UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE ANILLOS SEMIARTINIANOS.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

GUSTAVO ARENAS WIEDFELDT

México, D. F. 1984

Indice.

Introducción

Esta tesis está basada en el artículo "Algunas Caracterizaciones de Anillos Semiartinianos" de el Dr. Francisco Raggi C. y el M. en C. José Ríos M. El espíritu para realizarla nació de un seminario sobre teorías de torsión que impartió el Dr. F. Raggi (quien fue mi director de tesis) en el Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M.

Resumiendo se tiene que:

En la primera sección se prueba, que para una clase de torsión estable T, la clas $T^{\perp}$ y la clase H de los A-módulos Hausdorff respecto a las $\mathcal{F}$-topologías del filtro de Gabriel $\mathcal{F}$ asociado a T, forman una teoría de torsión $(T^{\perp}, H)$, donde $T^{\perp}$ denota a la clase de torsión hereditaria cogenerada por los módulos simples de T.

En la segunda sección se prueba que cuando T es la teoría de torsión de Goldie, $T^{\perp}$ es la clase de torsión de los semisimples proyectivos que

0. Preliminares.

Solo se tratarán anillos "A" con elemento unidad "1". Las palabras "A-módulo" y "módulo" se usarán siempre para denotar a un módulo izquierdo unitario sobre el anillo A. "A-mod" denotará a la categoría de los A-módulos.

Definición 0.1 Una pareja ordenada (T,L) de clases de A-módulos es una teoría de torsión si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes

a:) $\forall N \in L$ $Hom(M,N)=0$ si y solo si $M \in T$

y $\forall M \in T$ $Hom(M,N)=0$ si y solo si $N \in L$.

b:) T satisface: i:) es cerrada bajo cocientes, ii:) es cerrada bajo sumas directas. iii:) $M' \in T$, $M'' \in T$, y $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exacta implican $M \in T$. y $L = \{N \in A\text{-mod} : Hom(M,N)=0 \ \forall M \in T\}$.

c:) L satisface: i:) es cerrada bajo submódulos. ii:) es cerrada bajo productos directos. iii:) $N' \in$

L, $N'' \in L$ y $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ exacta implican $N \in L$.
y $T = \{M \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall N \in L\}$.

d.) Existe un único radical idempotente $t : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ tal que $T = \{M \in A\text{-mod} : t(M) = M\}$ y $L = \{N \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall M \in T\}$.

e.) Existe un único radical idempotente $t : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ tal que $L = \{N \in A\text{-mod} : t(N) = 0\}$ y $T = \{M \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall N \in L\}$.

T y L son la clase de torsión y libre de torsión respectivamente, de una teoría de torsión. Los módulos de torsión (libres de torsión) son los elementos de T (de L).

Dada una clase de torsión, i.e. que satisfaga la primera parte de 0.1 b.), está determinada de manera única su correspondiente clase libre de torsión. También vale la afirmación análoga para una clase libre de torsión.

<u>Definición</u> 0.2 Dado $t : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ un preradical, $\bar{t}$ denota al menor de todos los

radicales mayores o iguales que t.

$\bar{t}$ se puede obtener por inducción sobre los números ordinales, como sigue. Sea $t_1 = t$, para α un ordinal $t_{\alpha+1}$ satisface que $t_{\alpha+1}(m)/t_\alpha(m) = t(m/t_\alpha(m))$, y si α es límite $t_\alpha(m) = \sum_{\beta<\alpha} t_\beta(m)$. Entonces para cada $m \in A$-mod $\bar{t}(m) = t_\alpha(m)$ para algún ordinal α, tal que $t_\alpha(m) = t_{\alpha+1}(m)$.

El radical $\bar{t}$ satisface las siguientes propiedades

a.) $\bar{t}(m) = 0$ si y solo si $t(m) = 0$ para $m \in A$-mod.

b.) $\bar{t}$ es idempotente si t lo es.

c.) $\bar{t}$ es exacto izquierdo si t lo es.

<u>Definición</u> 0.3 Una teoría de torsión (T,L) es hereditaria si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes.

a.) T es cerrada bajo submódulos

b.) L es cerrada bajo extensiones esenciales, i.e. $N' \in L$ y N' esencial en N implica que $N \in L$.

c:) L es cerrado bajo cápsulas inyectivas.

d:) El radical t asociado a (T,L) es exacto izquierdo.

Generación y Cogeneración

Definición 0.4 Sea $\mathcal{C}$ una clase de A-módulos.

a:) (T,L) es la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$ si $L = \{N \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall M \in \mathcal{C}\}$

$T = \{M \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall N \in L\}$.

En este caso, T resulta la mínima clase de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

b:) (T,L) es la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{C}$ si $T = \{M \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall N \in \mathcal{C}\}$

$L = \{N \in A\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \ \forall M \in T\}$.

En este caso, L resulta la mínima clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

c:) (T,L) es la teoría de torsión hereditaria generada por $\mathcal{C}$ si $L = \{N : Hom(M, EN) = 0 \ \forall M \in \mathcal{C}\}$

$T = \{M : Hom(M, EN) = 0 \ \forall N \in \mathcal{C}\}$.

En este caso T resulta la mínima clase de torsión hereditaria que contiene a $\mathcal{C}$

d:) (T,L) es la teoría de torsión hereditaria cogenerada por $\mathcal{C}$ si $T=\{M : \mathrm{Hom}(M,EN)=0 \ \forall N\in\mathcal{C}\}$ y $L=\{N : \mathrm{Hom}(M,EN)=0 \ \forall M\in T\}$, o equivalentemente si $L=\{N : N\hookrightarrow \prod_I EN_i$ para alguna $\{N_i\}_I\subseteq \mathcal{C}\}$ y $T=\{M : \mathrm{Hom}(M,N)=0 \ \forall N\in L\}$. También en este caso L es la mínima clase libre de torsión hereditaria que contiene a $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo submódulos, entonces la teoría generada por $\mathcal{C}$ es hereditaria. Por otro lado, si $\mathcal{C}$ consiste solo de A-módulos inyectivos entonces la teoría cogenerada por $\mathcal{C}$ también es hereditaria.

Para (T,L) hereditaria un A-módulo M es de torsión si y solo si todos sus submódulos cíclicos son de torsión.

Definición 0.5 Una colección $\mathcal{F}$ de ideales izquierdos de A, es un filtro de Gabriel si i: $\forall I \in \mathcal{F}$, $\forall a \in A$ $(I:a) \in \mathcal{F}$.

ii: Para I un ideal izquierdo de A, Si $\exists J \in \mathcal{F}$ tal que $(I:a) \in \mathcal{F}$ $\forall a \in J$ entonces $I \in \mathcal{F}$.

Existe una correspondencia biyectiva entre la clase de las teorías de torsión hereditarias (T,L) y la clase de los filtros de Gabriel tal que

$$(T,L) \longrightarrow \mathcal{F}_T = \{{}_AI \subseteq A : A/I \in T\}$$

$$\mathcal{F} \longrightarrow T_{\mathcal{F}} = \{M \in A\text{-mod} : \forall x \in M \ \ an(x) \in \mathcal{F}\}$$

que es igual a la clase de torsión generada por $C = \{A/I : I \in \mathcal{F}\}$.

<u>Definición</u> 0.6 Una clase de torsión hereditaria es TTF si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes.

a:) T es cerrada bajo productos directos.

b:) Existen clases T' y L, de torsión y libre de torsión respectivamente, tal que (T',T) y (T,L) son teorías de torsión.

c:) El filtro de Gabriel $\mathcal{F}_T$ correspondiente a T es $\mathcal{F}_T = \{{}_AJ \subseteq A : I_0 \subseteq J\}$ donde $I_0 = \cap\{I \in \mathcal{F}_T\}$.

d:) Existe un ideal bilateral idempotente I_0 tal que $T = \{M \in A\text{-mod} : I_0(M) = 0\}$.

Para t' el radical asociado $a(T', T)$ se tiene que $t'(A) = I_0(A) = I_0 = \cap \{I : I \in \mathcal{F}_T\}$.

<u>Definición</u> 0.7 Una clase de torsión hereditaria T es estable si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes.

a:) T es cerrada bajo cápsulas inyectivas

b:) T es cerrada bajo extensiones esenciales.

c:) Para todo módulo inyectivo E, $t(E)$ es sumando de E.

d:) Para A-módulos M', M tal que ${}_AM' \subseteq M$ se cumple que $\mathcal{F}(M') = \{N \cap M' : N \in \mathcal{F}(M)\}$, donde $\mathcal{F}(M) = \{{}_AN \subseteq M : M/N \in T\}$ para un módulo M arbitrario.

<u>Definición</u> 0.8 Una teoría de torsión hereditaria se escinde centrálmente si existe $e \in A$ idem-

potente central, tal que la clase de los A-módulos de torsión es $\{M : eM = 0\}$.

<u>Proposición</u> 0.9 Si (C, T, L) es TTF, son equivalentes

a:) (T, L) se escinde centrálmente.

b:) (C, T) se escinde centrálmente.

c:) $C = L$.

d:) $A = c(A) \oplus t(A)$ donde "c" y "t" son los radicales de (C, T) y (T, L) respectivamente.

e:) (C, T) es hereditaria y $c(M)$ es sumando directo de M, para cada módulo M, donde "c" es el radical de (C, T).

1. La teoría $(T,L)^{\perp}$ para una teoría hereditaria (T,L).

<u>Definición</u> 1.1 Si (T,L) es una teoría de torsión hereditaria, $(T,L)^{\perp}$ denotará a la teoría de torsión hereditaria cogenerada por los módulos simples de T. $T^{\perp}$ y $L^{\perp}$ denotarán respectivamente las clases de torsión y libre de torsión de $(T,L)^{\perp}$.

<u>Observación</u> 1.2 El hecho de que la clase hereditaria libre de torsión cogenerada por una colección C de A-módulos sea
$\{N \in A\text{-mod} : N \hookrightarrow \prod_{I} E(S_i)$ para alguna $\{S_i\}_I \subseteq C\}$
da otra presentación de $L^{\perp}$. $E(M)$ denota a la cápsula inyectiva de un A-módulo M.

Como cado módulo simple, o es de torsión o es libre de torsión entonces cada teoría de torsión divide a la clase de los A-módulos simples en dos clases ajenas, en particular para

$(T,L)^{\perp}$.

Lema 1.3 Los A-módulos simples de $T^{\perp}$ son los de L asi como los de $L^{\perp}$ son los de T.

Demostración. Por definición de $L^{\perp}$, todos los módulos simples de T están en $L^{\perp}$. Por otro lado si S es un simple en $L^{\perp}$ entonces S pertenece a T porque si $S \in L$ entonces $\mathrm{Hom}(M,S)=0$ para todo $M \in T$, en particular para cada S' simple de T $\mathrm{Hom}(S,S') \cong \mathrm{Hom}(S',S)=0$ por lo que S sería elemento de $T^{\perp}$ que es una contradicción con la observación anterior. Con esto se prueba que los simples de $L^{\perp}$ son los simples de T, y como consecuencia de la misma observación se obtiene el resto del lema. ∎

Una propiedad de las teorías $(T,L)^{\perp}$ que se usará en los resultados posteriores y que además ayuda a visualizar la relación entre las teorías (T,L) y $(T,L)^{\perp}$ es la siguiente.

<u>Proposición</u> 1.4 Si (T,L) es una teoría de torsión hereditaria entonces $T \subseteq L^{\perp}$ y $T^{\perp} \subseteq L$.

Demostración. Para cada $M \in T$ y $x \neq 0$ elemento de M, T hereditaria implica que $Ax \in T$. Como Ax es finitamente generado sea N un submódulo máximo de Ax, entonces $S_x = Ax/N$ es un módulo simple elemento de T y si $f_x : Ax \longrightarrow S_x$ es el epimorfismo canónico se tiene que $f_x(x) = x + N$ es distinto de cero.

$$\begin{tikzcd}
Ax \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, hook, "j_x"'] & S_x \arrow[r, hook, "i_x"] & E(S_x) \\
M \arrow[urr, "\bar{f}_x"] \arrow[rr, "f"] & & \prod\limits_{x \in M} E(S_x) \arrow[u, "p_x"']
\end{tikzcd}$$

$E(S_x)$ inyectivo implica que existe $\bar{f}_x : M \longrightarrow E(S_x)$ tal que $\bar{f}_x \circ j_x = i_x \circ f_x$. La familia $\{\bar{f}_x : x \in M\}$ induce un único homomorfismo $f : M \longrightarrow \prod\limits_{M} E(S_x)$ tal que para cada $x \in M$ $\bar{f}_x = p_x \circ f$

Pero como para cada x distinto de cero $p_x f(x) = \bar{f}_x(x) = \bar{f}_x j_x(x) = i_x f_x(x) = f_x(x)$ es distinto de cero, se concluye que $f : M \longrightarrow \prod\limits_{M} E(S_x)$ es un monomorfismo, por lo tanto aplicando la observación 1.2

se obtiene que $M \in L^{\perp}$.

La prueba de que $T^{\perp} \subseteq L$ se obtiene como consecuencia del siguiente lema. ∎

<u>Lema</u> 1.5 Si (T,L) y (T',L') son dos teorías de torsión hereditarias entonces $T \subseteq L'$ si y solo si $T' \subseteq L$.

Demostración. Suponiendo que $T \subseteq L'$, sea $M' \in T'$, por demostrar que $M' \in L$. Sea $M \in T$, hay que mostrar que $\mathrm{Hom}(M,M') = 0$. Si $f: M \longrightarrow M'$, se tiene que $f(M) \subseteq M'$ es elemento de $T \cap T' \subseteq L' \cap T' = \{0\}$ por lo que f es cero. Por lo tanto $T' \subseteq L$. ∎

Las siguientes proposiciones serán ahora sobre teorías de torsión estables (T,L), para las cuales se demostrará que la clase $L^{\perp}$ es igual a una clase de A-módulos determinada por una propiedad topológica.

Para (T,L) hereditaria sea $\mathcal{F}$ el correspondiente filtro de Gabriel en A. Si M es un

A-módulo se considerará a $\mathcal{F}(M)=\{{}_AK \subseteq M : M/K \in T\}$ como una base de vecindades del cero para darle a M una estructura de A-módulo topológico.

<u>Definición</u> 1.6 $c(M) = \cap\{{}_AK \subseteq M : M/K \in T\}$.

Es un resultado conocido para módulos topológicos que el submódulo $c(M)$ coincide con la cerradura del cero.

La siguiente define la clase de A-módulos que se demostrará que es igual a $L^{\perp}$.

<u>Definición</u> 1.7 Si (T,L) es estable, H denotará la clase de los A-módulos Hausdorff respecto a las topologías citadas.

<u>Lema</u> 1.8 Son equivalentes

a:) $M \in H$

b:) $c(M) = 0$

c:) Existe una sucesión exacta

$0 \to M \to \prod_{i \in I} T_i$ para alguna subfamilia $\{T_i\}_I \subseteq T$.

Demostración. a→b) Por demostrar que el submódulo $c(M) \subseteq \{0\}$. Sea $x \neq 0$, por ser M Hausdorff y $\mathfrak{F}(M)$ una base de vecindades del cero, existe $K \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $x \notin K$. Por lo tanto $x \notin c(M)$. Con esto se prueba que $c(M) = \{0\}$.

b→a) Sea $x \neq y$ dos elementos de M, entonces existe $K \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $x - y \notin K$, o equivalentemente tal que $x \notin K + y$ donde $K + y$ resulta una vecindad de y. Por lo tanto M es T_0, lo cual es equivalente en A-módulos topológicos a ser T_2.

b→c) Sea para cada $K \in \mathfrak{F}(M)$ $f_K : M \to M/K$ la proyección canónica.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_K"] \arrow[dr, "f"'] & M/K \\ & \prod_{K \in \mathfrak{F}(M)} M/K \arrow[u, "p_K"'] \end{tikzcd}$$

La familia $\{f_K \mid K \in \mathfrak{F}(M)\}$ induce un homomorfismo $f : M \to \prod_{K \in \mathfrak{F}(M)} M/K$ tal que el diagrama conmuta para cada $K \in \mathfrak{F}(M)$. Pero $\operatorname{Ker}(f) = \cap\{\operatorname{Ker} p_K \mid K \in \mathfrak{F}(M)\} = c(M) = 0$.

c→b) Sea $h : M \to \prod_{i \in I} T_i$ un monomorfismo con $\{T_i : i \in I\} \subseteq T$. Si $p_i : \prod_I T_i \to T_i$ es la proyección canónica el $\operatorname{Ker}(h) = \cap\{\operatorname{Ker}(p_i \circ h) \mid i \in I\} \supseteq c(M)$

pues para cada $i \in I$ $Ker(P_i \circ h) \in \mathcal{F}(M)$ ya que $M/Ker(P_i \circ h) \cong Im(P_i \circ h) \in T$. ■

Corolario 1.9 Para (T,L) estable H es la clase libre de torsión hereditaria cogenerada por T.

Demostración. Por la caracterización c-) del lema anterior $\{M \in A\text{-mod} : M \hookrightarrow \prod_I E(T_i)$ para alguna subfamilia $\{T_i\}_I \subseteq T\} \subseteq H$ pues T es estable. La igualdad se obtiene porque para cada $\{T_i\}_I \subseteq T$, $\prod_I T_i \longrightarrow \prod_I E(T_i)$. ■

Si T_H denota a la correspondiente clase de torsión de H entonces se tiene la

Proposición 1.10 Si (T,L) es estable entonces $(T,L)^{\perp} = (T_H, H)$.

Demostración. Como $L^{\perp}$ es la clase libre de torsión hereditaria cogenerada por los simples de T entonces por el corolaria anterior $L^{\perp} \subseteq H$. Por otro lado, de la proposición 1.4

se sabe que $T \subseteq L^{\perp}$, y esto junto con el corolario anterior prueban que $H \subseteq L^{\perp}$. ∎

<u>Observación</u> 1.11 Para (T,L) una teoría hereditaria la correspondencia

$$c: \underset{M}{A\text{-mod}} \longrightarrow \underset{c(M)}{A\text{-mod}}$$

es un radical que cuando (T,L) es estable, resulta exacto izquierdo porque si $M' \subseteq M$ entonces $\mathcal{F}(M') = \{K \cap M' : K \in \mathcal{F}(M)\}$ y por lo tanto $c(M') = \cap\{K \cap M' : K \in \mathcal{F}(M)\} = M' \cap \cap\{K : K \in \mathcal{F}(M)\} = M' \cap c(M)$. De donde c es un radical idempotente, pues $c(M) = c(M) \cap c(M) = c(c(M))$.

Entonces cuando (T,L) es estable, por el lema 1.8 el radical idempotente c resulta el de la teoría (T_H, H), hecho que permite tener otra forma para el cálculo del radical $t^{\perp}$ asociado a $(T,L)^{\perp}$.

<u>Corolario</u> 1.12 Si (T,L) es estable enton-

ces $t^{\perp}(M) = \cap\{K : K \in \mathcal{F}(M)\}$ para cada $M \in$ A-mod. ■

<u>Corolario</u> 1.13 Si T es una clase de torsión estable, TTF e I_0 es el radical asociado a $\mathcal{F} = \{_A I \subseteq A : A/I \in T\}$ entonces para $M \in$ A-mod

a:) $t^{\perp}(M) = I_0$

b:) $(T,L)^{\perp\perp} = (T,L)$

Demostración. Por 1.9 H es la mínima clase libre de torsión hereditaria que contiene a T que por las hipótesis también es una clase libre de torsión hereditaria, con lo que se prueba que $T = H$, y más aun (T_H, T, L) es una TTF.

a:) Se considerará a $I_0 :$ A-mod $\longrightarrow$ A-mod tal que a $M \longrightarrow (I_0)M$. Es un radical idempotente pues I_0 es idempotente, y cumple con la propiedad de que $T = \{M : I_0 M = 0\}$. Entonces I_0 es el radical idempotente asociado a $(T_H, T) = (T_H, H) = (T,L)^{\perp}$ con lo que necesariamente $t^{\perp}(M) = (I_0)M$ para cada $M \in$ A-mod.

b:) Sean $T^{\perp\perp}$ y $L^{\perp\perp}$ respectivamente las clases de torsión y libre de torsión de $(T,L)^{\perp\perp}$. Por la proposición 1.4 $T^{\perp\perp} \subseteq L^{\perp} = T$. Por demostrar que $T \subseteq T^{\perp\perp}$, para esto se probará que $L^{\perp\perp} \subseteq L$. Aplicando 1.3, $L^{\perp\perp}$ la clase hereditaria libre de torsión cogenerada por los simples de $T^{\perp}$, es la clase hereditaria libre de torsión cogenerada por los simples de L, por lo cual $L^{\perp\perp} \subseteq L$. Pero $T^{\perp\perp} = T$ claramente implica que $(T,L)^{\perp\perp} = (T,L)$. ∎

2. Teorías de torsión de Goldie y de Goldman.

Definición 2.1 La clase de los A-módulos semisimples y proyectivos es una clase de torsión hereditaria cuya correspondiente teoría de torsión se denotará por (T_0, L_0) que es conocida con el nombre de teoría de torsión de Goldman.

El conjunto "$\mathcal{E}$" de los ideales izquierdos esenciales de A no es en general un filtro de Gabriel pero $\mathcal{F}_g = \{{}_A I \subseteq A : \exists J \in \mathcal{E}, I \subseteq J$ y $(I:a) \in \mathcal{E}$ para cada $a \in J\}$ es el mínimo filtro de Gabriel que contiene a $\mathcal{E}$.

Definición 2.2 (T_g, L_g) denotará a la teoría de torsión de Goldie que es la que tiene por filtro de Gabriel a $\mathcal{F}_g$. El submódulo singular de M, $\{x \in M : an(x) \in \mathcal{E}\}$ será denotado por

$Z(M)$. Se dice que un módulo M es no singular si $Z(M)=0$

<u>Observación</u> 2.3 $M\in L_g$ si y solo si $Z(M)$ es cero. Por otro lado $M\in T_g$ si y solo si $Z(M)$ es un submódulo esencial de M.

Demostración. Si $M\in L_g$ entonces $Z(M)=0$. Supongase que $Z(M)=0$ y sea $x\in M$ tal que $an(x)\in \mathfrak{J}_g$, esto es que existe $J\in\mathcal{E}$ tal que para cada $a\in J$ $(an(x):a)=an(ax)\in\mathcal{E}$, entonces $Jx\subseteq Z(M)$, por lo cual $J\subseteq an(x)\in\mathcal{E}$ y $x\in Z(M)=0$, esto naturalmente implica que $M\in L_g$.

Para probar la otra afirmación, sea $M\in T_g$ y $N\subseteq M$ tal que $0=Z(M)\cap N=Z(N)$, entonces $N\in T_g\cap L_g=\{0\}$ por lo que $Z(M)$ es esencial en M. Ahora si $Z(M)$ es esencial en M, para cada $x\in M$ se tiene que $(Z(M):x)\in\mathcal{E}$ y $\forall\alpha\in(Z(M):x)$ $(an(x):\alpha)=an(\alpha x)\in\mathcal{E}$. Por lo tanto $an(x)\in\mathfrak{J}_g$ y asi $M\in T_g$. ∎

<u>Observacion</u> 2.4 T_g es una clase de torsión estable y más aun: Si T es una clase de torsión

hereditaria tal que $T_g \subseteq T$ entonces T es estable.

Demostración. Sea $M \in T$, de la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/M \longrightarrow 0$ basta mostrar que $E(M)/M \in T$, pero como $Z(E(M)/M) = E(M/M)$ esencial en $E(M)/M$ se tiene $E(M)/M \in T_g \subseteq T$. ∎

<u>Teorema</u> 2.5 $(T_0, L_0) = (T_{H_g}, H_g)$ donde H_g es la clase de módulos Hausdorff correspondiente a la teoría de torsión de Goldie.

Demostración. Para cada módulo S simple y proyectivo $Z(S) = 0$ así que si $\bigoplus_{i \in I} S_i$ es un elemento arbitrario de T_0, con S_i simple y proyectivo $Z(\bigoplus_I S_i) = \bigoplus_I Z(S_i) = 0$, por lo cual $T_0 \subseteq L_g$. Para cada $f \in Hom(M', M)$ con $M' \in T_0$ y $M \in T_g$, $f(M') \in T_0 \cap T_g \subseteq L_g \cap T_g = \{0\}$ por lo que la estabilidad de T_g implica que $Hom(M', E(S)) = 0$ para cada S simple en T_g, con esto se prueba que $T_0 \subseteq T_g^{\perp} = T_{H_g}$.

Como toda clase de torsión hereditaria está generada por la clase de sus módulos cíclicos, para probar que $T_{H_g} \subseteq T_o$ bastará con mostrar que para cada I ideal izquierdo de A, $A/I \in T_{H_g}$ implica que $A/I \in T_o$. Sea $A/I \in T_{H_g}$, entonces A/I no tiene submódulos esenciales propios, pues si K es esencial en A/I, $(A/I)/K \in T_{H_g} \cap T_g \subseteq L_g \cap T_g = \{0\}$ ya que $T_{H_g} = T_g^{\perp}$ y por 1.4 $T_g^{\perp} \subseteq L_g$. Por lo tanto todo submódulo de A/I es sumando directo, pues si K es un submódulo de A/I sea ${}_AK' \subseteq A/I$ máximo con la propiedad de que $K \cap K' = 0$, entonces $K \oplus K'$ es esencial en A/I por lo que $K \oplus K' = A/I$. Por lo tanto A/I es semisimple.

Análogamente para I, escogemos un ideal ${}_AJ \subseteq A$ tal que $I \cap J = 0$ e $I \oplus J$ sea esencial en A, entonces se tiene un epimorfismo canónico $A/I \xrightarrow{\pi} A/(I \oplus J)$, pero $A/I \in T_{H_g}$ y $A/(I \oplus J) \in T_g \subseteq H_g$ prueban que $\pi = 0$ y consecuentemente que $I \oplus J = A$. Asi queda probado que A/I es proyectivo y por lo tanto que es elemento de T_o. ∎

Una consecuencia de este teorema y de 1.10 es el siguiente corolario.

<u>Corolario</u> 2.6 $(T_g^{\perp}, L_g^{\perp}) = (T_o, L_o)$. ■

Si t_o denota el radical de (T_o, L_o), entonces para cada $M \in$ A-mod $t_o(M)$ es la componente proyectiva del Soc(M), por lo que será denotado como "$Soc_p(M)$". Una alternativa para calcular el Soc_p la muestra el siguiente corolario que se obtiene de 2.6 y de 1.12 .

<u>Corolario</u> 2.7 $Soc_p(M) = \cap\{K : K \in \mathcal{F}_g(m)\}$, en particular $Soc_p(A) = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}_g} I$. ■

Cuando A es no singular todo ideal simple de A es proyectivo y además $\mathcal{E}$ el conjunto de los ideales izquierdos esenciales es un filtro de Gabriel por lo que $\mathcal{E} = \mathcal{F}_g$. Por lo tanto junto con 2.7 se tiene que:

$Soc(A) = Soc_p(A) = \cap\{I : I \in \mathcal{E}\}$.

En los siguientes resultados se estudiará más sobre la relación que hay entre la teorías de Goldie y de Goldman, y también sobre las condiciones que imponen sobre otras teorías.

El hecho de que A-mod es una clase TTF, y que la familia de clases de torsión TTF sea cerrada bajo intersecciones implica que para cada clase de torsión T, existe $\overline{\overline{T}}$ clase mínima TTF que contiene a T.

<u>Proposición</u> 2.8 L_o es una clase TTF

Demostración. Basta probar que L_o es cerrada bajo cocientes. Sea $N \in L_o$ y $\pi : N \longrightarrow N'$ un epimorfismo, si $M \in T_o$, M es proyectivo por lo que la sucesión $Hom(M,N) \longrightarrow Hom(M,N') \longrightarrow 0$ es exacta probando así que $Hom(M,N')=0$ para cada $M \in T_o$. ■

<u>Corolario</u> 2.9 $L_o = \overline{\overline{T}}_g$

Demostración. Del teorema 2.5, $H_g = L_o$ pero por 1.9, H_g es la mínima clase libre de torsión hereditaria que contiene a T_g por lo tanto L_0 es la mínima clase TTF que contiene a T. ∎

<u>Proposición</u> 2.10 La clase de torsión de Goldie es TTF si y solo si es la clase de torsión hereditaria cogenerada por los A-módulos simples proyectivos.

Demostración. $T_g \subseteq \bar{T}_g$ implica que $\bar{T}_g$ también es estable, entonces por 1.13 $(\bar{T}_g, \bar{L}_g) = (\bar{T}_g, \bar{L}_g)^{\perp\perp}$ que es la teoría hereditaria cogenerada por los simples de $\bar{L}_g$, pero por 1.2 los simples de $\bar{L}_g$ son los que no están en $\bar{T}_g = L_0$ o sea que son los simples de T_0. Por lo tanto $\bar{T}_g$ es la clase de torsión hereditaria cogenerada por los simples proyectivos.

Con esto se tiene que T_g es una clase TTF si y solo si $\bar{T}_g = T_g$ si y solo si T_g es la clase de torsión hereditaria cogenerada por los los A-módulos simples proyectivos. ∎

<u>Corolario</u> 2.11 $(T_g, L_g)^{\perp\perp} = (\overline{\overline{T}}_g, \overline{L}_g)$.

Demostración. Por la demostración de la proposición anterior $(\overline{\overline{T}}_g, \overline{L}_g)$ es la teoría hereditaria cogenerada por los simples proyectivos o equivalentemente por los simples de L_g que por 1.3 son los simples de $T_g^{\perp}$. Por lo tanto $(T_g, L_g)^{\perp\perp} = (\overline{\overline{T}}_g, \overline{L}_g)$. ∎

<u>Corolario</u> 2.12 $Soc_p(A)$ es un ideal idempotente de A y para cada $M \in A\text{-Mod}$, $Soc_p(M) = Soc_p(A)\cdot M$.

Demostración. De 2.9 $(T_o, L_o, \overline{L}_g)$ es una TTF y el radical correspondiente de (T_o, L_o) es Soc_p por lo que se obtienen las afirmaciones del corolario. ∎

Los siguientes tres resultados forman un paréntesis para probar ciertas propiedades de las correspondencias Soc y Soc_p.

<u>Proposición</u> 2.13 Si $I \subseteq Soc(A)$ es un ideal

izquierdo idempotente, entonces I es proyectivo.

Demostración. $I \subseteq Soc(A)$ implica que existe J submódulo de I tal que $I = Soc_p(I) \oplus J$, pero como J es la suma de los simples no proyectivos de I se tiene que $Z(I) = Z(Soc_p I) \oplus Z(J) = J$ pues por 1.4 $T_0 \subseteq L_g$. Asi se tiene la descomposición $I = Soc_p(I) \oplus Z(I)$, pero como $I \subseteq Soc(A)$ que a su vez está contenido en todos los ideales esenciales, entonces $I = I^2 = I\, Soc_p(I) \oplus I\, Z(I) = I\, Soc_p(I) \subseteq Soc_p(I) \subseteq I$. Por lo tanto $I = Soc_p(I)$. ∎

Proposición 2.14 $Soc_p(A) = [Soc(A)]^2$.

Demostración. Por el lema 1.3 cada ideal izquierdo simple de A, o es proyectivo o es de torsión Goldie, por lo que se tiene la descomposición $Soc(A) = Soc_p(A) \oplus Z(Soc(A))$. Por lo tanto $[Soc(A)]^2 = Soc(A)\, Soc_p(A) \oplus Soc(A)(Z(Soc(A))) = Soc(A) \cdot (Soc_p(A)) \subseteq Soc_p(A) = [Soc_p(A)]^2 \subseteq [Soc(A)]^2$ prueba que $[Soc(A)]^2 = Soc_p(A)$. ∎

Corolario 2.15 Para cada $M \in A$-mod

$Soc_p(M) = [Soc(A)]^2 M$.

Demostración. Si M es un módulo, $Soc_p(M) = Soc_p(A)M$ pues L_0 es una clase TTF. Esto junto con 2.14 prueba el corolario. ∎

<u>Definición</u> 2.16 Si (T,L) y (T',L') son dos teorías de torsión entonces

a:) (T',L') es una generalización de (T,L) si $T \subseteq T'$.

b:) (T',L') es una especialización de (T,L) si $T' \subseteq T$.

<u>Teorema</u> 2.17 Sea (T,L) una generalización hereditaria de $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$, entonces T es un clase TTF.

Demostración. $\bar{\mathcal{F}}_g$ y $\mathcal{F}$ los filtros de Gabriel asociados a $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ y (T,L) respectivamente. Se probará que $S = \cap\{I : I \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{F}$. Por ser $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ TTF y $\bar{T}_g = L_0$, $\cap\{I : I \in \bar{\mathcal{F}}_g\} = Soc_p(A)$, entonces $\bar{\mathcal{F}}_g \subseteq \mathcal{F}$ implica que existe $S' \subseteq Soc_p(A)$ tal que $S \oplus S' = Soc_p(A)$. Por demostrar que $A/S \in T$. $S' \cong Soc_p(A)/S$ implica que la sucesión

(1) $$0 \longrightarrow S' \longrightarrow A/S \longrightarrow A/Soc_p(A) \longrightarrow 0$$

es exacta, además $A/Soc_p(A) \in L_0 \subseteq T$. Sea $V \subseteq S'$ un submódulo simple, entonces $S = \cap\{I : I \in \bar{\mathfrak{F}}_g\}$ garantiza que existe $I \in \bar{\mathfrak{F}}_0$ tal que $V \notin I$ por lo que $V \cap I = 0$. De aqui se tiene que la composición $V \hookrightarrow A \longrightarrow A/I$ es un monomorfismo donde $A/I \in T$ prueba que $V \in T$. Por lo tanto que S' sea semisimple y todos sus submódulos simples estén en T, prueba que $S' \in T$ y de la sucesión (1) se concluye que $S \in \mathfrak{F}$. ∎

Si consideramos ahora una especialización (T,L) arbitraria de (T_0,L_0), para (T,L) se satisfacen las siguientes propiedades

a.) L es una clase TTF ya que T consta solo de A-módulos proyectivos y por lo tanto L es cerrada bajo cocientes.

b.) Como clase de torsión L es estable, ya que $T \subseteq T_0$ implica que $T_g \subseteq L_0 \subseteq L$.

c.) (T,L) es una teoría de torsión hereditaria.

<u>Corolario</u> 2.18 Existe una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión (T,L) que son especialización de (T_0,L_0) y la colección de las generalizaciones hereditarias de $(\bar{T}_g,\bar{L}_g)$, tal que a

$$(T,L) \longrightarrow (L,L')$$

donde L' es la clase libre de torsión asociada al L cosiderada como una clase de torsión.

Demostración. Por el comentario anterior la correspondencia está bien definida, y claramente es inyectiva. La sobreyectividad es consecuencia de 2.17 . ∎

<u>Observación</u> 2.19 Por 2.4 la colección de las generalizaciones hereditarias de $(\bar{T}_g,\bar{L}_g)$ es una colección de teorías de torsión estables.

<u>Corolario</u> 2.20 Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\{I \subseteq Soc_p(A):$ I es bilateral e Idempotente$\}$ con cada una

de las colecciones citadas en 2.18.

Demostración. Toda generalización de $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ es TTF. ■

Con la correspondencia de 2.18, el siguiente teorema da una caracterización de las especializaciones estables de la teoría de torsión (T_0, L_0).

<u>Teorema</u> 2.21 Para (T,L) una especialización de (T_0,L_0) son equivalentes

a.) (T,L) es estable.

b.) T consiste de A-módulos inyectivos.

c.) (T,L) se escinde centrálmente.

d.) (L,L') se escinde centrálmente.

Demostración. a→b) Si $M \in T$, $E(M)$ pertenece a $T \subseteq T_0$, por lo que $E(M)$ es semisimple, entonces M esencial en $E(M)$ implica que $M = E(M)$.

b→c) Como $t(M)$ es inyectivo, para t el radical de (T,L), entonces $t(M)$ es sumando directo de M para cada $M \in$ A-Mod, por lo tanto (T,L) se escinde centrálmente. (Ver definición de que una teoría se escinda centrálmente, en la sección de preliminares).

c↔d) Es una equivalencia de la definición en la sección de preliminares.

c→a) Toda teoría que se escinde centrálmente es estable. ■

<u>Corolario</u> 2.22 Son equivalentes

a:) La teoría de torsión de Goldman es estable

b:) Toda especialización de la teoría de torsión de Goldman es estable.

c:) Todo A-módulo semisimple y proyectivo es inyectivo.

d:) (T_0, L_0) se escinde centrálmente.

e:) $(\overline{T}_g, \overline{L}_g)$ se escinde centrálmente.

f:) Toda especialización de la teoría de torsión de Goldman se escinde centrálmente.

Demostración. a↔c↔d↔e y c↔b↔f son consecuencia inmediata del teorema anterior ■

<u>Teorema</u> 2.23 Para un anillo A son equivalentes

a:) La teoría de torsión de Goldi en A-mod, se escinde centrálmente.

b:) A se descompone como el producto directo de un anillo semisimple por un anillo con ideal singular izquierdo esencial.

Demostración. a→b) Se tiene que T_g es una TTF, por lo que $(T_g, L_g) = (\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ y entonces (T_o, T_g, L_g) es TTF y se escinde centrálmente, esto prueba que $A = Soc_p(A) \oplus t_g(A)$ que además es un producto de anillos pues ambos ideales son bilaterales. $Soc_p(A)$ es semisimple y por 2.3, $Z(t_g A)$ es esencial en $t_g(A)$, por lo tanto el submódulo singular de $t_g(A)$ es esencial en $t_g(A)$.

b→a) Suponiendo que A se descompone como el producto de anillos $A_1 \times A_2$ con A_1 semisimple y A_2 con ideal singular izquierdo esencial, entonces por 2.13 $A_1 \in T_o = T_g^{\perp}$, $Z(A_2)$ es esencial en A_2 y por 2.3 $A_2 \in T_g \subseteq \bar{T}_g = L_o$, de donde $Soc_p(A) = Soc_p(A_1) \oplus 0 = A_1$ y $t_g(A) = 0 \oplus t_g(A_2) = A_2$ implica que $A = Soc_p(A) \oplus t_g(A)$. Pero de 2.7 $Soc_p(A) = \cap\{K : K \in \mathcal{F}_g\}$ y $A/Soc_p(A) \cong t_g(A) \in T_g$ por lo que $\cap\{K : K \in \mathcal{F}_g\} \in \mathcal{F}_g$, entonces (T_o, T_g, L_g) es TTF y $A = Soc_p(A) \oplus t_g(A)$. Por lo tanto (T_g, L_g) se escinde centrálmente. ∎

3. Anillos Semiartinianos.

Definición 3.1 (T_s, L_s) denotará a la teoría de torsión generada por la clase de todos los A-módulos simples.

Definición 3.2 $M \in$ A-mod se dice Semiartiniano, si $M \in T_s$.

(T_s, L_s) es una teoría de torsión hereditaria porque la clase de todos los A-módulos simples es cerrada bajo submódulos.

Lema 3.3 Para $\mathcal{C}$ una clase de A-módulos cerrada bajo cocientes, la clase de torsión generada por $\mathcal{C}$ consiste de todos los A-módulos M tales que cada cociente no cero de M tiene un elemento no cero de $\mathcal{C}$.

Demostración. Sea (T, L) la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$. Para cada N, $N \in L$ si y solo si $Hom(C,N)=0$ $\forall C\in\mathcal{C}$ si y solo si N no tiene ningún submódulo no cero elemento de $\mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes. Pero $M\in T$ si y solo si $Hom(M,N)=0$ $\forall N\in L$ si y solo si todo cociente no cero de M tiene algún submódulo no cero en $\mathcal{C}$. ∎

<u>Corolario</u> 3.4 M es semiartiniano si y solo si todo cociente no cero de M tiene zoclo no cero.

Demostración. Consecuencia del lema anterior.

∎

<u>Proposición</u> 3.5 $N\in L_s$ si y solo si $Soc(N)=0$

Demostración. $\Rightarrow)$ $Soc(N)\in T_s$ por lo que $Soc(N)\hookrightarrow N$ es el morfismo cero, i.e. $Soc(N)=0$.

$\Leftarrow)$ $Soc(N)=0$ implica que $Hom(S,N)=0$ para cada S módulo simple por lo que $N\in L_s$. ∎

<u>Observación</u> 3.6 Para cada M semiartiniano $Soc(M)$ es esencial en M.

Demostración. Si $M'\leq M$, M' también es semiartiniano por lo que $Soc(M') \neq 0$ si $M' \neq 0$, pero $Soc(M') = M' \cap Soc(M)$, por lo tanto $Soc(M)$ es esencial en M. ∎

Como $Soc : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}$ es un preradical entonces determina un único radical $\overline{Soc}$ que cumple con la propiedad de ser el menor de todos los radicales mayores o iguales que Soc. Además $\overline{Soc}$ resulta ser el radical que corresponde a la teoría (T_s, L_s)

<u>Corolario</u> 3.7 Si $\overline{Soc}$ es el mínimo radical mayor o igual que Soc entonces $T_s = \{ M \in A\text{-mod} : \overline{Soc}(M) = M \}$.

Demostración. Como $Soc(M) = 0$ si y solo si $\overline{Soc}(M) = 0$, entonces por la proposición anterior $L_s = \{ N \in A\text{-mod} : \overline{Soc}(N) = 0 \}$. Pero $\overline{Soc}$ es un radical idempotente ya que Soc es idempotente, por lo que coincide con el radical determinado por T_s. ∎

<u>Proposición</u> 3.8 Si M es artiniano izquier-

do implica que M sea semiartiniano.

Demostración. Sea $N \in \mathcal{L}_s$. Por demostrar que $Hom(M,N)=0$. $f: M \longrightarrow N$ implica que $f(M)$ es artiniano por lo que $Soc(f(M))$ es esencial en $f(M)$. Pero como $Soc(f(M)) \in T_s \cap \mathcal{L}_s$ entonces $Soc(f(M))$ es cero por lo que $f(M)$ es necesariamente cero, se concluye entonces que M es semiartiniano. ∎

<u>Proposición</u> 3.9 Sea M un A-módulo noetheriano entonces

a.) $\bar{S}oc(M) = Soc_n(M)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y además $Soc_{i+1}(M)/Soc_i(M)$ es semisimple finitamente generado

b.) M es semiartiniano si y solo si M tiene longitud finita.

Demostración. $Soc(M) \subseteq Soc_1(M) \subseteq Soc_2(M) \ldots$ es una cadena ascendente de submódulos de M, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Soc_{n+1}(M) = Soc_n(M)$ i.e. $\bar{S}oc(M) = Soc_n(M)$.

$Soc_{i+1}(M)/Soc_i(M) = Soc(M/Soc_i(M))$ que es semisimple y finitamente generado por ser submódulo del A-módulo noetheriano $M/Soc_i(M)$.

b.) →) Si M es semiartiniano, $M = \bar{S}oc(M) = Soc_n(M)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene $M = Soc_n(M) \supseteq Soc_{n-1}(M) \supseteq \ldots \supseteq Soc(M) \supseteq 0$ tal que, por inciso a.), $Soc_{i+1}(M)/Soc_i(M)$ es de longitud finita, por lo tanto M es de longitud finita y más aun $\ell(M) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(Soc_{i+1}(M)/Soc_i(M))$.

←) Si M tiene longitud finita entonces es artiniano y por lo tanto semiartiniano ∎

Como consecuencia de esta proposición se tienen dos corolarios con los que se caracteriza a las teorías (T_s, L_s) sobre anillos noetherianos.

<u>Corolario</u> 3.10 Si A es noetheriano como A-módulo entonces todo M semiartiniano es la suma de sus submódulos de longitud finita.

Demostración. Cada $M \in A$-mod es la suma de sus submódulos finitamente generados, pero cada submódulo finitamente generado resulta noetheriano, y por la proposición anterior, si M es semiartiniano entonces cada submódulo finitamente generado tiene longitud finita. ∎

Corolario 3.11 Sea A un anillo noetheriano entonces $\mathcal{F}_s$ el filtro de Gabriel de la teoría (T_s, L_s) es $\{{}_AI \subseteq A : A/I$ tiene longitud finita$\}$.

Demostración. Si A/I tiene longitud finita entonces A/I como es sabido es artiniano y por lo tanto semiartiniano.

$I \in \mathcal{F}_s$ implica que A/I noetheriano y semiartiniano entonces por la proposición 3.9 A/I es de longitud finita. ∎

Definición 3.12 Una teoría de torsión es simple si y solo si es generada por una clase de A-módulos simples.

Proposición 3.13 Para un anillo arbitrario si (T,L) es hereditario y $T \subseteq T_s$ entonces (T,L) es simple.

Demostración. Se sigue del siguiente lema. ∎

<u>Lema</u> 3.14 Sea T_C la clase de torsión generada por una clase $C \subseteq A$-mod cerrada bajo cocientes. Si T es una clase de torsión hereditaria contenida en T_C, entonces T es la clase de torsión generada por $T \cap C$.

Demostración. Si $M \in T \subseteq T_C$ entonces por el lema 3.3, todo cociente nocero de M tiene un submódulo no cero en C, por lo tanto en $T \cap C$ pues T es hereditaria. Con esto nuevamente por 3.3, T está contenida en la clase de torsión generada por $T \cap C$. Pero como $T \cap C \subseteq T$, la clase de torsión generada por $T \cap C$ está contenida en T. Por lo tanto T es la clase de torsión generada por $T \cap C$ ∎

<u>Definición</u> 3.15 Un anillo A es semiartiniano si y solo si como A-módulo pertenece a T_S.

Observación 3.16 A es semiartiniano si y solo si todo A-módulo cíclico no cero tiene zoclo no cero.

Demostración. →) Si Ax es un A-módulo cíclico, $Ax \cong A/\iota(x)$ entonces 3.4 implica que Ax tiene soclo no cero.

←) Todo cociente A/I de A es un A-módulo cíclico, entonces todo cociente no cero de A tiene soclo distinto de cero, por lo que A es semiartiniano. ■

Proposición 3.17 Si A es un anillo las siguientes son equivalentes.

a.) A es semiartiniano izquierdo

b.) Todo A-módulo es semiartiniano

c.) Todo A-módulo distinto de cero tiene zoclo distinto de cero

d.) Todo A-módulo es extensión esencial de su zoclo.

e.) Toda teoría de torsión hereditaria es simple.

Demostración. a→b) Para una clase de torsión hereditaria, una condición suficiente para que un módulo sea de torsión es que todos sus submódulos cíclicos sean de torsión. Sea M un A-módulo y Ax un submódulo cíclico de M, entonces todo cociente de Ax es cíclico y por lo tanto, si es distinto de cero, con zoclo no cero. Por lo que 3.4 implica que Ax es semiartiniano.

b→c) $L_c=\{0\}$ y por 3.5 todo A-módulo distinto de cero tiene zoclo no cero.

c→d) Por 3.5 la hipotesis implica que $L_c=\{0\}$, por lo que $T_c = A$-mod. Pero por 3.6 todo semiartiniano es extensión esencial de su zoclo.

d→a) Sea A/I un cociente no cero de A, entonces $Soc(A/I)$ es esencial en A/I, de donde $Soc(A/I)$ es distinto de cero. Por lo tanto de 3.4 se obtiene que A es semiartiniano.

b→e) Si T es una clase de torsión hereditaria se tiene que $T \subseteq T_s$, entonces por 3.13, T es simple.

e→b) Si toda teoría de torsión hereditaria es simple, entonces la mayor es la generada por la clase más grande de A-módulos simples, por lo tanto A-mod es la generada por todos los módulos simples, esto es, todo A-módulo es semiartiniano. ∎

4. Caracterización de los anillos Semiartinianos en términos de la teoría de torsión de Goldie.

Utilizando los resultados sobre las teorías de torsión $(T,L)^{\perp}$ y la teoría de torsión de Goldie, se concluye en esta sección dando un teorema que caracterize a los anillos semiartinianos.

<u>Teorema</u> 4.1 Son equivalentes para un anillo A

a.) A es semiartiniano izquierdo

b.) Si (T,L) es una teoría de torsión hereditaria en A-mod, entonces $(T,L)^{\perp\perp} = (T,L)$.

c.) La teoría de torsión de Goldie es TTF y está generada por los A-módulos simples singulares.

d.) La teoría de torsión generada por los A-módulos simples singulares es la teoría de torsión hereditaria cogenerada por los A-módulos simples proyectivos.

Demostración. a→b) Por 1.3 la clase de los módulos simples que pertenecen a $T^{\perp\perp}$ es la clase de los módulos simples que pertenecen a T. Pero por 3.17 e) para A semiartiniano, tanto $T^{\perp\perp}$ como T son generados por la clase de sus módulos simples, por lo que $T^{\perp\perp} = T$.

b→c) Por el corolario 2.11 $(T_g, L_g)^{\perp\perp} = (\bar{T}_g, \bar{L}_g)$, y por la hipótesis $(T_g, L_g)^{\perp\perp} = (T_g, L_g)$, de donde se concluye que T_g es una clase TTF. Sea (T_z, L_z) la teoría de torsión hereditaria generada por los A-módulos simples singulares, entonces como un A-módulo simple es de torsión Goldie si y solo si es un A-módulo singular, se obtiene que $(T_z, L_z)^{\perp} = (T_g, L_g)^{\perp}$, lo que implica que $(T_z, L_z) = (T_z, L_z)^{\perp\perp} = (T_g, L_g)^{\perp\perp} = (T_g, L_g)$.

c→a) Por 2.9 se tiene que (T_o, T_g, L_g) es TTF. Para probar que A es semiartiniano, por

3.17 c:) bastará probar que todo A-módulo distinto de cero tiene zoclo distinto de cero. Sea M un módulo no cero, si $Soc_p(M)=0$ entonces $M\in T_g$ que por hipótesis es la clase de torsión generada por los simples singulares, esto implica que M tiene algún submódulo simple singular distinto de cero, y entonces $Soc(M)\neq 0$.

c→d) Si (T_g, L_g) es TTF entonces por 2.10 (T_g, L_g) es la teoría de torsión hereditaria cogenerada por los A-módulos simples proyectivos, de donde se concluye la afirmación.

d→c) Por 2.10 $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ es la teoría de torsión hereditaria cogenerada por los A-módulos simples proyectivos. Si (T_z, L_z) denota a la teoría de torsión generada por los simples singulares, entonces se tiene que $T_z \subseteq T_g \subseteq \bar{T}_g$, y como por hipótesis $T_z = \bar{T}_g$ entonces T_g es TTF y coincide con T_z. ■

<u>Corolario</u> 4.2 Para un anillo A semiartiniano izquierdo, son equivalentes

a:) La teoría de torsión de Goldie se escinde centrálmente.

b:) La teoría de torsión de Goldman es estable.

c:) $A = A_1 \times A_2$ donde A_1 es un anillo semisimple y A_2 es un anillo con ideal singular izquierdo esencial.

Demostración. a→b) Como A es semiartiniano entonces por 4.1 T_g es TTF, por loque $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ se escinde centrálmente, entonces por el corolario 2.22 se obtiene b:).

b→a) De 2.22 se concluye entonces que $(\bar{T}_g, \bar{L}_g)$ se escinde centralmente, pero por 4.1 $(T_g, L_g) = (\bar{T}_g, \bar{L}_g)$.

a↔c) Es el teorema 2.23. ∎

<u>Corolario 4.3</u> Para un anillo A noetheriano izquierdo son equivalentes.

a:) A es artiniano izquierdo.

b:) T_g es una clase TTF y está generada por los A-módulos simples singulares.

Demostración. a→b) Como todo artiniano es es semiartiniano entonces por 4.1 se tiene b:).

b→a) Por 4.1 se tiene que A es semiartiniano izquierdo, entonces por la proposición 3.9 A es artiniano izquierdo. ∎

Observación 4.4 Si A es un anillo autoinyectivo izquierdo (i.e. A es inyectivo como A-módulo izquierdo) y noetheriano izquierdo, entonces la teoría de torsión de Goldman es estable.

Demostración. Que el A-módulo A sea inyectivo implica que todo sumando de él sea inyectivo, por lo tanto todo módulo simple proyectivo es inyectivo. Pero que A sea noetheriano implica que toda suma directa de A-módulos inyectivos sea inyectiva, por lo que todo A-módulo semisimple proyectivo es Inyectivo. De 2.22 se concluye que (T_0, L_0) es estable. ∎

Observación 4.5 Un anillo A quasifrobenius (*i.e.* A es artiniano izquierdo y derecho, y A es autoinyectivo izquierdo y derecho) es semisimple si y solo si es no singular.

Demostración. Como todo anillo artiniano es noetheriano, por 4.1 la teoría de torsión de Goldman es estable, pero además que A sea semiartiniano implica por 4.2 que A se descompone como el producto directo de un anillo semisimple por un anillo con ideal singular izquierdo esencial. Por lo tanto A es semisimple si y solo si su parte singular es cero. ∎