UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISTANCIA COLOREADA EN GRAFICAS SIMPLES

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

HECTOR ELIAS ALVARADO OMAÑA

México, D. F. 1 9 8 4

INDICE

INTRODUCCION.

LA DISTANCIA COLOREADA $\chi_d(G)$ DE UNA GRAFICA SIMPLE ES EL MINIMO NATURAL n PARA EL CUAL EXISTE UNA COLORACION DE LOS VERTICES DE G CON "COLORES" MENORES O IGUALES QUE n, DE TAL MANERA QUE SI EL COLOR DE u Y v ES i ENTONCES $d(u,v) \neq i$.
ES INMEDIATO DE LA DEFINICION QUE $\chi_d(G) \leq d(G)+1$.

DESPUES DE EXAMINAR ALGUNOS EJEMPLOS, ES NATURAL PREGUNTARSE SI EXISTEN GRAFICAS CON DISTANCIA COLOREADA ARBITRARIAMENTE GRANDE.
HORÁK Y ŠIRÁŇ [1] CONSTRUYERON UNA SUCESION DE GRAFICAS $\{G_n\}$ PARA LAS CUALES $d(G_n)=n$ Y $\chi_d(G_n)=n+1$.

COMO SUCEDE CON FRECUENCIA AL LEER UNA DEMOSTRACION UNO SE PLANTEA LA NECESIDAD DE ENCONTRAR LA SUYA PROPIA. ES ASI COMO MEDIANTE LO QUE LLAMAREMOS "ALGORITMO DE LAS CRUCES" CONSTRUIMOS UNA SUCESION DE GRAFICAS CON LAS MISMAS PROPIEDADES QUE SE MENCIONAN ARRIBA. CONSIDERAMOS QUE CON EL "ALGORITMO DE LAS CRUCES" GANAMOS EN LA SENCILLEZ DE LA PRESENTACION PUES NUESTRAS GRAFICAS RESULTAN PLANAS Y CON MUCHOS MENOS PUNTOS QUE LAS DEL EJEMPLO DE HORÁK Y ŠIRÁŇ.

EL OBJETIVO DE LA TESIS ES PRESENTAR AMBOS EJEMPLOS (CAPITULO 3), ASI COMO OTRAS PROPIEDADES RELACIONADAS CON LA DISTANCIA COLOREADA.

EL PROFR. VICTOR NEUMANN NOS PROPONE LA SIGUIENTE PREGUNTA: ¿EXISTEN GRAFICAS CON DISTANCIA COLOREADA ARBITRARIAMENTE GRANDE Y AL MISMO TIEMPO CUELLO ARBITRARIAMENTE GRANDE? EN EL CAPITULO 4 EXPONDREMOS LA DEMOSTRACION QUE ÉL MISMO ENCONTRÓ. (LA RESPUESTA ES AFIRMATIVA).

EN ESE MISMO CAPITULO CONSTRUIREMOS GRAFICAS PARA LOS CASOS EN QUE LA DISTANCIA COLOREADA ES ARBITRARIAMENTE GRANDE Y EL CUELLO ES K, CON $K = \overline{3,10}$.

EL PRIMER CAPITULO ESTA DEDICADO A LA EXPOSICION DE LOS CONCEPTOS NESESARIOS PARA FACILITAR LA LECTURA DE LA TESIS.
EN EL SEGUNDO, CALCULAREMOS EL DIAMETRO DE ALGUNAS GRAFICAS.

LLAMARÁ LA ATENCION EN EL CAPITULO 1, EL ESQUEMA DE UN TABLERO DE AJEDREZ. ESTE ES UN EJEMPLO DE UNA GRAFICA REGULAR DE GRADO 4, QUE RESUELVE UN INTERESANTE PROBLEMA COMBINATORIO.

—o—

CONCEPTOS BASICOS

UNA GRAFICA (SIMPLE) G, ESTA DEFINIDA POR LA PAREJA $G = (V, X)$, EN DONDE:

1) V ES UN CONJUNTO NO VACIO $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ DE ELEMENTOS LLAMADOS VERTICES.

2) X ES UN CONJUNTO $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ DE PAREJAS NO ORDENADAS DE DISTINTOS VERTICES DE V.

CADA PAREJA $x = (u, v)$ DE VERTICES EN X, ES UN ARCO O ARISTA DE G, SE DICE QUE x UNE LOS VERTICES u Y v, QUE A SU VEZ SON LOS VERTICES TERMINALES DEL ARCO x.

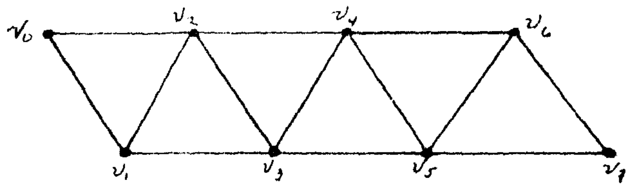
EN LAS GRAFICAS DONDE SE RESPETA EL ORDEN DE LA PAREJA $x = (u, v)$ SE TIENE QUE u ES EL VERTICE INICIAL DEL ARCO x, Y v ES EL VERTICE FINAL DEL MISMO.
A TALES GRAFICAS, SE LES LLAMA GRAFICAS DIRIGIDAS O DIGRAFICAS.
EL ARCO $x = (u, v)$ HACE QUE EL VERTICE u SEA ADYACENTE AL VERTICE v, LO CUAL ESCRIBIREMOS ASI: $u \text{ ady } v$.

UNA GRAFICA ES ETIQUETADA, CUANDO SUS VERTICES SON DISTINGUIDOS UNO DE OTRO POR NOMBRES.

EJM.: SEA $G=(V,X)$ DONDE:

$V=\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_7\}$

$X=\{x_i=(v_i, v_{i+2})\ i=\overline{0,5}\ ;\ x_j=(v_i, v_{i+1})\ i=\overline{0,6}$



EL ARCO $x=(u,v)$ SOLO NOS REPRESENTARA QUE u ady v Y QUE v ady u, i.e. $x=(u,v)=(v,u)$.
EN EL ARCO $x=(u,v)$ SE DICE QUE x Y u SON INCIDENTES UNO CON OTRO.
SI DOS ARCOS x_1 Y x_2 INCIDEN EN UN VERTICE EN COMUN, ENTONCES DIREMOS QUE TALES ARCOS SON ADYACENTES, Y ESCRIBIREMOS x_1 ady x_2.

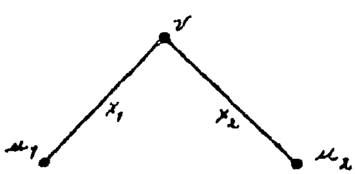
EJM.:

SEA $x_1=(u_1, v)$ Y $x_2=(v, u_2)$

ENTONCES x_1 ady x_2;

u_1 ady v;

x_1 INCIDE EN u_1;



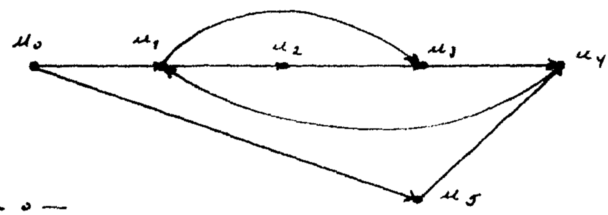
UNA GRAFICA ES ORIENTADA, SI ES DIRIGIDA Y NO EXISTE NINGUN PAR DE ARCOS SIMETRICOS, i.e., SI EXISTE EL ARCO $x=(u,v)$ ENTONCES NO DEBE ESTAR EL ARCO $x'=(v,u)$.

EJM. :

SEA $G = (V, X)$ DONDE :

$V = \{ u_0, u_1, \ldots, u_5 \}$

$X = \{ x_i = (u_i, u_{i+1})\ i = \overline{0,3}\ , x_4 = (u_4, u_1), x_5 = (u_1, u_3),$
$x_6 = (u_0, u_5), x_7 = (u_5, u_4) \}$.



— o —

SI LA GRAFICA G ES DIRIGIDA Y $x = (u, v)$ ES ARCO DE G, ENTONCES V ES LLAMADO SUCESOR DE u , Y u ES LLAMADO PREDECESOR DE V.

UNA GRAFICA CON P VERTICES Y q ARCOS ES LLAMADA (p, q) - GRAFICA.

EN EL EJEMPLO ANTERIOR, TENEMOS UNA (6, 7) - GRAFICA

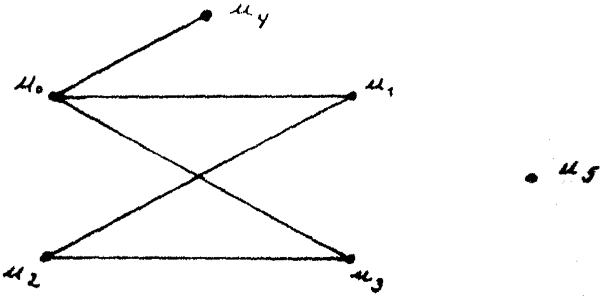
EL NUMERO DE VERTICES DE UNA GRAFICA G ES $|V(G)|$ Y LO LLAMAREMOS EL ORDEN DE G.

POR EJEMPLO, UNA (p, q) - GRAFICA, ES DE ORDEN p.

EL GRADO DE UN VERTICE u, ES EL NUMERO DE ARCOS QUE INCIDEN EN EL , Y SE REPRESENTA $\delta(u)$.

EN LA SIGUIENTE GRAFICA SE PUEDE APRECIAR QUE

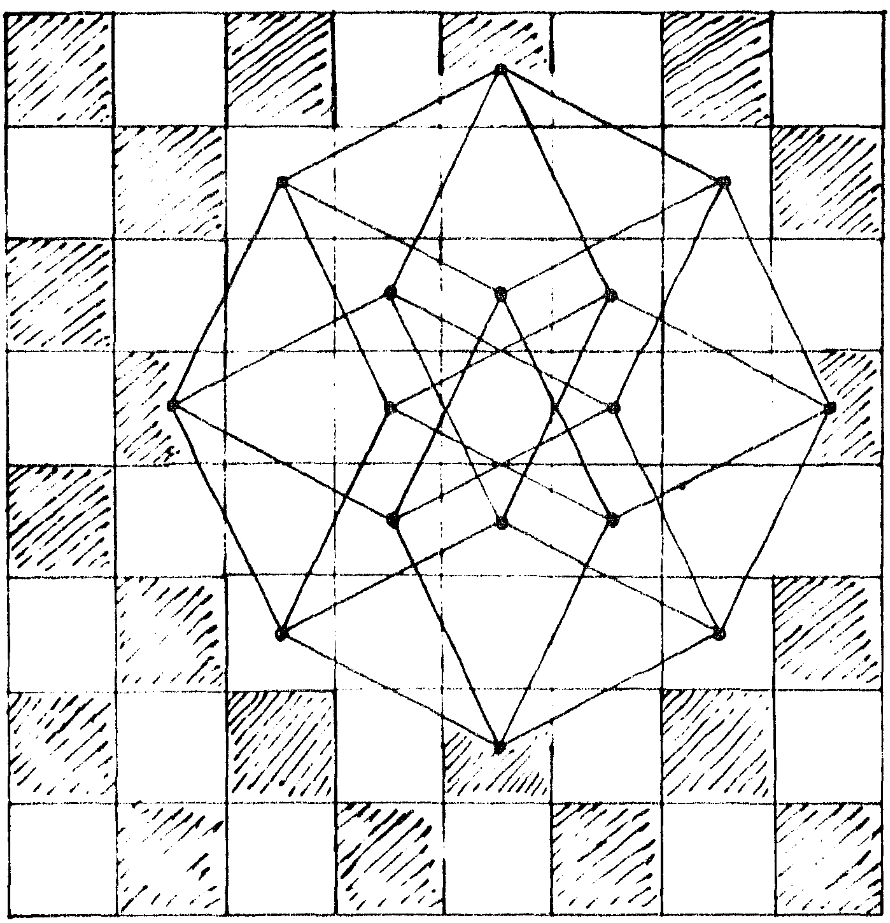
$\delta(u_0) = 3$; $\delta(u_1) = 2$; $\delta(u_4) = 1$; $\delta(u_5) = 0$



SI EN UNA GRAFICA TODOS LOS VERTICES SON DE GRADO K, ENTONCES SE DICE QUE ES REGULAR DE GRADO K.

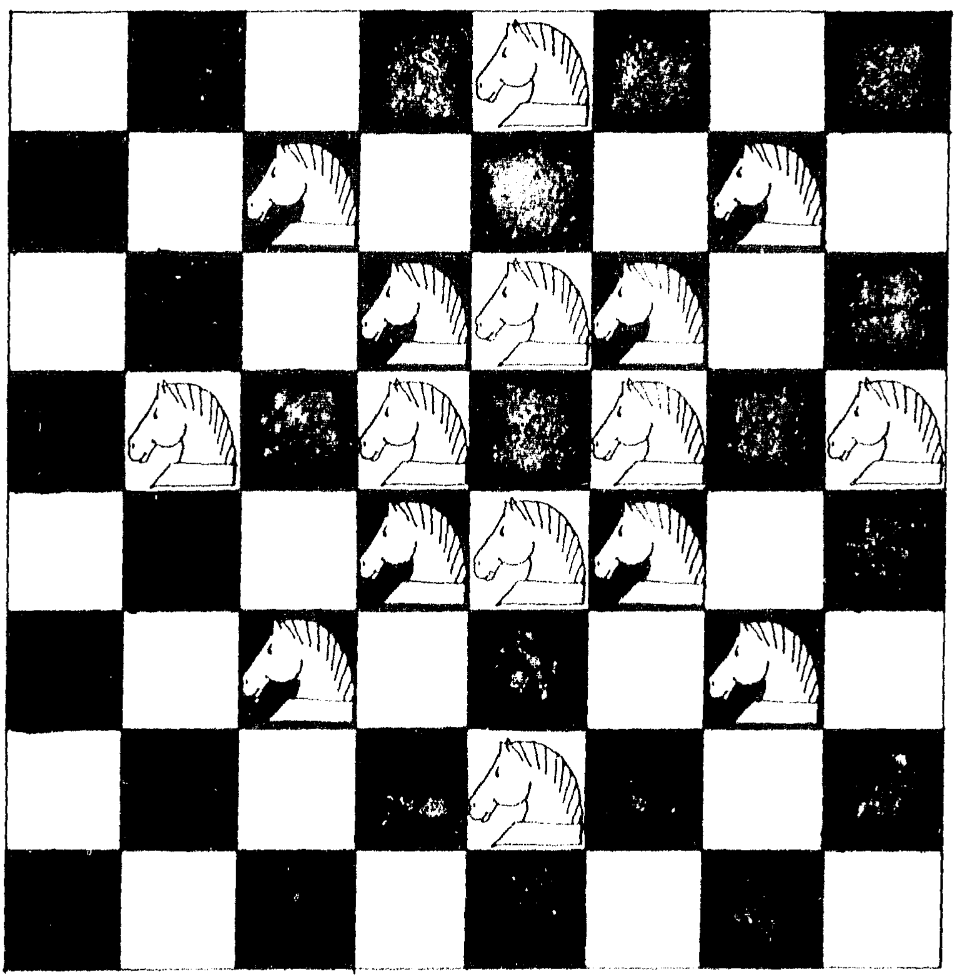
LA GRAFICA QUE SE MUESTRA A CONTINUACION, ES REGULAR DE GRADO 4, QUE ADEMÁS RESUELVE EL SIGUIENTE PROBLEMA:

EN UN TABLERO DE AJEDREZ, COLOCAR 16 PIEZAS CON MOVIMIENTO DE "CABALLO", DE TAL MANERA, QUE CADA "CABALLO" ALCANCE A OTROS CUATRO "CABALLOS".

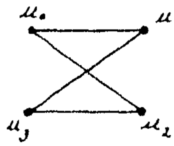


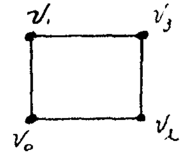
UNA GRAFICA BIPARTITA G ES UNA GRAFICA A CUYO CONJ. DE VERTICES V, SE LE PUEDE HACER UNA PARTICION EN DOS SUBCONJUNTOS V_1 Y V_2, TAL QUE TODO ARCO DE G, UNE UN VERTICE DE V_1 CON OTRO DE V_2.
SI G TIENE TODOS LOS ARCOS ENTRE LOS VERTICES DE V_1 Y LOS DE V_2, ENTONCES G ES BIPARTITA COMPLETA, Y SI V_1 Y V_2 TIENEN m Y n VERTICES RESPECTIVAMENTE, ENTONCES ESCRIBIREMOS $G = K_{m,n}$.

LA SOLUCION ES UNICA SALVO SIMETRIAS



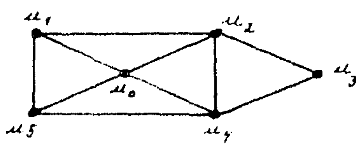
Dos gráficas G y H son isomorfas, si existe una correspondencia uno a uno entre sus conjuntos de vértices que preservan adyacencia.
En tal caso, escribiremos $G = H$.
EJM.:

$G =$ 

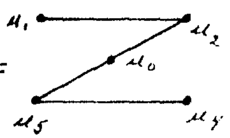
; $H =$ 

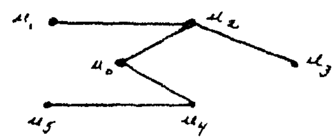
Nótese la correspondencia $u_i \leftrightarrow v_i$ $\therefore G = H$.

S es una subgráfica de la gráfica G, si tiene todos sus vértices y todos sus arcos en G.
Si S es una subgráfica de G, entonces G es una supergráfica de S.
Una subgráfica generadora, es una subgráfica que contiene todos los vértices de G.
Para cualquier subconjunto S de vértices de G, la subgráfica inducida $\langle S \rangle$, es la subgraf. maximal de G con vértices en S. De esta manera dos vértices de S son adyacentes en $\langle S \rangle$, si y sólo si, son ady. en G.

EJM.: Sea $G =$ 

Entonces:

$S_1 =$ 

; $S_2 =$ 

Es subgráfica de G. Es subgraf. generadora de G.

Si $S = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ entonces

$\langle S \rangle =$ 

subgráfica inducida de G.

SEA $V=\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ UN CONJUNTO DE VERTICES, Y $X=\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ UN CONJUNTO DE ARCOS ENTONCES:

UN CAMINO (WALK) ES UNA SUCESION DE VERTICES Y ARCOS $v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$ QUE EMPIEZA Y TERMINA EN VERTICE, DONDE $x_i=(v_{i-1}, v_i)$ $i=\overline{1,n}$.

ESTE CAMINO UNE v_0 CON v_n Y PUEDE SER DENOTADO POR $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ O POR $v_0 v_n$ - CAMINO.

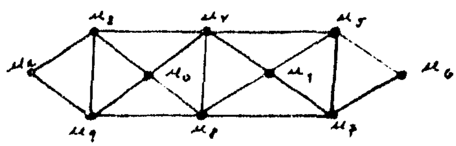
ES CERRADO SI $v_0 = v_n$ Y ABIERTO SI NO.

SI EL CAMINO ES CERRADO, TENEMOS UN CICLO.

UN CAMINO ES PASEO (TRAIL) SI TODOS SUS ARCOS SON DISTINTOS.

UN CAMINO ES TRAYECTORIA (PATH) SI TODOS SUS VERTICES (Y POR LO TANTO TODOS SUS ARCOS) SON DISTINTOS.

EJM. :

EN LA GRAFICA $G=$ 

TENEMOS EL SIGUIENTE:

CAMINO: $u_0, u_3, u_4, u_1, u_5, u_7, u_1, u_4, u_8, u_9$.

PASEO: u_0, u_3, u_9, u_0, u_4.

TRAYECTORIA: $u_2, u_3, u_4, u_5, u_7, u_6$.

CICLO: $u_0, u_3, u_4, u_5, u_1, u_7, u_8, u_0$.

NOTA: LOS VERTICES DEL CICLO SON DISTINTOS.

SE DICE QUE UNA GRAFICA G ES CONEXA, SI PARA CUALQUIER PAR DE VERTICES DE G, EXISTE UNA TRAYECTORIA QUE LOS UNE.

UNA SUBGRAFICA MAXIMAL CONEXA DE G, ES LLAMADA COMPONENTE DE G.

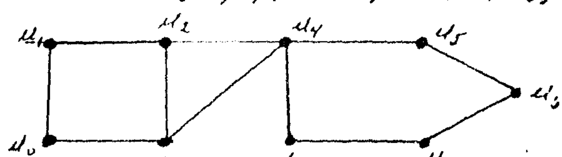
HABIAMOS DICHO, QUE TRABAJARIAMOS CON GRAFICAS SIMPLES, AHORA PEDIREMOS, QUE ADEMAS SEAN CONEXAS.

La longitud de un camino $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ es n, i.e., es el numero de arcos que hay en el.
Usando el ejemplo del camino dado anteriormente, vemos que es de longitud nueve.
La distancia $d(u,v)$ entre los vertices u y v de una grafica G, es la longitud de la trayectoria mas corta de todas las que hay entre u y v, si es que las hay.
De no existir alguna, entonces $d(u,v) = \infty$.
Tal distancia cumple:

i) $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v) = 0 \iff u = v$.
ii) $d(u,v) = d(v,u)$
iii) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$.

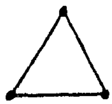
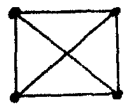
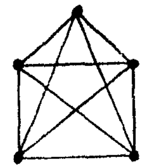
De las trayectorias que unen a u y a v, la mas corta es llamada geodesica.
El diametro de una grafica conexa G, es la longitud de la maxima geodesica existente, y se representa $d(G)$.
Ejm.:

En la sig. grafica es facil ver que su diametro es 4.
Notese: $d(u_1, u_4) = 2$ y $d(u_0, u_6) = 4$.



Una grafica es completa si para cada par de vertices, existe un arco que los une.
K_p represta una grafica completa con p vertices.
Cuello de G, es la longitud del ciclo mas chico contenido en G, si lo hay. Y circunferencia de G es la longitud del ciclo mas grande, si lo hay.

EJM.:

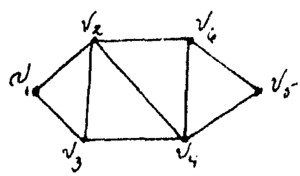
$K_3 =$  ; $K_4 =$  ; $K_5 =$ 

COMO SE PUEDE VER, CADA VERTICE DE K_p ES ADYACENTE A LOS $p-1$ VERTICES RESTANTES, POR LO TANTO, K_p ES REGULAR DE GRADO $p-1$.

LA MATRIZ DE ADYACENCIA $A=[a_{ij}]$ DE UNA GRAFICA ETIQUETADA G, CON p VERTICES, ES UNA MATRIZ CUADRADA DE $p \times p$, EN DONDE:

$$A = [a_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{SI } v_i \text{ ady } v_j \\ 0 & \text{OTRO CASO.} \end{cases}$$

EJM.:

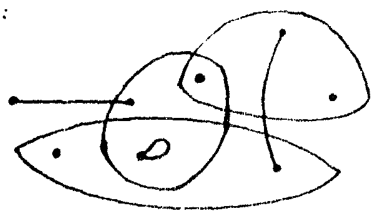
SEA $G =$ 

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

— o —

SEA $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ UN CONJUNTO FINITO, Y SEA $E = (E_i / i \in I)$ UNA FAMILIA DE SUBCONJUNTOS DE X.
LA FAMILIA E ES UNA HIPERGRAFICA SOBRE X SI: $E_i \neq \emptyset$ $(i \in I)$ Y $\bigcup_{i \in I} E_i = X$.

LA PAREJA $H = (X, E)$ ES LLAMADA UNA HIPERGRAFICA.
LOS ELEMENTOS $x_1, x_2, \dots, x_n$ SON LLAMADOS VERTICES Y LOS CONJUNTOS $E_1, E_2, \dots, E_m$ SON LLAMADOS ARISTAS.
UNA ARISTA E_i CON $|E_i| > 2$ SE DIBUJA COMO UNA CURVA ENCERRANDO TODOS LOS VERTICES DE E_i, Y SI $|E_i| = 2$ ENTONCES SE DIBUJA COMO UNA CURVA CONECTANDO SUS DOS VERTICES.
EN EL CASO EN QUE $|E_i| = 1$ ENTONCES SE DIBUJARA COMO UN LAZO EN UNA GRAFICA. [3].
EJM.:



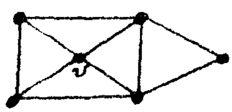
EN UNA HIPERGRAFICA $H = (X, E)$, UNA CADENA DE LONGITUD q ESTA DEFINIDA POR UNA SUCESION $(x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, E_q, x_{q+1})$ TAL QUE: $x_1, x_2, \dots, x_{q+1}$ SON VERTICES DISTINTOS DE H.
$E_1, E_2, \dots, E_q$ SON ARISTAS DISTINTAS DE H.
$x_k, x_{k+1} \in E_k$ CON $k = \overline{1, q}$.

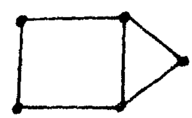
SI $q > 1$ Y $x_{q+1} = x_1$ ENTONCES ESTA CADENA ES LLAMADA UN CICLO DE LONGITUD q.
LA LONGITUD DEL CICLO MAS CHICO EN H, ES EL CUELLO DE H.

Operaciones con Vertices en Graficas y con Graficas.

1.- Remover un vertice v de una grafica G, se representa por $G-v$, y el resultado es la subgrafica inducida $\langle S = V(G) - v \rangle$, i.e., consiste en una subgrafica de G, que tiene todos los vertices de G excepto v, y todos los arcos de G, excepto los que inciden en v.

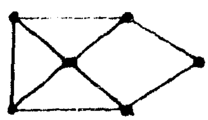
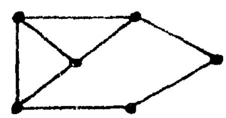
EJM.:

SEA $G =$ 

ENT. $G - v =$ 

2.- Remover un arco x de una grafica G, se representa por $G - x$ y el resultado es una subgrafica generadora de G, que contiene todos los arcos de G, excepto x.

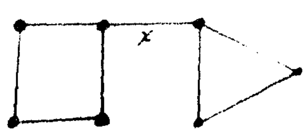
EJM.:

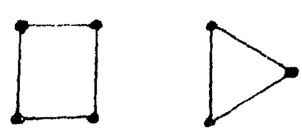
SEA $G =$ 
ENT. $G - x =$ 

Se llama puente a aquel arco que al ser removido de la grafica G, aumenta el numero de componentes conexas de G.

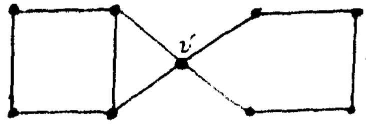
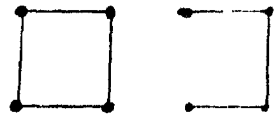
Analogamente, se llama vertice de corte, a aquel vertice que al ser removido de la grafica G, aumenta el numero de componentes conexas de G.

EJM.:

SEA $G =$ 

ENT. $G - x =$ 

x es puente.

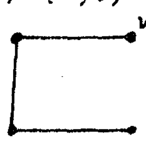
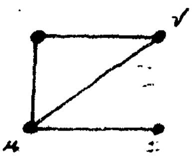
SEA G =  ENT. $G - v$ = 

v ES VERTICE DE CORTE.

BLOQUE ES UNA SUBGRAF. MAXIMAL CONEXA SIN VERTICES DE CORTE.

3.- AUMENTAR EL ARCO x EN UNA GRAFICA G, SE REPRESENTA POR $G + x$, EN DONDE x UNE DOS VERTICES NO ADYACENTES EN G, i.e., EL RESULTADO ES UNA SUPERGRAFICA G' DE G, TAL QUE $G' - x = G$.

EJM. SEA $x = (u, v)$

SEA G =  ENT. $G + x$ = 

EN LAS SIGUIENTES OPERACIONES CON GRAFICAS, G_1 Y G_2 REPRESENTARAN GRAFICAS, SIMPLEMENTE CON LA CONDICION DE QUE SUS CONJUNTOS DE VERTICES Y DE ARCOS, SEAN AJENOS RESPECTIVAMENTE.

ENTONCES:

$G_1 = (V_1, X_1)$ Y $G_2 = (V_2, X_2)$, EN DONDE:

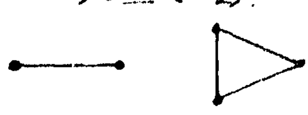
$V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ Y $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

Y MANTENDREMOS SIEMPRE, LAS MISMAS ETIQUETAS DE LOS VERTICES.

4.- LA UNION DE DOS GRAFICAS G_1 Y G_2, SE REPRESENTA POR $G_1 \cup G_2$, Y ESTA DEFINIDA POR:

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$X(G_1 \cup G_2) = X(G_1) \cup X(G_2).$$

EJM.: $K_2 \cup K_3$ =  NOTESE QUE $G_1 \cup G_2$ ES NO CONEXA.

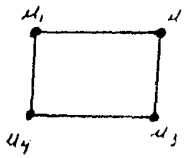
5.- LA SUMA DE DOS GRAFICAS G_1 Y G_2, SE REPRESENTA POR $G_1 + G_2$ Y ESTA DEFINIDA POR:

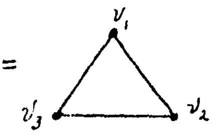
$$V(G_1+G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$X(G_1+G_2) = X(G_1) \cup X(G_2) + \{(u_i, v_j)\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

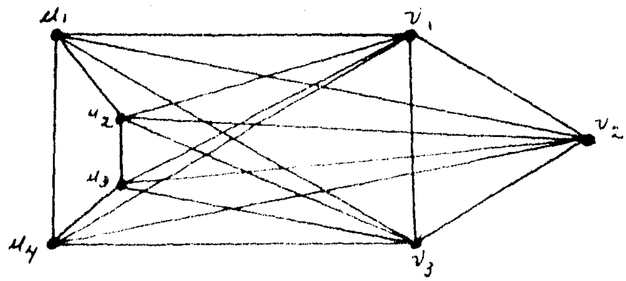
ES DECIR, $G_1 + G_2$ CONSISTE DE $G_1 \cup G_2$ Y DE TODOS LOS ARCOS QUE UNEN LOS VERTICES DE G_1 CON LOS DE G_2.

EJM.

SEA G_1 = 

Y SEA G_2 = 

ENTONCES $G_1 + G_2$ =



DE LA DEFINICION SE DEDUCE QUE $G_2 + G_1 = G_1 + G_2$.

6.- EL PRODUCTO DE DOS GRAFICAS G_1 Y G_2, SE REPRESENTA POR $G_1 \times G_2$ Y ESTA DEFINIDO POR:

$$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

$$X(G_1 \times G_2) = [(u_i, v_j), (u_k, v_r)] \iff \begin{cases} i = k \text{ y } v_j \text{ ady } v_r \text{ ó} \\ j = r \text{ y } u_i \text{ ady } u_k. \end{cases}$$

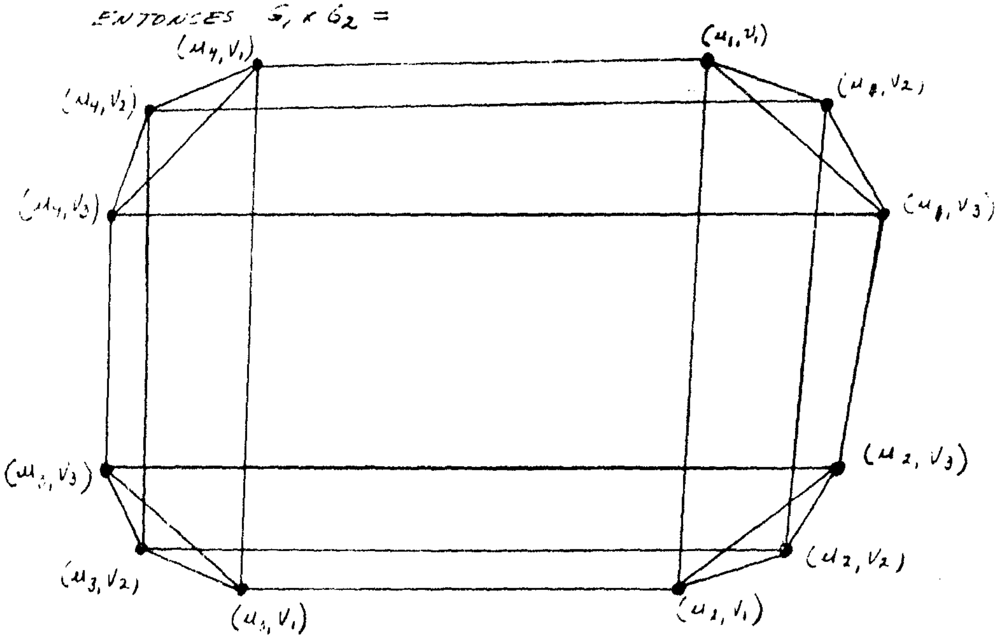
EJM.:

SEAN G_1 Y G_2 COMO LOS DEL EJEMPLO ANTERIOR.

EN $G_1 \times G_2$ HABRAN DOCE VERTICES.

$|V(G_1 \times G_2)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$.

ENTONCES $G_1 \times G_2 =$



DE LA DEFINICION SE DEDUCE QUE $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$ Y QUE HAY EN $G_1 \times G_2$, $|V(G_1)|$ COPIAS DE G_2 Y $|V(G_2)|$ COPIAS DE G_1.

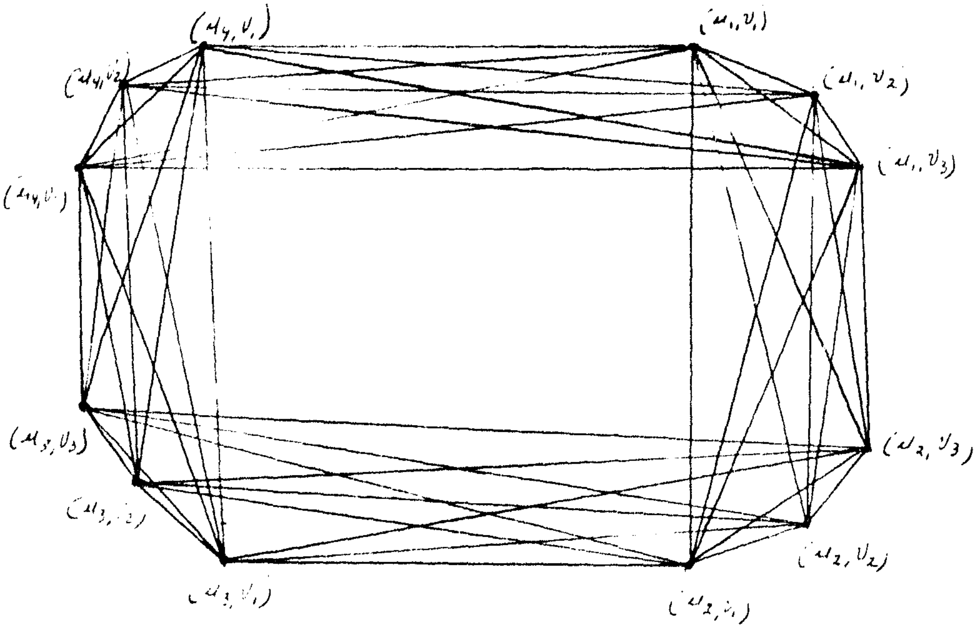
7.- LA COMPOSICION DE DOS GRAFICAS G_1 Y G_2, SE REPRESENTA POR $G_1 \circ G_2$ Y ESTA DEFINIDA POR:

$$V(G_1 \circ G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

$$X(G_1 \circ G_2) = [(u_i, v_j), (u_k, v_r)] \iff \begin{cases} u_i \text{ ady } u_k \text{ ó} \\ i = k \text{ y } v_j \text{ ady } v_r. \end{cases}$$

EJM.:

SEAN G_1 Y G_2 COMO LOS DEL EJEMPLO ANTERIOR. ENTONCES:



DE LA DEFINICION SE DEDUCE QUE $G_1 \circ G_2 \neq G_2 \circ G_1$.
ADEMAS PODEMOS DECIR QUE $(G_1 \times G_2) \subset (G_1 \circ G_2)$.

8.- $G^{=n}$ ESTA DEFINIDA POR:

$V(G^{=n}) = V(G)$

$(u,v) \in X(G^{=n}) \iff (u,v) \in X(G)$ ó $d(u,v) = n$.

9.- $G^{\leq n}$ ESTA DEFINIDA POR:

$V(G^{\leq n}) = V(G)$

$X(G^{\leq n})$ ES ANALOGA A LA ANTERIOR:

$(u,v) \in X(G^{\leq n}) \iff (u,v) \in X(G)$ ó $d(u,v) \leq n$

10.- $G^{\geq n}$ ESTA DEFINIDA POR:

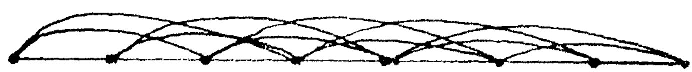
$V(G^{\geq n}) = V(G)$

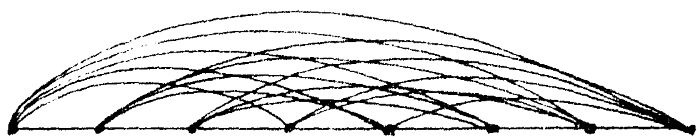
$(u,v) \in X(G^{\geq n}) \iff (u,v) \in X(G)$ ó $d(u,v) \geq n$.

EJM.:

SEA G UNA TRAYECTORIA DE LONGITUD SIETE, Y SEA $n=3$, ENTONCES

$G^{=n} =$ 

$G^{\leq n} =$ 

$G^{\geq n} =$ 

ALGUNOS DIAMETROS.

EN TODAS LAS DEMOSTRACIONES SIGUIENTES, G_1 Y G_2 SERAN GRAFICAS SIMPLES, CONEXAS Y ETIQUETADAS, TALES QUE:

$$V(G_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \text{ y } V(G_2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

—— o ——

1.- $d(G_1 \cup G_2) = \infty$

EL RESULTADO ES OBVIO, DESDE QUE $G_1 \cup G_2$ ES NO - CONEXA.

—— o ——

2.- SI $d(G_1) \geq 2$ Ó $d(G_2) \geq 2$ ENTONCES $d(G_1 + G_2) = 2$.

DEM.:

SUPONGAMOS QUE EN G_1, $d(u_i, u_k) \geq 2$

ENTONCES EN $G_1 + G_2$:

$$d(u_i, u_k) = d(u_i, v_p) + d(v_p, u_k) = 2$$

CON $1 \leq p \leq n$

LO ANALOGO SUCEDE SI EN G_2, $d(v_p, v_q) \geq 2$.

POR LO TANTO $d(G_1 + G_2) = 2$.

—— o ——

3.- SI $G_1 = K_m$ Y $G_2 = K_n$ ENTONCES $G_1 + G_2 = K_m + K_n = K_{m+n}$.

DEM.:

$$d(u_i, u_k) = 1 \quad \forall i \neq k \quad \text{y } 0 \text{ EN OTRO CASO}$$

$$d(v_p, v_q) = 1 \quad \forall p \neq q \quad \text{y } 0 \text{ EN OTRO CASO.}$$

$$\text{y } d(u_i, v_p) = 1 \quad i = \overline{1, m}. \quad p = \overline{1, n}.$$

$\therefore\ d(G_1 + G_2) = 1.$

i.e. $K_m + K_n = K_{m+n}$.

—— • ——

4.- $d(G_1 \times G_2) = d(G_1) + d(G_2)$.

Dem:

Primero demostraremos las sigs. afirmaciones.

a) $d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)] = d(u_i, u_k)$.

b) $d[(u_i, v_j); (u_k, v_r)] = d(u_i; u_k) + d(v_j; v_r)$.

a) Dem. por induccion.

P.D. $d[(u_i; v_j), (u_k, v_j)] = n = d(u_i, u_k)$.

.) Para $n=0$ y $n=1$ se cumple trivialmente.

..) Supongamos $l \leq n$ y $d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)] = l = d(u_i, u_k)$.

...) P.D. $d[(u_i; v_j), (u_k, v_j)] = n+1 = d(u_i, u_k)$.

Dem.:

Por definicion de producto de dos graficas

$d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)] \leq d(u_i, u_k)$.

Supongamos $d(u_i, u_k) = n+1 > d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)]$,

y que existe una geodesica orientada T,

que va desde (u_i, v_j) hasta (u_k, v_j) con longitud $\leq n$.

Es claro que no todos los vertices de T,

pueden tener a v_j como segunda componente.

Sea (u_i', v_j^*) el primer vertice de T con $v_j \neq v_j^*$.

A partir de este vertice, debe haber al menos,

dos vertices donde se repite la 2ª componente,

sean estos (u_r, v_s) y (u_r', v_s) y sean ademas,

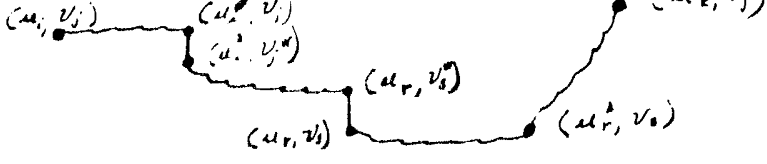
tales que (u_r, v_s) es el primer vertice de T,

en usar v_s y (u_r', v_s) es el ultimo en usar v_s.

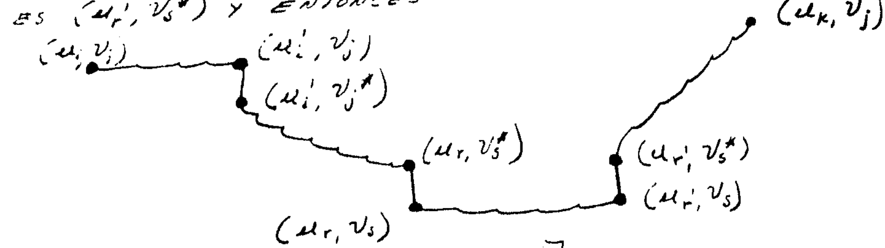
Por lo tanto, es claro que el antecesor de

(u_r, v_s) es de la forma (u_r, v_s^*).

Veamos los vertices que hemos marcado:



PODEMOS SUPONER QUE EL SUCESOR DE (u_r', v_s) ES (u_r', v_s^*) Y ENTONCES TENDREMOS:



POR HIPOTESIS, $d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)] \leq n \therefore$

$d[(u_r, v_s), (u_r', v_s)] < n$.

POR HIPOTESIS DE INDUCCION $d[(u_r, v_s), (u_r', v_s)] = d(u_r, u_r')$

Y POR LA MISMA RAZON $d[(u_r, v_s^*), (u_r', v_s^*)] = d(u_r, u_r')$ ∇!

PUES HABIAMOS SUPUESTO T GEODESICA Y ENTONCES EN T

$d[(u_r, v_s^*), (u_r', v_s^*)] = d(u_r, u_r') + 2$.

$\therefore d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)] = d(u_i, u_k)$

ADEMAS HEMOS DEMOSTRADO QUE LA GEODESICA QUE EN $G_1 \times G_2$ UNE (u_i, v_j) CON (u_k, v_j), SOLO USA A v_j COMO SEGUNDA COMPONENTE, ANALOGAMENTE $d[(u_i, v_j), (u_i, v_r)] = d(v_j, v_r)$.

— o —

b) POR LO DEMOSTRADO ANTERIORMENTE:

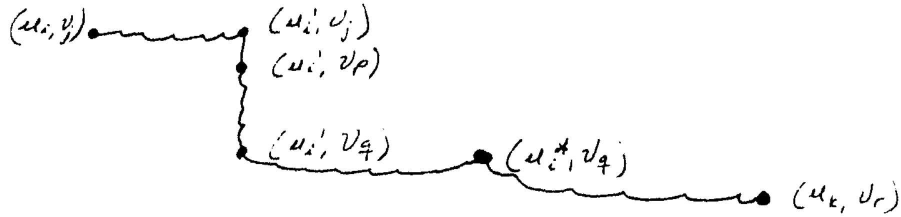
$d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] \leq d[(u_i, v_j), (u_k, v_j)] + d[(u_k, v_j), (u_k, v_r)] =$

$= d(u_i, u_k) + d(v_j, v_r)$.

SUPONGAMOS QUE EN $G_1 \times G_2$ EXISTE UNA GEODESICA ORIENTADA T, QUE VA DESDE (u_i, v_j) HASTA (u_k, v_r) DE LONGITUD MENOR QUE $d(u_i, u_k) + d(v_j, v_r)$.

SEA (u_i', v_p) EL PRIMER VERTICE QUE T NECESITA CON $v_p \neq v_j$ Y SEA (u_i', v_q) EL ULTIMO EN USAR u_i' COMO PRIMERA COMPONENTE, ASI COMO (u_i^*, v_q) EL ULTIMO EN USAR v_q COMO SEGUNDA COMPONENTE.

VEAMOS LOS VERTICES QUE HEMOS MARCADO:



ENTONCES:

$$d[(u_i,v_j),(u_i^*,v_q)] = d[(u_i,v_j),(u_i',v_j)] +$$

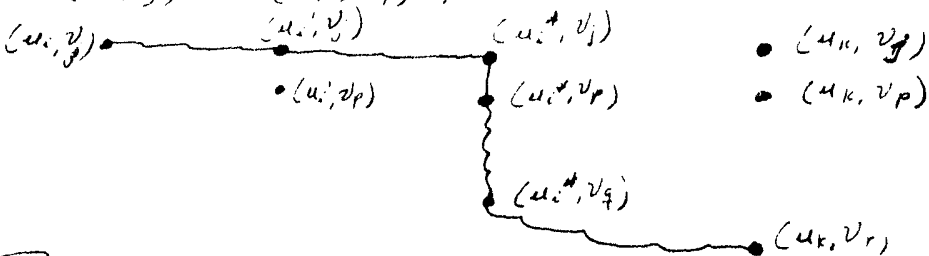
$$+ d[(u_i',v_j),(u_i',v_q)] + d[(u_i',v_q),(u_i^*,v_q)] =$$

$$= d(u_i,u_i') + d(u_i',u_i^*) + d(v_j,v_q) =$$

$$= d(u_i,u_i^*) + d(v_j,v_q) =$$

$$d[(u_i,v_j),(u_i^*,v_j)] + d[(u_i^*,v_j),(u_i^*,v_q)]$$

i.e., LA SUBGRAFICA DE LA GEODESICA T, QUE UNE (u_i,v_j) CON (u_i^*,v_q) PUEDE SER SUSTITUIDA POR:



POR LO TANTO, T NO <u>NECESITA</u> DEJAR DE USAR A v_j COMO SEGUNDA COMPONENTE DE SUS VERTICES, ANTES DE (u_k, v_p).

$$\therefore\ d[(u_i,v_j),(u_k,v_p)] = d(u_i,u_k) + d(v_j,v_r).$$

DE ESTE RESULTADO TENEMOS QUE PARA CUALESQUIERA (u_s,v_p), (u_t,v_q) EN $G_1 \times G_2$:

$$d[(u_s,v_p),(u_t,v_q)] = d(u_s,u_t) + d(v_p,v_q) \le d(G_1) + d(G_2)$$

SI $d(u_s,v_p) = d(G_1)$ Y $d(v_p,v_q) = d(G_2)$ ENTONCES SE TIENE LA IGUALDAD.

POR LO TANTO $d(G_1 \times G_2) = d(G_1) + d(G_2)$.

5.- $d(G_1 \circ G_2) = \begin{cases} 2 & \text{SI } d(G_1) = 1 \text{ Y } d(G_2) \geq 2 \\ d(G_1) & \text{EN OTRO CASO.} \end{cases}$

DEM.:

a) SUPONGAMOS $d(G_1) = 1$ Y $d(G_2) \geq 2$ ENTONCES POR DEFINICION DE COMPOSICION

SI $u_i \neq u_k \Rightarrow d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] = 1$

SI $u_i = u_k \Rightarrow$

$\cdot)$ v_j ady $v_r \Rightarrow d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] = 1$

$\cdot\cdot)$ $v_j\ \overline{\text{ady}}\ v_r \Rightarrow d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] =$

$= d[(u_i, v_j), (u_q, v_j)] + d[(u_q, v_j), (u_k, v_r)] = 2$ CON $u_q \neq u_i$.

$\therefore d(G_1 \circ G_2) = 2$.

b) 1.- SUPONGAMOS $d(G_1) = 1 = d(G_2)$ ENT. POR DEF.

$$d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] = \begin{cases} 1 & \text{SI } u_i \neq u_k \text{ Ó } v_j \neq v_r \\ 0 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}$$

$\therefore d(G_1 \circ G_2) = 1 = d(G_1)$.

DE DONDE TENEMOS QUE $K_m \circ K_n = K_{m \cdot n}$.

2.- SUPONGAMOS $d(G_1) \geq 2$ Y $d(G_2) \geq 2$, Y $u_i \neq u_k$.

POR DEFINICION $d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] \geq d(u_i, u_k)$

SUPONGAMOS QUE EN $G_1 \circ G_2$ EXISTE UNA GEODESICA ORIENTADA T QUE VA DESDE (u_i, v_j) HASTA (u_k, v_r) CON LONGITUD MENOR QUE $d(u_i, u_k)$.

EN T NO PUEDEN HABER DOS VERTICES CON PRIMERA COMPONENTE IGUAL, PUES SI (u_t, v_p) FUERA EL PRIMERO EN USAR u_t Y EL SIGUIENTE FUERA (u_t, v_q), TENDRIAMOS QUE EN T $d[(u_t, v_p), (u_t, v_q)] \geq 1$ Y SI (u_t^*, v_s) FUERA EL ANTECESOR DE (u_t, v_p) ENTONCES $d[(u_t^*, v_s), (u_t, v_q)] \geq 2$ ∇ PUES u_t^* ady u_t. SI (u_t, v_p) NO TIENE ANTECESOR ES PORQUE $(u_i, v_j) = (u_t, v_p)$, EN TAL CASO ORIENTAN T EN SENTIDO CONTRARIO Y LA DEM. ES ANALOGA

POR LO TANTO, LA GEODESICA T SOLO USA LA ADYACENCIA DE G_1 Y ENTONCES

$d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] = d(u_i, u_k) \leq d(G_1)$

POR OTRA PARTE, SI $u_i = u_k$ ENTONCES

$d[(u_i, v_j), (u_k, v_r)] \leq 2$

$\therefore \; d(G_1 \circ G_2) = d(G_1)$.

6.- $d(G^{\le n}) = \left\lceil \frac{d(G)}{n} \right\rceil$

DEM.:

SI $n \ge d(G)$ Ó $n=1$, SE CUMPLE TRIVIALMENTE.

SUPONGAMOS $1 < n < d(G)$

VEAMOS PRIMERO EL $d(H^{\le n})$ DONDE H ES UNA TRAYECTORIA DE LONGITUD m. $H = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$.

SEAN $0 \le l+p \le k = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$; $0 \le r \le k_n$; $l, p, r \in \mathbb{N}$.

DE LA DEFINICIÓN DE $G^{\le n}$ ES CLARO QUE

$d(u_{ln}, u_{(l+(p-1))n}) = p-1$ Y QUE

$d(u_{ln}, u_{(l+p)n}) = p$. DE ESTOS RESULTADOS TENEMOS

$d(u_{ln}, u_r) = p$ SI $(l+p-1)_n < r \le (l+p)n$.

SEA $s = ln+i$ CON $0 \le i < n$, ENTONCES

$d(u_s, u_r) = d(u_{ln+i}, u_r) = p$ SI $(l+p-1)n+i < r \le (l+p)n+i$

PARA CALCULAR $d(H^{\le n})$ BASTA SABER EL MAXIMO VALOR QUE PUEDE TOMAR p

COMO $0 \le l+p \le k$, ENTONCES SI $l=0$ TENEMOS $p \le k$ Y EL MAXIMO VALOR DE p SERIA $k = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$

PERO SI $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor < \frac{m}{n}$ Y $r > k_n$ ENTONCES

$d(u_0, u_r) = k+1 = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor + 1 = \lceil \frac{m}{n} \rceil$

SI $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = \frac{m}{n}$ ENTONCES $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = \lceil \frac{m}{n} \rceil$

$\therefore \quad d(H^{\le n}) = \lceil \frac{m}{n} \rceil = \left\lceil \frac{d(H)}{n} \right\rceil$.

SI $d(G) = m \Rightarrow d(G^{\le n}) \ge \left\lceil \frac{d(G)}{n} \right\rceil$

SUPONGAMOS $d(G) = m$ Y QUE $d(G^{\le n}) > \left\lceil \frac{d(G)}{n} \right\rceil$

ENTONCES EN G HAY VERTICES A DISTANCIA MAYOR QUE m $\#$

$\therefore \; d(G^{\le n}) = \left\lceil \frac{d(G)}{n} \right\rceil$.

DISTANCIA COLOREADA.

DEFINICION:

UNA COLORACION EN DISTANCIA DE UNA GRAFICA G, ES UN MAPEO f, DEL CONJUNTO DE TODOS LOS VERTICES DE G, AL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES, TAL QUE SI u Y v SON VERTICES DE G Y $f(u) = f(v)$ ENTONCES $d(u,v) \neq f(u)$.

$\chi_d(G)$ DENOTA EL MINIMO NUMERO NATURAL n, TAL QUE EXISTE UNA COLORACION EN DISTANCIA f DE G, QUE SATISFACE $f(u) \leq n$ PARA CADA $u \in V(G)$.

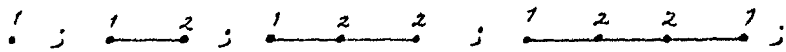
$\chi_d(G)$ ES LLAMADA LA DISTANCIA COLOREADA DE G, i.e., LA DISTANCIA COLOREADA DE G, ES EL MINIMO NATURAL n, TAL QUE A CADA VERTICE DE G, SE LE PUEDE ASIGNAR UN NUMERO NATURAL $m \leq n$ Y NINGUN PAR DE VERTICES DE G, QUE ESTEN A DISTANCIA i, TIENEN ASIGNADO EL COLOR i.

SI G ES UNA GRAFICA Y HACEMOS $f(u) = d(G)+1$ PARA CADA VERTICE DE G, OBTENDREMOS UNA COLORACION EN DISTANCIA, PUES $d(u,v) \leq d(G)$ PARA TODO PAR DE VERTICES DE G.
POR LO TANTO $\chi_d(G) \leq d(G)+1$.

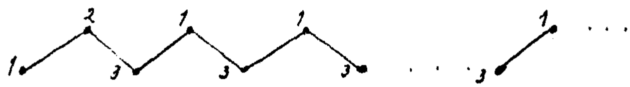
POR EJEMPLO, SI $G=K_p$ CON $p \geq 2$, ENTONCES $\chi_d(G)=2$ PUES DOS VERTICES DE G NO PUEDEN USAR EL COLOR 1 Y $\chi_d(G) \leq d(G)+1$.

Para cualquier trayectoria T, $\chi_d(T) \le 3$.

Dem.:



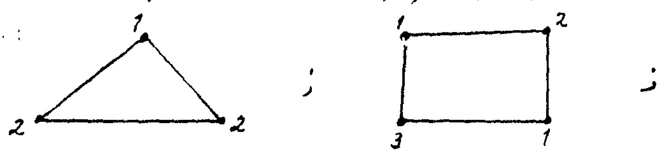
Si $d(T) \ge 4 \Rightarrow \chi_d(T) = 3$



—— • ——

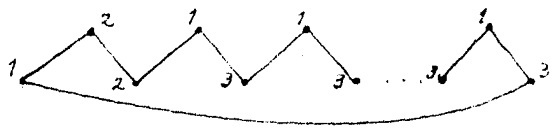
Para cualquier ciclo $\mathcal{C}$, $\chi_d(\mathcal{C}) \le 3$

Dem.:

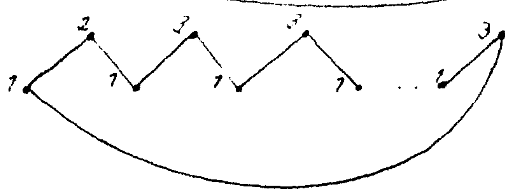


Si la longitud de $\mathcal{C}$ es $n \ge 4$, $\chi_d(\mathcal{C}) = 3$

·) Si n es impar



··) Si n es par



—— o ——

PARA CUALQUIER GRAFICA BIPARTITA G, $\chi_d(G) \leq 3$.

DEM.:

SI G ES BIPARTITA, PODEMOS HACER UNA PARTICION DE SU CONJUNTO DE VERTICES V, EN DOS SUBCONJ. V_1 y V_2.

ASIGNEMOS EL COLOR 1 A TODOS LOS VERTICES DE V_1.

ASIGNEMOS EL COLOR 3 A TODOS LOS VERTICES DE V_2.

SI u y v ESTAN EN V_1, $d(u,v) \geq 2$.

SI u y v ESTAN EN V_2, LA DISTANCIA ENTRE u y v ES PAR.

$\therefore \chi_d(G) \leq 3$.

SI EN LA BIPARTITA HAY UNA TRAYECTORIA DE LONGITUD MAYOR O IGUAL QUE CUATRO, O SI HAY UN CICLO, ENTONCES $\chi_d(G) = 3$.

UNA GRAFICA ES BIPARTITA, SI Y SOLO SI, TODOS SUS CICLOS SON DE LONGITUD PAR [4].

UN ARBOL NO TIENE CICLOS, POR LO TANTO:
TODO ARBOL ES UNA BIPARTITA. SI A ES ARBOL, $\chi_d(A) \leq 3$.

A CONTINUACION PRESENTO UN ALGORITMO PARA COLOREAR CUALQUIER ARBOL FINITO Y OTRO PARA CUANDO EL ARBOL NO ES FINITO:

PARA CUALQUIER ARBOL FINITO A, $\chi_L(A) \leq 3$.

DEM. :

CON EL SIGUIENTE ALGORITMO, COLOREAREMOS UN ARBOL FINITO CUALQUIERA, CON UN MAXIMO DE TRES COLORES.

•) SEA v UN VERTICE DE A, QUE TIENE GRADO UNO.
ASIGNAR A v EL COLOR 2.
COLOREAR LA TRAYECTORIA QUE VA DESDE v, HASTA OTRO VERTICE DE GRADO UNO, CON LA SECUENCIA ALTERNA DE COLORES; 1, 3, 1, 3, ...

••) O EL ARBOL YA ESTA COLOREADO (EN CUYO CASO FIN) O EL ARBOL TIENE AUN, AL MENOS UN VERTICE DE GRADO UNO SIN COLOREAR.
SI HAY VARIOS, TOMAR CUALQUIERA.
SEA u TAL VERTICE

•••) SEGUIR LA TRAYECTORIA QUE VA DESDE u HASTA EL PRIMER VERTICE COLOREADO QUE ENCUENTRE.
SEA w TAL VERTICE, Y T TAL TRAYECTORIA.
ENTONCES :

SI EL COLOR DE w ES 3, COLOREAR T CON LA SECUENCIA 1, 3, 1, 3, ...

SI EL COLOR DE w ES 1, COLOREAR T CON LA SECUENCIA 3, 1, 3, 1, ...

IR A ••)

—— o ——

EN ESTE ALGORITMO, SOLO HAY UN VERTICE CON COLOR 2, LOS DE COLOR 1 ESTAN A DISTANCIA MAYOR QUE UNO, Y LOS DE COLOR 3 ESTAN A DISTANCIA PAR.

—— o ——

SI A ES UN ARBOL INFINITO, $\chi_{\lambda}(A)=3$.

DEM.:

CON EL SIGUIENTE ALGORITMO, VEREMOS QUE SON SUFICIENTES Y NECESARIOS TRES COLORES.

•) TOMAR UN VERTICE DE GRADO UNO Y ASIGNARLE EL COLOR 2. SEA u TAL VERTICE.

••) A PARTIR DE u SEGUIR COLOREANDO CON 1,3,1,3,... HASTA ENCONTRAR UN VERTICE v, TAL QUE $\delta(v)>2$. IR A •v); Ó HASTA ENCONTRAR UN VERTICE DE GRADO UNO, SEA u TAL VERTICE. IR A v).

•••) A PARTIR DE u SEGUIR COLOREANDO CON 3,1,3,1,... HASTA ENCONTRAR UN VERTICE v, TAL QUE $\delta(v)>2$. IR A •v); Ó HASTA ENCONTRAR UN VERTICE DE GRADO UNO, SEA u TAL VERTICE. IR A v).

•v) MIENTRAS $\delta(v)>2$ HACER:

SI v TIENE COLOR 1 $\Rightarrow u \leftarrow v$ E IR A •••)

SI v TIENE COLOR 3 $\Rightarrow u \leftarrow v$ E IR A ••)

$\delta(v) \leftarrow \delta(v)-1$.

v) u ES SOLO EL ULTIMO VERTICE DE UNA DE LAS MUCHAS TRAYECTORIAS QUE HAY EN A, PERO NO MARCA UN ALTO PARA EL ALGORITMO, PUES SIEMPRE HABRA VERTICES v CON $\delta(v)>2$, POR LO TANTO •v) NUNCA ACABA.

—— o ——

NOTESE QUE EL ALGORITMO ES RECURSIVO.

LOS VERTICES ESTAN COLOREADOS EN IGUAL FORMA QUE CUANDO A ES FINITO.

—— o ——

SI S ES UNA SUBGRAFICA DE G CON $d(S) \leq d(G)$ Y $\chi_d(G) = d(G)+1$ ENTONCES $\chi_d(S) \leq \chi_d(G)$.

DEM:

$$\chi_d(S) \leq d(S)+1 \leq d(G)+1 = \chi_d(G).$$

——— o ———

$\chi_d(G_1+G_2) = 2$ ENTONCES G_1 ó G_2 ES COMPLETA

DEM:

EN G_1+G_2 PODEMOS SUPONER QUE EL VERTICE u DE G_1 TIENE EL COLOR 1, Y POR LO TANTO TODOS LOS VERTICES DE G_2 TIENEN EL COLOR 2, i.e., TODOS ESTAN ENTRE SI A DISTANCIA 1 Y G_2 ES COMPLETA.

ANALOGAMENTE SI EL VERTICE v DE G_2 TIENE EL COLOR 1.

——— o ———

SI $\chi_d(G_1) \geq 3$ ó $\chi_d(G_2) \geq 3 \Longrightarrow \chi_d(G_1+G_2) = 3$

DEM:

SUPONGAMOS $\chi_d(G_1) \geq 3$ Y $\chi_d(G_1+G_2) = 2$

ENTONCES TENEMOS QUE G_2 ES COMPLETA Y G_1 PUEDE SER COLOREADA USANDO LOS COLORES 1 Y 2 EN G_1+G_2. ESTA COLORACION DE LOS VERTICES DE G_1 EN G_1+G_2 PUEDE SER USADA PARA COLOREAR G_1 Y $\therefore \chi_d(G_1) = 2$ ∇

ANALOGAMENTE SI $\chi_d(G_2) \geq 3$.

$\therefore \chi_d(G_1+G_2) = 3$.

——— o ———

EL CONCEPTO DE COLORACION EN DISTANCIA FUE INTRODUCIDO POR NEERALAGI Y SAMPATHKUMAR [1], QUIENES ENCONTRARON UNA GRAFICA CON DISTANCIA COLOREADA 4, Y CONJETURARON QUE $\chi_d(G) \leq 4$ PARA CUALQUIER GRAFICA G.
SIN EMBARGO, NEBESKY CONSTRUYO UNA GRAFICA G, CON $\chi_d(G) = 5$ Y PROPUSO ESTUDIAR LA SIGUIENTE CUESTION:
¿EXISTE UN NUMERO NATURAL m, TAL QUE $\chi_d(G) \leq m$ PARA CUALQUIER GRAFICA G?
LA RESPUESTA, ES NO.
EN [1] APARECE EL SIGUIENTE:

TEOREMA DE HORAK.- PARA CUALQUIER NUMERO n, EXISTE UNA GRAFICA FINITA G, TAL QUE $\chi_d(G) = n$.
Y LO PRUEBA DE LA SIGUIENTE MANERA:

CONSTRUYE POR INDUCCION UNA SUCESION DE GRAFICAS $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ TALES QUE $d(G_n) = n$ Y $\chi_d(G_n) = n+1$.

•) SEAN $G_0 = K_1$; $G_1 = K_2$; $G_2 = (K_2 \cup K_2) + K_1$
EVIDENTEMENTE $d(G_i) = i$ Y $\chi_d(G_i) = i+1$ PARA $i = 0,1,2$.

••) SUPONGAMOS QUE LA GRAFICA G_n CON $n \geq 2$, $d(G_n) = n$ Y $\chi_d(G) = n+1$, YA HA SIDO CONSTRUIDA.

•••) SUPONGAMOS AHORA, QUE LA GRAFICA G_n, TIENE a_n VERTICES: $V(G_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{a_n}\}$
DENOTEMOS POR $\{v_i^j\}_{i=\overline{1,a_n}}^{j=\overline{1,n+2}}$ EL CONJUNTO DE VERTICES DE G_{n+1}

DEFINIMOS $v_i^j v_k^m$ COMO LOS ARCOS DE G_{n+1}, SI Y SOLO SI, TENEMOS UNO DE LOS SIGUIENTES CASOS:

1.- $j = m = 1$ y $v_i v_k$ ES ARCO DE G_n.

2.- $j = m = n+2$ y $v_i v_k$ ES ARCO DE G_n.

3.- $m = j+1$; $i = k$; $m \in [2, n+2]$, $i = \overline{1, a_n}$

4.- $m = j+1 = \frac{n}{2} + 2$ CON i, k ARBITRARIAS SI n ES PAR.

5.- $m = j+1$; $j \in \left[\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right]$ i, k ARBITRARIAS SI n ES IMPAR.

COMO

$$d(v_i^1, v_k^1) = d(v_i^{n+2}, v_k^{n+2}) \leq n$$
$$d(v_i^1, v_k^{n+2}) = n+1$$
$$d(v_i^1, v_k^m) \leq n+1 \quad \text{PARA } m \in [2, n+1]$$
$$d(v_i^j, v_k^{n+2}) \leq n+1 \quad \text{PARA } j \in [2, n+1]$$
$$\text{y } d(v_i^j, v_k^m) = n \quad \text{PARA } j, m \in [2, n+1]$$

ENTONCES $d(G_{n+1}) = n+1$.

AHORA ES SUFICIENTE PROBAR QUE $\chi_d(G_{n+1}) = n+2$.

CLARAMENTE $\chi_d(G_{n+1}) \leq n+2$, YA QUE $\chi_d(G) \leq d(G)+1$.

SUPONGAMOS QUE $\chi_d(G_{n+1}) = n+1$.

CONSIDEREMOS LAS SUBGRAFICAS H_1 y H_2 DE G_{n+1}, INDUCIDAS POR LOS CONJUNTOS $\{v_i^1\}$ y $\{v_i^{n+2}\}$ RESPECTIVAMENTE, $i = \overline{1, a_n}$.

ES CLARO QUE $H_1 = H_2 = G_n$.

COMO LA DISTANCIA ENTRE u y v EN G_{n+1}, ES LA MISMA QUE SU DISTANCIA EN H_1 y H_2 PARA CADA PAR DE VERTICES u y v EN H_1 y H_2 RESPECTIVAMENTE, CADA COLORACION EN DISTANCIA DE G_{n+1} INDUCE UNA COLORACION EN DISTANCIA DE H_1 y H_2.

DE ESTA MANERA TENEMOS.

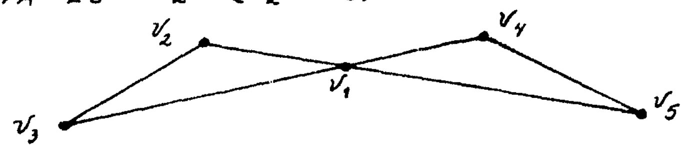
$$\chi_d(H_1) = \chi_d(H_2) = \chi_d(G_n) = n+1$$

Y ADEMAS EXISTEN VERTICES u_1 EN H_1 y u_2 EN H_2, AMBOS CON COLOR $n+1$ ∇

PUES EN G_{n+1}, $d(u_1, u_2) = n+1$ $\therefore$ $\chi_d(G_{n+1}) = n+2$

HASTA AQUI, ES TODO LO QUE APARECE EN [1].

ESTA ES $G_2 = (K_2 \cup K_2) + K_1$.

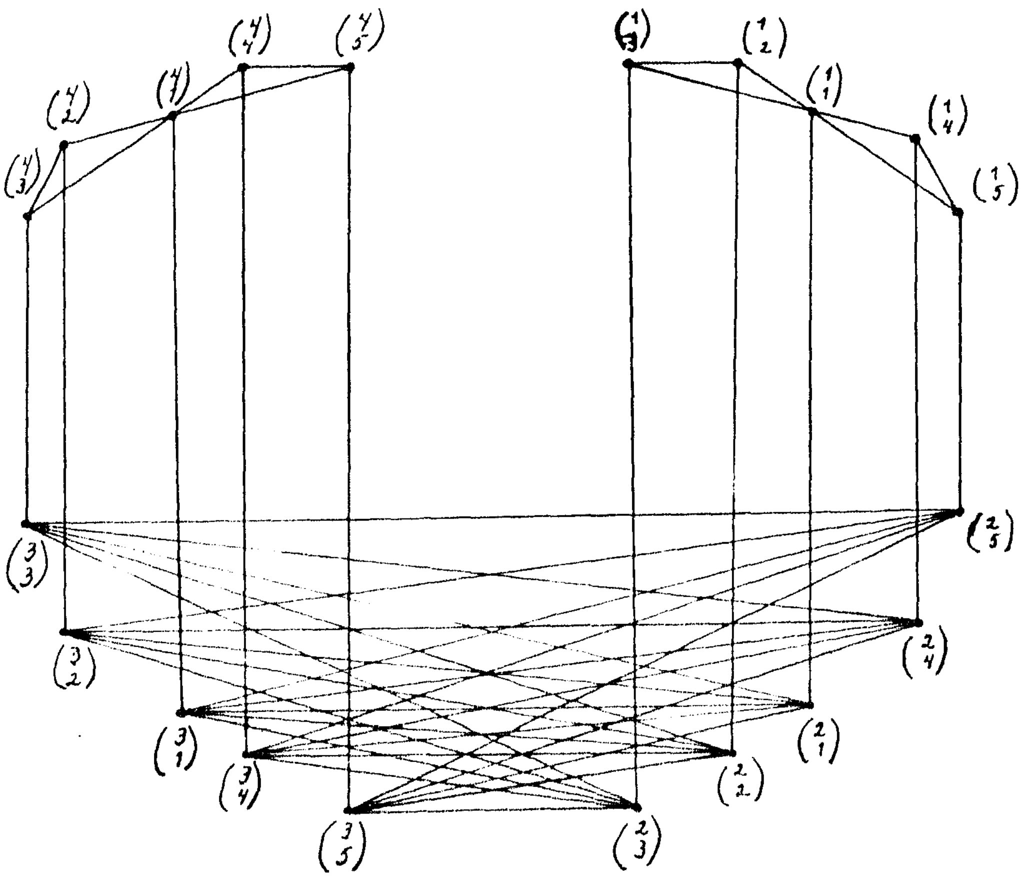


— o —

ESCRIBIREMOS $\binom{j}{i}$ POR v_i^j

LA SIGUIENTE ES LA GRAFICA G_3 CONSTRUIDA CON EL ALGORITMO DE HORÁK.

VER LA MATRIZ DE ADYACENCIA EN LA SIGUIENTE PAGINA.



MATRIZ DE ADYACENCIA DE G_3.

j	m	1					2					3					4				
j	i \ k	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1		1	1	1	1	1														
	2	1		1				1													
	3	1	1						1												
	4	1				1				1											
	5	1			1						1										
2	1											1	1	1	1	1					
	2											1	1	1	1	1					
	3											1	1	1	1	1					
	4											1	1	1	1	1					
	5											1	1	1	1	1					
3	1																1				
	2																	1			
	3																		1		
	4																			1	
	5																				1
4	1																	1	1	1	1
	2																1		1		
	3																1	1			
	4																1				1
	5																1			1	

SIGAMOS EL ALGORITMO DE HORÁK, PARA VER LA ADYACENCIA DE G_3, CON LOS VERTICES DE G_2 ETIQUETADOS COMO EN LA PAGINA ANTERIOR.

1.- $j = m = 1$ y $V_i V_k$ ES ARCO DE G_2 } CUADROS SOMBREADOS.

2.- $j = m = n+2$ y $V_i V_k$ ES ARCO DE G_2 } CUADROS SOMBREADOS.

3.- $\left.\begin{array}{l} m = j+1 \\ i = k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} j = 1, 2, 3 \\ m = 2, 3, 4 \end{array}$ $\quad i = k = \overline{1,5}$ } DIAGONAL CON 1's.

4.- COMO n ES PAR:

$m = j+1 = \frac{n}{2} + 2 = 3 \Rightarrow j = 2$ y $m = 3$

i, k ARBITRARIOS } CUADRO LLENO CON 1'S.

—— o ——

OBSERVACIONES SOBRE EL ALGORITMO DE HORÁK.

LA PRIMERA, ES QUE CUANDO n CRECE, EL NUMERO DE VERTICES Y ARCOS, DIVERGE RAPIDAMENTE.

EN EL PASO ...) DICE:

SEA $\{V_i^j\}_{i=1,G_n}^{j=1,n+2}$ EL CONJ. DE VERTICES DE G_{n+1},

DONDE $G_n = |V(G_n)|$

POR LO TANTO, AL CONSTRUIR G_{n+1}, SE REQUIEREN DE:

$a_n(n+2) = \frac{5}{6}(n+2)!$ VERTICES.

VEAMOS LA SIG. TABLA:

G_n	$\lvert V(G_n)\rvert$
G_0	1
G_1	2
G_2	5
G_3	20
G_4	100
G_5	600
G_6	4,200
G_7	33,600
G_8	302,400
G_9	3,024,000
G_{10}	33,264,000
G_{11}	399,168,000
G_{12}	5,189,184,000

Y ESTO ES SOLO EN VERTICES, A CONTINUACION INTENTAREMOS CONTAR LOS ARCOS.

EMPEZAREMOS SUPONIENDO QUE b_n ES EL NUMERO DE ARCOS DE G_n, Y LUEGO CONTAREMOS LOS ARCOS QUE SE PONEN EN G_{n+1}, SEGUN LOS PUNTOS 1.-, 2.-, ..., 5.-

EN LOS PUNTOS 1.- Y 2.- SE COPIA G_n $\therefore$ $2b_n$

— o —

EN 3.- $m = j+1$ $\quad m \in [2, n+2]$ $\quad \therefore\ a_n(n+1)$
$\quad i \neq k \quad i = \overline{1, a_n}$

— o —

SI n ES PAR

4.- $m = j+1 = \frac{n}{2} + 2$ $\quad \therefore\ a_n^2$
i, k ARBITRARIAS

PERO DEBEMOS RESTAR LOS a_n DEL PUNTO 3.-,
PUES $m = \frac{n}{2} + 2 \in [2, n+2]$ $\therefore\ a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$

— o —

SI n ES IMPAR

5.- $m = j+1 \quad j \in \left[\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right]$ $\quad \therefore\ 2\,a_n^2$. COMO $\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2} \in [2, n+2]$
i, k ARBITRARIAS

DEBEMOS RESTAR LOS $2a_n$ DEL PUNTO 3.-, COMO ANTES.
$\therefore\ 2a_n^2 - 2a_n = 2a_n(a_n - 1)$

— o —

JUNTANDO LOS RESULTADOS TENEMOS QUE SI:
n ES PAR $\Rightarrow |X(G_{n+1})| = 2b_n + a_n(a_n + n)$
n ES IMPAR $\Rightarrow |X(G_{n+1})| = 2b_n + a_n(2a_n + n - 1)$.

— VEAMOS LA SIGUIENTE TABLA —

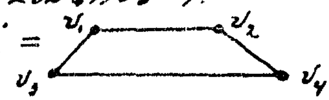
G_n	$\lvert V(G_n)\rvert$	$\lvert X(G_n)\rvert$
G_3	20	47
G_4	100	934
G_5	600	12,268
G_6	4,200	746,936
G_7	33,600	19,159,072
G_8	302,400	$22,965 \times 10^5$
G_9	3,024,000	$96,041 \times 10^6$
G_{10}	33,264,000	$184,812 \times 10^8$
G_{11}	399,168,000	$114,345 \times 10^{10}$
G_{12}	5,189,184,000	$320,957 \times 10^{12}$.

LA SEGUNDA OBSERVACION, ES A FAVOR DEL ALGORITHMO, Y TENGO QUE DECIR, QUE SE PUEDE CONSTRUIR G_{n+1}, A PARTIR DE CUALQUIER GRAFICA G, QUE TENGA LAS PROPIEDADES DE G_n, SIN QUE TENGA SER G_n, PORQUE EN LA CONSTRUCCION DE G_{n+1}, NI AFECTAN, NI SE VEN AFECTADOS LOS ARCOS DE G_n.

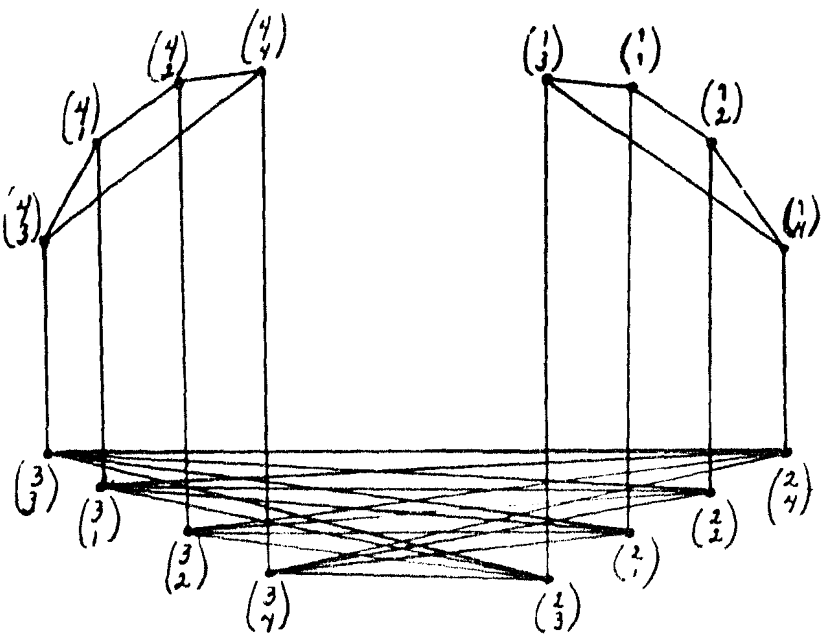
ASI ES QUE SI ENCONTRAMOS UNA GRAFICA G CON LOS ATRIBUTOS DE G_n Y QUE OFREZCA LA VENTAJA DE TENER MENOS VERTICES Y/O MENOS ARCOS, REDUCIREMOS GRANDEMENTE EL NUMERO DE LOS MISMOS, EN LAS SIGUIENTES G_n'S.

EJEMPLO: SUSTITUYAMOS $G_2 = (K_1 \cup K_2) + K_1$ POR UN CIRCUITO DE LONGITUD 4.

ENTONCES $G_2' =$



LA NUEVA G_3 ES:



Es decir, si $G_n = G_m$, podemos construir G_{m+1}, sin necesidad de haber construido las $m-1$ gráficas anteriores.
En la siguiente tabla veremos el ahorro de vertices y arcos al haber cambiado G_2.
Sean G_n las de Horák y G'_n las modificadas.

n	$\|V(G_n)\|$	$\|V(G'_n)\|$	Diferencia
3	20	16	4
4	100	80	20
5	600	480	120
6	4200	3,360	840
7	33,600	26,880	6,720
8	302,400	241,920	60,480
9	3,024,000	2,419,200	604,800
10	33,264,000	26,611,200	6,652,800
11	399,168,000	319,334,400	79,833,600
12	5,189,184,000	4,470,680,000	718,504,000

n	$\|X(G_n)\|$	$\|X(G'_n)\|$	Diferencia
3	47	32	15
4	934	608	321
5	12,268	7,936	4,332
6	746,936	478,592	268,344
7	19,159,072	12,266,944	6,892,128
8	$229,640 \times 10^4$	$146,976 \times 10^4$	$82,663 \times 10^4$
9	$960,410 \times 10^5$	$614,667 \times 10^5$	$345,743 \times 10^5$
10	$184,812 \times 10^8$	$118,260 \times 10^8$	$66,512 \times 10^8$
11	$114,345 \times 10^{10}$	$73,180 \times 10^{10}$	$41,145 \times 10^{10}$
12	$320,957 \times 10^{12}$	$205,412 \times 10^{12}$	$115,545 \times 10^{12}$

Algoritmo de las Cruces.

i) Si $n=0$ entonces $G_0 = K_1$

ii) Si $n=1$ entonces $G_1 = K_2$

iii) Si $n=2$ entonces $G_2 = (K_2 \cup K_2) + K_1$

iv) Si n es impar:

Sean $H_1 = H_2 = G_{n-1}$

En H_1 hay solo un vertice de grado 4 y ninguno de grado 5, lo mismo que en H_2.

Sean u_1 tal que $u_1 \in H_1$ y $\delta(u_1) = 4$ y u_2 tal que $u_2 \in H_2$ y $\delta(u_2) = 4$

Entonces

$$G_n = H_1 \cup H_2 + (u_1, u_2)$$

v) Si n es par

Sean $H_1 = H_2 = G_{n-1}$

En H_1 solo hay dos vertices de grado 5 y ninguno de grado 4, lo mismo que en H_2.

Sean u_1 y u_2 en H_1 con $\delta(u_1) = \delta(u_2) = 5$ y u_3 y u_4 en H_2 con $\delta(u_3) = \delta(u_4) = 5$

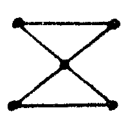
Sea $u_0 = K_1$

Entonces

$$G_n = H_1 \cup H_2 + (u_0, u_i)_{i=\overline{1,4}}$$

— o —

Antes de hacer las justificaciones que vienen al caso, construiremos G_3, G_4 y G_5, a fin de tener una mejor idea, de la forma en que trabaja el algoritmo.

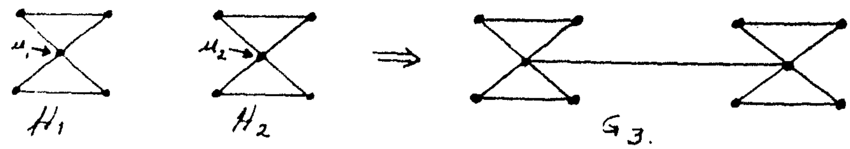
$G_2 =$ 

La razón por la cual el algoritmo de Horák necesita tantos arcos y vértices, es que dada G_n construye G_{n+1} con dos gráficas H_1 y H_2 isomorfas a G_n, y hace que todos los vértices de H_1 estén a distancia $n+1$ de cualquier vértice de H_2 y viceversa. Y esto lo hace, porque no sabe que vértices de H_1 y de H_2 tienen el color $n+1$.

Teniendo esto como punto de partida, he construido un algoritmo que requiere [illegible] menos arcos y vértices. En él tendremos también una sucesión de gráficas $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $d(G_n)=n$ y $K_d(G_n)=n+1$. Y a diferencia del de Horák, será recursivo.

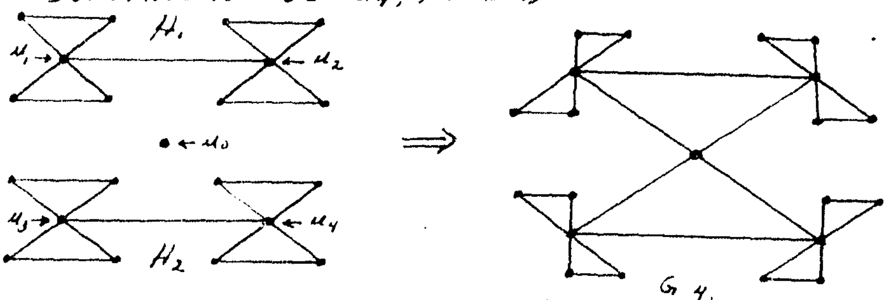
— o —

CONSTRUCCION DE G_3.
HACER .v)



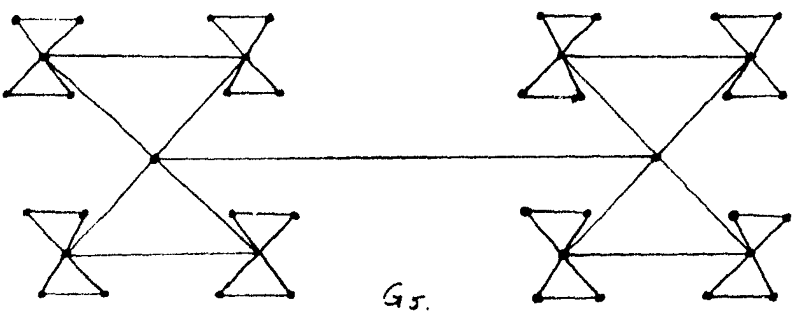
— o —

CONSTRUCCION DE G_4, HACER v)



— o —

CONSTRUCCION DE G_5, HACER .v)



— o —

PRIMERO DEMOSTRAREMOS LAS AFIRMACIONES QUE SE HACEN EN LOS PASOS ·V) Y V), i.e.,
P.D. ·V) $\Leftrightarrow$ V).

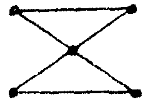
V) $\Rightarrow$ ·V)
DEM.:

SUPONGAMOS QUE n ES PAR Y QUE G_n SOLO TIENE UN VERTICE DE GRADO 4 Y NINGUNO DE GRADO 5.
$u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$ y $\delta(u_1) = \delta(u_2) = 4$ DONDE $H_1 = H_2 = G_n$
$G_{n+1} = H_1 \cup H_2 + (u_1, u_2)$
EN G_{n+1} u_1 y u_2 SON AHORA DE GRADO 5
Y YA NO HAY VERTICES DE GRADO 4.

·V) $\Rightarrow$ V)
DEM.:

SUPONGAMOS QUE n ES IMPAR Y QUE G_n SOLO TIENE DOS VERTICES DE GRADO 5 Y NINGUNO DE GRADO 4.
$H_1 = H_2 = G_n$, $u_1, u_2 \in H_1$; $u_3, u_4 \in H_2$ y $\delta(u_1) = \delta(u_2) = \delta(u_3) = \delta(u_4) = 5$
$G_{n+1} = H_1 \cup H_2 + (u_0, u_i)_{i=\overline{1,4}}$ DONDE u_0 ES VERTICE NUEVO.
DE ESTA MANERA, YA NO HAY VERTICES DE GRADO 5 EN G_{n+1},
$\delta(u_i) \underset{i=\overline{1,4}}{=} 6$ y $\delta(u_0) = 4$. ADEMAS u_0 ES EL UNICO DE GRADO 4.

BASTA PUES QUE G_2 TENGA SOLO UN VERTICE DE GRADO 4 Y NINGUNO DE GRADO 5, COSA LA CUAL EFECTIVAMENTE SUCEDE.

$G_2 =$ 

—— • ——

DE LO ANTERIOR SE DEDUCE QUE:

1.- PARA $n \geq 4$, SI n ES PAR, G_n SOLO TIENE VERT. CON GRADO 2, 4 y 6.
2.- PARA $n \geq 5$, SI n ES IMPAR, G_n SOLO TIENE VERT. CON GRADO 2, 5 y 6.

—— o ——

AHORA DEMOSTRAREMOS QUE $d(G_n)=n$

SEA $\{V_m^k\}$ EL CONJUNTO DE VERTICES DE G_m CON GRADO k.

1.- P.D. SI n ES PAR $\Rightarrow d(V_n^2, V_n^4) = \frac{n}{2}$

DEM POR INDUCCION:

·) EN G_2 ES CLARO QUE $d(V_2^2, V_2^4) = 1 = \frac{2}{2} = \frac{n}{2}$.

··) SUPONGAMOS $m \leq n$ PAR Y QUE $d(V_m^2, V_m^4) = \frac{m}{2}$.

···) P.D. $d(V_{n+2}^2, V_{n+2}^4) = \frac{n+2}{2}$

DEM.:

POR HIP. DE INDUCCION: $d(V_n^2, V_n^4) = \frac{n}{2}$

AL CONSTRUIR G_{n+1} HACEMOS $H_1 = H_2 = G_n$ Y UNIMOS EL VERTICE DE GRADO 4 DE H_1 CON EL SEMEJANTE DE H_2. POR LO TANTO, LA "DISTANCIA MAS CORTA" DE UN VERTICE DE GRADO 2 A UNO DE GRADO 5 EN G_{n+1} ES:

$$d^*(V_{n+1}^2, V_{n+1}^5) = \frac{n}{2} = d(V_n^2, V_n^4)$$

CUANDO CONSTRUIMOS G_{n+1}, HACEMOS $H_1 = H_2 = G_{n+1}$ Y LOS VERTICES DE GRADO 5 DE H_1 Y DE H_2, LOS UNIMOS CON UN VERTICE NUEVO, LLAMADO u_0, QUEDANDO ESTE DE GRADO 4.

$$\therefore d(V_{n+2}^2, V_{n+2}^4) = d^*(V_{n+1}^2, V_{n+1}^5) + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}.$$

—— • ——

HEMOS DEMOSTRADO PUES, DOS COSAS:

1º $d(V_n^2, V_n^4) = \frac{n}{2}$ SI n ES PAR

2º $d^*(V_n^2, V_n^5) = \frac{n}{2}$ SI n ES IMPAR.

—— • ——

2.- SEA $\{X_m\}$ EL CONJUNTO DE VERTICES DE G_m CON GRADO 2 QUE PERTENECEN A $H_1 = G_{m-1}$.
SEA $\{Y_m\}$ EL CONJUNTO DE VERTICES DE G_m CON GRADO 2 QUE PERTENECEN A $H_2 = G_{m-1}$.

POR CONSTRUCCION, SI n ES PAR, LOS VERTICES DE GRADO 2 SON LOS MAS LEJANOS DEL VERTICE DE GRADO 4, QUE ADEMAS ES DE CORTE, ENTONCES:

$d(G_n) = d(X_n, Y_n) = d(X_n, V_n^4) + d(V_n^4, Y_n) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$

SI n ES IMPAR:

$d^*(X_n, V_n^5) = d(X_{n-1}, V_{n-1}^4) = \frac{n-1}{2} = d^*(V_n^5, Y_n)$

$\therefore d(X_n, Y_n) = d^*(X_n, V_n^5) + 1 + d^*(V_n^5, Y_n) = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n$

$\therefore d(G_n) = n.$

SOLO NOS FALTA DEMOSTRAR QUE $\chi_d(G_n) = n+1$.

COMO $d(G_n) = n$ ENTONCES $\chi_d(G_n) \leq n+1$

SUPONGAMOS $\chi_d(G_{n+1}) = n$.

TENEMOS $H_1 = H_2 = G_n$.

COMO LA DISTANCIA ENTRE u Y v EN G_{n+1} ES LA MISMA QUE SU DISTANCIA EN H_1 Y H_2 PARA CUALQUIER PAR DE VERTICES u Y v EN H_1 Y H_2 RESPECTIVAMENTE, CADA COLORACION EN DISTANCIA DE G_{n+1} INDUCE UNA COLORACION EN DISTANCIA DE H_1 Y H_2.

ADEMAS TENEMOS QUE $\chi_d(H_1) = \chi_d(H_2) = \chi_d(G_n) = n$.

SI EN G_{n-1} HUBIERA SIDO __NECESARIO__ EL COLOR n EN UNO DE SUS VERTICES DE GRADO 2, ENTONCES EN G_n, AL TENER $H_1 = H_2 = G_{n-1}$, HABRIAN DOS VERTICES DE GRADO 2 u Y v EN H_1 Y H_2 RESPECTIVAMENTE, CON COLOR n, PERO $d(u,v) = n$ $\not{\circ}$

$\therefore$ EN G_n SERA __NECESARIO__ EL COLOR $n+1$ EN UNO DE SUS VERTICES DE GRADO 2.

$\therefore \chi_d(G_n) = n+1$

BASTA QUE EN G_2 SEA NECESARIO EL COLOR 3 EN UNO DE SUS VERTICES DE GRADO 2, Y ESO ES FACIL DE COMPROBAR.

—— o ——

CONTEMOS EL NUMERO DE VERTICES QUE USAMOS.

SEA a_{n-1} EL NUMERO DE VERTICES DE G_{n-1}, ENTONCES:

·) SI n ES IMPAR $|V(G_n)| = 2a_{n-1}$

··) SI n ES PAR $|V(G_n)| = 2a_{n-1}+1$.

SEA b_{n-1} EL NUMERO DE ARCOS DE G_{n-1}, ENTONCES:

·) SI n ES IMPAR $|X(G_n)| = 2b_{n-1}+1$

··) SI n ES PAR $|X(G_n)| = 2b_{n-1}+4$.

VEAMOS LA COMPARACION ENTRE EL NUMERO DE VERTICES QUE USA HORÁK Y EL QUE USA EL DE LAS CRUCES.

G_n	$\|V(G_n)\|$ HORÁK	$\|V(G_n)\|$ CRUCES.
G_3	20	10
G_4	100	21
G_5	600	42
G_6	4,200	85
G_7	33,600	170
G_8	302,400	341
G_9	3,024,000	682
G_{10}	33,264,000	1,365
G_{11}	399,168,000	2,730
G_{12}	5,189,180,000	5,461

COMPAREMOS EL NUMERO DE ARCOS.

G_n	$\vert X(G_n)\vert$ HORÁK	$\vert X(G_n)\vert$ CRUCES
G_3	47	13
G_4	934	30
G_5	12,268	61
G_6	746,936	126
G_7	19,159,072	253
G_8	$229,640 \times 10^{4}$	510
G_9	$960,410 \times 10^{5}$	1,021
G_{10}	$184,812 \times 10^{8}$	2,046
G_{11}	$114,345 \times 10^{10}$	4,093
G_{12}	$320,957 \times 10^{12}$	8,190

COMO SE PUEDE VER, EL NUMERO DE ARCOS Y VERTICES DEL ALGORITMO DE LAS CRUCES, DIVERGE MAS LENTAMENTE.

—— • ——

PARA CADA n, EXISTE UNA GRAFICA INFINITA G, TAL QUE $\chi_d(G) = n$.

DEM.:

SEA $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_1 \cup G_{n-1}$

DONDE G_{n-1} ES LA CONSTRUIDA POR EL ALGORITMO DE LAS CRUCES.

—— • ——

LAS GRAFICAS CONSTRUIDAS CON EL ALGORITMO DE HORÁK NO SON PLANARES, YA QUE COMO SE PUEDE APRECIAR EN LAS QUE HEMOS CONSTRUIDO, CONTIENEN SUBGRAFICAS ISOMORFAS A $K_{3,3}$, LA CUAL NO ES PLANAR.
LAS GRAFICAS CONSTRUIDAS CON EL ALGORITMO DE LAS CRUCES SON PLANARES, YA QUE TODOS SUS BLOQUES SON TRIANGULOS.
TODOS LOS VERTICES DE LAS GRAFICAS CONSTRUIDAS POR CRUCES CON GRADO MAYOR QUE DOS, SON VERTICES DE CORTE Y SI n ES IMPAR, SE TIENE UN PUENTE Y SOLO UNO.
ESTO NO SUCEDE SI n ES PAR.

—— o ——

GRAFICAS CON CUELLO Y CON DISTANCIA COLOREADA GRANDES.

LAS GRAFICAS DE HORÁK TIENEN CUELLO 3.
CUANDO CAMBIAMOS LA G_2 DE HORÁK POR EL CIRCUITO DE LONGITUD 4, TENEMOS QUE G_n TENDRA CUELLO 4.
PODEMOS CAMBIAR LA G_2 DE HORÁK POR OTRO CIRCUITO DE MAYOR LONGITUD, SIN EMBARGO G_n TENDRA CUELLO 4, SIMPLEMENTE VEASE EN LA G_3 DE HORÁK QUE CONSTRUIMOS, EL SIGUIENTE CICLO : $\binom{1}{3}, \binom{2}{5}, \binom{3}{5}, \binom{2}{3}, \binom{3}{3}$.
POR LO TANTO, CON HORÁK PODEMOS CONSTRUIR GRAFICAS CON CUELLO 3 Ó 4 Y CON DIST. COLOREADA GRANDE.
Y TAMBIEN CON CIRCUNFERENCIA TAN GRANDE COMO SE QUIERA.

LAS G_n DE LAS CRUCES TIENEN CUELLO = CIRCUNFERENCIA = 3.

—— o ——

CON EL SIGUIENTE ALGORITMO SOLUCION CONSTRUIREMOS GRAFICAS G_n CON CUELLO 7 Y DIST. COLOREADA GRANDE. $(\chi_d(G_n) = n+1)$.
SEA G_2 TRAYECTORIA DE LONGITUD 4.

0) SEAN $H_1 = H_2 = G_{n-1}$
1) HACER $H_1 \cup H_2$
2) UNIR CADA VERTICE DE H_1 CON CADA VERTICE DE H_2 MEDIANTE TRAYECTORIAS AJENAS DE LONGITUD n

SI TOMAMOS G_2 CIRCUITO DE LONG. 5 ENTONCES EL CUELLO DE G_n SERA 5.
SI TOMAMOS G_2 CIRCUITO DE LONG. 6 ENTONCES EL CUELLO DE G_n SERA 6.

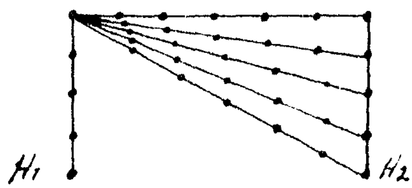
—— • ——

A continuacion presentare tres graficas, cuya distancia coloreada es 4 y sus cuellos son 8, 9 y 10 respectivamente.

1.- Construyamos primero la de cuello 8

0) Sean $H_1 = H_2$ tray. de long. 4. Notese $\chi_d(H_i) = 3$ $i=1,2$. Hacer $H_1 \cup H_2$ y unir cada vertice de H_1 con cada vertice de H_2 mediante trayectorias ajenas de longitud 6.

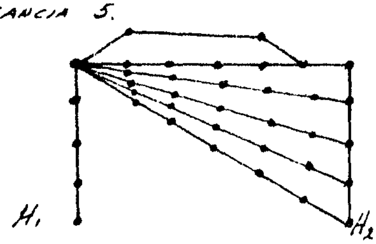
EJM.



Hacer lo mismo con los otros cuatro vertices de H_1.

1) Unir cada vertice de H_1 con los vertices de las trayectorias puestas en 0) que esten a distancia 5.

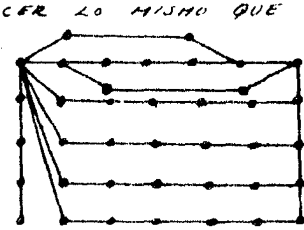
EJM.



Hacer lo mismo con las demas trayectorias de long. 6 y con los demas vertices de H_1.

2) Hacer lo mismo que en 1) pero respecto a H_2

EJM

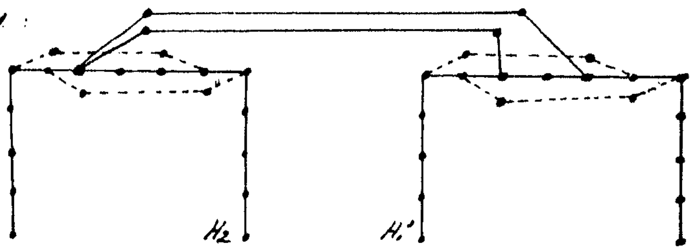


3) Hagamos dos graficas G_1 y G_2 iguales a la que acabamos de construir. Sean $H_1 = H_2$ como antes para G_1 y $H_1' = H_2'$ las analogas para G_2.

4) EN ESTE PASO SOLO CONSIDERAREMOS LOS VERTICES DE LAS TRAYECTORIAS DEL PASO o).

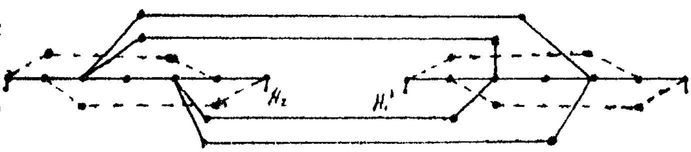
UNIR EL TERCER VERTICE DE LAS TRAYECTORIAS DE LONGITUD 6 DE G_1 CON EL TERCERO Y QUINTO VERTICES DE LAS DE G_2 MEDIANTE TRAYECTORIAS AJENAS DE LONGITUD 3.

EJM.:



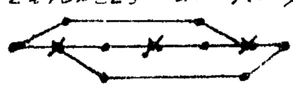
5) REPITAMOS EL PASO 4) PERO CON EL QUINTO VERTICE DE LAS TRAYECTORIAS DE LONGITUD 6 DE G_1.

EJM.:



COMO SE PUEDE VER, EL CUELLO ES 8

SI SUPONEMOS QUE LA DISTANCIA COLOREADA DE ESTA GRAFICA ES 3, ENTONCES EN H_1 Y EN H_2 HAY VERTICES CON COLOR 3.

i.e. 3  3 Y LOS VERTICES CON X NO PUEDEN LLEVAR COLOR 3.

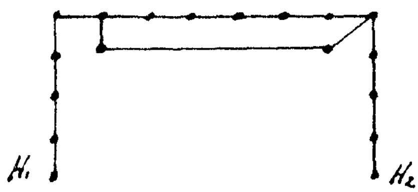
LO MISMO SUCEDE EN G_2, ASI QUE SI EN ALGUNO DE LOS DOS VERTICES DE G_1 QUE PUEDEN LLEVAR EL COLOR 3, SE LO PONEMOS, ENTONCES EN G_2 NINGUNO PODRA LLEVAR COLOR 3. $\therefore \chi_L(6) = 4$.

2.- CONSTRUIREMOS LA DE CUELLO 9.

0) HACER EL PASO 0) DE 1.-) PERO CON TRAYECTORIAS DE LONGITUD 7.

1) UNIR CADA VERTICE DE H_2 CON CADA VERTICE QUE ESTE A DISTANCIA 6 DE EL, MEDIANTE TRAYECTORIAS DE LONGITUD 3.

EJM.:



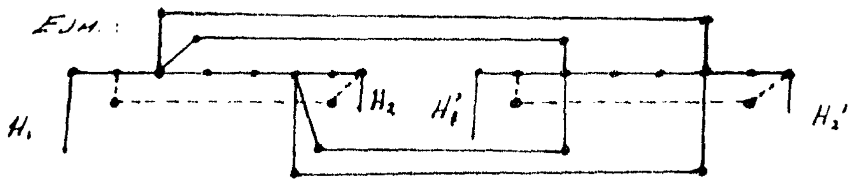
2) HAGAMOS DOS GRAFICAS G_1 Y G_2 IGUALES A LAS QUE ACABAMOS DE CONSTRUIR Y SEAN $H_1 = H_2 \subset G_1$ COMO ANTES Y $H_1' = H_2' \subset G_2$ LAS ANALOGAS PARA G_2.

3) EN ESTE PASO SOLO CONSIDERAREMOS LAS TRAYECTORIAS DEL PASO 0).

UNIR CADA VERTICE QUE ESTE A DISTANCIA 2 DE CADA VERTICE DE H_1 CON LOS ANALOGOS A H_1' Y H_2' MEDIANTE TRAY. DE LONGITUD 3.

Y HACER LO MISMO CON CADA VERTICE QUE ESTE A DISTANCIA 2 DE CADA VERTICE DE H_2.

EJM.:

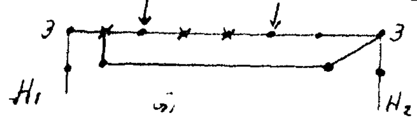


COMO SE PUEDE VER, EL CUELLO ES 9.

AHORA VEREMOS QUE LA DISTANCIA COLOREADA ES 4.

SUPONGAMOS QUE TAL DISTANCIA COLOREADA ES 3.

POR UN RAZONAMIENTO COMPLETAMENTE ANALOGO A LA GRAFICA 1.-, SOLO LOS VERTICES APUNTADOS CON FLECHAS PUEDEN LLEVAR EL COLOR 3, CONSIDERANDO QUE AHI SE NECESITA.



Y LO MISMO SUCEDE EN G_2

Y POR LA MISMA RAZON QUE EN 1.-, $\chi_d(G) = 4$.

— o —

PARA HACER CRECER LA DISTANCIA COLOREADA SEGUIR EL ALGORITMO SOLUCION, EMPEZANDO EL PASO 0) CON

·) CUELLO = 8 $\Rightarrow$ HACER G_{n-1} IGUAL A LA DE 1.-

··) CUELLO = 9 $\Rightarrow$ HACER G_{n-1} IGUAL A LA DE 2.-

— • —

3.- CONSTRUYAMOS LA DE CUELLO 10.

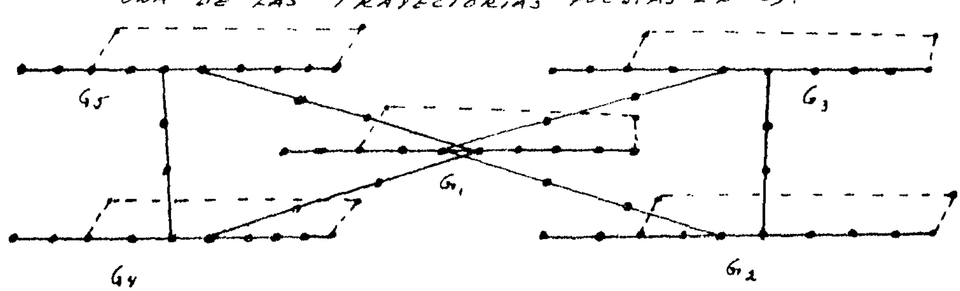
0) HACER EL PASO 0) DE 1.-) PERO CON TRAYECTORIAS DE LONGITUD 9.

1) UNIR CADA VERTICE DE H_2 CON CADA VERTICE QUE ESTE A DISTANCIA 7 DE EL, MEDIANTE TRAYECTORIAS DE LONGITUD 3.

ESTO ES ANALOGO A 1.- Y A 2.-.

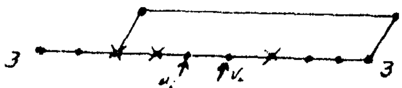
2) SEAN $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_5$ GRAFICAS IGUALES A LAS QUE ACABAMOS DE CONSTRUIR

HACER LA ADYACENCIA COMO EN EL DIBUJO, PARA CADA UNA DE LAS TRAYECTORIAS PUESTAS EN 0).



EL CUELLO ES 10.

SI SUPONEMOS QUE LA DISTANCIA COLOREADA DE ESTA GRAFICA ES 3, ENT. EN G_i $i=\overline{1,5}$ TENDREMOS LA SIG. SUBGRAFICA DE G_i.



SOLO u_i Y v_i PUEDEN LLEVAR EL COLOR 3.
SI SE LO ASIGNAMOS A u_1 EN G_2 O EN G_3 ESTARA 4
Y SI SE LO ASIGNAMOS A v_1 EN G_4 O EN G_5 ESTARA 4
$\therefore \chi_d(G)=4$

—— o ——

CON EL SIGUIENTE ALGORITMO NEGRO, CONSTRUIREMOS G^*, UNA GRAFICA CON CUELLO 10 Y DIST. COLOREADA 5, A PARTIR DE G.

•) SI $V(G)=m$ ENT. $G_1=G_2=\cdots=G_{m+1}=G$

••) ETIQUETAR LOS VERTICES DE G_i ASI:
$V(G_i)=\{u_1^i, u_2^i, \ldots, u_m^i\}$

•••) SI $p=q$ UNIR EL VERTICE u_p^i CON EL u_q^j SI $i\neq j$ MEDIANTE UNA TRAY. DE LONGITUD $\chi_d(G)$.

PARA SEGUIR HACIENDO CRECER LA DISTANCIA COLOREADA HACER $G \leftarrow G^*$ Y EMPEZAR NEGRO.

—— • ——

LA CUESTION ES, SABER SI SE PUEDEN CONSTRUIR GRAFICAS CON CUELLO Y DISTANCIA COLOREADA GRANDES.
LA RESPUESTA ES, SI.
FUE DADA POR EL MAT. VICTOR NEUMANN LARA, DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA UNAM (1984).
PARA DEMOSTRAR ESTO, ES NECESARIO DEFINIR LO QUE ES EL NUMERO CROMATICO DE UNA HIPERGRAFICA H, $\chi(H)$.
MISMO QUE ES, EL MINIMO NUMERO DE COLORES QUE SE NECESITAN PARA COLOREAR H TAL QUE NINGUNA ARISTA CON MAS DE UN VERTICE, TENGA TODOS SUS VERTICES CON EL MISMO COLOR [3];
Y USAR EL SIGUIENTE TEOREMA DE LOVASZ [2]:
DADOS p, c, Q EXISTE UNA HIPERGRAFICA H, TAL QUE CADA ARISTA TIENE p VERTICES, TIENE CUELLO $= c$ Y $\chi(H) = Q$.
PIDAMOS ENTONCES $\chi(H) = m$, $c > 2$ Y $p = \max\{c, 2m+1\}$.
LAS ARISTAS E_i DE H, ESTAN UNIDAS DOS A DOS POR SOLO UN VERTICE, PUES SI POR EJM., E_p Y E_q ESTUVIERAN UNIDAS EN LOS VERTICES x Y y, TENDRIAMOS EL CICLO (y, E_p, x, E_q, y) QUE TIENE LONGITUD $= 2$ Y $\therefore c = 2$ ∇_0

A PARTIR DE H, CONSTRUIREMOS UNA GRAFICA G, DE LA SIGUIENTE MANERA:
$|E_i| = p \geq 2m+1 \quad \forall E_i \in H$.
UNIREMOS TODOS LOS VERTICES DE CADA E_i, DE MODO QUE SE FORME UN CICLO DE LONGITUD $= p$.
POR LO TANTO EL CUELLO DE G, ES AL MENOS c.
SUPONGAMOS QUE PODEMOS COLOREAR LA GRAFICA G, TAL QUE $\chi_d(G) = m-1$.

SI EN LA HIPERGRAFICA H, MANTENEMOS LOS VERTICES COLOREADOS COMO EN LA GRAFICA G, ENTONCES EXISTE UNA ARISTA EN H QUE ES MONOCROMATICA, PUES $\chi(H) = m$.
ESTO SIGNIFICA QUE EN G, HAY UN CICLO CON TODOS SUS VERTICES DEL MISMO COLOR.
ESTE COLOR ES $k \leq m-1$.
POR LO TANTO EN ESE CICLO HAY DOS VERTICES A DISTANCIA k CON COLOR k ¡!

$\therefore \ \chi_d(G) \geq m$.

— o —

Bibliografia

[1] Horák P., Širáň J.
Note on a New Coloring Number of a Graph.
Journal of Graph Theory.
Volume 4, Number 1.
Spring 1980, p.p 111-112

[2] Lovasz L.
On Chromatic Number of Finite Set-Systems.
Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae (1968).
Tomus 19 (1-2) p.p. 59-67.

[3] Berge Claude
Graphs and Hypergraphs
North-Holland Publishing Company.
Second Edition (1976), p.p. 385-391, 428.

[4] Harary Frank
Graph Theory
Adison-Wesley Publishing Company (1969).