Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURAS DE FACTORIZACION PARA FUENTES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

MARIA CLEMENTINA PEREZ DUARTE NOROÑA

MEXICO, D. F. INVIERNO, 1983

INDICE

INTRODUCCION.

Este trabajo se basa principalmente en el artículo "Factorization of Cones" de R.E. Hoffmann en el que se definen y establecen algunas propiedades de las $(\underline{E},\underline{M})$-estructuras de factorización en una categoría $\underline{\mathcal{K}}$.

Hoffmann emplea el término "cone" para referirse a fuentes o pozos naturales, pero, excepto en las proposiciones 1.5 y 1.6 de su artículo, "cone" es una fuente con índices discretos. En 1.5 y 1.6 al emplear "cone" indistintamente como pozo y fuente natural, su demostración es muy confusa.

En la sección 1, después de unas definiciones básicas, se demuestran las proposiciones enunciadas en 1.2 del artículo "Dispersed Factorization Structures" de H. Herrlich, G. Salicrup y R. Vázquez. En este trabajo, dichos resultados aparecen enlistados en la proposición 1.2; además, se agregan dos resultados, el 12 y el 13, que no están incluídos en ninguno de los dos artículos, pero son útiles para demostrar algunos teoremas de la sección 3. En el inciso 10 de esta lista se define el <u>Germen</u> de una factorización, concepto importante para las construcciones hechas en la sección 3. Se agrega enseguida una observación del artículo [HSV] que se refiere a casos particulares en que ciertos tipos de estructuras de factorización pueden ser extendidas a estructuras de factorización para fuentes en general, y dos lemas del artículo

[Ho] donde se dan caracterizaciones de los $\underline{M}$-objetos en una categoría con estructura de factorización $(\underline{E},\underline{M})$. El primero de los lemas pide que la categoría tenga un objeto final y el segundo es en general.

En la sección 2 se enuncia y demuestra el resultado principal de [Ho] con las modificaciones que incluyen Melton y Strecker en su artículo "On Factorization Structures". Este Teorema de Caracterización da condiciones equivalentes a que exista una $(\underline{E},\underline{M})$-estructura de factorización dada $\underline{E}$ una clase de $\not{K}$-morfismos. Dicho Teorema permite demostrar en forma sencilla resultados importantes como $\underline{E} \subseteq Epi\not{K}$. En esta misma sección se dan en forma más clara las demostraciones de 1.5 y 1.6 de [Ho] que se refieren a la existencia del colímite para cierto funtor T.

En la sección 3, a partir de la noción de germen de una factorización, se construyen estructuras de factorización particulares y se prueba que, bajo ciertas condiciones, se tienen estructuras de factorización tales como (Epi, Monoextremado) en $\not{K}$ y en $\not{K}^{op}$ y (Epi extremado, Mono) en $\not{K}$.

Se han eliminado a lo largo de este trabajo las condiciones de "localmente pequeña" y de "fuentes con índices en conjuntos". Sin embargo, se pide la primera condición en los casos particulares que aparecen en la observación 1.3(3) y en los corolarios 3.9(1 y 3) y 3.10. Las subcategorías se suponen siempre plenas y repletas, como se pide en los tres artículos mencionados.

§1.

(1.1) <u>Definiciones</u>.

(i) Una <u>fuente</u> en $\underline{\mathcal{X}}$ con dominio en $\bar{\underline{X}}$ es una pareja $(\bar{\underline{X}}, (f_i)_I)$ donde $\bar{\underline{X}}$ es un $\underline{\mathcal{X}}$-objeto y $(f_i)_I$ es una familia de $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos $(f_i : \bar{\underline{X}} \longrightarrow Y_i)_I$ con I una clase que puede ser propia, impropia o vacía. Otras notaciones son $(\bar{\underline{X}}, (f_i : \bar{\underline{X}} \longrightarrow Y_i)_I)$ y $(\bar{\underline{X}}, \mathfrak{F})$.

(ii) $(\underline{E}, \underline{M})$ es una <u>estructura de factorización para fuentes en</u> $\underline{\mathcal{X}}$ si y sólo si $\underline{E}$ es una clase de $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos cerrada bajo composición con isomorfismos; $\underline{M}$ es un conglomerado de fuentes en $\underline{\mathcal{X}}$ cerrado bajo la composición con isomorfismos; cada fuente $(\bar{\underline{X}}, (f_i)_I)$ en $\underline{\mathcal{X}}$ tiene una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización: $f_i = m_i e$ para cada $i \in I$ con $(m_i)_I \in \underline{M}$ y $e \in \underline{E}$; $\underline{\mathcal{X}}$ tiene la propiedad de $(\underline{E}, \underline{M})$-diagonalización (es $(\underline{E}, \underline{M})$-diagonalizable), i.e.: siempre que f y e sean $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos y $(Y, (m_i)_I)$, $(Z, (f_i)_I)$ fuentes en $\underline{\mathcal{X}}$ tales que $e \in \underline{E}$ y $(Y, (m_i)_I) \in \underline{M}$ y $f_i e = m_i f$ para cada $i \in I$, entonces existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo g tal que $ge = f$ y $m_i g = f_i$ para cada $i \in I$.

(1.2) PROPOSICIONES

En cada una de las afirmaciones (1) a (13) consideremos $(\underline{E},\underline{M})$ una estructura de factorización en $\mathcal{X}$.

(1) $\underline{E}$ es una clase de epimorfismos.

<u>dem</u>: Sea $e:\underline{X}\longrightarrow Y$ un morfismo en $\underline{E}$ y $r,s:Y\longrightarrow Z$ dos $\mathcal{X}$-morfismos tales que $re=se$. Sea $I=\operatorname{Mor}\mathcal{X}$. Definimos para cada $i\in I$ $f_i:=re=se$. Sea $e':\underline{X}\longrightarrow W$, $(W,(m_i)_I)$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de $(\underline{X},(f_i)_I)$. Definimos para cada $i\in I$:

$$g_i:=\begin{cases} r & \text{si } m_i \text{ está definida y } m_i i=s \\ s & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Tenemos entonces $\forall_{i\in I}$ $g_ie=re$ ó $g_ie=se$, $re=se=f_i$

$\therefore \forall_{i\in I}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Y \arrow[d, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ W \arrow[r, "m_i"'] & Z \end{tikzcd}$$

Por la propiedad de diagonalización, existe un único $\mathcal{X}$-morfismo $h:Y\longrightarrow W$ que hace conmutar el diagrama.

Si $m_hh=s$, entonces $s=m_hh=g_h=r$

Si $m_hh\neq s$, entonces $s\neq m_hh=g_h=s$!

$\therefore\ m_hh=s \quad \therefore\ r=s$ ∎

(2) $(\underline{E},\underline{M})$-factorizaciones son únicas, salvo isomorfismos.

<u>dem</u>: Sea $(\underline{X},(f_i)_I)$ una fuente en $\mathcal{X}$ y $(e,(m_i)_I)$, $(e',(m'_i)_I)$ dos $(\underline{E},\underline{M})$-factorizaciones de $(\underline{X},(f_i)_I)$.

$\therefore$ Para cada $i\in I$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Z \arrow[d, "m_i"] \arrow[dl, dashed, shift left, "f"'] \\ Z' \arrow[r, "m_i'"'] \arrow[ur, dashed, shift left, "g"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Por la propiedad de diagonalización existen únicos $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos f y g que hacen conmutar los respectivos diagramas.

$\therefore\ fge' = fe = e'$ y $gfe = ge' = e$.

Como e y e' son epimorfismos, $gf = 1_Z$ y $fg = 1_{Z'}$. ∎

(3) $\underline{E} \cap \underline{M}$ es la clase de isomorfismos de $\underline{\mathcal{X}}$.

<u>dem</u>: "$\subset$" Sea $f \in \underline{E} \cap \underline{M}$. $f : \bar{X} \to Y$. Fijándonos en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{\bar{X}}"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ \bar{X} \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

como $f \in \underline{E} \cap \underline{M}$, existe un único $g : Y \to Z$ que hace conmutar el diagrama así obtenido. $\therefore$ f es isomorfismo

"$\supset$" Sea f un $\underline{\mathcal{X}}$-isomorfismo, $f : \bar{X} \to Y$ y $e : \bar{X} \to Z$, $m : Z \to Y$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de f. $\therefore$ $me = f$. Como f es sección, e es sección. Por (1) e es epimorfismo $\therefore$ e es isomorfismo $\therefore$ $f \in \underline{M}$. Sea g la inversa de f. $\therefore$ $meg = fg = 1_Y$ y $egme = egf = e$ $\therefore$ $egm = 1_Z$ $\therefore$ m es isomorfismo $\therefore f \in \underline{E}$.
$\therefore f \in \underline{E} \cap \underline{M}$ ∎

(4) Toda monofuente extremada, en particular todos los límites y las secciones, pertenecen a $\underline{M}$.

<u>dem</u>: Sea $(\bar{X}, (f_i)_I)$ una monofuente extremada en $\underline{\mathcal{X}}$. Sea $(e, (Y, (m_i)_I))$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de $(\bar{X}, (f_i)_I)$. Por (1), e es epimorfismo. Como para cada $i \in I$ $m_i e = f_i$ y $(f_i)_I$ es extremada, e es isomorfismo. $\therefore (f_i)_I \in \underline{M}$ ∎

(5) Si f, g, h son $\underline{\mathcal{K}}$-morfismos tales que $h = gf$, entonces:

(a) Si $h \in \underline{E}$ y f es epimorfismo, $g \in \underline{E}$.

(b) Si $f, g \in \underline{E}$ entonces $h \in \underline{E}$.

dem: Sean $f: \underline{X} \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: \underline{X} \to Z$ $\underline{\mathcal{K}}$-morfismos tales que $h = gf$.

"(a)" Sea $e: Y \to W$, $m: W \to Z$ una $(\underline{E}, \underline{M})$ factorización de g. ∴ Conmuta

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[d, "ef"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[d, "1_Z"] \arrow[lld, dashed, "k"'] \\ W \arrow[rr, "m"'] & & Z \end{tikzcd}$$

Como $h \in \underline{E}$, existe un único $\underline{\mathcal{K}}$-morfismo $k: Z \to W$ tal que $mk = 1_Z$ y $kh = ef$. ∴ $kgf = ef$. Como f es epimorfismo, $kg = e$ ∴ k es epimorfismo y sección ∴ k es isomorfismo ∴ $g = k^{-1}e$ con k^{-1} isomorfismo ∴ $g \in \underline{E}$.

"(b)" Sea $\underline{X} \xrightarrow{e} R \xrightarrow{m} Z$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de h. En el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[ld, dashed, "j"'] \\ R \arrow[r, "m"'] & Z \end{tikzcd}$$

como $f \in \underline{E}$, existe un único $\underline{\mathcal{K}}$-morfismo $j: Y \to R$ tal que $jf = e$ y $mj = g$. ∴ j es epimorfismo. Como $g \in \underline{E}$, por inciso anterior, $m \in \underline{E}$. Por (3), m es un $\underline{\mathcal{K}}$-isomorfismo ∴ $h \in \underline{E}$ ■

(6) Si $(\underline{X}, (f_i)_I)$ es una fuente en $\underline{\mathcal{K}}$ y $(\underline{X}, (g_j)_J)$, $((Z_j, (k_{ji})_{I_j})_J)$ es una factorización de $(\underline{X}, (f_i)_I)$ (es decir: $\bigcup_{j \in J} I_j = I$ y para cada $j \in J$ y cada $i \in I_j$ $f_i = k_{ji} g_j$) entonces:

(a) Si $(\underline{X}, (f_i)_I) \in \underline{M}$, $(\underline{X}, (g_j)_J) \in \underline{M}$.

(b) Si $(\underline{X}, (g_j)_J) \in \underline{M}$ y para cada $j \in J$ $(Z_j, (k_{ji})_{I_j}) \in \underline{M}$, entonces $(\overline{X}, (f_i)_J) \in \underline{M}$.

<u>dem</u>: Sea $(\overline{X}, (f_i : \overline{X} \longrightarrow Y_i))_I$ una fuente en $\underline{\mathcal{X}}$ y $(\overline{X}, (g_j)_J)$, $(Z_j, (k_{ji})_{I_j})_J$ una factorización de $(\overline{X}, (f_i)_I)$.

(a) Sea $e : \overline{X} \longrightarrow W$, $(W, (m_j)_J)$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de $(\overline{X}, (g_j)_J)$.

$\therefore \forall_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[dd, "1_{\overline{X}}"'] & W \arrow[d, "m_j"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] \\ & Z_j \arrow[d, "k_{ji}"] \\ \overline{X} \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

como $(f_i)_I \in \underline{M}$, existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $h : W \to \overline{X}$ que hace conmutar el nuevo diagrama. Como e es epimorfismo y $he = 1_{\overline{X}}$, e es isomorfismo. $\therefore (\overline{X}, (g_j)_J) \in \underline{M}$.

(b) Sea $e : \overline{X} \longrightarrow W$, $(W, (m_i)_I)$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de $(\overline{X}, (f_i)_I)$.

$\therefore \forall_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g_j"'] & W \arrow[d, "m_i"] \arrow[dl, dashed, "h_j"'] \\ Z_j \arrow[r, "k_{ji}"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Como $(Z_j, (k_{ji})_{I_j}) \in \underline{M}$, para cada $j \in J$ existe un único $h_j : W \longrightarrow Z_j$ $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo que hace conmutar el diagrama correspondiente. Como para toda $j \in J$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\overline{X}}"'] & W \arrow[d, "h_j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \overline{X} \arrow[r, "g_j"'] & Z_j \end{tikzcd}$$

y como $(\overline{X}, (g_j)_J) \in \underline{M}$, existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $h : W \longrightarrow \overline{X}$ que hace conmutar el nuevo diagrama.

$\therefore$ e es isomorfismo $\therefore (\overline{X}, (f_i)_I) \in \underline{M}$. ∎

(7) Si $(\overline{X}, (f_i)_I)$ es una fuente y existe $J \subset I$ tal que $(\overline{X}, (f_j)_J) \in \underline{M}$ entonces $(\overline{X}, (f_i)_I) \in \underline{M}$.

<u>dem</u>: Sea $e : \overline{X} \longrightarrow Y$, $(Y, (m_i)_I)$ una $(\underline{E}, \underline{M})$ factorización de $(\overline{X}, (f_i)_I)$.

$\therefore \underset{j\in J}{\forall}$ conmuta
$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\bar{X}}"'] & Y \arrow[d, "m_j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \bar{X} \arrow[r, "f_j"'] & Y_j \end{tikzcd}$$
Como $(\bar{X},(f_j)_J)\in \underline{M}$, existe un único $h: Y \to \bar{X}$ que hace conmutar el diagrama. $\therefore$ e es isomorfismo.

$\therefore (\bar{X},(f_i)_I)\in \underline{M}$. ■

(8) $\underline{E}$ y $\underline{M}$ se determinan mutuamente a través de la propiedad de diagonalización.

<u>dem</u>: (i) Sea $f: \bar{X}\to Y$ un $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo que satisfaga la propiedad de diagonalización con cuadrados conmutativos cuya base esté en $\underline{M}$. Sea $\bar{X} \xrightarrow{e} Z \xrightarrow{m} Y$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de f. $\therefore$ Conmuta
$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ Z \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd}$$
por la propiedad de diagonalización, existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $h: Y \to Z$ tal que $hf=e$ y $mh=1_Z$. $\therefore$ h es epimorfismo y sección $\therefore$ h es isomorfismo $\therefore$ m es isomorfismo $\therefore f\in\underline{E}$.

(ii) Sea $(Z,(f_i)_I)$ una fuente en $\underline{\mathcal{X}}$ que satisfaga la propiedad de diagonalización con cuadrados cuya tapa esté en $\underline{E}$. Sea $e: Z\to Y$, $(Y,(m_i)_I)$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de $(Z,(f_i)_I)$.

Como el diagrama
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_Z"'] & Y \arrow[d, "m_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ Z \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$
conmuta, existe un único $h: Y\to Z$ tal que $he=1_Z$ $\therefore$ e es isomorfismo

$\therefore (Z,(f_i)_I)\in\underline{M}$. ■

(9) Toda subcategoría $\underline{A}$ de $\underline{\mathcal{X}}$ tiene una cerradura $\underline{E}$-reflexiva $\underline{\beta}$. $\bar{X}$ es un $\underline{\beta}$-objeto si y sólo si existe una fuente

$(\underline{X}, (m_i : \underline{X} \longrightarrow A_i)_I)$ en $\underline{M}$ con A_i un $\underline{A}$-objeto para cada $i \in I$.

dem: (i) $\underline{K}$ es $\underline{E}$-reflexiva en $\underline{K}$ pues las identidades pertenecen a $\underline{E}$.

(ii) Sea $\{\underline{B}_k\}_K$ la familia no vacía de todas las subcategorías $\underline{E}$-reflexivas de $\underline{K}$ que contienen a $\underline{A}$. Definimos $\underline{B} := \bigcap_{k \in K} \underline{B}_k$

(iii) Sea $\underline{B}'$ la subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$ cuyos objetos son aquellos $\underline{K}$-objetos para los cuales existe una $\underline{M}$-fuente $(\underline{X}, (m_i : \underline{X} \longrightarrow A_i)_I)$ con $(A_i)_I \subseteq \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Probaremos que $\underline{B}'$ es $\underline{E}$-reflexiva y que contiene a $\underline{A}$. Sea Y un $\underline{K}$-objeto y sea $(f_j : Y \longrightarrow B_j)_J$ la fuente de todos los $\underline{K}$-morfismos cuyo dominio es Y y cuyo codominio es un $\underline{B}'$-objeto. $\therefore$ Para cada $j \in J$ hay una $\underline{M}$-fuente $(m_{ji} : B_j \longrightarrow A_{ji})_{I_j}$ con $A_{ji} \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ para cada $i \in I_j$. Definimos $H := \bigcup_{j \in J} I_j$ y $(\varphi_h : Y \longrightarrow A_h)_H$ la fuente obtenida de la composición de las fuentes $(f_j)_J$, $((m_{ji})_{I_j})_J$. Sea $e : Y \longrightarrow Z$, $(Z, (n_h)_H)$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de $(Y, (\varphi_h)_H)$. $\therefore$ Z es un $\underline{B}'$-objeto. Sea $f : Y \longrightarrow B$ un $\underline{K}$-morfismo con codominio en $\underline{B}'$. $\therefore$ $f = f_j$ y $B = B_j$ para alguna $j \in J$. (Para simplificar la notación escribiremos $I = I_j \subset H$).

$\therefore$ Conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "n_i"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \\ B \arrow[r, "m_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

. Como $(B, (m_i)_I) \in \underline{M}$, existe un único $\underline{K}$-morfismo $\varphi : Z \longrightarrow B$ que hace conmutar el nuevo diagrama. $\therefore$ $\varphi e = f$. Como Z y B son $\underline{B}'$-objetos y $\underline{B}'$ es plena, φ es un $\underline{B}'$-morfismo. $\therefore$ (e, Z) es universal para

Y en $\underline{\beta}'$. $\therefore$ $\underline{\beta}'$ es $\underline{E}$-reflexiva en $\underline{X}$. Como las identidades pertenecen a $\underline{M}$, $\underline{A} \subseteq \underline{\beta}'$.

(iv) Sea $\underline{\mathscr{C}}$ una subcategoría $\underline{E}$-reflexiva en $\underline{X}$ tal que $\underline{A} \subseteq \underline{\mathscr{C}}$. Sea B un $\underline{\beta}'$-objeto y sea (c_B, u_B) la $\underline{E}$-reflexión de $\underline{B}$ en $\underline{\mathscr{C}}$. Como B es $\underline{\beta}'$-objeto, hay una $\underline{M}$-fuente $(m_i : B \to A_i)_I$ con $(A_i)_I \subset \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Por la propiedad universal de u_B, para cada $i \in I$ existe un único $\underline{X}$-morfismo $h_i : c_B \to A_i$ tal que $h_i u_B = m_i$ $\therefore$ Conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "1_B"'] & c_B \arrow[d, "h_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ B \arrow[r, "m_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

$\therefore$ existe un único $\underline{X}$-morfismo $h : c_B \to B$ tal que $h u_B = 1_B$.

Como $u_B \in \underline{E}$, u_B es isomorfismo. $\therefore$ $B \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathscr{C}}$. $\therefore$ $\underline{\beta}' \subseteq \underline{\mathscr{C}}$ $\therefore$ $\underline{\beta} = \underline{\beta}'$. $\blacksquare$

(10) En particular, la subcategoría $\underline{\mathscr{C}}$ de $\underline{X}$ cuyos objetos son aquellos $\underline{\bar{X}}$ tales que $(\underline{\bar{X}}, \emptyset) \in \underline{M}$ (se dice que $\underline{\bar{X}}$ es un $\underline{M}$-objeto), es la más pequeña subcategoría $\underline{E}$-reflexiva de $\underline{X}$. A esta subcategoría se le llama el <u>Germen</u> de la factorización. Los objetos de $\underline{\mathscr{C}}$ pueden describirse también como los objetos $\underline{\bar{X}}$ que son $\underline{E}$-inyectivos.

<u>dem</u>: (i) Sea $\bar{X}$ un $\underline{X}$-objeto. Supongamos que $(\underline{\bar{X}}, \emptyset) \in \underline{M}$. Sean $f : A \to B$ un $\underline{E}$-morfismo y $g : A \to \underline{\bar{X}}$ un $\underline{X}$-morfismo. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \bar{X} & \end{tikzcd}$$

, cuya base está formada por $(\underline{\bar{X}}, \emptyset) \in \underline{M}$.

Como $f \in \underline{E}$, hay un único $\underline{X}$-morfismo $h : B \to \underline{\bar{X}}$ tal que

$hf = g$. $\therefore \bar{X}$ es $\underline{E}$-inyectivo.

Supongamos ahora que $\bar{X}$ es $\underline{E}$-inyectivo, y tomemos un diagrama conmutativo cuya base sea $(\bar{X}, \emptyset)$, con $e : A \to B$ un

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \bar{X} & \end{tikzcd}$$

$\underline{E}$-morfismo. Como $\bar{X}$ es $\underline{E}$-inyectivo, hay un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $h : B \to \bar{X}$ tal que $he = g$. Por la proposición 1.2(8), $(\bar{X}, \emptyset) \in \underline{M}$.

(ii) Sea Y un $\underline{\mathcal{X}}$-objeto y sea $(f_i : Y \to C_i)_I$ la fuente de todos los $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos de Y en objetos de $\underline{\mathcal{C}}$. Sea $e : Y \to Z$, $(Z, (m_i)_I)$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de $(Y, (f_i)_I)$. Sean $\varepsilon : A \to B$ un $\underline{E}$-morfismo y $g : A \to Z$ un $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo. Tenemos para cada $i \in I$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, dashed, "h_i"] \\ Z \arrow[r, "m_i"'] & C_i \end{tikzcd}$$

. Como C_i es $\underline{E}$-inyectivo, existe un único $h_i : B \to C_i$ que hace conmutar el cuadrado exterior. Como $\varepsilon \in \underline{E}$, existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $h : B \to Z$ que hace conmutar el nuevo diagrama. $\therefore Z$ es $\underline{E}$-inyectivo. $\therefore Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{C}}$. Como todos los objetos de $\underline{\mathcal{C}}$ son $\underline{E}$-inyectivos y $e \in \underline{E}$, (e, Z) es una $\underline{E}$-reflexión para Y en $\underline{\mathcal{C}}$.

(iii) Sea $\underline{\mathcal{A}}$ otra subcategoría $\underline{E}$-reflexiva de $\underline{\mathcal{X}}$. $\therefore \underline{\mathcal{A}}$ es su propia cerradura $\underline{E}$-reflexiva. Sea $(\bar{X}, \emptyset) \in \underline{M}$. Por vacuidad, todos los codominios de esta fuente están en $\underline{\mathcal{A}}$. $\therefore \underline{\mathcal{C}} \subseteq \underline{\mathcal{A}}$. ∎

(11) Si f, g, h son $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos tales que hg, gf están en $\underline{E}$, entonces $h, hgf \in \underline{E}$.

dem: Tomemos un diagrama conmutativo, con $(A, (m_i)_I) \in \underline{M}$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "k"'] & \underline{X} \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[ddll, dashed, "\varphi"'] & Z \arrow[dd, "n_i"] \arrow[ddlll, dashed, "\psi"] \\ & & & \\ A \arrow[rrr, "m_i"'] & & & B_i \end{tikzcd}$$

. Como $gf\in\underline{E}$, existe un único $\varphi: Y\to A$ tal que $\varphi gf=k$. Como $hg\in\underline{E}$, hay un único $\psi: Z\to A$ tal que $\psi hg=\varphi g$. $\therefore \psi hgf=\varphi gf=k$

$\therefore$ (Prop. 1.2(8)) $hgf\in\underline{E}$. Como $gf\in\underline{E}\subset \mathrm{Epi}\,\mathcal{K}$, por 1.2(5), $h\in\underline{E}$. ■

(12) Si $(\underline{E}',\underline{M}')$ es otra estructura de factorización en $\mathcal{K}$ entonces $\underline{E}\subset\underline{E}'$ si y sólo si $\underline{M}'\subset\underline{M}$.

dem: "⇒" Supongamos que $\underline{E}\subset\underline{E}'$. Tomemos un diagrama conmutativo con $e\in\underline{E}$ y $(C,(m_i)_I)\in\underline{M}'$. $\therefore e\in\underline{E}'$. $\therefore$ Hay un único

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ C \arrow[r, "m_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$

$\mathcal{K}$-morfismo $h: B\to C$ que hace conmutar el nuevo diagrama. Por 1.2(8), $(C,(m_i)_I)\in\underline{M}$.

"⇐" La demostración es similar. ■

(13) Sea $(\underline{X},(m_i)_I)\in\underline{M}$. Definamos una relación de equivalencia en I tal que $i\sim j$ si y sólo si $m_i=m_j$. Tomemos $J\subset I$ una clase de representantes. Entonces $(\underline{X},(m_j)_J)\in\underline{M}$.

dem: Sea $e:\underline{X}\to Z$, $e\in\underline{E}$ $(Z,(h_j)_J)$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de $(\underline{X},(m_j)_J)$. Definimos para cada $i\in I-J$ $h_i:=h_j$ si $i\sim j$. Como $J\subset I$ y $(h_j)_J\in\underline{M}$, por 1.2(7) $(h_i)_I\in\underline{M}$. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\underline{X}}"'] & Z \arrow[d, "h_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \underline{X} \arrow[r, "m_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i\in I$ y $(\underline{X},(m_i)_I)\in\underline{M}$ existe un único $\mathcal{K}$-morfismo $h: Z\to\underline{X}$ tal que $he=1_Z$ $\therefore$ e es isomorfismo.

$\therefore (\underline{X},(m_j)_J)\in\underline{M}$. ■

(1.3) OBSERVACIONES

(1) Las estructuras de factorización pueden ser definidas con respecto a cierto conglomerado $\underline{S}$ de fuentes, requiriendo la existencia de $(\underline{E},\underline{M})$-factorizaciones sólo para fuentes en $\underline{S}$. Pero puede fallar que $\underline{E}$ sea una clase de epimorfismos: En <u>Set</u>, $\underline{E} = \mathrm{Mor}\,\underline{Set}$, $\underline{M} = \mathrm{Iso}\,\underline{Set}$ es una estructura de factorización para morfismos donde $\underline{E} \not\subset \mathrm{Epi}\,\underline{Set}$.

(2) Si $\underline{K}$ tiene productos entonces cada estructura de factorización $(\underline{E},\underline{M})$ en $\underline{K}$ para morfismos puede ser extendida en forma única a una estructura de factorización $(\underline{E},\underline{M}')$ para fuentes con índices en un conjunto.

<u>dem</u>: Sea $(\underline{X},(f_i:\underline{X}\longrightarrow Y_i)_I)$ una fuente en $\underline{K}$ con I un conjunto. Para cada $i\in I$, f_i tiene una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización $m_ie_i=f_i$, $m_i: Z_i \longrightarrow Y_i$. Sea $Z := \prod_{i\in I} Z_i$ y $(p_i)_I$ la familia de proyecciones de $\prod_{i\in I} Z_i$ en $(Z_i)_I$. Sea $\varepsilon := \prod_{i\in I} e_i$ el producto de $(e_i)_I$. Sea $\underline{X} \xrightarrow{e} R \xrightarrow{m} Z$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de ε. Definimos $\forall_{i\in I}$ $\mu_i := m_ip_im$. $\therefore$ $\mu_ie = m_ip_ime = m_ip_i\varepsilon = m_ie_i = f_i$ para cada $i\in I$. Tomemos $\underline{M}'$ la clase de fuentes formadas como lo hemos hecho para $(R,(\mu_i)_I)$. $\therefore$ $\underline{M}'$ es cerrada bajo composición con isomorfismos y toda fuente con índices en un conjunto se puede factorizar a través de $(\underline{E},\underline{M}')$.

Para comprobar la propiedad de diagonalización, tomemos un diagrama conmutativo con $(R,(\mu_i)_I)\in\underline{M}'$ y $e\in\underline{E}$.

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ R \arrow[r, "\mu_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

$(R,(\mu_i)_I)$ es de la forma $(R \xrightarrow[m]{} \prod_{i\in I} Z_i \xrightarrow[p_i]{} Z_i \xrightarrow[m_i]{} Y_i)_I$ con $(R,m)\in \underline{M}$ y $(Z_i, m_i)\in \underline{M}$ para cada $i\in I$. Formamos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[ddl, dashed, "k"'] \arrow[dddl, dashed, "k_i"] \arrow[ddd, "g_i"] \\ R \arrow[d, "m"'] & \\ \prod_{i\in I} Z_i \arrow[d, "p_i"'] & \\ Z_i \arrow[r, "m_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Como $(\underline{E},\underline{M})$ es estructura de factorización, para cada $i\in I$ existe un único $k_i : P \to Z_i$ que hace conmutar el nuevo diagrama. Como $\prod_{i\in I} Z_i$ es un producto, existe un único $\mathcal{X}$-morfismo $k: P \to \prod_{i\in I} Z_i$ con $k_i = p_i k$ para cada $i\in I$.

$\therefore \ \forall_{i\in I}\ p_i k e = k_i e = p_i m f. \quad \therefore\ ke = mf.$

$\therefore$ Hay un único $h: P \to R$ con $he = f$ y $mh = k$. Sea $i\in I$, tenemos $\mu_i h = m_i p_i m h = m_i p_i k = m_i k_i = g_i$. $\therefore (\underline{E},\underline{M}')$ es estructura de factorización en $\mathcal{X}$. La unicidad de la extensión se sigue de la diagonalización. ∎

(3) Si $\mathcal{X}$ es localmente pequeña y tiene una estructura de factorización $(\underline{E},\underline{M})$ para fuentes con índices en conjuntos, son equivalentes:

a) $(\underline{E},\underline{M})$ puede ser extendida (en forma única) a una estructura de factorización $(\underline{E},\underline{M}')$ en $\mathcal{X}$ para fuentes en general.

b) $\underline{E}$ es una clase de epimorfismos en $\mathcal{X}$.

c) Si $(\overline{X},m)\in\underline{M}$ entonces $(\overline{X},(m,m))\in\underline{M}$.

d) Si $(\overline{X},\mathcal{F})\in\underline{M}$, $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es un conjunto, entonces $(\overline{X},\mathcal{G})\in\underline{M}$.

e) Toda $\mathcal{X}$-sección pertenece a $\underline{M}$.

dem: "a⇒b" Inmediato por 1.2 (1).

"b⇒e" Supongamos que $\underline{E}$ es una clase de epimorfismos. Sea $s:\bar{X}\longrightarrow Y$ una $\underline{X}$-sección. Sea $\bar{X}\xrightarrow{e} W \xrightarrow{m} Y$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de s. ∴ $me=s$ ∴ e es sección ∴ e es isomorfismo. ∴ $s\in\underline{M}$.

"e⇒d" Sea $(\bar{X},\mathcal{F})\in\underline{M}$, $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ conjunto. $\mathcal{F}=(f_j:\bar{X}\longrightarrow Z_j)$, $\mathcal{G}=(f_i)_I$, $J\subset I$. Sea $e:\bar{X}\longrightarrow W$, $(W,(m_i)_I)$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de $\mathcal{G}$ ∴ Para cada $j\in J$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\bar{X}}"'] & W \arrow[d, "m_j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \bar{X} \arrow[r, "f_j"'] & Z_j \end{tikzcd}$$

Como $(\bar{X},\mathcal{F})\in\underline{M}$, existe un único $h:W\longrightarrow\bar{X}$ que hace conmutativo el nuevo diagrama. ∴ $he=1_{\bar{X}}$ ∴ e es sección ∴ $e\in\underline{M}$. Como conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\bar{X}}"'] & W \arrow[d, "1_W"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ \bar{X} \arrow[r, "e"'] & W \end{tikzcd}$$

y $e\in\underline{E}\cap\underline{M}$, hay un único morfismo g tal que $ge=1_{\bar{X}}$ y $eg=1_W$. ∴ e es isomorfismo ∴ $(\bar{X},\mathcal{G})\in\underline{M}$.

"d⇒c" Inmediato

"c⇒b" Sean $e\in\underline{E}$, r, s $\underline{X}$-morfismos tales que $re=se$. $e:\bar{X}\longrightarrow Y$, $r,s:Y\longrightarrow Z$. Sea $e':\bar{X}\longrightarrow W$, $m:W\longrightarrow Z$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de $re=se$. ∴ $(W,(m,m))\in\underline{M}$. Como conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Y \arrow[d, shift right, "r"'] \arrow[d, shift left, "s"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ W \arrow[r, shift left, "m"] \arrow[r, shift right, "m"'] & Z \end{tikzcd}$$

y $e\in\underline{E}$, hay un único $\underline{X}$-morfismo $h:Y\longrightarrow W$ que hace conmutar el nuevo diagrama. ∴ $r=mh=s$ ∴ e es epimorfismo.

"b⇒a" Sea $(\bar{X},(f_i:\bar{X}\longrightarrow Y_i)_I)$ una $\underline{X}$-fuente. Dado cualquier $J\subset I$ conjunto, $(\bar{X},(f_j)_J)$ tiene una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización $e_J:\bar{X}\longrightarrow W_J$, $(m_j:W_J\longrightarrow Y_j)_J$. Tenemos entonces una fuente de epimorfismos $(\underline{X},(e_J)_{J\subset I})$. Como $\underline{\mathcal{X}}$ es localmente pequeña, $(\underline{X},(e_J)_{J\subset I})$ se puede factorizar a través de una fuente de epimorfismos $(\underline{X},(e_k:\underline{X}\longrightarrow W_k)_K)$ con K un conjunto y una familia de isomorfismos $((h_{k_J}:W_k\longrightarrow W_J)_{k_J\in K})_{J\subset I}$. i.e.: $e_J=h_{k_J}e_k$ para alguna $k\in K$. Como K es conjunto, podemos factorizar $(\underline{X},(e_k)_K)$ a través de $(\underline{E},\underline{M})$. Sea $e:\underline{X}\longrightarrow R$, $(R,(m_k)_K)$ una factorización tal. Sea $i\in I$. Sea $e_i:\underline{X}\longrightarrow W_i$, $m_i:W_i\longrightarrow Y_i$ una factorización de f_i. ∴ Conmuta

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "e_i"] \arrow[dr, "e_{k_i}"'] & & W_i \\ & W_{k_i} \arrow[ur, "h_{k_i}"'] & \end{tikzcd}$$

(escribiendo i en lugar de $\{i\}$). Pero $e_{k_i}=m_{k_i}e$ ∴ $f_i=m_ie_i=$ $=m_ih_{k_i}e_{k_i}=m_ih_{k_i}m_{k_i}e$. Definimos $\mu_i=m_ih_{k_i}m_{k_i}$ y tomemos como $\underline{M}'$ al conglomerado de las fuentes formadas como lo hicimos con $(\mu_i)_I$, que, por construcción, es cerrado bajo composición con isomorfismos y satisface la propiedad de diagonalización. ∎

<u>Nota</u>: Las condiciones dadas anteriormente no son satisfechas automáticamente, como ocurre en <u>Set</u> con la estructura de factorización (funciones, productos) para fuentes con índices en conjuntos, pues si definimos para cada $n\in\mathbb{N}$, $A_n:=\{0,1,\dots,n\}$, $f_n:A_1\hookrightarrow A_n$ la inclusión y factorizamos $(A_1,(f_n)_{\mathbb{N}})$ a través de (funciones, productos):

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "k"'] & & A_n \\ & \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \arrow[ur, "p_n"'] & \end{tikzcd}$$

k no puede ser epimorfismo (sobre), pues A_1 es finito y $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es numerable.

(4) Si $\underline{X}$ tiene una estructura de factorización para fuentes $(\underline{E},\underline{M})$, entonces toda estructura de factorización $(\underline{C},\underline{D})$ para morfismos con $\underline{C}\subset\underline{E}$ puede ser extendida en forma única a una estructura de factorización para fuentes $(\underline{C},\underline{D}')$.

dem: Sea $(\bar{X},(f_i:\bar{X}\longrightarrow Y_i)_I)$ una fuente en $\underline{X}$. $\therefore$ cada f_i se puede factorizar a través de $(\underline{C},\underline{D})$: $f_i=m_ie_i$, con $e_i\in\underline{C}$ y $m_i\in\underline{D}$. Sea $e:\bar{X}\longrightarrow Z$, $(Z,(n_i)_I)$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización de $(\bar{X},(e_i)_I)$ $\therefore$ Para cada $i\in I$ $f_i=m_ie_i=m_in_ie$. Sea $e=n\varepsilon$ una $(\underline{C},\underline{D})$-factorización de e. Tenemos $f_i=m_in_in\varepsilon$. Definimos para cada $i\in I$ $\mu_i:=m_in_in$ y tomamos $\underline{D}'$ así formada que, por construcción, es cerrada bajo composición con isomorfismos y satisface la propiedad de diagonalización ■

(5) Una factorización de fuentes con índices en $\emptyset$ en $\underline{X}$ consiste en una clase $\underline{E}$ con $Iso\underline{X}\subset\underline{E}$ y una clase $\underline{M}_o$ de objetos en $\underline{X}$, ambas cerradas bajo composición con isomorfismos, tales que:

a) Para cada A $\underline{X}$-objeto existe un $\underline{M}_o$-objeto C y un $\underline{E}$-morfismo $e:A\longrightarrow C$

b) Todo $\underline{E}$-morfismo es C-extendible para cualquier $C\in\underline{M}_o$.

Nótese que todo objeto $\underline{E}$-inyectivo pertenece a $\underline{M}_o$, e inversamente (ver 1.2(10)). Tenemos, por consiguiente, que $\underline{E}$ induce una factorización de objetos si y sólo si para cada $A\in Ob\underline{X}$ existe un objeto $\underline{E}$-inyectivo C y un $\underline{E}$-morfismo $e:A\longrightarrow C$. ■

(6) En toda $(\underline{E},\underline{M})$-estructura de factorización en una categoría $\underline{\mathcal{X}}$, $\underline{M}$ consiste en aquellas fuentes que no se factorizan sobre $\underline{E}$-morfismos no isomorfos. ■

(1.4) <u>LEMA</u>

Si $\underline{\mathcal{X}}$ tiene una $(\underline{E},\underline{M})$-estructura de factorización para fuentes y T es un objeto terminal en $\underline{\mathcal{X}}$, entonces cualquier $\underline{\mathcal{X}}$-objeto C es un $\underline{M}$-objeto (1.2(10)) si y sólo si $C \longrightarrow T$ pertenece a $\underline{M}$.

<u>dem</u>: "⇒" Supongamos que $(C,\emptyset) \in \underline{M}$. Sea $e: C \longrightarrow R$, $e \in \underline{E}$, $m: R \to T$ $m \in \underline{M}$ una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización del morfismo $C \longrightarrow T$. Como C es $\underline{E}$-inyectivo, existe un único $f: R \longrightarrow C$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_C"'] & R \arrow[dl, dashed, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

$\therefore$ e es isomorfismo. $\therefore C \longrightarrow T$ pertenece a $\underline{M}$.

"⇐" Supongamos que $m: C \longrightarrow T \in \underline{M}$. Sea $e: A \longrightarrow B$, $e \in \underline{E}$ y $f: A \longrightarrow C$ un $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo. Sea $u: B \longrightarrow T$ el único morfismo de B a T. $\therefore$ Conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ C \arrow[r, "m"'] & T \end{tikzcd}$$

. Como $m \in \underline{M}$, hay un único $h: B \longrightarrow C$ que hace conmutar el nuevo diagrama.

$\therefore$ C es $\underline{E}$-inyectivo $\therefore (C,\emptyset) \in \underline{M}$. ■

(1.5) <u>LEMA</u>

Para un objeto C de una categoría $\underline{\mathcal{X}}$ con una $(\underline{E},\underline{M})$-estructura de factorización para fuentes son equivalentes:

a) C es un $\underline{M}$-objeto.

b) Todo morfismo con dominio C pertenece a $\underline{M}$.

c) Toda fuente con dominio C pertenece a $\underline{M}$.

d) Todo $\underline{E}$-morfismo con dominio C es isomorfismo

e) C es $\underline{E}$-inyectivo.

<u>dem</u>: "a⟺e" por 1.2(10)

"a ⟹ d" análogo a la demostración de 1.4.

"d⟹c" Sea $(C,(f_i)_I)$ una fuente en $\underline{\mathcal{K}}$ y $(e,(m_i)_I)$ una factorización a través de $(\underline{E},\underline{M})$ de ella. Por (d) e es isomorfismo. $\therefore\ (C,(f_i)_I)\in\underline{M}$.

"c ⟹ b" Obvio

"b ⟹ d" Pues $\underline{E}\cap\underline{M} = \mathrm{Iso}\,\underline{\mathcal{K}}$.

"d ⟹ a" Sea $e: C \longrightarrow B$, $(B,\emptyset)\in\underline{M}$ la factorización a través de $(\underline{E},\underline{M})$ de la fuente $(C,\emptyset)$. Por (d), e es isomorfismo. $\therefore\ (C,\emptyset)\in\underline{M}$. ■

§2.

(2.1) DEFINICIONES

En una categoría $\underline{\mathcal{X}}$, dadas $\underline{C}$, $\underline{E}$ clases de $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos h, g, f $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos tales que $h = gf$, definimos:

(1) $\underline{C}$ es <u>isocompositiva</u> $\Leftrightarrow$ $h \in \underline{C}$ siempre que $\{f, g\} \subseteq \underline{C} \cup \mathrm{Iso}\,\underline{\mathcal{X}}$

(2) $\underline{C}$ es <u>cancelativa por la derecha con respecto a</u> $\underline{E}$ $\Leftrightarrow$ $h \in \underline{C}$ y $f \in \underline{E}$ implica que $g \in \underline{C}$. Similarmente se puede definir cancelativa por la izquierda c.r. a $\underline{E}$.

(3) $\underline{C}$ es <u>propensa a los pushouts</u> si y sólo si:

i) Toda $\underline{\mathcal{X}}$-fuente no vacía $(\underline{X}, (c_i)_I)$ con $(c_i)_I \subseteq \underline{C}$ tiene un pushout múltiple $((d_i)_I, Z)$ con $d_i \in \underline{C}$ para cada $i \in I$.

ii) Toda $\underline{\mathcal{X}}$-fuente $Y \xleftarrow{k} \underline{X} \xrightarrow{c} Z$ con $c \in \underline{C}$ tiene un pushout $Y \xrightarrow{\hat{c}} W \xleftarrow{\hat{k}} Z$ con $\hat{c} \in \underline{C}$.

(4) $\underline{C}$ es una <u>clase de despliegue</u> si y sólo si:

i) $\underline{C} \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{\mathcal{X}}$

ii) $\underline{C}$ es isocompositiva

iii) $\underline{C}$ es propensa a los pushouts.

(5) <u>$\alpha(\underline{E})$</u> denota al conglomerado de todas las fuentes $(\underline{X}, (m_i)_I)$ en $\underline{\mathcal{X}}$ que no se factorizan a través de $\underline{E}$-morfismos no isomorfos.

(6) <u>$\Lambda(\underline{E})$</u> denota al conglomerado de todas las fuentes $(\underline{X}, (m_i)_I)$ en $\underline{\mathcal{X}}$ que satisfacen la propiedad de diagonalización c.r. a $\underline{E}$.

(7) Si $\underline{\mathcal{X}}_{\underline{E}}$ denota la categoría de $\underline{E}$-flechas de $\underline{\mathcal{X}}$, definimos un funtor $\Delta_0 : \underline{\mathcal{X}}_{\underline{E}} \longrightarrow \underline{\mathcal{X}}$ tal que $\Delta_0(e) = \mathrm{dom}\ e$ para cada $e \in \underline{E}$ y

$\Delta_0(f,g) = f$ para cada $(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\underline{X}_E$.

(8) Si $\underline{Y}$ es otra categoría y $T: \underline{Y} \longrightarrow \underline{X}$ es un funtor, una $\underline{Y}$-fuente $(\bar{X}, (f_i: \bar{X} \longrightarrow Y_i)_I)$ es <u>T-inicial</u> si y sólo si para cada fuente $(Z, (g_i: Z \longrightarrow Y_i)_I)$ en $\underline{Y}$ y cada morfismo $f: TZ \longrightarrow T\bar{X}$ en $\underline{X}$ tal que $Tf_i \cdot f = Tg_i$ para cada $i \in I$, existe un único morfismo $\bar{f}: Z \longrightarrow \bar{X}$ tal que $T\bar{f} = f$ y $f_i \cdot \bar{f} = g_i$ para cada $i \in I$.

(9) Si $\underline{Y}$ es otra categoría y $T: \underline{Y} \longrightarrow \underline{X}$ es un funtor, <u>T es topológico</u> si y sólo si para cada fuente $(\bar{X}, (g_i: \bar{X} \longrightarrow T(A_i))_I)$ en $\underline{X}$ con $(A_i)_I$ una familia de $\underline{Y}$-objetos existe una fuente T-inicial $(A, (f_i: A \longrightarrow A_i)_I)$ y un isomorfismo $h: \bar{X} \longrightarrow T(A)$ en $\underline{X}$ tal que $Tf_i \circ h = g_i$ para cada $i \in I$.

(2.2) <u>TEOREMA DE CARACTERIZACION</u>

En una categoría $\underline{X}$, para cualquier clase $\underline{E}$ de $\underline{X}$-morfismos son equivalentes:

(1) Existe un conglomerado $\underline{M}$ de $\underline{X}$-fuentes para el cual $(\underline{E}, \underline{M})$ es una estructura de factorización de fuentes en $\underline{X}$.

(2) $\underline{E}$ es una clase de despliegue.

(3) $(\underline{E}, N(\underline{E}))$ es estructura de factorización en $\underline{X}$ (sin la diagonalización).

(4) $(\underline{E}, \alpha(\underline{E}))$ es estructura de factorización en $\underline{X}$ (con la diagonalización).

(5) a) $\underline{E}$ es isocompositiva

b) $\underline{E}$ es cancelativa por la derecha c.r.a $\mathrm{Epi}\,\underline{X}$.

c) $\Delta_0: \underline{X}_E \longrightarrow \underline{X}$ es un funtor topológico

<u>dem</u>: "4 ⇒ 1" Obvio.

"1 ⟺ 3" Por 1.2(8) $\underline{M} \subseteq \Lambda(\underline{E}) \subseteq \underline{M}$.

"1 ⟹ 5" 5a) y 5b) Por 1.2(5)

Sea $(\underline{\bar{X}}, (f_i : \underline{\bar{X}} \to \Delta_o e_i)_I)$ una fuente en $\underline{\mathcal{X}}$, con $e_i : \underline{\bar{X}}_i \to A_i$ en $\underline{E}$ para cada $i \in I$. Tenemos la fuente $(\underline{\bar{X}}, (e_i f_i)_I)$ en $\underline{\mathcal{X}}$ que se puede factorizar através de $(\underline{E}, \underline{M})$ con $e : \underline{\bar{X}} \to Y \in \underline{E}$ y $(Y, (m_i)_I) \in \underline{M}$. Formamos así un $\underline{\mathcal{X}}_E$-objeto $B := (\bar{X}, e, Y)$ y la $\underline{\mathcal{X}}_E$-fuente $(B, (f_i, m_i)_I)$ cuyos codominios son $B_i := (\bar{X}_i, e_i, A_i)$, $i \in I$. (Ver diagrama 1).

(1)
$$\begin{tikzcd} \underline{\bar{X}} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Delta_o e_i = \bar{X}_i \arrow[d, "e_i"] \\ Y \arrow[r, "m_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

Sea $(G, (g_i : G \to B_i)_I)$ una $\underline{\mathcal{X}}_E$-fuente, $G = (\bar{X}', e', A')$, $g_i = (p_i, q_i)$ para toda $i \in I$ y $g : \Delta_o G \to \Delta_o B$ un $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo que haga conmutar el diagrama 2. Como $e' \in E$ y $(Y, (m_i)_I) \in \underline{M}$, existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $k : A' \to Y$ que hace conmutar el nuevo diagrama. Tomando $g' = (g, k)$ tenemos que $\Delta_o(g') = g$ y $(f_i, m_i) \circ g' = (p_i, q_i) = g_i$ para toda $i \in I$. ∴ $(B, (f_i, m_i)_I)$ es Δ_o-inicial. Como $\Delta_o(B) = \underline{\bar{X}}$, ∴ Δ_o es topológico.

(2)
$$\begin{tikzcd} \Delta_o G = \underline{\bar{X}}' \arrow[rr, "p_i"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddd, "e'"'] & & \bar{X}_i \arrow[ddd, "q_i"] \\ & \Delta_o B = \underline{\bar{X}} \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[d, "e"] & \\ & Y \arrow[dr, "m_i"] & \\ A' \arrow[ur, dashed, "k"] \arrow[rr, "q_i"'] & & A_i \end{tikzcd}$$

"5 ⟹ 2" "$\underline{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{\mathcal{X}}$".

Sean $e \in \underline{E}$, r, s $\underline{\mathcal{X}}$-morfismos tales que $re = se$. Por 5a), $\underline{E}$ es isocompositiva. ∴ $\mathrm{Iso}\,\underline{\mathcal{X}} \subseteq \underline{E}$. Los diagramas de la página siguiente muestran que (re, r) y (re, s) son $\underline{\mathcal{X}}_E$-morfismos

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & \cdot \arrow[dd, "r"] \\ \cdot \arrow[d, "r"'] & \\ \cdot \arrow[r, "1"'] & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & \cdot \arrow[dd, "s"] \\ \cdot \arrow[d, "r"'] & \\ \cdot \arrow[r, "1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

con dominio y codominio común y $\Delta_0(re, r) = re = \Delta_0(re, s)$. Como Δ_0 es topológico, también es fiel ([He]) $\therefore r = s$.

" $\underline{E}$ es propensa a los pushouts".

i) Sea $(\underline{X}, (e_i)_I)$ una $\mathcal{X}$-fuente no vacía de $\underline{E}$-morfismos. Sea $f: \underline{X} \dashrightarrow Y$ un $\mathcal{X}$-morfismo y definamos para cada $i \in I$, $f_i = f$. Tenemos entonces un Δ_0-pozo $(\Delta_0(e_i) \xrightarrow{f_i} Y)$. Como Δ_0 es topológico, también es cotopológico ([He]), por lo cual podemos

$$\begin{tikzcd} \underline{X} = \Delta_0 e_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\Delta(g_i, h_i)"'] \arrow[dd, "e_i"'] & & Y \\ & \Delta_0(e) = Z \arrow[ur, "r"'] \arrow[d, "e"] & \\ \underline{X}_i \arrow[r, "h_i"'] & W & \end{tikzcd}$$

factorizar dicho pozo a través de un $\mathcal{X}_{\underline{E}}$-pozo final $(g_i, h_i)_I$ y $r: \Delta_0(e) \longrightarrow Y$ un $\mathcal{X}$-isomorfismo. Sea $h_j := er^{-1}$. Probaremos que $((h_i)_I, W)$ es el pushout buscado.

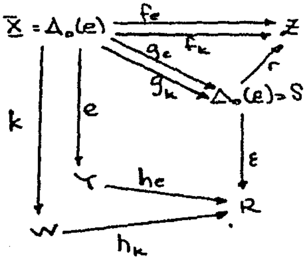
Sea $((k_i)_I, R)$ otro pozo tal que $k_i e_i = k_j e_j$ para cada $i, j \in I$.

$$\begin{tikzcd} & \underline{X} \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "g_i"] \arrow[ddl, "l_i"'] & \underline{X}_i \arrow[d, "h_i"'] \arrow[ddr, "k_i"] & \\ & Z \arrow[r, "e"] \arrow[dl, dashed, "p"] & W \arrow[dr, dashed, "q"'] & \\ Q \arrow[rrr, "\varphi"'] & & & R \end{tikzcd}$$

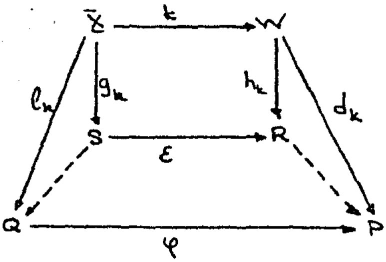
El pozo $((k_i e_i)_I, R)$ tiene una factorización através de un $\mathcal{X}$-pozo final $((l_i)_I, Q)$ y un $\mathcal{X}$-isomorfismo $\varphi: Q \longrightarrow R$. Como $(g_i, h_i)_I$ es $\mathcal{X}_{\underline{E}}$-final, existe un único $\mathcal{X}_{\underline{E}}$-morfismo (p, q) que hace conmutar el nuevo diagrama.

$\therefore$ $(h_i)_I$ es el pushout de $(e_i)_I$. Por 5a), $er^{-1} \in \underline{E}$. Como $f \in \underline{E}$, por 5a) y 5b) ya que $\{e_i\}_I \subseteq \mathrm{Epi}\,\mathcal{X}$ y $h_i e_i = er^{-1} f$ para cada $i \in I$, $\{h_i\}_I \in \underline{E}$.

ii) Sea $\underline{X} \overset{e}{\underset{k}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} Y \\ W \end{matrix}$ una fuente en $\underline{\mathcal{X}}$ con $e \in \underline{E}$. Sea $f: \underline{X} \longrightarrow Z$ un $\underline{E}$-morfismo. Definimos $f_e = f_k = f$. Tenemos entonces un Δ_o-pozo $(\underline{X} = \Delta_o(e) \overset{f_e}{\underset{f_k}{\rightrightarrows}} Z)$ que podemos factorizar através de un $\underline{\mathcal{X}}_{\underline{E}}$-pozo



final $((g_e, g_k), (h_e, h_k))$ y un $\underline{\mathcal{X}}$-isomorfismo $r: \Delta_o(\varepsilon) \longrightarrow Z$, ya que Δ_o es topológico y por lo tanto cotopológico. Definimos $h: \varepsilon r^{-1}$. Sea $((d_e, d_k), P)$ otro pozo tal que $d_k k = d_e e$. El pozo $(d_e e, d_k k)$ tiene una factorización através de un pozo final $((\ell_e, \ell_k), Q)$ y un isomorfismo $\varphi: Q \longrightarrow P$. Como $((g_e, g_k), (h_e, h_k))$



es $\underline{\mathcal{X}}_{\underline{E}}$-final, existe un único $\underline{\mathcal{X}}_{\underline{E}}$-morfismo (p, q) que hace conmutar el nuevo diagrama.

$\therefore$ (h_e, h_k) es el pushout de (e, k).

Por 5a), $\varepsilon r^{-1} \in \underline{E}$. Como $f \in \underline{E}$, $e \in \underline{E}$ y $h_e e = \varepsilon r^{-1} f$, por 5a) y 5b), $h_e \in \underline{E}$.

Nota: Sólo se hizo el diagrama para k para evitar complicaciones.

"2 ⇒ 4". "$\alpha(\underline{E})$ es cerrado bajo composición de isomorfismos".

Sean $(\underline{X}, (f_i)_I) \in \alpha(\underline{E})$ y $h: \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}$ un $\underline{\mathcal{X}}$-isomorfismo. Sea $e: \underline{X}' \longrightarrow Y$, $(Y: (k_i: Y \longrightarrow Z_i)_I)$ una factorización de $(\underline{X}', (f_i h)_I)$ con $e \in \underline{E}$. $\therefore \forall_{i \in I}\ k_i e = f_i h$ $\therefore \forall_{i \in I}\ k_i e h^{-1} = f_i \in \alpha(\underline{E})$. Como $e h^{-1} \in \underline{E}$, $e h^{-1}$ es isomorfismo $\therefore$ e es isomorfismo.

"$(\underline{E}, \alpha(\underline{E}))$ es estructura de factorización"

Sea $(\underline{X}, (f_i : \underline{X} \longrightarrow \underline{X}_i)_I)$ una $\mathcal{X}$-fuente. Sea $(\underline{X}, (e_j)_J)$ la fuente que consiste de los $\underline{E}$-morfismos tales que existe una $i \in I$ y un $\mathcal{X}$-morfismo $k_{ij} : \underline{X}_{ij} \longrightarrow \underline{X}_i$ de forma que $f_i = k_{ij} \cdot e_j$. Esta fuente es no vacía ya que $1_{\underline{X}} \in \underline{E}$ y $f_i = f_i 1_{\underline{X}}$ para toda $i \in I$. Como $\underline{E}$ es propensa a los pushouts, la fuente no vacía $(\underline{X}, (e_j)_J)$ tiene un pushout múltiple $(d_j : Y_j \longrightarrow Z)_J$ con $\{d_j\}_J \subseteq \underline{E}$.

Definimos $e := d_j e_j$ $\therefore$ $e \in \underline{E}$. Para cada $i \in I$ hay un $\mathcal{X}$-morfismo m_i que hace conmutar el diagrama, que es independiente de la factorización $k_{ij} e_j$ de f_i ya que e es epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "e_j"] \arrow[rr, bend left, "e"] \arrow[dr, "f_i"'] & Y_j \arrow[r, "d_j"] \arrow[d, "k_{ij}"] & Z \arrow[dl, dashed, "m_i"] \\
& \underline{X}_i &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $(Z, (m_i)_I)$ tiene una factorización $(e', (h_i)_I)$ con $e' \in \underline{E}$. $\therefore$ $\forall_{i \in I}$ $m_i e = h_i e' e = f_i$. Como $e' e \in \underline{E}$ hay alguna $j \in J$ tal que $d_j e' e = e$ $\therefore$ $d_j e' = 1_{\underline{Z}}$. $\therefore$ e' es isomorfismo $\therefore$ $(Z, (m_i)_I) \in \alpha(\underline{E})$.

"Propiedad de diagonalización".

Tomemos un diagrama conmutativo con $e \in \underline{E}$ y $(Z, (m_i)_I) \in \alpha(\underline{E})$. Sea $(\hat{f}, \hat{e})$ el pushout de (e, f) con $\hat{e} \in \underline{E}$ $\therefore$ Para cada $i \in I$ existe un único $\mathcal{X}$-morfismo

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[rr, "e"] \arrow[dd, "f"'] & & Y \arrow[dl, "\hat{f}"'] \arrow[dd, "h_i"] \\
& A \arrow[dr, dashed, "k_i"] & \\
Z \arrow[ur, "\hat{e}"] \arrow[rr, "m_i"'] & & Z_i
\end{tikzcd}$$

$k_i : A \longrightarrow Z_i$ que hace conmutar el diagrama correspondiente. Como $(Z, (m_i)_I) \in \alpha(\underline{E})$ y $\hat{e} \in \underline{E}$, $\hat{e}$ es isomorfismo. $\therefore$ La diagonal $\hat{e}^{-1} \hat{f}$ hace conmutar el diagrama, y es único pues $\underline{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\mathcal{X}$. ∎

(2.3) <u>COROLARIOS</u>

(1) Si, para cada $i \in I$, $\underline{E}_i$ induce una estructura de factorización para fuentes en $\underline{\mathcal{K}}$, $\underline{E} = \bigcap_{i \in I} \underline{E}_i$ también. Además, si el conglomerado de todas las $\underline{E}_j$ que inducen una factorización tiene un miembro maximo, este conglomerado es un latice completo.

<u>dem</u>: 1°) Probaremos que $\underline{E} = \bigcap_{i \in I} \underline{E}_i$ es una clase de despliegue.

i) Como $\underline{E} \subseteq \underline{E}_i$ para cada $i \in I$, $\underline{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{\mathcal{K}}$.

ii) Sean $e \in \underline{E}$ y $h, k \in \mathrm{Iso}\,\underline{\mathcal{K}}$ tales que eh y ke estén definidos. Como $e \in \bigcap_{i \in I} \underline{E}_i$ y cada $\underline{E}_i$ es cerrada bajo composición con isomorfismos, eh y ke pertenecen a $\underline{E}$. Sea $e' \in \underline{E}$ tal que ee' esté definido. Como $e' \in \underline{E}_i$ para cada $i \in I$ y $\underline{E}_i$ es cerrada bajo composiciones, $ee' \in \underline{E}$. $\therefore$ $\underline{E}$ es isocompositiva.

iii) Sea $(\underline{X}, (e_j)_J)$ una fuente no vacía de $\underline{E}$-morfismos. Como cada $\underline{E}_i$ es propensa a los pushouts y $(e_j)_J \subseteq \underline{E}_i$ para cada $i \in I$, $(e_j)_J$ tiene un pushout $(d_j^i)_J \subseteq \underline{E}_i$. Para $i, k \in I$, como $((d_j^i)_J, Z)$ y $((d_j^k), Y)$ son ambos pushouts de $(e_j)_J$, existen únicos $\underline{\mathcal{K}}$-morfismos $\alpha : Z \longrightarrow Y$ y $\beta : Y \longrightarrow Z$

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "e_j"] \arrow[d, "e_m"'] & W_j \arrow[d, "d_j^i"] \arrow[ddr, bend left, "d_j^k"] & \\
W_m \arrow[r, "d_m^i"'] \arrow[drr, bend right, "d_m^k"'] & Z \arrow[dr, shift right, "\alpha"'] & \\
& & Y \arrow[ul, shift right, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

que hacen conmutar el diagrama. $\therefore$ $\beta\alpha = 1_Z$ y $\alpha\beta = 1_Y$. $\therefore$ α y β son $\underline{\mathcal{K}}$-isomorfismos. $\therefore$ $d_m^k = \alpha d_m^i \in \underline{E}_i$ y $d_m^i = \beta d_m^k \in \underline{E}_k$. $\therefore$ $((d_j^i)_J) \in \underline{E}$. $\therefore$ $\underline{E}$ es propensa a los pushouts.

$\therefore$ $\underline{E}$ induce una estructura de factorización para fuentes en $\underline{\mathcal{K}}$.

2°) Sea $(\underline{E}_j)_J$ el conglomerado de todas las clases de $\underline{X}$-morfismos que inducen una estructura de factorización para fuentes en $\underline{X}$ y llamemos $\underline{E}$ al elemento maximo de este conglomerado. Evidentemente, $(\underline{E}_j)_J$ está parcialmente ordenado por la inclusión. Sea $I \subset J$. Como $\bigcup_{i\in I} \underline{E}_i \subseteq \underline{E}$, $K := \{j\in J \mid \bigcup_{i\in I} \underline{E}_i \subset \underline{E}_j\} \neq \phi$. Sea $\underline{E}' := \bigcap_{k\in K} \underline{E}_k$ $\therefore$ $\underline{E}'$ induce una estructura de factorización en $\underline{X}$ y es el supremo de $(\underline{E}_i)_I$. Sea $\underline{E}'' := \bigcap_{i\in I} \underline{E}_i$ $\therefore$ $\underline{E}''$ induce una estructura de factorización en $\underline{X}$ y es el infimo de $(\underline{E}_i)_I$. $\therefore$ $(\underline{E}_j)_J$ es un látice completo. ■

(2) Si $\underline{X}$ tiene una estructura de factorización para fuentes $(\underline{E}, \underline{M})$, entonces $\underline{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{X}$.

<u>dem</u>: $\underline{E}$ debe ser una clase de despliegue, por lo cual $\underline{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{X}$. ■

(3) Para cualquier categoría $\underline{X}$ con estructura de factorización para fuentes $(\underline{E}, \underline{M})$, las subclases $\underline{C}$ de $\underline{E}$ para las cuales existe $\underline{D}$ tal que $(\underline{C}, \underline{D})$ es estructura de factorización en $\underline{X}$ son precisamente las subclases de despliegue de $\underline{E}$.

<u>dem</u>: Si $(\underline{C}, \underline{D})$ es estructura de factorización, $\underline{C}$ debe ser una clase de despliegue, y viceversa. ■

(4) Para cualquier categoría $\underline{X}$ con estructura de factorización para fuentes $(\underline{E}, \underline{M})$, las subclases $\underline{C}$ de $\underline{E}$ que inducen estructuras de factorización en $\underline{X}$ forman un látice completo.

<u>dem</u>: Sea $(\underline{C}_i)_I$ el conglomerado de todas las subclases de $\underline{E}$ que inducen una estructura de factorización en $\underline{X}$. Como $\underline{E}$ es

un miembro máximo de $(\underline{C}_i)_I$, similarmente al corolario 2.3(i) se prueba que $(\underline{C}_i)_I$ es un látice completo con el orden inclusión. ∎

(2.4) PROPOSICION

Sea $\mathcal{K}$ una categoría con estructura de factorización para fuentes $(E, \underline{M})$. Entonces, son equivalentes:

i) $\underline{M} \subseteq \mathrm{Mono}\,\mathcal{K}$ (El conglomerado de las monofuentes en $\mathcal{K}$).

ii) a) $\mathcal{K}$ tiene coigualadores.

b) Todo coigualador es un $\underline{E}$-morfismo.

dem: "i⇒ii" Sean $f, g : A \longrightarrow B$ dos $\mathcal{K}$-morfismos.

a) Sea $(B, (e_i : B \longrightarrow C_i)_I)$ la fuente de todos los $\mathcal{K}$-morfismos que satisfacen $e_i f = e_i g$. Esta fuente se puede factorizar através de $e : B \longrightarrow C$ en $\underline{E}$ y $(C, (m_i)_I) \in \underline{M}$. Como $\underline{M} \subseteq \mathrm{Mono}\,\mathcal{K}$ y $m_i e f = e_i f = e_i g = m_i e g$ para cada $i \in I$, $\therefore ef = eg$. Sea $i \in I$. $\therefore e_i = m_i e$ y esta m_i es única pues e es epimorfismo. $\therefore e = \mathrm{Coeq}(f, g)$.

b) Sea $e' : B \longrightarrow C$, $m' : C \longrightarrow Z$ una factorización de $e = \mathrm{Coeq}(f,g)$ con $e' \in \underline{E}$ y $m' \in \underline{M}$. Como $m'e'f = m'e'g$ y $\underline{M} \subseteq \mathrm{Mono}\,\mathcal{K}$, $\therefore e'f = e'g$, por lo que existe un único $\mathcal{K}$-morfismo $h : Z \longrightarrow C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Z \arrow[d, "1_Z"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ & C \arrow[r, "m'"'] & Z \end{tikzcd}$$

tal que $he = e'$. $\therefore h$ es epimorfismo. Como $m'he = m'e' = e$ $\therefore m'h = 1_Z$. $\therefore h$ es isomorfismo $\therefore e \in \underline{E}$.

"ii⇒i" Sean $(B, (m_i : B \longrightarrow Z_i)_I) \in \underline{M}$ y $f, g : A \longrightarrow B$ $\mathcal{K}$-morfismos tales que para cada $i \in I$, $m_i f = m_i g$. Sea $e = \mathrm{Coeq}(f, g)$,

$e: B \longrightarrow C$ $\therefore$ Para cada $i \in I$ existe un único $h_i: C \longrightarrow Z_i$ $\underline{K}$-morfismo tal que $h_i e = m_i$. Por 1.3 (6) e es isomorfismo $\therefore f = g$ $\therefore (B, (m_i)_I) \in$ Mono$\underline{K}$. ∎

(2.5) <u>COROLARIO</u>

Una categoría $\underline{K}$ tiene (Epi$\underline{K}$, Monoextremada)-estructura de factorización para fuentes si y sólo si:

a) Toda fuente de epimorfismos tiene un pushout múltiple

b) Todo epimorfismo tiene pushouts

c) $\underline{K}$ tiene coigualadores.

<u>dem</u>: Los pushouts de epimorfismos son epimorfismos. ∎

(2.6) <u>PROPOSICION</u>

Sea $\underline{K}$ una categoría con una $(\underline{E}, \underline{M})$-estructura de factorización. Sea $\underline{X}$ otra categoría con un objeto inicial 0 y sea $T: \underline{X} \longrightarrow \underline{K}$ un funtor tal que $T(p) \in \underline{E}$ para todo $p \in$ Mor$\underline{X}$. Entonces T tiene un colímite (λ, C) con $\lambda_{\bar{x}} \in \underline{E}$ para cada $\bar{x} \in$ Ob$\underline{X}$.

<u>dem</u>: Sea $(C_j)_J$ la familia de los $\underline{K}$-objetos para los cuales existe un pozo natural para T $(f_{\bar{x}}: T(\bar{x}) \longrightarrow C_j)_{\bar{x} \in \mathrm{Ob}\underline{X}}$. Para cada objeto $\bar{x}$ de $\underline{X}$, sea $(\gamma_{\bar{x}_j}: T(\bar{x}) \longrightarrow C_j)_J$ la fuente formada por todos los $\underline{K}$-morfismos con dominio $T(\bar{x})$ y que estén en algún pozo natural para T. Esta fuente tiene una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización $\gamma_{\bar{x}_j} = m_j^{\bar{x}} e_{\bar{x}}$ con $e_{\bar{x}} \in \underline{E}$ y $(B_{\bar{x}}, (m_j^{\bar{x}})_J) \in \underline{M}$. Sea $j \in J$ $\therefore$ $\gamma_{\bar{x}_j} T(p_{\bar{x}}) = \gamma_{0_j}$ (donde $p_{\bar{x}}: 0 \longrightarrow \bar{x}$ es el único $\underline{X}$-mor-

fismo de 0 a $\bar{z}$), ya que $(\gamma_{Y_j})_{Y\in Ob\underline{X}}$ es pozo natural para T.

$$\begin{tikzcd} T(0) \arrow[r, "T(p_z)"] \arrow[d, "e_0"'] & T(z) \arrow[r, "e_z"] & B_z \arrow[d, "m_{z_j}"] \arrow[dll, dashed, "i_z"'] \\ B_0 \arrow[rr, "m_j^0"'] & & C_j \end{tikzcd}$$

$\therefore$ El diagrama indicado es conmutativo, y como $T(p_z)\in \underline{E}$, existe $i_z: B_z \longrightarrow B_0$ tal que para cada $j'\in J$, $m_{j'}^0 i_z = m_{z_{j'}}$.

Como i_z factoriza a $(m_{z_{j'}})_J$, i_z es isomorfismo $\therefore i_z e_z \in \underline{E}$

Definimos $\lambda_z := i_z e_z$, $C := B_0$. Se probará que $((\lambda_z)_{z\in Ob\underline{X}}, C)$ es el colímite buscado.

i) Sea $f: \bar{z} \longrightarrow Y$ un $\underline{X}$-morfismo. $\therefore \lambda_Y T(f) T(p_{\bar{z}}) = \lambda_Y T(f p_{\bar{z}}) =$
$= \lambda_Y T(p_Y) = e_0 = \lambda_{\bar{z}} T(p_{\bar{z}})$. $\therefore \lambda_Y T(f) = \lambda_{\bar{z}}$. $\therefore (\lambda_z)_{z\in Ob\underline{X}}$ es un pozo natural para T.

ii) Sea $((\hat{\lambda}_z)_{z\in Ob\underline{X}}, \hat{C})$ otro pozo natural para T. $\therefore$ Para alguna $j\in J$ $\hat{C} = C_j$. Sea $\bar{z} \in Ob\underline{X}$. $\therefore \hat{\lambda}_{\bar{z}} = \gamma_{\bar{z}_j} = m_j^z e_z =$
$= m_j^0 i_z e_{\bar{z}} = m_j^0 \lambda_z$ y m_j^0 es único pues $\lambda_z \in \underline{E} \subset Epi\underline{K}$ y no depende de z sino de C_j.

$$\begin{tikzcd} & C = B_0 \arrow[d, "m_j^0"] \\ T(z) \arrow[ur, "\lambda_z"] \arrow[r, "\hat{\lambda}_z"'] & \hat{C} = C_j \end{tikzcd}$$

$\therefore ((\lambda_z)_{z\in Ob\underline{X}}, C)$ es el colímite buscado de T. ∎

(2.7) <u>PROPOSICION</u>

Sea $\underline{K}$ una categoría con una estructura de factorización para fuentes $(\underline{E},\underline{M})$ tal que $\underline{M} \subseteq Mono\underline{K}$. Sea $\underline{X}$ una categoría conexa. Sea $T: \underline{X} \longrightarrow \underline{K}$ un funtor tal que $T(p)\in \underline{E}$ para todo $p\in Mor\underline{X}$. Entonces T tiene un colímite (λ, C)

con $\lambda_{\bar{X}} \in \underline{E}$ para todo $\bar{X} \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{X}}$.

$\underline{\text{dem}}$: i) Definimos en $\underline{M}$ una relación de equivalencia de forma que $(\bar{X},(m_i)_I) \sim (Y,(n_i)_I)$ si ambos son factores derechos de una misma fuente en $\underline{\mathcal{K}}$. Formemos $\underline{M}'$ un conglomerado de representantes de esta relación. Evidentemente, $(\underline{E},\underline{M}')$ es una estructura de factorización para fuentes en $\underline{\mathcal{K}}$ donde, además, las factorizaciones son estrictamente únicas.

ii) Sean $(C_j)_J$ y $(\gamma_{\bar{X}_j} : T(\bar{X}) \longrightarrow C_j)_J$ para $\bar{X} \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{X}}$ como en (2.6). Esta última fuente se factoriza através de $(\underline{E},\underline{M}')$ con $e_{\bar{X}} : T(\bar{X}) \longrightarrow B_{\bar{X}}$ en $\underline{E}$ y $(B_{\bar{X}},(m_j^{\bar{X}})_J) \in \underline{M}'$. Sea $f : \bar{X} \longrightarrow Y$ un $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo. Como para toda $j \in J$ $\gamma_{\bar{X}_j} = \gamma_{Y_j} T(f)$, ya que $(\gamma_{Z_j})_{Z \in \mathrm{Ob}\underline{\mathcal{X}}}$ es pozo natural, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(\bar{X}) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "e_{\bar{X}}"'] & T(Y) \arrow[r, "e_Y"] & B_Y \arrow[d, "m_j^Y"] \arrow[dll, equal] \\
B_{\bar{X}} \arrow[rr, "m_j^{\bar{X}}"'] & & C_j
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $m_j^Y e_Y T(f) = m_j^Y e_{\bar{X}}$. Como $e_Y T(f) \in \underline{E}$, por definición de $\underline{M}'$, $m_j^Y = m_j^{\bar{X}}$ para toda $j \in J$, pues ambos factorizan a $(\gamma_{\bar{X}_j})_J$. $\therefore$ $B_{\bar{X}} = B_Y$. Como $\underline{M}' \subset \underline{M} \subset \mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{K}}$ y como $m_j^Y e_Y T(f) = $
$= m_j^{\bar{X}} e_Y T(f) = m_j^{\bar{X}} e_{\bar{X}}$ para toda $j \in J$, $e_Y T(f) = e_{\bar{X}}$. Por todo lo anterior y como $\underline{\mathcal{X}}$ es conexa, podemos definir $C := B_{\bar{X}}$ y $\lambda_{\bar{X}} := e_{\bar{X}}$ para todo $\bar{X} \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{X}}$, y además se probó que $((\lambda_{\bar{X}})_{\bar{X} \in \mathrm{Ob}\underline{\mathcal{X}}}, C)$ es un pozo natural. Sea $((\hat{\lambda}_{\bar{X}})_{\bar{X} \in \mathrm{Ob}\underline{\mathcal{X}}}, C_j)$ otro pozo natural para T. Sea $\bar{X} \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{X}}$. $\therefore$ $\hat{\lambda}_{\bar{X}} = \gamma_{\bar{X}_j} = m_j^{\bar{X}} e_{\bar{X}} =$
$m_j^Y e_{\bar{X}}$ para todo $Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{X}}$. Como $e_{\bar{X}} \in \underline{E} \subset \mathrm{Epi}\,\underline{\mathcal{K}}$, $m_j^{\bar{X}}$ es

único y $\hat{\lambda}_Y = m_j^Y e_Y = m_j^{\bar{X}} e_Y$ para todo $Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathfrak{X}}$.

$\therefore\ ((\lambda_{\bar{X}})_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathfrak{X}}},\ c)$ es el colímite de T. ∎

§ 3.

En esta sección se utilizará la noción de Germen de una factorización definido en 1.2(10) para construir ciertas estructuras de factorización para fuentes en una categoría dada.

(3.1) <u>DEFINICIONES</u>

Sea $\underline{\mathcal{K}}$ una categoría con una estructura de factorización para fuentes $(\underline{E},\underline{M})$. Si $e: A \to B$ es un $\underline{E}$-morfismo, $\underline{N}$ un conglomerado de fuentes en $\underline{\mathcal{K}}$ y Γ una clase de $\underline{\mathcal{K}}$-objetos, definimos:

1) e es <u>$\underline{N}$-extendible</u> si y sólo si siempreque se tenga un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v_i"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\ Z \arrow[r, "n_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

con $(Z,(n_i)_I) \in \underline{N}$, exista $w \in Mor\,\underline{\mathcal{K}}$ tal que $we = u$ $(\therefore\ n_i w = v_i)$

2) La clase de todos los morfismos $\underline{N}$-extendibles se denotará por $\underline{E}_{\underline{N}}$.

3) e es <u>Γ-extendible</u> cuando consideramos Γ como una clase de fuentes vacías.

4) La clase de todos los morfismos Γ-extendibles se denotará por $\underline{E}_{\Gamma}$.

(3.2) TEOREMA.

Para una categoría $\underline{\mathcal{K}}$ con estructura de factorización $(\underline{E},\underline{M})$ y una clase de fuentes $\underline{N}$ en $\underline{\mathcal{K}}$ hay una clase maximal de $\underline{E}$-morfismos que inducen una factorización en $\underline{\mathcal{K}}$.

Esta clase es precisamente $E_{\underline{N}}$.

<u>dem</u>: Probaremos que $E_{\underline{N}}$ es una clase de despliegue.

i) Claramente todos los isomorfismos son $\underline{N}$-extendibles. Sean $e: A \to B$, $e': B \to C$ $\underline{X}$-morfismos $\underline{N}$-extendibles. Tomemos un diagrama conmutativo con $(\bar{X}, (n_i)_I) \in \underline{N}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "e'"] \arrow[dl, dashed, "\omega"'] & C \arrow[d, "v_i"] \arrow[dll, dashed, "\omega'"] \\ \bar{X} \arrow[rr, "n_i"'] & & Y_i \end{tikzcd}$$

$\therefore$ existe un $\underline{X}$-morfismo $\omega: B \to \bar{X}$ tal que $\omega e = u$ $\therefore$ hay otro $\underline{X}$-morfismo $\omega': C \to \bar{X}$ tal que $\omega' e' = \omega$ $\therefore$ $\omega' e' e = \omega e = u$ $\therefore$ $e'e$ es $\underline{N}$-extendible.

$\therefore E_{\underline{N}}$ es isocompositiva.

ii) a) Sea $(A, (e_i: A \to A_i)_I)$ una fuente no vacía de $E_{\underline{N}}$-morfismos. Como $(\mathbb{E}, \underline{M})$ es estructura de factorización en $\underline{X}$ y $E_{\underline{N}} \subseteq \mathbb{E}$, $(e_i)_I$ tiene un pushout múltiple $(c_i)_I$ donde cada $c_i \in \mathbb{E}$. Definimos $e := c_i e_i$. Tomemos un diagrama conmutativo con

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_i"] \arrow[rr, bend left, "e"] \arrow[d, "u"'] & A_i \arrow[r, "c_i"] \arrow[dl, dashed, "\omega_i"'] & C \arrow[d, "v_k"] \arrow[dll, dashed, "\omega"] \\ \bar{X} \arrow[rr, "n_k"'] & & Y_k \end{tikzcd}$$

$(\bar{X}, (n_k)_K) \in \underline{N}$. $\therefore$ Para toda $i \in I$ hay un $\omega_i: A_i \to \bar{X}$ $\underline{X}$-morfismo tal que $\omega_i e_i = u$. Como $(c_i)_I$ es pushout de $(e_i)_I$, existe un único $\omega: C \to \bar{X}$ tal que $\omega c_i = \omega_i$ para toda $i \in I$. $\therefore$ e es $\underline{N}$-extendible. Sea $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_i"] & A_i \arrow[r, "c_i"] \arrow[d, "u_i"'] & C \arrow[d, "v_{k_i}"] \arrow[dl, dashed, "\omega_i"'] \\ & \bar{X} \arrow[r, "n_{k_i}"'] & Y_{k_i} \end{tikzcd}$$

Tomemos otro diagrama conmutativo con $(\bar{X}, (n_{k_i})_{K_i}) \in \underline{N}$. Como $e = c_i e_i$ es $\underline{N}$-extendible, existe un único $\omega_i: C \to \bar{X}$ $\underline{X}$-morfismo tal que $\omega_i e = u_i e_i$ $\therefore$ $\omega_i c_i e_i = \omega_i e = u_i e_i$. Como $E_{\underline{N}} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{X}$, $\therefore \omega_i c_i = u_i$

$\therefore\ c_i \in \underline{E}_{\underline{N}}$.

b) Similarmente se prueba la existencia de pushouts para $\underline{\overline{X}} \overset{e}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$ con $e \in \underline{E}_{\underline{N}}$ como requiere la definición 2.1 (3ii).

Por el teorema de caracterización, $\underline{E}_{\underline{N}}$ induce una estructura de factorización en $\underline{X}$ que denotaremos $(\underline{E}_{\underline{N}}, \underline{M}_{\underline{N}})$. Por definición, $\underline{N} \subseteq \underline{M}_{\underline{N}}$. Si existiese otra estructura de factorización $(\underline{E}', \underline{M}')$ en $\underline{X}$ tal que $\underline{N} \subseteq \underline{M}'$, por definición de $\underline{E}_{\underline{N}}$ y por la diagonalización de $(\underline{E}', \underline{M}')$, $\underline{E}' \subseteq \underline{E}_{\underline{N}}$. ∎

(3.3) <u>OBSERVACION</u>

Si mono $\underline{X}$ denota la clase de monomorfismos de una categoría $\underline{X}$ con estructura de factorización (Epi $\underline{X}$, Monoextremada), $\underline{E}_{\text{mono}\underline{X}}$ es la clase de epimorfismos fuertes. ∎

(3.4) <u>TEOREMA</u>

Sea $(\underline{E}, \underline{M})$ una estructura de factorización en $\underline{X}$, $\underline{\beta}$ una subcategoría plena y repleta de $\underline{X}$. Entonces hay factorizaciones de fuentes en $\underline{X}$ cuyos germenes coinciden con $\underline{\beta}$ y entre ellas hay una cuya $\underline{E}$-clase contiene las $\underline{E}$-clases de todas esas factorizaciones. Esta $\underline{E}$-clase (que denotaremos por $\underline{E}_{\underline{\beta}}$) está determinada en forma única: $\underline{E}_{\underline{\beta}} = \underline{E}_{Ob\underline{\beta}}$.

<u>dem</u>: Por teorema 3.2, $\underline{E}_{\underline{\beta}}$ induce una estructura de factorización en $\underline{X}$. Por definición de $\underline{E}_{\underline{\beta}}$, todos los objetos de $\underline{\beta}$ son $\underline{E}_{\underline{\beta}}$ inyectivos. $\therefore$ $\underline{\beta}$ es el germen de $\underline{E}_{\underline{\beta}}$. Si $\underline{\beta}$ es el germen de otra factorización $(\underline{E}', \underline{M}')$ con $\underline{E}_{\underline{\beta}} \subseteq \underline{E}'$, todo $\underline{E}'$-morfismo es

$\underline{B}$-extendible para todo $B \in Ob\underline{\beta}$, por 1.2(10) . $\therefore$ $\underline{E}' \subseteq \underline{E}_{\underline{\beta}}$. $\therefore$ $\underline{E}_{\underline{\beta}}$ es maximal. ■

(3.5) <u>OBSERVACION</u>

Por 2.3(1), en una categoría $\underline{X}$ con estructura de factorización (Epi, Monoextremada), las clases $\underline{E}$ que inducen una factorización forman un látice completo. El teorema 3.4 define un operador en este látice asignando a cada factorización $(\underline{E},\underline{M})$ la factorización maximal $(\underline{E}_{\text{germen}\,\underline{E}}, \underline{M}_{\text{germen}\,\underline{E}})$ con el mismo germen. Aquellas factorizaciones $(\underline{E},\underline{M})$ tales que para el $(\underline{E},\underline{M})$-germen $\underline{\beta}$ sucede que $(\underline{E}_{\underline{\beta}}, \underline{M}_{\underline{\beta}}) = (\underline{E},\underline{M})$ se caracterizan por la siguiente condición: Si $e'e \in \underline{E}$ y e es epimorfismo, entonces $e \in \underline{E}$. (*)

<u>dem</u>: Por 3.4, $(\underline{E},\underline{M}) \subseteq (\underline{E}_{\underline{\beta}}, \underline{M}_{\underline{\beta}})$. Sea $e: \bar{X} \longrightarrow Y$ un $\underline{E}_{\underline{\beta}}$-morfismo. Sea $(\bar{X}, (f_i: \bar{X} \longrightarrow B_i)_I)$ la fuente de todos los morfismos de $\bar{X}$ en objetos de $\underline{\beta}$. Esta fuente tiene una $(\underline{E},\underline{M})$-factorización $e': \bar{X} \longrightarrow A$, $(A, (m_i)_I)$. Como $\underline{\beta}$ es $\underline{E}$-reflexiva, por ser el germen de $(\underline{E},\underline{M})$, por 1.2(9), $A \in Ob\underline{\beta}$. Como e es $\underline{\beta}$-extendible, hay un único $\underline{X}$-morfismo $k: Y \longrightarrow A$ tal que $ke = e'$. Pero $\underline{E}_{\underline{\beta}} \subseteq Epi\underline{X}$, por la propiedad (*), como $e' \in \underline{E}$, $e \in \underline{E}$ $\therefore$ $\underline{E} = \underline{E}_{\underline{\beta}}$.

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Y \arrow[dl, dashed, "k"] \\ A \arrow[r, "m_i"'] & B_i \end{tikzcd}$$

Supongamos ahora que $\underline{E} = \underline{E}_{\underline{\beta}}$. Sean $e: \bar{X} \longrightarrow Y$, $e': Y \longrightarrow Z$ $\underline{X}$-morfismos tales que $e'e \in \underline{E}$ y $e \in Epi\underline{X}$, y sea $f: \bar{X} \longrightarrow C$ otro con $C \in \mathrm{Ob}\,\underline{\beta}$. Por 1.2(5) $e' \in \underline{E}$. Sea $\varepsilon : Y \to W$, $m : W \to Z$ una $(\underline{E}, \underline{M})$-factorización de e'. Por el dual de 1.3(6) m es isomorfismo ∴ $m\varepsilon e = e'e \in \underline{E}$ y por ser $\underline{E}$ cerrado bajo composición con isomorfismos, $\varepsilon e \in \underline{E}$ ∴ Hay un único $\omega : W \to C$ $\underline{\mathcal{K}}$-morfismo que hace conmutar el diagrama,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "\varepsilon"] & Z \\ C & W \arrow[l, dashed, "\omega"] \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

ya que $\varepsilon e \in \underline{E} = \underline{E}_{\beta}$ y $C \in \mathrm{Ob}\,\underline{\beta}$ ∴ $\omega\varepsilon e = f$ ∴ e es C-extendible ∴ $e \in \underline{E}_{\beta} = \underline{E}$. ■

(3.6) <u>PROPOSICION</u>

Sea $\underline{\beta}$ una subcategoría $\underline{E}$-reflexiva de una categoría $\underline{\mathcal{K}}$ con estructura de factorización $(\underline{E}, \underline{M})$. Entonces hay una clase minimal $\underline{E}'$ que induce una factorización $(\underline{E}', \underline{M}')$ en $\underline{\mathcal{K}}$ tal que $\underline{\beta}$ es $\underline{E}'$-reflexiva en $\underline{\mathcal{K}}$. $\underline{\beta}$ es el $(\underline{E}', \underline{M}')$-germen de $\underline{\mathcal{K}}$.

<u>dem</u>: Por 3.4, hay factorizaciones cuyo germen es $\underline{\beta}$. Sea $(\underline{E}_i, \underline{M}_i)_I$ la familia de dichas factorizaciones. Definamos $\underline{E}' := \bigcap_{i \in I} \underline{E}_i$. Por 1.2(10), $(\underline{E}', \underline{M}')$-germen $\subseteq \underline{\beta}$ ya que $\underline{\beta}$ es $\underline{E}_i$-reflexiva en $\underline{\mathcal{K}}$, para cada $i \in I$ y por lo tanto, $\underline{\beta}$ es $\underline{E}'$-reflexiva en $\underline{\mathcal{K}}$. Sean $B \in \mathrm{Ob}\,\underline{\beta}$, $e : C \to D$ en $\underline{E}'$, $f : C \to B$ un $\underline{\mathcal{K}}$-morfismo. Por 1.2(10), B es $\underline{E}_i$-inyectivo para cada $i \in I$. Como $e \in \underline{E}'$, $e \in \bigcap_{i \in I} \underline{E}_i$ ∴ Hay un único $\underline{\mathcal{K}}$-morfismo $k : D \to B$ tal que $ke = f$, es único pues e es epimorfismo. ∴ $\underline{\beta} \subseteq (\underline{E}', \underline{M}')$-germen ∴ $\underline{\beta} = (\underline{E}', \underline{M}')$-germen. ■

(3.7) <u>EJEMPLO</u>

Sea $\underline{N}$ una clase de objetos de una categoría $\underline{\mathcal{K}}$ con estructura de factorización (Epi, Monoextremada). Entonces el $(\underline{E}_N, \underline{M}_N)$-germen $\underline{\beta}$ es la cerradura epirreflexiva de $\underline{N}$ y $\underline{E}_N = \underline{E}_\beta$.

dem: Por 1.2(9), 3.2 y 3.6 ∎

(3.8) TEOREMA

Sea $\underline{\mathcal{X}}$ una categoría que admita una factorización de fuentes $(\underline{E}^*, \underline{M}^*)$ tal que $\underline{M}^* \subseteq \mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}}$. Tenemos:

(a) (Epi extremado, Mono $\underline{\mathcal{X}}$) es una estructura de factorización.

(b) Epi extremado-$\underline{\mathcal{X}}$ es la más pequeña clase que induce una factorización de fuentes $(\underline{E}, \underline{M})$ con $\underline{M} \subseteq \mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}}$.

(c) Epi extremado-$\underline{\mathcal{X}}$ es la clase más grande que induce una factorización de fuentes $(\underline{E}, \underline{M})$ con $\mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}} \subseteq \underline{M}$.

(d) En $\underline{\mathcal{X}}$, todo epimorfismo extremado es fuerte.

dem: i) $\underline{E}_{\mathrm{Mono}\underline{\mathcal{X}}}$ induce una estructura de factorización, por el teorema 3.2, y es la más grande con $\mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}} \subseteq M_{\mathrm{Mono}\underline{\mathcal{X}}} =: \underline{M}$.

ii) Como $\underline{M}^* \subseteq \mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}}$, por 2.4 $\underline{\mathcal{X}}$ tiene coigualadores todos ellos en $\underline{E}^* \subseteq \mathrm{Epi}\,\underline{\mathcal{X}}$. Probaremos que todo coigualador está en $\underline{E}_{\mathrm{Mono}\underline{\mathcal{X}}}$.

Sea h el coigualador de f, g: $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$. Tomemos un diagrama conmutativo con $(\overline{X}, (n_i)_I)$ en Mono $\underline{\mathcal{X}}$. $\therefore n_i u f = v_i h f = v_i h g = n_i u g$ para toda $i \in I$. $\therefore uf = ug$. Como $h = \mathrm{Coeq}(f,g)$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[d, "v_i"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\ \overline{X} \arrow[r, "n_i"'] & Z_i \end{tikzcd}$$

hay un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $w: Z \longrightarrow \overline{X}$ que hace conmutar el nuevo diagrama. $\therefore h \in \underline{E}_{\mathrm{Mono}\underline{\mathcal{X}}}$ $\therefore M_{\mathrm{Mono}\underline{\mathcal{X}}} \subseteq \mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}}$

$\therefore \underline{M}_{\mathrm{Mono}\underline{\mathcal{X}}} = \mathrm{Mono}\,\underline{\mathcal{X}}$.

Sea $e \in \underline{E}_{Mono\underline{\mathcal{X}}}$. Lo podemos factorizar através de $(\underline{E}_{Mono\underline{\mathcal{X}}}, Mono\underline{\mathcal{X}})$: $e = me'$. Formamos un diagrama conmutativo, donde, por la propiedad de diagonalización existe un único $\underline{\mathcal{X}}$-morfismo $w : Y \longrightarrow Z$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\ Z \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd}$$

$we = e'$ y $mw = 1_Y$. Como m es monomorfismo, m es isomorfismo $\therefore$ $e \in$ Epi extremado-$\underline{\mathcal{X}}$. Similarmente Epiextremado$\underline{\mathcal{X}}$ $\subseteq \underline{E}_{Mono\underline{\mathcal{X}}}$. $\therefore$ $\underline{E}_{Mono\underline{\mathcal{X}}}$ = Epiextremado$\underline{\mathcal{X}}$, con lo que quedan demostrados los incisos a, c y d.

Por 2.3(1) y 2.4 hay una clase minimal $\underline{E}'$ que induce una factorización de fuentes $(\underline{E}', \underline{M}')$ con $\underline{M}' \subseteq Mono\underline{\mathcal{X}}$. $\therefore$ $\underline{E}' \subseteq$ Epiextremado-$\underline{\mathcal{X}}$. Por 1.2(12), $Mono\underline{\mathcal{X}} \subseteq \underline{M}'$. $\therefore$ $Mono\underline{\mathcal{X}} = \underline{M}'$.

$\therefore$ Epi extremado-$\underline{\mathcal{X}}$ es minimal. ▪

(3.9) <u>COROLARIO</u>

(1) Sea $\underline{\mathcal{X}}$ co-completa y colocalmente pequeña. Entonces tenemos las factorizaciones siguientes en $\underline{\mathcal{X}}$: (Epi$\underline{\mathcal{X}}$, Mono extremada), (Epiextremado-$\underline{\mathcal{X}}$, Mono$\underline{\mathcal{X}}$).

(2) Dual de (1)

(3) Para tener (Epi$\underline{\mathcal{X}}$, Monoextremada) - factorización de fuentes en $\underline{\mathcal{X}}$, cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente:

i) $\underline{\mathcal{X}}$ es co-completa y colocalmente pequeña

ii) $\underline{\mathcal{X}}$ es completa, local y co-localmente pequeña.

<u>dem</u>: 1), 2) y 3i) son inmediatos de 1.1, 1.3(6), corolario 2.5

y 2.7 (3ii).

"3ii)". Por (2) $\mathcal{K}^{op}$ tiene una (Epiextremado, Mono$\mathcal{K}$)-factorización de fuentes. Entonces $\mathcal{K}$ tiene una (Epi, monoextremado)-factorización para morfismos, que, por 1.3(2) se extiende en forma única a una factorización de fuentes. ∎

(3.10) OBSERVACIONES

(1) Para una (Epi, Mono extremada)-factorización en $\mathcal{K}$, 3.8 garantiza una (Epi, monoextremado)-factorización de morfismos en $\mathcal{K}^{op}$.

(2) Si $\mathcal{K}$ es co-completa, local y colocalmente pequeña, entonces tanto $\mathcal{K}$ como $\mathcal{K}^{op}$ tienen (Epi, Monoextremada)-factorización de fuentes: Por 1.3(2) y 2.5 ya que $\mathcal{K}$ tiene productos y coproductos.

(3) Dual de (2).

FINITO!

BIBLIOGRAFIA.

[He] H. Herrlich. Topological functors. Gen. Topology and Appl. 4(1974), 125-142.

[HSV] H. Herrlich, G. Salicrup and R. Vazquez. Dispersed factorization structures. Can. J. Math. Vol. $\overline{\underline{XXXI}}$. No. 5 (1979) 1059-1071.

[HS] H. Herrlich and G.E. Strecker. Category Theory. Heldermann Verlag, Berlin (1979).

[HO] R.E. Hoffmann. Factorization of Cones. Math. Nachr. 87(1979) 221-238

[ML] S. MacLane. Categories for the working mathematician. Springer Verlag. New York Heidelberg Berlin. 3ª impresión 1971.

[MS] Mellon and Strecker. On Factorization Structures. Preprint.