

2
M. 16



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MOSAICOS

TESIS PROFESIONAL

Que Para Obtener el Titulo de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

MAGDALENA M. B. MAURER SPITALIER

México, D. F., 1983



U. N. A. U. M.
AREA DE EXAMEN
PROFESIONALES
Y GRADOS

7156-2180



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

	Pág.
Introducción	
Capítulo I Transformaciones lineales.....	1
Capítulo II Mosaicos del plano euclidiano.....	11
Capítulo III Los axiomas de Hilbert.....	31
Capítulo IV Mosaicos de la esfera y del plano elíptico.....	37
Capítulo V El modelo de Poincaré del plano hiperbólico....	53
Capítulo VI Mosaicos del plano hiperbólico.....	64

Introducción

En el presente trabajo se estudian los mosaicos de los espacios clásicos de dimensión dos: el plano euclidiano, la esfera, el plano elíptico y el plano hiperbólico.

Un mosaico está asociado a un grupo discontinuo de movimientos rígidos y en todos los casos dichos movimientos rígidos están dados por transformaciones lineales del plano complejo a las cuales dedicamos el primer capítulo.

En el capítulo III se dan los axiomas de Hilbert para el plano euclidiano con el objeto de estudiar las diferencias básicas entre los espacios considerados.

En los capítulos II y IV se describen en su totalidad los mosaicos del plano euclidiano, de la esfera y del plano elíptico.

Por último, en el capítulo V se construye el modelo de Poincaré del plano hiperbólico y en el capítulo VI se dan algunos resultados de carácter general sobre los mosaicos del plano hiperbólico y entre ellos los mosaicos triangulares.

CAPITULO I

Transformaciones lineales

Nos interesa el estudio del grupo H de las transformaciones conformes del plano extendido \mathbb{C}^* . Los elementos de este grupo están dados por las funciones $T: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

donde $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$

y $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c \neq 0$.

Para el estudio de este grupo conviene considerar el grupo G de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$.

Asociemos a cada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ la transformación

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Así, al producto de matrices le corresponde la composición de transformaciones y a la matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la transformación idéntica. En esta forma G actúa en \mathbb{C}^* .

Las matrices a las que corresponde la transformación idéntica $z \mapsto z$ son I y $-I$; el grupo H resulta, pues, ser isomorfo al grupo cociente $G/\{I, -I\}$.

A continuación recordaremos algunas propiedades de las transformaciones $T \in H$.

- i) como habíamos dicho son las transformaciones conformes del plano extendido \mathbb{C}^* .
- ii) transforman círculos en círculos (incluyendo, claro, entre éstos a las rectas).
- iii) dadas dos ternas ordenadas de puntos z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 de puntos de \mathbb{C}^* existe una transformación de H , única, que manda a la primera en la segunda.

Estudiaremos detalladamente las transformaciones lineales con respecto a sus puntos fijos (en \mathbb{C}^*).

Si $c \neq 0$ los puntos fijos de T están en \mathbb{C} y son las soluciones de la ecuación

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

es decir

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

En este caso T tiene uno o dos puntos fijos en \mathbb{C} . Ahora; si $c = 0$ entonces ∞ es un punto fijo y los otros son las soluciones de la ecuación

$$(d-a)z - b = 0.$$

Si $d \neq a$ hay una solución $z = \frac{b}{d-a}$ y si $d = a$ entonces si $b \neq 0$

la ecuación no tiene solución y si $b = 0$ T es la identidad.

En resumen:

si $c \neq 0$ entonces T tiene 1 ó 2 puntos fijos en \mathbb{C} .

si $c = 0$ y $\left\{ \begin{array}{l} d \neq a, \text{ entonces } T \text{ tiene dos puntos fijos:} \\ \text{y un punto de } \mathbb{C}. \\ d = a \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} b \neq 0 \text{ entonces } \infty \text{ es el único} \\ \text{punto fijo de } T. \\ b = 0 \text{ entonces } T \text{ es la identidad.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Consideremos una transformación T cuyos puntos fijos son 0 e ∞ ;
luego T es de la forma

$$T(z) = az \text{ con } a \neq 0, a \neq 1.$$

Si $a = re^{i\theta}$ $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ entonces T es la composición de
la transformación

$$z \rightarrow e^{i\theta} z$$

que es la rotación bajo θ con centro en 0 y

$$z \rightarrow rz$$

que es la homotecia de razón r con centro en el origen.

El caso general de una transformación T con dos puntos fijos
 α y β se puede reducir al anterior considerando $T_1 = S \circ T \circ S^{-1}$
donde $S(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ ya que $S(\alpha) = 0$, $S(\beta) = \infty$.

Según hemos visto $T_1(z) = re^{i\theta} z$ $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Si T_1 es la homotecia $T_1(z) = rz$, $r > 0$, entonces T se llama hiperbólica.

Si T_1 es la rotación $T_1(z) = e^{i\theta} z$ $0 < \theta < 2\pi$ entonces T se llama elíptica.

Si $r \neq 1$ y $\theta \neq 0$ entonces T se llama loxodrómica.

En la figura siguiente se ilustra lo anterior

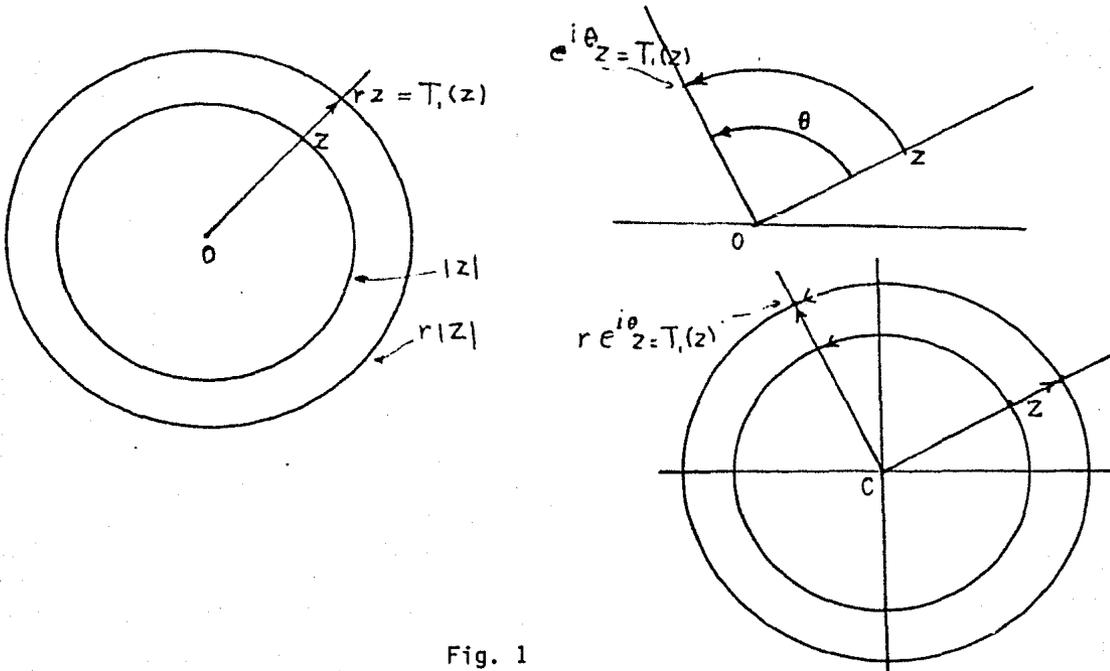


Fig. 1

Hagamos $\xi = S(z)$. En el plano de las ξ consideremos dos familias de curvas: los rayos que parten del origen y los círculos con centro

en 0. Las familias correspondientes en el plano de las z son, respectivamente, los círculos que pasan por α y β , por una parte y, por otra, los círculos ortogonales a ellos.

Si T es elíptica T_1 es una rotación y bajo T_1 cada rayo gira un ángulo θ y se transforma en otro; así, bajo T cada uno de los círculos punteados se transforma en otro con el que forma el mismo ángulo θ .

Ahora bien: los círculos con centro en 0 permanecen invariantes bajo T_1 así como los círculos correspondientes en el plano z permanecen invariantes bajo T .

De esta manera podemos visualizar una transformación elíptica como una especie de "rotación" sobre dos puntos α y β .

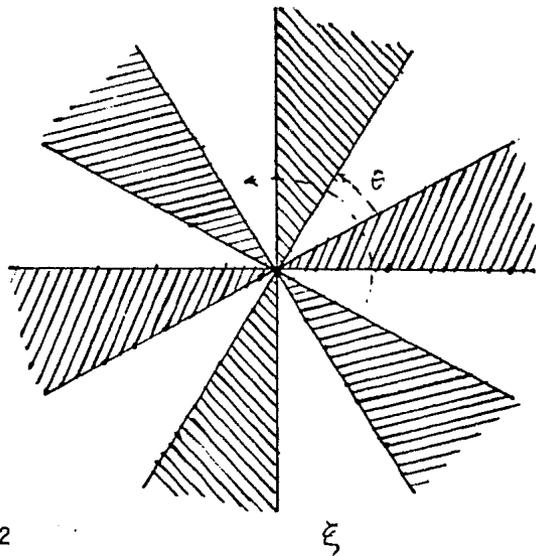
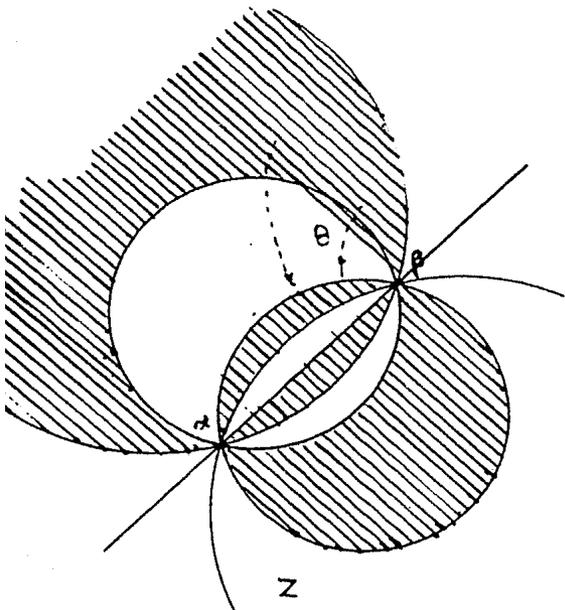


Fig. 2

Si T es hiperbólica, T_1 es una homotecia de modo que los rayos que parten de O permanecen invariantes bajo T_1 . En el plano de las z cada arco de círculo punteado entre α y β permanece invariante bajo T . Como los círculos con centro en O se transforman uno en otro bajo T_1 , tenemos que los círculos correspondientes en el plano de las z se transforman uno en otro bajo T .

Así, podemos pensar en una transformación hiperbólica como una especie de "traslación" en la cual cada punto se mueve a lo largo del arco de círculo que lo contiene, alejándose de α si $r > 1$ y acercándose a α si $r < 1$.

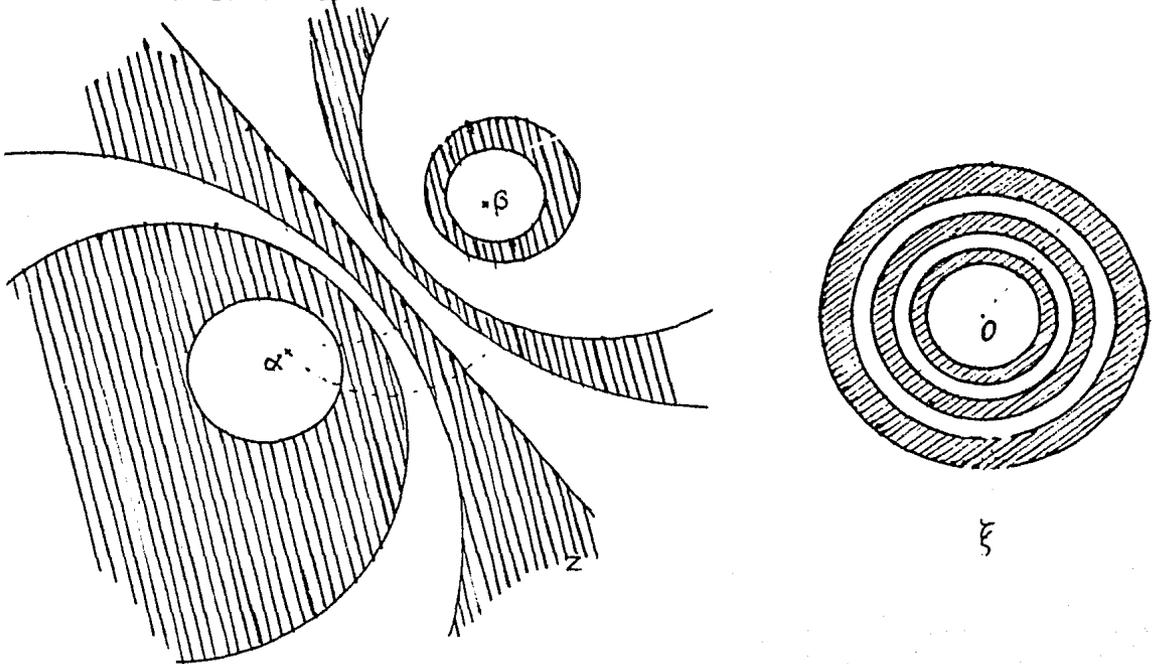


Fig. 3

Por último, si T es loxodrómica, T_1 es una rotación seguida de una homotecia; cada ξ se mueve un ángulo θ a lo largo del círculo que lo contiene y después se aleja de O o se acerca a él a lo largo del rayo donde quedó. La interpretación correspondiente para T es obvia.

Es claro que si T es loxodrómica ninguno de los círculos de las dos familias consideradas en el plano z permanece invariante bajo T y es fácil demostrar que ningún otro círculo se transforma en sí mismo bajo T .

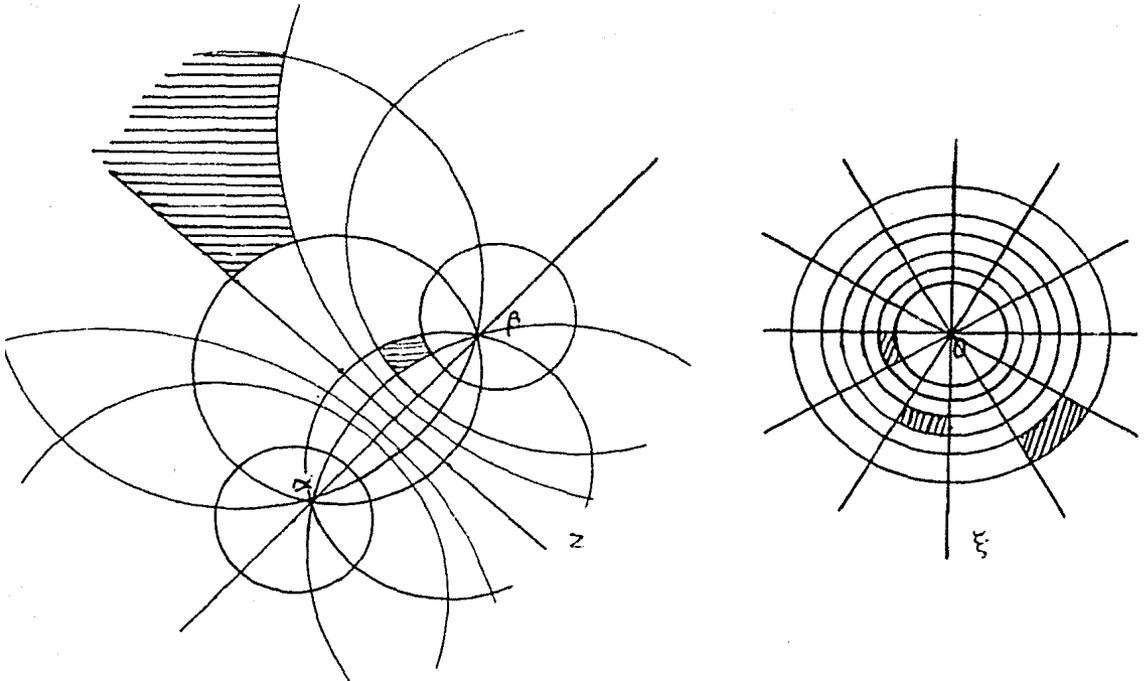


Fig. 4

Si hacemos $w = T(z)$, como $S(w) = aS(z)$ tenemos

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = a \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

que es una expresión cómoda para una transformación T cuyos puntos fijos son α y β .

Recalcamos:

- Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, T es hiperbólica.
- Si $|a| = 1$ y $a \neq 1$, T es elíptica; si $a = 1$ T es la identidad.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ y $|a| \neq 1$, T es loxodrómica.

Nos resta describir las transformaciones parabólicas que son las que tienen un solo punto fijo.

Sea T una transformación parabólica y sea α su punto fijo. Si $\alpha = \infty$, T es una traslación.

Consideremos el caso general; sea α el punto fijo de T . Si $S(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ entonces $S(\alpha) = \infty$. $T_1 = S \circ T \circ S^{-1}$ resulta ser una traslación, es decir: $T_1(z) = z+b$, $b \neq 0$.

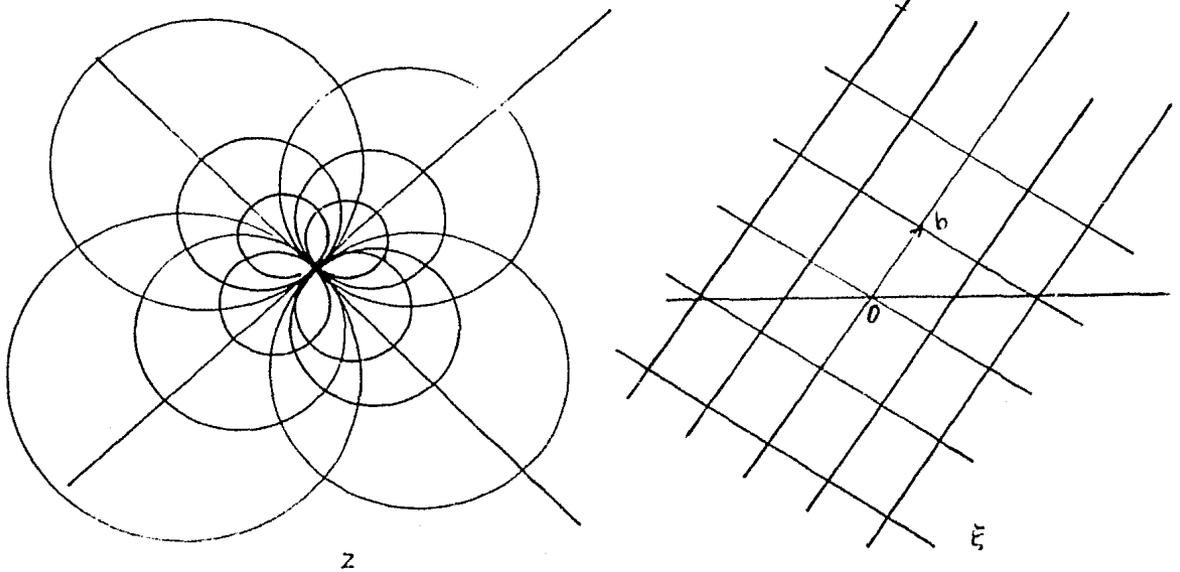


Fig. 5

Observemos que la recta L que pasa por α y por el punto $\alpha + \frac{1}{b}$ se transforma, bajo S , en la recta que pasa por 0 y b . Consideremos, en el plano de las ξ la familia de las rectas paralelas a $S(L)$; cada una de ellas es invariante bajo T_1 y sus imágenes bajo S^{-1} son los círculos c tangentes a L en α que son invariantes bajo T .

Podemos pensar en la transformación T como una situación límite de una transformación elíptica cuyos puntos fijos coinciden en α . Cada punto $z \neq \alpha$ se desplaza sobre el círculo c que lo contiene.

Si hacemos $w = T(z)$, como $S(w) = S(z) + b$ tenemos $\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + b$ que es la forma general de una transformación parabólica con punto fijo α .

Con esto terminamos la revisión de las propiedades de las transformaciones lineales que para este trabajo interesan. Estas transformaciones se usarán para el estudio de los movimientos rígidos, tanto del plano euclidiano como de la esfera, el plano elíptico y el plano hiperbólico.

CAPITULO II

Mosaicos euclidianos

Sea M un espacio topológico y G un grupo (bajo la composición) de homeomorfismos $g: M \rightarrow M$ de M . Sea x un punto de M . La órbita $G(x)$ de x bajo G es $G(x) = \{g(x) | g \in G\}$, es decir, el conjunto de las imágenes de x bajo los elementos de G . Denotaremos a veces a $g(x)$ como x_g y diremos que x y x_g son equivalentes bajo G .

Se dice que un punto y de M es un punto límite de $G(x)$ si toda vecindad de y contiene elementos x_g de la órbita de x para una infinidad de elementos $g \in G$.

G se llama discontinuo si $\forall x \in M, G(x)$ no tiene puntos límites.

A grandes rasgos se puede describir un mosaico euclidiano como sigue: asociada a cada grupo discontinuo de movimientos rígidos del plano se tiene una descomposición de éste en regiones que se transforman una en otra bajo los elementos del grupo. Cuando estas regiones son poligonales la descomposición se llama un mosaico euclidiano.

Consideraremos el plano euclidiano con su estructura compleja; por esta razón lo llamaremos plano complejo y lo denotaremos por \mathbb{C} .

Definición:

Una región fundamental de G es la cerradura \bar{F} de un abierto conexo F de \mathbb{C} tal que

- i) si $x \in F$ y $g \in G$ y $g \neq e$ (identidad de G) entonces $g(x) \notin F$.
- ii) Si $y \in \mathbb{C}$ entonces $\exists g \in G$ tal que $g(y) \in \bar{F}$.

Describiremos todos los grupos discontinuos de movimientos rígidos de \mathbb{C} . Todo movimiento rígido de \mathbb{C} es una transformación lineal de la forma

$$T(z) = \epsilon z + b \quad \epsilon, b \in \mathbb{C}, |\epsilon| = 1$$

es decir: T es la composición de la rotación con centro en el origen

$$z \mapsto \epsilon z$$

y la traslación

$$z \mapsto z + b.$$

Denotaremos por $g(\epsilon, b)$ al movimiento rígido

$$z \mapsto \epsilon z + b$$

Si $\epsilon = 1$ esto es una traslación y si $\epsilon \neq 1$ es una rotación con centro en $\frac{b}{1-\epsilon}$.

1 Traslaciones.

Sea G un grupo discontinuo de traslaciones de \mathbb{C} . Mostraremos que si G no es trivial, entonces o existe $\omega_1 \neq 0$ tal que los elementos de G son los de la forma

$$z \mapsto z + n\omega_1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

o existen $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \in \mathbb{C}$ con $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ tal que los elementos de G son de la forma

$$z \mapsto z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

es decir: el módulo asociado a las traslaciones de G está generado por ω_1 en el primer caso y por ω_1 y ω_2 en el segundo.

En efecto: por ser G discontinuo existe un elemento de G

$$z \mapsto z + \omega_1$$

con $0 < |\omega_1|$ y $|\omega_1|$ mínima.

Ahora bien; si todo elemento de G es de la forma

$$z \mapsto z + \lambda\omega_1 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

mostraremos que λ es entero.

En efecto, sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n \leq \lambda < n+1$$

entonces

$$0 \leq \lambda - n < 1$$

y
$$0 < (\lambda - n)|\omega_1| < |\omega_1|$$

Pero $z \mapsto z + (\lambda - n)\omega_1$ es un elemento de G y por ser $|\omega_1|$ mínima tenemos $\lambda - n = 0$.

Supongamos ahora que en el módulo existe ω con $\frac{\omega}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$. Entre estas ω tomemos ω_2 con módulo mínimo. Todo elemento del módulo es de la forma

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \quad \lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Existen $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$|\lambda_1 - n_1| \leq \frac{1}{2}$$

y
$$|\lambda_2 - n_2| \leq \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & |\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 - n_1\omega_1 - n_2\omega_2| < \\ & < |\lambda_1 - n_1||\omega_1| + |\lambda_2 - n_2||\omega_2| \leq \\ & \leq \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2| \end{aligned}$$

La desigualdad estricta implica que

$$\lambda_2 - n_2 = 0$$

es decir $\lambda_2 = n_2$ y entonces $\lambda_1 = n_1$.

Llamaremos base canónica a una base (ω_1, ω_2) del módulo de traslaciones, escogida como se hizo.

En el primer caso una región fundamental \bar{F} es la región cuya frontera está constituida por dos rectas distintas paralelas entre sí, y que pasen por 0 y ω_1 respectivamente.

En el segundo caso una región fundamental \bar{F} es el paralelogramo cerrado determinado por ω_1 y ω_2 .

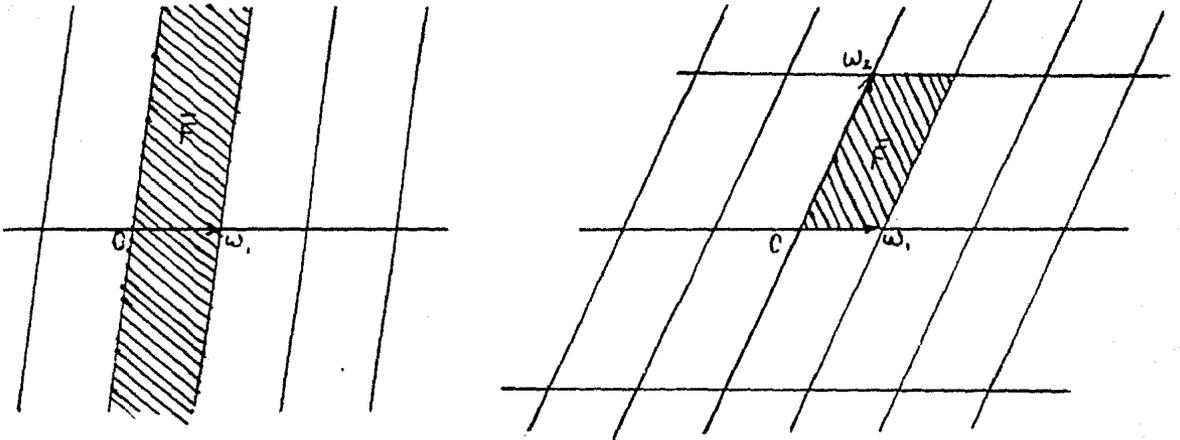


Fig. 6

2 Rotaciones.

Sea G un grupo discontinuo de movimientos rígidos de \mathbb{C} que no contiene traslaciones. Mostraremos que los elementos de G son rotaciones sobre el mismo punto.

Sean $g(\epsilon_1, b_1)$, $g(\epsilon_2, b_2)$ elementos de G . Su conmutador

$$\begin{aligned} &g(\epsilon_1, b_1)g(\epsilon_2, b_2)g^{-1}(\epsilon_1, b_1)g^{-1}(\epsilon_2, b_2) = \\ &= g(1, (1-\epsilon_2)b_1 - (1-\epsilon_1)b_2) \end{aligned}$$

es una traslación y por lo tanto es la identidad. Entonces

$$(1-\epsilon_2)b_1 - (1-\epsilon_1)b_2 = 0$$

$$\frac{b_1}{1-\epsilon_1} = \frac{b_2}{1-\epsilon_2} = z_0$$

es decir: los elementos considerados son rotaciones sobre el mismo punto z_0 .

Puesto que el grupo es discreto es finito y está generado por una rotación bajo un ángulo $\frac{2\pi}{n}$ sobre z_0 ; una región fundamental F de G es un sector angular cerrado cuyo vértice es z_0 y cuyo ángulo es $\frac{2\pi}{n}$.

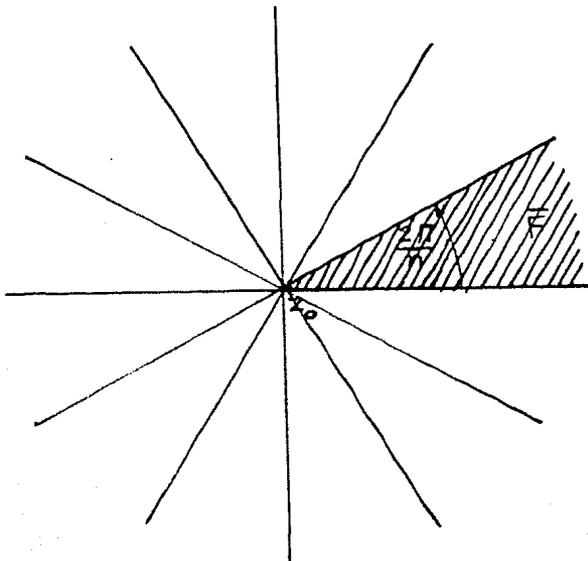


Fig. 7

Consideraremos ahora grupos G que contengan tanto rotaciones como traslaciones.

Sean $g(1,b)$ y $g(\epsilon,c)$ una traslación y una rotación de G . El conjugado de $g(1,b)$ por $g^{-1}(\epsilon,c)$ es

$$g(\epsilon,c)g(1,b)g^{-1}(\epsilon,c) = g(1,\epsilon b)$$

es decir; en el módulo de traslaciones aparece ϵb .

3 Rotaciones y un módulo de traslaciones de rango 1.

Supongamos que el módulo del subgrupo T de traslaciones de G tiene rango 1 y sea ω_1 un generador de T escogido como se dijo antes (con $|\omega_1|$ mínima). Es claro que en este caso el único ángulo de rotación es π . Observamos que

$$\begin{aligned} g^{-1}(1,c)g(\epsilon,b)g(1,c) &= g(1,-c)g(\epsilon,c\epsilon+b) = \\ &= g(\epsilon, c+b-c) = \\ &= g(\epsilon, b-c(1-\epsilon)). \end{aligned}$$

es decir: que el conjugado de la rotación $g(\epsilon,b)$ cuyo centro es $\frac{b}{1-\epsilon}$ bajo la traslación $g(1,c)$ es la rotación $g(\epsilon,b-c(1-\epsilon))$ cuyo centro es $\frac{b}{1-\epsilon} - c$.

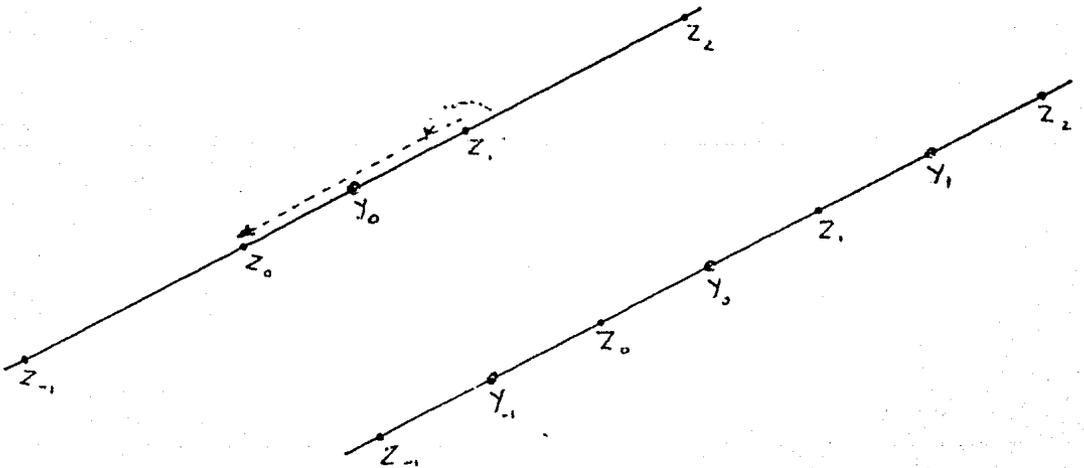


Fig. 8

Consideremos un centro de rotación z_0 . Ya vimos que $z_0 + n\omega_1$ es el centro de una rotación en G para $n \in \mathbb{Z}$. Sea $z_n = z_0 + n\omega_1$. Consideremos ahora la composición de la traslación bajo ω_1 y la rotación bajo π sobre z_1 . Esta transformación manda a z_0 en z_1 y a z_1 en z_0 ; se trata pues de una rotación bajo un ángulo π sobre el punto medio y_0 del segmento z_0z_1 . Es claro que $y_n = y_0 + n\omega_1$, $n \in \mathbb{Z}$ son también centros de rotaciones en G .

Supongamos que $z = z_0 + \lambda\omega_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es el centro de una rotación en G que no es una de las consideradas anteriormente; entonces la distancia de z a alguna z_n o a alguna y_m es menor que $\frac{1}{2}|\omega_1|$ y eso implica que hay una traslación de G

$$z \rightarrow z + \omega \quad \text{con } 0 < |\omega| < |\omega_1|$$

Si hubiera en G alguna rotación con centro en z fuera de la recta $z_0 + \lambda\omega_1$ entonces al componer esta rotación con una de las consideradas anteriormente obtendríamos una traslación sobre un vector que no está en el módulo generado por ω_1 .

En resumen: los centros de las rotaciones en G , que son todas bajo un ángulo π , son los puntos $z_0 + \frac{n}{2}\omega_1$, $n \in \mathbb{Z}$, y las traslaciones en G son todas de la forma $z \rightarrow z + n\omega_1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Es obvio pues, que una región fundamental \bar{F} de G está determinada por la recta $z_0 + \lambda\omega_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y por dos rectas distintas, paralelas, que corten a la anterior en los puntos z_0 y z_1 .

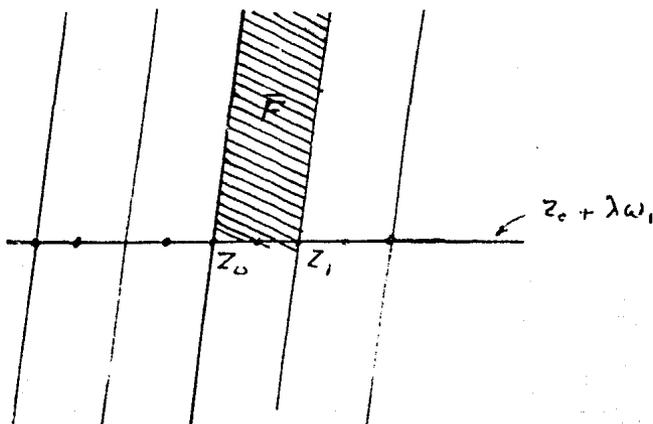


Fig. 9

4 Rotaciones y un módulo de traslaciones de rango 2.

El subgrupo de G que deja fijo a un punto z_0 es un subgrupo de rotaciones con centro en z_0 . Como G es discontinuo, este grupo es finito de orden n y está generado por la rotación sobre z_0 bajo el ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

Veremos ahora que si el módulo de las traslaciones en G tiene rango 2 entonces los valores posibles para n son 2,3,4 y 6.

En efecto: sean $g(1,b)$ y $g(\epsilon,c)$ una traslación y una rotación en G . Como vimos, el conjugado de $g(1,b)$ bajo $g^{-1}(\epsilon,b)$ es $g(1,\epsilon b)$. Vemos pues que en el grupo hay una traslación bajo ϵb que

es la imagen de b bajo la rotación con centro en el origen $z \mapsto \epsilon z$, es decir que cb no depende de c .

Tomemos una base canónica $\{\omega_1, \omega_2\}$ del módulo de traslaciones. Si $g(\epsilon, b)$ es una rotación en G y $\epsilon = e^{i\theta}$, entonces sabemos que $e^{i\theta}\omega_1$ está en el módulo de traslaciones y por lo tanto también está en el módulo $(1-e^{i\theta})\omega_1$. Si $\theta < \frac{2\pi}{6}$ entonces

$$|(1-e^{i\theta})\omega_1| < |\omega_1|$$

contra lo supuesto; por lo tanto $n \leq 6$.

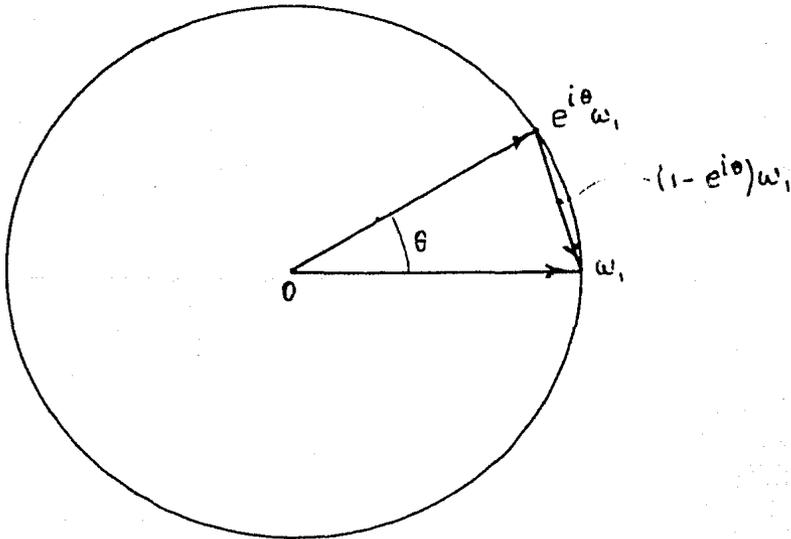


Fig. 10

Si hubiera una rotación bajo el ángulo $\frac{2\pi}{5}$ entonces $e^{i\frac{4\pi}{5}}\omega_1 + \omega_1$ estaría en el módulo y

$$|e^{i\frac{4\pi}{5}}\omega_1 + \omega_1| < |\omega_1|,$$

$\therefore n \neq 5.$

Así pues, los valores posibles de n son 2,3,4 y 6.

Clasificaremos los grupos que vamos a estudiar en este inciso, según el valor mínimo θ de los ángulos de sus rotaciones.

4.1 $\theta = \pi$

Sea (ω, ω_1) una base canónica del módulo de las traslaciones en G .

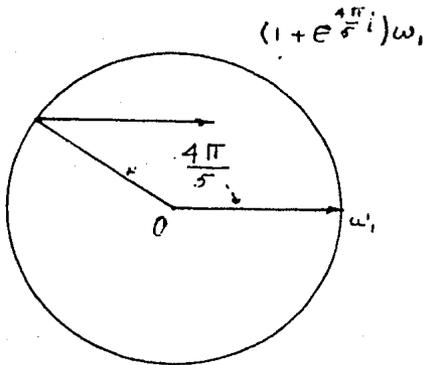


Fig. 11

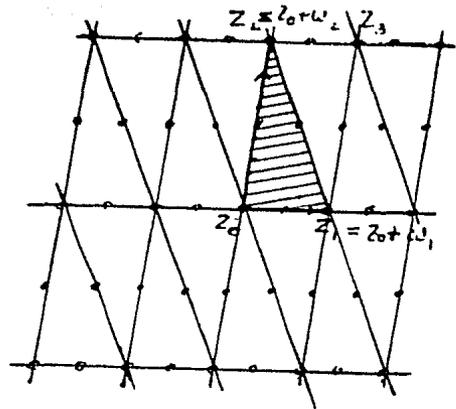


Fig. 12

Sea z_0 el centro de una rotación en G . Sean $z_1 = z_0 + \omega_1$, $z_2 = z_0 + \omega_2$, $z_3 = z_0 + \omega_1 + \omega_2$. Sabemos que z_1, z_2 y z_3 son centros de rotaciones en G .

Como vimos en el caso 3 los puntos medios de los lados del triángulo $z_0 z_1 z_2$ son también centros de rotaciones en G y es claro que son los únicos en ese triángulo.

El triángulo F cuyos vértices son z_0, z_1, z_2 es una región fundamental de G ; en efecto; dado un punto $z \in \mathbb{C}$, z es equivalente bajo una traslación a un punto del paralelogramo $z_0 z_1 z_2 z_3$ y un punto de este paralelogramo es equivalente bajo una rotación con centro en y_0 a un punto de F .

Dos puntos de F no son equivalentes bajo traslaciones y es claro que tampoco bajo rotaciones.

Un mosaico asociado a un grupo discreto H de movimientos rígidos de \mathbb{C} es

$$\{h(\bar{U}) \mid h \in H\}$$

tal que \bar{U} es una región fundamental de H y es poligonal. Obsérvese que

$$\bigcup_{h \in H} h(\bar{U}) = \mathbb{C}$$

y

$$\text{int}(h_1(\bar{U}) \cap h_2(\bar{U})) = \emptyset \quad \text{si } h_1 \neq h_2.$$

Hemos visto que $\{g(\bar{F}) \mid g \in G\}$ es un mosaico asociado a G cuyos azulejos son las regiones $g(\bar{F})$.

4.2 $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Los ángulos generadores posibles de los grupos de rotaciones en G son π y $\frac{2\pi}{3}$ puesto que los restantes son menores que $\frac{2\pi}{3}$.

Si hubiera una notación bajo un ángulo π entonces la composición de ésta con el inverso de una rotación bajo un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ sería una rotación bajo un ángulo $\frac{2\pi}{6}$ de modo que todos los subgrupos de rotaciones de G son de orden 3.

Sea ω_1 un elemento del módulo de traslaciones de G tal que $|\omega_1|$ es mayor que 0 y es mínimo. Sabemos que $\omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}\omega_1$ está en el módulo. Es obvio que $\{\omega_1, \omega_2\}$ es una base canónica del módulo de traslaciones de G .

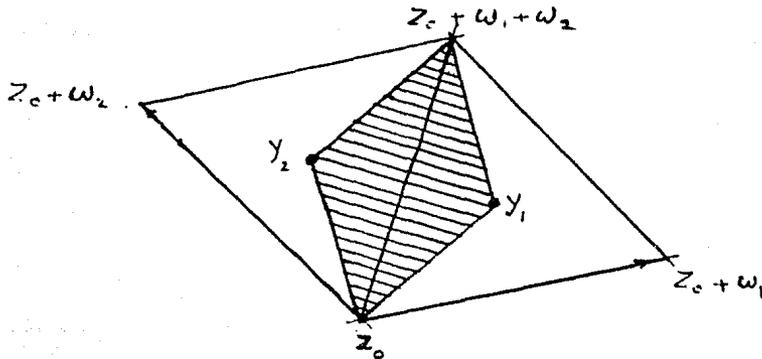


Fig. 13

Sea z_0 el centro de una rotación en G . Sabemos que $z_0 + \omega$ es el centro de una rotación en G para toda ω en el módulo de traslaciones.

Bajo una rotación con centro en z_0 y bajo un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ el segmento $z_0, z_0 + \omega_1$ se transforma en el segmento $z_0, z_0 + \omega_2$ y éste, bajo una traslación en G , en el segmento $z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$. Entonces la rotación seguida de la traslación mandan al segmento $z_0, z_0 + \omega_1$ en $z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$. Por lo tanto si y_1 es el centro del triángulo $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$ la rotación con centro en y_1 y bajo un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ está en G .

Análogamente vemos que en G están también tanto la rotación bajo $\frac{2\pi}{3}$ sobre el centro, y_2 , del triángulo $z_0, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$, como las rotaciones bajo ese mismo ángulo con centro en los trasladados de y_1 y y_2 .

Mostraremos que en el triángulo $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$ no hay más centros de rotación.

Sean $g(\epsilon, b_1)$ y $g(\epsilon, b_2)$ rotaciones en G .

$$g(\epsilon, b_1) g^{-1}(\epsilon, b_2) = g(1, b_1 - b_2)$$

es una traslación bajo $b_1 - b_2$.

Por lo tanto $|b_1 - b_2| \geq |\omega_1|$.

La distancia d entre los centros de las rotaciones es

$$d = \frac{|b_1 - b_2|}{|1 - \epsilon|} \geq \frac{|\omega_1|}{|1 - \epsilon|}$$

y puesto que

$$\epsilon = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

se tiene que

$$d \geq \frac{|\omega_1|}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto en el triángulo $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$ no hay más centros de rotación que los vértices y el centro. Análogamente, en el triángulo $z_0, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$ hay sólo 4 centros de rotación.

El paralelogramo \bar{F} cuyos vértices son $z_0, y_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, y_2$ es una región fundamental de G . En efecto: si $z \in \mathbb{C}$ hay en el paralelogramo $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$ un punto equivalente a z bajo una traslación en G . Este punto se puede llevar mediante una rotación con centro en y_1 o en y_2 a un punto en \bar{F} ; ahora bien: en \bar{F} no hay dos puntos equivalentes ni bajo una traslación ni bajo una rotación en G .

Entonces $\{g(\bar{F}) | g \in G\}$ es un mosaico asociado a G .

4.3 $\theta = \frac{\pi}{2}$

Los ángulos generadores posibles son $\pi, \frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$ y vemos que $\frac{2\pi}{3}$ no puede aparecer puesto que una rotación bajo un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ seguida del inverso de otra bajo un ángulo $\frac{\pi}{2}$ es una rotación bajo un ángulo $\frac{\pi}{6}$.

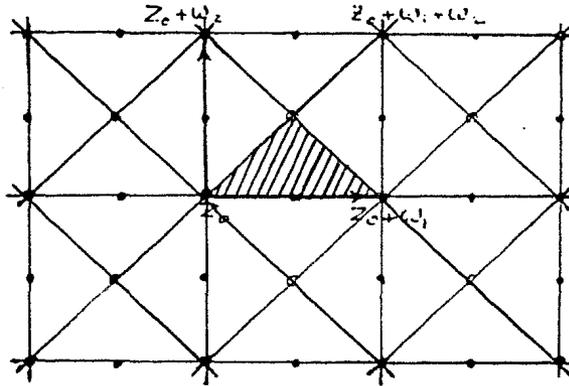


Fig. 14

Sea z_0 el centro de una rotación de orden 4 y sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ una base canónica del módulo de traslaciones con $\omega_2 = e^{\frac{j\pi}{2}} \omega_1$. Consideremos el subgrupo G' de G generado por las traslaciones en G y las rotaciones bajo un ángulo π . G' es del tipo considerado en 4.1 y entonces podemos afirmar que además de los vértices del cuadrado $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$ tanto el centro del cuadrado como los puntos medios de sus lados son centros de rotaciones en G' y además son todos, salvo por traslaciones.

Por lo tanto estos puntos son los centros de las rotaciones en G puesto que en cada centro de rotación en G hay una rotación bajo π .

Bajo la composición de la rotación con centro en z_0 bajo $\frac{\pi}{2}$ seguida de la traslación bajo ω_1 , el segmento $z_0, z_0 + \omega_1$ se transforma en el segmento $z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$; ésta es la imagen del primer segmento bajo la rotación con centro en y bajo un ángulo $\frac{\pi}{2}$. Vemos pues que esta rotación está en G y es de orden 4.

Ahora bien: sean $g(\epsilon, b_1), g(\epsilon, b_2)$ dos rotaciones de orden 4 de G , i.e.: $\epsilon = e^{\frac{i\pi}{2}}$. Como vimos en 4.2 la distancia entre los centros de las rotaciones es

$$d = \left| \frac{b_1}{1-\epsilon} - \frac{b_2}{1-\epsilon} \right| = \frac{|b_1 - b_2|}{|1-\epsilon|} \geq \frac{|\omega_1|}{|1-\epsilon|} = \frac{|\omega_1|}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto los puntos medios de los lados no son centros de rotaciones de orden 4.

Resumiendo: en el cuadrado cerrado $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$, los centros de rotaciones en G son:

- Los vértices y el centro que son centros de rotaciones de orden 4.
- Los puntos medios de los lados que son centros de rotaciones de orden 2.

Es claro que una región fundamental \bar{F} de G es el triángulo $z_0, z_0 + \omega_1, y$ y se tiene

$$\{g(\bar{F}) | g \in G\}$$

que es un mosaico asociado a G .

4.4 $\theta = \frac{\pi}{3}$

Es claro que los únicos ángulos generadores posibles son $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ y π . Sea z_0 el centro de una rotación de orden 6. Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ una base canónica del módulo de las traslaciones con $\omega_2 = e^{\frac{i2\pi}{3}} \omega_1$. Consideremos el subgrupo G' de G generado por las traslaciones y las rotaciones de orden 3 en G . G' es un grupo del tipo del 4.2

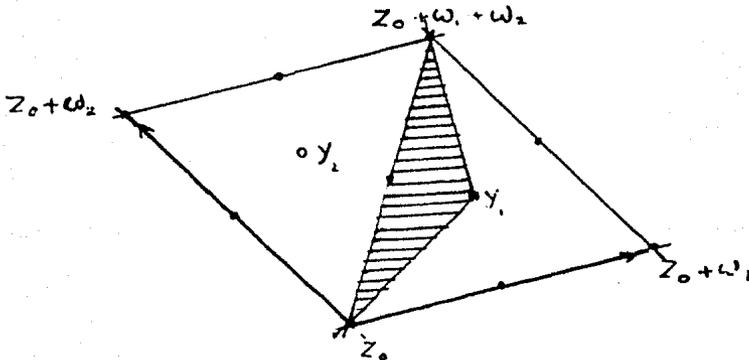


Fig. 15

Sabemos que los centros de las rotaciones de G' (que son todas de orden 3) son los vértices del paralelogramo junto con los centros de los triángulos. Los vértices del paralelogramo son centros de rotaciones de orden 6 en G puesto que son trasladados de z_0 . La distancia entre dos centros de rotaciones de orden 6 es

$$d > \frac{|\omega_1|}{|1-\epsilon|}$$

donde ϵ es $e^{\frac{i\pi}{3}}$. Entonces $d \geq |\omega_1|$.

Por lo tanto las rotaciones con centro en y_1 o y_2 son de orden 3 en G .

Si consideramos ahora el subgrupo G'' de G generado por las traslaciones y las rotaciones bajo π obtenemos un grupo como el del 4.1 y aparecen nuevos centros de rotaciones en G que son los puntos medios de los lados de los triángulos.

Estos, junto con los centros de las rotaciones en G' son los centros de las rotaciones en G . El orden de las rotaciones con centro en puntos medios de los lados de los triángulos es 2 puesto que estos centros no aparecen en G' . El triángulo F cuyos vértices son $z_0, y_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2$ es una región fundamental de G y se tiene el mosaico $\{g(F) | g \in G\}$ asociado a G .

Hemos construido para cada grupo discontinuo de movimientos rígidos de \mathbb{C} , un mosaico asociado.

CAPITULO III

Los axiomas de Hilbert del plano euclidiano

En el capítulo anterior se describieron detalladamente los mosaicos del plano euclidiano. Con objeto de analizar los mosaicos de la esfera y de los planos elíptico e hiperbólico conviene, a través del estudio de los axiomas de Hilbert para el plano euclidiano, recordar las diferencias básicas entre estos espacios.

En el sistema axiomático de Hilbert para el plano euclidiano se consideran dos categorías de objetos primitivos: la de los puntos y la de las rectas. Se tienen, además tres relaciones primitivas: la de incidencia, la de orden y la de congruencia.

Los axiomas son:

I Axiomas de incidencia

- I.1 Dos puntos distintos definen al menos una recta con la cual inciden.
- I.2 Dos puntos distintos definen solamente una recta con la cual inciden.
- I.3 Dada una recta hay al menos tres puntos que inciden con ella y hay al menos uno fuera de ella.

II Axiomas de orden

- II.1 Si un punto B está entre un punto A y un punto C

entonces A, B, C son tres puntos distintos en una recta a y B también está entre C y A .

- II.2 Dados dos puntos (distintos) A y C existe al menos un punto B en la recta determinada por A y C tal que B está entre A y C y existe un punto D tal que C está entre A y D .
- II.3 Dados tres puntos distintos en una recta a uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.
- II.4 Cuatro puntos distintos de una recta se pueden numerar de tal manera que el segundo esté entre el primero y el tercero y también entre el primero y el cuarto y además el tercero esté entre el segundo y el cuarto y también entre el primero y el cuarto.

Definición:

El conjunto de puntos entre A y B se llama segmento cuyos extremos son A y B y se denota por AB o por BA . (Obsérvese que ni A ni B pertenecen al segmento).

II.5 Axioma de Pasch.

Sean A, B, C tres puntos que no están en una recta y sea a una recta que no pasa por ninguno de los tres puntos. Si a pasa por un punto de AB entonces a pasa por un punto de BC o por un punto de AC .

Los axiomas II. 1,2,3,4 se llaman axiomas lineales de orden.

Teorema:

Dado un punto O en una recta a los puntos de a distintos de O se dividen en dos clases: dos puntos A y B están en la misma clase si O no está entre A y B . Cada una de estas clases se llama un rayo en a a partir de O .

Teorema:

Dada una recta a los puntos que no están en a se dividen en dos clases. Dos puntos A y B están en la misma clase si a no interseca al segmento AB . Cada una de estas clases se llama un lado de a .

En la demostración de este teorema el axioma de Pasch juega un papel esencial.

III Axioma de las paralelas (Axioma de Euclides)

III.1 Dada una recta a y un punto A que no está en a , existe una recta y una sola que pasa por A y que no interseca a a . Esta recta se llama la recta paralela a a que pasa por A .

IV Axiomas de congruencia

IV.1 Si A, B son dos puntos en una recta a y si A' es un punto en la misma u otra recta a' entonces, sobre un

rayo dado en a' a partir de A' , existe uno y sólo un punto B' tal que AB es congruente con $A'B'$. Denotaremos esta relación por $AB \equiv A'B'$.

IV.2 Si $AB \equiv A'B'$
y $AB \equiv A''B''$
entonces $A'B' \equiv A''B''$.

IV.3 Sean AB y BC dos segmentos de una recta a que no tienen puntos comunes y sean $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos en una recta a' que no tienen puntos comunes. Si $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$ entonces $AC \equiv A'C'$.

Los siguientes axiomas de congruencia se refieren al concepto de ángulo.

Definición:

Sean h y k dos rayos en rectas distintas y que parten de un punto O . Entonces la pareja no ordenada h,k se llama un ángulo y se denota por $\angle(h,k)$ o $\angle(k,h)$. h y k se llaman los lados del ángulo y O el vértice del ángulo.

La pareja de rayos h,k junto con O divide al plano en dos regiones una de las cuales se caracteriza por el hecho de que si contiene a dos puntos A y B entonces contiene al segmento AB . Tal región se llama el interior de $\angle(h,k)$.

IV.4 Dados un ángulo $\angle(h,k)$, una recta a' y un punto O' en a' y dados un rayo en a' a partir de O' y un lado de a' existe un rayo único k' a partir de O' contenido en

el lado dado de a' tal que

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h, k).$$

Todo ángulo es congruente a sí mismo, i.e.:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

IV.5 Si

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

y

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$$

entonces

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'').$$

El axioma siguiente se refiere al concepto de triángulo.

Definición:

Una terna ABC de puntos no alineados se llama un triángulo. Los puntos A, B y C son los vértices del triángulo. Los segmentos AB, BC y CA son los lados del triángulo. Denotaremos por $\angle BAC$ al ángulo definido por los rayos que parten de A y contienen a B y C respectivamente. En forma análoga se tienen los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCA$. Estos son los ángulos del triángulo. La intersección de los interiores de estos ángulos se llama el interior del triángulo.

IV.6 Si en dos triángulos ABC y $A'B'C'$ valen las congruencias

$$AB \equiv A'B'$$

$$AC \equiv A'C'$$

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

Entonces valen las congruencias

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Los axiomas IV. 1,2,3 se llaman los axiomas lineales de congruencia.

V. Axiomas de continuidad

V.1 Axioma de Arquímedes.

Sean AB y CD dos segmentos; entonces en la recta determinada por A y B existen puntos A_1, A_2, \dots, A_n tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ son congruentes con CD y B está entre A y A_n .

V.2 Axioma de completez lineal.

El conjunto de puntos de una recta no se puede extender si queremos mantener los axiomas lineales de orden, los axiomas lineales de congruencia y el axioma de Arquímedes.

Hemos enunciado los axiomas de Hilbert para el plano euclidiano. Estamos ahora preparados para considerar los mosaicos de la esfera, el plano elíptico y el plano hiperbólico.

CAPITULO IV

Mosaicos de la esfera y del plano elíptico

Sea Γ un grupo finito, de orden N de movimientos rígidos de la esfera $\Sigma = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\bar{x}| = 1\}$. Cada movimiento rígido de Σ es una rotación sobre una recta que pasa por el centro de Σ y por lo tanto deja fijos dos puntos de Σ llamados polos.

Sea P un polo de Γ y sea Γ_P el subgrupo de Γ que deja fijo a P . Γ_P es un grupo cíclico finito de orden ν generado por una rotación bajo el ángulo $\frac{2\pi}{\nu}$ sobre el diámetro de Σ que pasa por P . Diremos que P tiene multiplicidad ν .

La órbita $o(P) = \{g(P) \mid g \in \Gamma\}$ de P en Γ está constituida por $n = \frac{N}{\nu}$ puntos, cada uno de los cuales es un polo de orden ν . A cada órbita o podemos asociarle dos números: la multiplicidad ν_o de cada uno de sus puntos y $n_o = \frac{N}{\nu_o}$, el número de puntos de o .

A cada elemento Γ distinto de la identidad le corresponden dos polos; por lo tanto

$$2(N-1) = \sum_P (\nu(P)-1)$$

donde P es un polo y $\nu(P)$ es su multiplicidad. Si en la suma agrupamos los sumandos que corresponden a los puntos de cada órbita tenemos:

$$2(N-1) = \sum_o n_o (\nu_o - 1)$$

y puesto que $n_{\sigma} v_{\sigma} = N$ para cada σ , tenemos

$$(1) \quad 2 - \frac{2}{N} = \sum_{\sigma} \left(1 - \frac{1}{v_{\sigma}}\right)$$

Esta igualdad nos permitirá describir todos los grupos Γ .

Si Γ no es trivial entonces $N \geq 2$ y el primer miembro es mayor o igual que 1 y menor que 2. Ahora bien: cada sumando del segundo miembro es mayor o igual que $\frac{1}{2}$ y menor que 1. Por lo tanto hay al menos 2 sumandos y, cuando más, 3.

1. Supongamos que en el segundo miembro hay dos sumandos; entonces se tiene

$$2 = \frac{N}{v_1} + \frac{N}{v_2}$$

pero $\frac{N}{v_i} = o_i$ es un entero positivo de manera que $v_1 = v_2 = N$ y $n_1 = n_2 = 1$, es decir: en este caso se tienen dos órbitas, cada una con 1 punto de multiplicidad N . Γ es pues un grupo cíclico de orden N de rotaciones sobre un eje.

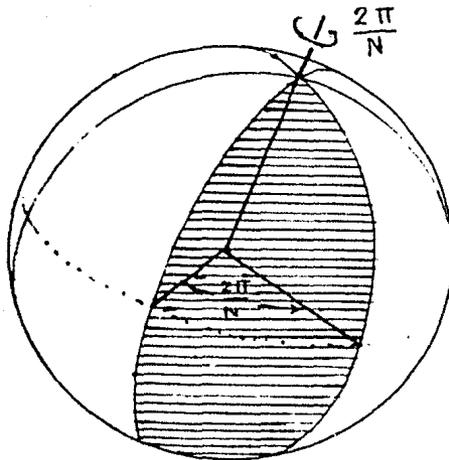


Fig. 16

Una región fundamental de Γ es un sector esférico limitado por dos semicírculos máximos que pasan por los polos P_1 y P_2 y que forman un ángulo $\frac{2\pi}{N}$.

2. Si en el segundo miembro se tienen tres sumandos tenemos:

$$1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$

y supondremos que $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. No todas las v_i pueden ser mayores que 2 pues el segundo miembro sería menor o igual que 1; por lo tanto $v_1 = 2$ y

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$

2.1 Supongamos que $v_2 = 2$. Entonces tenemos

$$2v_3 = N.$$

Sea $v_3 = m$; entonces $N = 2m$. Se tienen 3 órbitas; dos de ellas constituidas por polos de multiplicidad 2 y cada una de ellas con m puntos y la tercera órbita está constituida por 2 polos de multiplicidad m .

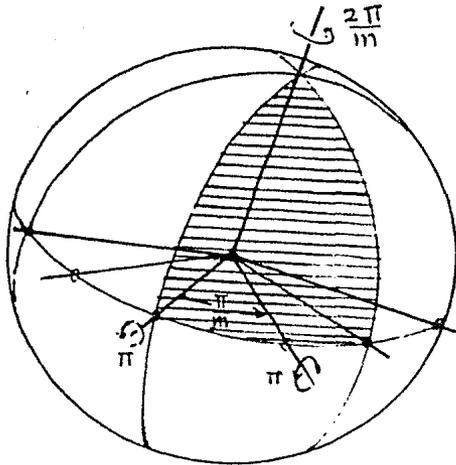


Fig. 17

P_1 y P_2 son los polos de multiplicidad m entonces los otros polos son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados inscrito

en el ecuador. Estos polos son todos los de orden 2 y alternadamente pertenecen a cada una de las órbitas.

El grupo Γ se llama en este caso un grupo diédrico. Una región fundamental de Γ es el triángulo esférico limitado por dos cuartos de meridiano con un ángulo $\frac{2\pi}{m}$ y por el ecuador.

2.2 Supongamos ahora que $v_2 = 3$. Es claro que con esto agotamos las posibilidades para v_2 . Tenemos

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_3}$$

de manera que los valores posibles para v_3 son 3,4 y 5.

2.2.1 Si $v_3 = 3$ tenemos $N = 12$. En este caso hay tres órbitas: una con 6 polos de multiplicidad 2 y dos con 4 polos de multiplicidad 3, cada una. En este caso, el grupo de movimientos rígidos de la esfera que mandan en sí mismo un tetraedro regular inscrito, es una realización del grupo Γ .

- Los 6 polos de multiplicidad 2 son los puntos de la esfera determinados por los puntos medios de los lados del tetraedro.
- Una de las órbitas con polos de multiplicidad 3 está determinada por los vértices del tetraedro.
- La órbita restante está determinada por los puntos medios de las caras del tetraedro.

Una región fundamental de Γ es el triángulo esférico determinado por el punto medio de una cara del tetraedro y dos de los vértices de esa cara.

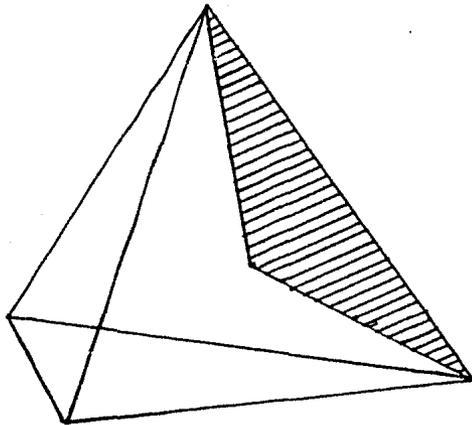


Fig. 18

2.2.2 Si $v_3 = 4$ entonces $N = 24$.

Se tienen 3 órbitas: una con 12 polos de multiplicidad 2, otra con 8 polos de multiplicidad 3 y otra con 6 polos de multiplicidad 4. En este caso el grupo de simetrías del cubo (o del octaedro) es una realización de Γ .

- La órbita con 12 polos está determinada por los puntos medios de las aristas del cubo.
- La órbita con 8 polos está determinada por los vértices del cubo.

- La órbita con 6 polos está determinada por los puntos medios de las caras.

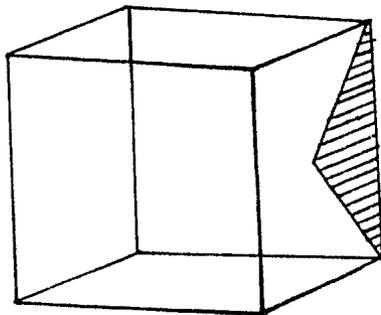


Fig. 19

Una región fundamental de Γ es el triángulo esférico determinado por el centro de una cara y uno de los lados de esa cara.

2.2.3 Por último, si $v_3 = 5$ entonces $N = 60$.

Hay 3 órbitas: una con 30 polos de multiplicidad 2, otra con 20 polos de multiplicidad 3 y otra con 12 polos de multiplicidad 5. En este caso Γ se puede realizar con el grupo de movimientos rígidos del dodecaedro.

- La órbita con 30 elementos está determinada por los puntos medios de las aristas.
- La órbita con 20 polos está determinada por los vértices.
- La órbita con 12 polos está determinada por los puntos medios de las caras.

En este caso una región fundamental de Γ es el triángulo esférico determinado por el punto medio de una cara y uno de los lados de esa cara.

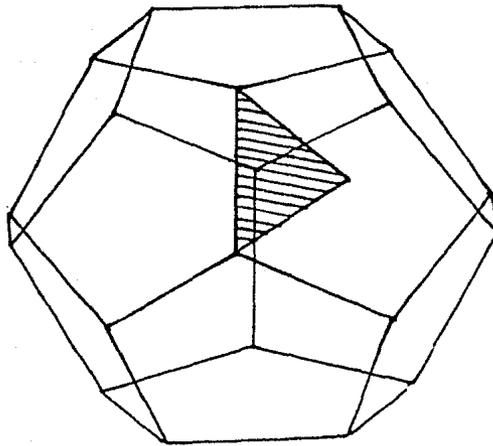


Fig. 20

Con esto hemos terminado la descripción de los grupos discontinuos de movimientos rígidos de la esfera. Con objeto de estudiar las del plano elíptico conviene considerar ahora los grupos discontinuos de isometrías de la esfera. Se llama isometría de un espacio métrico a una biyección que preserva las distancias. En particular las isometrías de la esfera son de dos tipos: las que conservan la orientación y que hemos llamado movimientos rígidos y las que invierten la orientación. Es claro que la composición de dos isometrías que invierten la orientación es un movimiento rígido.

Sea Γ un grupo discontinuo (y por lo tanto finito) de isometrías de la esfera Σ ; denotemos por Γ^* el subgrupo de Γ constituido por los movimientos rígidos en Γ . Entonces Γ^* es uno de los grupos estudiados anteriormente. Para describir a Γ consideraremos dos casos:

i) Supongamos que Γ contiene la isometría

$$Z : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

que manda a cada punto de Σ en el punto diametralmente opuesto.

Es claro que Z invierte la orientación. Sean

$e = g_1, g_2, \dots, g_N$ los elementos de Γ^* . Entonces

$Z, Z \circ g_2, \dots, Z \circ g_N$ son los elementos de Γ que invierten la orientación de Σ . En efecto: si $h \in \Gamma$ invierte la orientación entonces

$$Z \circ h = g_k \in \Gamma^*$$

puesto que la conserva y

$$h = Z \circ g_k$$

además $g_k \neq g_h \Rightarrow Z \circ g_k \neq Z \circ g_h$.

Así pues, Γ es la suma directa $\Gamma^* \oplus \mathbb{Z}_2$.

- ii) Supongamos que Γ no contiene a Z . Sean $e = g_1, \dots, g_n$ los movimientos rígidos en Γ . Sean h_1, \dots, h_n los elementos de Γ que invierten la orientación. Consideremos los movimientos rígidos $g' = Z \circ h_1, \dots, g'_n = Z \circ h_n$ que no pertenecen a Γ . Entonces

$$g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_n$$

constituyen un grupo de movimientos rígidos de Σ cuyo orden es $N = 2n$. Este grupo contiene un subgrupo g_1, \dots, g_n de índice 2. Entonces Γ es el grupo cuyos elementos son

$$g_1, \dots, g_n, Z \circ g'_1, \dots, Z \circ g'_n.$$

Hemos completado así el estudio de los grupos discontinuos de isometrías de la esfera.

Describiremos ahora un modelo del plano elíptico. Consideremos, en la esfera Σ la siguiente relación de equivalencia: dos puntos P_1, P_2 de Σ son equivalentes ($P_1 \sim P_2$) si son diametralmente opuestos. Denotemos por \mathbb{P}_2 al espacio de identificación Σ/\sim . \mathbb{P}_2 se llama el plano proyectivo. Cada punto $P = \{P_1, P_2\}$ de \mathbb{P}_2 es una

pareja $\{P_1, P_2\}$ de puntos diametralmente opuestos de la esfera.

Sea $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2$ la proyección, (Σ, π) resulta ser un espacio de recubrimiento (de dos hojas) de \mathbb{P}_2 .

- El plano elíptico es \mathbb{P}_2 .
- Los puntos del plano elíptico son los puntos de \mathbb{P}_2 .
- Las rectas del plano elíptico son las imágenes bajo π de los círculos máximos de Σ .

Observemos que \mathbb{P}_2 es una superficie no orientable y que las rectas de \mathbb{P}_2 son homeomorfas a un círculo.

Definimos en forma obvia la relación de incidencia entre punto y recta en \mathbb{P}_2 .

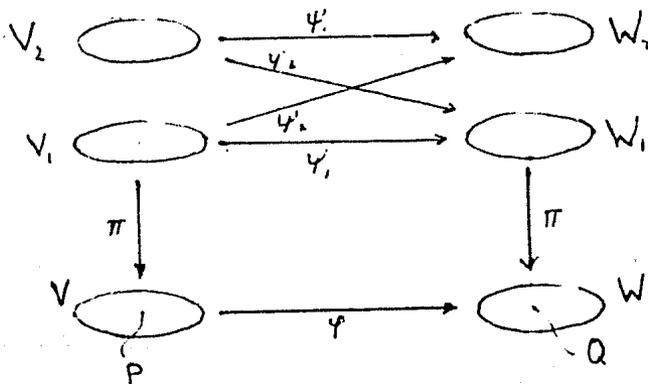
Del hecho de que las rectas de \mathbb{P}_2 son topológicamente equivalentes a círculos se sigue que no hay en \mathbb{P}_2 una relación correspondiente a la relación de orden del sistema de Hilbert. En particular no se puede definir el concepto de segmento con extremos dados; en todo caso se podría hablar de los dos segmentos determinados por A y B en la recta que definen. Tampoco se tiene el concepto de rayo ni el de lado de una recta en \mathbb{P}_2 .

Es claro que el axioma de Euclides no se satisface en \mathbb{P}_2 puesto que dos rectas (distintas) de \mathbb{P}_2 tienen un punto común.

Dada una curva diferenciable $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \Sigma$ la composición $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_2$ es una curva en \mathbb{P}_2 cuya longitud, por definición será la longitud de $\tilde{\gamma}$ en Σ . Llamaremos isometría de \mathbb{P}_2 a una biyección de \mathbb{P}_2 que conserve las longitudes de las curvas.

Si restringimos π a una región conveniente de Σ tal restricción resulta ser una biyección de la región en un abierto de \mathbb{P}_2 y esto nos permite hablar de congruencia de segmentos contenidos en este abierto pero no se tiene un concepto correspondiente al de congruencia de los axiomas de Hilbert.

Para terminar describiremos los grupos discontinuos de isometrías del plano elíptico \mathbb{P}_2 .



Dada una isometría φ de \mathbb{P}_2 existen dos isometrías únicas, ψ_1 y ψ_2 de Σ tales que

$$\pi \circ \psi_i = \varphi \circ \pi \quad i=1,2.$$

En efecto: consideremos un punto $P \in \mathbb{P}_2$ y sea V una vecindad de P tal que $\pi^{-1}(V)$ sea la unión de dos discos ajenos $V_1, V_2 \subset \Sigma$. Sabemos que las restricciones de π a V_1 y V_2 son homeomorfismos sobre V de V_1 y V_2 respectivamente.

Sean $Q = \varphi(P)$ y $W = \varphi(V)$; entonces $\pi^{-1}(W)$ es la unión de dos discos ajenos $W_1, W_2 \subset \Sigma$ y W es la imagen homeomorfa bajo π de cada uno de ellos. Consideremos la función

$$\psi_1|_{V_1} = (\pi|_{W_1})^{-1} \circ \varphi \circ (\pi|_{V_1})$$

Esta es una isometría de V_1 sobre W_1 que se extiende en forma única a una isometría $\psi_1: \Sigma \rightarrow \Sigma$ de Σ y es claro que

$$\psi_1|_{V_2} = (\pi|_{W_2})^{-1} \circ \varphi \circ (\pi|_{V_2}).$$

ψ_1 es tal que $\pi \circ \psi_1 = \varphi \circ \pi$.

En forma análoga podemos construir ψ_2 haciendo

$$\psi_2|_{V_1} = (\pi|_{W_2})^{-1} \circ \varphi \circ (\pi|_{V_1})$$

y es claro que existe una extensión única ψ_2 de $\psi_2|_{V_1}$ que hace conmutativo el diagrama A y tal que

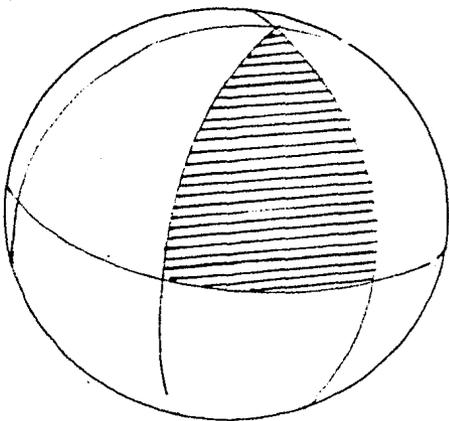
$$\psi_2(V_2) = W_1.$$

En esta forma hemos asociado a cada isometría de \mathbb{P}_2 una pareja de isometrías de Σ . Es claro que a la composición $g \circ h$ de dos isometrías de \mathbb{P}_2 corresponderán las composiciones de las isometrías de

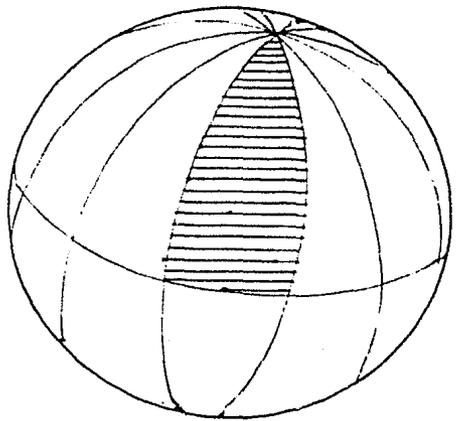
Σ correspondientes. Luego si Γ es un grupo finito de isometrías de \mathbb{P}_2 , entonces a Γ le corresponderá un grupo $\tilde{\Gamma}$ de isometrías de la esfera.

Es claro que $\tilde{\Gamma}$ es del primer tipo de grupos finitos de isometrías de la esfera entre los considerados anteriormente porque en $\tilde{\Gamma}$ aparece necesariamente Z . Recíprocamente, dado un grupo $\tilde{\Gamma}$ finito de isometrías de Σ que contenga a Z existe un grupo Γ de isometrías de \mathbb{P}_2 que le corresponde.

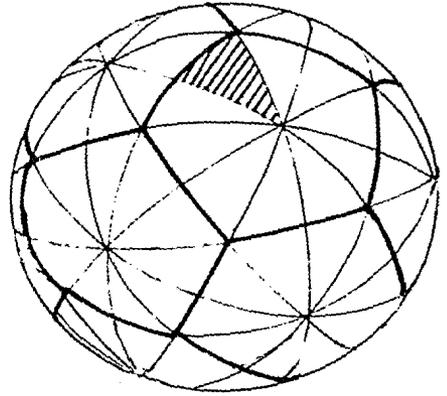
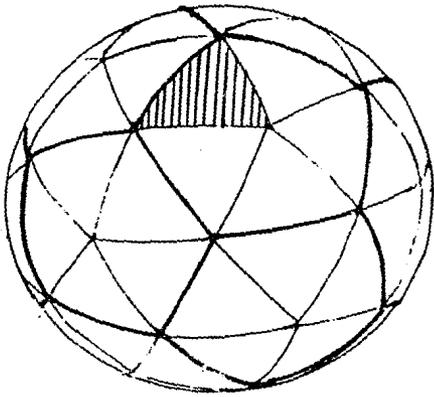
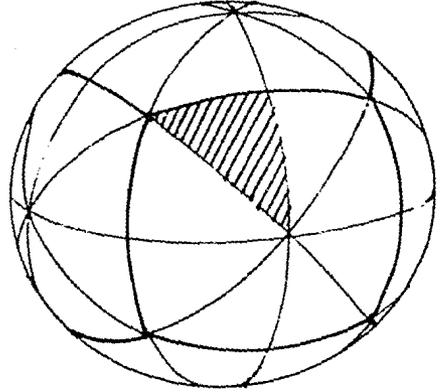
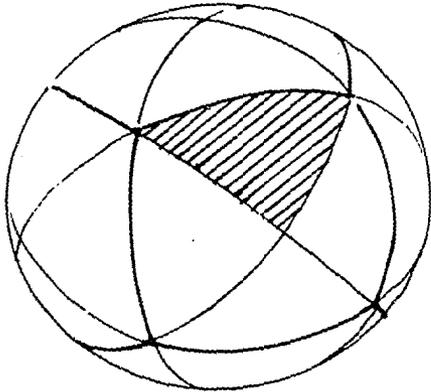
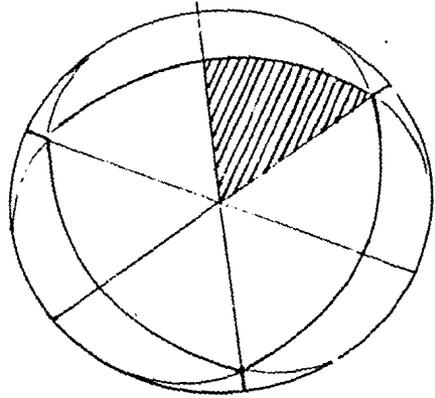
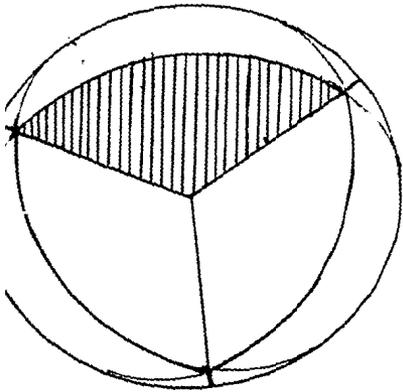
Ahora bien: sabemos que cada grupo finito de isometrías de Σ que contenga a Z es la suma directa de un grupo de movimientos rígidos de Σ con Z_2 y que cada una de estas sumas induce en \mathbb{P}_2 un grupo de isometrías; habíamos descrito una región fundamental de cada grupo de movimientos rígidos de Σ ; las regiones fundamentales de los grupos inducidos se obtienen bisectando los anteriores como sigue:



Σ



\mathbb{P}_2



Σ

Fig. 21

\mathbb{P}_1

Las proyecciones en \mathbb{P}_2 de las regiones fundamentales que aparecen en la segunda columna son las de los grupos de isometrías de \mathbb{P}_2 .

Con esto completamos el estudio de los mosaicos en el plano elíptico.

CAPITULO V

El modelo de Poincaré del plano hiperbólico

Nos resta por considerar los mosaicos en el plano hiperbólico para lo cual estudiaremos el modelo de Poincaré.

- El plano hiperbólico es el disco unitario

$$\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

- Los puntos del plano hiperbólico son los puntos de Δ_1 .
- Dado un círculo ortogonal a la frontera

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

el arco de este círculo contenido en Δ_1 es una recta del plano hiperbólico.

A veces nos referiremos a los puntos y rectas del plano hiperbólico como puntos no euclidianos y rectas no euclidianas respectivamente.

Ahora bien: se sabe que las transformaciones conformes de Δ_1 están dadas por las transformaciones lineales de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$$

que son las que mandan a C en C y a Δ_1 en Δ_1 y es claro que transforman rectas no euclidianas en rectas no euclidianas.

Definiremos la longitud no euclidiana de un arco de curva en Δ_1 de tal manera que permanezca invariante bajo las transformaciones conformes T de Δ_1 ; sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \Delta_1$ una curva diferenciable. La longitud de γ se define como

$$\lambda(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

donde $|dz|$ denota el elemento euclidiano de arco. Se verifica que con esta definición de longitud se tiene que si γ es un arco diferenciable en Δ_1 y T una transformación conforme de Δ_1 , entonces

$$\lambda(\gamma) = \lambda(T \cdot \gamma)$$

y salvo por un factor constante, ésta es la única definición posible.

Nos referiremos entonces a las transformaciones conformes de Δ_1 como los movimientos rígidos del plano hiperbólico.

Mostraremos ahora que de todos los arcos de curva diferenciables por tramos que unen dos puntos a y b de Δ_1 el segmento de recta es el de longitud mínima.

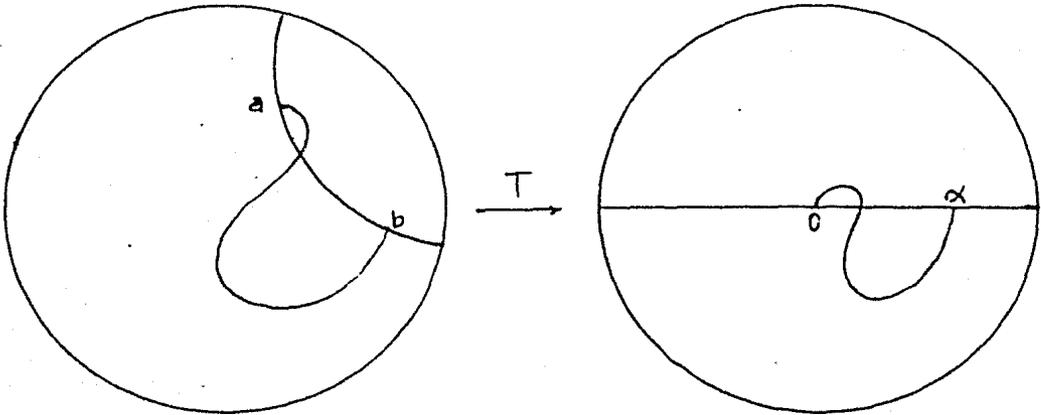


Fig. 22

Sea T un movimiento rígrado de Δ_1 tal que

$$T(a) = 0, \quad T(b) = \alpha > 0.$$

Si $\Gamma = T \circ \gamma$ y puesto que T conserva la longitud entonces bastará probar que

$$\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\overline{0\alpha})$$

En efecto se tiene

$$\begin{aligned}\lambda(\overline{\alpha}) &= \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{\overline{\alpha}} \frac{dz}{1-z^2} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{1-z^2} = \\ &= \left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{1-z^2} \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{|dz|}{|1-z^2|} \leq \int_{\Gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \lambda(\Gamma)\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad es consecuencia del teorema de Cauchy.

Daremos explícitamente la longitud del segmento ab . La transformación T dada por

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{-\bar{a}z+1}$$

manda a a en 0 y con θ convenientemente escogido manda a b en

$\alpha = \left| \frac{b-a}{-\bar{a}b+1} \right|$. La longitud del segmento $\overline{\alpha}$ está dada por

$$\lambda(\overline{\alpha}) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

Por lo tanto la longitud del segmento ab es

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{b-a}{-\bar{a}b+1} \right|}{1 - \left| \frac{b-a}{-\bar{a}b+1} \right|}$$

De paso observamos que si b tiende a la frontera de Δ_1 , la longitud del segmento ab tiende a ∞ , es decir, las semirectas tienen longitud infinita. Esto se expresa diciendo que el plano hiperbólico es geodésicamente completo.

Como los movimientos rígidos en Δ_1 están dados por transformaciones que son conformes en \mathbb{C} , el ángulo no euclidiano entre dos curvas debe ser el ángulo euclidiano que forman.

Puesto que las transformaciones lineales T que definen los movimientos rígidos de Δ_1 transforman a \mathbb{C} en sí mismo, ninguna de ellas podrá ser loxodrómica.

Tenemos pues tres tipos de movimientos rígidos: los dados por transformaciones elípticas, por hiperbólicas y por parabólicas y que llamaremos movimientos rígidos elípticos, hiperbólicos y parabólicos, respectivamente.

i) Si T es elíptica entonces tiene dos puntos fijos a y b en \mathbb{C} y puesto que \mathbb{C} es invariante bajo T , \mathbb{C} es ortogonal a los círculos que pasan por a y b . Uno de estos dos puntos, digamos a está en Δ_1 ; por lo tanto el movimiento rígido definido por T tiene un solo punto fijo a .

Según vimos las rectas que pasan por a giran sobre a un ángulo θ de modo que un movimiento elíptico de Δ_1 es una rotación. Si consideramos un círculo euclidiano en Δ_1 que sea ortogonal a las rectas no euclidianas que pasan por a vemos que este círculo permanece invariante bajo T y por lo tanto los segmentos que unen a con

cada punto de este círculo tienen la misma longitud; por lo tanto el círculo considerado es un círculo no euclidiano.

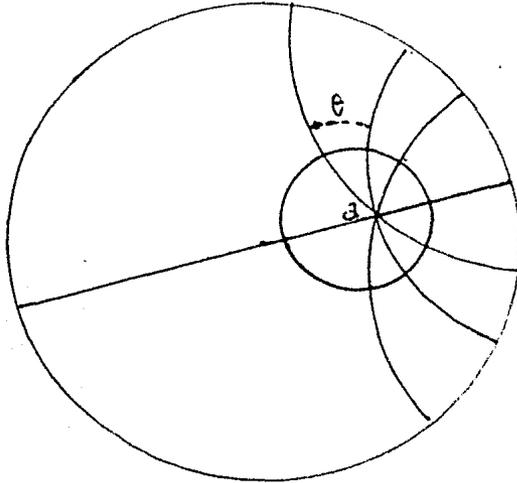


Fig. 23

ii) Si T es hiperbólica sus puntos fijos a y b están en \mathbb{C} y en tal caso el movimiento rígido de Δ_1 definido por T no tiene puntos fijos.

La recta no euclidiana L cuyos extremos (en \mathbb{C}) son a y b se transforma en sí misma bajo el movimiento rígido y rectas ortogonales a L se transforman una en otra de tal manera que, sobre L , la longitud del segmento que une a cada punto con su imagen es la misma.

De esta manera se puede pensar en un movimiento elíptico como una especie de "traslación" tal que entre las curvas invariantes hay una que es una recta.

Si consideramos el arco L' contenido en Δ_1 de un círculo euclidiano que pasa por a y b , entonces todas las rectas ortogonales a L son ortogonales a L' ; L y L' determinan en cada una de ellas segmentos con la misma longitud. Se puede decir entonces que los puntos de L' son "equidistantes" de L . Esto muestra pues que el lugar de los puntos equidistantes a una recta no es una recta; se llama horociclo.

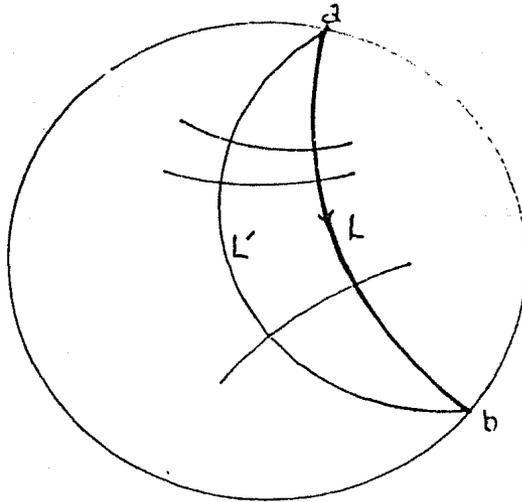


Fig. 24

iii) Por último: si T es parabólica, tiene un sólo punto fijo a en \mathbb{C} y está en la frontera C de Δ_1 ; por tanto el movimiento rígido de Δ_1 determinado por T no tendrá puntos fijos. Los arcos contenidos en Δ_1 de los círculos euclidianos tangentes a C en a son invariantes bajo el movimiento y las rectas ortogonales a ellos y que en \mathbb{C} son arcos de círculo tangentes en a , se transforman una en otra.

Un movimiento parabólico se puede considerar como el límite de una rotación cuando su centro tiene (en \mathbb{C}) a a .

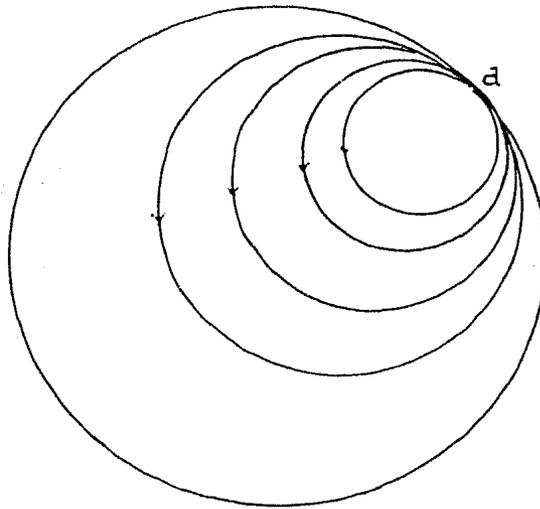


Fig. 25

En cuanto al concepto de área diremos: si queremos que el área de una región Ω sea invariante bajo movimientos rígidos de Δ_1 , entonces, salvo por un factor constante, se debe definir como

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx \, dy}{(1-|z|^2)^2}$$

Probaremos lo siguiente

Teorema:

Sea Ω una región poligonal en Δ_1 y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sus ángulos interiores. Entonces

$$A(\Omega) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i .$$

Para demostrar este resultado conviene considerar el modelo del plano hiperbólico en el cual los puntos son los del semiplano superior $H = \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ y las rectas los semicírculos ortogonales a la frontera y contenidos en este semiplano.

Es fácil ver que en este modelo el área de una región Ω está dada por

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx \, dy}{y^2}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{H}$ una región poligonal y sea

$$\partial\Omega = \sum_{k=1}^n c_k$$

donde c_k es un segmento de recta no euclidiana.

Por el teorema de Green sabemos que

$$\iint_{\Omega} \frac{dx \, dy}{y^2} = \int_{\partial\Omega} \frac{dx}{y}$$

Por lo tanto

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^n \int_{c_k} \frac{dx}{y}$$

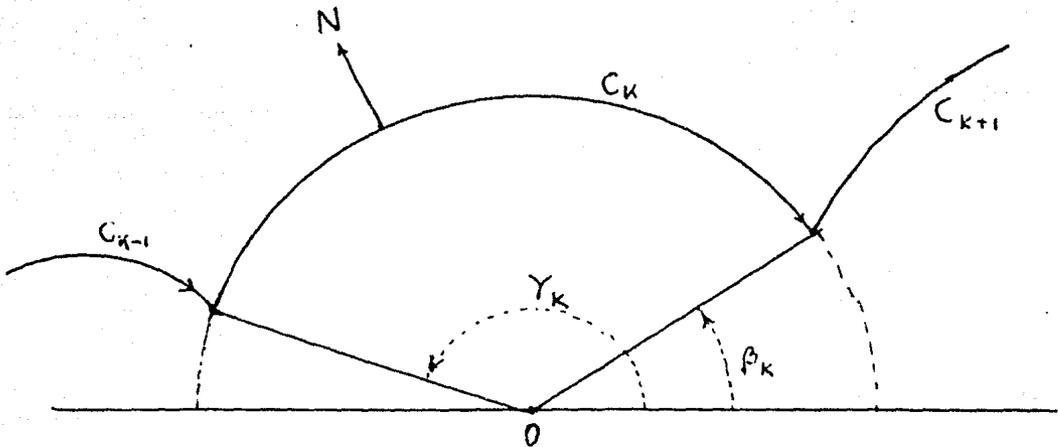


Fig. 26

Sea a el centro del círculo que contiene a c_k y sea r su radio. Se tiene

$$x-a = r \cos \varphi$$

$$y = r \operatorname{sen} \varphi$$

donde φ es el argumento del vector $(x,y)-(a,0)$. Por lo tanto

$$\int_{c_k} \frac{dx}{y} = - \int_{\gamma_k}^{\beta_k} d\varphi = \gamma_k - \beta_k$$

Consideremos en cada punto de c_k la normal unitaria \bar{N} que apunta hacia Ω . Entonces $\gamma_k - \beta_k$ es menos el ángulo de giro de \bar{N} al recorrer c_k . Ahora bien: al pasar por el vértice z_k hay un salto del ángulo de giro de \bar{N} y es igual a $\pi - \alpha_k$.

Por otra parte se sabe que el ángulo total de giro de \bar{N} al recorrer la frontera de Ω es 2π y tenemos pues

$$-A(\Omega) + \sum_{k=1}^n (\pi - \alpha_k) = 2\pi$$

y de aquí se sigue el resultado.

Además se muestra que el resultado sigue valiendo cuando la región poligonal tiene vértices impropios, es decir, cuando para alguna k z_k tiene ordenada 0 y en tal caso el ángulo interior es 0.

Hemos mencionado así las propiedades del plano hiperbólico que para este trabajo interesan.

CAPITULO VI

Mosaicos del plano hiperbólico

En el capítulo I denotamos por G al grupo de las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$. Denotemos por G al subgrupo de G de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. El grupo G actúa sobre el plano hiperbólico en la forma siguiente: a la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ le corresponde la transformación

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

que como vimos en el capítulo anterior es un movimiento rígido de Δ_1 . Esta correspondencia es un homomorfismo de G sobre el grupo H de los movimientos rígidos de Δ_1 . El núcleo de este homomorfismo es el subgrupo $\{E, -E\}$ de G donde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues M y $-M$ definen el mismo movimiento rígido de Δ_1 .

Se dice que un subgrupo Γ de G es discreto si es discontinuo cuando actúa por traslaciones izquierdas. Se sabe que Γ es discreto si y sólo si E tiene una vecindad en G que no contiene ningún elemento de Γ distinto de E . Se tiene el siguiente

Teorema:

Un subgrupo G' de G actúa discontinuamente en Δ_1 si y sólo si G' es discreto en G .

Nos interesa el estudio de grupos discontinuos de Δ_1 . Daremos algunos resultados de carácter general como la existencia de regiones fundamentales y algunas de sus propiedades además de algunos resultados sobre los llamados grupos triangulares.

Sea Γ un grupo discontinuo de movimientos rígidos de Δ_1 . Observemos en primer lugar que el conjunto de elementos de Γ es numerable; en efecto: si consideramos las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ asociadas a los elementos de Γ y asociamos a cada una de ellas un punto de \mathbb{R}^4 , entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ la esfera de radio n en \mathbb{R}^4 no contiene sino un número finito de puntos correspondientes a estas matrices puesto que cada esfera es compacta. Esto implica inmediatamente que Γ es numerable.

Si ζ es un punto de Δ_1 que no es un punto fijo de Γ entonces la órbita de ζ contiene tantos puntos como elementos tiene Γ y por lo tanto es numerable. Además, (por la discontinuidad de Γ), en todo subconjunto compacto de Δ_1 hay solamente un número finito de elementos de la órbita de ζ .

De aquí en adelante Γ denotará un grupo discontinuo de movimientos rígidos de Δ_1 . Vamos a construir una región fundamental F de Γ .

Sea ζ un punto de Δ_1 que no sea punto fijo de Γ ; sean $g \in \Gamma$ $g \neq e$, $\zeta_g = g(\zeta)$ y $L(g)$ la mediatriz del segmento $\overline{\zeta \zeta_g}$. De los semiplanos determinados por $L(g)$, sea S_g el que contiene a ζ y por último sea $H_g = S_g \cap S_{g^{-1}}$.

i) H_g no contiene dos puntos de la forma z, z_g .

En efecto, como $z \in H_g$ se tiene

$$\delta(z, \zeta) \angle \delta(z, \zeta_g)$$

$$\delta(z, \zeta) \angle \delta(z, \zeta_{g^{-1}})$$

Supongamos que

$$\delta(z_g, \zeta) \angle \delta(z_g, \zeta_g)$$

Entonces

$$\delta(z, \zeta_{g^{-1}}) \angle \delta(z, \zeta)$$

Por lo tanto $z_g \notin H_g$.

ii) H_g contiene representantes de cada órbita del subgrupo generado por g ya que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^n(H_g) = \Delta_1.$$

Sea $F = \bigcap_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq e}} H_g$.

Dado $0 < r < 1$ sea Δ_r el disco abierto de radio r con centro en 0 . Entonces, para casi toda $g \in \Gamma$ $\Delta_r \subset H_g$ y por lo tanto podemos escribir a $F \cap \Delta_r$ como $F \cap \Delta_r = H_{g_1} \cap \dots \cap H_{g_n} \cap \Delta_r$. Entonces en $F \cap \Delta_r$ no hay dos puntos equivalentes bajo ninguno de los elementos g_1, \dots, g_n . Además $F \cap \Delta_r$ contiene un representante de cada órbita

del subgrupo generado por g_1, \dots, g_n . Cuando $r \rightarrow 1$ se tiene

$$F \cap \Delta_r \rightarrow F$$

y es claro que \bar{F} es una región fundamental de Γ .

Llamamos región fundamental normal con centro en ζ a la región fundamental \bar{F} así construida. Notemos que \bar{F} es convexa. Probaremos el siguiente

Teorema 1:

Una región fundamental normal \bar{F} es una región poligonal (que puede tener vértices impropios) si y sólo si \bar{F} tiene área (no euclidiana) finita.

Demostración:

- i) Supongamos que \bar{F} es una región poligonal. Entonces la suma de sus ángulos internos es finita y por lo tanto el área es finita.
- ii) Supongamos ahora que \bar{F} tiene área finita. Sea z un punto de la frontera ∂F de \bar{F} ; entonces: o por z pasa una sola de las mediatrices $L(g)$ o pasa más de una. En el primer caso z se llama punto interior de un lado de ∂F ; en el segundo caso se dice que z es un vértice de ∂F .

Es claro que por z pasa solamente un número finito de mediatrices $L(g_1), \dots, L(g_k)$. Podemos considerar un disco V de radio ρ con centro en z tal que todas las $L(g)$ que lo intersectan pasan por z .

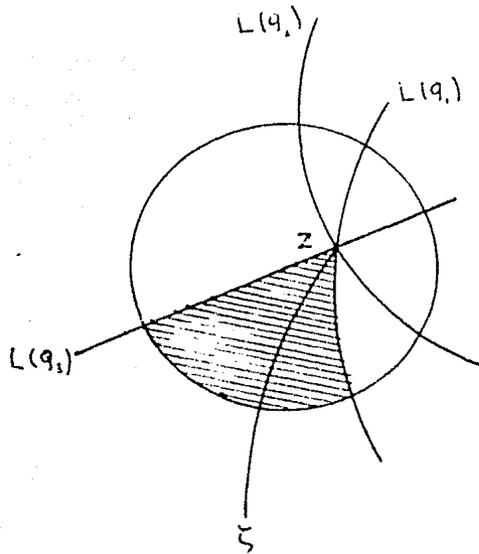


Fig. 27

Las mediatrices $L(g_1), \dots, L(g_r)$ dividen a V en $2r$ sectores circulares uno de los cuales intersecta al segmento $\overline{z\zeta}$ y este sector es la intersección de V con F . La frontera de este sector está constituida por los segmentos de dos mediatrices. El ángulo que estos segmentos forman en z se llama el ángulo interior de $\partial\overline{F}$ en z y es menor que π .

Como el conjunto de vértices de $\partial\overline{F}$ contenidos en Δ_r es finito sabemos que el conjunto total de vértices es numerable y por lo tanto lo son también el conjunto de lados y el conjunto de componentes de ∂F .

Consideremos una componente C de $\partial\overline{F}$. Obsérvese que C es una curva simple puesto que todo punto de C tiene una vecindad que es

homeomorfa a un arco. Orientemos C y consideremos un punto $z \in C$.

Al recorrer C a partir de z en el sentido de la orientación podemos

- i) después de pasar por un número finito de vértices, volver a z .
- ii) después de un número finito de vértices llegar a un lado de ∂F que tienda a $\partial \Delta_1$.
- iii) encontrar una sucesión infinita de vértices.

Si se recorre C en el otro sentido, la situación es análoga.

En el caso i) tenemos que $C = \partial F$ puesto que F es conexo; en tal caso F es una región poligonal y todos sus vértices son propios.

Para estudiar los casos restantes consideremos los triángulos T_k $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ definidos por ζ y cada uno de los lados de C y sean α_k, β_k y γ_k los ángulos de estos triángulos, como lo muestra la figura.

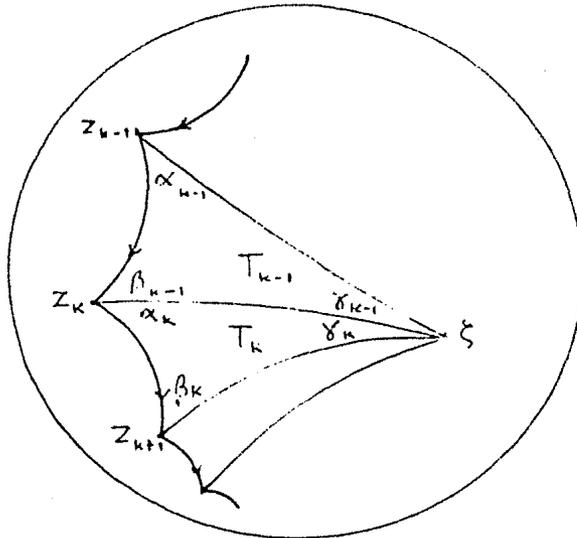


Fig. 28

Tenemos

$$A(T_k) = \pi - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k)$$

$$\sum_{k=n}^m A(T_k) = \sum_{k=n}^m [\pi - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k)]$$

$$\sum_{k=n}^m A(T_k) + \sum_{k=n}^m \gamma_k = \sum_{k=n}^m [\pi - (\alpha_k + \beta_k)]$$

$\theta_k = \alpha_k + \beta_{k+1}$ es el ángulo interior en el vértice z_k y lo de antes se puede escribir como

$$\sum_{k=n}^m A(T_k) + \sum_{k=n}^m \gamma_k = \sum_{k=n}^{m-1} (\pi - \theta_k) + \pi - \alpha_m - \beta_n .$$

Si dejamos n fijo y hacemos $m \rightarrow \infty$ las dos series del primer miembro son convergentes porque están acotadas y sus sumandos son positivos; $\alpha_m < \pi$ y los sumandos de la serie del segundo miembro son también positivos de manera que la serie converge. Por lo tanto existe $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$ y lo vamos a llamar α_∞ .

Análogamente, dejando m fijo y haciendo $n \rightarrow -\infty$ tenemos que existe $\lim_{n \rightarrow -\infty} \beta_n$ y lo llamaremos $\beta_{-\infty}$. Probaremos ahora que $\alpha_\infty < \frac{\pi}{2}$.

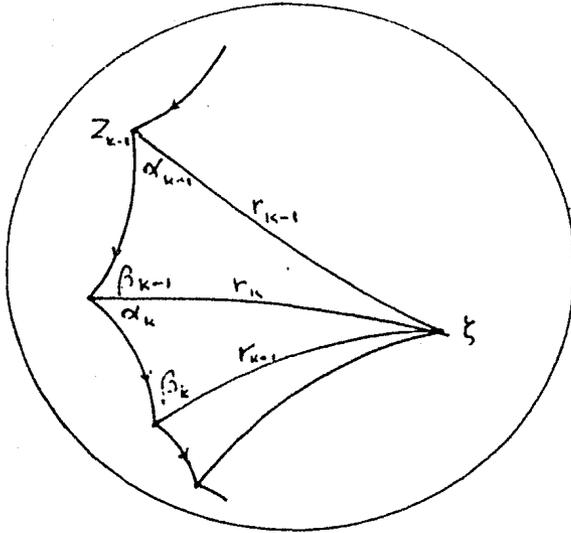


Fig. 29

Sea r_n la distancia de ζ a z_n ; es claro que $r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ y esto implica que para un número infinito de valores de n se tiene $r_{n+1} > r_n$. Ahora bien: en el plano hiperbólico vale la siguiente propiedad: dados dos lados de un triángulo el mayor de ellos está opuesto al mayor de los ángulos correspondientes. Por lo tanto $\beta_n > \alpha_n$ para los valores de n considerados y puesto que $\alpha_n + \beta_n < \pi$ tenemos $\alpha_\infty \leq \frac{\pi}{2}$.

Análogamente demostraremos que $\beta_\infty \leq \frac{\pi}{2}$. Entonces

$$\pi - \alpha_\infty - \beta_\infty \geq 0$$

y, para cada componente C tenemos

$$(1) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi - \theta_k) + \pi - \alpha_{\infty} - \beta_{-\infty}$$

Sumemos ahora sobre todas las componentes y tenemos lo siguiente: la suma de las áreas de todos los triángulos converge porque está acotada por el área de \bar{F} ; la suma de todos los ángulos centrales también converge porque está acotada por 2π y puesto que cada sumando $\pi - \alpha_{\infty} - \beta_{-\infty}$ es no negativo, entonces, la suma

$$\sum (\pi - \theta_k)$$

converge cuando se toma sobre los ángulos interiores de todas las componentes.

Esto implica que $\pi - \theta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ y por lo tanto, dado cualquier número menor que π hay solamente un número finito de vértices para los cuales el ángulo interior θ_k es menor que él; en particular sólo hay un número finito de ángulos interiores menores que $\frac{3\pi}{4}$.

Vamos a probar que el conjunto de vértices propios es finito. Consideremos un vértice z de $\partial\bar{F}$.

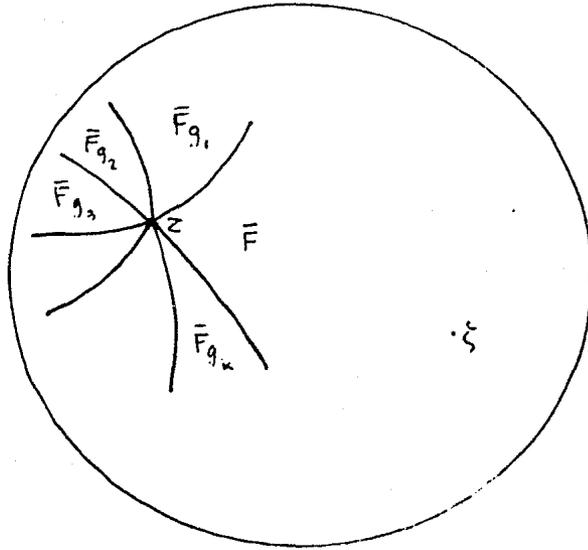


Fig. 30

Sean $\bar{F}_{g_1}, \dots, \bar{F}_{g_k}$ las imágenes de \bar{F} que inciden en z . Por ser z un vértice tenemos $k > 1$ y la suma de los ángulos de estas regiones en z es 2π . Ahora bien: los puntos z_{g_1}, \dots, z_{g_k} son vértices de \bar{F} y los ángulos correspondientes suman 2π . En esta forma los vértices de F quedan divididos en clases de vértices que son equivalentes bajo Γ . En cada clase hay por lo menos 3 vértices y la suma de los ángulos correspondientes es 2π .

Como habíamos visto, el número total de vértices para los cuales el ángulo es menor que $\frac{3\pi}{4}$ es finito de manera que el número de clases en las que figura alguno de estos vértices, es finito. En cada una

de las clases restantes hay pues al menos tres vértices con ángulos mayores o iguales que $\frac{3\pi}{4}$ y cuya suma es 2π , lo cual es imposible.

Hemos visto pues que el número de clases es finito y por lo tanto el número de vértices propios también lo es. Así, el número de componentes de la frontera que tienen vértices propios, es finito.

En cuanto a las componentes de la frontera que son rectas, en la ecuación (1) vemos que $\alpha_\infty = \beta_\infty = 0$ con lo que el segundo miembro es igual a π . De aquí se sigue que el conjunto de estas rectas es finito.

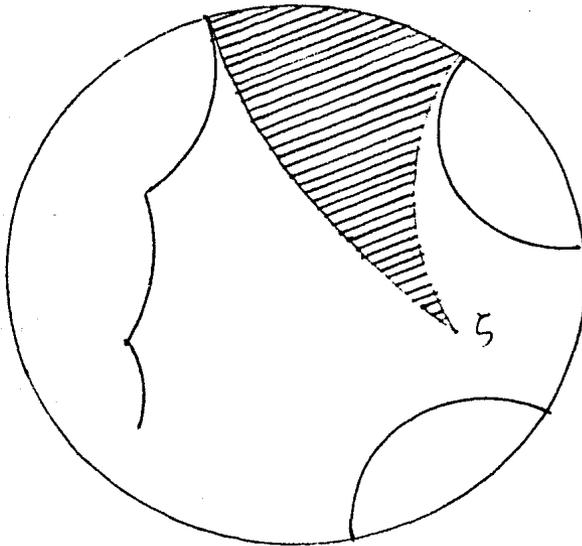


Fig. 31

Los extremos de cada componente de $\partial\bar{F}$ están en $\partial\Delta_1$. Supongamos que hay un sector circular con centro en ζ y que no interseca a $\partial\bar{F}$. Este sector está contenido en \bar{F} y su área es infinita, contra lo supuesto, de modo que los extremos de las componentes de $\partial\bar{F}$ son vértices impropios de \bar{F} .

Con esto queda demostrado el teorema 1 y demostraremos ahora el

Teorema 2:

Una región fundamental \bar{F} de Γ es compacta si y sólo si tiene área finita y Γ no contiene transformaciones parabólicas.

Demostración:

i) Supongamos que \bar{F} es compacta; entonces \bar{F} está contenida en un disco Δ_r con radio $r < 1$ y por lo tanto el área de \bar{F} es finita. Supongamos que Γ contiene una transformación parabólica h y sea $a \in \partial\Delta_1$ su punto fijo.

Transformando Δ_1 en el semiplano superior y mandando a a ∞ se muestra que existe en Δ_1 una sucesión $\{z_n\}$ tal que

$$\delta(z_n, h(z_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ahora bien; para cada z_n existe $g_n \in \Gamma$ tal que $g_n(z_n) \in \bar{F}$. Como \bar{F} es compacto, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $g_n(z_n)$, tal que

$$g_n(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \in \bar{F}$$

Entonces $\delta(g_n(z_n), \xi) \rightarrow 0$
y $\delta(g_n(h(z_n)), \xi) \rightarrow 0$

y tenemos $\delta(\xi, g_n h^{-1} g_n^{-1}(\xi)) \rightarrow 0$

Por la discontinuidad de $\Gamma g_n h^{-1} g_n^{-1}(\xi) = \xi$ para alguna n y tenemos

$$hg^{-1}(\xi) = g^{-1}(\xi)$$

es decir $g^{-1}(\xi)$ es un punto fijo de h y está en Δ_1 . Entonces h no puede ser parabólica.

ii) Supongamos ahora que el área de \bar{F} es finita y que Γ no contiene elementos parabólicos. Puesto que el área de \bar{F} es finita, \bar{F} es poligonal y si no es compacta tiene al menos un vértice impropio t .

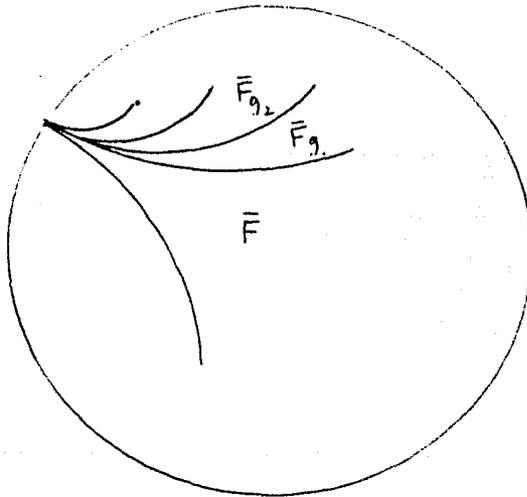


Fig. 32

Sean M y L los lados de \bar{F} que concurren en t . Sea \bar{F}_{g_1} la imagen de \bar{F} adyacente a \bar{F} a lo largo de L . Como el ángulo que forman M y L en t es cero, existe una sucesión infinita $F, F_{g_1}, F_{g_2}, \dots$ de imágenes de \bar{F} tales que cada una es adyacente a la anterior y todas tienen a t como vértice impropio.

Entonces los puntos $t, t_{g_1^{-1}}, t_{g_2^{-1}}, \dots$ son vértices impropios de \bar{F} y como el número de estos es finito, entonces existen $g_i \neq g_j$ tal que $t_{g_i^{-1}} = t_{g_j^{-1}}$.

Sea $f = g_i \circ g_j^{-1}$. Entonces t es un punto fijo de f y puesto que f no es parabólica, entonces es hiperbólica. Sean u el otro punto fijo de f ; N la recta determinada por t y u ; N_1, N_2 dos horociclos equidistantes de N a uno y otro lado y S la región determinada por N_1 y N_2 .

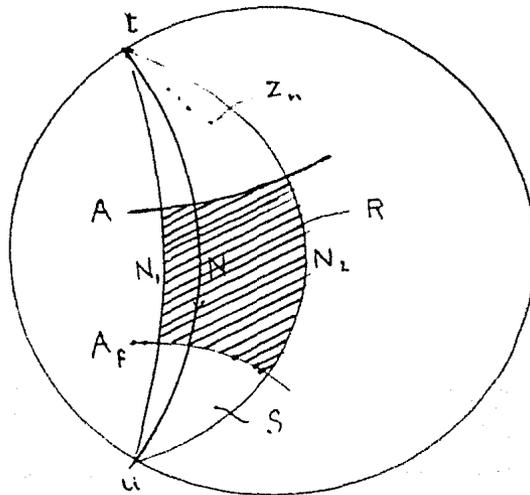


Fig. 33

Sea A una recta ortogonal a N y A_f su imagen bajo f . Entonces la región R determinada por N_1, N_2, A, A_f es una región fundamental, en S , del grupo generado por f .

Como el ángulo de F en t es cero, existe una sucesión $\{z_n\} \subset F \cap S$ tal que

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t \quad (\text{en } \mathbb{C})$$

Por otra parte, existe en R una sucesión $\{y_n\}$ de puntos equivalentes a los z_n bajo los elementos del subgrupo de Γ generado por f . Ahora bien; si ζ es el centro de F se tiene

$$\delta(z_n, \zeta) \leq \delta(y_n, \zeta) < d < \infty$$

puesto que R es compacto. Pero

$$\delta(z_n, \zeta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

lo cual es una contradicción.

$\therefore F$ es compacta.

Teorema 3:

Si Γ tiene una región fundamental compacta entonces toda región fundamental normal es compacta.

Demostración:

Sean \bar{H} una región fundamental compacta, F una región fundamental normal y ζ su centro.

$$\delta(y, \zeta) < \delta < \infty \quad \forall y \in \bar{H}$$

Pero para toda $z \in \bar{F}$ se tiene un punto y de la órbita de z en \bar{H} ; por lo tanto

$$\delta(z, \zeta) \leq \delta(y, \zeta) < \delta$$

$\therefore F$ es compacta.

Teorema 4:

Dos regiones fundamentales F y \bar{H} de Γ tienen la misma área.

$$A(H) = \sum_{g \in \Gamma} A(H \cap F_g) = \sum_{g \in \Gamma} A(H_{g^{-1}} \cap F) = A(F)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Denotaremos por $A(\Gamma)$ el área de las regiones fundamentales de Γ . Si $A(\Gamma) < \infty$ entonces hay una región fundamental F de Γ que es un polígono. En tal caso diremos que Γ es poligonal.

Si además Γ no tiene elementos parabólicos entonces todos sus vértices son propios. Un grupo poligonal cuyos elementos son todos hiperbólicos se llama grupo poligonal hiperbólico.

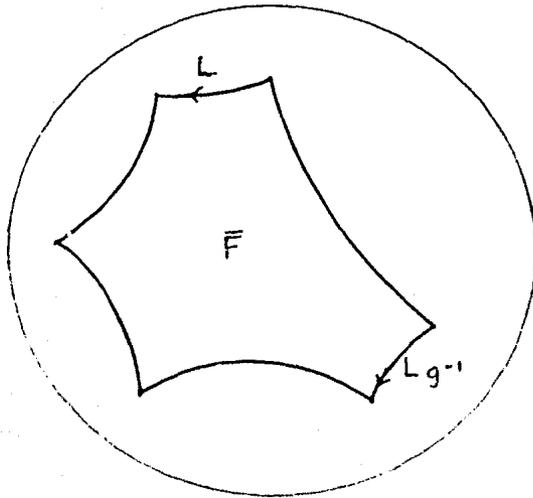


Fig. 34

Sea L un lado orientado de ∂F y sea F_g la imagen de F que es adyacente a F en L . L_g es un lado de F que es distinto de L pues de lo contrario tendríamos $g^{-1} = g$ y $g^2 = e$; esto implicaría que g es elíptica. L y $L_{g^{-1}}$ no son adyacentes porque en tal caso el vértice común sería un punto fijo de g y g sería elíptica.

En resumen: la frontera de una región fundamental normal de un grupo poligonal hiperbólico Γ tiene un número par de lados, asociados por parejas de lados equivalentes bajo Γ ; los dos lados de cada pareja no son adyacentes y tienen orientaciones opuestas con respecto a F .

Por último estudiaremos los mosaicos triangulares en el plano hiperbólico.

Dados $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

existe un triángulo hiperbólico cuyos ángulos son $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$, $\beta = \frac{\pi}{m}$, $\gamma = \frac{\pi}{n}$ y además dos triángulos con estos ángulos son congruentes bajo una isometría de Δ_1 .

Por reflexiones sucesivas sobre los lados de este triángulo se obtiene un conjunto de triángulos que constituyen un mosaico de Δ_1 , llamado mosaico triangular y que describiremos enseguida.

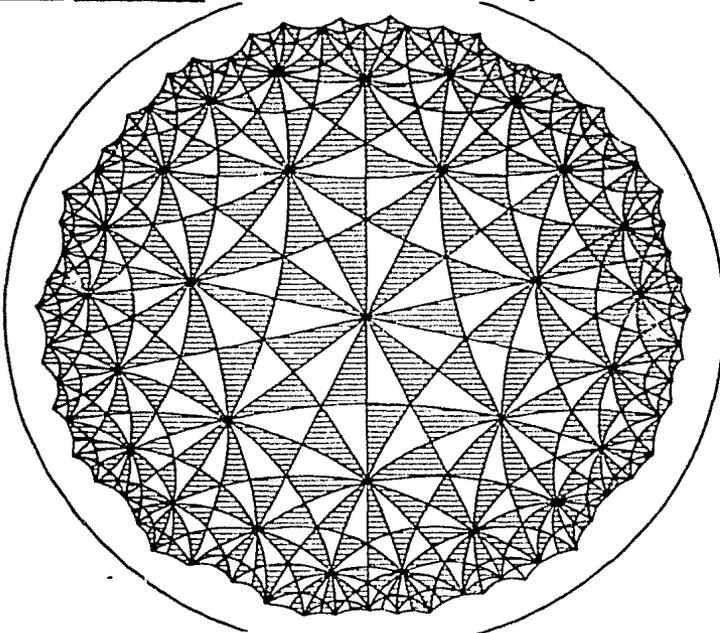


Fig. 35

Supondremos, por el momento que $\ell, m, n \geq 3$. Sea T un triángulo con los ángulos dados. Podemos suponer que el vértice en α está en el origen, es decir, que sus lados son segmentos de diámetros de Δ_1 .

Por reflexiones sucesivas de T obtenemos un conjunto de $2m$ triángulos congruentes a T con un vértice común en O y cuya unión es una región poligonal cerrada, convexa puesto que cada uno de sus ángulos interiores es menor que π , que denotaremos por Π_1 . En cada uno de los vértices de este polígono inciden dos triángulos y sus ángulos en el vértice de incidencia son iguales; si estos ángulos son β llamaremos al vértice, vértice β ; definiremos vértice γ en forma análoga.

Los vértices β y γ aparecen alternadamente en la frontera de Π_1 . Los triángulos de Π_1 se llaman triángulos de primer orden.

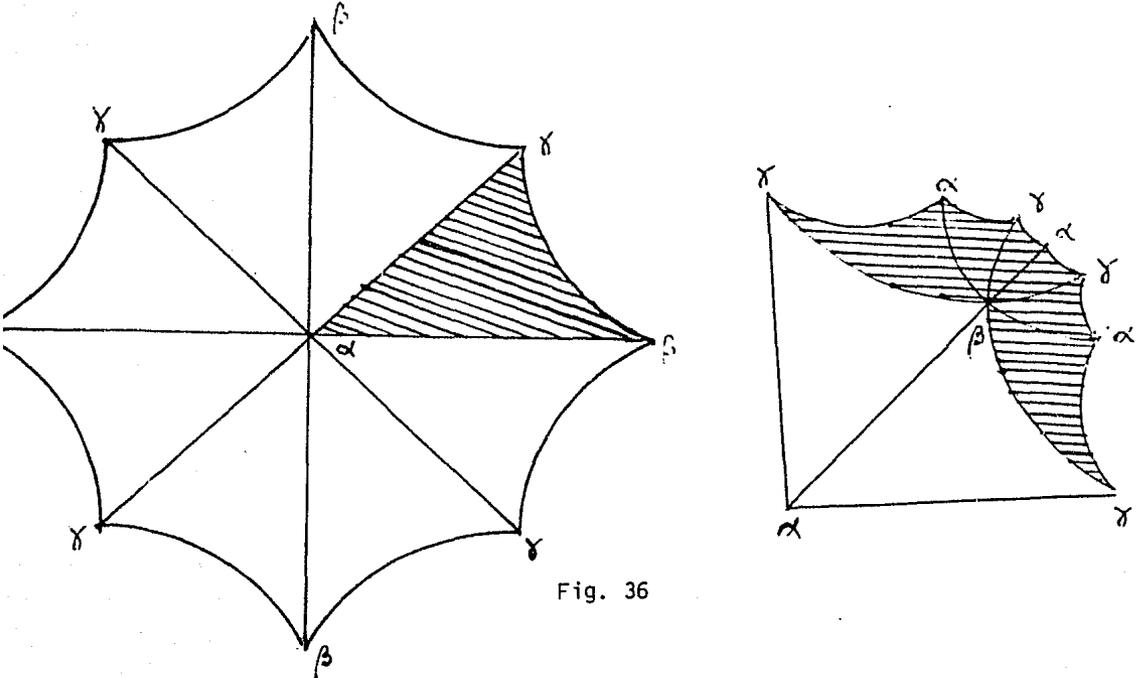


Fig. 36

Consideremos ahora un vértice de Π_1 , digamos un vértice β . Por reflexiones sucesivas de cualquiera de los dos triángulos de primer orden que inciden en \bar{e}_1 , podemos rodear el vértice con una región poligonal convexa de $2m$ triángulos. Llamaremos abanico del vértice β a la colección de los $2m - 2$ triángulos nuevos. Notemos que, ahora, el ángulo de cada uno de los triángulos que inciden en el vértice β es β .

Repetimos esta construcción sobre cada uno de los vértices de Π_1 . Los abanicos en dos vértices consecutivos se intersectan en un triángulo que tiene un lado común con $\partial\Pi_1$. Los triángulos de los abanicos en los vértices de Π_1 se llaman triángulos de segundo orden y forman una región anular que rodea a Π_1 . La unión de Π_1 con esta región se llamará Π_2 ; los ángulos interiores de Π_2 son menores o iguales que π puesto que en cada vértice inciden 2 ó 3 triángulos de segundo orden y los ángulos de cada triángulo son menores o iguales que $\frac{\pi}{3}$. Esto muestra que Π_2 es convexo.

Repitiendo este proceso se construye una sucesión $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, \dots$ de polígonos convexos cada uno de los cuales contiene al anterior en su interior y tales que

$$\Pi = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Pi_k = \Delta.$$

En efecto, dado un triángulo T de Π llamamos la estrella de T a la unión de los triángulos de Π que intersectan a T .

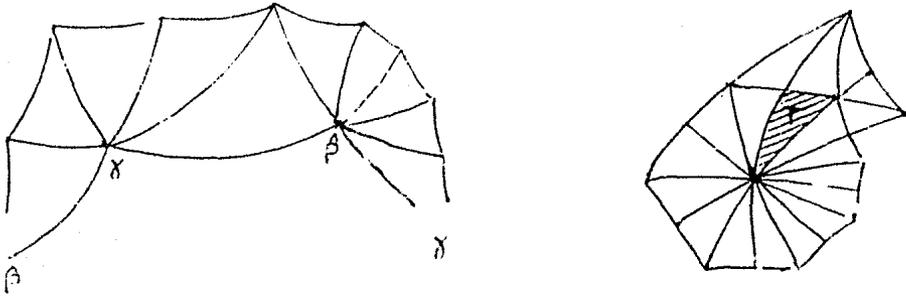


Fig. 37

La distancia ϵ del triángulo T a la frontera de su estrella es positiva y no depende del triángulo T considerado.

Ahora bien; supongamos que existe un punto $z \in \Delta_1$ que no está en Π . Dado un punto $p \in \Pi$ sobre el segmento zp hay un punto ω que no está en Π y tal que su distancia a algún triángulo de Π es menor que ϵ . Esto implica que ω está en la estrella de ese triángulo y por lo tanto en Π ; esto es una contradicción. Así pues $\Pi = \Delta_1$.

Para la construcción anterior supusimos que cada uno de los ángulos de Δ_1 es menor o igual que $\frac{\pi}{3}$. Falta pues considerar el caso en

que uno de los ángulos sea $\frac{\pi}{2}$.

Si en un vértice de Π_k concurren dos ángulos iguales a $\frac{\pi}{2}$ tenemos todavía que el ángulo interior correspondiente es π . Pero si en un vértice concurren tres ángulos iguales a $\frac{\pi}{2}$ entonces el ángulo interior es $\frac{3\pi}{2} > \pi$ y en este caso Π_k no sería convexo. Entonces adjuntamos en el vértice considerado un triángulo más. Hacemos esto en cada vértice en el que concurren tres ángulos iguales a $\frac{\pi}{2}$. Obtenemos así una región convexa que es la que llamaremos Π_k . El resto del argumento vale con esta alteración.

En resumen: dado un triángulo $T \subset \Delta_1$, T da origen a una cubierta Π de Δ_1 cuyos elementos son triángulos congruentes a T . Vamos a mostrar que el grupo Γ de isometrías de Δ_1 generado por las reflexiones R_1, R_2 y R_3 sobre los lados de T es un grupo discontinuo de isometrías de Δ_1 y Γ es un mosaico asociado a él.

Sea Γ_0 el grupo de isometrías de Δ_1 que deja invariante a Π . Cada elemento de Γ_0 queda determinado por la imagen de T bajo él. La órbita de cada punto $z \in \Delta_1$ tiene un punto y uno solo en cada triángulo. Por lo tanto Γ_0 es un grupo discontinuo de isometrías de Δ_1 , T es una región fundamental y entonces Π es un mosaico asociado a Γ_0 . Mostraremos que

$$\Gamma = \Gamma_0$$

Evidentemente R_1, R_2 y $R_3 \in \Gamma_0$ y por lo tanto

$$\Gamma \subset \Gamma_0.$$

Sea ahora $g \in \Gamma_0$. Sea $T' = g(T)$ y sea k el orden de T' . Por inducción sobre k probaremos que $g \in \Gamma$.

- i) Si $k = 1$ T' es un triángulo de Π_1 y es fácil ver que es la imagen de T bajo la composición de reflexiones sobre dos de sus lados.
- ii) Supongamos que la hipótesis vale para $k - 1$. Como el orden T' es k , T' está en el abanico de un vértice de Π_{k-1} y por lo tanto se obtiene de un triángulo de Π_{k-1} por reflexiones sucesivas sobre dos de sus lados. Ahora bien; si R es una reflexión sobre uno de los lados de un triángulo de orden $k-1$ entonces R se puede escribir como $g^{-1} \circ R_j \circ g$ donde $g \in \Gamma$ y R_j es la reflexión sobre uno de los 3 lados de T .

$$R \in \Gamma$$

$$\Gamma_0 \subset \Gamma$$

y hemos demostrado que $\Gamma = \Gamma_0$.

La construcción anterior se puede aplicar, con modificaciones obvias, al caso en que T tiene uno o más vértices impropios.

Así hemos demostrado que a todo triángulo T_0 en Δ_1 le corresponde un grupo discontinuo de isometrías de Δ_1 y un mosaico asociado cuyos azulejos son congruentes a T_0 .

Con esto terminamos el presente trabajo.

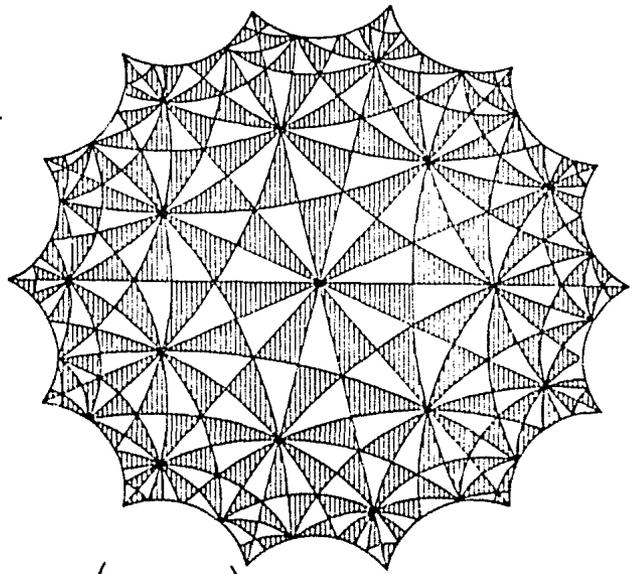


Fig. 38 Mosaico triangular $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

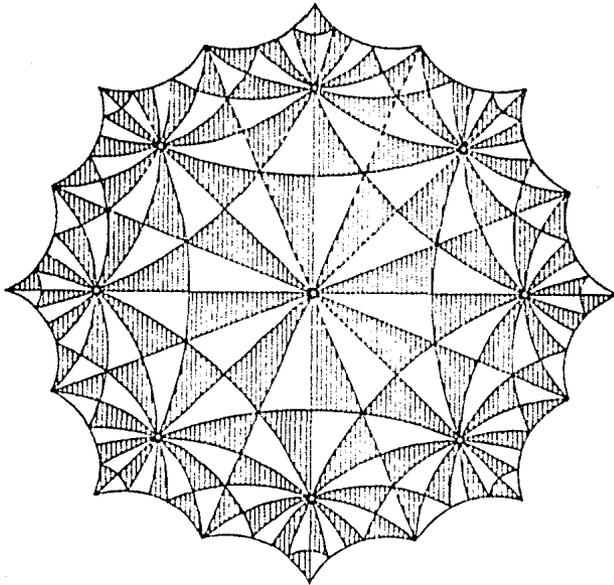


Fig. 39 Mosaico triangular $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

Bibliografía

1. Joseph Lehner
Discontinuous Groups and Automorphic Functions
American Mathematical Society 1966.
2. L.V. Ahlfors
Complex Analysis
McGraw-Hill.
3. D. Hilbert and S. Cohn-Vossen
Geometry and the Imagination
Chelsea Publishing Company 1952.
4. H. Weyl
Symmetry
Princeton University Press 1952.
5. Wilhelm Magnus
Noneuclidian Tesselations and Their Groups
Academic Press 1974.
6. H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser
Generators and Relations for Discrete Groups
Springer-Verlag 1972.
7. H.S.M. Coxeter
Regular Complex Polytopes
Cambridge University Press 1974.
8. Carl L. Siegel
Topics in Complex Function Theory (Vol. II)
Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics.
9. J.R. Munkres
Topology
Prentice-Hall 1975.
10. C. Carathéodory
Theory of Functions of a Complex Variable (Vol. II)
Chelsea Publishing Company 1954.

Algunas de las figuras que aparecen en el texto fueron tomadas de 3., 5., 7.