \begin{cases} 0 & x\notin \mathbb{Q} \\ 1 & x\in\mathbb{Q} \end{cases}$

Sea $x_0 \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h} = \begin{cases} 0 & h\in\mathbb{Q} \\ -\frac{1}{h} & h\notin\mathbb{Q} \end{cases}$. $\therefore$ ψ Tiene Tres números derivados. en x_0 que son $-\infty, 0, +\infty$.

Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$ entonces $\frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h} = \begin{cases} \frac{1}{h} & x_0+h\in\mathbb{Q} \\ 0 & x_0+h\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ $\therefore$ ψ Tiene Tres números derivados en x_0. que son $-\infty, 0, \infty$.

<u>1.11 Teorema.</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, entonces para todo $x\in[a,b]$, f tiene números derivados, además $f'(x_0)$ (la derivada de f en x_0) existe si y sólo si todos los números derivados de f en este punto son iguales.

Dem: Sea $x\in[a,b]$ y $\{h_n\}$ una sucesión ($h_n\neq 0$ $\forall n$) t.q. $h_n\to 0$ y $x+h_n\in[a,b]$ $\forall n$. Sea $\sigma_n=\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$. Si la sucesión $\{\sigma_n\}$ está acotada, entonces, por el Teorema de Bolzano Weierstrass, puede extraerse una subsucesión $\{\sigma_{n_i}\}_i$ t.q. $\sigma_{n_i}\xrightarrow[i\to\infty]{}\alpha\in\mathbb{R}$ y $\alpha=Df(x)$. Si $\{\sigma_n\}$ no es acotada, existe entonces una subsucesión $\{\sigma_{n_k}\}$ t.q. $\sigma_{n_k}\to\infty(-\infty)$ y entonces $Df(x)=\infty(-\infty)$ esto prueba la primera parte del Teorema.

Supongamos ahora que $f'(x_0)$ existe entonces $\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}=$ $=\lim\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0)$ para cualquier sucesión $\{h_n\}$ $\therefore$ $f'(x_0)$ es el único número derivado.

Supongamos ahora que α es el valor común de todos los números derivados de f en x_0. Si f no tuviera derivada en x_0, entonces existiría una sucesión $\{h_n\}$ t.q. $h_n\to 0$ y $\{\sigma_n\}=\left\{\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right\}$ no tendría como límite a α; existiría entonces una subsucesión $\{\sigma_{n_i}\}_i$ t.q. $\sigma_{n_i}\to\gamma$ con $\gamma\neq\alpha$ $\therefore$ γ es número derivado de f en x_0, lo cual es una contradicción Por lo tanto $f'(x_0)$ existe //.

Como caso particular de los números derivados introducimos las derivadas de Dini.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, definimos $D^+f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $D_+f(x)=\underline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$D^-f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ y $D_-f(x)=\underline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ donde:

$\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\inf_{\delta>0}\sup_{h<\delta}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\delta>0}\sup_{h<\delta}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y los otros límites se definen de manera análoga. Es claro que estos límites existen pero pueden tomar valores extendidos.

De las definiciones, se sigue que: $D^+f(x)\geq D_+f(x)$ y $D^-f(x)\geq D_-f(x)$

A $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$ se les llama las derivadas de Dini de f en el punto x.

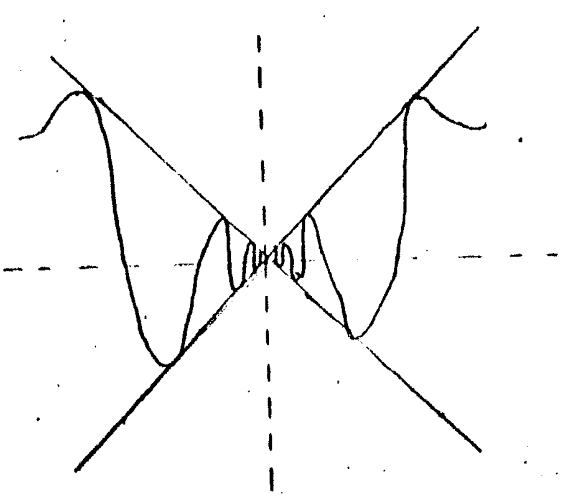
De las definiciones también se sigue que si $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$ con $h_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0^+$ entonces $D_+f(x_0)\leq\alpha\leq D^+f(x_0)$ y si $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0)-f(x_0-h_n)}{h_n}$ con $h_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0^+$, entonces $D_-f(x_0)\leq\alpha\leq D^-f(x_0)$, es decir, las derivadas de Dini son los valores extremos que pueden tomar los números derivados, y es entonces claro que f tiene derivada en x_0 si y sólo si las 4 derivadas de Dini en x_0 coinciden.

Ejemplo a) Sea f definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ entonces:

$D^+f(0)=1=D^-f(0)$ y $D_+f(0)=-1=D_-f(0)$

El dibujo muestra la gráfica de f.



Ejemplo b): Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.q.:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\\ \operatorname{sgn} x & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$ entonces:

$$D^+f(0)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{\delta>0}\sup_{h<\delta}\left\{\left\{\tfrac{1}{h^2}\text{ si } h\notin\mathbb{Q}\right\}\cup\left\{\tfrac{1}{h}\text{ si } h\in\mathbb{Q}\right\}\right\}=\lim_{\delta>0}\{\infty\}=\infty$$

$$D_+f(0)=\underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{\delta>0}\inf_{0<h<\delta}\left\{\left\{\tfrac{1}{h^2}\text{ si } h\notin\mathbb{Q}\right\}\cup\left\{\tfrac{1}{h}\text{ si } h\in\mathbb{Q}\right\}\right\}=\infty.$$

Análogamente $D^-f(0)=D_-f(0)=\infty$.

Ejemplo c) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ |2x| & \text{si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$ entonces, $D^+f(0)=2$, $D_+f(0)=1$, $D^-f(0)=-1$, $D_-f(0)=-2$

en todos los demás puntos, una derivada es ∞, otra es $-\infty$, y las otras dos son finitas e iguales.

A pesar de la variedad de situaciones particulares tenemos que si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es creciente, entonces todos sus números derivados son nonegativos, esto es inmediato de la definición de número derivado.

Ahora demostraremos 2 lemas que son claves para probar el Teorema sobre la diferenciabilidad de una función monótona.

1.12 Lema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Si en todo punto del conjunto $E\subset[a,b]$ existe al menos un número derivado $Df(x)$ tal que $Df(x)\le p$, donde $p\ge 0$, entonces $\lambda^*(f(E))\le p\,\lambda^*(E)$.

Dem: Por comodidad usaremos la notación $[x_0,x_0+h]$ indistintamente para los intervalos $[x_0,x_0+h]$ si $h>0$ y $[x_0+h,x_0]$ si $h<0$.

Sea $\epsilon>0$ arbitrario y sea G un conjunto abierto acotado tal que $E\subset G$ y $\lambda(G)<\lambda^*(E)+\epsilon$. Sea $\rho_0>\rho$ arbitrario, si $x_0\in E$, existe una sucesión $\{h_n\}$ t.q.

$h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = Df(x_0)\leq \rho$

Para toda n suficientemente grande el intervalo cerrado $[x_0, x_0+h_n]$ está contenido en G y simultáneamente $\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<\rho_0$. Para simplificar podemos suponer que estas propiedades se cumplen para toda n.

Sean $I_n(x_0)=[x_0, x_0+h_n]$ y $\Delta_n(x_0)=[f(x_0), f(x_0+h_n)]$, como f es monótona creciente, se tiene $f(I_n(x_0))\subset \Delta_n(x_0)$. Las longitudes de estos intervalos son: $\lambda(I_n(x_0))=|h_n|$ y $\lambda(\Delta_n(x_0))=|f(x_0+h_n)-f(x_0)|$. Por consiguiente $\lambda(\Delta_n(x_0))<\rho_0\lambda(I_n(x_0))$.

Como $h_n\to 0$ se tienen intervalos $\Delta_n(x_0)$ arbitrariamente pequeños. Ya que $f(E)$ consiste de puntos $f(x_0)$, los cuales pertenecen a los intervalos $\Delta_n(x_0)$, $f(E)$ es cubierto por todos los intervalos $\Delta_n(x)$ $(x\in E)$ en el sentido de Vitali.

Por el Teorema de Vitali es posible elegir de esta familia de intervalos una sucesión numerable de intervalos disjuntos $\{\Delta_n(x_i)\}_i$ tales que:

$\lambda^*(f(E)-\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}(x_i))=0$ $\therefore$ $\lambda^*(f(E))\leq \lambda(f(E)-\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}(x_i))+\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}(x_i))$,

por lo tanto $\lambda^*(f(E))\leq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda(\Delta_{n_i}(x_i))<\rho_0\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(I_{n_i}(x_i))$.

Como los $I_{n_i}(x_i)$ son disjuntos por parejas (debido a que los Δ_{n_i}

son disjuntos por parejas y f es estrictamente creciente), obtenemos:

$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) = \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i))$, además, como $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i) \subset G$ se tiene:

$\lambda^*(f(E)) < p_0 \lambda(G) < p_0[\lambda^*(E)+\epsilon]$, pero p_0 y ϵ son arbitrarios $\therefore$

$\lambda^*(f(E)) \leq p \lambda^*(E)$. //

En seguida probamos el lema compañero, el cual tiene una prueba similar, aunque técnicamente más complicada.

<u>6.13 lema.</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Si en todo punto del conjunto $E \subset [a,b]$ existe por lo menos un número derivado $Df(x)$ t.q. $Df(x) \geq q$ $(q \geq 0)$ entonces: $\lambda^*(f(E)) \geq q \lambda^*(E)$.

Dem: Supongamos $q > 0$, pues el caso $q = 0$ es inmediato. Sea q_0 t.q. $0 < q_0 < q$ y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea G un conjunto abierto acotado tal que $f(E) \subset G$ y $\lambda(G) < \lambda^*(f(E)) + \epsilon$ (G existe, pues $f(E) \subset [f(a), f(b)]$)

Sea S el conjunto de puntos $x \in E$ en los cuales f es continua, entonces $E - S$ es, a lo más, numerable.

Si $x_0 \in E$ $\exists \{h_n\}$ t.q. $h_n \to 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \geq q$. Se puede elegir la sucesión de tal forma que $\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} > q_0$ $\forall n$.

Sea $I_n(x_0) = [x_0, x_0+h_n]$ y $\Delta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0+h_n)]$. Se tiene entonces:

$\lambda(\Delta_n(x_0)) > q_0 I_n(x_0)$:

Si $x_0 \in S$, entonces el intervalo $[f(x_0), f(x_0+h_n)]$ está completamente com-

Tenido en el conjunto G para n suficientemente grande. Supongamos entonces que $\{h_n\}$ tiene esta propiedad. El conjunto S es cubierto por los intervalos $I_n(x)$ $(x\in S)$ en el sentido de Vitali; por lo tanto, existe una sucesión de intervalos disjuntos por parejas $\{I_{n_i}(x_i)\}$ t.q. $\lambda(S-\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i))=0$, en consecuencia: $\lambda^*(S)\leq \lambda(S-\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i))+\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i)) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda(I_{n_i}(x_i))<$
$< \frac{1}{q_0}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(\Delta_{n_i}(x_i))$.

Como $\{I_{n_i}(x_i)\}$ es una sucesión de intervalos disjuntos por parejas y f es estrictamente creciente, los $\Delta_{n_i}(x_i)$ son también disjuntos dos a dos, por lo tanto: $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(\Delta_{n_i}(x_i))=\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}(x_i))\leq\lambda(G)\leq\lambda^*(f(E))+\epsilon$ $\therefore$
$\lambda^*(S)<\frac{1}{q_0}[\lambda^*(f(E))+\epsilon]$, pero $q_0<q$ y $\epsilon>0$ son arbitrarios $\therefore$
$\lambda^*(S)\leq\frac{1}{q}\lambda^*(f(E)) \Rightarrow q\lambda^*(S)\leq\lambda^*(f(E))$ y como $\lambda^*(E)=\lambda^*(S)$ se sigue que $q\lambda^*(E)\leq\lambda^*(f(E))$ //

Antes de probar el Teorema sobre la diferenciabilidad de una función monótona, derivamos algunos corolarios de los 2 lemas anteriores.

<u>1.14. Corolario:</u> El conjunto de puntos en los cuales al menos un número derivado de una función creciente $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es infinito, tiene medida cero.

Dem: dividamos la demostración en dos casos:

1°). Si f es estrictamente creciente y $E=\{x \mid Df(x)=\infty\}$ se tiene entonces: $\lambda^*(f(E)) \geq q\,\lambda^*(E)$ para q arbitrario.

Supongamos $\lambda^*(E)>0$, entonces $\lambda^*(f(E))=\infty$ pero $\lambda^*(f(E)) \leq f(b)-f(a) < \infty$ lo cual da una contradicción. $\therefore \lambda^*(E)=0$.

2º) Si f no es estrictamente creciente, sea $g(x)=f(x)+x$, entonces g es estrictamente creciente y como $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}+1$, el conjunto de puntos donde f tiene un número derivado con valor ∞ coincide con el conjunto donde g tiene un numero derivado con valor ∞. Por el primer caso, este conjunto es de medida cero//

<u>1.15 Corolario</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente, sean $p,q\in\mathbb{R}$ t.q. $p<q$. Si en todo punto x del conjunto $E_{p,q}\subset[a,b]$ existen dos números derivados $D_1f(x)$, $D_2f(x)$ t.q. $D_1f(x)<p<q<D_2f(x)$, entonces $\lambda(E_{p,q})=0$

Dem: Nuevamente dividimos la prueba en 2 casos:

1º) Supongamos que f es estrictamente creciente, entonces aplicando los 2 lemas anteriores, se tiene $\lambda^*(f(E_{p,q})) \leq p\,\lambda^*(E_{p,q})$ y $\lambda^*(f(E_{p,q})) \geq q\,\lambda^*(E_{p,q})$ $\therefore$ $p\,\lambda^*(E_{p,q}) \geq q\,\lambda^*(E_{p,q}) \Rightarrow \lambda^*(E_{p,q})=0$

2º) Si f no es estrictamente creciente, sea $g(x)=f(x)+x$. En todo punto del conjunto $E_{p,q}$ existen 2 números derivados de g t.q. $D_1g(x)<p+1<q+1<D_2g(x)$, se tiene entonces como en el primer caso:

$\lambda^*(g(E_{p,q})) \leq (p+1)\lambda^*(E_{p,q})$ y $\lambda^*(g(E_{p,q})) \geq (q+1)\,\lambda^*(E_{p,q})$ $\therefore$

$(p+1)\lambda^*(E_{p,q}) \geq (q+1)\lambda^*(E_{p,q}) \quad \therefore \quad \lambda^*(E_{p,q})=0$ //

Probemos ahora el Teorema principal de este capítulo, que trata sobre la existencia casi dondequiera de la derivada de una función monótona.

La primera parte del Teorema que a continuación se enuncia, es conocida como Teorema de Lebesgue, quien probó en 1904 que toda función monótona continua es diferenciable casi dondequiera, en 1911 W. H. Young mostró que el Teorema se cumple sin la hipótesis de continuidad.

<u>1.16 Teorema.</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente, entonces:

1º) f tiene derivada finita f' c. d. (casi dondequiera)

2º) f' es medible, integrable y $\int_{[a,b]} f'\,d\lambda \leq f(b)-f(a)$.

Dem: Sea E el conjunto de puntos donde la derivada no existe. Sea $x_0\in E$, entonces hay por lo menos dos números derivados $D_1f(x_0)$, $D_2f(x_0)$. Podemos suponer que $D_1f(x_0) < D_2f(x_0)$.

Sean $p,q\in\mathbb{Q}$ ∋ $D_1f(x_0)<p<q<D_2f(x_0)$ y sea $E_{p,q}=\{x\in[a,b]$: existen 2 números derivados de f en x : $D_1f(x), D_2f(x)$ y $D_1f(x)<p<q<D_2f(x)\}$, entonces $x_0\in E_{p,q}$.

Claramente $E=\bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}} E_{p,q}$, como ésta es una unión numerable y $\lambda(E_{p,q})=0$, concluimos que $\lambda(E)=0$.

Por lo tanto la derivada existe casi dondequiera en $[a,b]$, además, por el corolario 1.14 el conjunto de puntos donde al menos un número derivado es ∞, es de medida cero $\therefore$ f tiene derivada finita c.d.

Extendamos ahora, el dominio de definición de f al intervalo $[a,b+1]$ de tal forma que $f(x)=f(b)$ $\forall\, x\in[b,b+1]$. En todo punto $x\in[a,b]$ $\ni$ $f'(x)$ existe, se tiene $f'(x)=\lim_{n\to\infty} [f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$, podemos definir f' como cero en donde la derivada no existe, entonces f' es el límite de una sucesión convergente c.d. de una sucesión de funciones medibles. (Por ser f creciente, es medible, y la función $h_n(x) = f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ es medible $\forall n$). por consiguiente f' es medible y como f es creciente $f'\geq 0$ y podemos considerar su integral $\int_{[a,b]} f'\,d\lambda$.

Aplicando el lema de Fatou:

$\int_{[a,b]} f'\,d\lambda \leq \sup\{n\int_{[a,b]}[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]\,d\lambda$, como $\int_{[a,b]} f(x+\frac{1}{n})\,d\lambda = \int_{[a+\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\lambda$ se tiene:

$$\int_{[a,b]}[f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)]\,d\lambda = \int_{[b,b+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\lambda - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\lambda = \tfrac{1}{n}f(b) - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\lambda \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{n}[f(b)-f(a)] \quad \therefore \int_{[a,b]} f'(x)\,d\lambda \leq f(b)-f(a) \quad //$$

Como consecuencia del Teorema de Lebesgue, probemos un Teorema sobre la diferenciabilidad de series de funciones monótonas.

<u>1.17 Teorema (de Fubini).</u> Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones con valores reales no decrecientes (o no crecientes), definidas en $[a,b]$ y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ existe y es finita en $[a,b]$. Entonces $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ c.d. en (a,b)

Dem: Supongamos f_n no decreciente y $f_n \geq 0$ $\forall n$ (sin la última condición, consideraríamos las funciones $g_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$ y se reduce al caso que tratamos). Tenemos entonces que $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es no-negativa y no decreciente, por el Teorema de Lebesgue (1.16) s' existe y es finita c.d. en (a,b).

Consideremos las sumas parciales $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ y las diferencias $r_n = s - s_n$. Cada f_j tiene derivada finita c.d., así pues, existe un conjunto $A \subset (a,b)$ t.q. $\lambda(A^c \cap (a,b)) = 0$, $s_n'(x) = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x) < \infty$ y $s'(x)$ existe y es finita $\forall x \in A$.

Sea $x \in (a,b)$ arbitrario, para cualquier $h > 0$ t.q. $x + h \in (a,b)$, se sigue de la igualdad: $\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} + \frac{r_n(x+h) - r_n(x)}{h}$ que:

$\frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} \leq \frac{s(x+h) - s(x)}{h}$ (pues r_n es creciente). $\therefore s_n'(x) \leq s'(x)$ $\forall x \in A$.

Tenemos entonces: $s_n'(x) \leq s_{n+1}'(x) \leq s'(x)$ $\forall x \in A$ $n = 1, 2, \ldots$ por lo tanto $\lim_{n \to \infty} s_n'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$ existe c.d.

Probemos, entonces, que: $\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = s'(x)$ c.d.

Como la sucesión $\{s_n'(x)\}_n$ es no decreciente para cada $x \in A$ (pues f_k creciente $\Rightarrow f_k'(x) \geq 0$) es suficiente probar, que $(s_n')_n$ admite una subsucesión que converja a s' c.d.

Sea $n_1, n_2, \ldots$ una sucesión creciente de enteros tal que $\sum_{k=1}^{\infty} [s(b) - s_{n_k}(b)] < \infty$

Para cada n_k y $\forall x \in (a,b)$ se tiene $s(b) - s(x) \geq s_{n_k}(b) - s_{n_k}(x)$. $\therefore$

$0 \leq s(x) - s_{n_k}(x) \leq s(b) - s_{n_k}(b)$, y tenemos que: $\sum_{k=1}^{\infty} [s(x) - s_{n_k}(x)]$ converge.

Los términos de esta serie son funciones monótonas que tienen derivada finita c.d. Por consiguiente, usando el mismo argumento con el cual se probó que $\sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$ converge c.d., también se prueba que:

$\sum_{k=1}^{\infty} [s'(x) - s_{n_k}'(x)]$ converge c.d. $\therefore \lim_{k\to\infty} s'(x) - s_{n_k}'(x) = 0$ c.d. De esto se sigue $\lim_{k\to\infty} s_{n_k}'(x) = s'(x)$ c.d. //

Sabemos del Teorema fundamental del cálculo, que si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función con f' continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

Veamos con un ejemplo que esta igualdad no necesariamente es válida si f' no es continua.

<u>1.18 Ejemplo</u>: Recordemos la construcción del conjunto ternario de Cantor: Dividimos el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales por medio de los puntos $1/3$, $2/3$, y excluimos el intervalo $(1/3, 2/3)$.

Dividimos ahora cada intervalo restante (i.e. $[0,1/3]$, $[2/3,1]$) en tres partes iguales por medio de los puntos $1/9$, $2/9$ el primero y $7/9$, $8/9$ el segundo, y excluimos los intervalos medios $(1/9, 2/9)$ y $(7/9, 8/9)$. En seguida dividimos cada uno de los 4 intervalos restantes en 3 partes iguales y excluimos los intervalos medios. Continuamos este proceso de manera indefinida.

Por medio de este proceso hemos eliminado del conjunto $[0,1]$ el conjunto abierto $G = (1/3, 2/3) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \cup \ldots$

Los conjuntos G y $P = [0,1] - G$ son llamados conjuntos de Cantor.

Es bien sabido que: $w \in P \Leftrightarrow w$ admite una representación ternaria

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w(i)}{3^i} \quad \text{con } w(i) = 0 \text{ ó } 2 \quad \forall i$$

Definamos ahora la función que queremos, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue:

sea $x \in [0,1]$, y sean $\{a_n\}$ los coeficientes de su expansión ternaria. Sea $N = \infty$ si $a_n \neq 1$ $\forall n$, en caso contrario, sea N el índice n más pequeño tal que $a_n = 1$, definimos $f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^N}$.

Es inmediato verificar que f está bien definida en aquellos puntos que admiten más de una representación ternaria, además f es monótona, continua y su imagen es el intervalo $[0,1]$.

Claramente f es constante en cada intervalo contenido en G $\therefore$

$f'(x)=0 \ \forall x\in G$ y como $\lambda(G)=1$, $f'=0$ c.d. Por consiguiente:

$\int_0^1 f'(x)dx = 0 < f(1)-f(0)=1.$

En el capítulo siguiente veremos bajo qué condiciones se da la igualdad $\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$.

Concluimos este capítulo con el siguiente resultado, que es un converso parcial al corolario 1.14:

<u>1.19 Teorema</u>. Sea $E\subset[a,b]$ un conjunto de medida cero, entonces existe una función $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ creciente, continua t.q. $g'(x)=+\infty$ $\forall x\in E$ (si $a,b\in E$, se consideran derivadas unilaterales)

Dem: Para todo $n\in\mathbb{N}$ sea G_n un conjunto abierto acotado tal que:

$E\subset G_n$, $\lambda(G_n)<\frac{1}{2^n}$

Definimos las funciones $(\psi_n)_n$ como sigue: $\psi_n(x)=\lambda(G_n\cap[a,x])$ $\forall x\in[a,b]$. Claramente ψ_n es no-negativa, continua y creciente, además $\psi_n(x)<\frac{1}{2^n}$. Definamos $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ como sigue:

$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ $\forall x\in[a,b]$, g es creciente, no negativa y continua. (por ser el límite uniforme de funciones continuas).

Sea $x_0\in E$ y $|h|$ suficientemente pequeño tal que $[x_0,x_0+h]\subset G_n$ (para n fijo), para esta h tenemos (suponemos $h>0$ por simplicidad):

$\psi_n(x_0+h) = \lambda([G_n \cap [a,x_0]] \cup [G_n \cap (x_0, x_0+h)]) = \psi_n(x_0) + h$ $\therefore$

$\frac{\psi_n(x_0+h) - \psi_n(x_0)}{h} = 1$. Se sigue que, $\forall m \in \mathbb{N}$, si $h>0$ es suficientemente pequeño, Tenemos $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h} = m$ $\therefore$

$g'(x_0) \geq m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $g'(x_0) = \infty$. Si consideramos incrementos negativos, la prueba es análoga //

Bibliografía.

1.1 Natanson: Theory of functions of a real variable. Volumen I. Frederick Ungar. Publishing CO. New York, 1964.

1.2, Kolmogorov, Fomin; Introductory real analysis. Dover Publications 1970.

1.3 H. L. Royden: Real analysis. Collier. Macmillan. 1968.

1.4 Karl R. Stromberg: An introduction to classical real analysis. Wadsworth international group. 1981

1.5. Apostol. Mathematical analysis. Addison Wesley. 1974.

Capitulo II.

Funciones de variación acotada..

En el capítulo anterior se probó que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es creciente, entonces su derivada f' es medible y $\int_a^b f'(x)dx \le f(b)-f(a)$, y se dió un ejemplo en donde la desigualdad es estricta. En este capítulo veremos para qué tipo de funciones se da la igualdad $\int_a^x f'(t)\,dt = f(x)-f(a)$ $\forall x\in[a,b]$. Para ésto iniciamos este capítulo con el estudio de la Teoría de funciones de variación acotada.

Estas funciones, como veremos pueden expresarse como diferencia de funciones crecientes y por lo tanto heredan algunas propiedades ya estudiadas en el capítulo anterior para funciones crecientes.

<u>2.1 Definición</u>. Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ si existe una constante $c>0$ tal que:

$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le c$. para toda partición $\{a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$.

<u>2.2 Definición</u>: Denotamos por $BV[a,b]$ a la familia de funciones de variación acotada en $[a,b]$

<u>2.3 Definición</u>: Sea $f\in BV[a,b]$. <u>Por la variación total de f sobre</u>

el intervalo $[a,b]$, denotada por $V_a^b(f)$, se entiende el número real

$V_a^b(f) = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ en donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de $[a,b]$.

Si la función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ no es de variación acotada, entonces decimos que f tiene variación total igual a ∞, y ponemos $V_a^b(f) = \infty$.

Ejemplos. a) Una función monótona $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, es de variación acotada en $[a,b]$. La verificación de este hecho es inmediata.

b) Una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, para la cual existe una constante K tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$, $\forall\, x, y \in [a,b]$ es de variación acotada. Una función que satisface la condición anterior se dice que satisface una condición Lipschitz de orden 1 con constante K.

c). Si una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable, y $|f'(x)| \leq K$ $\forall x \in [a,b]$, entonces f satisface una condición Lipschitz de orden 1 con constante K, y es por lo tanto, de variación acotada.

Este último ejemplo es consecuencia inmediata del Teorema del valor medio.

d). Sea $f: [0,1] \to [-1,1]$ definida por $f(0) = 0$, $f(1/n) = \frac{(-1)^n}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y f lineal sobre cada intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Entonces f es continua sobre $[0,1]$. Si $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$ es una partición, entonces $|f(\frac{1}{n})-f(0)|+\sum_{k=2}^{n}|f(\frac{1}{k})-f(\frac{1}{k-1})|=\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k}-\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right|=$

$=\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right)>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \Rightarrow V_0^1(f)=\infty$ i.e. la función Tiene variación

total infinita.

2.4 Teorema. Toda función $f\in BV[a,b]$ es acotada en $[a,b]$

Dem: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in BV[a,b]$, sea $x\in[a,b]$ entonces:

$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le V_a^b(f)$ $\therefore$ $|f(x)|\le|f(a)|+V_a^b(f)$ //.

2.5 Teorema. Sean $f,g\in BV[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ entonces:

1°) $\alpha f+\beta g\in BV[a,b]$, $V_a^b(\alpha f)=|\alpha|\,V_a^b(f)$ y

$V_a^b(\alpha f+\beta g)\le|\alpha|V_a^b(f)+|\beta|\,V_a^b(g)$.

2°) $fg\in BV[a,b]$ y $V_a^b(fg)\le V_a^b(f)\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|+V_a^b(g)\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$

3°) Si $\exists\ c>0$ t. $g(x)\ge c$ $\forall x\in[a,b]$ entonces $1/g\in BV[a,b]$ y

$V_a^b(1/g)\le\frac{1}{c^2}V_a^b(g)$

La demostración de estos hechos no es difícil y la omitimos.

Este último Teorema afirma que el conjunto de funciones de variación acotada definidas en un intervalo $[a,b]$ forma un álgebra de funciones (i.e. un espacio vectorial donde el producto de 2 funciones pertenece al espacio).

2.5b Teorema: Sea $f\in BV[a,b]$ y sea $c\in(a,b)$ entonces:

$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$

Dem: Sean $\{y_0=a, y_1, \ldots, y_n=c\}$ y $\{z_0=c, z_1, \ldots, z_m=b\}$ particiones arbitrarias de $[a,c]$ y $[c,b]$, la unión $\{y_k\}_{k=0}^{n} \cup \{z_k\}_{k=0}^{m}$ da una partición de $[a,b]$ y por lo tanto se tiene:

$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k)-f(y_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m} |f(z_k)-f(z_{k-1})| \leq V_c^b(f)$. $\therefore$ $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_c^b(f)$.

Ahora sea $\{x_0=a, x_1, \ldots, x_n=b\}$ una partición del cerrado $[a,b]$, sea c.f. $x_r \leq c \leq x_{r+1}$, entonces $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{r} |f(x_k)-f(x_{k-1})| + |f(c)-f(x_r)| + |f(x_{r+1})-f(c)| + \sum_{k=r+2}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$ $\therefore$ $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Las dos desigualdades obtenidas muestran que $V_c^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ //

<u>2.6 Corolario</u> Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tiene variación acotada y $[x,y]\subset[a,b]$ entonces f es de variación acotada en $[x,y]$. Inversamente si f es de variación acotada sobre $[x,y]\subset[a,b]$ con x,y arbitrarios, entonces $f\in BV[a,b]$.

<u>2.7 Teorema</u>: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces la función $v(x)=V_a^x(f)$ es no decreciente, además, si $f\in BV[a,b]$ entonces $v\in BV[a,b]$ y:

$V_a^b(f) = V_a^b(v)$.

Dem: La primera parte se sigue del Teorema 2.5 y del hecho de que la variación en un intervalo es no-negativa.

Como v es no-decreciente, entonces $v\in BV[a,b]$, probemos entonces que $V_a^b(f) = V_a^b(v)$ para $f\in BV[a,b]$.

Por ser v no decreciente, se tiene:

$$V_a^b(v) = v(b) - v(a) = V_a^b(f) \;//$$

El siguiente Teorema da una caracterización de las funciones de variación acotada en términos de funciones monótonas.

2.8 Teorema: Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pertenece a $BV[a,b]$ si y sólo si es representable como diferencia de funciones crecientes, dicha representación no es única.

Dem: Que la condición es suficiente se sigue del hecho de que las funciones monótonas son de variación acotada y del teorema 2.5.

Probemos que la condición es necesaria:

Sea $v:[a,b]\to\mathbb{R}$ t. $v(x) = V_a^x(f)$ y definamos $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ como $g(x) = v(x) - f(x)$. Por el Teorema 2.7, v es no-decreciente, veamos que g es no-decreciente.

Sean $x' < x''$ puntos en $[a,b]$, entonces: $g(x'') - g(x') = [v(x'') - v(x')] - [f(x'') - f(x')] \geq 0$ pues $|f(x'') - f(x')| \leq v(x'') - v(x')$ por la definición de v $\therefore f = v - g$. //

2.9 Corolario. Sea $f \in BV[a,b]$, entonces f' existe y es finita c.d. Además f' es una función integrable sobre el intervalo $[a,b]$

<u>2.10. Corolario:</u> Toda función $f \in BV[a,b]$ puede escribirse como la suma de su función de saltos y una función continua de variación acotada.

Esto es una consecuencia de los Teoremas 2.8 y 1.6.

Observemos que, por ser f diferencia de dos funciones crecientes, tiene, a lo sumo, un número numerable de discontinuidades, las cuales resultan ser de salto.

Si $\{x_k\}_k \subset [a,b]$ es el conjunto de discontinuidades de f, entonces, su función de saltos s está definida por:

$$s(x) = [f(a^+) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] + [f(x) - f(x^-)] \qquad \forall\, x \in (a,b]$$

y $s(a) = 0$.

Se tiene, además que $s = s_v - s_g$ donde s_v y s_g son las funciones de saltos de las funciones v y g que aparecen en el Teorema 2.8

Anteriormente, habíamos hecho la observación de que $BV[a,b]$ es un espacio vectorial. Definamos ahora una norma sobre este espacio y probemos que con esta norma $BV[a,b]$ es completo.

<u>2.11 Teorema.</u> La función $\|\ \|_v : BV[a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$\|f\|_v = |f(a)| + V_a^b(f)$, es una norma, y $(BV[a,b], \|\ \|_v)$ es un espacio de Banach.

Dem: Mostremos, primero que $\|\ \|_V$ es una norma.

a). $\|f\|_V \geq 0 \quad \forall f \in BV[a,b]$, ésto es inmediato de la definición

b) $\|f\|_V = 0 \iff f \equiv 0$, si $f \equiv 0$, entonces es claro que $\|f\|_V = 0$.

Supongamos $\|f\|_V = 0 \Rightarrow |f(a)| + V_a^b(f) = 0 \Rightarrow f(a) = 0$ y $V_a^b(f) = 0$.

Sea $x_1 \in (a,b]$, consideremos la partición $\mathbb{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2 = b\}$, entonces:

$|f(x_1) - f(a)| + |f(b) - f(x_1)| = 0 \quad \therefore \quad f(x_1) = f(a)$

c). $\|\lambda f\|_V = |\lambda| \, \|f\|_V$, es inmediato de la definición.

d). $\|f+g\|_V \leq \|f\|_V + \|g\|_V$, $\|f+g\|_V = |f(a) + g(a)| + V_a^b(f+g) \leq$

$\leq |f(a)| + |g(a)| + V_a^b(f) + V_a^b(g) = \|f\|_V + \|g\|$, donde la desigualdad se sigue

del Teorema 2.5.

Resta probar que $(BV[a,b], \|\ \|_V)$ es un espacio de Banach.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset BV[a,b]$ una sucesión de Cauchy, sea $x \in [a,b]$ entonces: $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| \leq V_a^x(f_n - f_m) \quad \therefore$

$|(f_n - f_m)(x)| \leq V_a^x(f_n - f_m) + |(f_n - f_m)(a)| \leq V_a^b(f_n - f_m) + |(f_n - f_m)(a)| = \|f_n - f_m\|_V$

Por consiguiente $\{f_n\}$ converge puntual y uniformemente.

Sea f el límite puntual de $\{f_n\}$, demostremos que $f \in BV[a,b]$

Como $\{f_n\}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, se tiene que $\|f_m\|_V < \epsilon + \|f_{N_\epsilon}\|_V$ $\forall m \geq N_\epsilon \quad \therefore \{\|f_n\|_V\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto acotado. Sea $M > 0$ una cota para este conjunto.

Sea $\mathbb{P}=\{a=x_0,x_1,\dots,x_m=b\}$ una partición de $[a,b]$. Sea N t.q. $|f(x_k)-f_N(x_k)|<$ $<\epsilon/2m$ $\forall x_k$ entonces: $\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=$

$$=\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f_N(x_k)+f_N(x_k)-f_N(x_{k-1})+f_N(x_{k-1})-f(x_{k-1})|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{m}\left(|f(x_k)-f_N(x_k)|+|f_N(x_k)-f_N(x_{k-1})|+|f_N(x_{k-1})-f(x_{k-1})|\right)\le m\,\epsilon/2m+V_a^b(f_N)+m\,\epsilon/2m$$

$=V_a^b(f_N)+\epsilon\le M+\epsilon$ $\therefore$ $V_a^b(f)\le M$ $\therefore$ $f\in BV[a,b]$.

Falta probar que $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_v=0$.

Sea $\mathbb{P}=\{x_0=a,x_1,\dots,x_m=b\}$ una partición arbitraria pero fija de $[a,b]$.

$\|f_n-f\|_v=|f_n(a)-f(a)|+V_a^b(f_n-f)$ y $\sum_{k=1}^{m}|[f_n(x_k)-f(x_k)]-[f_n(x_{k-1})-f(x_{k-1})]|\le$

$\le\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f(x_k)|+\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_{k-1})-f(x_{k-1})|$, cuando $n\to\infty$, estas dos sumas y $|f_n(a)-f(a)|$ tienden a cero, como la partición es arbitraria, se tiene $\|f_n-f\|_v\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\therefore$ $(BV[a,b],\|\ \|_v)$ es un espacio de Banach.//

A $\|\ \|_v$ se le llama la norma variación.

Observación: el conjunto $\{f\mid f\in BV[a,b]$ y $f(a)=0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de $(BV[a,b],\|\ \|_v)$ por lo cual resulta ser también de Banach.

Posteriormente estudiaremos otro subespacio de $BV[a,b]$, llamado el subespacio de las funciones absolutamente continuas, y que está ligado directamente con la cuestión que nos planteamos al iniciar el capítulo. Para prepararnos consideremos algunas propiedades de las funciones.

continuas de variación acotada

2.12 Lema. Si $f \in BV[a,b]$ y $\epsilon > 0$, entonces existe una partición $\mathbb{P}$ de $[a,b]$, tal que si $\mathbb{P}'$ es un refinamiento de $\mathbb{P}$ y x', x'' son dos números consecutivos de $\mathbb{P}'$, se tiene. $V_{x'}^{x''}(f) < |f(x'') - f(x')| + \epsilon$

Dem: Basta tomar $\mathbb{P} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^b(f) - \epsilon$

el resto de la prueba es inmediato.

2.13 Teorema: Sea $f \in BV[a,b]$ y $v: [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$v(x) = V_a^x(f)$, entonces:

$v(c^+) - v(c) = |f(c^+) - f(c)| \quad \forall\, c \in [a,b)$. y

$v(c) - v(c^-) = |f(c) - f(c^-)| \quad \forall\, c \in (a,b]$. En particular f es continua en $c \in [a,b]$. si y sólo si v es continua en c.

Dem: Sea $c \in [a,b)$, sabemos que $f(c^+)$ y $v(c^+)$ existen pues $f, v \in BV[a,b]$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta' > 0$ t.q. $\delta' < b - c$ y si $c < x < c + \delta'$, entonces $\big||f(x) - f(c)| - |f(c^+) - f(c)|\big| < \epsilon/2$.

Se sigue del lema 2.12 que existe una partición $\mathbb{P}$ de $[a,b]$ t.q. $c \in \mathbb{P}$ y si $\mathbb{P}'$ es cualquier refinamiento de $\mathbb{P}$ y x es el sucesor inmediato de c en $\mathbb{P}'$, entonces: $v(x) - v(c) = V_c^x(f) < |f(x) - f(c)| + \epsilon/2$ o, lo que es lo mismo: $[v(x) - v(c)] - |f(x) - f(c)| < \epsilon/2$.

Sea δ'' la distancia entre c y el inmediato sucesor de c en $\mathbb{P}$.

Sea $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Sea x t.q. $c < x < x+\delta$, como $c<x<c+\delta'$, se tiene:

$\big| |f(x)-f(c)| - |f(c^+)-f(c)| \big| < \epsilon/2$.

Es claro que hay una partición $\mathbb{P}'$ de $[a,b]$ tal que $\mathbb{P}'$ es un refinamiento de $\mathbb{P}$ y donde x es el sucesor inmediato de c, por consiguiente;

$\big| [v(x)-v(c)] - |f(x)-f(c)| \big| < \epsilon/2$.

De las 2 últimas desigualdades obtenemos:

$\big|[v(x)-v(c)] - |f(c^+)-f(c)|\big| \le \big|[v(x)-v(c)] - |f(x)-f(c)|\big| + \big||f(x)-f(c)| - |f(c^+)-f(c)|\big| <$

$\epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \therefore \quad v(c^+)-v(c) = |f(c^+)-f(c)|$

Un argumento similar muestra que si $c \in (a,b]$, entonces:

$v(c)-v(c^-) = |f(c)-f(c^-)|$ //.

<u>2.14 Corolario</u>. Una función continua de variación acotada puede escribirse como la diferencia de dos funciones continuas crecientes.

2.15. Definición. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Sea $\mathbb{P}\{a=x_0,x_1,\dots,x_m=b\}$ una partición de $[a,b]$, definimos $\omega_K = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in [x_K, x_{K+1}]\}$ y le llamamos la oscilación de f en el intervalo $[x_K, x_{K+1}]$.

<u>2.15 Teorema</u>: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, sea $\mathbb{P}=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$ y sea $\lambda = \max_K\{(x_{K+1}-x_K)\}$, entonces, cuando $\lambda\to 0$ cada una de las sumas $V=\sum_{K=0}^{n-1}|f(x_{K+1})-f(x_K)|$ y $\Omega = \sum_{K=0}^{n-1}\omega_K$ tiende a la variación Total de f.

Dem: Como ya sabemos la suma V no decrece cuando nuevos puntos de subdivisión son añadidos, además, si uno de estos puntos esta en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ el incremento debido a este punto, no es mayor que $2\omega_k$.

Sea A ∋. $A < V_a^b(f)$ y sea $\mathbb{P}^* \{a = x_0^*, x_1^*, \ldots, x_m^* = b\}$ una partición de $[a,b]$. Tal que. $V^* = \sum_{k=1}^{m} |f(x_{k+1}^*) - f(x_k^*)| > A$.

Sea $\delta > 0$ ∋. $|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - A}{4m}$ siempre que $|x'' - x'| < \delta$ (Esto es posible, pues f es uniformemente continua).

Probaremos que. $V = \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| > A$ para cualquier partición de $[a,b]$, para la cual $\lambda < \delta$. Sea $\mathbb{P}_1$ cualquier partición ∋. $\lambda < \delta$ y sea $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}^*$, es decir la partición que se obtiene al unir los puntos de $\mathbb{P}_1$ con $\mathbb{P}^*$ y sea V_0 la suma correspondiente a $\mathbb{P}_2$, Tenemos entonces que. $V_0 \geq V^*$

La partición $\mathbb{P}_2$ se obtiene de $\mathbb{P}_1$ por m o menos repeticiones del proceso de añadir un solo punto. Al añadir cada punto se incrementa la suma $V_{\mathbb{P}_1}$ (i.e. la suma para la partición $\mathbb{P}_1$) en una cantidad menor que $\frac{V^* - A}{2m}$ ∴ $V_0 - V_{\mathbb{P}_1} < \frac{V^* - A}{2}$ ∴ $V_{\mathbb{P}_1} > V_0 - \frac{V^* - A}{2}$ y como $V_0 \geq V^*$ obtenemos:

$V_{\mathbb{P}_1} > V_0 - \frac{V^* - A}{2} \geq \frac{V^* - A}{2} > A$ pues $V^* > A$.

Por consiguiente $V > A$ para toda suma V correspondiente a una partición ∋. $\lambda < \delta$.

Por otro lado, como $V_{\mathbb{P}} \leq V_a^b(f)$ $\forall$ $\mathbb{P}$ partición de $[a,b]$ concluimos que $\lim_{\lambda \to 0} V_{\mathbb{P}} = V_a^b(f)$.

Ahora sea $\mathbb{P}$ una partición de $[a,b]$ y sean $V_{\mathbb{P}}$ y $\Omega_{\mathbb{P}}$ sus sumas correspondientes. Es claro que $\Omega_{\mathbb{P}} \geq V_{\mathbb{P}}$. Pero si ahora consideramos la partición $\mathbb{P}'$ que resulta al añadirle a $\mathbb{P}$ los puntos en los cuales f alcanza el máximo y el mínimo sobre cada intervalo de $\mathbb{P}$ entonces: $V_{\mathbb{P}'} \geq \Omega_{\mathbb{P}}$.

Concluimos, entonces que $\lim_{\lambda \to 0} \Omega = V_a^b f$. //

Observación: La conclusión del Teorema anterior es falsa si no exigimos que f sea continua, como lo muestra la función $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 0 \ \forall x \neq 0$ y $f(0) = 1$. Se tiene entonces que $V_{-1}^{1}(f) = 2$ pero para cualquier partición $\mathbb{P}$ de $[-1,1]$ que no contenga a cero, se tiene $V_{\mathbb{P}} = 0$ y $\Omega_{\mathbb{P}} = 1$ //

El Teorema precedente es clave para probar un teorema muy interesante debido a S. Banach, este último Teorema, a su vez, nos será de utilidad cuando consideremos el espacio de las funciones absolutamente continuas.

<u>2.16 Definición</u>: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sea $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ y $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. La función $N: [m,M] \to \mathbb{R}$ t.q. $N(y) = \#\{x \in [a,b] \text{ t.q. } f(x) = y\}$ es llamada la función indicatriz de Banach (N puede tomar el valor $+\infty$).

2.17. Teorema. (S. Banach) La función indicatriz de Banach es medible integrable y $\int_m^M N(y)\,dy = V_a^b(f)$.

Dem: subdividimos el intervalo $[a,b]$ en 2^n subintervalos de igual longitud, como sigue: $I_1 = [a, a+\frac{b-a}{2^n}], \dots, I_K = (a+(k-1)\frac{b-a}{2^n}, a+k\frac{b-a}{2^n}]$ $K = 2,3,\dots,2^n$.

Definamos ahora las funciones $L_K : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ $(K=1,2,\dots,2^n)$ como sigue: $L_K(y)=1$ si $\exists\, x\in I_K$ s.t. $f(x)=y$ y $L_K(y)=0$ en caso contrario.

Sean m_K, M_K, el ínfimo y supremo de la función en el intervalo I_K. Se sigue de la continuidad de f que $L_K(y)=1$ $\forall\, y \in (m_K, M_K)$ y $L_K(y)=0$ $\forall\, y$ en el complemento de $[m_K, M_K]$ $\therefore$ L_K tiene a lo más dos puntos de discontinuidad y es por consiguiente medible, integrable y $\int_m^M L_K(y) = M_K - m_K = \omega_K$ donde ω_K denota la oscilación de f en I_K.

Introducimos ahora la función $N_n : [m,M] \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula $N_n(y) = \sum_{i=1}^{2^n} L_i(y)$, que es igual al número de intervalos I_K que contienen al menos una preimagen de y.

Tenemos $\int_m^M N_n(y)\,dy = \sum_{K=1}^{2^n} \omega_K$ $\therefore$ por el Teorema anterior obtenemos $\lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)\,dy = V_a^b(f)$.

Como $\{N_n(y)\}_n$ es una sucesión creciente de funciones, tenemos que $\lim_{n\to\infty} N_n = N^*$ es una función medible, y por el Teorema de la convergencia monótona: $\int_m^M N^*(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)\,dy = V_a^b(f)$.

Demostremos que $N^* = N$.

Es claro que $N_n(y) \leq N(y) \Rightarrow N^*(y) \leq N(y)$.

Sea, ahora, $q \in \mathbb{N}$ t.q. $q \leq N(y)$, entonces existen q raíces distintas de la ecuación $f(x) = y$, sean $\{x_1, \ldots, x_q\}$ estas raíces y sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{b-a}{2^n} < \min\{(x_{k+1} - x_k)\}_{k=1}^{q}$, entonces las q raíces pertenecen a distintos intervalos I_k (donde los I_k son los intervalos que definen la función N_n), $\therefore N_n(y) \geq q$ $\therefore N^*(y) \geq q$. Si $N(y) = \infty$ tomando q arbitrariamente grande tenemos $N^*(y) = +\infty$. Si $N(y)$ es finito tomamos $q = N(y)$ y entonces $N^*(y) \geq N(y)$ $\therefore N^*(y) = N(y)$. //

<u>2.18 Corolario</u>: Una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua pertenece a $BV[a,b]$ si y sólo si su función indicatriz de Banach es integrable.

<u>2.19 Corolario</u>. Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua de variación acotada, entonces el conjunto de valores $y \in \mathbb{R}$ t.q. $\#\{x \in [a,b] : f(x) = y\} = \infty$ tiene medida cero.

Observación: Intuitivamente es difícil creer, que exista una función $f: [a,b] \to [c,d]$ continua, tal que $\forall y \in [c,d]$ se tenga $\#\{x : f(x) = y\} = \infty$, sin embargo tales funciones existen.

Consideremos una función continua supravectiva $f: [a,b] \to [0,1]\times[0,1]$. (Peano fue el primero en dar una función con estas propiedades, en 1890). y sea $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la proyección $\cdot\ni\cdot$ $P_1(x,y) = x$, entonces la función $P_1 \circ f : [a,b] \to [0,1]$, es una función con la propiedad requerida, de hecho $\{x ; f(x) = y\}$ es no numerable $\forall y \in [0,1]$.

Funciones absolutamente continuas.

Ahora describiremos las funciones para las cuales se cumple la igualdad: $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a)$, estas funciones son llamadas funciones absolutamente continuas y fueron definidas y estudiadas por primera vez por Vitali en 1905.

<u>2.20 Definición</u> Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es <u>absolutamente continua</u> en $[a,b]$ si dado cualquier $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ $\ni$

$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$ para toda colección finita de intervalos disjuntos por parejas $(a_k,b_k)\subset[a,b]$. $(k=1,2,\dots,n)$ $\ni$ $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$.

Observación: Podemos dar dos definiciones equivalentes a la anterior:

1º). Podemos cambiar en nuestra definición original "colección finita" por "colección finita o numerable". De hecho, supongamos que dado cualquier $\epsilon>0$, hay un $\delta>0$ tal que $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon'<\epsilon$ para toda colección finita de intervalos disjuntos dos a dos $(a_k,b_k)\subset[a,b]$ $\ni$ $\sum_{k}(b_k-a_k)<\delta$. Consideremos ahora cualquier colección numerable de intervalos disjuntos dos a dos $(a_k,b_k)\subset[a,b]$ de longitud total menor que δ, entonces $\sum_{k=1}^{m}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon'<\epsilon$ $\forall m$. Tomando límite cuando $m\to\infty$, obtenemos $\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$.

La implicación inversa es inmediata.

2º). Podemos cambiar la desigualdad $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$ por la siguiente $|\sum_{k=1}^{n} f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$. Que nuestra definición original implica ésta, es inmediato; se sigue de propiedades del valor absoluto.

Inversamente, dado cualquier $\epsilon>0$, sea $\delta>0$ tal que:

$|\sum_{k=1}^{n} f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon/2$ para cualquier colección de intervalos disjuntos $(a_k,b_k)\subset[a,b]$ tal que $\sum_k (b_k-a_k)<\delta$. Consideremos aquellos $\bar{k}\in\{1,2,\dots,n\}$ t.q. $f(b_{\bar{k}})-f(a_{\bar{k}})\geq 0$ y aquellos k para los cuales $f(b_k)-f(a_k)<0$, estos últimos los denotamos por k'. Tenemos entonces $|\sum_{\bar{k}} f(b_{\bar{k}})-f(a_{\bar{k}})|<\epsilon/2$ y $|\sum_{k'} f(b_{k'})-f(a_{k'})|<\epsilon/2$, puesto que la suma de las longitudes de cada subcolección es menor que δ. Por consiguiente:

$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| = \sum_{\bar{k}} (f(b_{\bar{k}})-f(a_{\bar{k}})) + |\sum_{k'} f(b_{k'})-f(a_{k'})| < \epsilon$ //.

De la definición es inmediato que una función absolutamente continua es uniformemente continua, el converso no es cierto como lo muestra la función del ejemplo d) de la definición 2.3.:

$f:[0,1]\to[-1,1]$ t.q. $f(0)=0$ $f(\frac{1}{n})=\frac{(-1)^n}{n}$ y f es lineal en cada intervalo $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$. f es uniformemente continua.

Sea $\delta>0$, y sea n t.q. $\frac{1}{n}<\delta$. Consideremos los intervalos:

$(0,\frac{1}{n+k}),(\frac{1}{n+k},\frac{1}{n+k-1})\dots(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ $k\in\mathbb{N}$, la longitud total de estos intervalos es menor que δ. y sin embargo. $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| + \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{(-1)^{n+k-i}}{n+k-i} - \frac{(-1)^{n+k-i+1}}{n+k-i+1}\right| >$

$> \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n+k-i}$ y esta suma diverge cuando $k\to\infty$ $\therefore$ f no es absolutamente continua.

Ejemplos. a) Si $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ satisface una condición Lipschitz de orden 1 con constante K i.e. $|f(y)-f(x)| < K|y-x|$ $\forall\, x,y\in[a,b]$. entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$, ya que sólo se necesita tomar $\delta = \epsilon/K$. para cada $\epsilon>0$.

b) Posteriormente veremos que: cualquier integral indefinida:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $\quad f\in L_1[a,b]$. es absolutamente continua.

c). La función $f(x)=\sqrt{x}$. no satisface ninguna condición Lipschitz de orden 1., ya que dado K, tenemos $|f(1/n^2)-f(0)| = \frac{1}{n} > M\left|\frac{1}{n^2}-0\right|$. si $n>M$; sin embargo el ejemplo b) muestra que f es absolutamente continua en $[0,1]$

Denotemos al conjunto de las funciones absolutamente continuas definidas en $[a,b]$ por $AC[a,b]$.

Enunciemos ahora, sin demostración, el Teorema, análogo al Teorema 2.5, para funciones en $AC[a,b]$.

2.21 Teorema., Si $f,g\in AC[a,b]$, entonces;

1º) $f+g$, $f-g$, $f\cdot g\in AC[a,b]$ y $\lambda f\in AC[a,b]$ $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$.

2°). si g no toma el valor cero, entonces, $f/g \in AC[a,b]$.

En particular $AC[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2.22 Teorema. $AC[a,b]$ es un subespacio vectorial cerrado de $BV[a,b]$ con respecto a la norma que se definió sobre $BV[a,b]$ (i.e $\| \|_v$).

Dem: Sea $f \in AC[a,b]$. Sea $\delta > 0$ t. para cualquier colección finita de intervalos disjuntos (a_k, b_k) con $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ se tiene $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < 1$ subdividamos ahora el intervalo $[a,b]$ por medio de los puntos $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. de tal forma que $x_{k+1} - x_k < \delta$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Entonces para toda subdivisión $\{x_k = y_0, y_1, \ldots, y_r = x_{k+1}\}$ de $[x_k, x_{k+1}]$ se tiene $\sum_{j=1}^{r} |f(y_j) - f(y_{j-1})| < 1$ $\therefore$ $V_{x_k}^{x_{k+1}}(f) \leq 1$ $\therefore$ $V_a^b(f) \leq n$ $\therefore$ $f \in BV[a,b]$.

Sea ahora $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ con la norma $\| \|_v$

Demostremos que dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$, t. si $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ es una colección finita de intervalos disjuntos y $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta$ entonces $|\sum_k f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \epsilon$. Sea n_0 t. $\|f_{n_0} - f\|_v < \epsilon/2$, y sea $\delta_{n_0} > 0$ t. si $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ es una colección finita de intervalos disjuntos y $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta_{n_0}$ entonces $\sum_k |f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| < \epsilon/2$.

Sea $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_k$ una familia finita de intervalos disjuntos t. $(\alpha_k, \beta_k) \subset [a,b]$ y $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta_{n_0}$, entonces:

$$|\sum_k f(\beta_k) - f(\alpha_k)| = |\sum_k f(\beta_k) - f_{n_0}(\beta_k) + f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k) + f_{n_0}(\alpha_k) - f(\alpha_k)| \leq$$

$\leq \sum_k |f(\beta_k) - f_{n_0}(\beta_k) - f(\alpha_k) + f_{n_0}(\alpha_k)| + \sum_k |f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| \leq$

$\leq \sum_k |(f - f_{n_0})(\beta_k) - (f - f_{n_0})(\alpha_k)| + \epsilon/2 \leq \|f - f_{n_0}\|_V + \epsilon/2 < \epsilon \Rightarrow$ podemos

tomar $\delta = \delta_{n_0}$ $\therefore$ $f \in AC[a,b]$ //

Como consecuencias inmediatas del Teorema precedente obtenemos:

<u>2.23 Corolario</u>. Si $f \in AC[a,b]$ entonces f' existe y es finita c.d., además f' es integrable en $[a,b]$.

<u>2.24. Corolario</u> Si $f \in AC[a,b]$, entonces f puede representarse como diferencia de dos funciones crecientes absolutamente continuas

Dem: Como $f \in BV[a,b]$, se tiene $f = v - g$ donde $v = V_a^x(f)$, $g = v - f$ y v, g son crecientes por el Teorema 2.8

Probemos que v es absolutamente continua:

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ $\cdot\ni\cdot$ $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon' < \epsilon$ para toda familia finita de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ $\cdot\ni\cdot$ $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$

Consideremos la suma. $\sum_{k=1}^{n} |v(b_k) - v(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} v(b_k) - v(a_k) =$

$= \sup \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} |f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})|$ donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones : $a_k = x_{k,0}, x_{k,1}, \ldots, x_{k,m_k} = b_k$ de $[a_k, b_k]$ $\forall k$. La longitud total de todos los intervalos $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$ es menor que δ, por lo tanto $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} |f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})| < \epsilon'$ debido a la continuidad absoluta de f. Por consiguiente:

$\sum_{k=1}^{n} |v(b_k) - v(a_k)| = \sup \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} |f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})| \leq \epsilon' < \epsilon \quad \therefore \quad v \in AC[a,b]$

Como $g = v - f$, entonces $g \in AC[a,b]$ por el Teorema. 2.21. //

Veamos ahora que toda función $f \in AC[a,b]$ manda conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero, y después caracterizaremos al conjunto de las funciones absolutamente continuas en términos de esta propiedad.

Comencemos con el siguiente Teorema bien conocido, el cual enunciamos sin demostrar.

<u>2.25 Teorema.</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, si $B \subset [a,b]$ es cerrado, entonces $f(B)$ es cerrado.

<u>2.26 Teorema.</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $E \subset [a,b]$ es un conjunto F_σ, entonces $f(E)$ es también, un conjunto F_σ.

Dem: sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ donde los C_i son cerrados, $f(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_i)$ y como $f(C_i)$ es cerrado $\forall i$ se tiene que $f(E)$ es F_σ. //

<u>2.27 Definición</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, decimos que <u>f tiene la propiedad (N)</u>, si $\forall E \subset [a,b]$ $\ni$ $\lambda(E) = 0$, se tiene $\lambda(f(E)) = 0$

Esta definición fue introducida por N.N. Luzin en 1915.

<u>2.28. Teorema</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces $f(E)$ es un conjunto medible $\forall E \subset [a,b]$ medible, si y sólo si f posee la propiedad (N).

Dem: Supongamos que f posee la propiedad (N) y sea $E \subset [a,b]$ medible, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists F_n \subset E$ t.q. F_n es cerrado y $\lambda(F_n) > \lambda(E) - 1/n$.

Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces $A \subset E$ y $\lambda(A) = \lambda(E)$ $\therefore$ $\lambda(E-A) = 0$. Tenemos entonces, $E = A \cup (E-A)$ y $f(E) = f(A) \cup f(E-A)$; por el corolario 2.26 $f(A)$ es un conjunto F_σ y por lo tanto es medible, $f(E-A)$ es también medible, ya que f posee la propiedad (N) y $\lambda(E-A)=0$ $\therefore$ $f(A) \cup f(E-A) = f(E)$ es medible.

Para probar el recíproco, usamos el siguiente resultado clásico de H. Rademacher (1916) cuya prueba omitimos:

Dado un conjunto $e \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lambda^*(e) > 0$. $\exists \tau \subset e$ t.q. τ es no medible.

Supongamos que f no posee la propiedad (N), existe entonces $E \subset [a,b]$ t.q. $\lambda(E) = 0$ y $\lambda^*(f(E)) > 0$ (donde λ^* denota la medida exterior).

Se tiene entonces que $f(E)$ contiene un subconjunto B, no medible.

Sea $S = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$, claramente $\lambda(S) = 0$, pues $S \subset E$ $\therefore$ S es medible y $f(S) = B$ es no medible. $\therefore$ f envía al menos un conjunto medible en un no-medible. //.

<u>2.29 Teorema</u>. Si $f \in AC[a,b]$, entonces f posee la propiedad (N)

Dem: Sea $E \subset [a,b]$ t.q. $\lambda(E) = 0$, probaremos que $\lambda(f(E)) = 0$.

Supongamos, por comodidad que $E \subset (a,b)$.

Sea $\epsilon>0$, arbitrario, sea $\delta>0$ ∍ dada una familia finita o numerable $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_k$ de intervalos disjuntos con $\sum_k(\beta_k-\alpha_k)<\delta$, se tenga $\sum_k|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\epsilon$; en particular si $m_k, M_k \in [\alpha_k,\beta_k]$ son tales que $f(m_k)$ y $f(M_k)$ son el mínimo y el máximo de f en $[\alpha_k,\beta_k]$, se tiene $\sum_k[f(M_k)-f(m_k)]<\epsilon$.

Como $\lambda(E)=0$ $\exists$ un conjunto abierto G acotado ∍ $E\subset G$, $\lambda(G)<\delta$ y $G\subset(a,b)$, G es, entonces, unión, a lo más numerable de intervalos abiertos disjuntos.

Sea $G=\bigcup_k(a_k,b_k)$ entonces $\sum_k(b_k-a_k)<\delta$ y $f(E)\subset f(G)\subset\bigcup_k(f(a_k,b_k))\subset \bigcup_k f([a_k,b_k])$ $\therefore$ $\lambda^*(f(E))\leq\sum_k\lambda^*(f[a_k,b_k])$, pero $f([a_k,b_k])=[f(m_k),f(M_k)]$ $\therefore$ $\lambda^*(f(E))\leq\sum_k[f(M_k)-f(m_k)]<\epsilon$ $\therefore$ $\lambda(f(E))=0$ pues ϵ es arbitrario //

Nota: si a ó $b\in E$, habrá que añadir al final de la prueba, al conjunto imagen, un conjunto de medida cero: $\{f(a),f(b)\}$ ó $\{f(a)\}$ ó $\{f(b)\}$, lo cual no altera la medida de $f(E)$.

<u>2.30 Corolario:</u> Si $f\in AC[a,b]$ entonces $f(E)$ es medible $\forall E\subset[a,b]$ medible.

Hemos obtenido así, que toda función absolutamente continua es continua, posee la propiedad (N) y es de variación acotada; el siguiente Teorema, probado por S. Banach y M.A. Zarecki, nos dice que estas 3 propiedades caracterizan a las funciones absolutamente continuas.

2.31 Teorema: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, de variación acotada, y posee la propiedad (N), entonces $f\in AC[a,b]$.

Dem: Supongamos que $f\notin AC[a,b]$, entonces existe $\epsilon_0>0$ t.q. $\forall\delta>0$, existe una familia finita de intervalos abiertos disjuntos $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ tal que $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ y $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\geq\epsilon_0$ donde m_k y M_k denotan el mínimo y el máximo, respectivamente de la función f en $[a_k,b_k]$

Sea $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos t.q. $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i<\infty$, para cada δ_i, sea $\{(a_k^{(i)},b_k^{(i)})\}_{k=1}^{n_i}$ una colección de intervalos abiertos disjuntos t.q. $\sum_{k=1}^{n_i}(b_k^{(i)}-a_k^{(i)})<\delta_i$ y $\sum_{k=1}^{n_i}(M_k^{(i)}-m_k^{(i)})\geq\epsilon_0$,

Sea $E_i=\bigcup_{k=1}^{n_i}(a_k^{(i)},b_k^{(i)})$ y sea $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i$; como $\lambda(A)\leq\lambda(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i)\leq$ $\leq\sum_{n}^{\infty}\delta_i$ $\forall n$, se tiene $\lambda(A)=0$. $\therefore$ $\lambda(f(A))=0$ pues f posee la propiedad (N).

Sean m,M el mínimo y el máximo de f en $[a,b]$; definimos las funciones $L_k^{(i)}:[m,M]\to\mathbb{R}$ $\forall k=1,2,\dots n_i$ $\forall i\in\mathbb{N}$ como sigue:

$L_k^{(i)}(y)=1$ si existe al menos un $x\in(a_k^{(i)},b_k^{(i)})$ t.q. $f(x)=y$ y $L_k^{(i)}(y)=0$ en caso contrario. Es claro, por la continuidad de f, que $L_k^{(i)}(y)=1$ $\forall y\in(m_k^{(i)},M_k^{(i)})$ y $L_k^{(i)}(y)=0$ si $y\notin[m_k^{(i)},M_k^{(i)}]$, se tiene entonces:

$\int_m^M L_k^{(i)}(y)dy=M_k^{(i)}-m_k^{(i)}$ (*). Sea $N_i(y)=\sum_{k=1}^{n_i}L_k^{(i)}(y)$, es decir $N_i(y)$

es el número de intervalos $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ que contienen al menos un x $\cdot\ni\cdot$ $f(x)=y$. Sabemos que $N_i(y) \leq N(y)$ donde N es la función indicatriz de Banach. (Definición 2.16 y Teorema 2.17).

lo que probaremos ahora es que $\lim_{i\to\infty} N_i(y)=0$ c.d. sobre $[m,M]$.

Como $f\in BV[a,b]$ por hipótesis, sabemos que N es integrable, y como $N_i(y)\leq N(y)$ $\forall i$ se sigue, por el Teorema de la convergencia dominada. que $\lim_{i\to\infty}\int_m^M N_i(y)\,dy=0$, lo cual contradice la igualdad $(*)$.

Veamos entonces que $\lim_{i\to\infty} N_i(y)=0$ c.d.

Sea $B=\{y\in[m,M] \cdot\ni\cdot \lim_{i\to\infty} N_i(y)\neq 0\}$. y sea $G=\{y\in[m,M] : N(y)=\infty\}$.

Por el Teorema 2.17. Se tiene que $\lambda(G)=0$. Es suficiente probar que. $B-G\subset f(A)$.

Sea $y_0\in B-G$, existe una sucesión $\{i_r\}_r \cdot\ni\cdot N_{i_r}(y_0)\geq 1$, entonces para cada r, existe un punto $x_{i_r}\in E_{i_r} \cdot\ni\cdot f(x_{i_r})=y_0$.

Como $N(y_0)<\infty$, hay sólo un numero finito de puntos distintos x_{i_r}, por lo tanto, uno de ellos, llamémosle x_0, aparece un número infinito de veces en la sucesión $\{x_{i_r}\}$. El punto x_0 pertenece a un número infinito de E_i $\therefore$ $x_0\in A$ y $f(x_0)=y_0\in f(A)$ que es lo que se pretendía probar //

Como consecuencia de este último Teorema, probamos el siguiente resultado debido a Fichtenholz (1922). En 1925 una nueva prueba fue dada por Zarecki quien al mismo tiempo obtuvo el Teorema 2.31

<u>2.32 Teorema</u> (G. M. Fichtenholz). Sean $f \in AC[a,b]$, $F \in AC[c,d]$ y $f([a,b]) \subset [c,d]$. La función $F \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, si y sólo si es de variación acotada.

Dem: Si $F \circ f \in AC[a,b]$ entonces $F \circ f \in BV[a,b]$ por el Teorema 2.22. Recíprocamente, F y f poseen la propiedad (N) por el Teorema 2.29, entonces $F \circ f$ posee dicha propiedad y al ser continua y de variación acotada es absolutamente continua por el Teorema 2.31 //

Ahora estamos en condiciones de caracterizar a las funciones absolutamente continuas como aquellas que son integrales de sus propias derivadas, comencemos recordando la definición de integral indefinida:

<u>2.33 Definición</u>: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. La integral indefinida de Lebesgue de f está dada por la función $\phi(x) = C + \int_{[a,x]} f \, d\lambda$ (Aquí C es una constante arbitraria)

2.34 Teorema. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. La integral indefinida de f: $\phi(x) = C + \int_{[a,x]} f \, d\lambda$ es una función absolutamente continua.

Dem: Probamos un resultado más fuerte, a saber:

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, entonces, dada $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ $\ni$ $\forall E$ medible, $E\subset[a,b]$ com $\lambda(E)<\delta$ se tiene $\left|\int_E f\,d\lambda\right|<\epsilon$

Supongamos primero que $|f(x)|<M$ $\forall x\in[a,b]$.

Sea $\delta<\epsilon/M$ entonces, si $\lambda(E)<\delta \Rightarrow \left|\int_E f\,d\lambda\right|\leq\int_E|f|\,d\lambda\leq M\lambda(E)<\epsilon$

Supongamos ahora que f no es acotada; definamos una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ como sigue:

$f_n(x)=|f(x)|$ si $|f(x)|<n$ y $f_n(x)=n$ si $|f(x)|\geq n$. Cada f_n es acotada y $f_n\uparrow|f|$. Por el Teorema de la convergencia monótona $\exists N$ $\ni$

$\int_{[a,b]}f_N\,d\lambda>\int_{[a,b]}|f|\,d\lambda-\epsilon/2$ y $\int_E(|f|-f_N)\,d\lambda<\epsilon/2$.

Sea $\delta<\epsilon/2N$ y sea $E\subset[a,b]$ $\ni$ $\lambda(E)<\delta$, entonces: $\int_E|f|\,d\lambda=$

$=\int_E(|f|-f_N)\,d\lambda+\int_E f_N\,d\lambda<\int_{[a,b]}(|f|-f_N)\,d\lambda+N\lambda(E)\leq\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon$ $\therefore$

$\int_E f\,d\lambda\leq\int_E|f|\,d\lambda<\epsilon$ //

El Teorema 2.34 es consecuencia inmediata del resultado que acabamos de probar.

<u>El Teorema 2.34</u> y el hecho de que $BV[a,b]\supset AC[a,b]$ implican que la función $\phi(x)=c+\int_{[a,x]}f\,d\lambda$ tiene una derivada finita c.d. la cual es integrable; el siguiente Teorema nos dice que $\phi'(x)=f(x)$ c.d.

<u>2.35 Teorema.</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable, la derivada ϕ' de la integral $\phi(x)=\int_{[a,x]}f\,d\lambda$ es igual a la función f c.d. sobre $[a,b]$.

Dem. Sean $p,q \in \mathbb{Q}$ con $p<q$. Sea $E_{p,q} = \{x : \phi'(x)$ existe y $\phi'(x) > q > p > f(x)\}$

Es inmediato verificar que $E_{p,q}$ es medible. Probemos primero que $\lambda(E_{p,q}) = 0$

pues si $E = \{x \in [a,b] : \phi'(x)$ existe y $\phi'(x) > f(x)\}$, entonces $E = \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p<q}} E_{p,q}$

i.e. E es una unión numerable de conjuntos de medida cero $\therefore \lambda(E) = 0$.

i.e. $\phi'(x) \leq f(x)$ c.d..

Por simplicidad supondremos que $a,b \notin E_{p,q}$ (Esta suposición no altera nuestro resultado, ya que, $\lambda(\{a,b\}) = 0$)

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y sea $\delta > 0$ t.q. $|\int_A f \, d\lambda| < \epsilon$ $\forall A$ medible con $\lambda(A) < \delta$

Sea G abierto t.q. $G \subset [a,b]$, $E_{p,q} \subset G$ y $\lambda(G) < \lambda(E_{p,q}) + \delta$.

Sea $x \in E_{p,q}$, entonces $\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} > q$ para $h>0$ suficientemente pequeña. Considerando todos los $h>0$ que satisfacen esta última condición, obtenemos que el conjunto $E_{p,q}$ es cubierto por los intervalos $[x, x+h]$, en el sentido de Vitali; además como G es abierto, podemos suponer que todos los intervalos $[x, x+h]$ están contenidos en G.

Por el Teorema de Vitali, existe una sucesión disjunta: $[x_k, x_k+h_k]$ $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(E_{p,q} - \bigcup_{k=1}^{\infty} [x_k, x_k+h_k]) = 0$

De la desigualdad $\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} > q$ $\forall [x, x+h]$ en la cubierta considerada, se desprende que $\frac{1}{h_k} \int_{[x_k, x_k+h_k]} f \, d\lambda > q$, de esta desigualdad y definiendo $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} [x_k, x_k+h_k]$, obtenemos $\int_S f \, d\lambda > q \, \lambda(S)$. $\therefore$

$\int_S f\,d\lambda > q\,\lambda(E_{p,q})$ (*) . Ahora, como $S \subset G$, $S - E_{p,q} \subset G - E_{p,q}$ $\therefore$

$\lambda(S - E_{p,q}) < \delta$ $\therefore$ $\int_{S-E_{p,q}} f\,d\lambda < \epsilon$, por consiguiente:

$$\int_S f\,d\lambda = \int_{S-E_{p,q}} f\,d\lambda + \int_{S\cap E_{p,q}} f\,d\lambda = \int_{S-E_{p,q}} f\,d\lambda + \int_{E_{p,q}} f\,d\lambda - \int_{E_{p,q}-S} f\,d\lambda =$$

$$= \int_{S-E_{p,q}} f\,d\lambda + \int_{E_{p,q}} f\,d\lambda < \epsilon + \int_{E_{p,q}} f\,d\lambda \quad \text{pues } \lambda(E_{p,q} - S) = 0$$

Por otro lado sabemos que $f(t) < p$ $\forall\, t \in E_{p,q}$ $\therefore$ $\int_{E_{p,q}} f\,d\lambda \le p\,\lambda(E_{p,q})$

De las últimas desigualdades y (*) se desprende que:

$q\,\lambda(E_{p,q}) < p\,\lambda(E_{p,q}) + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario se sigue que $q\,\lambda(E_{p,q}) \le p\,\lambda(E_{p,q})$

$\therefore$ $\lambda(E_{p,q}) = 0$.

Para probar la desigualdad inversa, pongamos $g(x) = -f(x)$ y $\psi(x) = \int_{[a,x]} g\,d\lambda$

Es claro que ψ' existe c.d. pues $\psi(x) = -\phi(x)$. Aplicando la desigualdad ya obtenida a ψ se concluye $\psi'(x) \le g(x)$ c.d. o equivalentemente:

$\phi'(x) \ge f(x)$ c.d $\therefore$ $\phi' = f$ c.d. //

Así, hemos probado que al derivar la integral de una función, recuperamos a la función (c.d.). Veamos ahora que si $f \in AC[a,b]$, al integrar la derivada f', recuperamos a f, para esto probamos primero el siguiente lema:

<u>2.36. Lema</u>. Sea $f \in AC[a,b]$ t.q. $f'(x) = 0$ c.d. entonces f es constante

Dem: Sea $E = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\}$. Sea $\epsilon > 0$, si $x \in E$ entonces para

$h>0$ suficientemente pequeño $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\epsilon$. La colección de los intervalos cerrados. $[x,x+h]$. $\forall x\in E$, cubren al conjunto E en el sentido de Vitali.

Seleccionamos, por el Teorema de Vitali, un número finito de estos intervalos que sean disjuntos dos a dos : $[x_1,x_1+h_1],\ldots,[x_n,x_n+h_n]\subset(a,b)$ tales que: $\lambda(E-\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i])<\delta$ con $\delta>0$ preasignado.

Supongamos que $x_k<x_{k+1}$ $\forall k\in\{1,\ldots,n-1\}$.

Sean $[a,x_1)$, $(x_1+h_1,x_2),\ldots(x_{n-1}+h_{n-1},x_n)$, $(x_n+h_n,b]$ los intervalos cuya unión es. $[a,b]-\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i]$, la longitud total de estos intervalos es, claramente menor que δ.

Usemos ahora el hecho de que. $f\in AC[a,b]$. El número $\delta>0$. lo elegimos de tal forma que $|f(x_1)-f(a)|+\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)|+|f(b)-f(x_n+h_n)|<\epsilon$ (1)

Por otro lado, de la definición de los intervalos $[x_k,x_k+h_k]$ se sigue que:

$|f(x_k+h_k)-f(x_k)|<\epsilon h_k$ $\therefore\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k+h_k)-f(x_k)\}\right|<\epsilon(b-a)$. (2)

De las desigualdades (1) y (2) obtenemos $|f(b)-f(a)|<\epsilon(1+b-a)$. Como ϵ es arbitrario se sigue que $f(b)=f(a)$. Haciendo el mismo razonamiento para cada intervalo $[a,x]$ $a<x\le b$. se obtiene $f(x)=f(a)$ $\therefore f$ es constante //

<u>2.37 Corolario</u>. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. $\ni$. $f'(x)=g'(x)$ c.d. entonces $h=f-g\in AC[a,b]\Rightarrow h$ es constante.

2.38 Teorema: si $f \in AC[a,b]$ entonces f es una integral indefinida de su derivada.

Dem: Como $f \in AC[a,b]$, f' existe c.d. y es integrable.

Sea $\phi(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\lambda$, $\phi \in AC[a,b]$, por el Teorema 2.35 $\phi'(x) = f'(x)$ c.d., por el Corolario 2.37, $\phi - f$ es constante y como $\phi(a) - f(a) = 0$ se tiene $\phi = f$ c.d. //.

Resumiendo: los Teoremas 2.34 y 2.38 nos dicen que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si es una integral indefinida de su derivada.

Como corolario de este importante Teorema obtenemos el siguiente resultado sobre el cambio de variable en una integral.

2.39 Corolario. Sea $\phi: [a,b] \to [c,d]$ estrictamente creciente y ϕ' existe y es integrable. Sea $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ con $F \in AC[c,d]$, supongamos que $F \circ \phi \in AC[a,b]$, entonces $\int_{[a,x]} (F \circ \phi)' d\lambda = \int_{[\phi(a), \phi(x)]} F' d\lambda$

Dem. Por el Teorema 2.38 $F \circ \phi(x) = F \circ \phi(a) + \int_{[a,x]} (F \circ \phi)' d\lambda$ ya que $F \circ \phi \in AC[a,b]$, aplicando ahora el mismo teorema a F obtenemos:

$F(\phi(x)) = F(\phi(a)) + \int_{[\phi(a), \phi(x)]} F' d\lambda$, como $F \circ \phi(x) = F(\phi(x))$ se sigue que:

$\int_{[a,x]} (F \circ \phi)' d\lambda = \int_{[a,x]} (F' \circ \phi) \phi' d\lambda = \int_{[\phi(a), \phi(x)]} F' d\lambda$ //

Nota: si la función $\phi \in AC[a,b]$, entonces se verifica que:

$F\circ\phi\in AC[a,b]$ (este hecho es fácil de probar).

Como una generalización interesante del Teorema 2.38 probamos el siguiente resultado debido a F. Riesz.

<u>2.40 Teorema:</u> Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, F puede escribirse en la forma $F(x)=c+\int_{[a,x]} f\,d\lambda$ con $f\in L_p[a,b]$ $(p>1)$, si y sólo si $\exists M>0$ t.q. $\forall$ partición $\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ de $[a,b]$ se tiene $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}}<M$ (1)

Dem. Sea q el exponente conjugado de p $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, y supongamos que $F(x)=c+\int_{[a,x]} f\,d\lambda$ con $f\in L_p$, entonces por la desigualdad de Hölder:

$$|F(x_{k+1})-F(x_k)|=\left|\int_{[x_k,x_{k+1}]} f\,d\lambda\right|\le\sqrt[q]{x_{k+1}-x_k}\cdot\sqrt[p]{\int_{[x_k,x_{k+1}]}|f|^p\,d\lambda}\implies$$

$\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p/q}}\le\int_{[x_k,x_{k+1}]}|f|^p\,d\lambda$. Como $\frac{p}{q}=p-1$ se obtiene:

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}}\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}|f|^p\,d\lambda=\int_{[a,b]}|f|^p\,d\lambda$, así que podemos tomar $M=\int_{[a,b]}|f|^p\,d\lambda$.

Probemos ahora el recíproco. Supongamos que $\exists M>0$ t.

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}}\le M$. para toda partición de $[a,b]$.

Sea $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ una colección finita de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, se tiene que: $\sum_{k=1}^{n}\frac{|F(b_k)-F(a_k)|^p}{(b_k-a_k)^{p-1}}\le M$.

Por la desigualdad de Hölder para sumas obtenemos: $\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{F(b_k)-F(a_k)}{(b_k-a_k)^{\frac{p-1}{p}}}(b_k-a_k)^{1/q}\le\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}\frac{|F(b_k)-F(a_k)|^p}{(b_k-a_k)^{p-1}}}\cdot\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)}\implies$$

$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|\le\sqrt[p]{M}\cdot\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)}$ $\therefore$ $F\in AC[a,b]$ y F se puede expresar como una integral: $F(x) = (+)\int_{[a,x]} f\,d\lambda$, probemos que $f \in L_p$

Para cada n dividamos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, por medio de los puntos $x_k^{(n)} = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k=0,1,\dots,n)$. y definamos las funciones escalonadas $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$f_n(t) = \dfrac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}}$ para $t \in (x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$ y $f_n(x_k^{(n)}) = 0$.

$\forall\, k \in \{0,1,\dots,n\}$.

Ahora bien, el conjunto siguiente $S = \{x : F'(x) \neq f(x)\} \cup \{x_k^{(n)}\}_{k,n}$ es un conjunto de medida cero.

Sea $x \in [a,b] - S$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo $(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$ $\ni$. $x \in (x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$; como la longitud de estos intervalos tiende a cero se sigue que: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x)}{x_{k+1}^{(n)} - x} = F'(x)$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F(x) - F(x_k^{(n)})}{x - x_k^{(n)}} = F'(x)$

Por otro lado, es fácil probar que siempre se tiene una de las relaciones. $\dfrac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x)}{x_{k+1}^{(n)} - x} \leq f_n(x) \leq \dfrac{F(x) - F(x_k^{(n)})}{x - x_k^{(n)}}$ ó

$\dfrac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x)}{x_{k+1}^{(n)} - x} \geq f_n(x) \geq \dfrac{F(x) - F(x_k^{(n)})}{x - x_k^{(n)}}$ $\therefore \lim_{n\to\infty} f_n(x) = F'(x) = f(x)$

$\forall\, x \in [a,b] - S$. Aplicando ahora el lema de Fatou:

$\int_{[a,b]} |f|^p d\lambda \leq \liminf_n \left\{ \int_{[a,b]} |f_n|^p d\lambda \right\} \leq \sup_n \left\{ \int_{[a,b]} |f_n|^p d\lambda \right\}$ pero:

$\int_{[a,b]} |f|^p d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} |f_n|^p d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{|F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})|^p}{|x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}|^{p-1}} \leq M$

$\therefore \int_{[a,b]} |f|^p d\lambda \leq M < \infty$ y $f \in L_p[a,b]$ //

Observemos que si $p=1$ la condición (1) del Teorema significa que F tiene variación finita (i.e. $F\in BV[a,b]$). Por consiguiente, para $p=1$ la condición (1) es necesaria, pero no suficiente para expresar a F como $F(x)=\int_{[a,x]} f\,d\lambda$ con $f\in L_1[a,b]$.

De la demostración del Teorema 2.40 se desprende el siguiente resultado.

<u>2.41 Corolario.</u> Si $F(x)=\int_{[a,x]} f\,d\lambda$ con $f\in L_p[a,b]$ entonces f satisface una condición Lipschitz de orden $1/q$ y con constante $M=\int_{[a,b]} |f|^p\,d\lambda$.

En seguida, calculamos la variación total de una integral indefinida.

<u>2.42 Teorema</u>: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Si $F(x)=\int_{[a,x]} f\,d\lambda$ entonces

$V_a^b(F)=\int_{[a,b]}|f|\,d\lambda$

Dem: Sea $\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ una partición arbitraria de $[a,b]$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{[x_k,x_{k+1}]} f\,d\lambda\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}|f|\,d\lambda=\int_{[a,b]}|f|\,d\lambda \quad \therefore \quad V_a^b(F)\le\int_{[a,b]}|f|\,d\lambda$$

obtengamos la otra desigualdad.

Sea $A=(a,b)$ y sean $P=A\cap\{x: f(x)\geq 0\}$ y $N=A\cap\{x: f(x)<0\}$ entonces:

$$\int_{[a,b]}|f|\,d\lambda=\int_P f\,d\lambda-\int_N f\,d\lambda.$$

Sea $\epsilon>0$ arbitrario. Ya que la integral es absolutamente continua, existe un $\delta>0$ ∋ ∀ conjunto $E\subset[a,b]$ medible con $\lambda(E)<\delta$, se tiene:

$$\int_E |f|\,d\lambda<\epsilon.$$

Sean F_P y F_N conjuntos cerrados $\ni$ $F_P \subset P$ y $F_N \subset N$ y $\lambda(P-F_P)<\delta$,

$\lambda(N-F_N)<\delta$. Se Tiene claramente $\int_{[a,b]}|f|d\lambda < \int_{F_P} f\,d\lambda - \int_{F_N} f\,d\lambda + 2\epsilon$ (*)

Es claro que $F_P \cap F_N = \emptyset$ por lo tanto $\exists$ O_P, O_N abiertos ajenos $\ni$ $F_P \subset O_P$

$F_N \subset O_N$ y $O_P, O_N \subset (a,b)$. Además existen conjuntos abiertos acotados O_P', O_N'

$\ni$ $F_P \subset O_P'$ $F_N \subset O_N'$ y $\lambda(O_P'-F_P)<\delta$ $\lambda(O_N'-F_N)<\delta$. Sean $G_P = O_P \cap O_P'$

$G_N = O_N \cap O_N'$. G_P y G_N son conjuntos abiertos disjuntos contenidos en (a,b)

$\ni$ $F_P \subset G_P$, $F_N \subset G_N$ y $\lambda(G_P - F_P)<\delta$, $\lambda(G_N-F_N)<\delta$.

Usando estas propiedades de G_P y G_N y la desigualdad (*) obtenemos:

$$\int_{[a,b]}|f|d\lambda < \int_{G_P} f\,d\lambda - \int_{G_N} f\,d\lambda + 4\epsilon \quad (1)$$

G_P, por ser abierto es unión, a lo más, numerable de intervalos abiertos,

Tomando un número finito de estos intervalos obtenemos un conjunto

$B_P = \bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k)$ $\ni$ $\lambda(G_P - B_P)<\delta$ $\therefore$ $\int_{G_P} f\,d\lambda - \int_{B_P} f\,d\lambda < \epsilon$ y, como

$\int_{B_P} f\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n}\int_{[\alpha_k,\beta_k]} f\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n}(F(\beta_k)-F(\alpha_k))$ concluimos que:

$$\int_{G_P} f\,d\lambda < \sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)]+\epsilon \quad (2)$$

De manera análoga, Tomando un número finito de los intervalos abiertos,

cuya unión es G_N. Sea $\{(\alpha_k', \beta_k')\}_{k=1}^{m}$ esta colección $\ni$

$$\int_{G_N} f\,d\lambda > \sum_{k=1}^{m}[F(\beta_k')-F(\alpha_k')]-\epsilon \quad (3)$$

Combinando (1), (2) y (3) obtenemos:

$$\int_{[a,b]}|f|d\lambda < \sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)] - \sum_{k=1}^{m}[F(\beta_k')-F(\alpha_k')]+6\epsilon \leq$$

$\leq \sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)]+\sum_{k=1}^{m}[F(\beta_k')-F(\alpha_k')]+6\epsilon$

Como todos los intervalos (α_k,β_k) y (α_k',β_k') son disjuntos por parejas, se sigue que: $\sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)]+\sum_{k=1}^{m}[F(\beta_k')-F(\alpha_k')]\leq V_a^b(F)$ $\therefore$

$\int_{[a,b]}|f|d\lambda < V_a^b(F)+6\epsilon$, como la ϵ es arbitraria concluimos que:

$$\int_{[a,b]}|f|d\lambda \leq V_a^b(F) \quad //.$$

Probemos ahora un teorema debido a H. Lebesgue, sobre la descomposición de una función de variación acotada en tres sumandos, uno de los cuales es una función absolutamente continua; para ésto introducimos la siguiente definición:

<u>2.43 Definición</u>: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y en $BV[a,b]$, decimos que <u>f es singular</u> si $f'(x)=0$ c.d.

Claramente el conjunto de funciones singulares sobre el intervalo $[a,b]$ forma un subespacio vectorial de $BV[a,b]$, al cual denotamos por $S[a,b]$, posteriormente veremos que este subespacio resulta ser cerrado en $(BV[a,b],\|\ \|_v)$.

Un ejemplo de una función singular está dado por la función construida en 1.18 sobre el intervalo $[0,1]$. Un cambio lineal de variable proporciona un ejemplo en $[a,b]$

2.41 Teorema de descomposición de Lebesgue: (1904)

Sea $f \in BV[a,b]$, entonces f puede descomponerse como una suma:

$f = \phi + \psi + s$, donde $\phi \in AC[a,b]$, $\psi \in S[a,b]$ y s es la función de saltos de f,

además, la representación es única si exigimos que $\phi(a) = f(a)$.

Dem: Según el Teorema 2.10 $f = \phi_1 + s$ donde s es la función de saltos de f y $\phi_1 \in BV[a,b]$ es continua.

Basta descomponer a ϕ_1 como una suma $\phi_1 = \phi + \psi$ con $\phi \in AC[a,b]$ y

$\psi \in S[a,b]$.

Como $\phi_1 \in BV[a,b]$ ϕ_1' existe c.d. y es integrable.

Definamos $\phi(x) = \phi_1(a) + \int_{[a,x]} \phi_1' \, d\lambda$ y $\psi(x) = \phi_1(x) - \phi(x)$.

Se tiene entonces que $f(x) = \phi(x) + \psi(x) + s(x)$ donde $\phi \in AC[a,b]$, $\phi(a) = f(a)$

pues $s(a) = 0$ por la definición de s, finalmente $\psi \in S[a,b]$ pues:

$\psi'(x) = \phi_1'(x) - \phi'(x) = 0$ c.d. por el Teorema 2.35.

Probemos ahora la unicidad: Por definición la función de saltos es única,

por lo tanto sólo hay que ver que la descomposición de ϕ_1 es única.

Supongamos que $\phi_1 = \phi + \psi = \phi_2 + \psi_2$ con $\phi_1, \phi_2 \in AC[a,b]$, $\psi_1, \psi_2 \in S[a,b]$.

y $\phi(a) = \phi_2(a) = f(a)$ entonces:

$-(\phi - \phi_2) = \psi - \psi_2 \in AC[a,b] \cap S[a,b] \Rightarrow (\phi - \phi_2)' = 0$ c.d. $\Rightarrow \phi - \phi_2$ es constante

por el lema 2.36, y como $\phi(a) - \phi_2(a) = 0$ se concluye que:

$\phi \equiv \phi_2$ y $\psi \equiv \psi_2$. $\therefore$ la descomposición es única //.

Observemos que si $f \in BV[a,b]$ y $f = \phi + \psi + s$ es su descomposición de Lebesgue, entonces, derivando ambos miembros se obtiene:

$f' = \phi'$ c.d., como $\phi \in AC[a,b]$, al integrar esta derivada, recuperamos sólo la parte absolutamente continua de f, mientras que las otras dos componentes se pierden.

Observemos además, que si f es creciente, entonces ϕ, ψ, s son crecientes, como se prueba a continuación:

<u>2.41 Teorema</u>: Sea $f \in BV[a,b]$, si f es creciente, entonces las funciones que aparecen en la descomposición de Lebesgue de f son crecientes.

Dem: Sea $f = \phi + \psi + s$ con $\phi \in AC[a,b]$, $\psi \in S[a,b]$ y s la función de saltos de f.

Por definición de la función de saltos, es inmediato que s es creciente.

Por el Teorema 1.6. $F = f - s = \phi + \psi$ es una función continua creciente.

y además $F \in BV[a,b]$ según el teorema 2.10

Basta ver que ϕ y ψ son crecientes, sabemos $F' = f'$ c.d.

Como F es creciente, tenemos que $F'(x) \geq 0$. $\forall x$ donde $F'(x)$ existe, por lo tanto la función $\phi(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\lambda$ es creciente;

Ahora bien, sabemos por el Teorema 1.16. que $\int_{[x,y]} F' d\lambda \leq F(y) - F(x)$

por lo tanto $\phi(y)-\phi(x) \leq F(y)-F(x) \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y)$ $\therefore$ ψ es creciente //

2.46 Corolario: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua creciente, entonces $f\in AC[a,b]$ si y sólo si $\int_{[a,b]} f' d\lambda = f(b)-f(a)$.

Dem: La necesidad de la condición: $\int_{[a,b]} f' d\lambda = f(b)-f(a)$, es obvia

conversamente, supongamos que $f \notin AC[a,b]$ y sean $\phi \in AC[a,b]$, $\psi \in S[a,b]$ (ψ no constante). $\ni$ $f=\phi+\psi$; Tenemos $f(b)-f(a) = \phi(b)-\phi(a)+\psi(b)-\psi(a)$, es decir, $f(b)-f(a) = \int_{[a,b]} f' d\lambda + \psi(b)-\psi(a)$. Pero ψ es creciente y no constante $\therefore$ $\psi(b)>\psi(a)$. $\Rightarrow f(b)-f(a) > \int_{[a,b]} f' d\lambda$? //

Bibliografía.

2.1 Natayson: Theory of functions of a real variable Volumen I. Frederick Ungar Publishing CO. New York, 1964.

2.2. Kolmogorov, Fomin: Introductory real analysis. Dover Publications 1970.

2.3 H.L. Royden: Real analysis. Collier Macmillan. 1968

2.4. E. Hewitt, K. Stromberg: Real and abstract analysis. Springer Verlag 1965

2.5 S. Saks: Theory of the integral. Hafner Publishing Company 1937.

2.6. R. Bartle: the elements of integration. Wiley, New York 1966.

2.7 E.J. Townsend: Functions of real variables. Henry Holt and Company.

2.8. F.N. Huggins. some interesting properties of the variation function. American Mathematical Monthly. Aug-Sept 1976

Capítulo 3

En este capítulo, motivaremos una generalización a espacios de medida abstractos, del concepto de derivada.

Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y luego consideremos el número real: $\frac{\lambda(E \cap [x_0-h, x_0+h])}{\lambda([x_0-h, x_0+h])}$, intuitivamente, este número representa la proporción entre "la masa" del conjunto E contenida en $[x_0-h, x_0+h]$, y la medida de este último intervalo.

<u>3.1 Definición</u>: Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$, si:

$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(E \cap [x_0-h, x_0+h])}{\lambda([x_0-h, x_0+h])}$ existe, entonces, este límite es llamado <u>la densidad de E en x_0</u> y es denotado por $D_{x_0}E$.

Si $D_{x_0}E = 1$, entonces x_0 es un <u>punto de densidad de E</u>, y, si $D_{x_0}E = 0$, x_0 se llama <u>punto de rarefacción de E</u>.

Observemos que no exigimos que $x_0 \in E$. Es claro de la definición que E tiene densidad cero en x, $\forall x$ donde $\mathbb{R} - E$ tiene densidad uno.

Denotemos por $\Phi(E)$ el conjunto de puntos donde E tiene densidad uno, para $E \subset \mathbb{R}$ medible.

<u>3.2 Teorema</u>: Para cualquier $E \subset \mathbb{R}$ medible, la función Φ tiene las siguientes propiedades:

1°) $\lambda(\Phi(E) \Delta E) = 0$ 2°) $\lambda(E \Delta E') = 0 \Rightarrow \Phi(E) = \Phi(E')$

3°) $\tilde{\phi}(\phi) = \phi$ y $\tilde{\phi}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

4°) $\tilde{\phi}(E_1 \cap E_2) = \tilde{\phi}(E_1) \cap \tilde{\phi}(E_2)$

5°) Si $E_1 \subset E_2$ entonces $\tilde{\phi}(E_1) \subset \tilde{\phi}(E_2)$

Aquí Δ, denota la diferencia simétrica $(A \Delta B) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A-B) \cup (B-A)$

Dem: 1°) Para demostrar el primer inciso, es suficiente probar que.

$E - \tilde{\phi}(E)$. Tiene medida cero, pues $\tilde{\phi}(E) - E \subset E^c - \tilde{\phi}(E^c)$.

Podemos suponer, además, que E es acotado, pues en caso contrario $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

con cada E_i medible y acotado, y la prueba es análoga.

Definamos $A_\epsilon = \{x \in E : \liminf_{h \to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1-\epsilon\}$, entonces es claro

que $E - \tilde{\phi}(E) \subset \bigcup_{1>\epsilon>0} A_\epsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$. Probemos que $\lambda(A_\epsilon) = 0 \ \forall \epsilon \ (0<\epsilon<1)$

Supongamos que $\lambda(A_\epsilon) > 0$ para algún ϵ, sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto acotad. t. $A_\epsilon \subset G$

y $\lambda(G) < \frac{\lambda(A_\epsilon)}{1-\epsilon}$. Sea $\mathcal{V} = \{I : I$ es intervalo cerrado, $I \subset G$ y $\lambda(E \cap I) \leq (1-\epsilon)\lambda(I)\}$

Es claro que $\mathcal{V}$ es una cubierta de Vitali de A_ϵ, por consiguient. existe $\{I_n\}$

$\subset \mathcal{V}$, una sucesión de intervalos disjuntos dos a dos. t. $\lambda(A_\epsilon - \bigcup_n I_n) = 0$,

entonces: $\lambda(A_\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_\epsilon \cap I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E \cap I_n) \leq (1-\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq (1-\epsilon)\lambda(A_\epsilon) <$

$< \lambda(A_\epsilon)$ ¥ $\therefore \lambda(A_\epsilon) = 0 \therefore \lambda(E - \tilde{\phi}(E)) = 0$.

Las afirmaciones. 2°) y 3°) son consecuencias inmediatas de la definición de $\tilde{\phi}$ y 5°) es consecuencia de 4°), probemos pues 4°)

Notemos que para cualquier intervalo I, tenemos: $I - (E_1 \cap E_2) = (I - E_1) \cup (I - E_2)$., de esto se desprende que:

$\lambda(I) - \lambda(I \cap E_1 \cap E_2) \leq \lambda(I) - \lambda(I \cap E_1) + \lambda(I) - \lambda(I \cap E_2)$.

Por consiguiente $\dfrac{\lambda(I \cap E_1)}{\lambda(I)} + \dfrac{\lambda(I \cap E_2)}{\lambda(I)} - 1 \leq \dfrac{\lambda(I \cap E_1 \cap E_2)}{\lambda(I)}$

Tomando $I = [x-h, x+h]$ y haciendo $h \to 0$. se sigue que:

$\Phi(E_1) \cap \Phi(E_2) \subset \Phi(E_1 \cap E_2)$. La inclusión opuesta es obvia //

Recordemos que, dada una medida μ definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X y dado un $E \in \mathcal{A}$, la función:

$\mu' : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. $\ni$. $\mu'(A) = \mu(A \cap E)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ es una medida.

Según esto, en la demostración del primer inciso del teorema 3.2 se ha probado lo siguiente:

Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible y $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. es su función característica, entonces la integral $\int_A \chi_E \, d\lambda = \lambda(A \cap E) = \lambda'(A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible, define una medida, y la función χ_E, que aparece como integrando resulta ser el límite c.d. $\left(\lim_{h \to 0} \dfrac{\lambda'([x-h, x+h])}{\lambda([x-h, x+h])}\right)$ del cociente de las medidas λ' y λ, tomado sobre una colección de conjuntos medibles. (los intervalos $[x-h, x+h]$) que contienen al punto x. Es en este sentido, como intentaremos generalizar el concepto de derivada a espacios de medida.

Generalicemos el ejemplo anterior:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. integrable y $f \geq 0$., entonces la función ϕ, definida por. $\phi(E) = \int_E f \, d\lambda$ $\forall E \subset [a,b]$ medible es una medida.

Veamos, que, nuevamente la función f se puede recuperar como un límite de medidas:

Sea $E = \{x \in [a,b] : \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi([x-h, x+h])}{\lambda([x-h, x+h])} = f(x)\}$.

Probemos que $\lambda([a,b] - E) = 0$.

Definamos. $A_\epsilon = \{x \in [a,b] : \underline{\lim\limits_{h \to 0}} \dfrac{\phi([x-h, x+h])}{\lambda([x-h, x+h])} < f(x) - \epsilon\}$ y

$B_\epsilon = \{x \in [a,b] : \overline{\lim\limits_{h \to 0}} \dfrac{\phi([x-h, x+h])}{\lambda([x-h, x+h])} > f(x) + \epsilon$. $\quad \forall \epsilon > 0$

Es claro que; $\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \Rightarrow A_{\epsilon_2} \subset A_{\epsilon_1}$ y $B_{\epsilon_2} \subset B_{\epsilon_1}$ y $[a,b] - E = (\bigcup\limits_{\epsilon > 0} A_\epsilon) \cup (\bigcup\limits_{\epsilon > 0} B_\epsilon)$.

Basta probar que. $\lambda(A_\epsilon) = \lambda(B_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$.

1º) Supongamos que $\lambda(A_{\epsilon_0}) > 0$ para agún $\epsilon_0 > 0$ fijo y sea $A = A_{\epsilon_0}$

Sea $A_{p,q} = A \cap \{x \in [a,b] : p < f(x) < q\}$ para $p, q \in \mathbb{Q}^+$ $p < q$.

Claramente $A = \bigcup\limits_{|p-q| < \epsilon_0} A_{p,q}$ y por lo tanto $\exists\, p, q$ t.q. $\lambda(A_{p,q}) > 0$.

Sea G abierto t.q. $A_{p,q} \subset G$ y $\lambda(G) < \dfrac{p}{q - \epsilon_0} \lambda(A_{p,q})$ con $p > q - \epsilon_0 > 0$.

(Debido a la densidad de $\mathbb{Q}$ y al hecho de que, $\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \Rightarrow A_{\epsilon_2} \subset A_{\epsilon_1}$, no tenemos dificultad en elegir, p, q, ϵ_0 t.q. $p > q - \epsilon_0 > 0$)

Sea $\mathcal{V} = \{[x-h, x+h] \subset G : \phi[x-h, x+h] < (f(x) - \epsilon_0)\lambda([x-h, x+h]), x \in A_{p,q}\}$

Es claro que $\mathcal{V}$ cubre a $A_{p,q}$ en el sentido de Vitali $\Rightarrow \exists \{[x_i - h_i, x_i + h_i]\}_i$ una colección numerable de elementos de $\mathcal{V}$ t.q.

$\lambda(A_{p,q} - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [x_i - h_i, x_i + h_i]) = 0$. y por el Teorema 2.34, se tiene:

$\phi(A_{p,q} - \bigcup_{i=1}^{\infty} [x_i-h_i, x_i+h_i]) = 0$ $\therefore$

$$p\lambda(A_{p,q}) \le \phi(A_{p,q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_{p,q} \cap [x_i-h_i, x_i+h_i]) \le \sum_{i=1}^{\infty} \phi([x_i-h_i, x_i+h_i]) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} (f(x_i) - \epsilon)\lambda([x_i-h_i, x_i+h_i]) \le (q-\epsilon)\sum \lambda[x_i-h_i, x_i+h_i] \le (q-\epsilon)\lambda(G) <$$

$$< p\lambda(A_{p,q}) \quad ! \qquad \therefore \lambda(A_{p,q}) = 0 \quad \therefore \lambda(A_\epsilon) = 0 \ \forall \epsilon.$$

2°). Supongamos. $\lambda(B_{\epsilon_0}) > 0$ para algún $\epsilon_0 > 0$. . Sea $B = B_{\epsilon_0}$ y

$B = \bigcup_{\substack{p<q \in Q^+ \\ |q-p|<\epsilon_0}} B_{p,q}$ donde. $B_{p,q} = B \cap \{x \in [a,b] : p \le f(x) \le q\}$.

$\exists$ $p,q \in Q$ $\ni$ $\lambda(B_{p,q}) > 0$. Por el Teorema 2.34. es posible encontrar G abierto $\ni$ $B_{p,q} \subset G$ y $\phi(G) < \frac{p+\epsilon_0}{q}\phi(B_{p,q})$ con $0<q<p+\epsilon_0$

Sea $\mathcal{V} = \{[x-h, x+h] \subset G : \phi([x-h,x+h]) > (f(x)+\epsilon_0)\lambda([x-h,x+h]), x \in B_{p,q}\}$.

Es claro que $\mathcal{V}$ cubre a $B_{p,q}$ en el sentido de Vitali.

Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{V}$ $\ni$ $\lambda(B_{p,q} - \bigcup_n I_n) = 0$ $\therefore$

$$\phi(G) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \phi(I_n) \ge (p+\epsilon_0)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \ge (p+\epsilon_0)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_{p,q} \cap I_n) =$$

$$= (p+\epsilon_0)\lambda(B_{p,q}) = \left(\frac{p+\epsilon_0}{q}\right) q\,\lambda(B_{p,q}) \ge \left(\frac{p+\epsilon_0}{q}\right)\phi(B_{p,q}) \ !$$

$$\therefore \lambda(B_{p,q}) = 0 \Rightarrow \lambda(B_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon \qquad \therefore \lambda([a,b] - E) = 0 \ //.$$

Sea $F(x) = \phi([a,x]) = \int_{[a,x]} f \, d\lambda$. Sea $E_1 = \{x : F'(x) = f(x)\}$. Es fácil comprobar que: $E_1 \subseteq E = \{x \in [a,b] : \lim_{h\to 0} \frac{\phi([x-h,x+h])}{\lambda([x-h,x+h])} = f(x)\}$.

Mencionemos una clase de puntos muy importante en análisis, los cuales pertenecen a E_1.

<u>3.3 Definición:</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable, si $x\in[a,b)$ y

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]}|f(t)-f(x)|\,d\lambda(t)=0$, entonces <u>$x$ es un punto de Lebesgue</u> de la función f.

<u>3.4 Teorema:</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y x un punto de lebesgue de f la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ t.q. $F(x)=\int_{[a,x]}f\,d\lambda$ es diferenciable en x, y $F'(x)=f(x)$.

Dem: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]}[f(t)-f(x)]\,d\lambda(t)$ ∴

$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leq\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]}|f(t)-f(x)|\,d\lambda(t)\Rightarrow F'(x)=f(x)$ //

observemos que, la proposición inversa, en general no es cierta, sin embargo el siguiente teorema, nos dice que, salvo un conjunto de medida cero, se tiene el converso de 3.4.

<u>3.5 Teorema:</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable, entonces, el conjunto de puntos de lebesgue de f es un conjunto de medida total.

Dem: Sea $r\in\mathbb{Q}$, como f es integrable, $|f-r|$ es integrable en $[a,b]$ y

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]}|f(t)-r|\,dt=|f(x)-r|$ c.d. (1)

Sea $E(r)=\{x\in[a,b]:(1)$ no se cumple$\}$. Es claro que $\lambda(E(r))=0$

Sea $E=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}E(r)\cup\{x:|f(x)|=\infty\}$, entonces $\lambda(E)=0$. y es suficiente probar que si $x\in[a,b]-E$, entonces x es punto de Lebesgue de f.

Sea $x_0\in[a,b]-E$ y $\epsilon>0$ arbitrario. Sea $r_n\in\mathbb{Q}$ t.q. $|f(x_0)-r_n|<\epsilon/3$ (2).

∴ $\big||f(t)-r_n|-|f(t)-f(x_0)|\big|<\epsilon/3$, por consiguiente:

$$\left| \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} |f(t)-r_n|\,dt - \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} |f(t)-f(x_0)| \right| \leq \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} \big| |f(t)-r_n| - |f(t)-f(x_0)| \big| < \epsilon/3 \quad (3)$$

Como $x_0 \notin E$, tenemos que $\left| \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} |f(t)-r_n|\,dt - |f(x_0)-r_n| \right| < \epsilon/3$ siempre que $|h| < \delta(\epsilon)$. - De esta última desigualdad y de (2) tenemos:

$\frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} |f(t)-r_n|\,dt < \frac{2}{3}\epsilon$. Por lo tanto, usando (3), concluimos que:

$\frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} |f(t)-f(x_0)|\,dt < \epsilon$ $\therefore$ x_0 es punto de Lebesgue de f. //

3.6 Teorema: Todo punto de continuidad de una función f integrable es un punto de Lebesgue de f.

Dem: Sea x un punto de continuidad de f. Para toda $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ t.q. $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ $\forall t$ con $|t-x| < \delta$. Por consiguiente para $|h| < \delta$, Tenemos $\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} |f(t)-f(x)| < \epsilon$ $\therefore$ x es un punto de Lebesgue de f //

En los ejemplos anteriores, hemos definido medidas por medio de integrales respecto de la medida λ, y hemos visto que el integrando se obtiene como el límite del cociente de las dos medidas en cuestión.

Esto da lugar al siguiente problema: dado un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y una medida ϕ definida por medio de una integral: $\phi(E) = \int_E f\,d\mu$, ¿es posible, encontrar la función f, la cual se llama la función de densidad de ϕ, conociendo sólo ϕ y μ?

En casos simples el procedimiento para encontrar f nos lo da el Teorema fundamental del cálculo. Por ejemplo: Sea $X = [a,b]$, $\mathcal{S}$, la colección de todos los conjuntos Lebesgue-medibles de $[a,b]$, y $\lambda = \mu$ la medida de Lebesgue. Sea f continua y ϕ definida como sigue:

$\phi(E) = \int_E f\,d\lambda$, entonces f puede obtenerse diferenciando la función $F(x) = \int_{[a,x]} f\,d\lambda$ i.e. $f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi((x_0, x_0+h])}{h} =$

$= (1)$. donde $\phi((x_0, x_0+h]) = -\phi((x_0+h, x_0])$ si $h<0$.

La fórmula (1) da la definición usual de diferenciación con respecto a la medida de Lebesgue unidimensional, pero no es la única definición posible.

De hecho, como veremos ahora, se pueden dar definiciones más fuertes, o bien más débiles que (1).

Supongamos primero que en lugar de usar intervalos de la forma $(x, x+h]$ nos restringimos a intervalos de una clase mucho más pequeña, intervalos de la forma $\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ cuyos puntos extremos son números binarios, y donde todo intervalo contiene el punto x_0 en el cual se ha de evaluar la derivada.

En otras palabras, definimos la derivada por la fórmula:

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F\left(\frac{p+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{p}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} \qquad (2)$$

con $x_0 \in \left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ $\forall n$. siempre que el límite exista.

Esta definición es más debil que (1), en el sentido que la existencia del límite (1) implica la existencia de (2), pero no inversamente.

Supongamos que el límite (1) existe en x_0, entonces la expresión

$$\frac{\phi\left(\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]\right)}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\phi\left(\left(\frac{p}{2^n}, x_0\right]\right)}{\frac{1}{2^n}} + \frac{\phi\left(\left(x_0, \frac{p+1}{2^n}\right]\right)}{\frac{1}{2^n}} =$$

$$= \frac{\phi\left(\left(\frac{p}{2^n}, x_0\right]\right)}{x_0 - \frac{p}{2^n}} \, \frac{x_0 - \frac{p}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} + \frac{\phi\left(\left(x_0, \frac{p+1}{2^n}\right]\right)}{\frac{p+1}{2^n} - x_0} \, \frac{\frac{p+1}{2^n} - x_0}{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} F'(x_0).$$

Por otra parte el siguiente ejemplo muestra que el converso es falso.:

Sea $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, construyamos una función continua de variación acotada F tal que:

1) F no tiene derivada en el sentido ordinario en x_0.

2º) F se anula en los puntos $\frac{p}{2^n}$, $\frac{p+1}{2^n}$ y por consiguiente tiene una derivada en x_0 (igual a cero) en el sentido de la fórmula (2)

Supongamos, por comodidad que $x_0 > 0$, sea $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ t.q. $x_0 \in (a,b)$, y definamos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

Construyamos una sucesión de números $\{x_m\} \subset [a,b]$ t.q. x_m es de la forma $\frac{p}{2^n}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\{x_m\}$ es estrictamente decreciente y $\lim_{m \to \infty} x_m = x_0$.

Debido a la densidad de $\{\frac{p}{2^n}, p, n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}^+$ podemos hallar, $p, n \in \mathbb{N}$.

$\ni \cdot \frac{p}{2^n} < x_0 < \frac{p+1}{2^n}$ y $\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \in [a,b]$. Sea $x_1 = \frac{p+1}{2^n}$

Sea $s \in \mathbb{N}$ el 1er natural $\ni \cdot$ $\frac{2^s p}{2^{n+s}} < x_0 < \frac{2^s(p+1)}{2^{n+s}}$ y $\frac{2^s p+k}{2^{n+s}} < x_0 < \frac{2^s p+k+1}{2^{n+s}}$ con $k \in \{0,1,\dots,2^s-2\}$. y sea $x_2 = \frac{2^s p+k+1}{2^{n+s}} < x_1$, Así inductivamente a partir de x_m definimos x_{m+1}.

Mostremos que $x_{m+1} - x_0 < \frac{x_m - x_0}{2}$, sea $x_m = \frac{p+1}{2^n}$, $p,n \in \mathbb{N}$, entonces, según la construcción de los x_m $\exists$ $s \in \mathbb{N}$ $\ni \cdot$ $x_{m+1} = \frac{2^s p+k+1}{2^{n+s}}$ $k \in \{0,1,\dots,2^s-2\}$

entonces: $x_{m+1} - x_0 < \frac{x_m - x_0}{2} \iff \frac{2^s p+k+1}{2^{n+s}} - x_0 < \frac{\frac{(p+1)2^s}{2^{n+s}} - x_0}{2} \iff$

$\iff \frac{2^s p+k+1}{2^{n+s-1}} - \frac{(p+1)2^{s-1}}{2^{n+s-1}} < x_0 \iff \frac{p2^{s-1} - 2^{s-1}+k+1}{2^{n+s-1}} < x_0$, pero:

$\frac{p2^{s-1} - 2^{s-1}+k+1}{2^{n+s-1}} = \frac{2^s p - 2^s + 2k+2}{2^{n+s}} = \frac{2^s p+k+k+2-2^s}{2^{n+s}} \leq \frac{2^s p+k}{2^{n+s}}$ pues $k \in \{0,1,\dots,2^s-2\}$.

y $\frac{2^s p+k}{2^{n+s}} < x_0$ $\therefore$ obtenemos la desigualdad requerida.

Definamos $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,x_0] \cup [x_1,b]$, $f(x_m) = 0$ $\forall m$ y F lineal en (x_{n+1}, ξ_n), (ξ_n, x_n) donde $\xi_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ y $F(\xi_n) = \xi_n - x_0$. Veamos que F' no existe en x_0 en el sentido de (1).

Es claro que $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{F(\xi_n) - F(x_0)}{\xi_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n+x_{n+1}}{2} - x_0}{\frac{x_n+x_{n+1}}{2} - x_0} = 1$

Por otro lado $\lim_{m\to\infty} \frac{F(x_m) - F(x_0)}{x_m - x_0} = 0$ $\therefore$ $F'(x_0)$ no existe en el sentido de la definición (1). Es clara que $F'(x_0) = 0$ en el sentido de la definición (2)

Veamos que $F \in BV[a,b]$: Es claro que la variación de F está dada por

$V_a^b(F) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} - x_0\right) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_0) < \infty$ pues $x_{m+1} - x_0 < \frac{x_m - x_0}{2}$.

$\therefore$ $F \in BV[a,b]$ //

Ahora, en lugar de usar intervalos de la forma $(x, x+h]$ consideraremos conjuntos de una clase mucho más amplia.

Definamos la derivada en x_0 por la fórmula $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(E_n)}{\lambda(E_n)}$ (3) donde cada E_n es una unión a lo sumo numerable de intervalos disjuntos, si $E_n = \bigcup_k (\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}]$ entonces $\phi(E_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi((\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}]) = \sum_{k=1}^{\infty} [F(\beta_k^{(n)}) - F(\alpha_k^{(n)})]$ y donde la sucesión $\{E_n\}$ converge regularmente a x_0 en el siguiente sentido:

1°) Todo E_n está contenido en un intervalo semiabierto $(a_n, b_n]$ ∋ $x_0 \in (a_n, b_n]$ y $a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

2°) $\exists\, c > 0$ ∋ $\lambda(E_n) \geq c\, \lambda((a_n, b_n])$, un tal c se llama módulo de regularidad para la sucesión $\{E_n\}$.

Esta definición es más fuerte que la definición (1), ya que la existencia de límite (3) implica la existencia de (1) pero no inversamente.

De hecho supongamos que el límite (3) existe en x_0 y elijamos $E_n = (x_0, x_0 + h_n]$ donde $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces $\{E_n\}$ converge regularmente $(a_n, b_n] = (x_0 - h_n, x_0 + h_n]$ a x_0 (con $c = 1/2$), así que $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(E_n)}{\lambda(E_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi((x_0, x_0+h_n])}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x_0+h_n) - F(x_0)}{h_n}$ existe ∴ el límite definido por (1) existe

Veamos un ejemplo en el cual el límite (1) existe, pero la derivada en el sentido de (3) no existe.

Sea $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∋ $F(x) = x^2 \operatorname{sen} \pi/x$ $\forall x \neq 0$ y $F(0) = 0$.

Es inmediato comprobar que la derivada en el sentido ordinario de F en $x_0=0$ existe y es cero. Veamos que la derivada en el sentido de (3) no existe en $x_0=0$.

Consideremos los intervalos $(a_n,b_n] = \left(-\frac{2}{1+4n}, \frac{2}{1+4n}\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Claramente $x_0 \in (a_n,b_n]$ $\forall n$ y $a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Sea $E_n = \left\{ \bigcup_{k\geq n} \left(\frac{2}{3+4k}, \frac{2}{1+4k}\right] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k\geq n} \left(-\frac{2}{1+4k}, -\frac{2}{3+4k}\right] \right\}$ i.e. E_n es la unión de todos los intervalos contenidos en $(a_n,b_n]$ donde F es creciente.

Veamos que $\{E_n\}_n$ converge regularmente a $x_0=0$, para esto, basta ver que existe un modulo de regularidad para los E_n.

Consideremos los conjuntos A_n definidos como sigue:

$A_n = \left\{ \bigcup_{k\geq n} \left(\frac{2}{1+4(k-1)}, \frac{2}{3+4k}\right] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k\geq n} \left(-\frac{2}{3+4k}, \frac{2}{1+4(k-1)}\right] \right\}$. i.e. A_n es la unión de todos los intervalos contenidos en $(a_n,b_n]$ donde F decrece.

Es claro que $A_n \cup E_n = (a_n,b_n] - \{0\}$, comparando las medidas de los intervalos cuya unión es E_n, con aquellos cuya unión es A_n obtenemos que:
$\lambda\left(\left(\frac{2}{3+4k}, \frac{2}{1+4k}\right]\right) > \lambda\left(\left(\frac{2}{1+4(k-1)}, \frac{2}{3+4k}\right]\right)$ $\forall k\geq n$. (Para los intervalos negativos, claramente se tiene la misma desigualdad). $\therefore \lambda(E_n) > \lambda(A_n)$ y como $\lambda(A_n \cup E_n) = \lambda((a_n,b_n])$ se sigue que $\lambda(E_n) > \frac{1}{2}\lambda((a_n,b_n])$ $\therefore$ $c = 1/2$ es una constante de regularidad.

Consideremos ahora $\lim_{n\to\infty} \frac{\varnothing(E_n)}{\lambda(E_n)}$.

$\therefore \varnothing(E_n) = 2\sum_{k\geq n}\left(\frac{2}{1+4k}\right)^2 + \left(\frac{2}{3+4k}\right)^2$ y $\lambda(E_n) = 2\sum_{k\geq n}\left(\frac{2}{1+4k} - \frac{2}{3+4k}\right)$

Es facil comprobar que $\left(\frac{2}{1+4k}\right)^2 > \frac{2}{1+4k} - \frac{2}{3+4k}$ $\forall k$ $\therefore$ $\phi(E_n) > \lambda(E_n)$ $\forall n$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(E_n)}{\lambda(E_n)} \geq 1$

Por otro lado, la derivada en el sentido de la definición (1), existe y es cero.

Como la manera de aproximarse al punto $x_0=0$, según (1), es un caso particular de la definición (3), hemos obtenido 2 límites diferentes al tomar dos sucesiones $\{E_n\}$ diferentes que cumplen las condiciones estipuladas en (3), por lo tanto, F' no existe en $x_0=0$ según la definición (3).

Posteriormente veremos que las 3 definiciones (1), (2), (3) de la derivada de una función $F \in BV[a,b]$, como también las correspondientes generalizaciones de estas definiciones a espacios de medida abstractos, coinciden en un conjunto de medida total.

Generalicemos ahora las definiciones (1), (2), (3) a espacios de medida arbitrarios, para esto damos la siguiente definición:

<u>3.7. Definición</u> Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, <u>es una medida con signo</u>, si satisface:

1°) $\mu(\emptyset)=0$. 2°) μ es numerablemente aditiva i.e. si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

3°) μ toma a lo sumo, uno de los valores $+\infty, -\infty$.

Decimos que μ es finita si no toma ninguno de los valores $\infty, -\infty$.

La generalización apropiada de diferenciación en el sentido de la fórmula (2) es diferenciación con respecto a una red.

Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida.

<u>3.8 Definición:</u> Supongamos que $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(1)}$ con $A_i^{(1)} \cap A_j^{(1)} = \phi$ $\forall i \neq j$ y $A_i \in \mathcal{S}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Supongamos, además que: $\forall j$ $A_j^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{j,i}^{(2)}$ con los $A_{j,i}^{(2)}$ disjuntos dos a dos. y $A_{j,i}^{(2)} \in \mathcal{S}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Consideremos este proceso repetido $\forall$ (n).

Denotemos por $\mathcal{R}_1 = \{ A_i^{(1)} : i \in \mathbb{N} \}$ $\mathcal{R}_2 = \{ A_{j,i}^{(2)}, i, j \in \mathbb{N} \}$ y definimos $\mathcal{R}_n = \{ A^n_{i,j\dots} ; i, j \dots \in \mathbb{N} \}$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Los elementos de $\mathcal{R}_n$ son llamados conjuntos de n-simo rango.

Es claro que la unión de todos los conjuntos de n-simo rango es $\mathbb{X}$ $\forall n$.

La familia $\mathcal{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$ es <u>llamada una red</u>. si satisface la siguiente condición:

i) Dado $E \in \mathcal{S}$ arbitrario $\exists \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$. $\cdot \ni \cdot$ $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ y. $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) < \mu(E) + \epsilon$ para un ϵ preasignado. $(\epsilon > 0)$.

Sea $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita. Entonces por la derivada de ϕ en el punto $x_0 \in \mathbb{X}$ con respecto a la red $\mathcal{R}$ entendemos el número real $D_{\mathcal{R}}(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\phi(A^{(n)}(x_0))}{\mu(A^{(n)}(x_0))}$ (si es que dicho límite existe, y donde $A^{(n)}(x_0)$ es el único conjunto de n-simo rango.

que contiene x_0.

Ejemplo: Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \lambda)$ el espacio de medida donde $\mathbb{X} = [0,1]$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}[a,b]$. y λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$; Definamos los conjuntos del n-simo rango. como $\mathcal{M}_n = \{ [0,\frac{1}{2^n}], (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \ldots, [1-\frac{1}{2^n}, 1] \}$ y sea la red $\mathcal{M}$ definida por $\mathcal{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$, entonces la derivada con respecto a la red $\mathcal{M}$ es la derivada en el sentido de la fórmula (2).

Diferenciación con respecto a un sistema de Vitali.

Ahora consideraremos la generalización de diferenciación en el sentido de la fórmula (1)

<u>3.9 definición</u>: Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. $\cdot \ni \cdot$ $\forall x \in \mathbb{X}$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{S}$ y $\mu(\{x\}) = 0$. Por un <u>sistema de Vitali</u> entendemos una familia $\mathcal{V}$ de conjuntos de $\mathcal{S}$ (llamados conjuntos Vitali). la cual tiene las siguientes propiedades.:

1°) Dado cualquier $E \in \mathcal{S}$. y cualquier $\epsilon > 0$, existe una familia, a lo más, numerable $\{A_i\} \subset \mathcal{V}$ de conjuntos Vitali tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \mu(E) + \epsilon$

2°) Todo conjunto $E \in \mathcal{V}$ tiene una frontera i.e. un conjunto $\Gamma(E)$ de medida cero. Tal que:

a). Si $x \in E - E \cap \Gamma(E)$, entonces todo conjunto Vitali de medida suficientemente pequeña que contiene x está contenido en $E - E\cap\Gamma(E)$

b). Si $x \notin \bar{E} = E \cup \Gamma(E)$, entonces todo conjunto Vitali de medida suficientemente pequeña que contiene x no intersecta $\bar{E}$.

3º). Supongamos que $E \subset \bar{X}$ es cubierto por una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ de conjuntos Vitali, de tal forma que, para cada $x \in E$ y cualquier $\epsilon > 0$, hay un conjunto $A_\epsilon(x) \in \mathcal{B}$ de μ-medida menor que ϵ y con $x \in A_\epsilon(x)$, Entonces E puede ser cubierto, salvo por un conjunto de medida cero, por una familia $\{A_\delta\}_{\delta\in I}$ a lo mas numerable, de elementos de $\mathcal{B}$, los cuales son disjuntos.

Veamos un ejemplo de un sistema de Vitali, de hecho, el siguiente Teorema es una generalización del Teorema 1.8.

<u>3.10 Teorema:</u> Sea $\bar{X}$ el paralelepípedo rectangular n-dimensional dado por $\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_n \le x_n \le b_n\}$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ y $a_i < b_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Sea $(\bar{X}, \Lambda, \mu)$ el espacio de medida donde Λ es la σ-álgebra formada por todos los subconjuntos de $\bar{X}$ Lebesgue-medibles y μ es la medida de Lebesgue n-dimensional, entonces, la familia $\mathcal{D}$ de todos los cubos cerrados $Q = \{x : \alpha_1 \le x_1 \le \alpha_1 + h, \ldots, \alpha_n \le x_n \le \alpha_n + h\} \subset \bar{X}$ es un sistema de Vitali.

Dem: La condición 1) de la definición 3.9 no es más que la regularidad. de la medida de Lebesgue μ.

Es claro que. las propiedades 2 a) y 2 b) de la definición 3.9. son satisfechas si la frontera $\Gamma(Q)$ de todo $Q \in \mathcal{R}$ se define como la frontera topológica ordinaria.

Para verificar la propiedad 3 de la definición 3.9 damos la siguiente prueba de Banach.

Sea $E \subset \mathbb{X}$ t.q. E es cubierto por una subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}$. t.q. $\forall x \in E$ y $\forall \epsilon > 0$. $\exists A_\epsilon(x) \in \mathcal{B}$ con $\mu(A_\epsilon(x)) < \epsilon$ y $x \in A_\epsilon(x)$.

Sea. $K_1 = \sup\limits_{A_\alpha \in \mathcal{B}_1} \{\mu(A_\alpha)\}$ donde $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$. Sea $Q_1 \in \mathcal{B}_1$ arbitrario t.q. $\mu(Q_1) > \frac{K_1}{2}$. Si Q_1 cubre E salvo un conjunto de medida cero, la prueba termina; en caso contrario sea $\mathcal{B}_2 = \{Q \in \mathcal{B}_1 : Q \cap Q_1 = \emptyset\}$.

Es claro que $\mathcal{B}_2$ es no vacío.

Sea $K_2 = \sup\limits_{A_\alpha \in \mathcal{B}_2} \{\mu(A_\alpha)\}$ y sea $Q_2 \in \mathcal{B}_2$ t.q. $\mu(Q_2) > K_2/2$.

Si después de un número finito de repeticiones del proceso anterior el conjunto E queda cubierto salvo un conjunto de medida cero, por los $\{Q_i\}_{i=1}^{n \in \mathbb{N}}$ la prueba termina; en caso contrario obtenemos la siguiente sucesión: $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \ldots$ de familias de cubos. y las sucesiones $\{K_1 \geq K_2 \geq \ldots\}$ y. $\{Q_1, Q_2 \ldots\}$ donde los Q_i son disjuntos y tales que. $Q_J \in \mathcal{B}_J$, $\mu(Q_J) > K_J/2$. $(J = 1, 2 \ldots)$

Mostremos ahora que la sucesión $\{Q_J\}$ cubre E salvo un conjunto de medida cero.

Sea $Z = E - \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, dado cualquier $p \in \mathbb{N}$ $p>1$ y cualquier $x_0 \in Z$, tenemos. $x_0 \notin Q_J$ $(J=1,2,\dots p-1)$.

Por otro lado, como $x_0 \in E$, hay cubos en $\mathcal{B}$ de medida μ arbitrariamente pequeña que contienen x_0. En particular $\exists\, Q \in \mathcal{B}$ t.q. $x_0 \in \mathcal{B}$ y $Q \cap Q_i = \emptyset$ $\forall i \in \{1,2,\dots p-1\}$ $\therefore$ $Q \in \mathcal{B}_p$. Si además $Q \cap Q_p = \dots = Q \cap Q_{r-1} = \emptyset$, entonces $Q \in \mathcal{B}_{p+1}, \mathcal{B}_{p+2}, \dots, \mathcal{B}_r$, y por lo tanto $\mu(Q) \leq K_r$. Pero, la serie $\sum_{J=1}^{\infty} K_J \leq 2 \sum_{J=1}^{\infty} \mu(Q_J) \leq 2\mu(X) < \infty$. converge. $\therefore$ $K_J \underset{J\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por lo tanto existe un primer índice $r \geq p$ t.q. $Q \cap Q_r \neq \emptyset$.

Sea l la longitud de cada lado de Q y l_r la longitud de cada lado de Q_r. Como $Q \in \mathcal{B}_r$, tenemos $\mu(Q) \leq K_r$ ie. $l \leq \sqrt[n]{K_r}$. Además $\mu(Q_r) > K_r/2$, por construcción, y por lo tanto $l_r > \sqrt[n]{K_r/2}$.

Como $Q \cap Q_r \neq \emptyset$, Q está contenido en el cubo con el mismo centro que Q_r y con cada lado de longitud $l_r + 2l$. y como $l_r + 2l \leq l_r + 2\sqrt[n]{K_r} < l_r + 2\sqrt[n]{2}\, l_r = (1 + 2\sqrt[n]{2})\, l_r \leq 5 l_r$, Q está contenido también en el cubo $\hat{Q}_r$ que tiene el mismo centro que Q_r pero con cada lado de longitud $5 l_r$. Por consiguiente:

$x_0 \in \hat{Q}_r \subset \bigcup_{J=p}^{\infty} \hat{Q}_J \quad \therefore \; Z \subset \bigcup_{J=p}^{\infty} \hat{Q}_J \quad \forall p > 1.$

Pero $\mu(\hat{Q}_J) = 5^n \mu(Q_J) \xrightarrow[J\to\infty]{} 0. \quad \therefore \; \mu(Z) = 0$ //

Sea $(\bar{X}, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida $\cdot \ni \cdot$ $\forall x \in \bar{X}$ $\{x\} \in \mathcal{S}$ y $\mu(\{\bar{x}\}) = 0.$

y sea $\mathcal{V}$ un sistema de Vitali formado por conjuntos de $\mathcal{S}$.

Sea $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ una medida con signo. y sea $x_0 \in \bar{X}$.

Por la derivada. de ϕ en el punto x_0. con respecto al sistema de Vitali $\mathcal{V}$ entendemos la cantidad $D_{\mathcal{V}} \phi(x_0) \equiv D\phi(x_0) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{\phi(A_\epsilon(x_0))}{\mu(A_\epsilon(x_0))}$ si este último límite existe; donde $A_\epsilon(x_0)$ es cualquier conjunto Vitali $\cdot \ni \cdot$ $\mu(A_\epsilon(x_0)) < \epsilon$ y $x_0 \in A_\epsilon(x_0)$.

Esta es la definición que generaliza la fórmula (1)

El límite anterior puede no existir, pero los siguientes límites:

$$\bar{D}\phi(x_0) = \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \frac{\phi(A_\epsilon(x_0))}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \quad \text{y} \quad \underline{D}\phi(x_0) = \underline{\lim_{\epsilon\to 0}} \frac{\phi(A_\epsilon(x_0))}{\mu(A_\epsilon(x_0))}$$

siempre existen (pueden ser valores extendidos i.e. $+\infty, -\infty$);

Donde. $\bar{D}\phi(x_0)$ es llamada la derivada superior. y $\underline{D}\phi(x_0)$ la derivada inferior. de ϕ en x_0 con respecto al sistema de Vitali $\mathcal{V}$.

Es claro que, una condición necesaria y suficiente para que ϕ tenga derivada en x_0 con respecto a $\mathcal{V}$ es que. $\bar{D}\phi(x_0) = \underline{D}\phi(x_0) \neq \pm\infty$

En general, las cantidades $\bar{D}\phi(x_0)$, $\underline{D}\phi(x_0)$ y $D\phi(x_0)$ dependen, no sólo de la función ϕ sino también del sistema de Vitali $\mathcal{V}$.

Sin embargo, posteriormente veremos que efectos de esta clase, se manifiestan sólo sobre un conjunto de medida cero.

Establescamos primero, algunos resultados preliminares:

<u>3.11 lema:</u> Conservando las notaciones de los últimos dos párrafos, y con ϕ y μ finitas, si la desigualdad $\bar{D}\phi(x) = \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \frac{\phi(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} > c$ se sostiene $\forall x \in E \in \mathcal{S}$ t.q. $\mu(E) > 0$, entonces dado cualquier $\epsilon > 0$. $\exists\, Q \subset E$ t.q. $Q \in \mathcal{S}$ y $\mu(E - Q) < \epsilon$, $\phi(Q) \geq c\mu(Q)$.

Dem: 1°). Supongamos $E \neq \bar{X}$, dado $\epsilon > 0$, usamos la propiedad 1) de la definición 3.9 para cubrir $\bar{X} - E$ por una familia numerable de conjuntos Vitali $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) < \mu(\bar{X} - E) + \epsilon$.

Sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$ donde $\bar{B}_n = B_n \cup \Gamma(B_n)$; usamos inducción matemática, para construir una sucesión de conjuntos $\{Q_i\}$ donde cada Q_i es una unión de, a lo sumo, una cantidad numerable de conjuntos Vitali y tales que $\phi(Q_n) > c\mu(Q_n)$ y $E - E\cap B - Z_n \subset Q_n \subset \bar{X} - (\bar{B}_1 \cup \dots \cup \bar{B}_n)$ donde cada Z_n $(n \in \mathbb{N})$ es un conjunto de medida cero.

Comencemos con $n=1$; para cada $x \in E - B\cap E$, consideramos todos los conjuntos Vitali $A_\alpha^{(1)}(x)$ t.q. $x \in A_\alpha^{(1)}(x)$, $A_\alpha^{(1)}(x) \cap \bar{B}_1 = \emptyset$ y satisfacen la desigualdad $\frac{\phi(A_\alpha^{(1)}(x))}{\mu(A_\alpha^{(1)}(x))} > c$. Por la propiedad 2b). Tales conjuntos existen y tienen medida arbitrariamente pequeña.

De esta cubierta de $E-B\cap E$, usamos la propiedad 3 de 3.9. para seleccionar una sucesión de conjuntos Vitali, disjuntos por parejas $\{A_J^{(1)}\}_{J\in N}$ que cubran $E-B\cap E$ salvo un conjunto de medida cero. Sea Z_1 este último conjunto. Así, si $Q_1=\bigcup_J A_J^{(1)}$, tenemos $E-B\cap E-Z_1\subset Q_1\subset \bar{X}-\bar{B}_1$, y además;

$$\phi(Q_1)=\sum_{J=1}^{\infty}\phi(A_J^{(1)})>c\sum_{J=1}^{\infty}\mu(A_J^{(1)})=c\mu(Q_1).$$

Supongamos, en seguida, que hemos ya construído los conjuntos $Q_1\supset\dots\supset Q_{n-1}=\bigcup_{J=1}^{\infty}A_J^{(n-1)}$ y los correspondientes conjuntos $Z_1,\dots,Z_{n-1}$ de medida cero. Entonces los conjuntos Q_n y Z_n pueden encontrarse como sigue:

Sea $Y_n=\bigcup_{J=1}^{\infty}\{\Gamma(A_J^{(n-1)})\cap A_J^{(n-1)}\}$ donde $\mu(Y_n)=0$ pues $\Gamma(A_J^{(n-1)})$ es de medida cero $\forall J$. Para todo $x\in E-B\cap E-Z_{n-1}-Y_n$ encontramos todos los conjuntos Vitali $A_\alpha^{(n)}(x)$ los cuales contienen x t.q. $A_\alpha^{(n)}\subset Q_{n-1}$ $\forall\alpha$, $A_\alpha^{(n)}\cap(\bigcup_{i=1}^{n}\bar{B}_i)=\emptyset$ y $\dfrac{\phi(A_\alpha^{(n)}(x))}{\mu(A_\alpha^{(n)}(x))}>c$

Por las propiedades 2a y 2b, tales conjuntos existen y tienen medida arbitrariamente pequeña. Usando la propiedad 3, construimos una unión numerable Q_n de conjuntos Vitali disjuntos $\{A_J^{(n)}\}$ que cubren $E-B\cap E-Z_{n-1}-Y_n$ salvo un conjunto Y_n' con $\mu(Y_n')=0$. Entonces

$E-B\cap E-Z_{n-1}-Y_n-Y_n'\subset Q_n\subset \bar{X}-\bigcup_{i=1}^{n}\bar{B}_i$ o, lo que es lo mismo;

$E - B\cap E - Z_n \subset Q_n \subset X - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ donde $Z_n = Z_{n-1} \cup Y_n \cup Y'_n$ y $\mu(Z_n) = 0$

Además $\phi(Q_n) = \sum_{J=1}^{\infty} \phi(A_J^{(n)}) > c \sum_{J=1}^{\infty} \mu(A_J^{(n)}) = c\mu(Q_n)$.

Así, hemos construido la sucesión $\{Q_n\}_n$ t.q. $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$

Sea $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$. Entonces $\phi(Q) = \lim_{n\to\infty} \phi(Q_n) \geq c \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n) = c\mu(Q)$.

Por otro lado: $E - B\cap E - \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subset Q \subset X - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset E$, donde

$\mu(E-Q) \leq \mu(B\cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Z_n) = \mu(B) - \mu(X-E) < \epsilon$.

2°) Si $E = X$, aplicamos el argumento anterior a un subconjunto propio

$E' \subset E = X$ y a su complemento $E^2 = X - E'$, obteniendo:

$\mu(E' - Q') + \mu(E^2 - Q^2) = \mu(E - Q) < 2\epsilon$ donde $Q = Q' \cup Q^2$ y

$\phi(Q) \geq c\mu(Q)$. (Notar que $Q' \cap Q^2 = \emptyset$ $E' \cap E^2 = \emptyset$) //

<u>3.12 lema</u>: Con las mismas hipótesis que en el lema. 3.11; si la desigualdad $\underline{D}\phi(x) = \varliminf_{\epsilon\to 0} \frac{\phi(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} < c$ se sostiene $\forall x \in E \in \mathcal{S}$ t.q. $\mu(E) > 0$, entonces, dado $\epsilon > 0$ arbitrario $\exists Q \subset E$ t.q. $Q \in \mathcal{S}$, $\mu(E-Q) < \epsilon$ y

$\phi(Q) \leq c\mu(Q)$.

Dem: Definamos la siguiente medida con signo:

$\phi': \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ t.q. $\phi'(E) = 2c\mu(E) - \phi(E)$, entonces $\frac{\phi'(E)}{\mu(E)} = \frac{2c\mu(E) - \phi(E)}{\mu(E)}$

$= 2c - \frac{\phi(E)}{\mu(E)}$ ∴

$\varlimsup_{\epsilon\to 0} \frac{\phi'(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} = \varlimsup_{\epsilon\to 0} 2c - \frac{\phi(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} = 2c + \varlimsup -\frac{\phi(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} =$

$= 2c - \lim \dfrac{\emptyset(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} > 2c - c = c.$

Por consiguiente $\bar{D}\,\emptyset'(x) > c \quad \forall\, x \in E$; usando el lema 3.11 $\exists\, Q \subset E$,

$Q \in \mathcal{S}$.$\exists$. $\mu(E-Q) < \epsilon$ y $\emptyset'(Q) \geq c\mu(Q)$. pero,

$\emptyset'(Q) = 2c\mu(Q) - \emptyset(Q) \geq c\mu(Q) \quad \therefore \quad \emptyset(Q) \leq c\mu(Q)$ //.

Nótese la relación que existe entre los lemas 3.11 y 3.12 con los lemas 1.12 y 1.13 del capítulo 1, de hechos ,3.11 y 3.12 son generalizaciones de 1.12 y 1.13.

Probemos ahora otro lema, el cual será útil para probar el Teorema básico sobre diferenciación con respecto a un sistema de Vitali.

Lema 3.13: Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida .$\exists$. $\forall\, x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{S}$ y $\mu(\{x\}) = 0$, sea $\mathcal{V}$ un sistema de Vitali formado por conjuntos de $\mathcal{S}$.

Sea $\emptyset : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una medida con signo. , entonces , el conjunto

$E_c = \{x : \bar{D}_{\mathcal{V}}\,\emptyset(x) \geq c\}$. es medible. para $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Dem: Dado cualquier. $\epsilon > 0$, $\exists\, A_\epsilon(x) \in \mathcal{V}$.$\exists$. $x \in A_\epsilon(x)$ y $\mu(A_\epsilon(x)) < \epsilon$

Tal que. $\dfrac{\emptyset(A_\epsilon(x))}{\mu(A_\epsilon(x))} > c - \epsilon$.

Probemos que el conjunto $Q_\epsilon = \bigcup_{x \in E_c} A_\epsilon(x)$. es medible.

Sea $\mathcal{B}$ la subfamilia de todos los conjuntos Vitali con la propiedad. de que $\forall\, A \in \mathcal{B}$ $\exists\, A_\epsilon(x)$. $(x \in E_c)$.$\exists$. $A \subset A_\epsilon(x)$. (En particular $\mathcal{B}$ contiene todos los $A_\epsilon(x)$). Entonces $\mathcal{B}$ cubre Q_ϵ ; de hecho Q_ϵ

coincide con la unión de todos los conjuntos de $\mathcal{B}$. Se sigue de la propiedad 3 de la definición 3.9 que Q_ϵ coincide, salvo un conjunto de μ-medida cero, con una unión numerable $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i \in \mathcal{B}$.

Por lo tanto Q_ϵ es medible.

Sea $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos $\ni$ $\epsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$; entonces el conjunto $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{\epsilon_n}$ es medible.

Es claro que $E_c \subset Q$. Probemos que $Q \subset E_c$

Dado cualquier $x_0 \in Q$ y cualquier $\epsilon > 0$. $\exists$ al menos un conjunto $A_{\epsilon_n}(x_0)$ $\ni$ $A_{\epsilon_n}(x_0) \subset Q_{\epsilon_n}$, $x_0 \in A_{\epsilon_n}(x_0)$ y $\mu(A_{\epsilon_n}(x_0)) < \epsilon$, ya que $x_0 \in Q_{\epsilon_n}$ $\forall n$.

Entonces $\bar{D}\phi(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\phi(A_{\epsilon_n}(x_0))}{\mu(A_{\epsilon_n}(x_0))} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} (c-\epsilon_n) = c$ $\therefore$

$Q \subset E_c$. $\therefore$ E_c es medible //.

Antes de estudiar el Teorema básico sobre diferenciación estudiemos con más detalle las medidas con signo en el siguiente capítulo.

Bibliografía.

3.1 G. E. Shilov y BL. Gurevich.: Integral, Measure, and Derivative, A unifed. Approach. Dover Publications 1977.

3.2. Integration, Mc Shane. Princeton University Press. 1944.

3.3 Natanson: Theory of functions of a real variable Vol. I Frederick Ungar. Publishing CO. New York, 1964

3.4 E. Hewitt K. Stromberg.: Real and abstract analysis, Springer Verlag. (1965).

Capitulo 4.

Lo que nos proponemos en este capítulo es generalizar los Teoremas 2.38 y 2.44 (Teorema de descomposición de Lebesgue) a otro tipo de funciones, llamadas medidas con signo, las cuales se han definido en el capítulo anterior.

Para aclarar esto último y motivar dicha generalización consideremos el siguiente ejemplo:

<u>4.1 Ejemplo:</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. creciente y continua por la derecha en (a,b).

Consideremos la siguiente familia de subconjuntos de $[a,b]$:

$E=\{(x,y]: a\le x<y\le b\}\cup\{\emptyset\}$ donde convenimos que si $x=a$, $(x,y]$ denotará al conjunto $\{t\in\mathbb{R}: a\le t\le y\}$ i.e. $(x,y]=[a,y]$

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por E i.e. cada elemento de $\mathcal{A}$ es una unión finita y disjunta de elementos de E.

Definimos $\phi_f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ como sigue:

Si $E=\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y_i]\in\mathcal{A}$ t.q. $(x_i,y_i]\cap(x_j,y_j]=\emptyset$ $\forall i\neq j$, entonces:

$\phi_f(E)=\sum_{i=1}^{n} f(y_i)-f(x_i)$ y $\phi_f(\emptyset)=0$.

ϕ_f así definida, es una casimedida sobre el álgebra $\mathcal{A}$ en el siguiente sentido: i) $\phi_f(\emptyset)=0$ ii) $\phi_f(E)\ge 0$ $\forall E\in\mathcal{A}$.

iii) Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ t.q. $E_n\cap E_m=\emptyset$ $\forall$ $n\neq m$ y $\bigcup_n E_n\in\mathcal{A}$ entonces $\phi_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_f(E_n)$

Bajo estas hipótesis y usando el teorema de extensión de Carathéodory extendemos ϕ_f de manera única a la σ-álgebra de Borel de $[a,b]$ que denotamos por $\mathcal{B}([a,b])$. Dicha extensión la seguimos denotando por ϕ_f.

Así, pues, a partir de una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ hemos obtenido una medida sobre los Borelianos en $[a,b]$, la cual resulta ser finita.

f se llama la función generatriz de ϕ_f.

Supongamos, además que $f \in AC[a,b]$, entonces $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\lambda$ ∴

$\phi_f([a,x]) = f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f' d\lambda$, similarmente $\phi_f((x,y]) = \int_{(x,y]} f' d\lambda$

Por lo tanto, ϕ_f se puede expresar, para conjuntos de la forma

$E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i, y_i]$ $\quad ((x_i,y_i] \cap (x_j,y_j] = \phi)$ como una integral indefinida respecto de la medida λ. Por consiguiente, por la unicidad del Teorema ya mencionado $\phi_f(E) = \int_E f' d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{B}([a,b])$

Observemos también que dado $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq si $\{(x_i,y_i]\}_{i=1}^{n}$ es una colección de intervalos disjuntos dos a dos con $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y_i]) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta$ entonces $\phi_f(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y_i]) = \sum_{i=1}^{n}(f(y_i) - f(x_i)) < \epsilon$; así, el valor de ϕ_f se puede hacer arbitrariamente pequeño, tomando los intervalos $(x_i,y_i]$ de longitud total suficientemente pequeña.

Esto último, sugiere la generalización del concepto de continuidad absoluta para medidas sobre espacios arbitrarios.

Habiendo considerado este ejemplo definiremos algunos conceptos para funciones definidas sobre la σ-álgebra de un espacio de medida; recordemos primero la siguiente definición:

4.2 Definición: Sea $(\bar{X}, \mathcal{S})$ un espacio medible ($\mathcal{S}$ es una σ álgebra de subconjuntos de $\bar{X}$). Una función $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se llama una medida con signo si: i) $\mu(\emptyset) = 0$. ii) μ es numerablemente aditiva i.e. Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ iii) μ toma, a lo sumo, uno de los valores $+\infty, -\infty$.

Supondremos conocidas ciertas propiedades de las medidas con signo, como por ejemplo, las descomposiciones de Hahn y de Jordan.

4.3 Definición: Sea $(\bar{X}, \mathcal{S}, \nu)$ un espacio de medida y sea $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, una medida con signo, entonces:

i) μ está concentrada en un conjunto E_0 si $\mu(E) = 0$ $\forall E \in \mathcal{S}$ t.q. $E \subset \bar{X} - E_0$

ii) μ es continua con respecto a ν, si $\mu(\{x\}) = 0$ $\forall \{x\} \in \mathcal{S}$ t.q. $\nu(\{x\}) = 0$

iii) μ es absolutamente continua con respecto a ν, si $\mu(E) = 0$ $\forall E \in \mathcal{S}$ t.q. $\nu(E) = 0$, esta propiedad la denotamos por $\mu \ll \nu$.

iv) μ es singular con respecto a ν, si μ está concentrada en un conjunto $E_0 \in \mathcal{S}$ con $\nu(E_0) = 0$.

v) μ es discreta si está concentrada sobre un conjunto $E_0 \in \mathcal{S}$, con $\nu(E_0) = 0$ y E_0, es, a lo más, numerable.

4.4 Hacemos algunas observaciones, sobre las definiciones anteriores, las cuales simplificarán nuestro trabajo.

a). Sea μ una medida con signo, según la descomposición de Hahn existen $A, B \in \mathcal{S}$ ∋ $A \cap B = \phi$, $A \cup B = X$, $\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \geq 0$ y $-\mu^-(E) = \mu(E \cap B) \leq 0$ $\forall E \in \mathcal{S}$, donde $\mu = \mu^+ - \mu^-$ es la descomposición de Jordan de μ.

De esta descomposición de μ se desprende fácilmente que μ está concentrada en un conjunto E_0 si y sólo si μ^+, μ^- y $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ están concentradas en E_0. Análogamente, μ satisface algunas de las condiciones ii), iii), iv), v) de la definición anterior, si y sólo si, μ^+, μ^-, $|\mu|$ también la satisfacen.

b) También es fácil comprobar de las definiciones, los siguientes hechos:

i) Toda medida con signo absolutamente continua es continua (de aquí en adelante, suprimiremos la frase "con respecto a ν", a menos que no sea claro cual es la medida ν).

ii) Toda medida con signo discreta es singular.

iii) Si μ es una medida con signo absolutamente continua y singular entonces $\mu \equiv 0$

iv). Si $g: X \to \mathbb{R}$ es una función ν-integrable entonces:

$\mu(E) = \int_{(E)} g \, d\nu$, define una medida μ t.q. $\mu \ll \nu$.

Ejemplos:

1°). El punto iv) nos da un ejemplo muy general de como construir medidas con signo absolutamente continuas, de hecho, uno de los teoremas que probaremos más adelante (El Teorema de Radón Nikodym) asegura que, bajo ciertas restricciones, las únicas medidas con signo absolutamente continuas respecto de una medida ν están dadas por integrales de funciones ν-medibles

2°). Sea $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ el espacio de medida, donde $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, denota la σ-algebra de Borel de $\mathbb{R}$, y λ es la medida de Lebesgue.

Definamos $\mu: \mathbb{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como sigue. si $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ y $D = \{d_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$

$\mu(B) = \sum_{d_n \in (D \cap B)} \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!}$, μ así definida es una medida discreta con respecto a λ.

Observación: Una medida μ definida sobre un espacio $(X, \mathcal{S})$ t.q. $\mu(X) = 1$ es llamada una probabilidad. En nuestro ejemplo, μ es una probabilidad pues $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} = 1$.

3°) Veamos un ejemplo de una medida continua y singular.

Sea $(X, \mathbb{B}(X), \nu)$ donde $X = [0,1] \times [0,1]$, $\mathbb{B}(X)$ denota los Borelianos de X y ν la medida de Lebesgue bidimensional; sea $\mu : \mathbb{B}(X) \to \mathbb{R}$ t.q. $\mu(E) = \lambda(E \cap \{(x,0) : (x,y) \in E\})$ donde λ es la medida unidimensional de Lebesgue en $[0,1]$, entonces μ satisface las definiciones requeridas.

4°). Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función de Cantor y sea $\mu : \mathbb{B}([0,1]) \to [0,1]$ la medida con f como función generatriz (ver ejemplo 4.1).

Cómo f es continua, μ es continua con respecto a λ. Es inmediato comprobar que μ está concentrada en el conjunto P (ver ejemplo 1.18) y es por lo tanto singular, respecto de λ.

Ahora nos preparamos para probar el Teorema de Radón-Nikodym y el Teorema de descomposición de Lebesgue para medidas con signo

Sea $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida; sea μ una medida discreta definida en $\mathcal{A}$ y concentrada en $E_0 = \{x_1, x_2, \ldots\} \in \mathcal{A}$ con $\nu(E_0) = 0$.

Supongamos además, que $\{x_n\} \in \mathcal{A}$ $\forall n$, entonces $\mu(E) = \sum_{x_n \in E} \mu(\{x_n\})$ $\forall E \in \mathcal{A}$ y las variaciones positiva, negativa y total de μ están dadas por: $\mu^+(E) = \sum_{\substack{x_n \in E \\ \mu(x_n) \geq 0}} \mu(x_n)$ $\quad \mu^-(E) = -\sum_{\substack{x_n \in E \\ \mu(x_n) < 0}} \mu(x_n)$ y

$|\mu|(E) = \sum_{x_n \in E} |\mu(x_n)|$ respectivamente.

Recordemos, que, según nuestra definición de medida con signo, a lo más una de las medidas μ^+, μ^- puede tomar el valor ∞.

<u>4.5 Teorema</u>: Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida. y sea μ una medida con signo finita, entonces μ puede representarse en la forma:
$\mu = C_\mu + D_\mu$. donde C_μ y D_μ son medidas con signo, C_μ es continua y D_μ es discreta.

Dem: Según la descomposición de Hahn, no hay pérdida de generalidad si suponemos que μ es una medida.

Sea $\epsilon > 0$, arbitrario, como μ es finita, existe a lo más un número finito de puntos $x \in \mathfrak{X}$ t.q. $\{x\} \in \mathcal{A}$, $\nu(\{x\}) = 0$ y $\mu(\{x\}) > \epsilon$ ∴

$E_0 = \{x \in \mathfrak{X} : \{x\} \in \mathcal{A}, \nu(\{x\}) = 0, \mu(\{x\}) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde

$E_n = \{x \in \mathfrak{X} : \{x\} \in \mathcal{A}, \nu(\{x\}) = 0, \mu(\{x\}) \geq 1/n\}$ es un conjunto a lo más numerable..

Sea $E_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$, sea $E \in \mathcal{A}$, definamos $D_\mu(E) = \sum_{x_i \in E_0} \mu(x_i) \leq \mu(E)$

claramente D_μ es una medida discreta.

Por construcción la función $C_\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ t.q. $C_\mu(E) = \mu(E) - D_\mu(E)$ es una medida que se anula sobre cualquier conjunto de la forma $\{x\} \in \mathcal{A}$ t.q. $\nu(\{x\}) = 0$ ∴ $\mu = C_\mu + D_\mu$ es la representación requerida //

Antes de generalizar el teorema 2.38, probemos un resultado que.

establece la relación entre la definición de continuidad absoluta para medidas con signo y la definición 2.20 para funciones real-valuadas.

4.6 Teorema: Sea $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida y sea μ una medida con signo finita definida sobre $\mathcal{A}$, entonces $\mu \ll \nu$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ arbitrario $\exists\, \delta > 0$ t.q. $|\mu|(E) < \epsilon \quad \forall E \in \mathcal{A}$ con $\nu(E) < \delta$.

Dem: Es inmediato que la condición es suficiente, probemos pues, que es necesaria.

Supongamos que existe $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ t.q. $\nu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ y $|\mu|(E_n) \geq \epsilon_0$. Sea $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m}^{\infty} E_n$, entonces

$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{n \geq m}^{\infty} E_n\right) \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall m \quad \Rightarrow \nu(E) = 0.$

Por otro lado $|\mu|(E) = |\mu|\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m}^{\infty} E_n\right)$, como $|\mu|$ es finita y $\left\{\bigcup_{n \geq m}^{\infty} E_n\right\}_m$ es una sucesión decreciente, obtenemos que: $|\mu|\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m}^{\infty} E_n\right) = \lim_{m \to \infty} |\mu|\left(\bigcup_{n \geq m}^{\infty} E_n\right) \geq \epsilon_0$; esto último contradice la hipótesis $\mu \ll \nu$.

4.7 Teorema de Radon-Nikodym: (1930)

Sea $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida t.q. ν es σ-finita y sea μ una medida definida sobre $\mathcal{A}$ t.q. $\mu \ll \nu$, entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ medible tal que: $\mu(E) = \int_E f\, d\nu \quad \forall E \in \mathcal{A}$, además f es única ν- casi dondequiera.

Dem: dividimos la prueba en casos

1er caso) Supongamos que μ y ν son finitas.

Sea $c > 0$, y sea $\{P(c), N(c)\}$ una descomposición de Hahn para la medida con signo $\mu - c\nu$, donde $P(c)$ es un conjunto positivo y $N(c)$ un conjunto negativo para $\mu - c\nu$. Definimos los siguientes conjuntos medibles:

$A_1 = N(c)$, $A_{k+1} = N((k+1)c) - \bigcup_{j=1}^{k} A_j$,

Por construcción $A_j \cap A_i = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{j=1}^{k} N(jc) = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$; se sigue de ésto que $A_k = N(kc) \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} P(jc)$,

Por lo tanto, si $E \in \mathcal{A}$ y $E \subset A_k$, entonces $E \subset N(kc)$ y $E \subset P((k-1)c)$, de lo cual se sigue, que: $(k-1)c\,\nu(E) \leq \mu(E) \leq kc\,\mu(E)$ $(*)$

Definamos B como sigue: $B = X - \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} P(jc)$ $\therefore$ $B \subset P(kc)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $0 \leq kc\,\nu(B) \leq \mu(B) \leq \mu(X) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $\nu(B) = 0$, y como $\mu \ll \nu$ tenemos que $\mu(B) = 0$.

Definamos una función: $f_c : X \to \mathbb{R}$ t.q. $f_c(x) = (k-1)c$ si $x \in A_k$ y $f_c(x) = 0$ $\forall x \in B$.

Sea $E \in \mathcal{A}$, entonces $E = (E \cap B) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)$, se sigue de $(*)$ que:

$\int_E f_c\,d\nu \leq \mu(E) \leq \int_E (f_c + c)\,d\nu \leq \int_E f_c\,d\nu + c\,\nu(X)$.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, usamos la construcción anterior con $c = 2^{-n}$ para obtener una sucesión de funciones $\{f_n\}$ t.q.

$\int_E f_n d\nu \leq \mu(E) \leq \int_E f_n d\nu + 2^{-n}\nu(X)\ \forall n \in \mathbb{N}$ (**).

$\forall m \geq n$, tenemos: $\int_E f_n d\nu \leq \mu(E) \leq \int_E f_m d\nu + 2^{-m}\nu(X)$ y.

$\int_E f_m d\nu \leq \mu(E) \leq \int_E f_n d\nu + 2^{-n}\nu(X)$.; de estas desigualdades obtenemos:

$\left| \int_E (f_n - f_m) d\nu \right| \leq 2^{-n}\nu(X)\ \forall E \in \mathcal{A}$.

Si en esta última desigualdad ponemos $E = \{x \in X : (f_n - f_m)(x) \geq 0\}$.

y $E = \{x \in X : (f_n - f_m)(x) \leq 0\}$. entonces obtenemos:

$\int_X |f_n - f_m| d\nu \leq 2^{-n+1}\nu(X)\ \forall m \geq n$.

Claramente $f_n \in L_1(X, \mathcal{A}, \nu)$, la última desigualdad nos dice que $\{f_n\}$ converge. en $L_1(X, \mathcal{A}, \nu)$ a una función $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \nu)$ t.q. $f \geq 0$. (pues $f_n \geq 0$) y

$\left| \int_E f_n d\nu - \int_E f d\nu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\nu \leq \int_X |f_n - f| d\nu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y por (**) obtenemos. $\mu(E) = \lim \int_E f_n d\nu = \int_E f d\nu\ \ \forall E \in \mathcal{A}$..

Veamos que f es única salvo conjuntos de ν-medida cero.

Supongamos que $\mu(E) = \int_E f d\nu = \int_E g\, d\nu\ \forall E \in \mathcal{A}$., entonces:

$\int_E (f - g) d\nu = 0\ \ \forall E \in \mathcal{A}$.

Tomemos. $E_1 = \{x \in X : (f-g)(x) \geq 0\}$ y $E_2 = \{x \in X : (f-g)(x) < 0\}$.

Aplicando la última igualdad a E_1 y E_2 y usando el hecho de que si $f \geq 0$ entonces $\int f d\nu = 0 \iff f = 0$ c.d. relativo a ν, obtenemos que $f = g$. c.d. relativo a ν.

2º caso: μ y ν son σ-finitas

Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{A}$ t.q. $\bigcup_n X_n = X$ y $\mu(X_n), \nu(X_n) < \infty$ $\forall n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la medida μ_n t.q. $\mu_n(E) = \mu(E \cap X_n)$ $\forall E \in \mathcal{A}$.

Aplicando el argumento precedente a μ_n y ν, obtenemos una función f_n t.q. $\mu_n(E) = \int_E f_n \, d\nu$ $\forall E \subset X_n$ y $f_n(x) = 0$ $\forall x \in X - X_n$, esto último nos asegura, además, que $\mu_n(E) = \int_E f_n \, d\nu$ $\forall E \in \mathcal{A}$.

Si $n \leq m$ entonces $X_n \subset X_m$ y $\int_E f_n \, d\nu = \int_E f_m \, d\nu$ $\forall E \subset X_n$, $E \in \mathcal{A}$; de la unicidad de f_n se sigue que $f_n = f_m$ c.d. en X_n $\forall m \geq n$;

sea $F_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$, así $\{F_n\}_n$ es una sucesión creciente t.q. $F_n \geq 0$ $\forall n$. Sea $F = \lim_{n \to \infty} F_n$

Si $E \in \mathcal{A}$, entonces, $\mu(E \cap X_n) = \int_E f_n \, d\nu = \int_E F_n \, d\nu$; como $(E \cap X_n)_n$ es una sucesión creciente cuya unión es E, se tiene, por el teorema de la convergencia monótona, que $\mu(E) = \lim \mu(E \cap X_n) = \lim \int_E F_n = \int_E F \, d\nu$. La unicidad se establece como en el primer caso.

3er caso). μ es una medida arbitraria y ν es finita.

Sea $\{P_n, N_n\}$ una descomposición de Hahn para $\mu - n\nu$.

Sea $P = \bigcap_n P_n$ $N = \bigcup_n N_n$ entonces: $\mu(N_n) - n\nu(N_n) \leq 0 \Rightarrow$ $\mu(N_n) \leq n\nu(N_n) < \infty$ $\therefore$ N es un conjunto σ-finito para μ.

Por otro lado: si $E \subset P$, entonces $E \subset P_n \ \forall n$ $\therefore$ $(\mu - n\nu)(E) \geq 0 \ \forall n$

y por consiguiente $\mu(E) \geq n\nu(E)$ $\therefore$ si $\nu(E) > 0$, entonces $\mu(E) = \infty$

y si $\nu(E) = 0$ entonces $\mu(E) = 0$ pues $\mu \ll \nu$.

Sea $\mu_1 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ t.q. $\mu_1(E) = \mu(E \cap N)$ $\forall E \in \mathcal{S}$. y sea $\mu_2 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ t.q.

$\mu_2(E) = \mu(E \cap P)$, claramente $\mu = \mu_1 + \mu_2$ pues $\mathfrak{X} = P \cup N$.

μ_1 es σ-finita y $\mu_1 \ll \nu$ $\therefore$ $\mu_1(E) = \int_E f \, d\nu$ $\forall E \in \mathcal{S}$ por el caso

anterior; claramente podemos tomar $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{X} - N$.

Definimos $F : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ t.q. $F(x) = f(x)$ $\forall x \in N$ y $F(x) = \infty$ $\forall x \in P$

entonces, es inmediato verificar que $\mu(E) = \int_E F \, d\mu$ $\forall E \in \mathcal{S}$.

4º caso). μ es arbitraria y ν σ-finita

Para probar este caso, basta elegir una sucesión $\{\mathfrak{X}_n\}_n$ creciente, con

$\mathfrak{X}_n \in \mathcal{S}$ $\forall n$ y $\bigcup_n \mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}$ t.q. $\nu(\mathfrak{X}_n) < \infty$ $\forall n$, entonces, suponiendo

el 3er caso, y por medio de un razonamiento análogo con el cual se probó

el 2º caso a partir del primero, obtenemos este último caso //.

Es claro que si μ es una medida con signo, el Teorema precedente

también es válido pues $\mu \ll \nu \iff \mu^+ \ll \nu$ y $\mu^- \ll \nu$, por con-

siguiente, si $\mu^+(E) = \int_E f_1 \, d\nu$ y $\mu^-(E) = \int_E f_2 \, d\nu$ $\forall E \in \mathcal{S}$ enton-

ces $\mu(E) = \int_E (f_1 - f_2) \, d\nu$

La función f, cuya existencia hemos establecido en el Teorema. es.

llamada la derivada de Radón-Nikodym de μ con respecto a ν y es denotada por $\frac{d\mu}{d\nu}$. Observemos, además, que esta derivada no siempre es integrable, de hecho, del Teorema se desprende que f es integrable si y sólo si μ es finita.

Señalemos, sin demostración, algunas propiedades de la derivada de Radón-Nikodym.

1º). Si $\mu_j \ll \nu$ $(j=1,2)$ entonces $\frac{d(\mu_1+\mu_2)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu}\mu_1 + \frac{d}{d\nu}\mu_2$ ν-c.d.

2º). Si λ, μ, ν son medidas σ finitas $\ni \mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \nu$ entonces:

$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\nu}$ ν-c.d.

3º). Si μ y ν son medidas σ finitas $\ni$. $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$ entonces:

$\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}$ c.d.

La 1ª propiedad es obvia, la segunda y la Tercera son consecuencias inmediatas del siguiente resultado cuya prueba no es difícil:

4º). Si μ, ν son medidas σ finitas, sobre el espacio medible $(\underline{X}, \mathcal{A})$ y $\mu \ll \nu$ con $f = \frac{d\mu}{d\nu}$, entonces $\forall g: \underline{X} \to \mathbb{R}$ $g \geq 0$ integrable se Tiene: $\int g\, d\mu = \int g f\, d\nu$.

5º). Si μ, ν son medidas σ finitas, con $\mu \ll \nu$, entonces:

$\mu(\{x : \frac{d\mu}{d\nu}(x) = 0\}) = 0.$

Generalicemos ahora, el teorema 2.44

4.? Teorema de descomposición de Lebesgue.

Sea $(X, \mathcal{S}, \nu)$ un espacio de medida σ-finita y μ una medida con signo σ-finita definida sobre $\mathcal{S}$, entonces μ puede descomponerse como una suma:

$\mu = A_\mu + S_\mu + D_\mu$, donde A_μ es absolutamente continua, S_μ es continua y singular y D_μ es discreta, además esta representación es única.

Dem: No hay pérdida de generalidad si consideramos a μ una medida.

Según el Teorema 4.5, μ se puede descomponer como $\mu = C_\mu + D_\mu$ con C_μ continua y D_μ discreta. De la demostración de este Teorema se sigue la unicidad de D_μ.

Procedemos, entonces, a probar la siguiente descomposición: $C_\mu = A_\mu + S_\mu$

Definamos la siguiente medida: $\lambda = \mu + \nu$. Es claro, que $\mu \ll \lambda$ y $\nu \ll \lambda$, por el Teorema de Radon-Nikodym $\exists\ f, g \geq 0$ medibles $\ni$

$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda$ y $\nu(E) = \int_E g\, d\lambda$. $\forall E \in \mathcal{S}$.

Sean $A = \{x : g(x) = 0\}$ y $B = \{x : g(x) > 0\}$. $\therefore$ Claramente $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$

Definimos μ_1 y μ_2 como sigue: $\mu_1(E) = \mu(E \cap A)$, $\mu_2(E) = \mu(E \cap B)$.

como $\nu(A) = 0$ y μ_1 está concentrada en A, concluimos que μ_1 es singular con respecto a ν. Veamos que $\mu_2 \ll \nu$

Sea $E \ni \nu(E) = 0$ entonces $\int_E g\, d\lambda = 0$ $\therefore$ $g = 0$ λ-c.d. en E;

Por lo tanto $\lambda(E \cap B) = 0$; como $\mu \ll \lambda$ se tiene $\mu_2(E) = \mu(E \cap B) = 0$ $\therefore$

$\therefore \mu_2 << \nu$. Ponemos $\mu_2 = A_\mu$ y $\mu_1 = S_\mu$.

Probemos la unicidad: supongamos $\mu = A_\mu + S_\mu = A'_\mu + S'_\mu$ con $A'_\mu << \nu$ y S'_μ singular. entonces $A_\mu - A'_\mu = S'_\mu - S_\mu$. y esta última función resulta ser absolutamente continua y singular. $\therefore$ $A_\mu - A'_\mu = 0 \Rightarrow A_\mu = A'_\mu$ y $S_\mu = S'_\mu$ //

Veamos ahora las relaciones que existen entre las variaciones de las funciones que aparecen en la descomposición de Lebesgue de μ.

Recordemos, primero, que si ϕ es una medida con signo y $\{A, B\}$ es una descomposición de Hahn para ϕ con A positivo y B negativo, entonces $\phi^+(E) = \phi(E \cap A) = \sup\{\phi(I) : I \subset E,\ I \text{ medible}\}$ y

$\phi^-(E) = \phi(E \cap B) = -\inf\{\phi(I) : I \subset E,\ I \text{ medible}\}$.

Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos medidas con signo, definidas sobre una σ-álgebra $\mathcal{S}$, y sea $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Sea $E \in \mathcal{S}$. entonces $\forall A \in \mathcal{S}$ $\ni$ $A \subset E$

$\phi(A) = \phi_1(A) + \phi_2(A) \leq \phi_1^+(E) + \phi_2^+(E)$; de ésto concluimos que $\phi^+ \leq \phi_1^+ + \phi_2^+$.

En general, la igualdad no se da, como lo muestra el ejemplo: $\phi_1 = -\phi_2 \neq 0$. El siguiente teorema nos dice bajo qué condiciones se tiene la igualdad $\phi^+ = \phi_1^+ + \phi_2^+$.

<u>9.9 Teorema</u>: Si ϕ_1 y ϕ_2 son medidas con signo definidas sobre una σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$, tales que están concentradas en conjuntos

disjuntos, entonces $\phi^+ = \phi_1^+ + \phi_2^+$ donde $\phi = \phi_1 + \phi_2$

Dem: Sabemos que $\phi^+ \leq \phi_1^+ + \phi_2^+$, probemos la otra desigualdad.

Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ los conjuntos sobre los cuales están concentradas ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente.

Sea $E \in \mathcal{A}$, y $\epsilon > 0$ arbitrarios, sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ t.q. $A_1 \subset E \cap E_1$ y $A_2 \subset E \cap E_2$ y $\phi_1^+(E) = \phi_1^+(E \cap E_1) < \phi_1(A_1) + \epsilon$ (1). $\phi_2^+(E) = \phi_2^+(E \cap E_2) < \phi_2(A_2) + \epsilon$ (2).

Como $A_1 \cup A_2 \subset E$ se sigue que $\phi^+(E) \geq \phi(A_1 \cup A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2) =$
$= \phi_1(A_1) + \phi_2(A_2) > \phi_1^+(E) + \phi_2^+(E) - 2\epsilon$. donde la última desigualdad se obtiene de (1) y (2). Como la ϵ es arbitraria concluimos que:

$$\phi^+(E) \geq \phi_1^+(E) + \phi_2^+(E) \quad //.$$

4.10 Corolario: Si ϕ_1 y ϕ_2 son medidas con signo definidas sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$, tal que están concentradas en conjuntos disjuntos y si $\phi = \phi_1 + \phi_2$ entonces: $\phi^- = \phi_1^- + \phi_2^-$ y $|\phi| = |\phi_1| + |\phi_2|$

4.11 Corolario Sea $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida y $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita t.q. $\mu = C_\mu + D_\mu$ donde C_μ es la componente continua y D_μ la componente discreta de μ, entonces:

$$\mu^+ = C_\mu^+ + D_\mu^+ \quad \mu^- = C_\mu^- + D_\mu^- \quad |\mu| = |C_\mu| + |D_\mu|.$$

4.12 Corolario: Sea $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida. y $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida con signo t.q. $\mu = A_\mu + S_\mu$ donde $A_\mu \ll \nu$ y S_μ es singular, entonces; $\mu^+ = \lambda_\mu^+ + \varsigma_\mu^+$, $\mu^- = \lambda_\mu^- + \varsigma_\mu^-$ y $|\mu| = |\lambda_\mu| + |\varsigma_\mu|$.

Las pruebas de estos tres corolarios son inmediatas. //

En el ejemplo 4.1 vimos que dada una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente, continua por la derecha en (a,b), ésta, genera una medida sobre $\mathbb{B}([a,b])$, esta medida se llama, la medida de Borel-Stieltjes generada por f. De manera más general, dada $f \in BV[a,b]$, y continua por la derecha en (a,b), f se puede expresar como: $f = f_1 - f_2$ donde f_1 y f_2 son crecientes y continuas por la derecha en (a,b). (Teorema 2.8, corolario 2.14). Por consiguiente f genera una medida con signo ϕ_f finita sobre $\mathbb{B}([a,b])$ que resulta ser la diferencia de las medidas generadas por f_1 y f_2. f se llama la función generatriz de ϕ_f

Recíprocamente sea $\phi: \mathbb{B}([a,b]) \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita. se define su función generatriz $f_\phi: [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$f_\phi(x) = \phi([a,x])$ $\forall x \in (a,b]$ y $f_\phi(a) = 0$. f_ϕ es la diferencia de las dos funciones generatrices f_1 y f_2 correspondientes a las medidas que forman una descomposición de Jordan de ϕ. Es claro que f_ϕ, f_1, f_2 son continuas por la derecha en (a,b) y como f_1 y f_2 son crecientes, $f \in BV[a,b]$.

Veamos algunas relaciones que existen entre las medidas con signo.

definidas sobre $\mathbb{B}([a,b])$ y sus funciones generatrices.

4.13 Teorema: Una medida con signo ϕ definida sobre $\mathbb{B}([a,b])$ es continua con respecto a la medida de Lebesgue λ si y sólo si su función generatriz f_ϕ es continua.

Dem: Sea $x \in (a,b]$., $f_\phi(x) - f_\phi(x^-) = \lim_{\xi \to x^-} (f_\phi(x) - f_\phi(\xi)) = \lim_{\xi \to x^-} \phi((\xi, x])$ $= \phi(\{x\})$ pues ϕ es finita $\therefore$ $f_\phi(x) - f_\phi(x^-) = 0 \Longleftrightarrow \phi(\{x\}) = 0$, análogamente, se prueba que: $\phi(\{a\}) = 0 \Longleftrightarrow f_\phi(a) = f_\phi(a^+)$

4.14 Teorema: Sea $\phi : \mathbb{B}([a,b]) \to \mathbb{R}$. una medida con signo finita entonces $\phi << \lambda$ si y sólo si, la función generatriz de ϕ, $f_\phi \in AC[a,b]$.

Dem: Por el corolario 2.24 y la observación 4.4., no hay pérdida de generalidad si suponemos que ϕ es una medida y que f_ϕ es creciente.

Supongamos $f_\phi \in AC[a,b]$., sea $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ $\ni$ si $\{(\alpha_k, \beta_k]\}_k$ es una sucesión de intervalos disjuntos contenidos en $[a,b]$. y $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta$ entonces $\sum_{k \in \mathbb{N}} \{f_\phi(\beta_k) - f_\phi(\alpha_k)\} < \epsilon$ (*).

Sea $E \subset [a,b]$ $\ni$ $\lambda(E) = 0$. Sea $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una colección de intervalos disjuntos (no necesariamente abiertos) contenidos en $[a,b]$. $\ni$ $E \subset \bigcup_k I_k$ y $\sum_k \lambda(I_k) < \delta$. Entonces por (*) tenemos que:

$\phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(I_k) < \epsilon$. $\therefore$ $\phi(E) < \epsilon$ y como ϵ es arbitrario concluimos que $\phi(E) = 0$.

Supongamos ahora que ψ es absolutamente continua, entonces por el Teorema de Radón-Nikodym $\exists\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable t.q. $\psi(E) = \int_E g\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{B}([a,b])$.

En particular $\sum_{k=1}^{n} |f_\psi(\beta_k) - f_\psi(\alpha_k)| = \sum_{k=1}^{n} \int_{(\alpha_k,\beta_k]} g\, d\lambda$. donde $\{(\alpha_k,\beta_k]\}_{k=1}^{n}$ es una colección disjunta de intervalos contenidos en $[a,b]$. De esta última igualdad y del Teorema 2.34 se sigue que $f_\psi \in A([a,b])$.

<u>4.15 Corolario.</u> Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces $f \in A([a,b])$ si y sólo si $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} g\, d\lambda$ donde g es una función integrable en $[a,b]$.

Notamos que este último resultado lo habíamos obtenido en los teoremas 2.34 y 2.38, sólo que el Teorema 2.38 nos dice además que $g = f'$ λ-c.d.

Ahora probaremos un resultado análogo al Teorema 4.14. Para ésto necesitamos algunos resultados.

<u>4.16 Definición:</u> Sea $f \in BV[a,b]$. Sea $N_a^b(f) = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \}$ y $P_a^b(f) = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ \}$ donde $r^+ = r$ si $r \geq 0$ y $r^+ = 0$ si $r < 0$ y $r^- = |r| - r^+$ y los supremos se toman sobre todas las posibles particiones finitas de $[a,b]$. N_a^b y $P_a^b(f)$ se llaman las <u>variaciones negativa y positiva de f</u> respectivamente.

<u>4.17 Lema.</u> Sea $f \in BV[a,b]$ entonces $V_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f)$

Dem: Sea $p = \sum_{i=1}^{K} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$ y $n = \sum_{i=1}^{K} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$ donde $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_K = b\}$ es una partición fija.

Es claro que $f(b)-f(a)=p-n$ $\therefore$ $p=n+f(b)-f(a)\leq N_a^b(f)+f(b)-f(a)$, y tomando el supremo del lado izquierdo, obtenemos $P_a^b(f)\leq N_a^b(f)+f(b)-f(a)$ $\therefore$

$P_a^b(f)-N_a^b(f)\leq f(b)-f(a)$.

Análogamente $N_a^b(f)-P_a^b(f)\leq f(b)-f(a)$, estas dos últimas desigualdades muestran que $P_a^b(f)-N_a^b(f)=f(b)-f(a)$.

De la igualdad $\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=n+p$ se sigue que:

$V_a^b(f)\geq n+p=p-f(b)+f(a)+p=2p+N_a^b(f)-P_a^b(f)$ y tomando el supremo sobre los p del lado derecho, concluimos que: $V_a^b(f)\geq P_a^b(f)+N_a^b(f)$.

La desigualdad inversa se sigue de las definiciones $\therefore$

$V_a^b(f)=P_a^b(f)+N_a^b(f)$ //

<u>4.18 Teorema</u>. Sea ϕ una medida con signo finita definida sobre $\mathbb{B}([a,b])$ y sea f_ϕ su función generatriz, entonces las funciones generatrices de $\phi^+,\phi^-,|\phi|$ están definidas como sigue:

$f_{\phi^+}(x)=P_a^x(f_\phi)$, $f_{\phi^-}(x)=N_a^x(f_\phi)$ y $f_{|\phi|}(x)=V_a^x(f_\phi)$

Dem: Probemos primero que $f_{\phi^+}(x)\geq P_a^x(f_\phi)$ y $f_{\phi^-}(x)\geq N_a^x(f_\phi)$

$f_{\phi^+}(x)=\phi^+([a,x])=\sup\{\phi(E): E\subset[a,x] \text{ y } E\in\mathbb{B}([a,b])\}\geq$

$\geq\sup\{\sum_{j=1}^{n}[f_\phi(x_j)-f_\phi(x_{j-1})]^+\}$ donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de $[a,x]$ $\therefore$ $f_{\phi^+}(x)\geq P_a^x(f_\phi)$ (1).

Análogamente se prueba que $f_{\phi^-}(x)\geq N_a^x(f_\phi)$ (2).

Ahora, sea $\phi = \phi^+ - \phi^-$ la descomposición de Jordan de ϕ y sea $\{A, B\}$ una descomposición de Hahn para ϕ, con A positivo y B negativo. Recordemos la siguiente propiedad de la descomposición de Jordan:

Si $\phi = \phi^+ - \phi^- = \mu_1 - \mu_2$ donde μ_1 y μ_2 son medidas, entonces $\phi^+ \leq \mu_1$ y $\phi^- \leq \mu_2$ pues: $\phi^+(E) = \phi(E \cap A) \leq \mu_1(E \cap A) \leq \mu_1(E)$ $\therefore$ $\phi^+(E) \leq \mu_1(E)$ y $\phi^-(E) \leq \mu_2(E)$ (3) $\forall E$ medible.

Es claro que $f_\phi(x) = f_{\phi^+}(x) - f_{\phi^-}(x) = \dfrac{V_a^x(f_\phi) + f_\phi(x)}{2} - \dfrac{V_a^x(f_\phi) - f_\phi(x)}{2}$.

Por el Teorema 2.8 sabemos que $\dfrac{V_a^x(f_\phi) - f_\phi(x)}{2}$ es una función creciente y de manera análoga se prueba que $\dfrac{V_a^x(f_\phi) + f_\phi(x)}{2}$ es creciente. Por lo tanto estas funciones generan dos medidas cuya diferencia es ϕ; por consiguiente de la desigualdad (3) concluimos que:

$f_{\phi^+}(x) \leq \dfrac{V_a^x(f_\phi) + f_\phi(x)}{2}$ y $f_{\phi^-}(x) \leq \dfrac{V_a^x(f_\phi) - f_\phi(x)}{2}$ $\therefore$

$f_{|\phi|} = f_{\phi^+} + f_{\phi^-} \leq V(f_\phi)$. Esta última desigualdad, junto con (1) y (2) y el lema 4.17 nos dan las igualdades requeridas //.

<u>4.19. lema:</u> Sea $\phi : \mathbb{B}([a,b]) \to \mathbb{R}$ una medida y $f_\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ su función generatriz, entonces $\lambda^*(f_\phi(E)) \leq \phi(E)$ $\forall E \in \mathbb{B}([a,b])$.

Dem: Consideremos la siguiente álgebra de conjuntos:

$\mathcal{A} = \{$Uniones finitas de intervalos $(x, y]$: $a \leq x < y \leq b\}$ donde nuevamente hacemos la convención de que $(a, y] = [a, y] = \{x : a \leq x \leq y\}$.

Sabemos que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}([a,b])$ (i.e. la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$).

Sean $E \in \mathcal{B}([a,b])$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Sea $\{(x_i, y_i]\}_{i=1}^{\infty}$ $\ni$ $(x_i, y_i] \cap (x_j, y_j] = \emptyset$

$\forall i \neq j$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i, y_i]$ y $\bar{\phi}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \phi((x_i, y_i]) - \epsilon$

se sigue, entonces, que $f_\phi(E) \subset f_\phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i, y_i]\right)$ $\therefore$

$$\lambda^*(f_\phi(E)) \leq \lambda^*\left[f_\phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}((x_i, y_i])\right)\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(f_\phi((x_i, y_i])) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f_\phi(y_i) - f_\phi(x_i) =$$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \phi((x_i, y_i]) \leq \bar{\phi}(E) + \epsilon$, como la ϵ es arbitraria concluimos que

$\lambda^*(f_\phi(E)) \leq \bar{\phi}(E)$ //

<u>4.20 Teorema.</u> Sea $\phi : \mathcal{B}([a,b]) \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita y $f_\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ su función generatriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i). ϕ es singular con respecto a la medida de Lebesgue λ.

ii). dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe una colección finita de subintervalos disjuntos dos a dos $\{(\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$ $\ni$ $(\alpha_k, \beta_k] \subset [a,b]$, $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) < \epsilon$ y

$\sum_{k=1}^{n} |f_\phi(\beta_k) - f_\phi(\alpha_k)| > V_a^b(f_\phi) - \epsilon$

iii). f_ϕ es singular en el sentido de la definición 2.43 i.e. $f_\phi' = 0$ c.d.

Dem: Probaremos primero la equivalencia entre i) y ii).

Supongamos que ϕ es singular y sea $E_0 \subset [a,b]$ $\ni$ $\lambda(E_0) = 0$ y ϕ está concentrada en E_0, es claro, entonces, que $|\phi|$ está concentrada en E_0.

Por el Teorema 4.18 $|\phi| = V(f_\phi)$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y sea $\{(\alpha_k, \beta_k]\}_k$

una colección numerable de intervalos disjuntos dos a dos, y contenidos en $[a,b]$, $E_0 \subset \bigcup_K (\alpha_K, \beta_K]$ y $\sum_{K=1}^{\infty} (\beta_K - \alpha_K) < \epsilon$

Es claro, entonces, que $\sum_{K=1}^{\infty} |\psi|((\alpha_K, \beta_K]) = V_a^b(f_\psi)$ pues $|\psi|$ está concentrada en E_0. Sea $n \in \mathbb{N}$ ∋ $\sum_{K=1}^{n} |\psi|((\alpha_K, \beta_K]) > V_a^b(f_\psi) - \epsilon/2$ y para cada uno de los n intervalos $(\alpha_K, \beta_K]$ elegimos una partición $\{\alpha_K = x_0^{(K)}, x_1^{(K)}, \ldots, x_{m_K}^{(K)} = \beta_K\}$ ∋ $\sum_{J=1}^{m_K} |f_\psi(x_J^{(K)}) - f_\psi(x_{J-1}^{(K)})| > |\psi|((\alpha_K, \beta_K]) - \epsilon/2n$, por lo tanto:

$$\sum_{K=1}^{n} \sum_{J=1}^{m_K} |f_\psi(x_J^{(K)}) - f_\psi(x_{J-1}^{(K)})| > \sum_{K=1}^{n} |\psi|((\alpha_K, \beta_K]) - \epsilon/2 > V_a^b(f_\psi) - \epsilon \quad \therefore$$

se tiene ii).

Supongamos ahora que f_ψ satisface ii).

Escribamos $\psi = A\psi + S\psi$ donde $A\psi \ll \lambda$ y $S\psi$ es singular.

Sean; f_ψ, f_A, f_S las funciones generatrices de $\psi, A\psi, S\psi$ respectivamente, entonces $f_\psi = f_A + f_S$ donde $f_A \in AC[a,b]$ por el Teorema 4.14

Por hipótesis, dado cualquier $\epsilon > 0$ ∃ una colección finita de subintervalos de $[a,b]$, $\{(\alpha_K, \beta_K]\}_{K=1}^{n}$ disjuntos ∋ $\sum_{K=1}^{n} (\beta_K - \alpha_K) < \epsilon$ y $\sum_{K=1}^{n} |f_\psi(\beta_K) - f_\psi(\alpha_K)| > V_a^b(f_\psi) - \epsilon$. De esta última desigualdad y usando la desigualdad del Triángulo obtenemos:

$$\sum_{K=1}^{n} |f_S(\beta_K) - f_S(\alpha_K)| > V_a^b(f_\psi) - \sum_{K=1}^{n} |f_A(\beta_K) - f_A(\alpha_K)| - \epsilon$$

Como $f_A \in AC[a,b]$, la suma de la derecha tiende a cero conforme $\epsilon \to 0$. Por consiguiente $\sum_{K=1}^{m} |f_S(\beta_K') - f_S(\alpha_K')| > V_a^b(f_\psi) - \epsilon'$ para $\epsilon' > 0$ arbitrario y una partición $\{(\alpha_K', \beta_K']\}_{K=1}^{m}$ ∴ $V_a^b(f_S) \geq V_a^b(f_\psi)$ ∴ Por el corolario 4.12.

y el Teorema 4.13 concluimos que. $V_a^b(f_s) = V_a^b(f_\phi)$ y $V_a^b(f_A) = 0 \Rightarrow A_\phi \equiv 0$.

y $\phi = S\phi$ $\therefore$ ϕ es singular //

Ahora probaremos. i) $\Rightarrow$ iii).

No hay pérdida de generalidad. si suponemos que ϕ es una medida. y f_ϕ es creciente.

Sea ϕ singular., entonces $\exists\ B_0 \in \mathcal{B}([a,b])$ t.q. $\phi(E) = \phi(E \cap B_0)$ y $\lambda(B_0) = 0$

Sea $I = [a,b] - B_0$ y sea $E^{(n)} = \{x \in I : f'_\phi(x) \geq 1/n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $E^{(n)}$ es un conjunto medible, y basta probar que $\lambda(E^{(n)}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\phi(I) = 0$, existe. $U \subset [a,b]$. abierto t.q. $\phi(U) < \epsilon$ y $I \subset U$ para un $\epsilon > 0$, fijo.

Sea $\epsilon' < 1/n$ positivo. Para cada $x \in E^{(n)}$ existe una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ t.q. $h_n \downarrow 0$,

$\dfrac{f_\phi(x+h_n) - f_\phi(x)}{h_n} > \frac{1}{n} - \epsilon'$ y $[x, x+h_n] \subset U$, entonces, se tiene:

$\dfrac{\phi(x, x+h_n]}{h_n} > \frac{1}{n} - \epsilon'$ $\therefore$ $\phi((x, x+h_n]) > (\frac{1}{n} - \epsilon')\, h_n$.

Es claro que los intervalos $[x, x+h_n]$ cubren $E^{(n)}$ en el sentido de Vitali

Sea $\{[x_i, x_i+h_i]\}_{i=1}^{\infty}$ una cubierta de $E^{(n)}$ t.q. los $[x_i, x_i+h_i]$ son disjuntos dos a dos y $\lambda(E^{(n)} - \bigcup_{i=1}^{\infty} [x_i, x_i+h_i]) = 0$.

De la última igualdad. obtenemos también que: $\lambda(E^{(n)} - \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i, x_i+h_i]) = 0$

Ahora bien $\sum_{i=1}^{\infty} \phi((x_i, x_i+h_i]) > (\frac{1}{n} - \epsilon') \sum_{i=1}^{\infty} h_i$ y $\epsilon > \phi(U) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \phi((x_i, x_i+h_i]) >$

$> (\frac{1}{n} - \epsilon') \sum_{i=1}^{\infty} \lambda((x_i, x_i+h_i])$, pero. $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(x_i, x_i+h_i] = \lambda(E^{(n)})$ $\therefore$

$\epsilon > (b-c')\,\lambda(E^{(n)})$ y como ϵ es arbitrario concluimos, que $\lambda(E^{(n)})=0$.

Recíprocamente supongamos que $f'_\phi = 0$ c.d.

Sea $E_0 = \{x \in [a,b] : f'_\phi(x) = 0\}$. Para cada $x \in E_0$ existe una sucesión $\{h_n\}_n$

∴ $h_n \downarrow 0$, $[x, x+h_n] \subset [a,b]$ $\forall n$ y $\dfrac{f_\phi(x+h_n) - f_\phi(x)}{h_n} < \epsilon$ i.e.

$$\frac{\phi([x, x+h_n])}{\lambda([x, x+h_n])} < \epsilon .$$

Los intervalos $[x, x+h_n]$ cubren E_0 en el sentido de Vitali.

Sea $\{[x_i, x_i+h_i]\}_{i=1}^{\infty}$ una subcubierta ∴ $[x_i, x_i+h_i] \cap [x_j, x_j+h_j] = \emptyset$ $\forall i \neq j$

y $\lambda(E_0 - \bigcup_i [x_i, x_i+h_i]) = 0$ (*) y observemos que:

$$\phi\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i, x_i+h_i]\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(x_i, x_i+h_i] < \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \lambda((x_i, x_i+h_i]) \le \epsilon(b-a) \quad (**)$$

Sea $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ $\forall k \in \{1,2,\dots\}$ y para cada ϵ_k hallamos, como arriba, una sucesión de intervalos disjuntos que satisfagan (*).

Sea S_k la unión de estos intervalos, entonces, como en (**) obtenemos:

$$\phi(S_k) < \frac{b-a}{k} \quad \therefore \quad \phi\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k\Big) = 0$$

Observemos que $[a,b] - \bigcap_k S_k = \bigcup_k ([a,b] - S_k)$ ∴ $\lambda([a,b] - \bigcap_k S_k) = 0$.

Sea $B_0 = [a,b] - \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ entonces $\lambda(B_0) = 0$ y como $\phi(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k) = 0$ se sigue que $\phi(E) = \phi(E - \bigcap S_k) = \phi(E \cap B_0)$ $\forall E \in \mathbb{B}([a,b])$ ∴ ϕ es singular //

Como consecuencia, obtenemos un resultado que se había mencionado en 2.43

<u>4.21 Corolario:</u> El subespacio de las funciones singulares definidas

en $[a,b]$. ($S[a,b]$) es un subespacio cerrado de $BV([a,b])$

Dem: sea $\{f_n\}_n \subset S[a,b]$ una sucesión de $\| \|_V$ - Cauchy, por lo $\exists f$ t.q. $\|f - f_n\|_V \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $f \in BV[a,b]$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_V < \frac{\epsilon}{4}$ y sea $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{\nu}$ una colección de intervalos disjuntos t.q. $\sum_{k=1}^{\nu}(\beta_k - \alpha_k) < \epsilon/4$ y $\sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| > V_a^b(f_{n_0}) - \epsilon/4$, entonces:

$$|V_a^b(f) - \sum_{k=1}^{\nu}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|| = |V_a^b(f) - V_a^b(f_{n_0}) + V_a^b(f_{n_0}) - \sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| - \sum_{k=1}^{\nu}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|| \leq$$

$$\leq |V_a^b(f) - V_a^b(f_{n_0})| + |V_a^b(f_{n_0}) - \sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)|| + |\sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| - \sum_{k=1}^{\nu}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|| \ (*)$$

pero $\epsilon/4 > \|f_{n_0} - f\|_V \geq |\|f_{n_0}\|_V - \|f\|_V| = ||f_{n_0}(a)| + V_a^b(f_{n_0}) - |f(a)| - V_a^b(f)| \geq$

$||f_{n_0}(a)| - |f(a)|| - |V_a^b(f_{n_0}) - V_a^b(f)||$ $\therefore$

$$|V_a^b(f_{n_0}) - V_a^b(f)| \leq \epsilon/4 + ||f_{n_0}(a)| - |f(a)|| \leq \epsilon/4 + |(f_{n_0} - f)(a)| \leq \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2 \ (1)$$

De la elección de la familia $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{\nu}$ se sigue que:

$$|V_a^b(f_{n_0}) - \sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)|| < \epsilon/4 \ (2). \ \text{y}$$

$$|\sum_{k=1}^{\nu}|f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| - \sum_{k=1}^{\nu}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|| \leq \sum_{k=1}^{\nu}||f_{n_0}(\beta_k) - f_{n_0}(\alpha_k)| - |f(\beta_k) - f(\alpha_k)||$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\nu}|(f_{n_0} - f)(\beta_k) - (f_{n_0} - f)(\alpha_k)| \leq V_a^b(f_{n_0} - f) \leq \epsilon/4 \ (3).$$

De (1), (2), (3) se sigue que $(*) < \epsilon$ $\therefore$ $|V_a^b(f) - \sum_{k=1}^{\nu}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|| < \epsilon$ y de esta última desigualdad se sigue, que $f \in S[a,b]$ //.

En el Teorema 2.29 se probó que si $f \in AC[a,b]$ entonces f posee la propiedad (N), y el Teorema 2.31 es un recíproco parcial, a saber:

si $f \in BV[a,b]$, f es continua y tiene la propiedad(N), entonces $f \in AC[a,b]$.

Lo que nos proponemos ahora es probar un resultado análogo para funciones singulares monótonas.

<u>4.22 Teorema:</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua por la derecha en (a,b), creciente y no constante, entonces $f \in S[a,b]$ si y sólo si $\exists\, E_0 \in \mathbb{B}([a,b])$ t.q. $\lambda(E_0) = b-a$ y $\lambda(f(E_0)) = 0$.

Dem: Supongamos que $f \in S[a,b]$. Por el Teorema 4.20 ϕ_f es singular. Sea $E \in \mathbb{B}([a,b])$ t.q. $\lambda(E) = 0$ y ϕ_f está concentrada en E.

Sea $E_0 = [a,b] - E$. Es claro que $\lambda(E_0) = b-a$ y por el Teorema 4.19 se tiene $0 \leq \lambda^*(f(E_0)) \leq \phi_f(E_0) = 0$ $\therefore$ $\lambda(f(E_0)) = 0$.

Supongamos ahora que $\exists\, E \in \mathbb{B}([a,b])$ t.q. $\lambda(E) = b-a$ y $\lambda(f(E)) = 0$.

Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ el conjunto de discontinuidades de f y sea $E_0 = E - \bigcup_{i \in I}\{x_i\}$; como I es, a lo sumo, numerable, se tiene que $\lambda(E_0) = b-a$ y $\lambda(f(E_0)) = 0$. Demostremos que $\phi_f(E_0) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$ arbitraria, sea $\{(\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{\infty}$ una familia de intervalos disjuntos dos a dos t.q. $(\alpha_k, \beta_k] \subset [f(a), f(b)]$ $\forall k$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) < \epsilon$ y $f(E_0) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k]$, de la última contensión se sigue que:

$E_0 \subset f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k]\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha_k, \beta_k])$ $\therefore$ $E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(f^{-1}((\alpha_k, \beta_k]) \cap E_0\right)$

Usando ahora la desigualdad $\phi_f(f^{-1}(\alpha_k, \beta_k] \cap E_0) \leq \beta_k - \alpha_k$ (X) la cual no es difícil de verificar, obtenemos $\phi_f(E_0) < \sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k) < \epsilon$ y como

ϵ es arbitraria se tiene $\phi_f(E_0)=0$ $\therefore$ ϕ_f es singular y por consiguiente

$f \in S[a,b]$ //.

observación: La desigualdad (*) del Teorema anterior puede generalizarse, como ahora mostramos:

Si f es creciente y $\{x_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de discontinuidades de f entonces $\phi_f(f^{-1}(E)\cap E_0) \leq \lambda(E)$ $\forall E \in \mathcal{B}[f(a), f(b)]$. donde $E_0 = [a,b] - \bigcup_{i\in I}\{x_i\}$

Dem: Sea $E \in \mathcal{B}([f(a), f(b)])$, sea $\epsilon > 0$. Sea $\{(\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, contenidos en $[f(a), f(b)]$ t.q. $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k]$

y $\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k) \leq \lambda(E)+\epsilon$ entonces: $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k]) \Rightarrow f^{-1}(E)\cap E_0 \subset$

$f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k])\cap E_0 = [\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_k,\beta_k]]\cap E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty}[f^{-1}(\alpha_k,\beta_k]\cap E_0]$ $\therefore$

$\phi_f(f^{-1}(E)\cap E_0) \leq \phi_f(\bigcup_{k=1}^{\infty}[f^{-1}(\alpha_k,\beta_k]\cap E_0]) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\phi_f(f^{-1}(\alpha_k,\beta_k]\cap E_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)$

$\leq \lambda(E)+\epsilon$ $\therefore$ $\phi_f(f^{-1}(E)\cap E_0) \leq \lambda(E)$ //

Nótese la relación que hay entre esta última desigualdad y la del lema 4.19.

Veamos ahora qué tipo de función, es la función generatriz de una medida con signo, la cual es discreta, para esto recordemos la definición de una función de saltos.

4.23 Definición: Sea $f \in BV[a,b]$ y sea $\{x_i\}_{i\in I}$ el conjunto de discontinuidades de f, entonces f es una función de saltos si cumple la siguiente condición: $f(x)=[f(a^+)-f(a)]+\sum_{a<x_k<x}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]+f(x)-f(x^-)$ $\forall x\in(a,b]$.

4.24 Teorema. Una medida con signo finita $\phi:\mathbb{B}([a,b])\to\mathbb{R}$ es discreta si y sólo si, su función generatriz f_ϕ, es una función de saltos continua por la derecha en $(a,b]$

Dem: Supongamos que ϕ es discreta. Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset[a,b]$ el conjunto sobre el cual está concentrada ϕ.

De la definición de función generatriz sabemos que:

$$f_\phi(x)=\phi([a,x])=\phi\Big(\bigcup_{x_i\le x}\{x_i\}\Big)=\sum_{x_i\le x}\phi(\{x_i\})=f_\phi(a^+)-f_\phi(a)+\sum_{a<x_i\le x}[f_\phi(x_i)-f_\phi(x_i^-)]$$

donde $f_\phi(a)=0$ $\therefore$ f_ϕ es una función de saltos.

Supongamos ahora que f_ϕ es una función de saltos continua por la derecha en $(a,b]$, entonces:

$$\phi[a,b]=f_\phi(b)=[f_\phi(a^+)-f_\phi(a)]+\sum_{a<x_k\le b}[f(x_k)-f(x_k^-)]=\phi(\{a\})+\sum_{a<x_k\le b}\phi(\{x_k\})$$

$\therefore$ ϕ está concentrada en $\bigcup_k\{x_k\}\cup\{a\}$ y ϕ es discreta //.

Como corolario de los Teoremas 4.8, 4.11, 4.20 y 4.24 obtenemos, el Teorema de descomposición de Lebesgue para funciones generatrices

4.25 Corolario: Si f_ϕ es la función generatriz de una medida con signo finita $\phi:\mathbb{B}([a,b])\to\mathbb{R}$, entonces f_ϕ puede escribirse como:

$f_\varphi = f_A + f_S + f_D$ (*) donde $f_A \in AC[a,b]$, $f_S \in S[a,b]$ y f_D es una función de saltos. Además $f_A(x) = \int_{[a,x]} g \, d\lambda$ donde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable.

La representación (*) es única y la función g está determinada de manera única salvo un conjunto de λ-medida cero. //

Bibliografía.

4.1 Paul R. Halmos: Measure theory. Springer Verlag. 1970

4.2 R. Bartle: The elements of integration. Wiley, New York 1966.

4.3. E Hewitt, K. Stromberg: Real and abstract analysis. Springer Verlag 1965.

4.4 G.E. Shilov, B.L. Gurevich: Integral, measure and derivative: a unified approach. Dover Publications 1977.

4.5. Walter Rudin: Análisis real y complejo. Alhambra 1979.

4.6 H.L. Royden: Real analysis. Collier Macmillan 1968.

4.7 Mc Shane: Integration. Princeton University Press. 1944.

Capitulo 5.

Estamos ahora, listos para probar el Teorema básico sobre diferenciacion con respecto a un sistema de Vitali, el cual fue mencionado en el capitulo 3. La primera formulación abstracta del siguiente Teorema (para medidas con signo absolutamente continuas) se debe a Y.N. Yumovich (Sur la dérivation des fonctions absolument additives d'ensemble, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 112 (1941)).

<u>5.1 Teorema de Lebesgue Vitali:</u> Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida con μ finita, sea $\mathcal{V}$ un sistema de Vitali consistente de conjuntos de $\mathcal{S}$, y sea ϕ una medida con signo finita. Entonces la derivada de ϕ con respecto a $\mathcal{V}$ existe sobre un conjunto de medida total y coincide con la derivada de la componente absolutamente continua de ϕ

Dem: Sea $\phi = S_\phi + A_\phi$, con $A_\phi \ll \mu$ y S_ϕ singular, y

$A_\phi(E) = \int_E g \, d\mu$ (*) $g: X \to \mathbb{R}$ medible.

Por comodidad, denotemos por S a la medida con signo S_ϕ y por A a A_ϕ.

Probemos primero que $D_{\mathcal{V}} S(x)$ existe y es igual a cero c.d.

Sea Z ·∋· $\mu(Z) = 0$ y S está concentrada en Z. Ya que las variaciones positiva y negativa de S son singulares y están concentradas en Z, no hay pérdida de generalidad si suponemos $S \geq 0$ y por lo tanto $\underline{D}\, S(x) \geq 0$

De acuerdo con el lema 3.13., el conjunto $E_c = \{x : \overline{D}\, S(x) \geq c\} \cap (\mathfrak{X} - Z)$ es medible. Además. E_c tiene medida cero., ya que, de otra manera. conforme al lema 3.11. existiría $Q \subset E_c$ $Q \in \mathcal{S}$ t.q. $\mu(Q) > 0$ y. $S(Q) \geq \frac{c}{2}\mu(Q) > 0$. lo cual es imposible pues $Q \cap Z = \phi$. y S está concentrada en Z. Por consiguiente $\mu(E_c) = 0$., y por lo tanto:

$\mu\{x : \overline{D}\, S(x) > 0\} \cap (\mathfrak{X} - Z) = \lim_{c \to 0} \mu(E_c) = 0$

De esto se sigue que $\overline{D}\, S(x) = 0$ c.d. $\therefore$ $D S(x) = 0$ c.d.

Probemos ahora que $D_{\mathcal{V}} A(x)$ existe y es igual a $g(x)$ c.d.

Si $E \in \mathcal{S}$ es tal que $\overline{D} A(x) \geq c$ $\forall x \in E$ entonces $A(E) \geq c\mu(E)$ (1) :

Usando el Teorema 2.34. (para la integral (*)) dado $\epsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$ t.q. $\mu(E) < \delta \Rightarrow |A(E)| < \epsilon$. Pero, de acuerdo al lema 3.11. $\exists$ $Q \in \mathcal{S}$, $Q \subset E$ t.q. $\mu(E - Q) < \delta$, $A(Q) \geq c\mu(Q)$ se sigue que:

$A(E) = A(Q) + A(E - Q) > c\mu(Q) - \epsilon > c\mu(E) - c\delta - \epsilon$ (si $c > 0$.)

$A(E) = A(Q) + A(E - Q) > c\mu(Q) - \epsilon > c\mu(E) - \epsilon$ (si $c < 0$)

lo cual prueba que $A(E) \geq c\mu(E)$ pues ϵ y δ son arbitrarios.

De manera análoga si $\underline{D} A(x) < c$. $\forall x \in E \in \mathcal{S}$, usando el lema 3.12. se puede probar que $A(E) \leq c\,\mu(E)$. (2)

Sea $E_{a,b} = \{x : a < g(x) < b\}$. Entonces las desigualdades $\bar{D}A(x) \le b$, $\underline{D}A(x) \ge a$ se cumplen c.d. en $E_{a,b}$. De hecho, si suponemos $\bar{D}A(x) > b$ sobre un conjunto $E \subset E_{a,b}$ con $\mu(E) > 0$, entonces de acuerdo a (1),

$A(E) \ge b\,\mu(E)$, lo cual es imposible, pues $A(E) = \int_E g\,d\mu < b\,\mu(E)$.

Similarmente, $\underline{D}A(x) \ge a$ c.d en $E_{a,b}$

Consideremos la familia de todos los conjuntos de la forma

$E_{r_n, s_n} = \{x : r_n < g(x) < s_n\}$ donde r_n y s_n ($r_n < s_n$) son números racionales arbitrarios. Como ya hemos mostrado $r_n \le \underline{D}A(x) \le \bar{D}A(x) \le s_n$ (3).

en E_{r_n,s_n} excepto sobre un conjunto $Z_{r_n,s_n} \subset E_{r_n,s_n}$ con $\mu(Z_{r_n s_n}) = 0$.

Se concluye entonces que $DA(x)$ existe e iguala $g(x)$ $\forall x \in \mathfrak{X}'$

donde $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} - \left(\bigcup_{(r_n,s_n)} Z_{r_n,s_n}\right) - Z'$ y $Z' = \{x : g(x) = \pm\infty\}$.

claramente $\mu(\mathfrak{X}') = \mu(\mathfrak{X})$.

De hecho, si $x \in \mathfrak{X}'$, entonces (3) se cumple $\forall r_n, s_n$ t.q. $r_n < g(x) < s_n$

haciendo $|r_n - s_n| \xrightarrow[n]{} 0$, encontramos que $\underline{D}A(x) = \bar{D}A(x) = DA(x) = g(x)$

Como consecuencia de este teorema, obtenemos:

<u>5.2 Teorema:</u> Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, con μ finita, y tal que $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\{x\} \in \mathcal{A}$ y $\mu(\{x\}) = 0$, entonces toda red $\mathcal{R}$ de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ es un sistema de Vitali.

(Véanse definiciones 3.8 y 3.9)

Dem: Por definición de red. (propiedad. i, def. 3.8), $\mathcal{R}$ cumple 1) de la definición 3.9. Para verificar 2a) de la def. 3.9. elegimos $\emptyset$ como la frontera $\Gamma(E)$ $\forall E \in \mathcal{R}$. Dado cualquier $x \in E \in \mathcal{R}$, sea $E' \in \mathcal{R}$.∋. $x \in E'$. Como 2 conjuntos $E, E' \in \mathcal{R}$ son, o bien disjuntos (esto sucede, en particular, si E y E' son del mismo rango), o uno es un subconjunto propio del otro, se sigue que todo conjunto en $\mathcal{R}$ de medida suficientemente pequeña y que contenga x, está contenido en E.

Para verificar 2b) de la def. 3.9., sólo necesitamos notar que si $x \notin E$ con $E \in \mathcal{R}$, entonces $\exists E' \in \mathcal{R}$.∋. $x \in E'$ y $E \cap E' = \emptyset$ ∴ todo conjunto $A \in \mathcal{R}$.∋. $x \in A$ y $\mu(A)$ suficientemente pequeño cumple con: $A \subset E' \Rightarrow A \cap E = \emptyset$

Finalmente para probar 3) de la def 3.9, supongamos $E \subset X$ es cubierto por una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$. Entonces podemos eliminar conjuntos que se intersectan, primero eligiendo todos los conjuntos de primer rango en $\mathcal{B}$, después todos los conjuntos de segundo rango que están en $\mathcal{B}$ y no intersectan los conjuntos ya elegidos, etc de esta manera, obtenemos una sucesión de conjuntos disjuntos $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ que cubren E. (observemos que cualquier red es numerable) //.

Como consecuencia de los teoremas 5.1 y 5.1 obtenemos el siguiente resultado debido a De Possel.

5.3 Corolario. (Teorema de De Possel). Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, con μ finita y tal que $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\{x\} \in \mathcal{S}$ y $\mu(\{x\}) = 0$. Sea $\mathcal{R}$ una red de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ y sea $\phi: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita. Entonces la derivada de ϕ con respecto a $\mathcal{R}$, existe sobre un conjunto de medida total, y coincide con la densidad de la componente absolutamente continua de ϕ //

5.4 Corolario: Sea $F \in BV[a,b]$, entonces la derivada de F, en el sentido de la fórmula (2) capítulo 3 existe c.d. e iguala la densidad de la componente absolutamente continua de F.

5.5 Corolario: Sea $\mathfrak{X}$ el paralelepípedo n-dimensional:

$\mathfrak{X} = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\}$ con $a_i < b_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{S}, \mu)$ el espacio de medida donde $\mathcal{S}$ denota la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathfrak{X}$, μ la medida n-dimensional de Lebesgue

Sea $\phi: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una medida con signo entonces:

La derivada en el sentido $D\phi(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi(Q_h(x_0))}{\mu(Q_h(x_0))}$ donde

$Q_h(x_0) = \{x : x_1^{(0)} \le x_1 \le x_1^{(0)} + h, \dots x_n^{(0)} \le x_n \le x_n^{(0)} + h\}$ y donde

$x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, existe c.d y coincide con la densidad de la componente absolutamente continua de ϕ.

Dem: Esto es consecuencia de los Teoremas 5.1 y 3.10 //.

El siguiente corolario es, de hecho un caso particular del corolario 5.5.

5.6 Corolario: (Teorema de diferenciación de Lebesgue para funciones en $BV[a,b]$). Sea $F \in BV[a,b]$, entonces la derivada ordinaria $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ existe c.d. e iguala la densidad de la componente absolutamente continua de F.

Dem. Sea ϕ la medida con signo cuya función generatriz es F (ϕ es finita, pues $F \in BV[a,b]$). Ahora bien la diferencia entre $\phi([x,x+h]) = \phi((x,x+h]) + \phi(\{x\})$ y $\phi((x,x+h])$, sólo existe cuando $\phi(\{x\}) \neq 0$ ie. en un conjunto de λ-medida cero. (pues $\{x : \phi(\{x\}) \neq 0\}$ es a lo más numerable, por ser ϕ finita)

Por lo Tanto $F'(x)$ es la derivada en el sentido del corolario 5.5 para el caso $n=1$ //.

Generalicemos ahora, la definición de diferenciación en el sentido de la fórmula (3) capítulo 3.

5.7 Definición: Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, donde $\{x\} \in \mathcal{S}$ $\forall x \in X$, con $\mu(\{x\}) = 0$ y sea $\mathcal{V}$ un sistema de Vitali:

de subconjuntos de $\mathbb{X}$, medibles, entonces, una sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. converge regularmente a $x_0 \in \mathbb{X}$ si:

1°). Cada E_n está contenido en un conjunto Vitali A_n t.q. $x_0 \in A_n$ y $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2°). $\exists\ c > 0$ t.q. $\mu(E_n) \geq c\,\mu(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

5.8 Definición: Sean $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$, $\mathcal{V}$ igual que en la definición 5.7 y sea $\phi: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita. Entonces, por la derivada de ϕ en $x_0 \in \mathbb{X}$ con respecto a $\mathcal{S}$ se entiende la cantidad

$D_{\mathcal{S}}\phi(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(E_n)}{\mu(E_n)}$ si es que dicho límite existe; y donde $\{E_i\}$ es cualquier sucesión de conjuntos de $\mathcal{S}$ que converge regularmente a x_0.

Antes de probar el Teorema análogo al Teorema 5.1, usando convergencia regular, necesitamos los siguientes preliminares:

5.9 Definición: Sean $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ y $\mathcal{V}$ igual que en la definición 5.7 y sea $\varphi: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función integrable, entonces un punto $x_0 \in \mathbb{X}$ es un punto de Lebesgue de φ relativo a $\mathcal{V}$ si:

$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \int_{A_\epsilon(x_0)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|\, d\mu(x) = 0$ donde $A_\epsilon(x_0)$ es cualquier conjunto Vitali tal que $x_0 \in A_\epsilon(x_0)$ y $\mu(A_\epsilon(x_0)) < \epsilon$.

5.10 Teorema: Manteniendo las hipótesis de la definición 5.9; el conjunto de puntos de Lebesgue de φ es de medida total.

Dem.: Dado $r \in \mathbb{R}$ arbitrario, se sigue del Teorema de Lebesgue-Vitali (5.1) que: $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \int_{A_\epsilon(x_0)} |\varphi(x) - r| = |\varphi(x_0) - r|$ (*)

$\forall x_0 \in E_r$ donde $\mu(E_r) = \mu(X)$.

Entonces el conjunto $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{r_n}$, donde r_n corre sobre todos los números racionales, es también de medida total.

Sea $x_0 \in E$ t.q. $\varphi(x_0)$ es finito; dada cualquier $\delta > 0$, $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ t.q. $|\varphi(x_0) - r| < \delta/3$, y por lo tanto $\frac{1}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \int_{A_\epsilon(x_0)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|\, d\mu(x) \leq$

$$\leq \frac{1}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \int_{A_\epsilon(x_0)} |\varphi(x) - r|\, d\mu(x) + \frac{1}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \int_{A_\epsilon(x_0)} |r - \varphi(x_0)|\, d\mu(x) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\mu(A_\epsilon(x_0))} \int_{A_\epsilon(x_0)} |\varphi(x) - r|\, d\mu(x) - |\varphi(x_0) - r| \right\} + 2|\varphi(x_0) - r| \quad (**)$$

Por (*) el sumando que está entre llaves puede hacerse menor que $\delta/3$ haciendo $\epsilon \to 0$. $\therefore$ (**) es menor que δ para ϵ suficientemente pequeño. Esto prueba el Teorema, pues φ es finita c.d. //

Notemos que la definición 5.9 y el Teorema 5.10 son generalizaciones de 3.3 y 3.5

Conservemos las mismas notaciones para el siguiente Teorema.

5.11 Teorema: Si $\{E_n\} \subset \mathcal{D}$ es una sucesión que converge regularmente a un punto de Lebesgue de φ, llamémoslo x_0, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} \varphi \, d\mu(x) = \varphi(x_0)$$

Dem: Esto se sigue de: $\left| \varphi(x_0) - \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} \varphi \, d\mu(x) \right| =$

$$= \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_{E_n} [\varphi(x_0) - \varphi(x)] \, d\mu(x) \right| \leq \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \, d\mu(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c\mu(A_n)} \int_{A_n} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \, d\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad //$$

5.12 Corolario: Sea $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ t.q. $\phi(E) = \int_E \varphi(x) \, d\mu(x)$, i.e. ϕ es la integral indefinida de φ, entonces $D_{\mathcal{D}} \phi(x_0) = \varphi(x_0)$ $\forall x_0$ que sea punto de Lebesgue de φ

5.13 Teorema: Sean $(\mathbb{X}, \mathcal{D}, \mu)$, $\mathcal{V}$ como antes, $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita, entonces la derivada de ϕ con respecto a $\mathcal{D}$, existe sobre un conjunto de medida total, y coincide con la densidad de la componente absolutamente continua de ϕ.

Si $\phi \ll \mu$ entonces la conclusión se sigue del corolario 5.12 y del Teorema 5.10. Sin pérdida de generalidad supongamos $\phi \geq 0$ y ϕ singular. Sea $x_0 \in \mathbb{X}$ t.q. $D_{\mathcal{V}} \phi(x_0) = 0$. i.e. la derivada de ϕ respecto al sistema de Vitali $\mathcal{V}$ existe y es cero. Sabemos del Teorema 5.1 que tales puntos forman un conjunto de medida total.

Si $\{E_i\} \subset \mathcal{D}$ es una sucesión que converge regularmente a x_0., entonces $\mu(E_n) \geq c\mu(A_n)$ $(c>0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\therefore$

$D_s \phi(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(E_n)}{\mu(E_n)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} \frac{\phi(A_n)}{\mu(A_n)} = \frac{1}{c} D_v \phi(x_0) = 0$. donde los A_n. son conjuntos de Vitali. El Teorema se sigue del hecho de que.

$\phi = A\phi + S\phi$ con $A\phi \ll \mu$ y $S\phi$ singular //

<u>5.14 Corolario:</u> Sea $\phi : \mathbb{B}([a,b]) \to \mathbb{R}$. una medida con signo finita, y sea F_ϕ su función generatriz, entonces la derivada de F en el sentido de la fórmula (3) del capítulo 3. i.e. $F_\phi'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(E_n)}{\lambda(E_n)}$, (con cada $E_n \in \mathbb{B}([a,b])$ y $E_n \subset (x_0-h_n, x_0+h_n]$ $(h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$ y $\lambda(E_n) \geq c\, 2h_n = c\,\lambda((x_0-h_n, x_0+h_n])$, $c \in \mathbb{R}^+$) existe y es igual a la componente absolutamente continua de F_ϕ. //

Bibliografía.

G. E. Shilov, B. L. Gurevich: Integral, measure, and derivative, a. Unified approach. Dover Publications 1977.