Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE UNA ECUACION NO LINEAL RELACIONADA CON UN PROBLEMA DE DIFUSION TERMICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

JAVIER FERNANDO ROSENBLUETH LAGUETTE

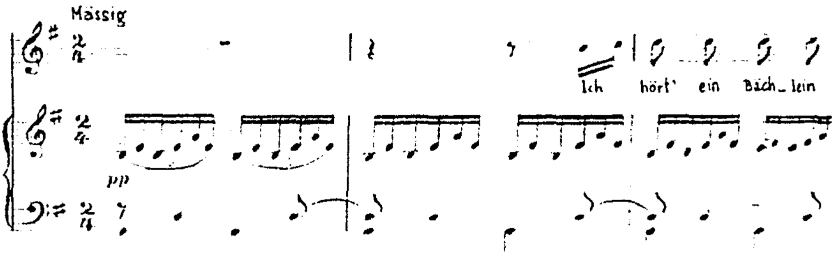
MAYO 1983

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

"The horrid crags, by toppling convent crown'd,
The cork-trees hoar that clothe the shaggy steep,
The mountain-moss by scorching skies imbrown'd,
The sunken glen, whose sunless shrubs must weep,
The tender azure of the unruffled deep,
The orange tints that gild the greenest bough,
The torrents that from cliff to valley leap,
The vine on high, the willow branch below,
Mix'd in one mighty scene, with varied beauty glow."

BYRON: "Childe Harold's Pilgrimage", Canto I, XIX.



SCHUBERT: "Die schöne Müllerin", "Wohin?"

$$\frac{P}{\sqrt{\pi\tau}}\sum_{k=0}^{N-1} v_k \varphi_{n-k} = S_0(1-a)(1-c)\psi_n + \varepsilon\sigma T^4 - \varepsilon\sigma v_n^4 + Q$$

$$\forall n\in\{0,1,\dots,N-1\}.$$

WATSON: "Geologic Applications of Thermal Infrared Images".

Tener la naturaleza enfrente y ser parte de ella...

Un artista la ve y la describe, expresando lo que siente. Como poeta puede, si quiere, describir un paisaje y, como Byron, mostrarlo enormemente romántico. Hace una abstracción de lo que ve y usa el lenguaje para expresar sus sentimientos. Como músico, el artista puede si quiere, como Schubert, imitar el sonido de un arroyo y hacer que un piano reproduzca lo que él siente al escuchar ese arroyo. También abstrae lo que escucha y un sonido le permite expresar lo que siente.

Pero un físico frente a la naturaleza, a diferencia del artista, no está buscando describir lo que siente sino explicar lo que ve. Un físico también lleva a cabo una abstracción simplificada del objeto que le interesa. También reproduce lo que ve. Pero esa abstracción le será útil en tanto le permita entender el comportamiento del objeto. Y sus herramientas, junto con su intuición y su capacidad de observación serán, no el lenguaje o el sonido o la forma, sino las matemáticas.

En 1971 K. Watson inició una serie de estudios para poder determinar el flujo geotérmico con base en mediciones de la temperatura en la superficie terrestre. Sus investigaciones, basadas en las teorías de conducción de calor y transferencia radiativa, dieron lugar a un modelo que fue utilizado en el proyecto de Percepción Remota del IIMAS en 1981 y los resultados obtenidos motivaron el estudio de varios problemas de interés matemático que permitieran, por ejemplo, ver la posibilidad de reducir el número de vuelos para las mediciones térmicas, mejorar la precisión de los resultados, generar mapas de flujo geotérmico e inercia térmica, etc.

Este trabajo es el resultado del análisis propuesto por J. L. Farah de algunos de esos problemas. Brevemente el problema central consiste en lo siguiente:

La ecuación de Watson que vimos en la página anterior se puede expresar matricialmente como:

$$\Phi \cdot v + \alpha v^4 = f \qquad (1)$$

donde Φ es una matriz de $N \times N$ toeplitz-circular y v, v^4 y f son vectores en $\mathbb{R}^N$ correspondientes, respectivamente, a la temperatura en la superficie, las componentes de v elevadas a la cuarta y una función que depende del flujo geotérmico. El parámetro α es adimensional y no negativo.

En general, se llevan a cabo dos vuelos, uno diurno y uno nocturno, que permiten conocer dos valores de v. El vector f es desconocido pero puede calcularse su promedio estadístico, $\bar{f}$. El problema que se trató de resolver consiste en encontrar la relación que existe entre la diferencia de los dos valores conocidos de v (que bien podría ser la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima del terreno durante el día del vuelo) y distintos valores de α y $\bar{f}$.

El problema es bastante complejo y, a pesar de propiedades de la función $\Phi \cdot v + \alpha v^4$ que se exponen en el capítulo 3, tales como su imagen, condiciones para tener un flujo máximo, etc., que resultan útiles para atacar el problema, éste sigue abierto para un trabajo posterior. Los programas y resultados que se incluyen en el último capítulo ejemplifican el problema numéricamente para varios casos particulares y pueden resultar de bastante interés para cualquier estudio general para la detección del flujo geotérmico.

En los otros dos capítulos se exponen la utilidad que puede aportar el estudio del modelo, su relación con sistemas de Percepción Remota, el uso de algoritmos relativamente recientes para resolver sistemas como (1) más eficientes que el método de Newton y, por último, una derivación bastante detallada del modelo de Watson partiendo de hipótesis más generales que las utilizadas por él.

Quisiera agradecer la dirección y paciencia de J.L. Farala durante todo el tiempo que tomó elaborar este trabajo así como el apoyo y colaboración, que jamás olvidaré, de Armando García, María Garza y Rafael [illegible]. La ayuda del IIMAS fue indispensable, en particular todas las facilidades que recibí del departamento de computación.

A quien sí no puedo agradecerle su estímulo ni dedicarle la tesis, es a Verónica Rohen. Hacerlo, sería como dedicármela a mí mismo. Y, a pesar de más de dos años comunicándonos sólo por carta, los dos sabemos que su ayuda está reflejada en cada página y en cada palabra.

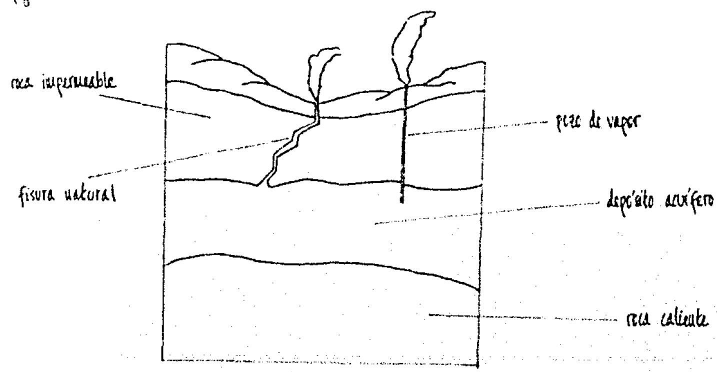
1 ANTECEDENTES

1 LA ENERGÍA GEOTÉRMICA.

La tierra tiene un volumen total de un poco más de un billón de kilómetros cúbicos y, con excepción de una delgada corteza en su superficie externa, prácticamente toda se encuentra a muy altas temperaturas. No se sabe exactamente qué tan caliente pero por flujos de lava – y menos espectaculares, fuentes de aguas termales y géiseres – es evidente que es suficientemente caliente como para suministrar la mayoría de las necesidades de energía de la humanidad. De hecho, si se toman en cuenta el volumen de la tierra y el calor específico de la roca, resulta evidente que la energía geotérmica, el calor natural del interior de la tierra, es la mayor reserva de energía directamente accesible al hombre. Además, la energía que contiene es inherentemente 'energía limpia': existe como calor en sí, por lo que no es necesario quemar combustible u operar un reactor para producir ese calor.

Dadas las dificultades que existen para la localización de fuentes geotérmicas cuya explotación resulte costeable (debido a problemas de perforación, entubación, etc) no es sino hasta hace relativamente pocos años que, gracias a avances tecnológicos, las reservas geotérmicas se han podido comparar favorablemente con otras fuentes de energía. Su utilización ha aumentado notablemente en los últimos años principalmente en la generación de electricidad y en procesos de calentamiento y enfriamiento del ambiente para usos residenciales, comerciales e industriales. Entre otros productos derivados de plantas geotérmicas se han aprovechado minerales, gas natural y agua desalada, sobre todo en Islandia y la URSS.

Aún no se conocen con exactitud algunas características de las reservas geotérmicas tales como el flujo natural de agua dentro de ellas, la circulación por convección y varios aspectos de su geología y flujo de calor pero su estructura general se encuentra relativamente bien entendida y se ilustra esquemáticamente en la figura:



— Diagrama de una reserva geotérmica —

- Generalmente existen simultáneamente tres características litológicas que crean y mantienen un campo geotérmico:

  (1) la mayor fuente de calor, que consiste en un gran suministro de roca caliente en la profundidad.

  (2) un depósito acuífero o formación permeable sobre la roca por medio del cual el agua interna está en contacto con la roca caliente y dentro del cual el fluido calentado —vapor, agua caliente, o una mezcla de ambos— circula convectivamente y transporta calor a un nivel superior.

  (3) una capa impermeable sobre el depósito acuífero para prevenir la pérdida de fluido en la superficie.

Cuando el fluido que circula, al menos en la parte superior del acuífero, es vapor, el sistema natural es descrito generalmente como reserva geotérmica predominantemente vaporosa. Cuando las temperaturas son inferiores y más altas las presiones, o la concentración de minerales disueltos mayor, de tal manera que el fluido circulante es agua o agua salobre, se habla entonces de una reserva predominantemente líquida.

Las primeras, que producen vapor seco, o sea vapor sobrecalentado con mínimas cantidades de otros gases y prácticamente nada de agua, son las reservas geotérmicas económicamente más atractivas. Ordinariamente no requieren de ningún tratamiento aparte de remover basuras y roca que pueda llevar consigo el vapor que sale del pozo, y en general el vapor se entuba directamente a una turbina y se genera electricidad. No se ha descubierto más de una docena de reservas de este tipo en el mundo; generalmente aparecen en regiones de reciente volcanismo y los principales campos que se explotan ya comercialmente se encuentran en Larderello, Italia, en Los Geysers en California y Matsukawa, Japón.

Bastante más comunes son los campos predominantemente líquidos o de agua sobrecalentada, que producen vapor húmedo. En estos, la temperatura en la profundidad es superior al punto de ebullición del agua pero el agua o agua salobre en la reserva no hierve por la presión que es mayor que la atmosférica. Cuando el fluido se obtiene de la reserva, su presión se reduce, ocurre la ebullición, y una combinación de vapor con agua caliente aparece en el pozo. Normalmente alrededor de un 20 % del fluido se convierte en vapor saturado (húmedo) y sólo este vapor se utiliza para generar electricidad. El otro 80 % del fluido, agua caliente en ebullición, usualmente se desperdicia. Los principales campos de este tipo se encuentran en Wairakei en Nueva Zelandia, El Imperial Valley en California y Cerro Prieto en México.

Más comunes aún son las reservas naturales de agua caliente a temperaturas inferiores al punto de ebullición. Su uso se ha reducido, con excepción de algunos lugares donde el agua suministra energía para procesos químicos de baja temperatura, o procesos de calentamiento del ambiente.

De todas las reservas, las más abundantes son las llamadas reservas geotérmicas secas, que no producen vapor o agua caliente ya por ser relativamente impermeables al agua o porque no están en contacto con el agua que circula internamente. Las zonas de interés en estas reservas se encuentran a unos seis kilómetros de profundidad, generalmente a temperaturas superiores a 150 °C. Aún no existen métodos que justifiquen el desarrollo comercial para extraer energía de la roca "seca" caliente a pesar de componer la mayor parte de la corteza terrestre pero, así como se ha probado que en los otros tipos de reservas la conversión directa a electricidad es económica y produce un mínimo daño al medio ambiente. Los primeros estudios sobre los problemas que presentan los recursos geotérmicos nos hacen suponer que eventualmente contribuirán también, y de manera significativa, a la solución de los problemas mundiales de contaminación y energía.

2. USO DE PERCEPCIÓN REMOTA.

Hasta hace poco, la única técnica para descubrir campos geotérmicos se reducía a perforaciones en áreas que presentan manifestaciones tales como geiseres y manantiales de aguas termales. Sin embargo, muchas regiones de este tipo no son fácilmente desarrollables y otras, que carecen de manifestaciones en la superficie, se ha encontrado que poseen condiciones adecuadas en el subsuelo para el desarrollo y explotación de fuentes geotérmicas. Esto ha hecho necesario utilizar técnicas de exploración más sofisticadas, entre las que se encuentra el análisis de imágenes obtenidas por sensores remotos.

Las interpretaciones de observaciones de sensores remotos se pueden llevar a cabo por medio de foto-interpretación de despliegue de imágenes y análisis digital por computadora basado en técnicas de procesamiento automatizado. En ambos casos las observaciones son comparadas con estándares preconcebidos: en el primer caso la experiencia previa del foto-intérprete juega el mayor papel en el criterio de reconocimiento, y en el segundo, estándares estadísticos están comúnmente basados en conjuntos "entrenados" seleccionados con anterioridad y en la presencia de distintas poblaciones en los datos que pueden ser analizadas usando técnicas de procesamiento y clasificación de grupos. Sin embargo, dos problemas dificultan la aplicación de técnicas empíricas en el proceso de interpretación. Por un lado, el número y la magnitud de los factores que afectan la señal grabada complica mucho la relación entre los datos proporcionados y las variables de interés. Aunque las mediciones radiométricas aéreas son sensibles al calor en la banda infrarroja lo que podría permitir la detección de anomalías en el flujo de calor, son muchos más los factores, además del flujo geotérmico que, sensibles a los sensores, intervienen en el calentamiento de la superficie terrestre. A esto habría que sumar el ruido ambiental que afecta la señal.

Por otro lado, la diversidad en tipos de materiales, condiciones climatológicas, ambientes naturales, etc, resulta impresionante en la naturaleza y es difícil creer que resultados obtenidos en una área bajo ciertas condiciones puedan aplicarse a una nueva área bajo condiciones distintas. Este aspecto, probablemente sea el más importante en el uso de sensores remotos no sólo para detectar campos geotérmicos sino recursos naturales en general: interpretar correctamente nuevas observaciones con base en experiencia previa.

Una manera de atacar el último problema sería llevar a cabo mediciones de una gran cantidad de materiales bajo todo tipo de condiciones y derivar entonces, por medio de relaciones empíricas, una base para interpretar observaciones de alguna área relativamente conocida. Este enfoque puede ser útil para, por ejemplo, establecer nuevas leyes físicas, pero cuando las observaciones son hechas para discriminar e identificar diferentes materiales, resulta más apropiado derivar modelos matemáticos de leyes físicas fundamentales, y comenzando con problemas bien definidos y pocas variables ir progresando a situaciones más complejas. Modelo, en este contexto, corresponde a una abstracción simplificada de un objeto físico, y permite, además de adaptar su aplicación a nuevas áreas, resolver de alguna manera el primer problema si se utiliza como una técnica para examinar correlaciones entre las variables seleccionadas.

Al atacar los dos problemas de esta manera, surge la pregunta de qué tan complicado deberá ser el modelo. Esto afectará la complejidad requerida en el análisis y la precisión y tipo de mediciones que se harán. La mejor manera de manejar este problema y elaborar un modelo útil probablemente sea comenzar con un modelo muy simple y, dependiendo de los resultados, incrementar iterativamente los parámetros y lugares de análisis.

Uno de los primeros trabajos que utiliza mediciones de sensores remotos para el análisis de propiedades térmicas del suelo fue llevado a cabo en 1971 por Watson K. (1); el interés del estudio consistía en discriminar e identificar varios tipos de rocas comunes por medio de la banda infrarroja de un barredor multiespectral. Este trabajo fue la base de estudios posteriores aplicados en la detección de fuentes geotérmicas y veremos a grandes rasgos cómo fue desarrollándose.

Inicialmente, para discriminar distintos tipos de rocas, se utilizaron observaciones de la emisión térmica del suelo por medio del barredor infrarrojo con la idea de detectar diferencias en la temperatura de las distintas rocas que pudieran atribuirse a diferencias en sus propiedades térmicas. Se consideró entonces el siguiente modelo:

se tiene un sólido semi-infinito con propiedades térmicas homogéneas y es calentado senoidalmente por un flujo F de calor. Este flujo en la superficie se puede escribir como:

$$F = F_0 \cos \omega t$$

donde F_0 es el flujo en el tiempo $t=0$, $t=0$ corresponde al tiempo de mayor calentamiento, y el período del flujo $\tau = 2\pi/\omega$ corresponde a 1 día. La temperatura en la superficie v para este flujo periódico se puede derivar de la ecuación de calor y está dada por

$$v = \frac{F_0}{P\sqrt{\omega}} \cos(\omega t - \pi/4)$$

donde P es la inercia térmica.

Hasta aquí, la respuesta de la temperatura en la superficie implica que materiales con mucha inercia térmica tienen menor amplitud y por lo tanto calientan y enfrían menos que materiales con poca inercia térmica. Es claro que para el problema propuesto esta solución no basta pues no se está tomando en cuenta que materiales oscuros con bajos albedos (la fracción de luz solar incidente que refleja) absorben más energía solar que materiales claros con altos albedos. Con la idea de analizar este efecto con mayor precisión debemos examinar primero la insolación. Omitiendo los efectos que causan transmisiones atmosféricas, la insolación es proporcional al coseno del ángulo cenital del sol; el flujo absorbido por el suelo durante el día estará dado entonces por:

$$S_0 (1 - A) \cos Z$$

donde S_0 es la constante solar, A el albedo terrestre (y $\therefore$ $(1-A)$ la fracción de la insolación que se absorbe) y Z, el ángulo cenital del sol que depende del tiempo (t), latitud (λ) y declinación solar (δ) y está dado

(1) WATSON, K. "Application of Thermal Modeling in the Geological Interpretation of IR Images", Proc. of the 7th International Symp. on Remote Sensing of Environment, Vol. 3. Ann Arbor, Mich., 1971.

por:

$$\cos Z = \cos\lambda \cos\delta\,(\cos\omega t + \tan\lambda \tan\delta).$$

Ahora, durante el día y la noche el suelo pierde calor principalmente por radiación, y este término se puede aproximar por la ley de Stephan-Boltzmann, que afirma que el flujo radiativo total es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura. Sea σ la constante de Stephan-Boltzmann.

Se tiene entonces un nuevo modelo para expresar la condición de frontera:

$$\begin{aligned} F &= S_0(1-A)\cos Z - \sigma v^4 \qquad &\text{(durante el día)}\\ &= -\sigma v^4 &\text{(durante la noche)} \end{aligned} \qquad (1)$$

Esta expresión para el flujo resulta más aproximada para la realidad pero mucho más compleja. Es posible resolver el problema utilizando series de Fourier, pero dada su lenta convergencia para los valores del tiempo que más interesan, lo que lo hace inapropiado para resultados numéricos, hubo necesidad de desarrollar otros métodos. En 1948, Carslaw y Jaeger (2) desarrollaron un método numérico utilizando transformada de Laplace para resolver el problema general de encontrar soluciones periódicas a problemas de conducción de calor en los que las condiciones de frontera son periódicas y pueden ser lineales o no-lineales. El problema que se resuelve es:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad x, t > 0$$

con:

$$v = 0 \qquad \text{para } t = 0,\ x > 0$$

$$-k\frac{\partial v}{\partial x} = F \qquad \text{para } x = 0,\ t > 0$$

donde F, el flujo, es cualquier función periódica escalonada.

El mismo método es utilizado por Jaeger (3) para resolver el problema inverso: si la temperatura en la superficie es una función periódica escalonada, encontrar el flujo que excita esa superficie. Para el problema planteado en (1) es necesario utilizar la solución a este problema inverso, ya que resulta inmanejable la expresión para F si se sustituye el valor de la temperatura elevado a la cuarta.

La solución para el flujo periódico promedio en el n-ésimo intervalo (el período τ es dividido en N intervalos iguales $n=1,\dots,N$ y v_n denota la temperatura en el n-ésimo intervalo) está dada por:

$$F_n = \frac{P}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{k=1}^{N} v_k\, q_{n-k+1} \qquad (2)$$

(2) CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C. "Operational methods in applied mathematics" 2nd. ed. Oxford, 1948.

(3) JAEGER, J.C. "Conduction of Heat in a Solid with Periodic Boundary Conditions, with an Application to the Surface Temperature of the Moon". Proc. Cambridge Phil. Soc., 49(2), 1953.

donde los coeficientes $\{q_i\}$ dependen únicamente de N.

Sustituyendo en (1) este valor de F (discretizado, promediado y supuesto periódico) se obtienen N ecuaciones de cuarto grado con las incógnitas $v_1, \ldots, v_N$.

Es claro que esta solución permite mejorar tanto como se quiera la expresión para F de (1) sin que esto afecte radicalmente cualquier método que se proponga para resolver el sistema de ecuaciones. En trabajos posteriores al que llevó a derivar (1), Watson involucró el flujo solar absorbido (incluyendo efectos de transmisión atmosférica en términos de la altitud solar, cubertura nubosa, calentamiento de la atmósfera y pendiente topográfica), la radiación del cielo absorbida o contraradiación (afectada entre otros factores por nubes y humedad) y la radiación reemitida (incluyendo efectos de emisividad).

Si a esta expresión para el flujo que excita la superficie de la tierra le sumamos un nuevo factor G, éste corresponderá a un nuevo factor que interviene en el calentamiento de la superficie; dado que se están ya tomando en cuenta todos los factores provenientes de la radiación solar, G corresponderá a la fuente de energía interna, por lo que tendremos expresado el flujo geotérmico (que supondremos constante) en términos de la temperatura en la superficie y diversos parámetros que se pueden aproximar (como la cubertura nubosa), promediar (como la emisividad) o calcular con cierta precisión (como el albedo, utilizando mediciones de las longitudes de onda corta en las bandas visibles (0.4μ a 0.74μ)). Por la expresión en (2) resulta claro que además el modelo permite despejar la inercia térmica en términos semejantes

En 1981 se presentaron los resultados obtenidos de una investigación realizada con datos obtenidos en el área de Cerro Prieto utilizando el sistema de Percepción Remota del IIMAS y con base en el modelo que acabamos de exponer (4). A pesar de problemas de calibración, fallas en los vuelos realizados, etc., los mapas de inercia térmica y flujo geotérmico que se generaron aplicando el modelo, resultaron coherentes con los mapas realizados directamente en el terreno e, incluso, mostraron anomalías térmicas desconocidas hasta entonces.

3. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para resolver el problema que planteamos en la sección anterior se pueden tomar varios caminos si se busca, sacrificando la solución exacta, reducir tanto como sea posible el tiempo computacional que se invierte; resulta importante tomar esto en cuenta, porque se puede estar analizando un área de, por ejemplo, 500 × 500 pixels (unidad de área, de "picture element"); con la información que se calibra para cada pixel se busca resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas donde, si las mediciones de la temperatura se llevan a cabo, por ejemplo, cada media hora, N = 48. Estos 250000 sistemas de 48 ecuaciones cada uno requieren ser resueltos de manera eficiente; pero no es sólo ése el problema: al sacrificar la solución exacta estamos encontrando una solución aproximada a un problema aproximado derivado de un modelo muy simple de una situación física muy compleja.

Posteriormente derivaremos la ecuación que se quiere resolver pero por el momento veamos en qué consiste. La expresión

(4) JIMICH, A. et al "Application of Machine Processing of Visible and Thermal Data to the Study of the Geothermal Area of Cerro Prieto, Mexico", IIMAS, UNAM. 1981.

más completa que utiliza Watson (5) para el flujo de calor proveniente del sol que calienta la superficie terrestre está dada por:

$$F(t) = -\varepsilon\sigma v^4(t) + S_0(1-A)(1-cl)(1-0{,}2\sqrt{\sec Z})(\cos Z') + \varepsilon\sigma T^4 \qquad (t>0) \qquad (3)$$

ε es la emisividad terrestre, σ la constante de Stephan-Boltzmann y $v(t) = v(0,t)$ la temperatura en la superficie. Los otros dos términos corresponden a la radiación absorbida, compuesta por el flujo solar de onda corta y el flujo atmosférico de onda larga; el primero depende de S_0, la constante solar; A, el albedo terrestre; cl, un factor de cobertura nubosa; $Z(t, \lambda, \delta)$ el ángulo cenital y $Z'(t, \lambda, \delta, \alpha, \varphi)$ el ángulo cenital local para una superficie inclinada, que a su vez dependen del tiempo t, λ la latitud, δ la declinación solar, α el ángulo de la pendiente de la superficie y φ el azimut del ángulo de la pendiente. T es una temperatura promedio del cielo.

El flujo $F(t)$ es periódico de período τ y satisface: $-k\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = F(t)$.

$v(x,t)$ satisface la ecuación de calor: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (x>0,\ t>0)$ (4)

k es la conductividad; D la difusividad.

El problema es el siguiente:
Los valores de σ y S_0 son conocidos y no dependen del área en consideración; Z y Z' son calculables dependiendo del área, día, etc; cl y T son sólo estimados (el primero, por ejemplo, a simple vista); ε es supuesto constante en todo el área; A y $v(t)$ dependen de cada pixel. El primero es calculado con mediciones en las bandas visibles y el segundo con mediciones en el infrarrojo en el tiempo t_i.
Con estos datos, e involucrando una fuente de flujo geotérmico constante G, se trata de resolver la ecuación para G en términos de A y $v(t)$. El problema para la ecuación linealizada fue resuelto por dos caminos en 1975 por Watson (op. cit) y en 1981 por Farah (6). Veremos los dos brevemente.

3.1 LA ECUACIÓN LINEARIZADA

El procedimiento de Farah consiste en lo siguiente:

Si en (3) agregamos una constante, G, ésta corresponderá, como se mencionó antes, a una fuente de calor que no proviene de la radiación solar, o sea, en condiciones óptimas, el flujo geotérmico.

(5) WATSON, K. "Geologic Applications of Thermal Infrared Images" Proc. of the IEEE, Vol. 63 No. 1. Denver, Col. 1975.
(6) FARAH, J. L. "Analysis of a Discrete-Time Linear Model for Geothermal Flux Reconnaissance from Two or Three Infrared Measurements" XV Int. Symp. on Remote Sensing of Environment. Ann Arbor, Mich. 1981.

Hagamos $R(t) = S_0(1-\alpha)(1-0{,}2\sqrt{\sec z_i})\cos z_i'$ y, dividiendo $[0,\tau)$ en N intervalos iguales de longitud $t_1 = \tau/N$ llamemos $F(n) = F(nt_1)$, $v(n) = v(nt_1)$ y $R(n) = R(nt_1)$. Se sigue entonces de (3):

$$F(n) = -\varepsilon\sigma v^4(n) + (1-A)R(n) + \varepsilon\sigma T^4 + Q \qquad (n = 0,1,\dots,N-1) \qquad (5)$$

Ahora, la expresión que da Jaeger para $F(n)$ (promediado en cada intervalo $[n,n+1)$) está dada, como se mencionó, por:

$$\frac{P}{\sqrt{\pi\tau}}\sum_{k=0}^{N-1} v_k\varphi_{n-k} = F(n) \qquad (n = 0,1,\dots,N-1) \qquad (v_k = v(k)) \qquad (6)$$

donde P es la inercia térmica y los coeficientes $\{\varphi_i\}$ que dependen sólo de N satisfacen:

$$\varphi_n = \varphi_{n-N} \qquad \forall n \in \{0,1,\dots,N-1\}.$$

Matricialmente esto corresponde a:

$$\frac{P}{\sqrt{\pi\tau}}\Phi\cdot V = F \qquad \text{donde} \quad V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{N-1}\end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1}\end{pmatrix}$$

y Φ está dada por:
$$\begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{N-1} & \cdots & \varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots & \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{N-1} & \varphi_{N-2} & \cdots & \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, dada una función periódica $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de período N, la transformada finita (discreta) de Fourier de f (TFF) denotada por $\hat{f}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ está dada por $\hat{f}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{-2\pi i n k/N}$ $(k \in \mathbb{Z})$ y la inversa de $\hat{f}$ por $f(n) = \sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}(k)\, e^{2\pi i n k/N}$ $(n \in \mathbb{Z})$ y se denota respectivamente: $f(n) \sqsupset \hat{f}(k)$, $\hat{f}(k) \sqsubset f(n)$.
Dadas dos funciones $f(n) \sqsupset \hat{f}(k)$ y $g(n) \sqsupset \hat{g}(k)$ la convolución satisface $(f*g)(n) \sqsupset \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$
$\left((f*g)(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(m)\, g(n-m) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(n-m)\, g(m)\right)$

Si definimos $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ como $\varphi(mN + n) = \varphi_n$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \{0,1,\dots,N-1\}$ y tomando en cuenta que $v(n)$ y $F(n)$ son también de período N, la expresión en (6) es precisamente:

$$\frac{PN}{\sqrt{\pi\tau}}(\varphi * v)(n) = F(n)$$

y $\therefore$ se tiene:

$$\frac{PN}{\sqrt{\pi\tau}}\hat{\varphi}(k)\,\hat{v}(k) = \hat{F}(k). \qquad (7)$$

Es interesante hacer notar que esta expresión diagonaliza Φ:

Si U está dada por $u(i,j)=0 \quad \forall\, i,j\in\{0,1,\dots,N-1\}$ excepto $u(0,N-1)=u(i,i-1)=1 \quad (i=1,\dots,N-1)$, entonces si $U^0 = I$ identidad $(N\times N)$, Φ se puede expresar como:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n U^n.$$

El polinomio característico de U está dado por $p(\lambda) = \det(U-\lambda I) = (-\lambda)^N - (-1)^N$ y $\therefore$ los eigenvalores de U están dados por las N raíces de $\lambda^N = 1$ i.e. $\lambda_k = e^{2\pi i k/N}$ $(k=0,1,\dots,N-1)$ $\therefore$ como dado un polinomio $f(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_{N-1}x^{N-1}$ los eigenvalores de $f(U)$ están dados por $f(\lambda_k)$ con λ_k eigenvalor de U, se sigue que los eigenvalores de Φ son:

$$\varphi_0 + \varphi_1\lambda_k + \cdots + \varphi_{N-1}\lambda_k^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1}\varphi_n e^{2\pi i n k/N} \qquad (k=0,1,\dots,N-1).$$

Bueno, regresemos al problema. Expandiendo v^4 alrededor de un punto x se tiene:

$$v^4 = x^4 + 4x^3(v-x) + 6x^2(v-x)^2 + \cdots$$

$\therefore$ si aproximamos la ecuación (5) considerando el primer término se tiene:

$$F(n) \simeq -4\varepsilon\sigma x^3 v(n) + 3\varepsilon\sigma x^4 + (1-A)R(n) + \varepsilon\sigma T^4 + G.$$

De (7) se sigue entonces que:

$$\left(\frac{PN}{\sqrt{\pi\tau}}\hat{\varphi}(k) + 4\varepsilon\sigma x^3\right)\hat{v}(k) = (1-A)\hat{R}(k) + (3\varepsilon\sigma x^4 + \varepsilon\sigma T^4 + G)\,\delta(k) \qquad (8)$$

donde $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n\equiv 0 \text{ mod } N. \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$ (observación: $1 \sqsupset \delta(k)$).

Despejando de esta ecuación $\hat{v}(k)$, su transformada inversa $v(n)$ está dada por:

$$v(n) = a(1-A)\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{c}{\hat{\varphi}(k)+c}\hat{R}(k)\,e^{2\pi i n k/N}\right) + ab \qquad (9)$$

donde: $a = \dfrac{1}{4\varepsilon\sigma x^3}$, $b = 3\varepsilon\sigma x^4 + \varepsilon\sigma T^4 + G$ y $c = \dfrac{\sqrt{\pi\tau}}{PNa} \neq 0$.

Ahora, esta solución tiene varias consecuencias interesantes:

Posteriormente se probará que $\hat{Q}(0)=0$. $\therefore$ si en (8) hacemos $k=0$ se tiene:

$$\hat{v}(0) = a(1-A)\hat{R}(0) + ab$$

$$y \;\therefore\quad G = \varepsilon\sigma x^3(4\bar{v} - 3x) - (1-A)\bar{R} - \varepsilon\sigma T^4 \qquad (10)$$

donde $\bar{v} = \hat{v}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} v(n)$ $\wedge$ $\bar{R} = \hat{R}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} R(n)$.

La ecuación (10) expresa G en términos de A y $\bar{v}$ y hace ver que es independiente de la inercia térmica. Ahora, si se tienen dos o tres mediciones de $v(t)$, el valor de $\bar{v}$ será poco aproximado y por lo tanto el de G. Sin embargo, por la solución (9) se sigue que, si se tienen dos mediciones de $v(t)$ (por ejemplo en los tiempos $n_1 \neq n_2$) entonces $v(n_1)\,v^{-1}(n_2)$ permite despejar b y c y de cualquiera de las dos ecuaciones $v(n_i)$, despejar a. Estos tres valores determinan x, G y P. Computacionalmente, para calcular la TFF de $Q(n)$ y $R(n)$ en (9) pueden utilizarse algoritmos muy rápidos como el de la transformada finita de Fourier y, para encontrar la solución a b, c y a, métodos de interpolación.

Veamos ahora brevemente el procedimiento de Watson.

La ecuación (3) con condiciones (4) es linearizada desde un principio escogiendo el valor $x = T$. La solución explícita para $v(t)$ está dada entonces por:

$$v(t) = T + \frac{(1-A)S_0(1-c)}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n\cos(n\omega t - \varepsilon_n - \delta_n)}{\sqrt{(h+k\sqrt{n})^2 + (k\sqrt{n})^2}}$$

donde A_n y ε_n son la amplitud y fase de las componentes armónicas de la insolación local $H(t)$ dada por:

$$H = \begin{cases} (1 - 0.2\sqrt{\sec Z})\cos Z' & t_a < t < t_c \\ 0 & t_c < t < \tau + t_a \end{cases}$$

(t_a y t_c son los tiempos de aurora y crepúsculo locales respectivamente).

$h = 4\varepsilon\sigma T^3/k$, $\tau = 2\pi/\omega$ y $\delta_n = \arctan(k\sqrt{n}/h + k\sqrt{n})$.

Si se introduce ahora el efecto de un flujo geotérmico G sumando una pequeña solución $v' = \frac{Gx}{k} + \frac{G}{kh}$ que satisface (3) y (4) entonces:

$$v(t) = T + \frac{G}{s} + (1-A)S_0(1-c)\sum_{n=0}^{\infty} A_n\frac{\cos(n\omega t - \varepsilon_n - \delta_n)}{\sqrt{(s+r\sqrt{n})^2 + (r\sqrt{n})^2}}$$

donde $s = 4\varepsilon\sigma T^3$ y $\Gamma = P\sqrt{\pi/\tau}$.

$\therefore$ la temperatura media $\bar{v}$ está dada por:

$$\bar{v} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)\,dt = T + \frac{Q}{s} + (1-A)S_0(1-d)A_0 \cos\varepsilon_0/s$$

donde: $A_0 \cos\varepsilon_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau H(t)\,dt$.

Claramente este valor para Q coincide con (10) haciendo $x = T$.

3.2 LA ECUACIÓN NO LINEAL.

Las ecuaciones (5) y (6) corresponden a un sistema de N ecuaciones de 4° grado. Si se conocen los valores $v(n_1)$ y $v(n_2)$ este sistema permite resolver para Q y P. Si se conocen tres, se puede debilitar la hipótesis de considerar ε independiente del pixel y despejar entonces para ε, Q y P.

El método de Newton es el método utilizado más frecuentemente en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales pero presenta varias desventajas desde un punto de vista práctico. Por un lado, sin algunas modificaciones frecuentemente diverge; son bien conocidas condiciones de convergencia pero dependen de la estimación inicial de la solución que no siempre resulta apropiada. Por otro lado, cada iteración requiere de la evaluación de la matriz jacobiana de la función y para calcular su inversa, la solución de un sistema lineal.

Un algoritmo relativamente reciente fue desarrollado por Broyden (7) con la idea de resolver estas desventajas. Para el problema que nos concierne, dada la función particular que da lugar al sistema de ecuaciones (ya sea para resolver Q y P o Q, ε y P), este algoritmo resulta sumamente útil y lo describiremos con cierto detalle.

El método de Newton consiste en lo siguiente:

Se quiere encontrar un cero de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; si x_i es la i-ésima aproximación a $f(x) = 0$ y $f_i = f(x_i)$ entonces se define: $x_{i+1} = x_i - (J_f(x_i))^{-1} f_i$ (donde $J_f(x_i)$ es la matriz jacobiana en x_i).

Supongamos que B_i es una aproximación a $J_f(x_i)$ y $p_i = -B_i^{-1} f_i$.

Entonces una simple modificación del método de Newton consiste en definir:

$$x_{i+1} = x_i + t_i p_i$$

donde t_i es un escalar que previene la divergencia.

(7) BROYDEN, C.G. "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations" Math. of Computation. Vol 19. No. 92, 1965.

Buscamos una aproximación B_{i+1} de $J_f(x_{i+1})$.

Sea $\gamma(t) = x_i + t p_i \quad t \in \mathbb{R}$, y $g = f \circ \gamma$.

$\therefore \; g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = J_f(\gamma(t)) p_i$.

Esta igualdad establece una condición que cualquier aproximación a la matriz jacobiana debe satisfacer.
Se requiere entonces una estimación de $g'(t)$ que se puede obtener expandiendo $g(t)$ alrededor de un punto, digamos $t = t_i - s_i$.

i.e. $g(t_i - s_i) \simeq g(t_i) - s_i g'(t_i)$ y $\therefore f(x_i + (t_i - s_i) p_i) \simeq f_{i+1} - s_i J_f(x_{i+1}) p_i$.

Se pide entonces,

$$f_{i+1} - f(x_i + (t_i - s_i) p_i) = s_i B_{i+1} p_i .$$

Si el error en esta estimación es considerable se puede entonces minimizar haciendo a s_i tan pequeño como sea posible, consistente con que la diferencia $g(t_i - s_i)$ y $g(t_i)$ sea suficientemente grande.

Ahora, para evitar en el cálculo de p_i tener que resolver n ecuaciones lineales se puede guardar en memoria no B_i sino su inversa y por lo tanto la operación se reduce a una multiplicación matricial.
Se pide entonces que, si $H_i = -B_i^{-1}$ y $y_i = f_{i+1} - f(x_i + (t_i - s_i) p_i)$:

(1) $p_i = H_i f_i$

(2) $H_{i+1} y_i = -s_i p_i$.

Esta última expresión no define una matriz única y, dependiendo de distintas condiciones impuestas sobre H_{i+1} se obtienen distintos métodos de solución llamados de "quasi-Newton".

La expresión:

$$y_i = s_i B_{i+1} p_i$$

relaciona el cambio y_i en la función f con el cambio de x en la dirección p_i pero no se tiene ninguna información del cambio en f si x cambia en una dirección distinta a p_i. Broyden propone entonces que B_{i+1} sea escogida de tal manera que el cambio en f que predice B_{i+1} en una dirección q_i ortogonal a p_i sea el mismo que predice B_i. Es decir, $\operatorname{Ker}(B_{i+1} - B_i) = p_i^{\perp}$. Esta segunda condición sobre B_{i+1}:

$$B_{i+1} q_i = B_i q_i \qquad \forall q_i \in \mathbb{R} \;\; \text{y} \;\; q_i^t p_i = 0$$

determina, junto con $y_i = s_i B_{i+1} p_i$ una aproximación única a $J_f(x_{i+1})$ dada por:

$$B_{i+1} = B_i + \frac{(y_i - s_i B_i p_i)\, p_i^t}{s_i p_i^t p_i}$$

y en términos de la inversa,

$$H_{i+1} = H_i - \frac{(s_i p_i + H_i y_i)\, p_i^t H_i}{p_i^t H_i y_i}.$$

Broyden discute otro tipo de condiciones sobre la aproximación de $J_f(x_{i+1})$ (por ejemplo, pedir que: $H_{i+1} v_i = H_i v_i$ si $v_i^t y_i = 0$) pero, comparándolos entre sí, prueba que, en caso de tener un buen estimador inicial de la matriz jacobiana y de la solución, éste es el método que más rápidamente converge y, si $t_i = 1$, el que menos operaciones requiere. Si además la aproximación para $g'(x)$ es buena, i.e. el error en la expansión con un término es mínimo, basta hacer $s_i = t_i$.

El método se reduce entonces a:

$$x_{i+1} = x_i + H_i f_i$$

$$H_{i+1} = H_i - \frac{(p_i + H_i y_i)\, p_i^t H_i}{p_i^t H_i y_i}$$

donde: $p_i = x_{i+1} - x_i$ y $y_i = f_{i+1} - f_i$.

Al final anexamos dos programas basados en las discusiones anteriores. El primero determina el flujo geotérmico y la inercia térmica utilizando la ecuación linearizada y la transformada rápida de Fourier. El segundo, utilizando el método de Broyden encuentra la emisividad, la inercia térmica y el flujo geotérmico, resolviendo la ecuación no lineal descrita en (5) y (6). En ambos se piden tres temperaturas de la superficie terrestre en tiempos durante el día, la tarde y la noche. El albedo es supuesto conocido.

2 DERIVACIÓN DEL MODELO

1 INTRODUCCIÓN

Cuando dos cuerpos están en contacto a diferente temperatura, determinados choques moleculares producen una transferencia de energía del cuerpo a mayor temperatura al cuerpo a menor temperatura. Este mecanismo, que se caracteriza por una comunicación directa entre las moléculas, se conoce como conducción de calor; el cuerpo a mayor temperatura se dice que desprende calor (o pierde energía) mientras que el otro lo absorbe (o gana energía) y se considera la variación en la cantidad de calor de un material como positiva si éste absorbe calor y negativa si lo desprende.

Hablar de "cantidad de calor" en un material es una convención. El calor, como el trabajo, es una forma transitoria de energía. Transitoria, porque existe sólo cuando hay un intercambio de energía entre dos sistemas; es decir, cuando algún tipo de energía de un sistema (como energía cinética y potencial moleculares, energía eléctrica, energía de radiación, etc) se transforma en algún tipo de energía de otro sistema. Pero, a diferencia del trabajo, el calor corresponde a una transformación de tipos de energía donde ese intercambio se debe a una diferencia de temperaturas. En la mayoría de los problemas prácticos relacionados con estos intercambios de energía, se consideran aquellos en los que se lleva a cabo sólo un intercambio o transferencia de energía interna (la energía relacionada con el estado físico y químico del sistema, o sea, la orientación y movimiento de las moléculas y átomos de éste); se identifica el calor con esa energía interna y se refiere uno a él como "algo" que fluye de un sistema a otro.

Para medir la cantidad de calor o flujo presentes en un material se usan unidades como la caloría (cal) o BTU (British Thermal Unit), y se entiende por una unidad de calor, la cantidad necesaria para elevar la temperatura de una unidad de agua una unidad de temperatura. Por ejemplo, una caloría es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua un grado centígrado y un BTU la necesaria para elevar la temperatura de una libra de agua un grado Fahrenheit.

Esta definición de unidad de calor lleva implícita una suposición, que experimentalmente se ha verificado no es cierta, acerca del comportamiento del calor: el aumento de temperatura debido a una cantidad de calor dada es independiente de la temperatura inicial. Sin embargo, esa dependencia es mínima y la suposición, suficientemente aproximada para nuestros propósitos. Para deducir el modelo será necesario usar aproximaciones y cada una será mencionada en el desarrollo.

Derivaremos primero la ecuación de calor (o ecuación diferencial de difusión); es la única herramienta física que utilizaremos para deducir el modelo que relaciona la temperatura en la superficie de la tierra y un flujo de calor que la "excita". Esta deducción utiliza la transformada de Laplace tanto para la solución a la ecuación de calor como para la relación entre las dos funciones. Al final del capítulo presentamos un resumen del modelo que permite la detección del flujo geotérmico.

2 LA ECUACIÓN DE CALOR

Partiremos de dos postulados para derivar la ecuación de calor. Ambos son las leyes principales que rigen este proceso de transferencia, y ambos son verificables experimentalmente.

2.1 Absorción.

Como la energía interna de un cuerpo varía si éste desprende o absorbe calor, si no ocurre ningún otro proceso en el cuerpo, se sigue del principio de conservación de energía ("En todo sistema aislado, los únicos procesos que ocurren son aquellos en los que la energía (interna) del sistema permanece constante"), que la variación en su cantidad de calor será igual al cambio de su energía. Estos cambios dependen del número de moléculas del cuerpo y del cambio de energía de cada una y, por lo tanto, de la masa del cuerpo y del cambio de temperatura. La relación es la siguiente:

Si denotamos por ΔQ la variación en la cantidad de calor de un material con masa m y a ΔT su cambio de temperatura, entonces ΔQ es proporcional a $m \cdot \Delta T$. Si llamamos a c la constante de proporcionalidad (llamada el calor específico del material y que supondremos sólo depende de éste) entonces:

$$\Delta Q = c\, m\, \Delta T.$$

En otras palabras, el calor específico de un material es la relación de la cantidad de calor aplicada al cuerpo a su correspondiente cambio de temperatura, por unidad de masa. De la definición de unidad de calor dada en 1 es claro que $c = 1$ para el agua.

2.2 Conducción.

Consideremos una barra aislada de material homogéneo, longitud Δx y área de sección recta A. Si las caras de los dos extremos se mantienen a temperaturas distintas y ΔQ es la cantidad de calor que fluye perpendicular a las caras en un tiempo Δt entonces:

(a) dada una diferencia de temperaturas ΔT, ΔQ es proporcional a Δt y A.

(b) dados Δt y A, ΔQ es proporcional a $\Delta T / \Delta x$.

Entonces:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \qquad (k > 0 \text{ se llama la conductividad (térmica) del material}).$$

2.3 Observaciones:

(a) Si el aumento de temperatura en un segmento de material con masa m es una función del tiempo, del postulado de absorción se sigue que la razón instantánea de cambio de la cantidad de calor en el segmento, en el tiempo t_0, es proporcional a la razón instantánea del cambio de temperatura.

Es decir,

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, t_0) = cm \frac{\partial T}{\partial t}(x, t_0) \qquad (1)$$

(b) Si la temperatura es una función de x en el intervalo dado, del postulado de conducción se sigue que la razón de flujo a lo largo de la superficie $x = x_0$ es proporcional al gradiente de temperatura.
Es decir,

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x_0, t) = -kA\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) \qquad (2)$$

en un instante dado t_0.

(c) El gradiente de una función en un punto es un vector en cuya dirección la función aumenta más rápidamente, y como el calor fluye de regiones calientes a frías, la constante en (2) tiene un signo negativo:

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) = -kA(\nabla T)(x_0)$$ apunta en la dirección en la que T decrece más rápidamente.

(d) El postulado de absorción no se refiere a la cantidad absoluta de calor en un cuerpo sino a un cambio en esa cantidad. Dada una distribución de temperatura $T(x,t)$ en una barra, podemos calcular por integración la cantidad total de calor en un segmento (a,b): en el instante t_0, el aumento de temperatura desde 0°K en un punto x_0 es $T(x_0, t_0)$ y por el postulado de absorción, la cantidad total de calor en (a,b) en el tiempo t_0 es:

$$Q(t_0) = c\rho\int_a^b T(x, t_0)\,dx$$

donde ρ es la densidad de masa que suponemos uniforme.

2.4 Métodos de derivación.

Por medio de los dos postulados anteriores y la primera ley de termodinámica derivaremos la ecuación de calor por dos métodos. El primero a través del valor medio y el segundo usando el teorema de divergencia. En ambos se considerará que el medio es aislado y posteriormente deduciremos el caso que involucra fuentes internas de energía.

(a) Método 1: Teorema del valor medio. Ecuación en una dimensión.

Consideremos una barra homogénea como en 2.2 y aislemos un segmento entre x_0 y $x_0 + \Delta x$.
De (1) se sigue que para cualquier tiempo t_0,

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, t_0) = cm\frac{\partial T}{\partial t}(x, t_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \Delta x)$$

ahora, suponiendo $\frac{\partial T}{\partial t}(x, t_0)$ continua, existe $\xi_0 \in (x_0, x_0+\Delta x)$ para el cual $\frac{\partial T}{\partial t}(\xi_0, t_0)$ corresponde al valor promedio de la razón de cambio de temperatura sobre todo el segmento.

$\therefore$ la razón de absorción de calor en todo el segmento será $c\rho\Delta x A \frac{\partial T}{\partial t}(\xi_0, t_0)$, donde ρ es la densidad (uniforme).

Por otro lado, esta razón de acumulación (o absorción) de calor a lo largo de todo el segmento está dada, por el primer principio de termodinámica ("En un sistema aislado, la cantidad total de energía se conserva"), por la razón del calor que entra en el segmento en el tiempo t_0 menos la que sale, i.e:

$$kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}(x_0+\Delta x, t_0) - \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_0)\right)$$

por la ecuación (2).

ahora, por el teorema del valor medio, existe $\eta_0 \in (x_0, x_0+\Delta x)$ tal que este valor es igual a:

$$kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\eta_0, t_0)\Delta x.$$

Igualando ambos resultados se obtiene:

$$c\rho\Delta x A\frac{\partial T}{\partial t}(\xi_0, t_0) = kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\eta_0, t_0)\Delta x$$

$\therefore$ si $\Delta x \to 0$ se tiene que $\xi_0 \to x_0 \wedge \eta_0 \to x_0$ y:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x_0, t_0) = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, t_0).$$

(b) <u>Método 2</u>: Teorema de divergencia. Ecuación en tres dimensiones.

Consideremos una superficie S parametrizada por $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde:

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Si la superficie es suave, el vector $(T_u \times T_v)(\Phi(u_0,v_0))$ es normal a S en $\Phi(u_0,v_0)$, donde:

$$T_u(\Phi(u_0,v_0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u_0,v_0)$$

y $$T_v(\Phi(u_0,v_0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u_0,v_0)$$

y si F es cualquier campo vectorial en S, la integral de superficie de F sobre Φ está dada por:

$$\int_{\Phi} F = \int_D (F \cdot (T_u \times T_v))\, du\, dv.$$

Podemos interpretar esta integral de la siguiente manera:
Supongamos que S está orientada positivamente y que Φ es una parametrización de S que preserva la orientación. Sea $D_{i,j} \subset D$ un cuadrado de una partición de D con lados de longitud Δu y Δv y sean $(u,v) \in D_{i,j}$ y $\Phi(u,v) = (x,y,z)$. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $F(x,y,z)$, $\Delta u T_u$ y $\Delta v T_v$ está dado por:

$$|F \cdot (\Delta u T_u \times \Delta v T_v)| = |F \cdot (T_u \times T_v)\, \Delta u\, \Delta v|$$

Supongamos ahora que ρ es la densidad de un fluido moviéndose con velocidad V a lo largo de S. La dirección de $V(x,y,z)$ coincide con la dirección en la que el fluido se mueve a lo largo de la superficie en una vecindad de (x,y,z) y $|V \cdot (T_u \times T_v)\, \Delta u\, \Delta v|$ mide el volumen que contiene el material que fluye a través de $\Delta u T_u \times \Delta v T_v$ por unidad de tiempo. Por lo tanto, como $V \cdot (T_u \times T_v)\, \Delta u\, \Delta v$ es positivo (dada la orientación) si V apunta en la dirección de la normal n (o sea "hacia afuera" de la superficie) y es negativo si apunta "hacia adentro", multiplicando por la densidad, la expresión

$$\sum_{i,j} \rho V \cdot (T_u \times T_v)\, \Delta u\, \Delta v$$

es una medida aproximada de la masa total que fluye hacia afuera a lo largo de la superficie por unidad de tiempo.

$\therefore$ si $F = \rho V$, $\quad \int_{\Phi} F = \int_S (F \cdot n)\, dS$

representa la razón de flujo del fluido.

Consideremos ahora "algo" (materia, carga eléctrica) que se mueve en una región acotada Ω del espacio y sea $S = \partial\Omega$ la superficie que determina la frontera de Ω. El decir que ese "algo" o esa masa, se conserve, querrá decir que no sea creada ni destruida, o sea que su razón de cambio en Ω sea igual a la razón de flujo de esa masa a través de la superficie cerrada S.

Entonces, si $\rho(x,y,z,t)$ es la densidad de ese fluido en un punto (x,y,z) en el tiempo t (función real de clase C^1) y $V(x,y,z,t)$ su velocidad (campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ de clase C^1, para cada t),

$$\int_{\Omega} \rho \quad \text{es la masa total en } \Omega$$

y por la explicación anterior, $-\int_S (\rho V)\cdot n\, ds$ la razón de flujo que entra en Ω.

$\therefore$ El pedir que se conserve la masa equivale a pedir que:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho = -\int_S (F\cdot n)\, ds$$

donde $F = \rho V$.

Apliquemos ahora el teorema de divergencia.

Suponiendo que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ es continua, $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho = \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$

y por el teorema de divergencia:

$$\int_S (F\cdot n)\, ds = \int_{\partial\Omega}(F\cdot n)\, ds = \int_\Omega (\operatorname{div} F)\, dV$$

$$\therefore \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\int_\Omega \operatorname{div} F \quad y \therefore \int_\Omega \left(\operatorname{div} F + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz = 0$$

Como esta igualdad es supuesta válida para toda región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se sigue que

$$\operatorname{div} F + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ahora, consideremos un sólido homogéneo e isotrópico Ω en $\mathbb{R}^3$. El vector de flujo de energía (energía por unidad de tiempo por unidad de área) está dado, por el postulado de conducción, por:

$$F = -k\nabla T$$

con k la conductividad. Por la observación (d), $c\rho T$ es la energía por unidad de volumen (o densidad de energía) con c el calor específico y ρ la densidad de masa, y la cantidad de calor Q en Ω está dada por:

$$Q = c\int_\Omega \rho T\, dV$$

y como consecuencia de la primera ley de termodinámica, la razón de cambio de energía en Ω debe igualar la razón por la que la energía entra en Ω que, como vimos, equivale a:

$$\operatorname{div} F + \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = 0$$

$$\therefore \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}(-k \nabla T).$$

$$\therefore \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T.$$ donde $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ es el laplaciano de T.

(c) Consideremos la situación descrita en el método 1, pero supongamos ahora que el sólido no está aislado. Sea $f(x,t)$ la cantidad de calor por unidad de tiempo que se genera en el segmento entre x_0 y $x_0 + \Delta x$.

Por lo tanto, para algún punto $u_0 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, la razón de calor generado en el segmento en el tiempo t_0 es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u_0, t_0) A \Delta x.$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}(\eta_0, t_0) + f(u_0, t_0)\right) A \Delta x,$$

corresponde al flujo de calor neto debido a conducción en el segmento y el calor generado en el elemento de volumen, y debe igualar la razón de cambio de la energía acumulada en este dada por:

$$c \rho \Delta x A \frac{\partial T}{\partial t}(\xi_0, t_0).$$

se sigue entonces:

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t}(\xi_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}(\eta_0, t_0) + f(u_0, t_0)\right),$$

y si $\Delta x \to 0$, entonces ξ_0, η_0 y u_0 tienden a x_0

y $\therefore$ $$c \rho \frac{\partial T}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_0) + f(x_0, t_0)\right). \qquad (3)$$

esta última expresión, la ecuación de calor involucrando energía generada en el sólido, es la que utilizaremos para el desarrollo que sigue del método.

3. FLUJO PERIÓDICO SOBRE UN SÓLIDO SEMI-INFINITO.

Para el modelo, por simplicidad, veremos al flujo externo de calor que calienta la superficie de la tierra como una función periódica del tiempo. Nos interesa, involucrando fuentes internas de energía, determinar ese flujo periódico, y en esta sección utilizando el método de transformada de Laplace, encontraremos una expresión del flujo en términos de la temperatura en la superficie.

Consideremos la siguiente situación:

Un sólido semi-infinito $x>0$ de densidad ρ, conductividad k y calor específico c, es "excitado" en su superficie $x=0$ por un flujo de calor $F(t)$. Si $T(x,t)$ es la temperatura en el sólido, $f(x,t)$ la fuente interna de calor (que posteriormente simplificaremos suponiéndola independiente del tiempo) y $A(x)$ la temperatura inicial (que después consideraremos constante), entonces, por (3), se satisface la ecuación de calor:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) + f(x,t)\right) \qquad (4)$$

con condiciones:

$$T(x,0) = A(x) \qquad \forall x>0 \qquad (5)$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = F(t) \qquad \forall t>0. \qquad (6)$$

El problema que resolveremos es el siguiente: suponiendo que $T(0,t)$ es una función periódica escalonada, determinar la parte periódica del flujo $F(t)$. Dividiremos el desarrollo en varios pasos.

3.1 Solución para $T(0,t)$ de la ecuación (4) con condiciones (5) y (6).

El siguiente método soluciona la ecuación por medio de una "condición de compatibilidad" y está basado principalmente en uno desarrollado por G. Doetsch.

Comencemos simplificando la ecuación (4).

Sean $D = \frac{k}{\rho c}$ la difusividad térmica y $P = \sqrt{\rho c k}$ la inercia térmica, y hagamos el cambio de variable $z = x/\sqrt{D}$.

Entonces, de (4):
$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

y $\therefore$
$$\frac{\partial T}{\partial t}(z\sqrt{D},t) = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z\sqrt{D},t) + \frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial z}(z\sqrt{D},t).$$

Si ahora llamamos:
$$H(z,t) = T(z\sqrt{D},t)$$
$$f_1(z,t) = f(z\sqrt{D},t)$$

$$G(z,t) = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(z,t)\right)$$

$$\text{y} \qquad A_1(z) = A(z\sqrt{D})$$

entonces la ecuación está dada por:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(z,t) + G(z,t) \qquad (7)$$

con condiciones: $H(z,0) = A_1(z)$

$$-P\,\frac{\partial H}{\partial z}(0,t) = F(t)$$

Llamemos a $H(0,t) = B(t)$ y $\frac{\partial H}{\partial z}(0,t) = B_1(t)$.

Ahora, si una función $H(z,t)$ real o compleja satisface:

(a) $H(z,t)$ está definida para $z,t \geq 0$.

(b) $A(z,t)$ es absolutamente integrable para cualquier dominio finito: $0<z<z_0$, $0<t<t_0$.

(c) Existen $u_0, v_0 \in \mathbb{C}$ tales que converge la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_0 z - v_0 t}\, H(z,t)\, dz\, dt$$

(en cuyo caso denotamos por $R(u_0,v_0) = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re} u > \operatorname{Re} u_0,\ \operatorname{Re} v > \operatorname{Re} v_0\}$)

entonces el teorema de Amerio asegura que:

(a) $\mathcal{L}^2(H(z,t))$ existe $\forall (u,v) \in R(u_0,v_0)$

(b) $\mathcal{L}^2(H(z,t))$ es una función analítica en $R(u_0,v_0)$

(c) se satisface $\mathcal{L}_u(\mathcal{L}_v(H(z,t))) = \mathcal{L}_v(\mathcal{L}_u(H(z,t))) = \mathcal{L}^2(H(z,t))$

donde $\mathcal{L}^2(H(z,t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-uz-vt} H(z,t)\, dz\, dt$ es la transformada de Laplace de $H(z,t)$ y $\mathcal{L}_u(H(z,t)) = \int_0^\infty e^{-uz} H(z,t)\, dz$ y $\mathcal{L}_v(H(z,t)) = \int_0^\infty e^{-vt} H(z,t)\, dt$ la transformada con respecto a cada variable.

La notación que usaremos para dos variables es:

$$\mathcal{L}^2(H(z,t)) = h(u,v)$$

$$\mathcal{L}_u(H(z,t)) = h_1(u,t)$$

$$\mathcal{L}_v(H(z,t)) = h_2(z,v)$$

y para una variable:

$$\mathcal{L}(H(t)) = \tilde{H}(u) = h(u) = \int_0^\infty e^{-ut} H(t)\,dt .$$

supondremos que $H(z,t)$, $\frac{\partial H}{\partial t}(z,t)$ y $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(z,t)$ y $G(z,t)$ satisfacen las tres condiciones del teorema.

Calculando la transformada de Laplace en ambos miembros de (7), obtenemos:

$$vh(u,v) - h_1(u,0) = u^2 h(u,v) - u h_2(0,v) - \frac{\partial h_2}{\partial z}(0,v) + g(u,v) \qquad (8)$$

ya que:

$$\mathcal{L}^2\left(\frac{\partial H}{\partial t}(z,t)\right) = \mathcal{L}_u\left(v h_2(z,v) - H(z,0)\right) = v h(u,v) - h_1(u,0)$$

$$\text{y} \quad \mathcal{L}^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(z,t)\right) = \mathcal{L}_v\left(u^2 h_1(u,t) - u H(0,t) - \frac{\partial H}{\partial z}(0,t)\right) = u^2 h(u,v) - u h_2(0,v) - \frac{\partial h_2}{\partial z}(0,v).$$

ahora, claramente se tiene:

$$\tilde{A}_1(u) = h_1(u,0)$$
$$\tilde{B}(v) = h_2(0,v)$$
$$\tilde{B}_1(v) = \frac{\partial h_2}{\partial z}(0,v).$$

$\therefore$ de (8):
$$h(u,v) = \frac{-\tilde{A}_1(u) + u\tilde{B}(v) + \tilde{B}_1(v) - g(u,v)}{u^2 - v}. \qquad (9)$$

Para que $h(u,v)$ sea analítica en un dominio de la forma $R(u_0,v_0)$, se debe anular el numerador en (9) para aquellos valores tales que $u^2 = v$. Si $u = \sqrt{v}$ entonces $\operatorname{Re} v$ puede ser suficientemente grande para que $(u,v) \in R(u_0,v_0)$ mientras que si $u = -\sqrt{v}$ esta afirmación no se puede asegurar.
Pediremos entonces la condición:

$$-\tilde{A}_1(\sqrt{v}) + \sqrt{v}\,\tilde{B}(v) + \tilde{B}_1(v) - g(\sqrt{v}, v) = 0$$

lo cual es equivalente a:

$$\frac{-\tilde{A}_1(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} + \tilde{B}(v) + \frac{\tilde{B}_1(v)}{\sqrt{v}} - \frac{g(\sqrt{v},v)}{\sqrt{v}} = 0. \qquad (10)$$

ahora, para encontrar la antitransformada de cada factor:

(1) Si $\chi(z,t) = \dfrac{e^{-z^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$ (llamada la solución elemental de la ecuación de calor)

entonces $\mathcal{L}_v\left(\chi(z,t)\right) = \dfrac{e^{-z\sqrt{v}}}{\sqrt{v}}$ ($\mathrm{Re}\, z^2 > 0$ y $\mathrm{Re}\, v > 0$)

$$\therefore \frac{\tilde{A}_1(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} = \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{v}}}{\sqrt{v}} A_1(z)\,dz = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-vt} \chi(z,t)\,dt \right) A_1(z)\,dz$$
$$= \int_0^\infty e^{-vt} \left(\int_0^\infty \chi(z,t) A_1(z)\,dz \right) dt$$

$$\therefore \frac{\tilde{A}_1(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} = \mathcal{L}\left(\int_0^\infty \chi(z,t) A_1(z)\,dz \right).$$

(2) Análogamente: $$\frac{g(\sqrt{v},v)}{\sqrt{v}} = \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{v}\,z}}{\sqrt{v}} \left(\int_0^\infty e^{-vy} G(z,y)\,dy \right) dz$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-vs} \chi(z,s)\,ds \right) \left(\int_0^\infty e^{-vy} G(z,y)\,dy \right) dz$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-vt} \chi(z,t) \overset{t}{*} G(z,t)\,dt \right) dz$$
$$= \int_0^\infty e^{-vt} \left(\int_0^\infty \chi(z,t) \overset{t}{*} G(z,t)\,dz \right) dt$$

con "$*$" la convolución, i.e. $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)\, g(s)\,ds$.

$$\therefore \frac{g(\sqrt{v},v)}{\sqrt{v}} = \mathcal{L}\left(\int_0^\infty \chi(z,t) \overset{t}{*} G(z,t)\,dz \right)$$

(3) Como $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$ ($\mathrm{Re}\, v > 0$) se tiene: $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} * B_1(t)\right) = \dfrac{\tilde{B}_1(v)}{\sqrt{v}}$

$\therefore$ se sigue de (10) que:

$$B(t) = \int_0^\infty \chi(z,t) A_1(z)\,dz - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * B_1(t) + \int_0^\infty \chi(z,t) \overset{t}{*} G(z,t)\,dz.$$

$$\therefore\ B(t) = \int_0^\infty \chi(z,t) A_1(z)\,dz + \int_0^\infty \chi(z,t) \overset{t}{*} G(z,t)\,dz - \frac{1}{P\sqrt{\pi t}} * F(t) \quad \text{por (7).}$$

Ahora, simplificaremos el problema para encontrar una expresión explícita de las dos primeras integrales. Supondremos que la temperatura inicial $A(x) = A$ es constante y que la fuente interna de calor $f(x,t) = f(x)$ no depende del tiempo.

Se obtiene entonces:

Para la primera integral,

$$\int_0^\infty x(z,t)\,A_1(z)\,dz = A\int_0^\infty \frac{e^{-z^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\,dz = \frac{2A\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du \qquad (\text{con } u = z/2\sqrt{t})$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = A$$

Para la segunda, sean $Q(t) = \int_0^\infty x(z,t) \overset{t}{*} G(z,t)\,dz$ y $J(z,t) = \int_0^t x(z,t-s)\,ds$.

Como $f(x,t) = f(x)$ entonces $Q(t) = \int_0^\infty G(z)\,J(z,t)\,dz$.

Para resolver $J(z,t)$, sea $r = t-s$.

$$\therefore J(z,t) = \int_0^t \frac{e^{-z^2/4(t-s)}}{\sqrt{\pi(t-s)}}\,ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-z^2/4r}}{\sqrt{r}}\,dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{1/t}^\infty u^{-3/2}e^{-z^2u/4}\,du \qquad (\text{con } u = 1/r)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-z^2u/4}\,du \qquad (\text{suponemos que } t\to\infty)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{z\,\Gamma(-1/2)}{2} \qquad \left(\int_0^\infty x^\nu e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+1}},\ a>0;\ \Gamma \text{ la función gamma}\right)$$

$$= -z \qquad (\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi})$$

$\therefore Q(t) = -\int_0^\infty z\,G(z)\,dz$, que no depende de t. Sea $Q = Q(t)$.

Ahora, por como está definida G, $\int_0^\infty z\,G(z)\,dz = \frac{1}{P}\int_0^\infty z\,\frac{df_1}{dz}(z)\,dz$.

Integrando por partes:

$$Q = -\left(\frac{1}{P}\lim_{x\to\infty}\left(x f_1(x) - 0\cdot f_1\right) - \frac{1}{P}\int_0^\infty f_1(z)\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{P}\int_0^\infty f_1(z)\,dz \qquad (\text{suponemos que } x f(x)\to 0 \text{ si } x\to\infty)$$

$$= \frac{1}{P\sqrt{D}}\int_0^\infty f(x)\,dx \qquad (\,\cdot\ \cdot\ z\sqrt{D})$$

$$\therefore Q = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

De estos dos resultados se obtiene:

$$B(t) = (A+Q) + \frac{1}{P\sqrt{\pi t}} * F(t). \qquad (11)$$

Hasta este punto tenemos expresada la temperatura en la superficie en términos de una convolución y el flujo. Si ahora suponemos que la temperatura en la superficie es una función periódica (escalonada), podremos expresar ese flujo como la suma de una función periódica y una función transiente. Lo que nos interesa es el valor de la primera.

Definamos primero:

$$V(t) = T(0,t) - A - G \qquad \forall t > 0.$$

Se sigue entonces que:

$$V(t) = \frac{1}{P\sqrt{\pi t}} * F(t)$$

y sacando transformada de Laplace,

$$\tilde{F}(s) = P\sqrt{s}\,\tilde{V}(s) \tag{11'}$$

Lo resolveremos primero para una función periódica particular y después lo generalizaremos para el caso que nos interesa.

3.2 Solución del flujo periódico para un caso particular.

Supongamos que $V(t)$ es de la siguiente forma:
existen $N \in \mathbb{N}$, $t_1 > 0$ y $V_0 \neq 0$ tales que, si $\tau = N t_1$, entonces $\forall n = 0,1,2,\dots$ se tiene:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \qquad t \in [n\tau, n\tau + t_1) \\ &= 0 \qquad t \in [n\tau + t_1, (n+1)\tau) \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{V}(s) = \frac{V_0\left(1 - e^{-st_1}\right)}{s\left(1 - e^{-s\tau}\right)}$$

y de (11') se sigue que:

$$\tilde{F}(s) = \frac{PV_0}{\sqrt{s}}\,\frac{\left(1 - e^{-st_1}\right)}{\left(1 - e^{-s\tau}\right)}. \tag{12}$$

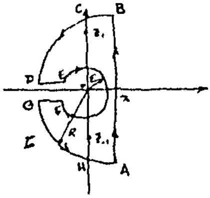
Sea $w(s) = \dfrac{1 - e^{-st_1}}{\sqrt{s}\left(1 - e^{-s\tau}\right)}$ y escojamos la rama principal del log: $-\pi \leq \arg s < \pi$.

Por la fórmula de Mellin para la inversa de la transformada de Laplace,

$$F(t) = \frac{PV_0}{2\pi i}\int_{x - i\infty}^{x + i\infty} \frac{\left(1 - e^{-st_1}\right) e^{st}}{\sqrt{s}\left(1 - e^{-s\tau}\right)}\,ds = \frac{PV_0}{2\pi i}\int_{x - i\infty}^{x + i\infty} e^{st}\, w(s)\, ds,$$

y como $w(s)$ tiene polos en $z_n = \dfrac{2n\pi i}{\tau}$ $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y punto rama en $z_0 = 0$, cualquier real positivo x puede servir de abscisa.

Consideremos el contorno $\mathcal{C}$ cerrado de la figura:



La función $w(s)$ es uni-valuada y analítica en el interior de $\mathcal{C}$ con excepción de $z_n = \frac{2n\pi i}{\tau}$ $\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}$.

Por el teorema del residuo, la integral a lo largo de $\mathcal{C}$ es igual a $2\pi i$ por la suma de los residuos en los polos, que podemos calcular explícitamente:

$$\text{si} \quad g(s) = (1-e^{-st_1})e^{st} \quad \text{y} \quad h(s) = \sqrt{s}\,(1-e^{-s\tau})$$

ambas funciones son analíticas en z_n $(n \neq 0)$, $g(z_n) \neq 0$, $h(z_n) = 0$ y $h'(z_n) = \sqrt{2n\pi\tau i} \neq 0$ $\forall n \neq 0$.

$\therefore$ los polos de $w(s)e^{st} = \frac{g(s)}{h(s)}$ son simples, y:

$$\mathrm{Res}\,(w(s)e^{st}, z_n) = \frac{g(z_n)}{h'(z_n)} = \frac{\left(1-e^{-\frac{2n\pi i t_1}{\tau}}\right)\left(e^{\frac{2n\pi i t}{\tau}}\right)}{\sqrt{2n\pi\tau i}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}.$$

lo cual $\forall n \neq 0$ es una función periódica de t de período τ. La solución del flujo periódico que buscamos, expresado como una serie de Fourier, corresponde a la suma de esos residuos. Para evitar esa suma (dado que su convergencia es muy lenta) utilizaremos el método propuesto por Jaeger:

Si llamamos a $F_P(t)$ ese flujo periódico, es decir:

$$F_P(t) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{PV_0}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} w(s)e^{st}ds, \qquad (\forall t>0)$$

entonces:

(1) como $w(s)$ tiende uniformemente a cero si $|z| \to \infty$ en $\pi/2 \leq \arg s < 3\pi/2$, se sigue por el lema de Jordan que la integral sobre CD y GH tiende a cero si $R \to \infty$.

(2) como e^{st} está acotada a lo largo de BC y HA y $w(s)$ tiende uniformemente a cero en esos arcos si $|s| \to \infty$, la integral sobre BC y HA también se anula si $R \to \infty$.

(3) En EF el integrando está acotado y la longitud de la trayectoria de integración converge a cero si $\varepsilon \to 0$ $\therefore$ esta integral también se anula si $\varepsilon \to 0$.

$\therefore$ las únicas contribuciones son a lo largo de AB, DE y FG. i.e:

$$F_P(t) = \frac{PV_0}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} w(s)e^{st}ds + \frac{PV_0}{2\pi i}\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left(\int_{DE} w(s)e^{st}ds + \int_{FG} w(s)e^{st}ds\right).$$

La primera integral corresponde a $F(t)$.
Para calcular las otras dos, parametrizamos DE por $\gamma_1(s) = se^{i\pi}$ donde s va de R a ε, y a FG por $\gamma_2(s) = se^{-i\pi}$ donde s va de ε a R.

$$\therefore \int_{\gamma_1} w(s)e^{st}ds = -\int_R^{\varepsilon} \frac{e^{-st}(1-e^{st_1})}{i\sqrt{s}\,(1-e^{s\tau})}ds = -i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-st}(1-e^{st_1})}{\sqrt{s}\,(1-e^{s\tau})}ds$$

$$\text{y} \quad \int_{\gamma_2} w(s)e^{st}ds = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-st}(1-e^{st_1})}{i\sqrt{s}\,(1-e^{s\tau})}ds = -i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-st}(1-e^{st_1})}{\sqrt{s}\,(1-e^{s\tau})}ds$$

$$\therefore F_P(t) = F(t) - \frac{PV_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-st}(1-e^{st_1})}{\sqrt{s}\,(1-e^{s\tau})}ds \qquad (\forall t>0) \tag{13}$$

es decir, el flujo es la suma de una función periódica y una transciente, de donde queda claro que para el modelo, bastará si consideramos al flujo como periódico. Queremos calcular ahora $F_P(t)$ $\forall t>0$ pero por ser periódica será suficiente hacerlo en $0<t<\tau$. Calculemos entonces $F(t)$ en ese intervalo:

Sea $h(t) = \frac{1}{V_0\sqrt{\pi t}} * V(t) \qquad \therefore \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{V}(s)}{V_0\sqrt{s}}$,

y de (12) se sigue que $\tilde{F}(s) = PV_0\, s\,\tilde{h}(s) = PV_0\,(s\tilde{h}(s) - h(0))$.

$\therefore F(t) = PV_0\, h'(t)$.

Ahora, si $0<t<t_1$, $h(t) = \frac{1}{V_0\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{V(s)ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$

y si $t_1<t<\tau$, $h(t) = \frac{1}{V_0\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{V(s)ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1} \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2\sqrt{t-t_1}}{\sqrt{\pi}}$

$$\begin{aligned} \therefore F(t) &= \frac{2PV_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) = \frac{PV_0}{\sqrt{\pi t}} \quad \text{si } 0<t<t_1 \\ &= \frac{2PV_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}-\sqrt{t-t_1}\right) = \frac{PV_0}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t-t_1}}\right) \quad \text{si } t_1<t<\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

Este valor de $F(t)$ nos permite calcular el de $F_p(t)$ por (13), para $t\in[0,\tau)$ excepto en $t=0$ y $t=t_1$, donde hay discontinuidad. Calculemos entonces su promedio para cada intervalo:

sea $\hat{F}_n = \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} F(t)\,dt \qquad (\forall\, n\in\{1,2,\dots,N\}.)$.

$$\therefore\quad \hat{F}_1 = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{PV_0}{\sqrt{\pi t}}\,dt = \frac{2PV_0\sqrt{t_1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2PV_0\sqrt{N}}{\sqrt{\pi\tau}}$$

y si $n=2,3,\dots,N$:

$$\hat{F}_n = \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{PV_0}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t-t_1}}\right)dt \qquad (15)$$

$$= \frac{2PV_0}{\sqrt{\pi}\,t_1}\left(\sqrt{t_n}-\sqrt{t_n-t_1}-\sqrt{t_{n-1}}+\sqrt{t_{n-1}-t_1}\right)$$

$$= \frac{2PV_0}{\sqrt{\pi}\,t_1}\left(\sqrt{nt_1}-\sqrt{nt_1-t_1}-\sqrt{(n-1)t_1}+\sqrt{(n-1)t_1-t_1}\right)$$

$$= \frac{2PV_0\sqrt{N}}{\sqrt{\pi\tau}}\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}\right)$$

Calculemos ahora el promedio en cada intervalo de la parte transiente de (13):

sea $F_T(t) = \frac{PV_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-st}(1-e^{st_1})}{\sqrt{s}\,(1-e^{s\tau})}\,ds \qquad \forall\, t>0.$

y $\hat{F}_T(n) = \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} F_T(t)\,dt \qquad (n\in\{1,2,\dots,N\})$.

como: $\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st}\,dt = \frac{e^{-snt_1}(e^{st_1}-1)}{s}$, se tiene entonces:

$$\hat{F}_T(n) = \frac{PV_0}{\pi t_1}\int_0^\infty \frac{e^{-snt_1}(e^{st_1}-1)(1-e^{st_1})}{s^{3/2}(1-e^{s\tau})}\,ds \qquad (n=1,2,\dots,N)$$

$$= \frac{PV_0}{\pi t_1}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2 n/N}(e^{\xi^2/N}-1)(1-e^{\xi^2/N})}{\frac{\xi^3}{(Nt_1)^{3/2}}\,(1-e^{\xi^2})}\,\frac{2\xi}{Nt_1}\,d\xi \qquad (\text{haciendo } \xi^2 = sNt_1)$$

$$= \frac{2PV_0\sqrt{Nt_1}}{\pi t_1}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2 n/N}(e^{\xi^2/N}-1)(1-e^{\xi^2/N})\,d\xi}{\xi^2(1-e^{\xi^2})}$$

ahora,

$$\frac{1-e^{\xi^2/N}}{1-e^{\xi^2}} = \frac{e^{\xi^2/N}-1}{e^{\xi^2}\left(1-\frac{1}{e^{\xi^2}}\right)} = \frac{e^{-\xi^2}\left(e^{\xi^2/N}-1\right)}{1-e^{-\xi^2}} = \frac{e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}}{1-e^{-\xi^2}}$$

y $\quad e^{-\xi^2 n/N}\left(e^{\xi^2/N}-1\right) = e^{-\xi^2(n-1)/N}\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)$

$$\therefore \quad \hat{F}_T(n) = \frac{2\rho V_0\sqrt{N}}{\pi\sqrt{t_1}}\int_0^\infty \frac{e^{-(n-1)\xi^2/N}\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}\right)}{\xi^2\left(1-e^{-\xi^2}\right)}\,d\xi \qquad (16)$$

Entonces, las expresiones en (15) y (16) corresponden al flujo promedio y al flujo transiente promedio. De (13) se sigue que, definiendo análogamente el flujo periódico promedio, llegamos a:

$$\hat{F}_P(n) = \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} F_P(t)\,dt = \hat{F}_n - \hat{F}_T(n) \qquad n=1,2,\dots,N.$$

y si definimos:

$$\varphi_1 = 2\sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}\right)}{\xi^2\left(1-e^{-\xi^2}\right)}\,d\xi$$

y para $n=2,3,\dots,N$:

$$\varphi_n = 2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-2}-2\sqrt{n-1}\right)\sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-(n-1)\xi^2/N}\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}\right)}{\xi^2\left(1-e^{-\xi^2}\right)}\,d\xi$$

entonces:

$$\hat{F}_P(n) = \frac{PV_0}{\sqrt{\pi\tau}}\cdot\varphi_n \qquad (n=1,2,\dots,N)$$

3.3 <u>Solución del flujo periódico: caso general.</u>

Supongamos ahora que $V(t)$ está dada por:

$$V(t) = V_n \qquad k\tau+t_n \le t < k\tau+t_{n+1} \quad \forall k=0,1,2,\dots$$

donde $t_n = n t_1$ $(n=0,1,\dots,N)$, $t_1>0$ y $t_N=\tau$.

$\therefore$ la transformada de Laplace de $V(t)$ está dada por:

$$\tilde{V}(s) = \frac{\left(1-e^{-st_1}\right)}{s\left(1-e^{-s\tau}\right)}\sum_{k=0}^{N-1} V_k e^{-st_k}, \quad \text{y por (11'):}$$

$$\tilde{F}(s) = \frac{P(1-e^{-st_1})}{\sqrt{s}\,(1-e^{-s\tau})} \sum_{k=0}^{N-1} V_k e^{-st_k}.$$

Ahora, el comportamiento de la transformada de Laplace en una traslación es:

$$\mathcal{L}(F(t-a)) = e^{-as}\tilde{F}(s) \quad \text{donde } F(t)=0 \text{ si } t<0\ ;\ a>0.$$

$\therefore$ si $\Psi(t)$ es la antitransformada de: $\dfrac{P(1-e^{-st_1})}{\sqrt{s}\,(1-e^{-s\tau})}$, se sigue, por ser la transformada un operador lineal, que:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} V_k \Psi(t-t_k) \qquad \text{si } t_{n-1} \le t < t_n \qquad (n=1,2,\dots,N)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} V_k \Psi(t-t_k) \qquad \text{si } t \ge \tau.$$

Ahora, $\Psi(t)$ coincide con la función $F(t)$ del caso anterior con $V_0=1$ (ver (12)) y por lo tanto:

$$\Psi(t) = \Psi_p(t) + \Psi_T(t) \quad \forall\, t>0 \quad \text{con } \Psi_p(t) \text{ periódica de período } \tau \quad (\text{ver } (13)).$$

$\therefore$ $\forall t \ge \tau$, la parte periódica del flujo está dada por:

$$F_p(t) = \sum_{k=0}^{N-1} V_k \Psi_p(t-t_k)$$

y por ser periódica, $\forall\, t<\tau \quad F_p(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} V_k \Psi_p(\tau+t-t_k)$

lo cual es equivalente a:

$$F_p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} V_k \Psi_p(t-t_k) + \sum_{k=n}^{N-1} V_k \Psi_p(\tau+t-t_k) \qquad \text{si } t_{n-1} \le t < t_n \quad (n=1,2,\dots,N).$$

$\therefore$ si como en el caso anterior hacemos:

$$\hat{\Psi}_n = \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \Psi(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \hat{\Psi}_T(n) = \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \Psi_T(t)\,dt, \text{ entonces:}$$

$$\hat{F}_p(n) := \frac{1}{t_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} F_p(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} V_k\left(\hat{\Psi}_{n-k} - \hat{\Psi}_T(n-k)\right) + \sum_{k=n}^{N-1} V_k\left(\hat{\Psi}_{N+n-k} - \hat{\Psi}_T(N+n-k)\right).$$

Las funciones $\hat{\Psi}_n$ y $\hat{\Psi}_T(n)$ están dadas por (15) y (16) y por como están definidas $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$, se llega finalmente a:

$$\hat{F}_p(n) = \frac{P}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \varphi_{n-k} + \frac{P}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{k=n}^{N-1} V_k \varphi_{N+n-k} \qquad \forall\, n=1,2,\dots,N. \qquad (17)$$

4. EL MODELO.

Para el flujo periódico $F_P(t)$ que derivamos en la sección anterior, Watson utiliza la siguiente expresión:

$$F_P(t) = S_0(1-a)(1-cl)\,\Psi(t) + Q - \varepsilon\sigma V^4(t) + CR(t) \qquad (t>0) \qquad (17')$$

donde:

- S_0 : constante solar. (1387 watt/m²)
- a : albedo terrestre. $(0 \le a \le 1)$
- cl : factor de cobertura nubosa. $(0 \le cl \le 1)$
- $\Psi(t)$: flujo solar de onda corta.
- Q : flujo geotérmico constante. (watt/m²)
- ε : emisividad promediada de la tierra.
- σ : constante de Stephan-Boltzmann. ((5.6688) 10^{-8} watt/m²·K⁴)
- $V(t)$: temperatura en la superficie.
- $CR(t)$: flujo absorbido de onda larga.

Si hacemos $R(t)$: radiación incidente absorbida (flujo solar de onda corta y atmosférico de onda larga) más flujo geotérmico, se tiene:

$$F_P(t) + \varepsilon\sigma V^4(t) - R(t) = 0 \qquad (t>0)$$

Ahora, en la siguiente sección se probará que $\sum_1^N q_n = 0$, por lo que, despejando el valor de $V(t)$ en (17) con respecto a la temperatura en la superficie, $B(t)$, y las constantes A y b de la ecuación (11) se llega a la misma expresión de (17) con B_k en vez de V_k. Consideraremos entonces, como en (17') que $V(t)$ es la temperatura en la superficie. Combinando las dos expresiones para el flujo, se obtiene:

$$\frac{P}{\sqrt{\pi\tau}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} V_k q_{n-k} + \sum_{k=n}^{N-1} V_k q_{N+n-k}\right) + \varepsilon\sigma V_{n-1}^4 - R_{n-1} = 0 \qquad (n=1,2,\dots,N) \qquad (18)$$

que es la ecuación que analizaremos.

3 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Antes de explicar el desarrollo del capítulo por conveniencia cambiaremos la notación de (17) y (18) y, para poder manipular más fácilmente la ecuación que derivamos en la sección anterior, definiremos nuevas variables que simplifican la expresión.

Si hacemos en (17) $\varphi_n := \varphi_{n+1}$ y $F_p(n) = F_p(n+1)$ $(n = 0, 1, \dots, N-1)$ se ve:

$$\varphi_0 = 2\sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N} - e^{-\xi^2}\right)}{\xi^2\left(1 - e^{-\xi^2}\right)} d\xi ,$$

y para $n = 1, \dots, N-1$:

$$\varphi_n = 2\sqrt{N}\left(\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) - \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-n\xi^2/N}\left(1 - e^{-\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N} - e^{-\xi^2}\right)}{\xi^2\left(1 - e^{-\xi^2}\right)} d\xi$$

y, para $n = 0, 1, \dots, N-1$:

$$(\varphi * V)_n = \sum_{k=0}^{n} V_k \varphi_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N-1} V_k \varphi_{N+n-k} ,$$

entonces (17) corresponde a:

$$\hat{F}_p(n) = \frac{P}{\sqrt{\pi\tau}} (\varphi * V)_n \qquad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

En (18) hagamos:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} R_n}{N} , \qquad V^* = \left(\frac{\overline{R}}{\varepsilon\sigma}\right)^{1/4} , \qquad u = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{P}$$

$$v_n = \frac{V_n}{V^*} , \qquad r_n = \frac{R_n}{\overline{R}} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{\pi\tau}}{P} (V^*)^3$$

(α es adimensional y no negativo).

Entonces, $\forall\, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ se tiene:

$$\frac{P}{\sqrt{\pi\tau}}\,(q*V)_n + \varepsilon\sigma V_n^4 - R_n = 0$$

$$\therefore\ (q*V)_n + \varepsilon\sigma u V_n^4 - u R_n = 0$$

$$\therefore\ V^*\,(q*v)_n + \varepsilon\sigma u v_n^4\,(V^*)^4 - u r_n \bar{R} = 0$$

$$\therefore\ (q*v)_n + \kappa v_n^4 - \frac{u r_n (V^*)^3 \bar{R}}{(V^*)^4} = 0$$

$$\therefore\ (q*v)_n + \alpha v_n^4 - \alpha r_n = 0$$

y, expresado matricialmente, estas N ecuaciones equivalen a:

$$\Phi \cdot v + \alpha v^4 = \alpha r,$$

donde:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{N-1} & \cdots & \varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots & \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{N-1} & \varphi_{N-2} & \cdots & \varphi_0 \end{pmatrix} \text{ (toeplitz-circular)}, \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}, \quad v^4 = \begin{pmatrix} v_0^4 \\ v_1^4 \\ \vdots \\ v_{N-1}^4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad r = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Ahora, como se mencionó en la introducción, nos interesa estudiar propiedades de la función:

$$T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{dada por:} \quad T(x) = \Phi \cdot x + \alpha x^4 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

que ayuden a encontrar la relación que existe entre una diferencia de temperaturas (i.e. la diferencia entre dos componentes del vector v) y distintos valores de α y el promedio de imágenes de la función. En este capítulo hablaremos de dos propiedades de $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N-1}$ que usaremos frecuentemente y se probará que T restringida a $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, N\}\}$ es inyectiva. Nos interesa estudiar $T|_\Omega$ ya que bajo esta función el vector $(x_1, \dots, x_N)$ representa la temperatura (grados Kelvin). En la segunda parte se estudia $T(\Omega)$. Caracterizar este conjunto permitiría saber si un conjunto dado de valores corresponde a un punto en la imagen de T y, por lo tanto, a un valor de la forma αr que a su vez representa, como queda claro por la definición de α y r, a una función que depende del flujo geotérmico. El estudio llevó a dar una condición necesaria y una condición suficiente para que, dado un punto en $\mathbb{R}^N_+$ esté en $T(\Omega)$. En la tercera parte se da una condición suficiente para que, dado $f = (f_1, \dots, f_N) \in T(\Omega)$, f_i sea máximo. Por último, en la cuarta parte, se presentan los resultados para casos particulares de, fijando $f \in T(\Omega)$, expresar la diferencia de temperatura máxima y temperatura mínima como función de α.

comencemos con las dos propiedades de $\{\varphi_i\}_0^{N-1}$ que usaremos constantemente.

<u>Lema 1</u>: $\forall N\in\mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N-1}\varphi_n = 0.$

<u>dem</u>:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_n = 2\sqrt{N}\left(1+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\right)\right) - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-n\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}\right)}{\left(1-e^{-\xi^2}\right)\xi^2}\,d\xi$$

$$= 2\sqrt{N}\left(\sqrt{N}-\sqrt{N-1}\right) - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}}{\xi^2}\,d\xi$$

$$= 2\sqrt{N}\left(\sqrt{N}-\sqrt{N-1}\right) - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k-1/2\right)}{k!\,N^k}\right)$$

$$= 2N - 2\sqrt{N(N-1)} - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\left(1-\sqrt{\frac{N-1}{N}}\right)\right)$$

$$= 2N - 2\sqrt{N(N-1)} - 2N + 2\sqrt{N(N-1)} = 0.$$

<u>Lema 2</u>: Si $N\in\mathbb{N}$, entonces $\varphi_0>0 \wedge \forall n\in\{1,2,\dots,N-2\}\ \varphi_n<\varphi_{n+1}<0.$

<u>dem</u>:

sea $n\in\{1,2,\dots,N-2\}$.

$$\therefore\ \varphi_{n+1}-\varphi_n = 2\sqrt{N}\left(3\sqrt{n}-3\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right) + \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-n\xi^2/N}\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)g(\xi)\,d\xi$$

donde $$g(\xi) = \frac{\left(1-e^{-\xi^2/N}\right)\left(e^{-(N-1)\xi^2/N}-e^{-\xi^2}\right)}{\xi^2\left(1-e^{-\xi^2}\right)} \geq 0 \quad \forall\xi\geq 0.$$

Como el integrando es positivo y como $n\geq 1 \Rightarrow 3\sqrt{n}+\sqrt{n+2} > 3\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ se sigue que: $\varphi_{n+1}-\varphi_n>0$.

Ahora, $$\varphi_{N-1} = 2\sqrt{N}\left(\sqrt{N-2}-2\sqrt{N-1}+\sqrt{N}\right) - \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(N-1)\xi^2/N}g(\xi)\,d\xi\ ;$$

como $\sqrt{N(N-2)}<N-1$ entonces $(N-2)+2\sqrt{N(N-2)}+N<4(N-1)$ y $\therefore \sqrt{N-2}+\sqrt{N}<2\sqrt{N-1}$

$\therefore\ \varphi_{N-1}<0$ y por lo anterior se sigue que $\varphi_n<\varphi_{n+1}<0 \quad \forall n=1,2,\dots,N-2.$

Por último, por el lema 1 y por esta desigualdad, $\sum_{n=1}^{N-1} q_n = -q_0 < 0$ y $\therefore q_0 > 0$.

Ahora, dada una serie de valores, $f_1, \dots, f_N$ que involucran el flujo geotérmico, resulta importante saber si provienen o no de una única distribución de temperaturas. La siguiente proposición prueba que efectivamente es única la distribución.

<u>Proposición 1</u>: $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es 1-1.

<u>dem</u>:

Llamemos a $T_1, \dots, T_N$ las componentes de T, i.e. $\forall x \in \Omega$ $T(x) = (T_1(x), \dots, T_N(x))$, y sea $I = \{1, 2, \dots, N\}$.

$\therefore$ por como está definida T, $\forall\ x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ se tiene:

$$T_i(x_1, \dots, x_N) = \alpha x_i^4 + \sum_{n=1}^{i} q_{i-n} x_n + \sum_{n=i+1}^{N} q_{N+i-n} x_n \qquad \forall i \in I.$$

Sean $x = (x_1, \dots, x_N)$ a $y = (y_1, \dots, y_N) \in \Omega$ y supongamos que $T(x) = T(y)$.

Probaremos que esto implica que $x_1 = y_1$. La demostración para $x_i = y_i$ con $i \in \{2, \dots, N\}$ es completamente análoga.

Supongamos que $x_1 \neq y_1$.

Consideremos primero que $x_1 < y_1$.

Sea $J = \{i \in I \mid x_i \geq y_i\}$.

Si $J = \emptyset$, es decir, $\forall i \in I$ $x_i < y_i$ entonces, por un lado: $\sum_{i=2}^{N} (x_i^4 - y_i^4) < 0$.

Por otro, como $x_1 < y_1$, $y_1^4 - x_1^4 > 0$. Pero, como $T(x) = T(y)$, sabemos que $\sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} y_i^4$ lo cual implica que $\sum_{i=2}^{N} (x_i^4 - y_i^4) = y_1^4 - x_1^4$. De la contradicción se sigue que $J \neq \emptyset$. Veremos que esto también nos lleva a una contradicción.

Sea $J = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ con $i_j \leq i_k$ si $j \leq k$.

Ahora, como $T(x) = T(y)$ entonces $\sum_{i \in J} (T_i(x) - T_i(y)) = 0$

$$\therefore \sum_{i \in J} \left(\alpha (x_i^4 - y_i^4) + \sum_{n=1}^{i} q_{i-n} (x_n - y_n) + \sum_{n=i+1}^{N} q_{N+i-n} (x_n - y_n) \right) = 0.$$

$$\therefore \Big(\sum_{i\in J} q_{i-1}\Big)(y_1 - x_1) = \alpha \sum_{i\in J}(x_i^4 - y_i^4) + \sum_{i\in J}\Big(\sum_{n=2}^{i} q_{i-n}(x_n - y_n) + \sum_{n=i+1}^{N} q_{N+i-n}(x_n - y_n)\Big).$$

ahora, el lado izquierdo de la igualdad es negativo, ya que, como $1\notin J$, $q_{i-1}\neq q_0$ $\forall i\in J$ y $\therefore$ $\sum_{i\in J} q_{i-1} < 0$. Además $x_1 < y_1$ y se sigue entonces que $\big(\sum_J q_{i-1}\big)(y_1 - x_1) < 0$.

Veremos que el otro lado de la igualdad es ≥ 0.

En efecto:

$$\forall i\in J \quad x_i^4 - y_i^4 \geq 0 \qquad \wedge \ \therefore \ \alpha \sum_{i\in J}(x_i^4 - y_i^4) \geq 0.$$

Por otro lado:

$$\sum_{i\in J}\Big(\sum_{n=2}^{i} q_{i-n}(x_n - y_n) + \sum_{n=i+1}^{N} q_{N+i-n}(x_n - y_n)\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{i\in J}\Big[q_0(x_i - y_i) + \sum_{\substack{n=2\\ n\in J}}^{i-1} q_{i-n}(x_n - y_n) + \sum_{\substack{n=i+1\\ n\in J}}^{N} q_{N+i-n}(x_n - y_n)\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big[q_0(x_{i_k} - y_{i_k}) + \sum_{n\in\{i_1,\dots,i_{k-1}\}} q_{i_k-n}(x_n - y_n) + \sum_{n\in\{i_{k+1},\dots,i_m\}} q_{N+i_k-n}(x_n - y_n)\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(q_0 + \sum_{k=1}^{j-1} q_{N+i_k-i_j} + \sum_{k=j+1}^{m} q_{i_k-i_j}\Big)(x_{i_j} - y_{i_j}) \geq 0$$

ya que, $\forall j\in\{1,\dots,m\}$:

$$x_{i_j} - y_{i_j} \geq 0 \quad \wedge \quad q_0 + \sum_{k=1}^{j-1} q_{N+i_k-i_j} + \sum_{k=j+1}^{m} q_{i_k-i_j} > 0.$$

De la contradicción se sigue entonces que $x_1 > y_1$ y, para este caso, de manera análoga, se llega a una contradicción (basta invertir cada desigualdad). $\therefore x_1 = y_1$.

Análogamente $x_i = y_i$ $\forall i\in I$ $\wedge$ $\therefore x = y$. $\therefore$ T es inyectiva en Ω.

2. ANÁLISIS DE $T(\Omega)$.

Queremos estudiar $T(\Omega) = \{f = T(x) \mid x \in \Omega\}$.

Ω está dado por $\{x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geq 0 \ \forall i = 1,\dots,N\}$

y $\forall (x_1,\dots,x_N) \in \Omega$,

$$T(x_1,\dots,x_N) = \begin{pmatrix} q_0 & q_{N-1} & \cdots & q_1 \\ q_1 & q_0 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{N-1} & q_{N-2} & \cdots & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ \vdots \\ x_N^4 \end{pmatrix}.$$

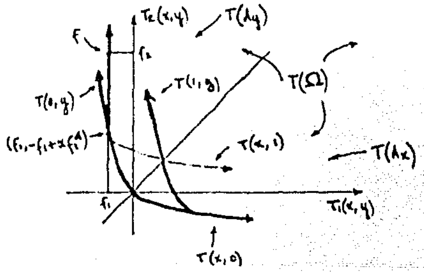
Por las propiedades de $\{q_i\}_{i=0}^{N-1}$ que vimos en la sección anterior supondremos en el desarrollo que sigue, sin pérdida de generalidad, que $q_0 = 1$ y $\therefore \sum_{i=1}^{N-1} q_i = -1$.

Comenzamos con $N=2$.

Para este caso, $T(\Omega) = \{(\alpha x^4 + x - y,\ \alpha y^4 + y - x) \mid x, y \geq 0\}$.

Por simplicidad, dividimos Ω en $A_y = \{(x,y) \in \Omega \mid x \leq y\} \cup A_x = \{(x,y) \in \Omega \mid y \leq x\}$, de manera que $T(\Omega) = T(A_y) \cup T(A_x)$.

Ahora, la frontera de $T(A_y)$ está dada por $\{T(0,y) \mid y \geq 0\} \cup \{T(y,y) \mid y \geq 0\}$ es decir, $\{(-y, \alpha y^4 + y) \mid y \geq 0\} \cup \{(y,y) \mid y \geq 0\}$ y por lo tanto, geométricamente es claro que, dado $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2$, $f \in T(A_y) \Leftrightarrow$ si $f_1 \geq 0$ entonces $f_2 \geq f_1$ y si $f_1 \leq 0$ entonces $f_2 \geq -f_1 + \alpha f_1^4$. Análogamente $f \in T(A_x) \Leftrightarrow$ si $f_2 \geq 0$ entonces $f_1 \geq f_2$ y, si $f_2 \leq 0$ entonces $f_1 \geq -f_2 + \alpha f_2^4$.



Probemos este resultado.

Proposición 2: Sea $f=(f_1,f_2)\in\mathbb{R}^2$. Si $f_i \le f_j \wedge a=\max\{0,-f_i\}$ entonces $f\in T(\Omega) \Leftrightarrow f_j \geq a+\alpha a^4$.

Dem:

Por la especial clase de simetría de T supondremos sin pérdida de generalidad que $f_1 \le f_2$.

$\Rightarrow$) Supongamos $f\in T(\Omega)$.

(i) Si $f_1 \geq 0$ entonces $a=0 \wedge f_2 \geq f_1 \geq 0$.

(ii) Si $f_1<0$ entonces $a=-f_1$. Como $f\in T(\Omega)$ $\exists\, x,y\geq 0 \ni f_1=x-y+\alpha x^4 \wedge f_2=y-x+\alpha y^4$.

$\therefore\ y-a = y+f_1 = x+\alpha x^4 \geq 0 \quad \therefore\ y\geq a>0 \quad \therefore\ y^4 \geq a^4$

$\therefore\ \alpha y^4+\alpha x^4-x+y \geq \alpha y^4-x+y \geq \alpha a^4-x+y$

$\therefore\ f_2 = \alpha y^4+y-x \geq \alpha a^4-x+y-\alpha x^4 = a+\alpha a^4$.

$\Leftarrow$) (i) Si $a=0$ entonces $f_1\geq 0$

Si $f_1=f_2$ sea $x\geq 0 \ni \alpha x^4=f_1 \wedge$ sea $y=x \quad \therefore\ T(x,y)=(\alpha x^4,\alpha y^4)=(f_1,f_2)$

Si $f_1<f_2$, sea $A=\{x>0 \mid \alpha x^4>f_1\}$ y definimos $g: A\longrightarrow\mathbb{R}$ como:

$$g(x)=\alpha x^4-f_1+\alpha(\alpha x^4+x-f_1)^4 \qquad \forall x\in A. \tag{1}$$

Ahora, g es continua y estrictamente creciente ya que, si $x\in A$ se tiene:

$$\alpha x^4+x-f_1 > \alpha x^4-f_1>0 \tag{2}$$

$\wedge\ \therefore\ g'(x)=4\alpha x^3+4\alpha(\alpha x^4+x-f_1)^3(4\alpha x^3+1)>0 \quad \forall x\in A$.

y como $f_1=\inf\{g(x)\mid x\in A\} \wedge f_2>f_1$, $\exists!\, x\in A \ni g(x)=f_2$.

Sea $y=\alpha x^4+x-f_1$. Por (2) $(x,y)\in\Omega \wedge T(x,y)=(f_1,g(x))=(f_1,f_2)$

(ii) Si $a\neq 0$ entonces $f_1\le 0 \wedge f_2\geq \alpha f_1^4-f_1$.

Si $f_2=\alpha f_1^4-f_1$ entonces, si $x=0 \wedge y=-f_1$ $(x,y)\in\Omega \wedge T(x,y)=(f_1,f_2)$.

Si $f_2>\alpha f_1^4-f_1$, sea $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\} \wedge g: B\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como en (1) $\forall x\in B$.

Ahora, g es continua y, como $(x>0 \wedge f_1\le 0)\Rightarrow \alpha x^4+x-f_1>0$, g es estrictamente creciente; como $f_2>\alpha f_1^4-f_1=\inf\{g(x)\mid x\in B\}$ se sigue que $\exists!\, x\in B$ tal que $g(x)=f_2$. Haciendo $y=\alpha x^4+x-f_1$, $(x,y)\in\Omega \wedge$ se satisface:

$T(x,y)=(f_1,g(x))=(f_1,f_2)$.

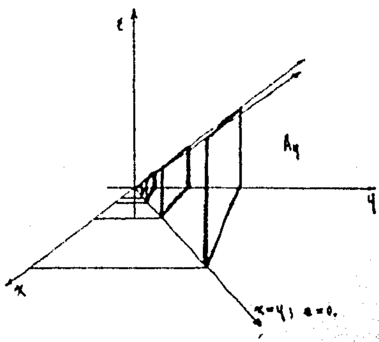
La demostración que acabamos de hacer se basa en encontrar preimágenes de rectas: si $f_1 < f_2$, la preimagen de la recta $\{(f_1, y) \mid y \geq -f_1 + \alpha f_1^4\}$ y, si $f_2 < f_1$, la preimagen de $\{(x, f_2) \mid x \geq -f_2 + \alpha f_2^4\}$. Aunque geométricamente puede ser muy natural analizar de esta manera $T(\Omega)$ y para $N=2$ resulta bastante sencillo, para $N=3$ no y, de hecho, generalizar el resultado llevaría a expresiones totalmente inmanejables. Nos servirá, como veremos después, para dar una condición suficiente pero daremos en lo que sigue una idea de lo que sucede para $N=3$. Se verá entonces lo complejo de la función y cómo, en lugar de una curva tan simple como $\{(-y, y+\alpha y^4) \mid y \geq 0\}$ que determina la frontera del conjunto, tendremos, por ejemplo, la superficie $\{(x+q_2y+\alpha x^4, q_1x+y+\alpha y^4, q_2x+q_1y) \mid x, y \geq 0\}$. La construcción está basada en las desigualdades $q_1 < q_2 < 0$ y en $q_1+q_2=-1$.

Para $N=3$ la función está dada por:

$$T(x,y,z) = (x + q_2y + q_1z + \alpha x^4,\ q_1x + y + q_2z + \alpha y^4,\ q_2x + q_1y + z + \alpha z^4)$$

$$\text{y} \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}.$$

Dividimos Ω en $A_x \cup A_y \cup A_z$ donde $A_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y, z \leq x\}$, $A_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, z \leq y\}$ y $A_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y \leq z\}$ y veamos la imagen de, por ejemplo, A_y.



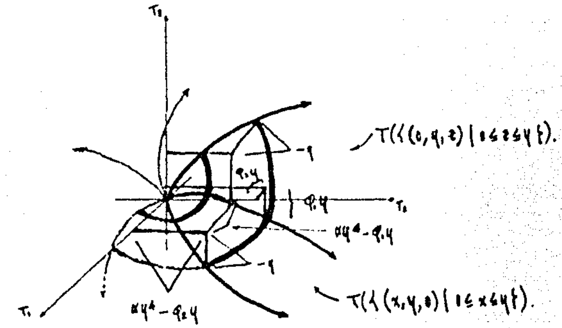
Cuando $z=0$ la imagen está dada por:

$$T(A_y \cap \{(x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}) = \{(x + q_2y + \alpha x^4,\ q_1x + y + \alpha y^4,\ q_2x + q_1y) \mid 0 \leq x \leq y\}$$

y si $x=0$ la imagen está dada por:

$$T(A_y \cap \{(0,y,z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}) = \{(q_2y + q_1z,\ y + q_2z + \alpha y^4,\ q_1y + z + \alpha z^4) \mid 0 \leq z \leq y\}$$

Si graficamos estos conjuntos obtenemos una figura de este tipo:



Si razonamos como en el caso $N=2$ tendremos la siguiente caracterización:

Para en particular $T(A_y)$ tenemos que dividir en los siguientes casos:

(i) Dado $f_3 < 0 \ \wedge \ \frac{q_2}{q_1} f_3 \le f_1 \le \kappa f_3^4 + q_1 f_3$ tenemos:

$$f \in T(\Omega) \Leftrightarrow \text{si } f_1 = \alpha x^4 + x + q_2 y \ \wedge \ f_3 = q_2 x + q_1 y \text{ entonces } f_2 \ge \kappa y^4 + y + q_1 x.$$

(ii) Dado $f_1 < 0 \ \wedge \ \frac{q_1}{q_2} f_1 \le f_3 \le \kappa f_1^4 + q_2 f_1$ tenemos:

$$f \in T(\Omega) \Leftrightarrow \text{si } f_1 = q_1 z + q_2 y \ \wedge \ f_3 = \kappa z^4 + z + q_1 y \text{ entonces } f_2 \ge \kappa y^4 + y + q_2 z.$$

Análogamente para $T(A_x)$ y $T(A_z)$ y, finalmente, el caso $f_1, f_2, f_3 \ge 0$.

Este resultado caracteriza $T(\Omega)$ para $N=3$ y se podría proceder de manera análoga para N en general, pero con solo imaginar el resultado para una dimensión más, resulta preferible tomar otro camino... Regresemos al caso $N=2$.

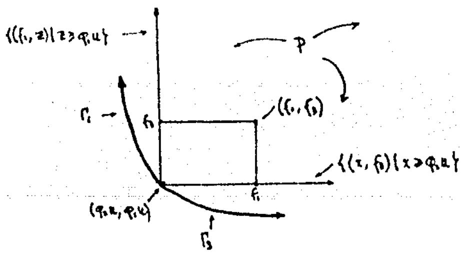
Supongamos otra vez $f_1 \le f_2$. Si ahora en lugar de, dado $f_1 \in \mathbb{R}$, nos fijamos en la ordenada y_0 del punto de la frontera con abscisa f_1 y pedimos que $f_2 \ge y_0$, procedemos de manera inversa, o sea, dado $f_2 \ge 0$ vemos la abscisa x_0 del punto de la curva $\{T(1,y) \mid y \ge 0\}$ con ordenada f_2 y pedimos que $f_1 \ge x_0$, se obtiene lo siguiente:

Estamos pidiendo que $\{(-y, y + \alpha y^4) \mid y \ge 0\}$ intersecte a (f_1, f_2) recorriéndola positivamente paralela al eje de las abscisas, es decir:

si $f_1 \le f_2$ entonces $(f_1, f_2) \in T(\Omega) \Leftrightarrow \exists\, y \ge 0$ y $f_2 = y + \alpha y^4 \wedge f_1 \ge -y$.
Análogamente, si $f_2 \le f_1$, $(f_1, f_2) \in T(\Omega) \Leftrightarrow \exists\, x \ge 0$ y $f_1 = x + \alpha x^4 \wedge f_2 \ge -x$.

Ahora, esto claramente es equivalente a pedir que, si $f_i \le f_j \wedge a = \max\{0, -f_i\}$ entonces la función real $F : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = f_j - \alpha x^4$ tenga un punto fijo. Ahora, como $F(x)$ sólo toma valores para $x \ge a \ge 0$, $F'(x) - 1$ es estrictamente decreciente y $\therefore F$ tiene un punto fijo si y sólo si $f_j \ge a + \alpha a^4$.
Este es el mismo resultado que obtuvimos en la proposición 2. Veamos qué sucede con $N=3$.
Supongamos que $f_2 \ge 0$, $\exists\, u \ge 0$ y $f_2 = u + \alpha u^4$, $f_1 \ge q_2 u \wedge f_3 \ge q_1 u$.
Sea $P = \{(x, f_2, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \cap T(\Omega)$ la intersección del plano $y = f_2$ con $T(\Omega)$.
Por lo tanto $P = \{(x + q_2 y + q_1 z + \alpha x^4,\ f_2,\ q_2 x + q_1 y + z + \alpha z^4) \mid q_1 x + y + q_2 z + \alpha y^4 = f_2 \wedge x, y, z \ge 0\}$
y la frontera de P, $\partial P = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ donde:

$$\Gamma_1 = \{(q_2 y + q_1 z,\ f_2,\ q_1 y + z + \alpha z^4) \mid y + q_2 z + \alpha y^4 = f_2 \wedge y, z \ge 0\}$$
$$\Gamma_3 = \{(x + q_2 y + \alpha x^4,\ f_2,\ q_2 x + q_1 y) \mid q_1 x + y + \alpha y^4 = f_2 \wedge x, y \ge 0\}.$$



Ahora, dado cualquier punto $(q_2 y + q_1 z, f_2, q_1 y + z + \alpha z^4) \in \Gamma_1$, como $u + \alpha u^4 = f_2 \le y + \alpha y^4$ se sigue que $f_1 \ge q_2 u \ge q_2 y \ge q_2 y + q_1 z$ y, dado $(x + q_2 y + \alpha x^4, f_2, q_2 x + q_1 y) \in \Gamma_3$, como $u + \alpha u^4 = f_2 =$ $= q_1 x + y + \alpha y^4 \le y + \alpha y^4$ se sigue que $f_3 \ge q_2 x + q_1 y$.
$\therefore$ las rectas $\{(x, f_2, f_3) \mid x \ge q_2 u\}$ $\wedge$ $\{(f_1, f_2, z) \mid z \ge q_1 u\}$ están contenidas en P.
$\therefore$ $(f_1, f_2, f_3) \in P \subset T(\Omega)$.

Es claro que esta condición equivale a pedir que exista $u \geq 0, f_1/q_2, f_3/q_1$ tal que $u = f_2 - \alpha u^4$, es decir, que la función $F(u) = f_2 - \alpha u^4$ definida en $[a, \infty)$ con $a = \max\{0, f_1/q_2, f_3/q_1\}$ tenga un punto fijo, lo cual, como se vio, se satisface si y sólo si $f_2 \geq a + \alpha a^4$.

Si procedemos análogamente para los otros dos casos:

(i) $f_1 = u + \alpha u^4$, $f_2 \geq q_1 u$, $f_3 \geq q_2 u$;

(ii) $f_3 = u + \alpha u^4$, $f_1 \geq q_1 u$, $f_2 \geq q_2 u$,

se tiene la siguiente condición:

Sea $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$ y sean $a_1 = \max\{0, f_2/q_1, f_3/q_2\}$, $a_2 = \max\{0, f_1/q_2, f_3/q_1\}$ y $a_3 = \max\{0, f_1/q_1, f_2/q_2\}$.

Si existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $f_i \geq a_i + \alpha a_i^4$ entonces $f \in T(\Omega)$.

Generalizando.

Proposición 3: Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^N$ y $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ sea $a_i = \max\{0, f_{i_j}/q_j \mid j \in \{1, \dots, N-1\}\}$, donde $i_j = (i+j) \bmod N$ y $f_0 = f_N$. Si existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $f_i \geq a_i + \alpha a_i^4$ entonces $f \in T(\Omega)$.

dem:

supongamos que $f_1 \geq a_1 + \alpha a_1^4$.

$\therefore$ la función $F(u) = f_1 - \alpha u^4$ tiene un punto fijo mayor o igual que $\max\{0, f_2/q_1, \dots, f_N/q_{N-1}\}$.

i.e. $\exists\, u \geq 0 \ni f_1 = u + \alpha u^4 \wedge f_i \geq q_{i-1} u \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}$.

sea $P = \{(f_1, x_2, \dots, x_N) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \geq 2\} \cap T(\Omega)$. $\therefore$ la frontera de P está dada por $\partial P = \bigcup_{i=2}^{N} \Gamma_i$

donde $\Gamma_i = \{(f_1, T_2(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N), \dots, T_N(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)) \mid x_j \geq 0\ \forall j \neq i$

$\wedge\ f_1 = T_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)\}$ $\forall i \geq 2$.

ahora, dado $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$ tal que $f_1 = T_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)$, como $u \leq x_1$,

$$f_i \geq q_{i-1} u \geq q_{i-1} x_1 \geq \sum_{n=1}^{i-1} q_{i-n} x_n + \sum_{n=i+1}^{N} q_{N+i-n} x_n = T_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N) \quad \forall i \geq 2.$$

$\therefore f \in P$ y $\therefore f \in T(\Omega)$.

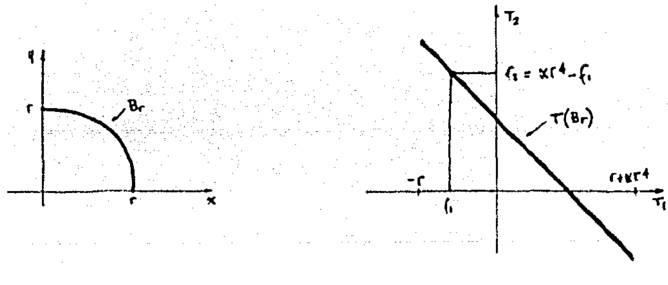
En general si $f_j \geq a_j + \alpha a_j^4$, la condición equivale a que exista $u \geq 0 \ni f_j = u + \alpha u^4 \wedge$ $\forall i \in \{1, \dots, N\} - \{j\}$, $f_i \geq q_{N+i-j} u$ si $i < j$ $\wedge$ $f_i \geq q_{i-j} u$ si $i > j$. Esto implicará que f_i sea mayor o igual que la i-ésima coordenada de $P = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, f_j, x_{j+1}, \dots, x_N) \mid x_k \in \mathbb{R}\ \forall k \neq j\} \cap T(\Omega)$ y $\therefore (f_1, \dots, f_N)$ estará en P contenido en $T(\Omega)$.

La proposición anterior nos da una condición suficiente. Puede ser útil, pero resultaría conveniente tener también alguna necesaria. Analizaremos la función desde un punto de vista completamente distinto: como envolviera una potencia a la cuarta, estudiaremos lo que sucede con esas curvas en Ω. Este enfoque, como el anterior, puede ser generalizable y caracterizar $T(\Omega)$ pero la condición necesaria y suficiente se verá que tampoco resulta manipulable.
A pesar de esto, induce de manera muy natural una condición necesaria.

Comenzamos también con $N=2$.

Definimos $\forall r \geq 0$ $B_r = \{(x,y) \in \Omega \mid x^4+y^4=r^4\}$.
Claramente la unión de B_r cubre Ω (si $(x,y)\in\Omega$ sea $r=(x^4+y^4)^{1/4}$).
Ahora, veremos que $\forall r \geq 0$ $T(B_r) = \{(u, \alpha r^4 - u) \mid u \in [-r, r+\alpha r^4]\}$ lo cual caracterizará $T(\Omega)$.
En efecto, $\forall (x,y) \in B_r$, $T(x,y) = (x-(r^4-x^4)^{1/4}+\alpha x^4,\ \alpha r^4 - (x-(r^4-x^4)^{1/4}+\alpha x^4))$ y la función $u:[0,r]\to\mathbb{R}$ tal que $u(x) = x-(r^4-x^4)^{1/4}+\alpha x^4$ $\forall x\in[0,r]$ es 1-1 y continua.
$\therefore$ $u([0,r]) = [-r, r+\alpha r^4]$. Se sigue entonces que $T(\Omega) = \bigcup_{r\geq 0}\{(u, \alpha r^4-u) \mid -r \leq u \leq r+\alpha r^4\}$ y $\therefore$ hemos probado:

<u>Proposición 4</u>: $(f_1,f_2)\in T(\Omega) \Leftrightarrow -r \leq f_1 \leq r+\alpha r^4$ con $r = \left(\frac{f_1+f_2}{\alpha}\right)^{1/4}$.

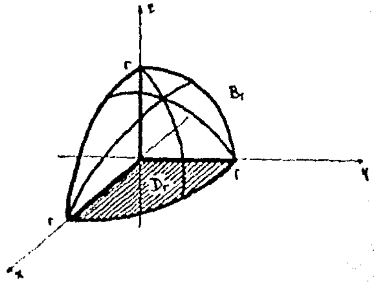


Lo sencillo de este caso consiste en que T mapea B_r en una recta (perpendicular al $(1,1)$). ♦
Pasemos a $N=3$.
Sean $\forall r\geq 0$: $B_r = \{(x,y,z)\in\Omega \mid x^4+y^4+z^4=r^4\}$

$T_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq r,\ 0\leq y\leq (r^4-x^4)^{1/4}\}$

Análogamente $\Omega = \bigcup_{r\geq 0} B_r$ y $\therefore$ $T(\Omega) = \bigcup_{r\geq 0} T(B_r)$.

Para este caso B_r se ve como en la figura:



y la imagen está dada por:

$$T(B_r) = \{(x+q_2y+\alpha x^4+q_1(r^4-x^4-y^4)^{1/4},\ q_1x+y+\alpha y^4+q_2(r^4-x^4-y^4)^{1/4},\ q_2x+q_1y+(r^4-x^4-y^4)^{1/4}+\alpha(r^4-x^4-y^4) \mid$$
$$0\le x\le r \ \wedge\ 0\le y\le (r^4-x^4)^{1/4}\}.$$

$\therefore$ si para cada $r>0$ y $\forall\,(x,y)\in D_r$ definimos:

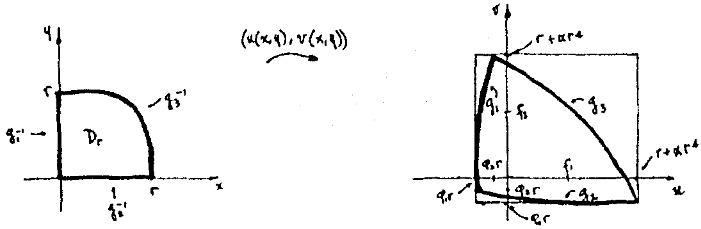
$$u_r(x,y) = x+q_2y+\alpha x^4+q_1(r^4-x^4-y^4)^{1/4}$$
$$\wedge\ v_r(x,y) = q_1x+y+\alpha y^4+q_2(r^4-x^4-y^4)^{1/4}.$$

entonces $T(B_r) = \{(u_r(x,y),\ v_r(x,y),\ \alpha r^4 - u_r(x,y) - v_r(x,y) \mid (x,y)\in D_r\}$.

$\therefore\ (f_1,f_2,f_3)\in T(\Omega) \Leftrightarrow \exists\,(x,y)\in D_r$ con $r=\left(\frac{f_1+f_2+f_3}{\alpha}\right)^{1/4}$ tal que $f_1=u_r(x,y)\ \wedge\ f_2=v_r(x,y)$.

Basta que analicemos entonces sólo D_r bajo (u_r,v_r). Claramente esta función $(u_r(x,y), v_r(x,y))$ mapea D_r en la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por las siguientes tres curvas:

$$g_1 = \{(q_2y+q_1(r^4-y^4)^{1/4},\ y+\alpha y^4+q_2(r^4-y^4)^{1/4}) \mid 0\le y\le r\}$$
$$g_2 = \{(x+\alpha x^4+q_1(r^4-x^4)^{1/4},\ q_1x+q_2(r^4-x^4)^{1/4} \mid 0\le x\le r\}$$
$$g_3 = \{(x+\alpha x^4+q_2(r^4-x^4)^{1/4},\ q_1x+(r^4-x^4)^{1/4}+\alpha r^4-\alpha x^4 \mid 0\le x\le r\}$$



y si caracterizamos esta región (en términos de $g_1, g_2 \wedge g_3$) obtenemos $T(\Omega)$ de la siguiente manera:

Proposición 5: sea $(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$. Entonces son equivalentes:

(a) $(f_1, f_2, f_3) \in T(\Omega)$

(b) $f_1 + f_2 + f_3 \geq 0 \;\wedge\;$ si $r = \left(\dfrac{f_1+f_2+f_3}{\alpha}\right)^{1/4}$ entonces:

(1) $\varphi_1 r \leq f_1 \leq r + \alpha r^4$

(2) $f_2 \geq \varphi_1 x + \varphi_2 (r^4 - x^4)^{1/4}$ donde $x \in [0, r]$ es tal que $f_1 = x + \kappa x^4 + \varphi_1 (r^4 - x^4)^{1/4}$.

si $\varphi_1 r \leq f_1 \leq \varphi_2 r$ entonces $f_2 \leq y + \kappa y^4 + \varphi_2 (r^4 - y^4)^{1/4}$ con $f_1 = \varphi_2 y + \varphi_1 (r^4 - y^4)^{1/4} \wedge y \in [0, r]$.

si $\varphi_2 r \leq f_1 \leq r + r^4 \alpha$ entonces $f_2 \leq \varphi_1 x + (r^4 - x^4)^{1/4}$ con $f_1 = x + \kappa x^4 + \varphi_2 ((r^4 - x^4)^{1/4} \wedge x \in [0, r]$.

Para el caso general definimos $\forall r \geq 0$, $B_r = \{(x_1, \dots, x_N) \in \Omega \mid \sum_1^N x_i^4 = r^4\}$

$\wedge\;\; D_r = \{(x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \mid 0 \leq x_1 \leq r,\;\; 0 \leq x_n \leq \left(r^4 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^4\right)^{1/4} \;\; \forall n \in \{2, \dots, N-1\}\}$.

Si Φ_i es el i-ésimo renglón de Φ, definimos $\forall i = 1, \dots, N-1$ $\;u_i : D_r \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$u_i(x_1, \dots, x_{N-1}) = \left\langle \Phi_i \cdot \left(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \left(r^4 - \sum_1^{N-1} x_i^4\right)^{1/4}\right)\right\rangle + \kappa x_i^4 .$$

Entonces $T(B_r) = \{(u_1(x_1, \dots, x_{N-1}), \dots, u_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}), \alpha r^4 - \sum_1^{N-1} u_i(x_1, \dots, x_{N-1})) \mid (x_1, \dots, x_{N-1}) \in D_r\}$

$\wedge \;\therefore\; f = (f_1, \dots, f_N) \in T(\Omega) \iff \sum_1^N f_i \geq 0 \;\wedge$, si $r = \left(\sum_1^N f_i / \alpha\right)^{1/4}$ entonces:

$\exists\, (x_1, \dots, x_{N-1}) \in D_r \;\ni\; f_i = u_i(x_1, \dots, x_{N-1}) \;\; \forall i \in \{1, \dots, N-1\}$.

Ahora, este resultado sería útil para caracterizar $T(\Omega)$ si pudiéramos caracterizar la función definida en D_r por:

$$(x_1,\dots,x_{N-1}) \mapsto (u_1(x_1,\dots,x_{N-1}),\dots,u_{N-1}(x_1,\dots,x_{N-1})).$$

Intentándolo, llegaríamos análogamente a $\varphi_1 r \leq f_1 \leq r+\kappa r^4$ y $N-2$ condiciones para $f_2,\dots,f_{N-1}$ de la forma $g_1(f_1,\dots,f_{i-1}) \leq f_i \leq g_2(f_1,\dots,f_{i-1})$ $\forall i\in\{2,\dots,N-1\}$. Para los casos $N=2$ y $N=3$ encontramos estas funciones, pero para N arbitrario, resulta claro por el desarrollo que explicaría para $g_1(f_1,\dots,f_{i-1})$ y para $g_2(f_1,\dots,f_{i-1})$ resolver al menos $i-1$ ecuaciones de cuarto grado lo cual no resuelve el problema.

Sin embargo, de este enfoque se deriva inmediatamente una condición necesaria que puede ser útil al estudiar una serie de valores $(f_1,\dots,f_N)$. Con esta condición terminaremos el estudio de $T(\Omega)$.

<u>Proposición 6</u>: Sea $f=(f_1,\dots,f_N)\in\mathbb{R}^N$. Si $f\in T(\Omega)$ entonces $\forall i\in\{1,\dots,N-1\}$ se cumple:
$-r\leq f_i \leq r+\kappa r^4$, donde $r=\left(\sum_1^N f_i/\alpha\right)^{1/4}$.

<u>Dem</u>:
Por el resultado anterior, si $f\in T(\Omega)$ entonces $\exists\ (x_1,\dots,x_{N-1})\in D_r$ con $r=\left(\sum_1^N f_i/\alpha\right)^{1/4}$
y $D_r=\{(x_1,\dots,x_{N-1})\in\mathbb{R}^{N-1} \mid 0\leq x_n \leq (r^4-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^4)^{1/4}\ \forall n\in\{1,\dots,N-1\}\}$ tal que:

$$f_i = \left(\Phi_i\cdot\left(x_1,\dots,x_{N-1},\left(r^4-\sum_1^{N-1} x_i^4\right)^{1/4}\right)\right) + \kappa x_i^4 \quad \forall i\in\{1,\dots,N-1\}.$$

Ahora, como $(x_1,\dots,x_{N-1})\in D_r$, $x_i\leq r$ $\forall i\in\{1,\dots,N-1\}$.
Además $\left(r^4-\sum_1^{N-1} x_i^4\right)^{1/4}\leq r$.

$\therefore$ $\forall i\in\{1,\dots,N-1\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_i &= x_i+\kappa x_i^4 + \sum_{k=1}^{i-1}\varphi_{i-k}x_k + \sum_{k=i+1}^{N-1}\varphi_{N+i-k}x_k + \varphi_i\left(r^4-\sum_1^{N-1}x_i^4\right)^{1/4} \\ &\geq \sum_{k=1}^{i-1}\varphi_{i-k}r + \sum_{k=i+1}^{N-1}\varphi_{N+i-k}r + \varphi_i r \\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\varphi_k r = -r. \end{aligned}$$

Por último, la otra desigualdad es inmediata ya que $f_i\leq x_i+\kappa x_i^4\leq r+\kappa r^4$.

3. UNA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA FLUJO MÁXIMO.

Dada una serie de valores $(f_1,\dots,f_N)$ en la imagen de $T(\Omega)$, saber cuándo uno de ellos es máximo, ayudaría en la elección de las horas de vuelo. El problema, como la caracterización de $T(\Omega)$, no es sencillo, pero en lo que sigue presentaremos una condición suficiente.

Comenzamos viendo qué sucede con $N=2$.

Si $(f_1,f_2)\in T(\Omega)$, entonces existen $x_1,x_2\geq 0$ tales que:

$$f_1 = \kappa x_1^4 + x_1 - x_2$$
$$f_2 = \kappa x_2^4 + x_2 - x_1$$

Si $x_i \leq x_j$ entonces $\alpha x_i^4 + 2x_i \leq \kappa x_j^4 + 2x_j$ y $\therefore$ $f_i \leq f_j$.

Esto es todo: para que $f_2 \geq f_1$ basta que $x_2 \geq x_1$.

Veamos el caso $N=3$.

Si $(f_1,f_2,f_3)\in T(\Omega)$, entonces existen $x_1,x_2,x_3\geq 0$ tales que:

$$f_1 = x_1 + q_2 x_2 + q_1 x_3 + \alpha x_1^4$$
$$f_2 = q_1 x_1 + x_2 + q_2 x_3 + \alpha x_2^4$$
$$f_3 = q_3 x_1 + q_1 x_2 + x_3 + \alpha x_3^4$$

Queremos encontrar una condición para que, por ejemplo, $f_2 \geq f_1, f_3$.

Supongamos que $x_1, x_3 \leq x_2$.

Si $x_1 > x_3$ entonces no necesariamente $f_1 \leq f_2$. Por ejemplo, si $x_3=0$, $x_1=x_2>0$ entonces $f_1 = \alpha x_2^4 - q_1 x_2 > \alpha x_2^4 - q_2 x_2 = f_2$. Sin embargo, si $x_1 \leq x_3$ entonces $f_1 \leq f_2$ e, independientemente de la relación que exista entre x_1 y x_3, siempre $f_3 \leq f_2$.

O sea:

Si $x_1, x_3 \leq x_2$ entonces:

(a) $f_3 \leq f_2$.

(b) Si $x_1 \leq x_3$ entonces $f_1 \leq f_2$.

<u>Dem:</u>

(a): Si $x_1 \leq x_3$ entonces $q_1(x_2 - x_1) \leq q_1(x_3 - x_1) \leq q_2(x_3 - x_1)$ y $\therefore$ $f_3 \leq f_2$.

Si $x_1 \geq x_3$ entonces $q_1(x_2 - x_1) \leq 0 \leq q_2(x_3 - x_1)$ y $\therefore$ $f_3 \leq f_2$.

(b): Si $x_1 \leq x_3$ entonces $q_2(x_2 - x_3) \leq 0 \leq q_1(x_1 - x_3)$ y $\therefore$ $f_1 \leq f_2$.

Se sigue entonces que $x_1 \leq x_3 \leq x_2 \Rightarrow f_1, f_3 \leq f_2$.

Para el caso general se llegó al siguiente resultado:

__Proposición 7:__ Sean $f = (f_1, \dots, f_N) \in T(\Omega)$ y $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ y $T(x) = f$. Sean $n \in \{1, \dots, N\}$ y $k \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$. Entonces $f_k \leq f_n$ si:

(1) si $n < k$, $x_1, \dots, x_{n-1}, x_k, \dots, x_N \leq x_n, \dots, x_{k-1}$.

(2) si $k < n$, $x_k, \dots, x_{n-1} \leq x_1, \dots, x_{k-1}, x_n, \dots, x_N$.

__dem:__

__caso 1:__ $n < k$. $x_1, \dots, x_{n-1}, x_k, \dots, x_N \leq x_n, \dots, x_{k-1}$.

La j-ésima componente de $T(x)$ está dada por:

$$f_j = \alpha x_j^4 + \sum_{i=1}^{j} q_{j-i} x_i + \sum_{i=j+1}^{N} q_{N+j-i} x_i .$$

$$\therefore f_k - f_n = \alpha (x_k^4 - x_n^4) + q_0 (x_k - x_n) + \sum_{i=1}^{k-1} q_{k-i} x_i + \sum_{i=k+1}^{N} q_{N+k-i} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} q_{n-i} x_i - \sum_{i=n+1}^{N} q_{N+n-i} x_i$$

$$\leq q_{k-n} x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (q_{k-i} - q_{n-i}) x_i + \sum_{i=n+1}^{k-1} (q_{k-i} - q_{N+n-i}) x_i - q_{N+n-k} x_k +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{N} (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) x_i .$$

Ahora, sea $x > 0$ y $x_1, \dots, x_{n-1}, x_k, \dots, x_N \leq x \leq x_n, \dots, x_{k-1}$.

Como $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ $1 \leq n-i < k-i \leq N-1$ se sigue que $(q_{k-i} - q_{n-i}) > 0$

$$y \;\therefore\; (q_{k-i} - q_{n-i}) x_i \leq (q_{k-i} - q_{n-i}) x \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Análogamente $\forall i \in \{k+1, \dots, N\}$, $1 \leq N+n-i < N+k-i \leq N-1$ y $\therefore (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) > 0$

$$\therefore (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) x_i \leq (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) x \quad \forall i \in \{k+1, \dots, N\}.$$

Por último, $\forall i \in \{n+1, \dots, k-1\}$, $1 \leq k-i < N+n-i \leq N-1$ y $\therefore (q_{k-i} - q_{N+n-i}) < 0$

$$\therefore (q_{k-i} - q_{N+n-i}) x_i \leq (q_{k-i} - q_{N+n-i}) x \quad \forall i \in \{n+1, \dots, k-1\}.$$

Se sigue entonces que:

$$f_k - f_n \le \left(q_{k-n} + \sum_{i=1}^{n-1} (q_{k-i} - q_{n-i}) + \sum_{i=n+1}^{k-1} (q_{k-i} - q_{N+n-i}) - q_{N+n-k} + \sum_{i=k+1}^{N} (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) \right) x = 0$$

$\therefore f_k \le f_n$

<u>caso 2:</u> $k < n$. $x_k, \dots, x_{n-1} \le x_1, \dots, x_{k-1}, x_n, \dots, x_N$.

$$\therefore f_k - f_n = \alpha (x_k^4 - x_n^4) + q_0 (x_k - x_n) + \sum_{i=1}^{k-1} q_{k-i} x_i + \sum_{i=k+1}^{N} q_{N+k-i} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} q_{n-i} x_i - \sum_{i=n+1}^{N} q_{N+n-i} x_i$$

$$\le q_{k-n} x_n + \sum_{i=1}^{k-1} (q_{k-i} - q_{n-i}) x_i - q_{n-k} x_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} (q_{N+k-i} - q_{n-i}) x_i + \sum_{i=n+1}^{N} (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) x_i .$$

Ahora, como en el caso anterior, si $x \ge 0$ es tal que $x_k, \dots, x_{n-1} \le x \le x_1, \dots, x_{k-1}, x_n, \dots, x_N$ entonces:

$$i \in \{1, \dots, k-1\} \Rightarrow (q_{k-i} - q_{n-i}) x_i \le (q_{k-i} - q_{n-i}) x$$
$$i \in \{n+1, \dots, N\} \Rightarrow (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) x_i \le (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) x$$
$$i \in \{k+1, \dots, n-1\} \Rightarrow (q_{N+k-i} - q_{n-i}) x_i \le (q_{N+k-i} - q_{n-i}) x$$

$$\therefore f_k - f_n \le \left(q_{k-n} + \sum_{i=1}^{k-1} (q_{k-i} - q_{n-i}) - q_{n-k} + \sum_{i=k+1}^{n-1} (q_{N+k-i} - q_{n-i}) + \sum_{i=n+1}^{N} (q_{N+k-i} - q_{N+n-i}) \right) x = 0$$

$\therefore f_k \le f_n$.

La condición suficiente para que f_n sea máximo se sigue de la proposición:

<u>Corolario</u>: Sean $f = (f_1, \dots, f_N) \in T(\Omega)$ y $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega \ni T(x) = f$. Sea $n \in \{1, \dots, N\}$.
Si $x_{n-1} \le \cdots \le x_1 \le x_N \le \cdots \le x_{n+1} \le x_n$, entonces $f_k \le f_n \ \forall k \in \{1, \dots, N\}$.

<u>dem</u>:

(1) supongamos que $k < n$.
La condición implica claramente que $x_{n-1} \le \cdots \le x_k \le x_1, \dots, x_{k-1}, x_n, \dots, x_N$
y de la proposición se sigue que $f_k \le f_n$.

(2) si $k > n$ entonces:

$$x_1, \dots, x_{n-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N \le x_{k-1} \le \dots \le x_n .$$

$\therefore f_k \le f_n$.

4. VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA CON RESPECTO A α.

Como se mencionó en un principio, debido a los posibles datos conocidos o aproximados de una región determinada, interesa encontrar cómo varía una diferencia de temperaturas con respecto a α y $\tilde{f}$. En los resultados que se presentan en esta sección se simuló para tres casos distintos una situación real posible. Suponiendo una distribución de temperatura determinada durante cada hora en un día (i.e. con la notación que hemos seguido hasta ahora, $N=24$) y suponiendo ciertos valores de albedo (A), flujo geotérmico (Q), inercia térmica (P), cubertura nubosa ($1-cl$) y emisividad (ε) (que se especifican para cada caso) además de ángulo cenital (Z_n) (calculado a 32° de latitud norte para el 21 de junio) y temperaturas diurna y nocturna promedio (T_n) (303°K y 293°K respectivamente) para los tres casos, se calcularon los valores de α y $(f_1,\dots,f_N)$ de la ecuación:

$$\Phi \cdot x + \alpha x^4 = (f_1,\dots,f_N).$$

Los valores de $x=(x_1,\dots,x_N)$ y α están dados por:

$$x_n = \frac{V_n}{V^*} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{\pi T}}{P}\,(V^*)^3$$

donde:

V_n es la temperatura en la superficie (°K) a la hora n.

$$V^* = \left(\frac{\bar{R}}{\varepsilon\sigma}\right)^{1/4} \quad \text{con} \quad \bar{R} = \sum_{n=1}^{N} R_n / N$$

$$\text{y} \quad R_n = S_0(1-A)(1-cl)(1-0.2\sqrt{\sec Z_n})\cos Z_n + Q + \varepsilon\sigma T_n^4 \quad (\text{watt}/m^2)$$

con la notación de la ecuación (3) de 1.3.

Para simular $(x_1,\dots,x_N)$ y α y obtener entonces un vector fijo $(f_1,\dots,f_N)$ despejándolo de la ecuación, se supuso, como se muestra en la figura de distribución de temperatura, una distribución lineal de $\{V_n\}$ con un valor mínimo (xmin) a las 4 de la mañana y máximo (xmax) a las 2 de la tarde. Se hicieron variar entonces, para cada caso, xmin y xmax además de A, Q, P, cl y ε. Con ese valor fijo de $(f_1,\dots,f_N)$ se hizo variar α de 0.05 en 0.05 desde 0 hasta 0.5 y, para cada α, se resolvió el sistema para $(x_1,\dots,x_N)$ utilizando el método de Broyden que se describió en 1.3 y se calculó, para cada α, la diferencia entre x_i máxima y x mínima. En los tres casos se obtuvo una función estrictamente decreciente y, mientras mayor es la α, como se muestra en la gráfica, más parece aproximarse a una constante. El problema, como se dijo en la introducción, sigue abierto. Lo que presentamos en esta sección ejemplifica y da una idea del tipo de función que se busca.

Para cada caso escribiremos primero los valores supuestos de a, Q, P, d, ε, xmin y xmax. Los valores obtenidos de α, V_n y f_n $(n=1,\dots,24)$ corresponden al primer conjunto de datos. Las cinco columnas del segundo conjunto consisten en, respectivamente, α, $V^*(x_i$ máxima $- x_i$ mínima$)$, $V^* x_i$ mínima, $V^* x_i$ máxima, y el error máximo en la solución del sistema (i.e. la componente máxima en valor absoluto de $\Phi\cdot x + \kappa x^4 - f$). Es interesante hacer notar que el error en cada caso es insignificante a pesar de que en todos se llevaron a cabo sólo cinco iteraciones del algoritmo de Broyden.

Caso 1: $a = 0.3$; $Q = 0$ watt/m² ; $P = 0.057 \cdot 41860$ watt$\sqrt{\text{seg}}$/m² °K ; $d = 0$; $\varepsilon = 0.6$;
xmin = 10 + 273 °K ; xmax = 40 + 273 °K.

ALFA: 0.29[illegible]

HORA	TEMPERATURA	FI
1.0	16.4285714281	0.750936
2.0	14.2857142854	0.734405
3.0	12.1428571427	0.718105
4.0	10.0000000000	0.704115
5.0	13.0000000000	0.847301
6.0	16.0000000000	0.904570
7.0	19.0000000000	0.945891
8.0	22.0000000000	0.986180
9.0	25.0000000000	1.019358
10.0	28.0000000000	1.048763
11.0	31.0000000000	1.078100
12.0	34.0000000000	1.105119
13.0	37.0000000000	1.130929
14.0	40.0000000000	1.155864
15.0	37.8571428573	1.019874
16.0	35.7142857144	0.967412
17.0	33.5714285718	0.929477
18.0	31.4285714281	0.899300
19.0	29.2857142854	0.871512
20.0	27.1428571427	0.847210
21.0	25.0000000000	0.825234
22.0	22.8571428573	0.804907
23.0	20.7142857144	0.785954
24.0	18.5714285718	0.767951

ALFA	DIF TEMP	TMIN	TMAX	MAXERROR
0.00	33.45043	77.51075	110.91519	1.39171299E-10
0.05	32.50074	56.74519	89.29929	2.03776017E-10
0.10	31.99980	42.59745	[illegible]	[illegible]
0.15	31.34607	31.93708	63.20996	1.41990057E-10
0.20	30.777[illegible]	21.1480[illegible]	[illegible]	1.47347025E-10
0.25	30.31420	15.[illegible]	[illegible]	7.470[illegible]E-11
0.30	28.97078	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.35	28.43916	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.40	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.45	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.50	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

CASO 2:

$a = 0.4$
$Q = 0$ watt/m²
$P = 0.4 \cdot 41860$ watt $\sqrt{seg}$/m² °K
$d = 0.2$
$\varepsilon = 0.8$
$x_{min} = 10 + 273$ °K
$x_{max} = 30 + 273$ °K.

ALFA: 0.04758

HORA	TEMPERATURA	FL
1.0	14.2857142864	0.699571
2.0	12.8571428573	0.690665
3.0	11.4285714291	0.682172
4.0	10.0000000000	0.674034
5.0	12.0000000000	0.771648
6.0	14.0000000000	0.808722
7.0	16.0000000000	0.836114
8.0	18.0000000000	0.858633
9.0	20.0000000000	0.878123
10.0	22.0000000000	0.895526
11.0	24.0000000000	0.911396
12.0	26.0000000000	0.926093
13.0	28.0000000000	0.939846
14.0	30.0000000000	0.952846
15.0	28.5714285718	0.859170
16.0	27.1428571427	0.824377
17.0	25.7142857146	0.802758
18.0	24.2857142854	0.783843
19.0	22.8571428573	0.767814
20.0	21.4285714291	0.753753
21.0	20.0000000000	0.741129
22.0	18.5714285718	0.729597
23.0	17.1428571427	0.718970
24.0	15.7142857146	0.709967

ALFA	DIF TEMP	TMIN	TMAX	MAXERROR
0.00	20.41540	22.06491	42.17243	1.26148249E-10
0.05	19.99109	9.47785	29.45914	1.25510969E-10
0.10	19.43275	6.05354	10.48630	9.73114914E-11
0.15	19.77927	7.48779	11.85685	9.18545210E-11
0.20	19.09307	-13.77305	5.31002	1.23709045E-10
0.25	15.95612	-19.15573	-0.30241	[illegible]
0.30	15.45147	-23.96484	-5.21571	[illegible]
0.35	19.14501	-28.04707	-9.59107	1.40538625E-09
0.40	18.[illegible]	-31.[illegible]	-12.50860	[illegible]
0.45	19.13[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.50	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

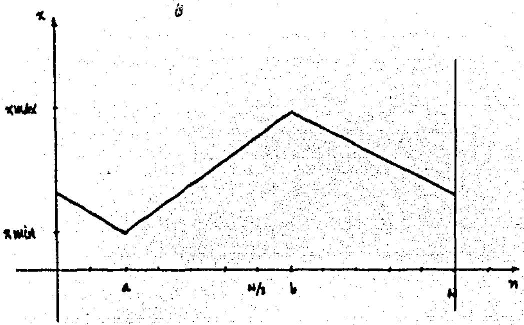
<u>CASO 3</u>:

$L = 0.5$
$Q = 200$ watt/m²
$P = 0.3 \cdot 4186$ watt $\sqrt{seg}$/m²·°K
$\alpha = 0.3$
$\varepsilon = 0.75$
xmin = 5 + 273 °K.
xmax = 45 + 273 °K.

ALFA: 0.07538

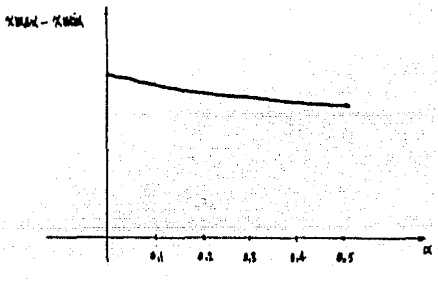
HORA	TEMPERATURA	FL
1.0	13.5714285718	0.573804
2.0	10.7142857146	0.557194
3.0	7.8571428573	0.541270
4.0	5.0000000000	0.526027
5.0	9.0000000000	0.706715
6.0	13.0000000000	0.775568
7.0	17.0000000000	0.826577
8.0	21.0000000000	0.868625
9.0	25.0000000000	0.905130
10.0	29.0000000000	0.937932
11.0	33.0000000000	0.967754
12.0	37.0000000000	0.995554
13.0	41.0000000000	1.021488
14.0	45.0000000000	1.016482
15.0	42.1428571427	0.873342
16.0	39.2857142854	0.811481
17.0	36.4285714282	0.767538
18.0	33.5714285718	0.733119
19.0	30.7142857146	0.702060
20.0	27.8571428577	0.675648
21.0	25.0000000000	0.651957
22.0	22.1428571427	0.630295
23.0	19.2857142854	0.610256
24.0	16.4285714282	0.591534

ALFA	DIF TEMP	TMIN	TMAX	NAYERROR
0.00	41.09443	20.95004	62.04447	1.291480[illegible]E-10
0.05	40.23156	9.64129	49.87284	9.7711[illegible]E-11
0.10	39.[illegible]	0.94404	40.64888	8.347351264E-11
0.15	39.16851	-6.14403	33.05248	1.091397640E-10
0.20	38.69747	-12.08579	26.61147	9.[illegible]E-11
0.25	38.27409	-17.24434	21.03123	1.5461[illegible]E-10
0.30	37.89117	-21.78754	16.11057	1.035001[illegible]E-09
0.35	37.54427	-25.83417	11.71014	4.3744[illegible]E-09
0.40	37.[illegible]	-29.48801	7.77184	1.785[illegible]E-09
0.45	36.[illegible]	[illegible]	4.10314	3.[illegible]E-09
0.50	36.[illegible]	-35.[illegible]	[illegible]	8.[illegible]E-09



— Distribución de temperatura —

(a = 4N/24   b = 14 N/24   período = N)



— Variación de la temperatura con respecto a α —

(Gráficas de V_n y (xmax − xmin)(α, f)).

4 MÉTODOS NUMÉRICOS Y EJEMPLOS

Se decidió anexar al final del trabajo tres programas, por considerar que pueden ser útiles para el estudio del problema. El primero consiste en el programa que se utilizó para la obtención de los resultados de la sección anterior. Los otros dos ejemplifican métodos de solución para el flujo geotérmico y la inercia térmica como se explicó en la sección 1.3.

PROGRAMA 1

```
BEGIN
   FILE TTY(KIND=REMOTE,MYUSE=IO);
   INTEGER I,J,K,N,M,NN,NI;
   REAL USTAR,AL,A,P,CN,TD,TN,FA,SG,T,CS,Y,L1,L2,DT,PI,P2,SUMA,ALFA,
        MAXTEM,MINTEM,MAXERR,XMIN,XMAX,DIFT,A1,A2;
   ARRAY G,FL,S,W,M1,M2,H1,H2[0:0],FI[-100:100],B,HE[0:100,0:0];
   DEFINE ITN  = FOR NI:=1 STEP 1 UNTIL NN DO#,
          ITM  = FOR MI:=1 STEP 1 UNTIL NN DO#,
          RS(A)= RESIZE(A,NN+1)#;

   REAL PROCEDURE F(I,N); VALUE I,N; INTEGER I,N;
   BEGIN
      REAL S; INTEGER K;
      FOR K:=1 STEP 1 UNTIL NN DO S:=S+B[I,K]*FI[N-K+1];
      F:=ALFA*(B[I,N]**4)+S-FL[N];
   END;

   REAL PROCEDURE INT(N,X); VALUE N,X; INTEGER N; REAL X;
   BEGIN
      REAL A;
      A:=1-EXP(-(X**2)/NN);
      A:=A*(EXP(-((NN-1)*(X**2))/NN)-EXP(-(X**2)));
      A:=EXP((-(N-1)*(X**2))/NN)*A;
      INT:=A/((X**2)*(1-EXP(-(X**2))));
   END;

   PROCEDURE CALCULAFI(N); VALUE N; INTEGER N;
   BEGIN
      REAL A,B;
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NI-1 DO
      A:=A+INT(N,L1*J*DT);
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NI DO
      B:=B+INT(N,L1+(J-(1/2))*DT);
      FI[N]:=(DT/3)*(INT(N,L1)+INT(N,[illegible]);
      IF N=1 THEN
      FI[1]:=2*SQRT(NN)-FI[1]*NN/SQRT(PI) ELSE
      BEGIN
         A:=2*(SQRT(N)[illegible]*SQRT(NN);
         FI[N]:=[illegible]
      END;
```

```
                PROV1:=IPIVOT[K-1];
                IPIVOT[K-1]:=IPIVOT[L-1];
                IPIVOT[L-1]:=PROV1;
            END;
            IF ABS(AE[(K-1)*N+K-1]) LSS 10**(-20) THEN GO FIN;
            FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
            BEGIN
                B[I-1]:=AE[(I-1)*N+K-1]/AE[(K-1)*N+K-1];
                AE[(I-1)*N+K-1]:=-B[I-1];
                FOR J:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
                AE[(I-1)*N+J-1]:=*-B[I-1]*AE[(K-1)*N+J-1];
            END;
        END;
        WHILE ITER LEQ N DO
        BEGIN
            FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
            BEGIN
                NN:=IPIVOT[I-1];
                IF ITER EQL NN THEN
                B[I-1]:=1 ELSE B[I-1]:=0;
            END;
            FOR I:=2 STEP 1 UNTIL N DO
            FOR J:=1 STEP 1 UNTIL I-1 DO
            B[I-1]:=*+AE[(I-1)*N+J-1]*B[J-1];
            X[N-1]:=B[N-1]/AE[(N-1)*N+N-1];
            I:=N-1;
            DO
            BEGIN
                S:=0;
                FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL N DO
                S:=*+AE[(I-1)*N+J-1]*X[J-1];
                X[I-1]:=(B[I-1]-S)/AE[(I-1)*N+I-1];
                I:=*-1;
            END UNTIL I EQL 0;
            FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
            AINVERS[(I-1)*N+ITER-1]:=X[I-1];
            ITER:=*+1;
        END;
        INVERSA:=TRUE;
    FIN:
    END INVERSA;

    WRITE(TTY,<"NUMERO DE INTERVALOS?">); READ(TTY,/,NN);
    WRITE(TTY,<"ALBEDO,FLUJO,INERCIA,CUBIERTURA,EMISIVIDAD?">);
    READ(TTY,/,AL,Q,P,CN,EA);
    P:=P*41840;
    NT:=98;
    L1:=.001;
    L2:=10;
    DT:=(L2-L1)/NT;
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
    T:=[illegible]7400;
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
    [illegible]
```

```
PROCEDURE ANGULOGENITAL;
BEGIN
     ITN BEGIN
          IF N LSS 4*Y OR N GTR 18*Y THEN GEN[N]:=90;
          IF N LEQ 11*Y AND N GEQ 4*Y THEN GEN[N]:=(145-10*N/Y);
          IF N LEQ 18*Y AND N GEQ 13*Y THEN GEN[N]:=(10*N/Y-95);
          IF N LEQ 13*Y AND N GEQ 11*Y THEN GEN[N]:=35;
          GEN[N]:=GEN[N]*P2;
     END;
END;

PROCEDURE ITERACION(I); VALUE I; INTEGER I;
BEGIN
     ITM BEGIN
          SUMA:=0;
          ITN SUMA:=*+F(I,N)*H[M,N];
          B[I+1,M]:=B[I,M]-SUMA;
          S[M]:=B[I+1,M]-B[I,M];
     END;
     ITN W[N]:=F(I+1,N)-F(I,N);
     ITN BEGIN
          M1[N]:=M2[N]:=0;
          ITM M1[N]:=*+H[N,M]*W[M];
          ITM M2[N]:=*+H[M,N]*S[M];
          M1[N]:=S[N]-M1[N];
     END;
     SUMA:=0;
     ITM ITN SUMA:=*+W[N]*S[M]*H[M,N];
     IF SUMA NEQ 0 THEN SUMA:=1/SUMA;
     ITN ITM H[N,M]:=*+SUMA*M1[N]*M2[M];
END;

BOOLEAN PROCEDURE INVERSA(A,AINVER,N);
VALUE N; INTEGER N;
ARRAY A,AINVER[*];
BEGIN
     INTEGER I,J,K,L,ITER;
     ARRAY IPIVOT,S,D,Y[0:N-1];
     REAL PROV,PROV1,AN,S;
     LABEL FIN;
     ITER:=1;
     FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO IPIVOT[J-1]:=J;
     FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO
     BEGIN
          L:=K;
          FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
          IF ABS(A[(I-1)*N+K-1]) LSS ABS(A[(L-1)*N+K-1]) THEN
          ELSE
          L:=I;
          IF L NEQ K THEN
          BEGIN
               FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
               BEGIN
                    PROV:=A[(K-1)*N+J-1];
                    A[(K-1)*N+J-1]:=A[(L-1)*N+J-1];
                    A[(L-1)*N+J-1]:=PROV;
               END;
```

```
ANGULOPENITAL;
ITN GEN]:=IF N GEQ 6*Y AND N LEQ 18*Y THEN
CN*CS*(1-AL)*(1-0.2*SQRT(1/COS(GEN]))*COS(GEN])+CN*(A*(T0**4))+D
ELSE SO*EA*(TN**4)+D;
SUMA:=0;
ITN SUMA:=*+GEN];
SUMA:=SUMA/NN;
USTAR:=(SUMA/(EA*SG))**(1/4);
ALFA:=(((EA*SG)*(SQRT(PI*T)))/P)*(USTAR**3);

WRITE(TTY,<"TEMP MINIMA Y TEMP MAXIMA">); READ(TTY,/,XMIN,XMAX);
A1:=(7*XMIN-2*XMAX)/5;
A2:=((NN14*Y)*XMAX-10*XMIN*Y)/(NN-10*Y);
NI:=5;
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL NI+1 DO RS(RPI,*I);
FOR N:=4*Y STEP 1 UNTIL 14*Y DO
REQ,N]:=((XMAX-XMIN)/(10*Y))*N+A1;
FOR N:=15*Y STEP 1 UNTIL NN DO
REQ,N]:=((XMIN-XMAX)/(NN-10*Y))*N+A2;
FOR N:=1 STEP 1 UNTIL 3*Y DO
REQ,N]:=((XMIN-XMAX)/(NN-10*Y))*(N+NN)+A2;

ITN REQ,N]:=(REQ,N]+273)/USTAR;

ITM CALCULAFI(M);
FOR I:=0 STEP -1 UNTIL -NN DO FIEI]:=FIEI+NN];
ITN BEGIN
     SUMA:=0;
     ITN SUMA:=*+REQ,M]*FIEN-M+1];
     FLEN]:=ALFA*(REQ,N]**4)+SUMA;
END;

WRITE(TTY,<"ALFA:",F10.5>,ALFA);
WRITE(TTY,</,"HORA",X16,"TEMPERATURA",X16,"FL">);
ITN WRITE(TTY,<F4.1,X10,F19.10,X10,F10.6>,N/Y,
          (REQ,N]*USTAR)-273,FLEN]);
WRITE(TTY,<//>);
WRITE(TTY,<"ALFA",X10,"DIF TEMP",X10,"TMIN",X10,"TMAX",X10,
          "MAXERROR">);
FOR ALFA:=0 STEP 0.05 UNTIL 0.5 DO
 BEGIN
     ITN ITM
     HEN,M]:=IF N=M THEN 4*ALFA*REQ,N]**3+FIE1] ELSE FIEN-M+1];
     ITN ITM HIEM-1+(N-1)*NN]:=HEN,M];
     IF NOT INVERSA(HI,HP,NN) THEN WRITE(TTY,<"ERROR DE INVERSION">);
     ITN ITM HEN,M]:=HPIM-1+(N-1)*NN];

     FOR J:=0 STEP 1 UNTIL NI-1 DO ITERACION(J);
     MINTEM:=10**(10);
     MAXTEM:=MAXERR:=-10**(10);
     ITN BEGIN
          MAXTEM:=MAX(MAXTEM,REN],N]);
          MINTEM:=MIN(MINTEM,REN],N]);
          MAXERR:=MAX(MAXERR,E(NI,N));
     END;

     MAXTEM:=(MAXTEM*USTAR)-273; MINTEM:=(MINTEM*USTAR)-273;
     A1:=MAXTEM-MINTEM;
     WRITE(TTY,<F4.2,X9,F10.5,X7,F10.5,X8,F10.5,X7,F15.8>,
            ALFA,A1,MINTEM,MAXTEM,MAXERR);
  END;
END.
```

PROGRAMA 2

```
BEGIN
    FILE       IMAGEN(KIND=DISK,FILETYPE=7),
               FLUJO(KIND=DISK,MYUSE=OUT,AREASIZE=90,SAVEFACTOR=99),
               INERCIA(KIND=DISK,MYUSE=OUT,AREASIZE=90,SAVEFACTOR=99),
               DATOS(KIND=DISK,TITLE="JR90/DALG.",FILETYPE=7),
               TTY(KIND=REMOTE,MYUSE=IO);
    ARRAY      VD,VT,VN,AL,B,P,Q[0:0],C[1:4],TIT[0:10],
               CTAB,F1,F2[1:512],X[1:4,0:700];
    POINTER    PP;
    REAL       FO,FF1,CO,DF,DC,NTAB,NTABC,EM,E,SIG,ESIG,NOM,GD,GT,GN,CONS,
               TD,TT,TN,CTA1,CTA2,MXP,MXQ,MNP,MNQ;
    INTEGER    I,J,K,KONT,NX,NY,NN,NREG;
    DEFINE     INCRE(J) = BEGIN KONT:=*+1; J:=*+1; GO HH; END#,
               RS(A)    = RESIZE(A,NN)#,
               LEE(A,G,T) = BEGIN READ(IMAGEN,NX,POINTER(B));
                            PP:=POINTER(B,8);
                            FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NX DO
                            BEGIN
                                A[J]:=REAL(PP,1)*G+T;
                                PP:=PP+1;
                            END; END#;

    PROCEDURE FGEOT(ND,V1,V2,V3,ALB,Q,P);
    VALUE ND; INTEGER ND; ARRAY V1,V2,V3,ALB,Q,P[*];
    BEGIN
        LABEL      HH;
        INTEGER    I,J;
        REAL       DIF1,DIF2,FSTAR,ASTAR,A,B,C,D;
        J:=1;
        HH: IF J LEQ ND THEN
        BEGIN
            IF DIF1:=V3[J]-V1[J] LEQ CTA1 THEN INCRE(J);
            IF DIF2:=V2[J]-V1[J] LSS CTA2 THEN INCRE(J);
            FSTAR:=DIF1/DIF2;
            I:=IF FSTAR LSS FO THEN 1 ELSE IF FSTAR GTR FF1-DF THEN
               NTAB ELSE (FSTAR-FO)/DF+1;
            C:=CTAB[I];
            I:=MIN((C-CTAB[NTAB])/DC+1,300);
            ASTAR:=DIF2/F2[I];
            IF D:=1-ALB[J] LEQ CTA2 THEN INCRE(J);
            A:=ASTAR/D;
            B:=(V1[J]+V2[J])/(2*A)-D*(F1[I]+(F2[I]/2));
            P[J]:=520.9929033/(A*C);
            Q[J]:=B-ESIG/(A**1.33333333)-E;
            J:=*+1; GO HH;
        END;
    END;

    WRITE(TTY,<"NOMBRE DEL ARCHIVO?">);
    READ(TTY,<A6>,NOM);
    REPLACE POINTER(TIT) BY "PR/PRPRPR/BANDAS/",NOM FOR 6,".";
    REPLACE IMAGEN.TITLE BY POINTER(TIT);
    REPLACE POINTER(TIT) BY "JR90/IMAGEN/",NOM FOR 6,"/FLUJO.";
    REPLACE FLUJO.TITLE BY POINTER(TIT);
    REPLACE POINTER(TIT) BY "JR90/IMAGEN/",NOM FOR 6,"/INERCIA.";
    REPLACE INERCIA.TITLE BY POINTER(TIT);
```

```
WRITE(TTY,<"*NUMERO DE X'S Y Y'S?">);
READ(TTY,/,NX,NY);
NN:=NX+1;
RS(VD); RS(VT); RS(VN); RS(AL); RS(P); RS(Q); RESIZE(B,NX/6+1);
FLUJO.MAXRECSIZE  :=NX; FLUJO.BLOCKSIZE  :=NX*30;
INERCIA.MAXRECSIZE:=NX; INERCIA.BLOCKSIZE:=NX*30;

READ(DATOS,/,FO,FF1,DF,NTAB);
READ(DATOS,/,NTAB,FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NTAB DO CTAB[I]);
READ(DATOS,/,CO,DC,NTABC);
READ(DATOS,/,NTABC,FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NTABC DO F1[I]);
READ(DATOS,/,NTABC,FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NTABC DO F2[I]);

EM  :=0.97;
E   :=EM*240;
SIG :=5.6688*(10**(-8));
ESIG:=(1/(EM*SIG)**.33333333)*0.472470393934;
GD  :=0.32954;  TD:=6.920454+273;
GT  :=0.05849;  TT:=19.88751+273;
GN  :=0.03409;  TN:=15.15909+273;
C[1]:=0.006175463;
C[2]:=0.000818094;
C[3]:=-0.01852127;
C[4]:=0.013284246;
CONS:=-0.23669748;
CTA1:=-1*(10**(-6));
CTA2:=0.5*(10**(-12));
MNP :=MNQ:=10**(10);
MXP :=MXQ:=10**(-9);

THRU NY DO
BEGIN
    LEE(VN,GN,TN);
    LEE(VT,GT,TT);
    FOR K:=1,2,3,4 DO
    BEGIN
        READ(IMAGEN,NX,POINTER(B));
        PP:=POINTER(B,8);
        FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NX DO
        BEGIN
            X[K,J]:=REAL(PP,1)*C[K];
            PP:=PP+1;
        END;
    END;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NX DO
    AL[J]:=MAX(.01,MIN(X[1,J]+X[2,J]+X[3,J]+X[4,J]+CONS,0.8));
    LEE(VD,GD,TD);
    KONT:=0;
    FGEOT(NX,VN,VD,VT,AL,Q,P);
    IF (NREG+1) MOD 70 EQL 0 THEN
    WRITE(TTY,<"*LINEA",I5,X4,I5," ERRORES">,NREG+1,KONT);

    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NX DO
    BEGIN
        MXQ:=MAX(MXQ,Q[I]); MXP:=MAX(MXP,P[I]);
        MNQ:=MIN(MNQ,Q[I]); MNP:=MIN(MNP,P[I]);
    END;
```

```
        WRITE(FLUJO,NN,Q);
        WRITE(INERCIA,NN,P);
        NREG:=*+1;
    END;

    LOCK(FLUJO,CRUNCH);
    LOCK(INERCIA,CRUNCH);
    WRITE(TTY,<"*IMAGENES GENERADAS CON",I5," REGISTROS CADA UNA:",/,
    "*JR90/IMAGEN/",A6,"/FLUJO  : MIN:",F14.4,"      MAX:",F14.4,/,
    "*JR90/IMAGEN/",A6,"/INERCIA: MIN:",F14.4,"      MAX:",F14.4>,
    NREG,NOM,MNQ,MXQ,NOM,MNP,MXP);
END.
```

PROGRAMA 3.

```
BEGIN
    FILE TTY(KIND=REMOTE,MYUSE=IO),
         DK24(KIND=DISK,TITLE="JR90/DATOS/24."),
         DK48(KIND=DISK,TITLE="JR90/DATOS/48.");
    INTEGER I,J,N,M,R,NN,NI,N1,N2,N3;
    REAL A,E,K,P,Q,T,Y,L1,L2,DI,PI,P2,CN,CS,AL,EA,TD,TN,SG,SUMA,
         VN1,VN2,VN3;
    ARRAY D,G,S,W,M1,M2,H1,H2[0:0],FI[-100:100],B,H,U[0:100,0:0];
    DEFINE ITN  = FOR N:=1 STEP 1 UNTIL NN DO#,
           ITM  = FOR M:=1 STEP 1 UNTIL NN DO#,
           TEMP(M) = M NEQ N1 AND M NEQ N2 AND M NEQ N3#,
           RS(A)= RESIZE(A,NN+1)#;

    REAL PROCEDURE F(I,N); VALUE I,N; INTEGER I,N;
    BEGIN
        REAL S; INTEGER K;
        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL NN DO S:=*+U[I,K]*FI[N-K+1];
        F:=SG*B[I,N1]*U[I,N]**4-G[N]+A*S*B[I,N2]-A*D[N]*B[I,N2]*B[I,N3];
    END;

    REAL PROCEDURE INT(N,X); VALUE N,X; INTEGER N; REAL X;
    BEGIN                 % calculo de los integrandos de las funciones FI.
        REAL A;
        A:=1-EXP(-(X**2)/NN);
        A:=A*(EXP(-((NN-1)*(X**2))/NN)-EXP(-(X**2)));
        A:=EXP((-(N-1)*(X**2))/NN)*A;
        INT:=A/((X**2)*(1-EXP(-(X**2))));
    END;

    PROCEDURE CALCULAFI(N); VALUE N; INTEGER N;
    BEGIN                          % evaluacion de las funciones FI.
        REAL A,B;
        FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NI-1 DO
        A:=*+INT(N,L1+J*DI);
        FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NI DO
        B:=*+INT(N,L1+(J-(1/2))*DI);
        FI[N]:=(DI/6)*(INT(N,L1)+INT(N,NI)+2*A+4*B);
        IF N=1 THEN
        FI[1]:=2*SQRT(NN)-FI[1]*2*NN/SQRT(PI) ELSE
        BEGIN
            A:=2*(SQRT(N)+SQRT(N-2)-2*SQRT(N-1))*SQRT(NN);
            FI[N]:=A-(2*NN*FI[N]/SQRT(PI));
        END;
    END;

    PROCEDURE ANGULOCENITAL;
    BEGIN
        ITN BEGIN
            IF N LSS  6*Y  OR N GTR 18*Y THEN G[N]:=90;
            IF N LEQ 11*Y AND N GEQ  6*Y THEN G[N]:=(145-10*N/Y);
            IF N LEQ 18*Y AND N GEQ 13*Y THEN G[N]:=(10*N/Y-95);
            IF N LEQ 13*Y AND N GEQ 11*Y THEN G[N]:=35;
            G[N]:=G[N]*P2;
        END;
    END;
```

```
PROCEDURE ITERACION(I); VALUE I; INTEGER I;
BEGIN
     ITM BEGIN
          SUMA:=0;
          ITN SUMA:=*+F(I,N)*H[M,N];
          B[I+1,M]:=B[I,M]-SUMA;
          IF TEMP(M) THEN U[I+1,M]:=B[I+1,M];
          S[M]:=B[I+1,M]-B[I,M];
     END;
     ITN W[N]:=F(I+1,N)-F(I,N);
     ITN BEGIN
          M1[N]:=M2[N]:=0;
          ITM M1[N]:=*+H[N,M]*W[M];
          ITM M2[N]:=*+H[M,N]*S[M];
          M1[N]:=S[N]-M1[N];
     END;
     SUMA:=0;
     ITM ITN SUMA:=*+W[N]*S[M]*H[M,N];
     IF SUMA NEQ 0 THEN SUMA:=1/SUMA;
     ITN ITM H[N,M]:=*+SUMA*M1[N]*M2[M];
END;

BOOLEAN PROCEDURE INVERSA(A,AINVER,N);
VALUE N; INTEGER N;
ARRAY A,AINVER[*];
% ESTA RUTINA DEJA EN AINVER LA INVERSA DE A
% A ES DE TAMANO N*N
BEGIN
     INTEGER I,J,K,L,ITER;
     ARRAY IPIVOT,R,B,X[0:N-1];
     REAL PROV,PROV1,NN,S;
     LABEL FIN;
     ITER:=1;
     FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
     IPIVOT[J-1]:=J;
     FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO
     BEGIN
          L:=K;
          FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
          IF ABS(A[(I-1)*N+K-1]) LSS ABS(A[(L-1)*N+K-1]) THEN
          ELSE
          L:=I;
          IF L NEQ K THEN
          BEGIN
               FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
               BEGIN
                    PROV:=A[(K-1)*N+J-1];
                    A[(K-1)*N+J-1]:=A[(L-1)*N+J-1];
                    A[(L-1)*N+J-1]:=PROV;
               END;
               PROV1:=IPIVOT[K-1];
               IPIVOT[K-1]:=IPIVOT[L-1];
               IPIVOT[L-1]:=PROV1;
          END;
          IF ABS(A[(K-1)*N+K-1]) LSS 10**(-20) THEN GO FIN;
          FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
          BEGIN
               R[I-1]:=A[(I-1)*N+K-1]/A[(K-1)*N+K-1];
               A[(I-1)*N+K-1]:=-R[I-1];
               FOR J:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
               A[(I-1)*N+J-1]:=*-R[I-1]*A[(K-1)*N+J-1];
          END;
     END;
```

```
    WHILE ITER LEQ N DO
    BEGIN
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
        BEGIN
            NN:=IPIVOT[I-1];
            IF ITER EQL NN THEN
            B[I-1]:=1 ELSE
            B[I-1]:=0;
        END;
        FOR I:=2 STEP 1 UNTIL N DO
        FOR J:=1 STEP 1 UNTIL I-1 DO
        B[I-1]:=*+A[(I-1)*N+J-1]*B[J-1];
        X[N-1]:=B[N-1]/A[(N-1)*N+N-1];
        I:=N-1;
        DO
        BEGIN
            S:=0;
            FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL N DO
            S:=*+A[(I-1)*N+J-1]*X[J-1];
            X[I-1]:=(B[I-1]-S)/A[(I-1)*N+I-1];
            I:=*-1;
        END UNTIL I EQL 0;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
        AINVER[(I-1)*N+ITER-1]:=X[I-1];
        ITER:=*+1;
    END;
    INVERSA:=TRUE;
FIN:
END INVERSA;

% evaluacion de parametros

WRITE(TTY,<'NUMERO DE INTERVALOS?'>); READ(TTY,/,NN);

AL:=.3;                    %albedo
CN:=1;                     %cubertura nubosa
TD:=20;                    %temperatura diurna en grados centigrados
TN:=20;                    %temperatura nocturna en grados centigrados
TD:=*+273;                 %temperaturna diurna en grados Kelvin
TN:=*+273;                 %temperatura nocturna en grados Kelvin
R :=20;                    %numero de iteraciones para fi[n]
NI:=25;                    %numero de intervalos de integracion
L1:=.001;                  %limite inferior de integracion
L2:=10;                    %limite superior de integracion
PI:=ARCCOS(-1);            %pi
P2:=PI/180;                %pi/180
EA:=0.6;                   %emisividad de la columna de aire
SG:=(5.6688)*(10**(-8)); %constante de stefan-boltzmann
T :=24*3600;               %periodo
CS:=4186/3;                %constante solar

% constantes utiles

Y :=(NN*3600)/T;
DI:=(L2-L1)/NI;

% redefinicion de arreglos

RS(G); RS(S); RS(W); RS(M1); RS(M2); RS(D);
ITN RS(H[N,*]);
RESIZE(H1,NN**2+1);
RESIZE(H2,NN**2+1);
```

```
% evaluacion de FI[n]

IF NN EQL 24 THEN ITM READ(DK24,/,FI[M]) ELSE
IF NN EQL 48 THEN ITM READ(DK48,/,FI[M]) ELSE
ITM CALCULAFI(M);
FOR I:=0 STEP -1 UNTIL -NN DO FI[I]:=FI[I+NN];
ITN ITM D[N]:=*+FI[N-M+1];

% calculos del angulo cenital y de G[n]

ANGULOCENITAL;
ITN G[N]:=IF N GEQ 6*Y AND N LEQ 18*Y THEN
CN*CS*(1-AL)*(1-0.2*SQRT(1/COS(G[N])))*COS(G[N])+SG*EA*(TD**4)
ELSE SG*EA*(TN**4);
A:=1/SQRT(PI*T);

WRITE(TTY,<'VALORES INICIALES:'>);
WRITE(TTY,<'HORA 1 Y TEMPERATURA 1?'>); READ(TTY,/,N1,VN1);
WRITE(TTY,<'HORA 2 Y TEMPERATURA 2?'>); READ(TTY,/,N2,VN2);
WRITE(TTY,<'HORA 3 Y TEMPERATURA 3?'>); READ(TTY,/,N3,VN3);
VN1:=*+273; VN2:=*+273; VN3:=*+273;

WRITE(TTY,<'P,E Y Q INICIALES?'>);
READ(TTY,/,P,E,Q);

WRITE(TTY,<'NUMERO DE ITERACIONES?'>);
READ(TTY,/,NI);
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL NI+1 DO
BEGIN
     RS(B[I,*]);
     RS(U[I,*]);
     U[I,N1]:=VN1; U[I,N2]:=VN2; U[I,N3]:=VN3;
END;

% valores iniciales para B[n] y H[n,m]

ITN B[O,N]:=IF N GEQ 6*Y AND N LEQ 18*Y THEN 323 ELSE 273;
B[O,N1]:=E; B[O,N2]:=P*41860; B[O,N3]:=Q;
ITM IF TEMP(M) THEN U[O,M]:=B[O,M];

ITN BEGIN ITM
     IF TEMP(M) THEN
     IF M=N THEN H[N,M]:=4*SG*B[O,N1]*B[O,N]**3+A*B[O,N2]*FI[1]
     ELSE H[N,M]:=A*B[O,N2]*FI[N-M+1];
     H[N,N1]:=SG*U[O,N]**4;
     SUMA:=0;
     ITM SUMA:=*+U[O,M]*FI[N-M+1];
     H[N,N2]:=A*SUMA-A*B[O,N3]*D[N];
     H[N,N3]:=-A*B[O,N2]*D[N];
END;
ITN ITM H1[M-1+(N-1)*NN]:=H[N,M];
IF NOT INVERSA(H1,H2,NN) THEN WRITE(TTY,<'ERROR DE INVERSION'>);
ITN ITM H[N,M]:=H2[M-1+(N-1)*NN];
```

```
% iteraciones

FOR J:=0 STEP 1 UNTIL NI-1 DO ITERACION(J);

WRITE(TTY,<"ITERACION",I4>,NI);
WRITE(TTY,</,"HORA",X16,"TEMPERATURA",X16,"ERROR">);
FOR M:=12*Y STEP 1 UNTIL NN DO
WRITE(TTY,<F4.1,X10,F18.10,X10,E15.8>,M/Y,U[NI,M]-273,F(NI,M));
FOR M:=1 STEP 1 UNTIL 12*Y  DO
WRITE(TTY,<F4.1,X10,F18.10,X10,E15.8>,M/Y,U[NI,M]-273,F(NI,M));
WRITE(TTY,<//,"EMISIVIDAD  :    ",F25.10,"  ERROR:",E15.8>,
      B[NI,N1],F(NI,N1));
WRITE(TTY,<"INERCIA TERMICA:",F25.10,"  ERROR:",E15.8>,
      B[NI,N2]/41860,F(NI,N2));
WRITE(TTY,<"CONDUCTIVIDAD  :",F25.10,"  ERROR:",E15.8>,
      B[NI,N3],F(NI,N3));
WRITE(TTY[SPACE 4]);
END.
```

BIBLIOGRAFÍA

BEISER, A. "Concepts of Modern Physics" McGraw-Hill, New York, 1963.

BERMAN, E.R. "Geothermal Energy" Noyes Data Corporation, New Jersey, 1975.

BROYDEN, C.G. "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations" Math. of Computation 19 No. 92, 1965.

CARSLAW, H.S. "Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals" MacMillan, London, 1930.

CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C. "Conduction of Heat in Solids" 2a ed. Oxford University Press, 1959.

CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C. "Operational Methods in Applied Mathematics" 2a ed. Oxford University Press, New York, 1948.

DICKSON, L.E. "New First Course in the Theory of Equations". John Wiley and Sons, New York, 1962.

DOETSCH, G. "Guide to the Applications of the Laplace and Z Transforms" Van Nostrand Reinhold Company, 2a ed. London, 1971.

DOETSCH, G. "Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation" Springer-Verlag, Berlin, 1974.

DOETSCH, G. y VOELKER, D. "Die Zweidimensionale Laplace-Transformation" Verlag-Birkhäuser, Basel, 1950.

DYM, H. y McKEAN, H.P. "Fourier Series and Integrals" Academic Press, New York, 1972.

ECKERT, E.R.G. y DRAKE, R.M "Analysis of Heat and Mass Transfer" International Student Edition, McGraw-Hill, Tokyo, 1972.

EDWARDS, R.E. "Fourier Series" Springer-Verlag, 2a ed. New York, 1979.

EGGLESTON, H.G. "Convexity" Cambridge University Press, 1969.

FARAH, J.L. "Analysis of a Discrete-Time Linear Model for Geothermal Flux Reconnaissance from Two or Three Infrared Measurements" XV Int. Symp. on Remote Sensing of Environment. Ann Arbor, Mich., 1981.

HLADIK, J. "La Transformation de Laplace à plusieurs variables" Masson, 1969.

JAEGER, J.C. "Conduction of Heat in a Solid with Periodic Boundary Conditions, with an Application to the Surface Temperature of the Moon" Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 No. 2, 1953.

JAEGER, J.C. "Pulsed Surface Heating of a Semi-Infinite Solid" Quart. Appl. Math. Vol XI, No 1, 1953.

JINICH, A. et al. "Application of Machine Processing of Visible and Thermal Data to the Study of the Geothermal Area of Cerro Prieto, Mexico" XV Int. Symp. on Remote Sensing of Environment, Ann Arbor, Mich., 1981.

PASCALI, D. y SBURLAN, S. "Nonlinear Mappings of Monotone Type" Editura Academiei, Romania, 1978.

SAATY, T.L. y BRAM, J. "Nonlinear Mathematics" McGraw-Hill, New York, 1964.

SCHOENBERG, I. J. "Convex Domains and Linear Combinations of Continuous Functions" American Math. Society, Vol 34 No. 4, 1933.

SOMMERFELD, A. "Partial Differential Equations in Physics", Lectures on Theoretical Physics, Vol VI, Academic Press, New York, 1949.

WAHL, E. F. "Geothermal Energy Utilization" John Wiley and Sons, New York, 1977.

WATSON, K. "Periodic Heating of a Layer over a Semi-Infinite Solid" J. Geophys. Res. Vol 78 No. 26, 1973.

WATSON, K. "Application of Thermal Modeling in the Geological Interpretation of IR Images" Proc. of the 7th International Symposium on Remote Sensing of Environment, Vol. 3. Ann Arbor, Mich, 1971.

WATSON, K. "Geologic Applications of Thermal Infrared Images" Proc. of the IEEE, Vol. 63 No 1, Denver, Col. 1975.

WIDDER, D.V. "The Heat Equation" Academic Press, London, 1975.