UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORIA DE LOS TOPOS

TESIS

que presenta

EUGENIA KAWA KARASIK

Para obtener el título de

MATEMATICO

México, D. F.

Julio 1983

INTRODUCCION

EL PRESENTE TRABAJO SURGIÓ COMO RESULTADO DE UN SEMINARIO DIRIGIDO POR EL PROFESOR ALEJANDRO ODGERS LÓPEZ Y LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR CARLOS TORRES ALCARAZ, CON EL PROPOSITO DE ESTUDIAR EL ANÁLISIS CATEGÓRICO DE LA LÓGICA.

LA PARTE CENTRAL DE ESTE TRABAJO CONSISTE DE DOS TEOREMAS DE GRAN IMPORTANCIA EN LA TEORÍA DE LOS TOPOS. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TOPOS Y EL TEOREMA DE RADU DIACONESCU.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL ESTABLECE QUE SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO Y a ES UN $\mathcal{E}$-OBJETO ENTONCES LA CATEGORÍA $\mathcal{E}\downarrow a$ DE $\mathcal{E}$-MORFISMOS SOBRE a ES TAMBIÉN UN TOPO.

EL TEOREMA DE DIACONESCU ESTABLECE QUE UN MODELO INTUICIONISTA DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS CON EL AXIOMA DE ELECCIÓN TIENE QUE SER CLÁSICO.

EN LA SEGUNDA PARTE DE ESTE TRABAJO CAPITULOS 3 Y 4, SE TRATA DE DESARROLLAR CON TODO DETALLE LAS DEMOSTRACIONES DE DICHOS TEOREMAS. EN LA PRIMERA PARTE CAPITULOS 1 Y 2, SE DESARROLLAN BREVEMENTE LOS CONCEPTOS DE CATEGORÍA Y TOPO, CON EL FIN DE QUE TODOS AQUELLOS QUE NO ESTEN FAMILIARIZADOS CON ESTOS TENGAN LAS BASES SUFICIENTES PARA COMPRENDER ESTE TRABAJO.

LAS DEFINICIONES Y PROPOSICIONES ESTÁN NUMERADAS CON TRES NÚMEROS NATURALES. EL PRIMERO Y EL

SEGUNDO INDICAN EL CAPITULO Y SECCIÓN EN QUE SE ENCUENTRA DICHA DEFINICION O PROPOSICIÓN RESDECTIVAMENTE, Y EL TERCERO INDICA EL NÚMERO DE LA DEFINICIÓN O PROPOSICIÓN. POR EJEMPLO: PROPOSICIÓN 3.2.7.-, ESTA ES LA SEPTIMA PROPOSICIÓN DE LA SECCIÓN 2 DEL CAPITULO 3.

POR ÚLTIMO QUIERO AGRADECER A TODAS LAS PERSONAS QUE DIRECTA O INDIRECTAMENTE AYUDARON A LA CULMINASIÓN DE ESTE TRABAJO.

A MIS PADRES ELISA E ISRAEL KAWA POR SU GRAN APOYO E INTERES POR MIS ESTUDIOS PASADOS Y FUTUROS.

AL PROFESOR ALEJANDRO ODGERS NO ÚNICAMENTE POR SU DIRECCIÓN Y ASESORAMIENTO DE ESTE TRABAJO SINO TAMBIÉN POR SU GRAN INTERES Y DEDICACIÓN DURANTE SU DESARROLLO.

AL PROFESOR CARLOS TORRES POR SU PARTICIPACIÓN EN EL SEMINARIO.

EUGENIA KAWA KARASIK.

JULIO 1983.

CONTENIDO

CAPITULO 1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE CATEGORIAS

SECCION 1.-

Una de las perspectivas principales que ofrece la teoría de categorías es el concepto de morfismo, abstraído del concepto de función y que puede sustituir en la teoría de conjuntos a la relación de pertenencia. En lugar de definir las propiedades de una colección o conjunto en referencia a sus elementos, se puede proceder en referencia a sus relaciones con otras colecciones. Esta relación entre colecciones esta dada por funciones y los axiomas de categoría se derivan de las propiedades de las funciones bajo la composición.

Analizemos primero el concepto de función y sus propiedades bajo la composición. Una función es una asociación entre objetos, una correspondencia que asigna a un objeto dado un y sólo un objeto. Se le puede pensar como una regla que es aplicada a algo para obtener el objeto asociado. Si A es el conjunto de todos los objetos a los cuales se les va a aplicar la función f, y B el conjunto que incluye las imagenes de los objetos de A bajo f, entonces se dice que f es una función de A en B y se denota $f: A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$. A es llamado el dominio de f y B es llamado el codominio de f.

Dadas dos funciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$, podemos obtener una nueva función; para $x \in A$, $f(x) \in B$

y por lo tanto un elemento del dominio de g. Aplicando g. obtenemos el elemento $g(f(x)) \in C$. El paso de x a $g(f(x))$ establece una funcion con dominio A y codominio C. Esta es llamada la composición de f y g, denotada $g \circ f$, y definida simbolicamente por la regla $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

Supongamos que tenemos tres funciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ de tal manera que sus dominios y codominios esten relacionados y así poder aplicar las tres para obtener una función de A en D. Existen dos maneras para hacer esto, podemos formar primero la composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ y después la composición $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$ o podemos formar primero la composición $h \circ g : B \longrightarrow D$ y después la composición $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(h \circ g) \circ f"', "h \circ (g \circ f)"] \arrow[dr, "g \circ f"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h \circ g"'] \\
D & C \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

De hecho estas dos funciones son la misma ya que:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Hemos establecido la siguiente ley:

Ley asociativa de la composición de funciones.

Si $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$ son funciones, entonces $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

Dada $f: A \longrightarrow B$ podemos componer a f con la función idéntica $1_B: B \longrightarrow B \ni \forall x \in B$ $1_B(x)=x$; entonces para $x\in A$ $(1_B\circ f)(x)=1_B(f(x))=f(x)$. Analogamente, dada $g: B \longrightarrow C$ podemos componer a g con la función idéntica 1_B, entonces para $x\in B$ $(g\circ 1_B)(x)=g(1_B(x))=g(x)$

Hemos establecido la siguiente ley:

Ley de identidad de la composición de funciones.

Para toda $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $1_B\circ f=f$ y $g\circ 1_B=g$.

La ley de identidad afirma la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"'] \arrow[dr, "g"] & \\
 & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Definición de categoría

Una categoría puede ser pensada como primera instancia como un universo para una clase particular del discurso matemático. Este universo se determina especificando cierta clase de "objetos", y cierta clase de "morfismos" que relacionan objetos. Entonces el estudio de la teoría de conjuntos toma parte en un universo de discurso (categoría) con conjuntos como

OBJETOS Y FUNCIONES COMO MORFISMOS. LA SIGUIENTE TABLA ENLISTA ALGUNAS CATEGORÍAS ESPECIFICANDO SUS OBJETOS Y MORFISMOS

CATEGORÍA	OBJETOS	MORFISMOS
Con	CONJUNTOS	FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS
Confin	CONJUNTOS FINITOS	FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS FINITOS
Conno	CONJUNTOS NO VACÍOS	FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS NO VACÍOS
Top	ESPACIOS TOPOLOGICOS	FUNCIONES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS TOPOLOGICOS
Vect	ESPACIOS VECTORIALES	TRANSFORMACIONES LINEALES
Grup	GRUPOS	HOMOMORFISMOS DE GRUPOS
Mon	MONOIDES	HOMOMORFISMOS DE MONOIDES
Copo	CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS	FUNCIONES MONÓTONAS

EN CADA UNO DE ESTOS EJEMPLOS EXCEPTO LOS TRES PRIMEROS, SON CONJUNTOS CON UNA ESTRUCTURA ADICIONAL Y LOS MORFISMOS SON FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS, QUE EN CADA CASO SATISFACEN CONDICIONES RELACIONADAS A LA ESTRUCTURA DE LOS OBJETOS.

EN CADA CASO LAS SIGUIENTES COSAS OCURREN:

a) CADA MORFISMO TIENE ASOCIADOS DOS OBJETOS, SU DOMINIO Y SU CODOMINIO.

b) EXISTE UNA OPERACIÓN DE COMPOSICIÓN QUE PUEDE SER APLICADA A CIERTOS PARES (g, f) DE MORFISMOS (CUANDO EL DOMINIO DE g ES EL CODOMINIO DE f), PARA OBTENER UN NUEVO MORFISMO $g \circ f$, QUE TAMBIÉN ESTÁ EN LA CATEGORÍA. POR EJEMPLO LA COMPOSICION DE HOMOMORFISMOS DE GRUPOS

ES UN HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ESTA OPERACION DE COMPOSICION SATISFACE LA LEY ASOCIATIVA DESCRITA ANTERIORMENTE

c) CADA OBJETO TIENE ASOCIADO UN MORFISMO EN LA CATEGORÍA, EL MORFISMO IDÉNTICO EN ESE OBJETO. POR EJEMPLO LA FUNCIÓN IDÉNTICA EN UN GRUPO ES UN HOMOMORFISMO DE GRUPOS. EL MORFISMO IDÉNTICO SATISFACE LA LEY DE IDENTIDAD DESCRITA ANTERIORMENTE

DEFINICIÓN I.1.1.- DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE CATEGORÍA:

UNA CATEGORÍA ES UNA QUINTETA

$\mathcal{C} = \langle \mathcal{O}(\mathcal{C}); \mathcal{M}(\mathcal{C}); dom, cod; \circ \rangle$ DONDE.

i) $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ ES UNA CLASE CUYOS ELEMENTOS SON LLAMADOS $\mathcal{C}$-OBJETOS

ii) $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ES UNA CLASE CUYOS ELEMENTOS SON LLAMADOS $\mathcal{C}$-MORFISMOS

iii) dom y cod SON FUNCIONES DE $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ EN $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ TAL QUE PARA CADA $f \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. $dom(f) \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ ES LLAMADO EL DOMINIO DE f y $cod(f) \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ ES LLAMADO EL CODOMINIO DE f. SI $a = dom(f)$ y $b = cod(f)$, ENTONCES SE DENOTA $f: a \longrightarrow b$ ó $a \xrightarrow{f} b$.

iv) $\circ$ ES UNA FUNCION DE

$D = \{ (g, f) \mid f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ y $dom(g) = cod(f) \}$ EN $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, LLAMADA LEY DE COMPOSICIÓN DE $\mathcal{C}$. $\circ(g, f)$ POR LO GENERAL SE DENOTA $g \circ f$ y SE DICE QUE $g \circ f$ ESTÁ DEFINIDA SI y SÓLO SI $(g, f) \in D$.

Y SATISFACE LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

1) SI $g \circ f$ ESTÁ DEFINIDA, ENTONCES $dom(g \circ f) = dom(f)$ Y $cod(g \circ f) = cod(g)$

2) LEY ASOCIATIVA: SI $g \circ f$ Y $h \circ g$ ESTÁN DEFINIDAS ENTONCES $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

LA LEY ASOCIATIVA AFIRMA QUE UN DIAGRAMA DE LA FORMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(h \circ g) \circ f"'] \arrow[d, shift left=2, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[dr, "g \circ f"] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h \circ g"'] \\
d & c \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

SIEMPRE CONMUTA.

3) EXISTENCIA DE MORFISMO IDÉNTICO: PARA CADA $\mathcal{C}$-OBJETO b EXISTE UN $\mathcal{C}$-MORFISMO LLAMADO MORFISMO IDENTICO EN b DENOTADO $1_b \ni dom(1_b) = b$ Y $cod(1_b) = b$ Y SATISFACE LA LEY DE IDENTIDAD:

i) $1_b \circ f = f$ SI $1_b \circ f$ ESTÁ DEFINIDA Y

ii) $g \circ 1_b = g$ SI $g \circ 1_b$ ESTÁ DEFINIDA.

LA LEY DE IDENTIDAD AFIRMA QUE UN DIAGRAMA DE LA FORMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
 & b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

SIEMPRE CONMUTA.

4) PARA TODO PAR $(a,b) \in \mathcal{O}(\mathcal{C})^2$, LA CLASE $\mathcal{C}(a,b) = \{ f \mid f \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \ni dom(f) = a$ Y $cod(f) = b \}$ ES UN CONJUNTO.

PROPOSICION 1.1.1.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA Y $a \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$, ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $1_a : a \longrightarrow a$ QUE SATISFACE LA CONDICIÓN (3) DE LA DEFINICIÓN ANTERIOR

DEMOSTRACIÓN : SEAN $1_a : a \longrightarrow a$ Y $\bar{1}_a : a \longrightarrow a$ MORFISMOS QUE SATISFACEN LA CONDICIÓN (3), ES DECIR, SI $f : b \longrightarrow a$ Y $g : a \longrightarrow c$ $\quad 1_a \circ f = f \;,\; \bar{1}_a \circ f = f \;,$

$$g \circ 1_a = g \;,\; g \circ \bar{1}_a = g$$

$\therefore \quad \bar{1}_a \circ 1_a = 1_a$ Y $\bar{1}_a \circ 1_a = \bar{1}_a$

$\therefore \quad 1_a = \bar{1}_a$

EJEMPLOS BÁSICOS

1.- CATEGORÍAS DISCRETAS.

UNA CATEGORIA ES DISCRETA SI TODOS SUS MORFISMOS SON MORFISMOS IDÉNTICOS. UNA CATEGORÍA DISCRETA NO ES MAS QUE UNA COLECCIÓN DE OBJETOS; PARA CUALQUIER CONJUNTO A SE PUEDE FORMAR UNA CATEGORÍA DISCRETA AL AÑADIR PARA CADA $a \in A$ EL MORFISMO IDENTIDAD $1_a : a \longrightarrow a$

2.- CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS.

UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO ES UN PAR $\langle P, \sqsubseteq \rangle \ni$

i) P ES UN CONJUNTO.

ii) $\sqsubseteq \subseteq P \times P$ ES UNA RELACIÓN BINARIA $\ni$

a) ES REFLEXIVA, ES DECIR, $\forall p \in P \quad p \sqsubseteq p$.

b) ES ANTISIMETRICA, ES DECIR, $\forall p, q \in P \quad p \sqsubseteq q$ Y $q \sqsubseteq p \Rightarrow p = q$.

c) ES TRANSITIVA, ES DECIR, $\forall p, q, s \in P \quad p \sqsubseteq q$ Y $q \sqsubseteq s \Rightarrow p \sqsubseteq s$

CON UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO SE PUEDE CONSTRUIR UNA CATEGORÍA DE LA SIGUIENTE MANERA:

LOS OBJETOS SON LOS ELEMENTOS p DE P, Y LOS MORFISMOS SON LOS PARES (p,q) PARA LOS CUALES $p \leq q$, (p,q) ES UN MORFISMO DE p A q, DADOS $p \xrightarrow{(p,q)} q \xrightarrow{(q,s)} s$ DEFINIMOS $(q,s)\circ(p,q) = (p,s)$.

SI (p,q) y (q,s) SON MORFISMOS ENTONCES $p \leq q$ y $q \leq s$ $\therefore$ $p \leq s$ y (p,s) ES UN MORFISMO DE p A s.

COMO $\forall p \in P$ $p \leq p$ ENTONCES $(p,p). p \longrightarrow p$ ES MORFISMO ADEMAS $(p,p) = 1_p$

3.- MONOIDES.

UN MONOIDE ES UNA TERNA $\mathcal{M} = \langle M, *, e \rangle \ni$.

i) M ES UN CONJUNTO

ii) $*$ ES UNA OPERACIÓN BINARIA, ES DECIR, UNA FUNCIÓN $*: M \times M \longrightarrow M \ni$ PARA CADA PAR $(x,y) \in M \times M$ $*(x,y) = x*y \in M$ y $*$ ES ASOCIATIVA, ES DECIR, $\forall\, x,y,z \in M$ $x*(y*z) = (x*y)*z$

iii) $e \in M$, ES LLAMADO ELEMENTO IDENTICO Y SATISFACE:

$e*x = x*e = x \quad \forall\, x \in M$

CON UN MONOIDE $\mathcal{M}$ SE PUEDE FORMAR UNA CATEGORÍA CON UN SÓLO OBJETO. TOMEMOS A M COMO EL OBJETO Y LOS MORFISMOS $M \longrightarrow M$ SON LOS ELEMENTOS DE M.

EL MORFISMO IDÉNTICO $1_M = e \in M$.

LA COMPOSICIÓN ESTA DEFINIDA DE LA SIGUIENTE MANERA: SI $x, y \in M$ ENTONCES $x \circ y = x * y$

4.- SUBCATEGORIAS

SEA $\mathcal{D}$ UNA CATEGORÍA. SE DICE QUE $\mathcal{G}$ ES UNA SUBCATEGORÍA DE LA CATEGORÍA $\mathcal{D}$, DENOTADO $\mathcal{G} \leq \mathcal{D}$ SI:

i) $\mathcal{O}(\mathcal{G}) \leq \mathcal{O}(\mathcal{D})$

ii) SI $a,b \in \mathcal{O}(\mathcal{G})$ ENTONCES $\mathcal{G}(a,b) \leq \mathcal{D}(a,b)$

POR EJEMPLO $\mathit{Conjfin} \subseteq \mathit{Conj}$ Y $\mathit{Conna} \subseteq \mathit{Conj}$

SE DICE QUE $\mathcal{C}$ ES UNA SUBCATEGORÍA PLENA DE $\mathcal{D}$ SI $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ Y

ii) $\forall\, a, b \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}(a,b) = \mathcal{D}(a,b)$

SI $\mathcal{D}$ ES UNA CATEGORÍA Y $C \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{D})$ SE PUEDE CONSTRUIR UNA SUBCATEGORÍA PLENA $\mathcal{C}$ DE $\mathcal{D}$ AL TOMAR COMO $\mathcal{C}$-MORFISMOS TODOS LOS $\mathcal{D}$-MORFISMOS ENTRE ELEMENTOS DE C.

POR EJEMPLO: $\mathit{Conjfin}$ Y Conna SON SUBCATEGORÍAS PLENAS DE Conj

5.- CATEGORÍAS PRODUCTO

SEAN $\mathcal{C}$ Y $\mathcal{D}$ DOS CATEGORÍAS, ENTONCES PODEMOS FORMAR UNA NUEVA CATEGORÍA, LA CATEGORÍA PRODUCTO DE $\mathcal{C}$ Y $\mathcal{D}$ DENOTADA $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ $\ni$

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) = \{(a,b) \mid a \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) \text{ y } b \in \mathcal{O}(\mathcal{D})\} \quad \text{Y}$$

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) = \{(f,g) \mid f: a \to c \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),\ g: b \to d \in \mathcal{M}(\mathcal{D})\}$$

$$\therefore (f,g): (a,b) \longrightarrow (c,d)$$

LA COMPOSICIÓN SE DEFINE COORDENADA A COORDENADA CON RESPECTO A LA COMPOSICIÓN EN $\mathcal{C}$ Y LA COMPOSICIÓN EN $\mathcal{D}$, ES DECIR,

$$(f,g)\circ(f',g') = (f\circ f', g\circ g')$$

EL MORFISMO IDÉNTICO $1_{(a,b)}: (a,b) \longrightarrow (a,b)$ ES ENTONCES $1_{(a,b)} = (1_a, 1_b)$ $\ni$ $1_a: a \longrightarrow a$ ES MORFISMO IDÉNTICO EN $\mathcal{C}$ Y $1_b: b \longrightarrow b$ ES MORFISMO IDÉNTICO EN $\mathcal{D}$

POR EJEMPLO: Conj^2 ES LA CATEGORÍA CUYOS OBJETOS SON LOS PARES (A,B) DONDE A Y B SON CONJUNTOS, UN MORFISMO EN Conj^2 ES UN PAR DE FUNCIONES $(f,g): (A,B) \longrightarrow (C,D)$ $\ni$ $f: A \longrightarrow C$ Y $g: B \longrightarrow D$. LA COMPOSICIÓN ESTÁ DEFINIDA COMO:

$(f,g)\circ(f',g') = (f\circ f', g\circ g')$ DONDE $f\circ f'$ Y $g\circ g'$ SON LAS COMPOSICIONES DE FUNCIONES

EL MORFISMO IDÉNTICO DEL OBJETO (A,B) ES $(1_A, 1_B)$.

6.- CATEGORÍAS FLECHA.

SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA, ENTONCES PODEMOS FORMAR UNA NUEVA CATEGORÍA LLAMADA CATEGORÍA FLECHA DENOTADA $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ TAL QUE

$\mathcal{O}(\mathcal{C}^{\rightarrow}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, ES DECIR, $\mathcal{O}(\mathcal{C}^{\rightarrow}) = \{ f: a \longrightarrow b \mid f \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \}$.

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}^{\rightarrow}) = \{ (h,k) : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{g} d) \mid h: a \longrightarrow c,\ k: b \longrightarrow d \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ y } g \circ h = k \circ f \}$$

ES DECIR, UN MORFISMO DE $f \longrightarrow g$ ES UN PAR DE MORFISMOS EN $\mathcal{C}$ (h,k) QUE HACEN CONMUTAR EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "k"] & d
\end{tikzcd}$$

LA COMPOSICIÓN ESTÁ DEFINIDA COMO SIGUE:

SEAN $(h,k) : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{g} d)$ y $(m,n) : (c \xrightarrow{g} d) \longrightarrow (e \xrightarrow{\ell} \sigma)$

ENTONCES $(m,n) \circ (h,k) = (m \circ h, n \circ k)$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g"] & e \arrow[d, "\ell"] \\
b \arrow[r, "k"] & d \arrow[r, "n"] & \sigma
\end{tikzcd}$$

EL MORFISMO IDÉNTICO DE $f: a \longrightarrow b$ EN $\mathcal{C}^{\rightarrow}$

$1_f : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{f} b)$ ES $1_f = (1_a, 1_b)$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "1_a"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "1_b"] & b
\end{tikzcd}$$

7.- CATEGORÍAS COMA

SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA Y $a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ ENTONCES LA CATEGORÍA $\mathcal{C}\downarrow a$ TIENE COMO OBJETOS LOS $\mathcal{C}$-MORFISMOS CON CODOMINIO a Y UN MORFISMO DE $f: b \longrightarrow a$ EN $g: c \longrightarrow a$ ES UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $k: b \longrightarrow c$ Y $g \circ k = f$, ES DECIR,

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA.

LA COMPOSICION ESTA DEFINIDA COMO SIGUE:

SEAN $k: (b \xrightarrow{f} a) \longrightarrow (c \xrightarrow{g} a)$ Y $h: (c \xrightarrow{g} a) \longrightarrow (d \xrightarrow{l} a)$

ENTONCES $h \circ k = h \circ k$, ES DECIR, COMO LA COMPOSICION EN $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & d \arrow[dl, "l"] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

EL MORFISMO IDÉNTICO DE $f: b \longrightarrow a$, $1_f : (b \xrightarrow{f} a) \longrightarrow (b \xrightarrow{f} a)$

ES $1_f = 1_b$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "1_b"] \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "f"] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

TAMBIÉN PODEMOS DEFINIR LA CATEGORÍA $\mathcal{C}\uparrow a$ QUE TIENE COMO OBJETOS LOS $\mathcal{C}$-MORFISMOS CON DOMINIO a Y UN MORFISMO DE $f: a \longrightarrow b$ EN $g: a \longrightarrow c$ ES UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $k: b \longrightarrow c \ni$ $k \circ f = g$, ES DECIR,

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
b \arrow[rr, dashed, "k"'] & & c
\end{tikzcd}$$

CONMUTA.

LA COMPOSICION ESTÁ DADA COMO SIGUE:

SEAN $K : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{g} c)$, $K : (a \xrightarrow{g} c) \longrightarrow (a \xrightarrow{\ell} d)$

ENTONCES $h \circ k = h \circ k$, ES DECIR, LA COMPOSICIÓN EN $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\ell"] & \\
b \arrow[r, dashed, "k"'] & c \arrow[r, "h"'] & d
\end{tikzcd}$$

EL MORFISMO IDÉNTICO DE $f : a \to b$, $1_f : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{f} b)$

ES $1_f = 1_b$

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b \arrow[rr, "1_b"] & & b
\end{tikzcd}$$

CATEGORIAS DEL TIPO $\mathcal{C} \downarrow a$ y $\mathcal{C} \uparrow a$ SON LLAMADAS CATEGORÍAS COMA.

SECCION 2.-

En esta sección examinaremos algunas construcciones de la teoría de conjuntos y después las reformularemos en funcion de morfismos

CLASIFICACIÓN DE MORFISMOS

Una funcion entre conjuntos $f: A \longrightarrow B$ se dice que es inyectiva cuando $\forall x, y \in A$ si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

Demostraremos ahora la siguiente afirmación:

f es inyectiva si y sólo si f es cancelable por la izquierda, es decir, $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función inyectiva y $g, h: C \longrightarrow A \ni f \circ g = f \circ h$.

$\forall x \in C$ $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$ entonces $f(g(x)) = f(h(x))$.

Por ser f inyectiva $g(x) = h(x)$ por lo tanto $g = h$

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función cancelable por la izquierda, es decir, $\forall g, h: C \longrightarrow A \ni f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Sean $x, y \in A \ni f(x) = f(y)$ y sean $g, h: \{0\} \longrightarrow A \ni g(0) = x$ y $h(0) = y$.

$f \circ g, f \circ h: \{0\} \longrightarrow B \ni (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(x)$ y $(f \circ h)(0) = f(h(0)) = f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow (f \circ g)(0) = (f \circ h)(0) \Rightarrow f \circ g = f \circ h$

Por ser f cancelable por la izquierda $g = h$

por lo tanto $g(0) = h(0)$, es decir, $x = y$.

DEFINICIÓN 1.2.1- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA, UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $f:a\longrightarrow b$ SE DICE QUE ES UN $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO SI PARA TODO PAR $g,h.c\longrightarrow a$ DE $\mathcal{C}$-MORFISMOS $\ni$ $f\circ g = f\circ h$ ENTONCES $g=h$. SI f ES UN $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO ENTONCES SE DENOTARÁ

$f: a\rightarrowtail b$

PROPOSICIÓN 1.2.2.- EN TODA CATEGORÍA $\mathcal{C}$

1) SI f y g SON $\mathcal{C}$-MONOMORFISMOS ENTONCES $g\circ f$ ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO

2) SI $g\circ f$ ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO ENTONCES f ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN:

1) SEAN $f:a\rightarrowtail b$ y $g:b\rightarrowtail c$ $\mathcal{C}$-MONOMORFISMOS

SEAN $h,K: d\longrightarrow a$ $\ni$ $(g\circ f)\circ h = (g\circ f)\circ K$

POR LO TANTO $g\circ(f\circ h) = g\circ(f\circ k)$ POR SER g MONOMORFISMO $f\circ h = f\circ K$ y POR SER f MONOMORFISMO $h=K$.

POR LO TANTO $g\circ f$ ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO.

2) SEAN $f:a\longrightarrow b$ y $g:b\longrightarrow c$ $\ni$ $g\circ f: a\rightarrowtail c$ ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO.

SEAN $h,K: d\longrightarrow a$ $\ni$ $f\circ h = f\circ K$, ENTONCES $g\circ(f\circ h) = g\circ(f\circ k)$ ES DECIR, $(g\circ f)\circ h = (g\circ f)\circ K$ POR SER $g\circ f$ MONOMORFISMO $h=K$. POR LO TANTO f ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO.

UNA FUNCIÓN ENTRE CONJUNTOS $f:A\longrightarrow B$ SE DICE QUE ES SOBRE SI $\forall\, y\in B$, EXISTE $x\in A$ $\ni$ $f(x)=y$.

DEMOSTRAREMOS AHORA LA SIGUIENTE AFIRMACIÓN:

f ES SOBRE SI Y SÓLO SI f ES CANCELABLE POR LA DERECHA, ES

DECIR, $g \circ f = h \circ f \Rightarrow y = h$

SEA $f: A \longrightarrow B$ SOBRE Y $g, h: B \longrightarrow C \ni g \circ f = h \circ f$

SEA $y \in B$ POR f SOBRE EXISTE $x \in A \ni f(x) = y$

POR LO TANTO $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$

POR LO TANTO $g = h$

SEA $f: A \longrightarrow B$ UNA FUNCIÓN CANCELABLE POR LA DERECHA, ES DECIR, $\forall g, h: B \longrightarrow C \ni g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

SUPONGAMOS QUE PARA $y \in B$ NO EXISTE $x \in A \ni f(x) = y$.

SEAN $C = \{0,1\}$, $g, h: B \longrightarrow C \ni g(b) = 0 \ \forall b \in B$ Y

$h(b) = 0 \ \forall b \in B - \{y\}$ Y $h(y) = 1$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ Y $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 0$

POR LO TANTO $g \circ f = h \circ f$ POR SER f CANCELABLE POR LA DERECHA $g = h$ $\lightning$. POR LO TANTO EXISTE $x \in A \ni f(x) = y$.

DEFINICIÓN 1.2.3.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA, UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $f: a \longrightarrow b$ SE DICE QUE ES UN $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO SI PARA TODO PAR $g, h: b \longrightarrow c$ DE $\mathcal{C}$-MORFISMOS $\ni g \circ f = h \circ f$ ENTONCES $g = h$.
SI f ES UN $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO ENTONCES SE DENOTARÁ $f: a \twoheadrightarrow b$

PROPOSICIÓN 1.2.4.- EN TODA CATEGORÍA $\mathcal{C}$.

1) SI f Y g SON $\mathcal{C}$-EPIMORFISMOS ENTONCES $g \circ f$ ES $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO

2) SI $g \circ f$ ES $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO ENTONCES g ES $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN:

1) SEAN $f: a \twoheadrightarrow b$ Y $g: b \twoheadrightarrow c$ $\mathcal{C}$-EPIMORFISMOS

SEAN $h, K: c \longrightarrow d \ni h \circ (g \circ f) = K \circ (g \circ f)$

POR LO TANTO $(h \circ g) \circ f = (K \circ g) \circ f$ POR SER f EPIMORFISMO $h \circ g = K \circ g$ Y POR SER g EPIMORFISMO $h = K$

POR LO TANTO $g \circ f$ ES $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO

2) SEAN $f : a \longrightarrow b$ Y $g : b \longrightarrow c \ni g \circ f : a \twoheadrightarrow c$ ES $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO

SEAN $h, K : c \longrightarrow d \ni h \circ g = K \circ g$., ENTONCES $(h \circ g) \circ f = (K \circ g) \circ f$

ES DECIR, $h \circ (g \circ f) = K \circ (g \circ f)$ POR SER $g \circ f$ EPIMORFISMO

$h = K$. POR LO TANTO g ES $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO

UNA FUNCIÓN ENTRE CONJUNTOS QUE ES INYECTIVA Y SOBRE ES LLAMADA BIYECTIVA. SI $f : A \longrightarrow B$ ES BIYECTIVA ENTONCES EL PASO DE A A B PUEDE SER INVERTIDO. TODO $y \in B$ ES LA IMAGEN $f(x)$ PARA ALGUNA $x \in A$ (POR SER f SOBRE), A SABER PARA UNA ÚNICA $x \in A$ (POR SER f INYECTIVA). ENTONCES LA REGLA QUE ASIGNA A CADA $y \in B$ UNA ÚNICA $x \in A$ ESTA DADA POR:

$g(y) = x$ SI Y SÓLO SI $f(x) = y$. Y ESTA ESTABLECE UNA FUNCIÓN $g : B \longrightarrow A$ TAL QUE $g(f(x)) = g(y) = x \quad \forall x \in A$ Y $f(g(y)) = f(x) = y \quad \forall y \in B$

POR LO TANTO $g \circ f = 1_A$ Y $f \circ g = 1_B$

A LA FUNCIÓN g SE LE CONOCE COMO LA INVERSA DE f

DEFINICIÓN 1.2.5.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $f : a \longrightarrow b$ SE DICE QUE ES UN $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO SI EXISTE UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $g : b \longrightarrow a \ni g \circ f = 1_a$ Y $f \circ g = 1_b$

SI f ES UN $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO ENTONCES SE DENOTARÁ $f : a \cong b$

PROPOSICION 126.- SI $f: a \to b$ ES UN $\mathcal{G}$-ISOMORFISMO ENTONCES EL MORFISMO $g: b \to a \ni g\circ f = 1_a$ y $f\circ g = 1_b$ ES UNICO.

DEMOSTRACIÓN· SEAN $g, g': b \to a \ni g\circ f = 1_a$, $f\circ g = 1_b$ y $g'\circ f = 1_a$, $f\circ g' = 1_b$. ENTONCES $g' = 1_a\circ g' = (g\circ f)\circ g'$ y $g = g\circ 1_b = g\circ(f\circ g') = (g\circ f)\circ g'$ POR LO TANTO $g = g'$

POR LO TANTO LA INVERSA DE f ES UNICA Y SE DENOTA $f^{-1}: b \to a$

PROPOSICIÓN 127.- SI f ES UN $\mathcal{G}$-ISOMORFISMO ENTONCES f ES $\mathcal{G}$-MONOMORFISMO Y $\mathcal{G}$-EPIMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN: SEA $f: a \to b$ UN $\mathcal{G}$-ISOMORFISMO, ENTONCES EXISTE $f^{-1}: b \to a \ni f^{-1}\circ f = 1_a$ y $f\circ f^{-1} = 1_b$

SEAN $g, h: c \to a \ni f\circ g = f\circ h$, ENTONCES $f^{-1}\circ(f\circ g) = f^{-1}\circ(f\circ h)$ ES DECIR, $(f^{-1}\circ f)\circ g = (f^{-1}\circ f)\circ h$, POR LO TANTO $1_a\circ g = 1_a\circ h$ POR LO TANTO $g = h$. ENTONCES f ES $\mathcal{G}$-MONOMORFISMO

SEAN $g, h: b \to c \ni g\circ f = h\circ f$, ENTONCES $(g\circ f)\circ f^{-1} = (h\circ f)\circ f^{-1}$ ES DECIR, $g\circ(f\circ f^{-1}) = h\circ(f\circ f^{-1})$, POR LO TANTO $g\circ 1_b = h\circ 1_b$ POR LO TANTO $g = h$. ENTONCES F ES $\mathcal{G}$-EPIMORFISMO

SEA $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ EL MONOIDE DE LOS NÚMEROS NATURALES Y POR LO TANTO UNA CATEGORÍA. EN $\mathcal{M}$ TODO MORFISMO (NÚMERO NATURAL) ES MONOMORFISMO YA QUE $m+n = m+p \Rightarrow n = p$. Y TODO MORFISMO ES EPIMORFISMO YA QUE $n+m = p+m \Rightarrow n = p$. SIN EMBARGO EL ÚNICO ISOMORFISMO ES EL MORFISMO $0: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, YA QUE SI $m \neq 0$ $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ES ISOMORFISMO ENTONCES EXISTE $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ INVERSO DE m $\ni m+n = 1_{\mathbb{N}}$ POR LO TANTO $m+n = 0$, ENTONCES $n = m = 0$

POR LO TANTO TODO MORFISMO $m \neq 0$ ES MONOMORFISMO Y EPIMORFISMO PERO NO ISOMORFISMO.

PROPOSICION 1.2.8 - EN TODA CATEGORÍA $\mathcal{C}$

1) TODO MORFISMO IDÉNTICO ES ISOMORFISMO.

2) SI f ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO ENTONCES f^{-1} TAMBIÉN LO ES.

3) SI f Y g SON $\mathcal{C}$-ISOMORFISMOS ENTONCES $f \circ g$ TAMBIÉN LO ES.

DEMOSTRACIÓN:

1) SEA $a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ Y $1_a : a \longrightarrow a$ EL MORFISMO IDÉNTICO EN a

SEA $1_a^{-1} = 1_a : a \longrightarrow a$ $\quad 1_a \circ 1_a = 1_a$, POR LO TANTO 1_a ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO

2) SEA $f : a \longrightarrow b$ $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO, ENTONCES EXISTE $f^{-1} : b \longrightarrow a$ ∋ $f^{-1} \circ f = 1_a$ Y $f \circ f^{-1} = 1_b$. SEA $(f^{-1})^{-1} : a \longrightarrow b$ ∋ $(f^{-1})^{-1} = f$

$(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = 1_b$ Y $(f^{-1}) \circ (f^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_a$

ASÍ QUE f^{-1} TIENE INVERSO f Y POR LO TANTO f^{-1} ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO

3) SEAN $f : a \longrightarrow b$ Y $g : b \longrightarrow c$ $\mathcal{C}$-ISOMORFISMOS, ENTONCES EXISTEN $f^{-1} : b \longrightarrow a$ Y $g^{-1} : c \longrightarrow b$ ∋ $f^{-1} \circ f = 1_a$, $f \circ f^{-1} = 1_b$ Y $g^{-1} \circ g = 1_b$, $g \circ g^{-1} = 1_c$

$g \circ f : a \longrightarrow c$ SEA $(g \circ f)^{-1} : c \longrightarrow a$ ∋ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ 1_b \circ f = f^{-1} \circ f = 1_a$

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ 1_b \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_c$

POR LO TANTO $g \circ f$ ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO.

CLASIFICACION DE OBJETOS

DEFINICION 1.2.9.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA. $a, b \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ SON LLAMA-

DOS OBJETOS ISOMORFOS $a \cong b$, SI EXISTE UN $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO $f : a \longrightarrow b$

PROPOSICIÓN 1.2.10.- PARA TODO $a, b, c \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$

i) $a \cong a$

ii) SI $a \cong b$ ENTONCES $b \cong a$

iii) SI $a \cong b$ Y $b \cong c$ ENTONCES $a \cong c$.

ES DECIR, $\cong$ ES UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA.

DEMOSTRACIÓN:

i) $1_a : a \longrightarrow a$ ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO, POR LO TANTO $a \cong a$

ii) SUPONGAMOS QUE $a \cong b$, ENTONCES EXISTE $f : a \longrightarrow b$ $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO. ENTONCES EXISTE $f^{-1} : b \longrightarrow a \ni f^{-1}$ ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO, POR LO TANTO $b \cong a$.

iii) SUPONGAMOS QUE $a \cong b$ Y $b \cong c$, ENTONCES EXISTEN $f : a \longrightarrow b$ Y $g : b \longrightarrow c$ $\mathcal{C}$-ISOMORFISMOS. $g \circ f : a \longrightarrow c$ Y POR SER f Y g ISOMORFISMOS $g \circ f$ ES $\mathcal{C}$-ISOMORFISMO, POR LO TANTO $a \cong c$.

DEFINICIÓN 1.2.11.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA. UN OBJETO O DE $\mathcal{C}$ ES LLAMADO INICIAL SI $\forall\, a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ EXISTE UN ÚNICO $\mathcal{C}$-MORFISMO $O_a : O \longrightarrow a$

PROPOSICIÓN 1.2.12.- SI O Y O' SON OBJETOS INICIALES EN UNA CATEGORÍA $\mathcal{C}$, ENTONCES $O \cong O'$

DEMOSTRACIÓN: SEAN O Y O' OBJETOS INICIALES EN $\mathcal{C}$, ENTONCES $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS $O_a : O \longrightarrow a$ Y

$0'_a : 0' \longrightarrow a$. En particular existen únicos morfismos

$0_{0'} : 0 \longrightarrow 0'$ y $0'_0 : 0' \longrightarrow 0$

$1_0 : 0 \longrightarrow 0$ es única, por lo tanto $0'_0 \circ 0_{0'} = 1_0$

$1_{0'} : 0' \longrightarrow 0'$ es única, por lo tanto $0_{0'} \circ 0'_0 = 1_{0'}$

Entonces $0'_0$ es inversa de $0_{0'}$, por lo tanto $0_{0'} : 0 \longrightarrow 0'$ es $\mathcal{C}$-isomorfismo, por lo tanto $0 \cong 0'$

Definición 1.2.13.- Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto 1 de $\mathcal{C}$ es llamado terminal si $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $!_a : a \longrightarrow 1$.

Proposición 1.2.14.- Si 1 y 1' son objetos terminales en una categoría $\mathcal{C}$, entonces $1 \cong 1'$

Demostración: Supongamos que 1 y 1' son objetos terminales entonces $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ existen únicos morfismos $!_a : a \longrightarrow 1$ y $!'_a : a \longrightarrow 1'$. En particular existen únicos morfismos.

$!_{1'} : 1' \longrightarrow 1$ y $!'_1 : 1 \longrightarrow 1'$

$1_1 : 1 \longrightarrow 1$ es única, por lo tanto $!_{1'} \circ !'_1 = 1_1$

$1_{1'} : 1' \longrightarrow 1'$ es única, por lo tanto $!'_1 \circ !_{1'} = 1_{1'}$

Entonces $!_{1'}$ es inverso de $!'_1$, por lo tanto $!'_1 : 1 \longrightarrow 1'$ es $\mathcal{C}$-isomorfismo, por lo tanto $1 \cong 1'$

Proposición 1.2.15.- Si 1 es objeto terminal entonces $f : 1 \longrightarrow a$ es un monomorfismo.

Demostración: Sea $f : 1 \longrightarrow a$ y sean $g, h : b \longrightarrow 1 \ni$ $f \circ g = f \circ h$. Por ser 1 terminal, existe un unico morfismo $!_b \cdot b \to 1$, por lo tanto $g = !_b = h$. Entonces f es monomorfismo

Principio de dualidad

Si Σ es un enunciado en un lenguaje apropiado para una categoría, el dual de Σ, Σ^{op} es el enunciado que se obtiene de Σ al reemplazar dom por cod, cod por dom y $h = g \circ f$ por $h = f \circ g$. Por ejemplo la noción de epimorfismo es el dual de la noción de monomorfismo, así también el dual de objeto inicial es objeto terminal.

Dada una categoría $\mathcal{C}$ se puede construir su categoría dual u opuesta $\mathcal{C}^{op}$ de la siguiente manera:

i) $\mathcal{O}(\mathcal{C}^{op}) = \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

ii) Para cada $f : a \to b \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, definimos un $\mathcal{C}^{op}$-morfismo $f^{op} : b \to a$.

iii) La composición $f^{op} \circ g^{op}$ está definida en $\mathcal{C}^{op}$, siempre y cuando la composición $g \circ f$ este definida en $\mathcal{C}$ y

$$f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}.$$

Entonces el dual de un enunciado en $\mathcal{C}$, puede ser interpretado como el enunciado original en $\mathcal{C}^{op}$.

Si Σ es un teorema de la teoría de categorías entonces Σ es verdadero en cualquier categoría, y por lo tanto Σ^{op} es verdadero en toda categoría de la forma $\mathcal{C}^{op}$; pero toda categoría tiene esta forma, ya que $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{op})^{op}$ y por lo tanto Σ^{op} también es verdadera en toda categoría

PRODUCTO

Queremos encontrar una caracterización del producto cartesiano de conjuntos $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$ en función de morfismos. Asociado a $A \times B$, existen dos funciones llamadas proyecciones, $P_A : A \times B \longrightarrow A$ y $P_B : A \times B \longrightarrow B \ni P_A((x,y)) = x$ y $P_B((x,y)) = y$.

Supongamos que tenemos un conjunto C y un par de funciones $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$, entonces definimos $\varphi . C \longrightarrow A \times B \ni \forall x \in C \ \varphi(x) = (f(x), g(x))$. Además

$(P_A \circ \varphi)(x) = P_A(\varphi(x)) = P_A((f(x), g(x))) = f(x)$ y

$(P_B \circ \varphi)(x) = P_B(\varphi(x)) = P_B((f(x), g(x))) = g(x)$

por lo tanto $P_A \circ \varphi = f$ y $P_B \circ \varphi = g$, es decir,

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "P_A"] \arrow[r, "P_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Además φ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama. Ya que si existe $\bar{\varphi} : C \longrightarrow A \times B \ni P_A \circ \bar{\varphi} = f$ y $P_B \circ \bar{\varphi} = g$, entonces si $\bar{\varphi}(x) = (y, z)$ entonces

$(P_A \circ \bar{\varphi})(x) = P_A((y,z)) = y$ y $(P_B \circ \bar{\varphi})(x) = P_B((y,z)) = z$

como $P_A \circ \bar{\varphi} = f$ y $P_B \circ \bar{\varphi} = g$ entonces $f(x) = y$ y $g(x) = z$

por lo tanto $\bar{\varphi}(x) = (f(x), g(x))$ y por lo tanto $\varphi = \bar{\varphi}$

Al morfismo φ asociado a f y g se le denota $\langle f, g \rangle$ y en la categoría Con está definido: $\langle f, g \rangle(x) = (f(x), g(x))$

Definición 1.1.16- Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un producto de dos

$\mathcal{C}$-objetos a y b, es un $\mathcal{C}$-objeto $a\times b$ y un par de $\mathcal{C}$-morfismos $P_a : a\times b \longrightarrow a$ y $P_b : a\times b \longrightarrow b$ que satisfacen la siguiente propiedad universal:

Para cualquier par de $\mathcal{C}$-morfismos $f : c \longrightarrow a$ y $g : c \longrightarrow b$ existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $\langle f,g\rangle : c \longrightarrow a\times b$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[rd, "g"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

conmuta

es decir, $P_a \circ \langle f,g\rangle = f$ y $P_b \circ \langle f,g\rangle = g$.

$\langle f,g\rangle$ es llamado el morfismo producto de f y g

Proposición 1.2.17.- El producto de $a, b \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ es único salvo isomorfismo

Demostración: Sea $(a\times b,\ P_a : a\times b \rightarrow a,\ P_b : a\times b \rightarrow b)$ un producto de a y b. Supongamos que $(d,\ p : d \rightarrow a,\ q : d \rightarrow b)$ satisfacen la definición de un producto de a y b.

Analicemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[ld, "p"'] \arrow[d, dashed, "\langle p,q\rangle"] \arrow[rd, "q"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] \arrow[d, dashed, "\langle P_a,P_b\rangle"] & b \\
 & d \arrow[lu, "p"] \arrow[ru, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal para $(a\times b, P_a, P_b)$, existe un

ÚNICO MORFISMO $\langle P,q\rangle : d \longrightarrow a\times b$ $\ni$ $P_a \circ \langle P,q\rangle = P$ y

$P_b \circ \langle P,q\rangle = q$. POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL PARA (d,P,q)

EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle P_a, P_b\rangle : a\times b \longrightarrow d$ $\ni$

$P \circ \langle P_a,P_b\rangle = P_a$ y $q\circ\langle P_a,P_b\rangle = P_b$

POR OTRO LADO POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL PARA (d,P,q)

EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : d \longrightarrow d$ $\ni$

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "q"] & \\
a & d \arrow[l, "P"] \arrow[r, "q"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA.

$1_d : d \longrightarrow d$ HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA $\therefore$ $1_d = \varphi$

$P\circ\langle P_a,P_b\rangle\circ\langle P,q\rangle = P_a\circ\langle P,q\rangle = P$ y

$q\circ\langle P_a,P_b\rangle\circ\langle P,q\rangle = P_b\circ\langle P,q\rangle = q$

$\therefore$ $\langle P_a,P_b\rangle\circ\langle P,q\rangle$ HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA ANTERIOR

POR LO TANTO $\langle P_a,P_b\rangle\circ\langle P,q\rangle = 1_d$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL PARA $(a\times b, P_a, P_b)$ EXISTE

UN ÚNICO MORFISMO $\varphi' : a\times b \longrightarrow a\times b$ $\ni$

$$\begin{tikzcd}
 & a\times b \arrow[dl, "P_a"'] \arrow[d, dashed, "\varphi'"] \arrow[dr, "P_b"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

$1_{a\times b} : a\times b \longrightarrow a\times b$ HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA $\therefore$ $1_{a\times b} = \varphi'$

$P_a\circ\langle P,q\rangle\circ\langle P_a,P_b\rangle = P\circ\langle P_a,P_b\rangle = P_a$ y

$P_b\circ\langle P,q\rangle\circ\langle P_a,P_b\rangle = q\circ\langle P_a,P_b\rangle = P_b$

$\therefore$ $\langle P,q\rangle\circ\langle P_a,P_b\rangle$ HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA ANTERIOR

POR LO TANTO $\langle P,q\rangle\circ\langle P_a,P_b\rangle = 1_{a\times b}$

ENTONCES $\langle p, q\rangle$ Y $\langle P_a, P_b\rangle$ SON INVERSOS UNO DEL OTRO POR LO TANTO $\langle P_a, P_b\rangle : a\times b \to d$ ES ISOMORFISMO Y POR LO TANTO $a\times b \cong d$.

PROPOSICION 1.2.18.- SEA $(a\times b, P_a, P_b)$ EL PRODUCTO DE a Y b. SI $f, g: c \longrightarrow a\times b \ni P_a\circ f = P_a\circ g$ Y $P_b\circ f = P_b\circ g$ ENTONCES $f=g$.

DEMOSTRACIÓN: CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS CONMUTATIVOS.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "P_a\circ f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, dashed, no head, "P_b\circ f"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"'] \arrow[r, "P_b"] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "P_a\circ g"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "P_b\circ g"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"'] \arrow[r, "P_b"] & b
\end{tikzcd}$$

COMO $P_a\circ f = P_a\circ g$ Y $P_b\circ f = P_b\circ g$, TENEMOS QUE TANTO f COMO g HACEN CONMUTAR EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, dashed, "P_a\circ f"'] \arrow[d, "f|g"] \arrow[dr, "P_b\circ g"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"'] \arrow[r, "P_b"] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO DE C EN $a\times b$ QUE HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA POR LO TANTO $f=g$.

PROPOSICIÓN 1.2.19.- $\langle P_a, P_b\rangle = 1_{a\times b}$

DEMOSTRACIÓN: SEA $(a\times b, P_a, P_b)$ EL PRODUCTO DE a Y b CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA:

$$\begin{tikzcd}
 & a\times b \arrow[ld, "P_a"'] \arrow[d, dashed, "\langle P_a, P_b\rangle"] \arrow[rd, "P_b"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL EXISTE UN UNICO MORFISMO

$\langle P_a, P_b\rangle : a\times b \longrightarrow a\times b$ QUE HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA

PERO $1_{a\times b} : a\times b \longrightarrow a\times b$ TAMBIÉN HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA

POR LO TANTO $\langle P_a, P_b\rangle = 1_{a\times b}$

PROPOSICIÓN 1.2.20.- SI $\langle f, g\rangle = \langle h, K\rangle$ ENTONCES $f = h$ y $g = K$

DEMOSTRACIÓN: SEA $(a\times b, P_a, P_b)$ EL PRODUCTO DE a y b

SUPONGAMOS QUE $\langle f, g\rangle = \langle h, K\rangle$

$f = P_a \circ \langle f, g\rangle = P_a \circ \langle h, K\rangle = h$, POR LO TANTO $f = h$

$g = P_b \circ \langle f, g\rangle = P_b \circ \langle h, K\rangle = K$, POR LO TANTO $g = K$

PROPOSICIÓN 1.2.21.- $\langle f\circ h, g\circ h\rangle = \langle f, g\rangle \circ h$

DEMOSTRACIÓN: SEA $(a\times b, P_a, P_b)$ EL PRODUCTO DE a y b

SEAN $f : c \longrightarrow a$, $g : c \longrightarrow b$ y $h : d \longrightarrow c$

$\langle f, g\rangle : c \longrightarrow a\times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO $\ni$ $P_a \circ \langle f, g\rangle = f$ y $P_b \circ \langle f, g\rangle = g$. Y $\langle f\circ h, g\circ h\rangle : d \longrightarrow a\times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO $\ni$ $P_a \circ \langle f\circ h, g\circ h\rangle = f\circ h$ y $P_b \circ \langle f\circ h, g\circ h\rangle = g\circ h$.

POR LO TANTO LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS CONMUTAN

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g\rangle"] \arrow[rd, "g"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, "f\circ h"'] \arrow[ddr, "g\circ h"] \arrow[dd, dashed, bend right=40, "\langle f\circ h, g\circ h\rangle"] & \\
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

$p_a \circ \langle f,g\rangle \circ h = f\circ h$ y $p_b \circ \langle f,g\rangle \circ h = g \circ h$

POR LO TANTO $\langle f,g\rangle\circ h$ TAMBIÉN HACE CONMUTAR AL DIAGRAMA ANTERIOR, POR LO TANTO $\langle f\circ h, g\circ h\rangle = \langle f,g\rangle \circ h$

PROPOSICIÓN 1.2.22.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON OBJETO TERMINAL 1, ENTONCES $\forall\, a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ $a \cong a\times 1$ y $\langle 1_a, !_a\rangle$ ES ISOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEA $(a\times 1, p_a, p_1)$ EL PRODUCTO DE a y 1 POR SER 1 OBJETO TERMINAL EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $!_a : a \longrightarrow 1$. CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[dr, "!_a"] \arrow[d, dashed, "\langle 1_a, !_a\rangle"] & \\
a & a\times 1 \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_1"'] & 1
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle 1_a, !_a\rangle : a \longrightarrow a\times 1$ QUE HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA ANTERIOR. , POR LO TANTO $p_a \circ \langle 1_a, !_a\rangle = 1_a$

$!_a \circ p_a : a\times 1 \longrightarrow 1$, POR SER 1 OBJETO TERMINAL EXISTE UN ÚNICO MORFISMO DE $a\times 1$ EN 1, POR LO TANTO $!_a \circ p_a = p_1$

$\langle 1_a, !_a\rangle \circ p_a = \langle 1_a \circ p_a, !_a \circ p_a\rangle = \langle p_a, p_1\rangle = 1_{a\times 1}$

ENTONCES P_a ES LA INVERSA DE $\langle 1_a, !_a \rangle$, POR LO TANTO $\langle 1_a, !_a \rangle : a \longrightarrow a \times 1$ ES ISOMORFISMO Y $a \cong a \times 1$

MORFISMOS PRODUCTO

SEAN $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS SE PUEDE FORMAR UNA FUNCIÓN $f \times g : A \times C \longrightarrow B \times D \ni$ ·

$(f \times g)((x,y)) = (f(x), g(x)) \quad \forall \ (x,y) \in A \times C$

SEAN $(A \times C, P_A, P_C)$, $(B \times D, P_B, P_D)$ LOS PRODUCTOS DE A Y C Y B Y D RESPECTIVAMENTE.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] & D \\
A \times C \arrow[u, "P_C"] \arrow[d, "P_A"'] \arrow[ur, "g \circ P_C"] \arrow[dr, "f \circ P_A"'] \arrow[r, dashed, "\langle f \circ P_A, g \circ P_C \rangle"] & B \times D \arrow[u, "P_D"'] \arrow[d, "P_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE B Y D EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle f \circ P_A, g \circ P_C \rangle : A \times C \longrightarrow B \times D \ni$ ·

$\forall \ (x,y) \in A \times C \quad \langle f \circ P_A, g \circ P_C \rangle ((x,y)) = ((f \circ P_A)(x,y), (g \circ P_C)(x,y))$

$= (f(P_A(x,y)), g(P_C(x,y))) = (f(x), g(x))$

POR LO TANTO DEFINIMOS $f \times g = \langle f \circ P_A, g \circ P_C \rangle$

DEFINICIÓN 1.2.23.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA. SI $f : a \longrightarrow b$ Y $g : c \longrightarrow d$ SON $\mathcal{C}$-MORFISMOS Y $a \times c$, $b \times d$ EXISTEN EN $\mathcal{C}$ ENTONCES EL MORFISMO $f \times g : a \times c \longrightarrow b \times d$ SE DEFINE COMO

EL MORFISMO $\langle f\circ p_a , g\circ p_c \rangle$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "g"] & & d \\
a\times c \arrow[u, "p_c"] \arrow[d, "p_a"'] \arrow[rr, dashed, "f\times g"] & & b\times d \arrow[u, "p_d"'] \arrow[d, "p_b"'] \\
a \arrow[rr, "f"] & & b
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.2.24.- $1_a \times 1_b = 1_{a\times b}$

DEMOSTRACIÓN: SEA $(a\times b, p_a, p_b)$ EL PRODUCTO DE a y b

$$1_a \times 1_b = \langle 1_a \circ p_a , 1_b \circ p_b \rangle = \langle p_a , p_b \rangle = 1_{a\times b}$$

PROPOSICIÓN 1.2.25.-

1) $(f\times h)\circ\langle g,k\rangle = \langle f\circ g , h\circ k\rangle$

2) $(f\times h)\circ(g\times k) = (f\circ g)\times(h\circ k)$

DEMOSTRACIÓN:

1) CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[rr, "h"] & & d \\
e \arrow[ur, "k"] \arrow[r, dashed, "\langle g,k\rangle"] \arrow[rrr, dashed, bend right=15, "\langle f\circ g, h\circ k\rangle"'] \arrow[dr, "g"'] & a\times c \arrow[u, "p_c"] \arrow[d, "p_a"'] \arrow[rr, dashed, "f\times h"] & & b\times d \arrow[u, "p_d"'] \arrow[d, dashed, "p_b"] \\
 & a \arrow[rr, "f"'] & & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE b Y d EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle f\circ g, h\circ k\rangle : e \longrightarrow b\times d$, HACE CONMUTAR AL DIAGRAMA.

$f\times h = \langle f\circ P_a, h\circ P_c\rangle$, POR LO TANTO,

$$\begin{aligned}
P_b\circ(f\times h)\circ\langle g,k\rangle &= P_b\circ\langle f\circ P_a, h\circ P_c\rangle\circ\langle g,k\rangle\\
&= P_b\circ\langle (f\circ P_a)\circ\langle g,k\rangle , (h\circ P_c)\circ\langle g,k\rangle\rangle\\
&= f\circ P_a\circ\langle g,k\rangle = f\circ g.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_d\circ(f\times h)\circ\langle g,k\rangle &= P_d\circ\langle f\circ P_a, h\circ P_c\rangle\circ\langle g,k\rangle\\
&= P_d\circ\langle (f\circ P_a)\circ\langle g,k\rangle , (h\circ P_c)\circ\langle g,k\rangle\rangle\\
&= h\circ P_c\circ\langle g,k\rangle = h\circ k
\end{aligned}$$

ENTONCES $(f\times h)\circ\langle g,k\rangle$ TAMBIÉN HACE CONMUTAR AL DIAGRAMA, POR LO TANTO $(f\times h)\circ\langle g,k\rangle = \langle f\circ g, h\circ k\rangle$

2) CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "k"] & c \arrow[r, "h"] & d \\
e\times n \arrow[u, "P_n"] \arrow[d, "P_e"'] \arrow[r, dashed, "g\times k"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "(f\circ g)\times(h\circ k)"] & a\times c \arrow[u, "P_c"] \arrow[d, "P_a"] \arrow[r, dashed, "f\times h"'] & b\times d \arrow[u, "P_d"'] \arrow[d, "P_b"'] \\
e \arrow[r, "g"'] & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

$(f\circ g)\times(h\times k) = \langle f\circ g\circ P_e , h\circ k\circ P_n\rangle$ Y ES EL ÚNICO MORFISMO DE $e\times n$ EN $b\times d$ QUE HACE CONMUTAR AL DIAGRAMA. $f\times h = \langle f\circ P_a, h\circ P_c\rangle$, $g\times k = \langle g\circ P_e , k\circ P_n\rangle$

$$\begin{aligned}
P_b\circ(f\times h)\circ(g\times k) &= P_b\circ\langle f\circ P_a, h\circ P_c\rangle\circ\langle g\circ P_e , k\circ P_n\rangle\\
&= P_b\circ\langle f\circ P_a\circ\langle g\circ P_e, k\circ P_n\rangle , h\circ P_c\circ\langle g\circ P_e, k\circ P_n\rangle\rangle
\end{aligned}$$

$$= f \circ P_a \circ \langle g \circ P_a , k \circ P_n \rangle = f \circ g \circ P_a$$

$$P_d \circ (f \times h) \circ (g \times k) = P_d \circ \langle f \circ P_a , h \circ P_c \rangle \circ \langle g \circ P_a , k \circ P_n \rangle$$

$$= P_d \circ \langle f \circ P_a \circ \langle g \circ P_a , k \circ P_n \rangle , h \circ P_c \circ \langle g \circ P_a , k \circ P_n \rangle \rangle$$

$$= h \circ P_c \circ \langle g \circ P_a , k \circ P_n \rangle = h \circ k \circ P_n$$

ENTONCES $(f \times h) \circ (g \times k)$ TAMBIÉN HACE CONMUTAR EL DIAGRAMA, POR LO TANTO $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$

COPRODUCTOS.

EL CONCEPTO DUAL DE PRODUCTO ES EL COPRODUCTO, Y POR LO TANTO SE DEFINE COMO SIGUE

DEFINICIÓN 1.2.26.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA. UN COPRODUCTO DE DOS $\mathcal{C}$-OBJETOS a Y b, ES UN $\mathcal{C}$-OBJETO $a+b$ Y UN PAR DE $\mathcal{C}$-MORFISMOS $i_a : a \longrightarrow a+b$, $i_b : b \longrightarrow a+b$, CON LA SIGUIENTE PROPIEDAD UNIVERSAL:

PARA CUALQUIER PAR DE MORFISMOS $f : a \longrightarrow c$, $g : b \longrightarrow c$ EXISTE UN ÚNICO MORFISMO DENOTADO $[f,g] : a+b \longrightarrow c$ $\ni$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"'] & a+b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA.

ES DECIR, $[f,g] \circ i_a = f$ Y $[f,g] \circ i_b = g$.

$[f,g]$ ES LLAMADO EL MORFISMO COPRODUCTO DE f Y g.

POR EL PRINCIPIO DE DUALIDAD TENEMOS QUE LA SIGUIENTES PROPOSICIONES SE SATISFACEN.

PROPOSICIÓN 1.2.27.- EL COPRODUCTO DE $a, b \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ ES UNICO SALVO ISOMORFISMO

PROPOSICIÓN 1.2.28.- SEA $(a+b, i_a, i_b)$ EL COPRODUCTO DE a y b. Si $f, g : a+b \longrightarrow c$, $f \circ i_a = g \circ i_a$ y $f \circ i_b = g \circ i_b$ ENTONCES $f = g$.

PROPOSICIÓN 1.2.29.- $[i_a, i_b] = 1_{a+b}$

PROPOSICIÓN 1.2.30.- Si $[f, g] = [h, k]$ ENTONCES $f = h$ y $g = k$

PROPOSICIÓN 1.2.31.- $[h \circ f, h \circ g] = h \circ [f, g]$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, dashed, "h \circ f"'] & a+b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] \arrow[dd, dashed, bend right, "{[h\circ f, h\circ g]}"'] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, "g"'] \arrow[ddl, dashed, "h \circ g"] \\
& c \arrow[d, "h"] & \\
& d &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.2.32.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON OBJETO INICIAL 0, ENTONCES $\forall\, a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ $a \cong a+0$ y $[1_a, 0_a]$ ES ISOMORFISMO

MORFISMOS COPRODUCTO

EL CONCEPTO DUAL DE MORFISMOS PRODUCTOS ES EL MORFISMOS COPRODUCTO, POR LO TANTO SE DEFINE COMO SIGUE

DEFINICIÓN 1.2.33.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA. SI $f: b \longrightarrow a$ Y $g: d \longrightarrow c$ SON $\mathcal{C}$-MORFISMOS Y $b+d$, $a+c$ EXISTEN, ENTONCES EL MORFISMO $f+g: b+d \longrightarrow a+c$ SE DEFINE COMO EL MORFISMO $[i_a \circ f, i_c \circ g]$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "i_c"] & d \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "i_d"] \\
a+c & b+d \arrow[l, dashed, "f+g"] \\
a \arrow[u, "i_a"] & b \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "i_b"]
\end{tikzcd}$$

POR EL PRINCIPIO DE DUALIDAD LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES SE CUMPLEN

PROPOSICIÓN 1.2.34.- $1_a + 1_b = 1_{a+b}$

PROPOSICIÓN 1.2.35.- $[g, K] \circ (f+h) = [g \circ f, K \circ h]$ Y $(g+K) \circ (f+h) = (g \circ f) + (K \circ h)$

IGUALADORES

SEAN $f, g: A \longrightarrow B$ FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS Y SEA $E \subset A$ DONDE $E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$

LA FUNCION INCLUSIÓN $i: E \hookrightarrow A$ ES LLAMADA UN IGUALADOR DE f Y g YA QUE, $f \circ i = g \circ i$, ES DECIR, LAS DOS FUNCIONES SON IGUALES BAJO LA COMPOSICIÓN CON i. ADEMAS SE TIENE

QUE SI $h : C \longrightarrow A$ ES TAMBIÉN IGUALADOR DE f Y g, ES DECIR $f \circ h = g \circ h$, ENTONCES h SE FACTORIZA DE MANERA ÚNICA A TRAVES DE i, ES DECIR, EXISTE UNA UNICA FUNCIÓN $K : C \longrightarrow E \ni h = i \circ K$

SI $f \circ h = g \circ h$ ENTONCES $\forall y \in C$ $f(h(y)) = g(h(y))$ COMO $h(y) \in E$ ENTONCES DEFINIMOS $K : C \longrightarrow E \ni K(y) = h(y)$ $\forall y \in C$. $i(K(y)) = K(y) = h(y)$

SI EXISTE $\bar{K} : C \longrightarrow E \ni h = i \circ \bar{K}$ ENTONCES $i \circ \bar{K} = i \circ K$ $\forall y \in C$ $\bar{K}(y) = i(\bar{K}(y)) = i(K(y)) = K(y)$, POR LO TANTO K ES UNICA

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, hook, dotted, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
& C \arrow[ul, dashed, "K"] \arrow[u, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.2.36.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $i : e \longrightarrow a$ ES IGUALADOR DE UN PAR DE $\mathcal{C}$-MORFISMOS $f, g : a \longrightarrow b$ SI $f \circ i = g \circ i$ Y SATISFACE LA SIGUIENTE PROPIEDAD UNIVERSAL

SI $h : c \longrightarrow a$ ES TAL QUE $f \circ h = g \circ h$, ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $K : c \longrightarrow e$ TAL QUE $i \circ K = h$

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& c \arrow[ul, dashed, "K"] \arrow[u, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

UN MORFISMO ES LLAMADO UN IGUALADOR EN $\mathcal{C}$ SI EXISTE UN PAR DE MORFISMOS DEL CUAL ES IGUALADOR.

PROPOSICIÓN 1.2.37.- TODO IGUALADOR ES UN $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEA $i: e \longrightarrow a$ UN IGUALADOR DE $f, g: a \longrightarrow b$ ENTONCES $f \circ i = g \circ i$. SEAN $h, k: c \longrightarrow e \ni i \circ h = i \circ k$.
$f \circ i = g \circ i \Rightarrow f \circ i \circ h = g \circ i \circ h$. POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: c \longrightarrow e \ni$ $i \circ \varphi = i \circ h$ COMO $i \circ h = i \circ h$ Y $i \circ k = i \circ h$ POR LA UNICIDAD TENEMOS QUE $\varphi = h = k$, POR LO TANTO $i: e \longrightarrow a$ ES UN $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO

SEA $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ EL MONOIDE DE LOS NÚMEROS NATURALES Y POR LO TANTO UNA CATEGORÍA. COMO TODO MORFISMO ES MONOMORFISMO 1 LO ES, SIN EMBARGO NO ES EL IGUALADOR DE CUALQUIER PAR DE MORFISMOS. SI EXISTIERAN MORFISMOS m Y n TALES QUE 1 ES SU IGUALADOR ENTONCES $m+1 = n+1$, PERO SI $m+1 = n+1$ ENTONCES $m = n$ Y POR LO TANTO $m+0 = n+0$. ENTONCES 0 SE PODRÍA FACTORIZAR DE MANERA ÚNICA ATRAVES DE 1, ES DECIR, EXISTE UN ÚNICO $k \in \mathbb{N} \ni 1 + k = 0$ COSA QUE NO PUEDE OCURRIR. POR LO TANTO NO TODO MONOMORFISMO ES IGUALADOR

PROPOSICIÓN 1.2.38.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA, UN IGUALADOR EN $\mathcal{C}$ SI EXISTE ES ÚNICO SALVO ISOMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN: SEA $i: e \longrightarrow a$ UN IGUALADOR DE $f, g: a \longrightarrow b$ Y SUPONGAMOS QUE $i': e' \longrightarrow a$ TAMBIÉN ES UN IGUALADOR DE f Y g. ENTONCES $f \circ i = g \circ i$ Y $f \circ i' = g \circ i'$
CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "i"] & & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& a' \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, dotted, "i'"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a' \arrow[rr, dotted, "i'"] & & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& a \arrow[ul, dashed, "h'"] \arrow[ur, dotted, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR i EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $h.\ a' \to a \ni i \circ h = i'$, Y POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR i' EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $h' : a \to a' \ni i' \circ h' = i$

$i \circ 1_a = i = i' \circ h' = (i \circ h) \circ h' = i \circ (h \circ h')$, POR SER i MONOMORFISMO

$1_a = h \circ h'$

$i' \circ 1_{a'} = i' = i \circ h = (i' \circ h') \circ h = i' \circ (h' \circ h)$, POR SER i' MONOMORFISMO

$1_{a'} = h' \circ h$

ENTONCES h' Y h SON INVERSOS UNO DEL OTRO, POR LO TANTO $h' : a \to a'$ ES ISOMORFISMO Y $a \cong a'$

PROPOSICIÓN 1.2.34.- UN IGUALADOR QUE ES EPIMORFISMO ES ISOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEA $i : a \to a$ IGUALADOR DE $f, g : a \to b$, ENTONCES $f \circ i = g \circ i$ POR SER i EPIMORFISMO $f = g$.

$f \circ 1_a = f = g = g \circ 1_a$, POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k : a \to a \ni i \circ k = 1_a$

$i \circ k \circ i = 1_a \circ i = i = i \circ 1_b$, POR SER i MONOMORFISMO

$k \circ i = 1_b$. POR LO TANTO k ES EL INVERSO DE i E $i : a \to a$ ES ISOMORFISMO

COIGUALADORES

EL CONCEPTO DUAL DE IGUALADOR ES EL DE COIGUALADOR Y POR LO TANTO TENEMOS LA SIGUIENTE DEFINICIÓN.

DEFINICIÓN 1.2.40.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA. UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $q: b \dashrightarrow e$ ES UN COIGUALADOR DE UN PAR DE $\mathcal{C}$-MORFISMOS $f,g: a \longrightarrow b$ SI $q \circ f = q \circ g$ Y SATISFACE LA SIGUIENTE PROPIEDAD UNIVERSAL

SI $h: b \dashrightarrow c$ ES TAL QUE $h \circ f = h \circ g$, ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k: e \longrightarrow c$ $\ni$ $k \circ q = h$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "h"'] & & e \arrow[dl, dashed, "k"] \\
& & c &
\end{tikzcd}$$

POR EL PRINCIPIO DE DUALIDAD LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES SE SATISFACEN.

PROPOSICIÓN.- 1.2.41.- TODO COIGUALADOR ES EPIMORFISMO.

PROPOSICIÓN.- 1.2.42.- UN COIGUALADOR ES ÚNICO SALVO ISOMORFISMO.

PROPOSICIÓN.- 1.2.43.- UN COIGUALADOR QUE ES MONOMORFISMO ES ISOMORFISMO.

PRODUCTOS FIBRADOS

SEAN $f: A \longrightarrow C$ Y $g: B \dashrightarrow C$ FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS

Sea $D=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B$ y $f(x)=g(y)\}$ y sean $f':D\longrightarrow B$ y $g':D\longrightarrow A \ni f'((x,y))=y$ y $g'((x,y))=x$, f' y g' son llamadas el producto fibrado de f y g y tienen las siguientes propiedades

$\forall (x,y)\in D$ $f(g'((x,y)))=f(x)=g(y)=g(f'((x,y)))$ $\therefore$ $f\circ g'=g\circ f'$

Si $h:E\longrightarrow A$ y $k:E\longrightarrow B$ son funciones tales que $f\circ h=g\circ k$ entonces $\forall z\in E$ $f(h(z))=g(k(z))$ por lo que $(h(z),k(z))\in D$

Por lo tanto podemos definir $\varphi:E\longrightarrow D \ni \varphi(z)=(h(z),k(z))$.

φ es tal que $f'(\varphi(z))=f'(h(z),k(z))=k(z)$ y $g'(\varphi(z))=g'(h(z),k(z))=h(z)$ por lo tanto $f'\circ\varphi=k$ y $g'\circ\varphi=h$. Si existe $\bar{\varphi}:E\longrightarrow D\ni f'\circ\bar{\varphi}=k$ y $g'\circ\bar{\varphi}=h$ entonces $f'(\bar{\varphi}(z))=k(z)$ y $g'(\bar{\varphi}(z))=h(z)$, por lo que $\bar{\varphi}(z)=(h(z),k(z))$, por lo tanto φ es única

Definición 1.2.44 · Sea $\mathcal{C}$ una categoría, un producto fibrado de $\mathcal{C}$-morfismos $f:a\longrightarrow c$ y $g:b\longrightarrow c$ es un par de morfismos $f':d\longrightarrow b$ y $g':d\longrightarrow a$ tal que:

i) $f\circ g'=g\circ f'$, y

ii) Propiedad universal: Si $h:e\longrightarrow a$ y $k:e\longrightarrow b$ son $\mathcal{C}$-morfismos tales que $f\circ h=g\circ k$ entonces existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $\varphi:e\longrightarrow d$ tal que $f'\circ\varphi=k$ y $g'\circ\varphi=h$

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[rrd, bend left, "k"] \arrow[rd, dashed, "\varphi"] \arrow[rdd, bend right, "h"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.2.45.- SEAN $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA y $f: a \longrightarrow c$, $g: b \longrightarrow c$ $\mathcal{C}$-MORFISMOS. SI EXISTE EL PRODUCTO FIBRADO DE f y g ENTONCES ES ÚNICO SALVO ISOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEAN $f': d \longrightarrow b$, $g': d \longrightarrow a$ y $f'': d' \longrightarrow b$, $g'': d' \longrightarrow a$ PRODUCTOS FIBRADOS DE f y g, POR LO TANTO $f \circ g' = g \circ f'$ y $f \circ g'' = g \circ f''$

CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS

$$\begin{tikzcd}
d' \arrow[rrd, bend left, "f''"] \arrow[rd, dashed, "\varphi"] \arrow[rdd, bend right, "g''"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrd, bend left, "f'"] \arrow[rd, dashed, "\varphi'"] \arrow[rdd, bend right, "g'"'] & & \\
& d' \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "g''"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DE f' y g' EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: d' \longrightarrow d$ TAL QUE $g' \circ \varphi = g''$ y $f' \circ \varphi = f''$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DE f'' y g'' EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi': d \longrightarrow d'$ TAL QUE $g'' \circ \varphi' = g'$ y $f'' \circ \varphi' = f'$

CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[rrd, bend left, "f'"] \arrow[rd, dashed, "\psi"] \arrow[rdd, bend right, "g'"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d' \arrow[rrd, bend left, "f''"] \arrow[rd, dashed, "\psi'"] \arrow[rdd, bend right, "g''"'] & & \\
& d' \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "g''"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, dashed, "f"] & c
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DE f' y g' EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\psi: d \longrightarrow d \ni f' \circ \psi = f'$ y $g' \circ \psi = g'$.

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DE f'' y g'' EXISTE UN ÚNICO

MORFISMO $\psi': d' \longrightarrow d \ni f''\circ\psi' = f''$ y $g''\circ\psi' = g''$

$f'\circ 1_d = f'$, $g'\circ 1_d = g'$ y $f'\circ(\varphi\circ\varphi') = (f'\circ\varphi)\circ\varphi' = f''\circ\varphi' = f'$

$g'\circ(\varphi\circ\varphi') = (g'\circ\varphi)\circ\varphi' = g''\circ\varphi' = g'$. POR LA UNICIDAD DE ψ

$\varphi\circ\varphi' = 1_d$

$f''\circ 1_{d'} = f''$, $g''\circ 1_{d'} = g''$ y $f''\circ(\varphi'\circ\varphi) = (f''\circ\varphi')\circ\varphi = f'\circ\varphi = f''$

$g''\circ(\varphi'\circ\varphi) = (g''\circ\varphi')\circ\varphi = g'\circ\varphi = g''$. POR LA UNICIDAD DE ψ'

$\varphi'\circ\varphi = 1_{d'}$

ENTONCES φ y φ' SON INVERSOS UNO DEL OTRO, POR LO TANTO

$\varphi': d \longrightarrow d'$ ES ISOMORFISMO y $d \cong d'$

PROPOSICIÓN 1.1.46.- Si

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & c \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO y

$\alpha, \beta: e \longrightarrow d$ SON TALES QUE $f'\circ\alpha = f'\circ\beta$ y $g'\circ\alpha = g'\circ\beta$

ENTONCES $\alpha = \beta$

DEMOSTRACIÓN: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "f'\circ\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "g'\circ\alpha"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & c \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

POR SER EL CUADRADO PRODUCTO FIBRADO $g\circ f' = f\circ g'$, POR LO QUE $g\circ f'\circ\alpha = f\circ g'\circ\alpha$, POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL EXISTE UN ÚNICO $\varphi: e \longrightarrow d$ TAL QUE $f'\circ\varphi = f'\circ\alpha$ y $g'\circ\varphi = g'\circ\alpha$

$f'\circ\alpha = f'\circ\alpha$, $g'\circ\alpha = g'\circ\alpha$ y $f'\circ\beta = f'\circ\alpha$, $g'\circ\beta = g'\circ\alpha$

POR LA UNICIDAD DE φ $\varphi = \alpha = \beta$

PROPOSICIÓN 1.2.47.- SI

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & c \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, tail, "f"] & b \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO Y f ES UN $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO, ENTONCES f' ES UN $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN: SEAN $\alpha, \beta : e \longrightarrow d \ni f' \circ \alpha = f' \circ \beta$.

$f' \circ \alpha = f' \circ \beta \Rightarrow g \circ f' \circ \alpha = g \circ f' \circ \beta$

POR SER EL CUADRADO PRODUCTO FIBRADO $g \circ f' = f \circ g'$

$f \circ g' \circ \alpha = g \circ f' \circ \alpha = g \circ f' \circ \beta = f \circ g' \circ \beta$ POR SER f MONOMORFISMO

$g' \circ \alpha = g' \circ \beta$. POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $\alpha = \beta$

POR LO TANTO f' ES $\mathcal{C}$-MONOMORFISMO.

PROPOSICIÓN 1.2.48 TEOREMAS DE PRODUCTOS FIBRADOS.

1) SI

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd} \quad \text{Y} \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & c \arrow[d, "h"] \\ m \arrow[r, "f''"] & e \end{tikzcd}$$

SON PRODUCTOS FIBRADOS, ENTONCES

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, phantom, "(***)"] \arrow[d, "h'"] & c \arrow[d, "h"] \\ m \arrow[r, "f''"] & e \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

DEMOSTRACIÓN: POR SER (*) Y (**) PRODUCTOS FIBRADOS

$f\circ g' = g\circ f'$ y $h\circ f = f''\circ h'$

$(h\circ g)\circ f' = h\circ(g\circ f') = h\circ(f\circ g') = (h\circ f)\circ g' = (f''\circ h')\circ g' = f''\circ(h'\circ g')$

POR LO TANTO EL DIAGRAMA (***) CONMUTA.

SEAN $\alpha : n \longrightarrow b$ Y $\beta : n \longrightarrow m$ ∋ $h\circ g\circ\alpha = f''\circ\beta$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[rrd, bend left, "g\circ\alpha"] \arrow[rd, dashed, "\varphi"] \arrow[rdd, bend right, dashed, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"] \arrow[rd, phantom, "(**)"] & c \arrow[d, "h"] \\
& m \arrow[r, "f''"] & a
\end{tikzcd}$$

$h\circ g\circ\alpha = f''\circ\beta$ POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : n \longrightarrow a$ ∋ $h'\circ\varphi = \beta$ Y $f\circ\varphi = g\circ\alpha$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[rrd, bend left, "\alpha"] \arrow[rd, dashed, "\varphi'"] \arrow[rdd, bend right, "\varphi"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] \arrow[rd, phantom, "(*)"] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"] & c
\end{tikzcd}$$

$f\circ\varphi = g\circ\alpha$ POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi' : n \longrightarrow d$ ∋ $g'\circ\varphi' = \varphi$ Y $f'\circ\varphi' = \alpha$

POR LO TANTO EXISTE UN UNICO MORFISMO $\varphi' : n \longrightarrow d$ TAL QUE $f'\circ\varphi' = \alpha$ Y $h'\circ g'\circ\varphi' = \beta$ YA QUE:

$(h'\circ g')\circ\varphi' = h'\circ(g'\circ\varphi') = h'\circ\varphi = \beta$

POR LO TANTO (***) ES PRODUCTO FIBRADO

2) SI

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"', "(*)"] \arrow[d, "h'"] & c \arrow[d, "h"] \\
m \arrow[r, "f''"'] & e
\end{tikzcd}$$

Y

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"] \arrow[rd, phantom, "(**)"] & c \arrow[d, "h"] \\
m \arrow[r, "f''"'] & e
\end{tikzcd}$$

SON PRODUCTOS FIBRADOS ENTONCES

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

DEMOSTRACIÓN: POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO (*) CONMUTA

POR LO TANTO (***) CONMUTA, ES DECIR, $g\circ f' = f\circ g'$.

SEAN $\alpha: n \longrightarrow a$ Y $\beta: n \longrightarrow b$ $\ni$ $f\circ\alpha = g\circ\beta$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[dddr, bend right, dotted, "h'\circ\alpha"'] & & \\ & d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[d, "h"] \\ & m \arrow[r, "f''"] & e \end{tikzcd}$$

$$(h\circ g)\circ\beta = h\circ(g\circ\beta) = h\circ(f\circ\alpha) = (h\circ f)\circ\alpha$$

$$= (f''\circ h')\circ\alpha = f''\circ(h'\circ\alpha)$$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: n \longrightarrow d$ TAL QUE $f'\circ\varphi = \beta$ Y $h'\circ g'\circ\varphi = h'\circ\alpha$

$$f\circ(g'\circ\varphi) = (f\circ g')\circ\varphi = (g\circ f')\circ\varphi = g\circ(f'\circ\varphi) = g\circ\beta = f\circ\alpha$$

$$h'\circ(g'\circ\varphi) = h'\circ\alpha$$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO Y POR LA PROPOSICION 1.2.46 $g'\circ\varphi = \alpha$. POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: n \longrightarrow d$ TAL QUE $f'\circ\varphi = \beta$ Y $g'\circ\varphi = \alpha$. POR LO TANTO (***) ES PRODUCTO FIBRADO

COPRODUCTOS FIBRADOS

EL CONCEPTO DUAL DE PRODUCTO FIBRADO ES EL DE COPROducto fibrado, por lo tanto tenemos la siguiente definición

Definición 1.2.49 Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un coproducto fibrado de $\mathcal{C}$-morfismos $f:c \longrightarrow a$ y $g:c \longrightarrow b$ es un par de morfismos $f':b \longrightarrow d$ y $g':a \longrightarrow d$ $\ni$

i) $g'\circ f = f'\circ g$, y

ii) Propiedad universal: Si $h:a \longrightarrow e$ y $k:b \longrightarrow e$ son $\mathcal{C}$-morfismos tales que $h\circ f = k\circ g$, entonces existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $\varphi:d \longrightarrow e$ $\ni$ $\varphi\circ g' = h$ y $\varphi\circ f' = k$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "k"] & \\
a \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & d \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
 & & e
\end{tikzcd}$$

LIMITES Y COLIMITES

Las definiciones de objeto inicial, producto, igualador y producto fibrado tienen basicamente la misma forma. En cada caso el objeto definido tiene cierta propiedad canónica, y si cualquier otro objeto tiene dicha propiedad, este se factoriza atraves del anterior.

A esta clase de situación se le llama construccion universal. El objeto definido es universal con respecto a los objetos que tienen cierta propiedad.

Esta idea se puede precisar, considerando diagramas. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, un diagrama D en la categoría $\mathcal{C}$

ES UNA COLECCÍON DE $\mathcal{C}$-OBJETOS $d_i, d_j, \ldots$ CON ALGUNOS $\mathcal{C}$-MORFISMOS $g: d_i \longrightarrow d_j$ ENTRE CIERTOS OBJETOS DEL DIAGRAMA, ES POSIBLE QUE EXISTA MÁS DE UN MORFISMO ENTRE UN PAR DE OBJETOS O NINGUNO.

UN CONO PARA UN DIAGRAMA D, CONSISTE DE UN $\mathcal{C}$-OBJETO c Y UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $f_i : c \longrightarrow d_i$ PARA CADA $d_i \in D$

TAL QUE

$$\begin{tikzcd} d_i \arrow[rr, "g"] & & d_j \\ & c \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

CONMUTA SI $g \in D$

DENOTAREMOS POR $\{f_i : c \longrightarrow d_i\}$ A UN CONO DE D.

UN LÍMITE PARA UN DIAGRAMA D ES UN CONO $\{f_i : c \longrightarrow d_i\}$ DE D, CON LA SIGUIENTE PROPIEDAD UNIVERSAL: SI $\{f_i' : c' \longrightarrow d_i\}$ ES UN CONO DE D, ENTONCES EXISTE UN ÚNICO $\mathcal{C}$-MORFISMO $f : c' \longrightarrow c$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd} & d_i & \\ c' \arrow[ur, "f_i'"] \arrow[rr, "f"'] & & c \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

CONMUTA $\forall\, d_i \in D$

POR EL PRINCIPIO DE DUALIDAD UN COCONO $\{f_i : d_i \longrightarrow c\}$ DE UN DIAGRAMA D, CONSISTE DE UN OBJETO c Y MORFISMOS $f_i : d_i \longrightarrow c$ $\forall\, d_i \in D$. UN COLÍMITE PARA D ES UN COCONO $\{f_i : d_i \longrightarrow c\}$ CON LA SIGUIENTE PROPIEDAD UNIVERSAL: SI $\{f_i' : d_i \longrightarrow c\}$ ES UN COCONO ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $f : c \longrightarrow c'$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd} & d_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_i'"] & \\ C \arrow[rr, "f"'] & & C' \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall\, d_i \in D$

Definición 1.2.50.- Una categoría $\mathcal{C}$ se dice completa si todo diagrama en $\mathcal{C}$ tiene límite. Y cocompleta si todo diagrama en $\mathcal{C}$ tiene colímite.

Un diagrama finito es un diagrama con un número finito de objetos y un número finito de morfismos entre estos.

Definición 1.2.51.- Una categoría $\mathcal{C}$ se dice finitamente completa si todo diagrama finito en $\mathcal{C}$ tiene límite. Y finitamente cocompleta si todo diagrama finito en $\mathcal{C}$ tiene colímite.

Exponenciación

Sean A y B conjuntos, sea $B^A = \{ f \mid f : A \longrightarrow B$ es función$\}$. Asociado a B^A tenemos una función $ev : B^A \times A \longrightarrow B$ tal que $\forall\, f \in B^A$ y $x \in A$ $ev((f,x)) = f(x)$. ev es llamada función evaluación.

Sea C un conjunto y $g : C \times A \longrightarrow B$ una función. Si $y \in C$ entonces definimos $g_y \in B^A$ tal que $\forall x \in A$ $g_y(x) = g(y,x)$

Sea $\hat{g} : C \longrightarrow B^A$ tal que $\forall\, y \in C$ $\hat{g}(y) = g_y$, entonces $\hat{g}$ es tal que, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
B^A\times A \arrow[r, "ev"] & B \\
C\times A \arrow[u, "\hat{g}\times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

ES DECIR, $ev\circ(\hat{g}\times 1_A)=g$

SEA $(y,x)\in C\times A$ ENTONCES $ev((\hat{g}\times 1_A)(y,x)) = ev((\hat{g}(y), 1_A(x)))$

$$= ev(g_y, x) = g_y(x) = g(y,x)$$

SI EXISTE $h . C\longrightarrow B^A$ TAL QUE $ev\circ(h\times 1_A)=g$, ENTONCES

$ev((h\times 1_A)(y,x)) = ev((h(y), 1_A(x)) = ev(h(y),x)$

$$= h(y)(x) = g(y,x)) = g_y(x)$$

POR LO QUE $h(y)=g_y$, POR LO TANTO $h=\hat{g}$

ENTONCES DADA $g: C\times A\longrightarrow B$ EXISTE UNA ÚNICA FUNCIÓN $\hat{g}: C\longrightarrow B^A$ $\ni$ EL DIAGRAMA ANTERIOR CONMUTA.

DEFINICIÓN 1.2.52: UNA CATEGORÍA $\mathcal{C}$ TIENE EXPONENCIACIÓN SI EXISTE EL PRODUCTO DE CUALESQUIERA DOS OBJETOS, Y SI PARA CUALQUIER PAR DE $\mathcal{C}$-OBJETOS a y b EXISTE UN $\mathcal{C}$-OBJETO b^a Y UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $ev: b^a\times a\longrightarrow b$ LLAMADO MORFISMO EVALUACIÓN, TAL QUE, PARA CUALQUIER $\mathcal{C}$-OBJETO c Y $\mathcal{C}$-MORFISMO $g: c\times a\longrightarrow b$ EXISTE UN ÚNICO $\mathcal{C}$-MORFISMO $\hat{g}: c\longrightarrow b^a$ TAL QUE $ev\circ(\hat{g}\times 1_a)=g$, ES DECIR,

$$\begin{tikzcd}
b^a\times a \arrow[r, "ev"] & b \\
c\times a \arrow[u, dashed, "\hat{g}\times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.2.53: LA ASIGNACIÓN DE $\hat{g}$ PARA g ESTABLECE LA

BIYECCIÓN $\mathcal{C}(c\times a, b) \cong \mathcal{C}(c, b^a)$

DEMOSTRACIÓN: SEA $\varphi: \mathcal{C}(c\times a, b) \longrightarrow \mathcal{C}(c, b^a)$ TAL QUE SI $g: c\times a \longrightarrow b$ ENTONCES $\psi(g) = \hat{g}: c \to b^a$, ES DECIR, EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE $ev\circ(\hat{g}\times 1_a) = g$

SUPONGAMOS QUE $\varphi(g) = \varphi(h)$ ENTONCES $\hat{g} = \hat{h}$

$g = ev\circ(\hat{g}\times 1_a) = ev\circ(\hat{h}\times 1_a) = h$, POR LO TANTO $g = h$ ES DECIR, φ ES INYECTIVA.

SEA $h. c \longrightarrow b^a$, SEA $g: c\times a \longrightarrow b$ TAL QUE $g = ev\circ(h\times 1_a)$ POR LA UNICIDAD DE $\hat{g}$ $\hat{g} = h$, POR LO TANTO $\varphi(g) = \hat{g} = h$ Y φ ES SOBRE

ENTONCES φ ES UNA BIYECCIÓN Y $\mathcal{C}(c\times a, b) \cong \mathcal{C}(c, b^a)$

$\hat{g}$ ES LLAMADO EL ADJUNTO EXPONENCIAL DE g

PROPOSICIÓN 1.2.54- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON EXPONENCIACIÓN Y OBJETO INICIAL 0, ENTONCES.

1) $0 \cong 0\times a \quad \forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

2) SI EXISTE UN MORFISMO $a \longrightarrow 0$, ENTONCES $a \cong 0$.

3) SI $0 \cong 1$, ENTONCES $\mathcal{C}$ ES DEGENERADO, ES DECIR, TODOS LOS OBJETOS. SON ISOMORFOS.

4) $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ EL MORFISMO $0 \longrightarrow a$ ES MONOMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN:

1) SEAN $a, b \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. POR SER 0 OBJETO INICIAL EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $0 \longrightarrow b^a$, POR LO TANTO $\mathcal{C}(0, b^a)$ TIENE UN SOLO ELEMENTO, PERO $\mathcal{C}(0, b^a) \cong \mathcal{C}(0\times a, b)$ POR LO TANTO $\forall b \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $0\times a \longrightarrow b$. POR LO QUE $0\times a$ ES OBJETO INICIAL, PERO EL OBJETO INICIAL ES ÚNICO SALVO ISO·

MORFISMO, POR LO TANTO $0 \cong 0 \times a$.

2) SEA $f : a \longrightarrow 0$, CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, 1_a \rangle"] \arrow[dr, dashed, "1_a"] & \\
0 & 0 \times a \arrow[l, "p_0"'] \arrow[r, "p_a"] & a
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO EXISTE UN ÚNICO $\mathcal{C}$-MORFISMO $\langle f, 1_a \rangle : a \longrightarrow 0 \times a \ni p_a \circ \langle f, 1_a \rangle = 1_a$

$\langle f, 1_a \rangle \circ p_a : 0 \times a \longrightarrow 0 \times a$ POR SER $0 \times a$ OBJETO INICIAL EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $0 \times a \longrightarrow 0 \times a$ A SABER $1_{0 \times a}$, POR LO TANTO $\langle f, 1_a \rangle \circ p_a = 1_{0 \times a}$. ENTONCES p_a ES EL INVERSO DE $\langle f, 1_a \rangle$, POR LO TANTO $\langle f, 1_a \rangle : a \longrightarrow 0 \times a$ ES ISOMORFISMO Y $a \cong 0 \times a$, COMO $0 \times a \cong 0$ ENTONCES $a \cong 0$

3) SUPONGAMOS QUE $0 \cong 1$, ENTONCES EXISTE $\varphi : 1 \longrightarrow 0$ ISOMORFISMO. SEA $a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ POR SER 1 OBJETO TERMINAL EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $!_a : a \longrightarrow 1$. SEA $f : a \longrightarrow 0$ TAL QUE $f = \varphi \circ !_a$, ENTONCES $a \cong 0$, POR LO TANTO TODO OBJETO ES ISOMORFO A 0.

4) SEA $f : 0 \longrightarrow a$ Y $g, h : b \longrightarrow 0$ TAL QUE $f \circ g = f \circ h$. POR (2) $b \cong 0$, POR LO TANTO b ES OBJETO INICIAL, ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $b \longrightarrow 0$, POR LO TANTO $g = h$ Y f ES MONOMORFISMO.

SUBOBJETOS

SEAN A Y B CONJUNTOS TALES QUE $A \subseteq B$, LA FUNCIÓN INCLUSIÓN $i : A \hookrightarrow B$ ES INYECTIVA; SI $f : C \rightarrowtail B$ ES UNA FUNCIÓN INYECTIVA, ESTA DETERMINA UN SUBCONJUNTO DE B, A saber, $\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in C \}$.

Sea $\varphi : C \longrightarrow \operatorname{Im} f$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ $\forall x \in C$.

Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ entonces $f(x) = f(y)$. Por ser f inyectiva $x = y$, por lo tanto φ es inyectiva.

Si $z \in \operatorname{Im} f$, entonces $z = f(x)$ para alguna $x \in C$, por lo que $z = \varphi(x)$, por lo tanto φ es sobre.

Entonces $\varphi : C \longrightarrow \operatorname{Im} f$ es una biyección y $C \cong \operatorname{Im} f$ es decir, el dominio de una funcion inyectiva es isomorfo a un subconjunto del codominio.

Sea D un conjunto y $\mathcal{P}(D)$ el conjunto potencia de D, tal que $\mathcal{P}(D) = \{ A \mid A \subseteq D \}$. $(P(D), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y por lo tanto una categoría donde existe un morfismo $A \longrightarrow B$ si y sólo si $A \subseteq B$, cuando existe este morfismo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, hook] & \\
& D \\
A \arrow[uu, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 1.2.55.- Un subobjeto de un $\mathcal{C}$-objeto d es un $\mathcal{C}$-monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$.

Definición 1.2.56.- Si $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ son subobjetos de d, entonces decimos que $f \subseteq g$ si y sólo si existe un $\mathcal{C}$-morfismo $h : a \longrightarrow b$ tal que $g \circ h = f$. Es decir,

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, tail, "g"] & \\
& d \\
a \arrow[uu, dashed, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por la proposicion 1.2.2. h es monomorfismo

$\leq$ es llamada la relación de inclusión

Proposición 1.2.57. La relación de inclusión es reflexiva y transitiva.

Demostración:

i) Reflexiva: $f \leq f$ ya que existe $1_a : a \longrightarrow a > f \circ 1_a = f$

por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, tail, "f"] & \\
& d \\
a \arrow[uu, dashed, "1_a"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

ii) Transitiva: Supongamos que $f \leq g$ y $g \leq k$, entonces existen $h : a \longrightarrow b$ y $h' : b \longrightarrow c$ tales que $g \circ h = f$ y $k \circ h' = g$

sea $h' \circ h : a \longrightarrow c$ entonces $k \circ (h' \circ h) = (k \circ h') \circ h = g \circ h = f$

Por lo tanto $f \leq k$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, tail, "k"] & \\
b \arrow[u, dashed, "h'"] \arrow[r, tail, "g"'] & d \\
a \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.2.58.- SEAN $f: a \rightarrowtail d$, $g: b \rightarrowtail d$, SI $f \leq g$ Y $g \leq f$ ENTONCES $a \cong b$.

DEMOSTRACIÓN: SI $f \leq g$ Y $g \leq f$ ENTONCES EXISTEN $h: a \rightarrow b$ Y $k: b \rightarrow a$ TALES QUE $g \circ h = f$ Y $f \circ k = g$

$f \circ (k \circ h) = (f \circ k) \circ h = g \circ h = f = f \circ 1_a$ POR SER f MONOMORFISMO

$k \circ h = 1_a$

$g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k = f \circ k = g = g \circ 1_b$ POR SER g MONOMORFISMO

$h \circ k = 1_b$

ENTONCES k ES EL INVERSO DE h, POR LO TANTO $h. a \rightarrow b$ ES ISOMORFISMO Y $a \cong b$

DEFINICIÓN 1.2.59.- f Y g SUBOBJETOS DE d SON SUBOBJETOS ISOMORFOS $f \cong g$, SI SUS DOMINIOS SON ISOMORFOS. Y EL ISOMORFISMO h ES TAL QUE $g \circ h = f$

PARA QUE LA RELACIÓN DE INCLUSIÓN SEA ANTISIMÉTRICA NECESITAMOS QUE SI $f \simeq g$ ENTONCES $f = g$. PERO SE PUEDE DAR EL CASO DE QUE $a \cong b$ Y SIN EMBARGO $a \neq b$, POR LO TANTO, EN GENERAL $\subseteq$ ES UN PREORDEN Y NO UN ORDEN PARCIAL

PROPOSICIÓN 1.2.60.- $\simeq$ ES RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

DEMOSTRACIÓN:

i) REFLEXIVA: $f \simeq f$

$f \leq f$ Y $f \leq f$ POR LO TANTO $f \simeq f$

ii) SIMÉTRICA: SI $f \simeq g$ ENTONCES $g \simeq f$

Si $f \simeq g$ ENTONCES $f \leq g$ y $g \leq f$, POR LO TANTO $g \leq f$ y $f \leq g$, ES DECIR, $g \simeq f$

iii) TRANSITIVIDAD: Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$ ENTONCES $f \simeq h$

Si $f \simeq g$ ENTONCES $f \leq g$ y $g \leq f$

Si $g \simeq h$ ENTONCES $g \leq h$ y $h \leq g$

$f \leq g$ y $g \leq h \Rightarrow f \leq h$; $h \leq g$ y $g \leq f \Rightarrow h \leq f$

POR LO TANTO $f \simeq h$

ENTONCES CADA SUBOBJETO DE d $f : a \rightarrowtail d$ DETERMINA UNA CLASE DE EQUIVALENCIA $[f] = \{ g \mid f \simeq g \}$

SEA $Sub(d) = \{ [f] \mid f$ ES MONOMORFISMO CON $cod(f) = d \}$.

DEFINICIÓN 1.2.61.- AHORA LOS SUBOBJETOS DE d SON ELEMENTOS DE $Sub(d)$, ES DECIR, UNA CLASE DE EQUIVALENCIA.

DEFINIMOS AHORA UNA RELACIÓN DE INCLUSIÓN PARA LOS ELEMENTOS DE $sub(d)$ COMO: $[f] \leq [g]$ SI Y SÓLO SI $f \leq g$

PROPOSICIÓN 1.2.62.- Si $[f] = [f']$ y $[g] = [g']$, ENTONCES $f \leq g$ SI Y SÓLO SI $f' \leq g'$, ES DECIR, $\leq$ ESTÁ BIEN DEFINIDA Y ES INDEPENDIENTE DEL REPRESENTANTE QUE SE TOME.

DEMOSTRACIÓN: $[f] = [f'] \Rightarrow f \simeq f' \Rightarrow f \leq f'$ y $f' \leq f$

$[g] = [g'] \Rightarrow g \simeq g' \Rightarrow g \leq g'$ y $g' \leq g$

SUPONGAMOS QUE $f \leq g$, COMO $f' \leq f$ SE TIENE QUE $f' \leq g$ COMO $g \leq g'$ SE TIENE $f' \leq g'$

SUPONGAMOS QUE $f' \leq g'$, COMO $f \leq f'$ SE TIENE QUE $f \leq g'$ COMO $g' \leq g$ SE TIENE $f \leq g$.

PROPOSICIÓN 1.2.63.- LA RELACIÓN DE INCLUSIÓN $\leq$ SOBRE $Sub(d)$ ES UN ORDEN PARCIAL

DEMOSTRACIÓN:

i) REFLEXIVA: $[f] \leq [f]$

$f \leq f$ SI Y SÓLO SI $[f] \leq [f]$

ii) ANTISIMÉTRICA: SI $[f] \leq [g]$ Y $[g] \leq [f]$ ENTONCES $[f] = [g]$

$[f] \leq [g] \Leftrightarrow f \leq g$ Y $[g] \leq [f] \Leftrightarrow g \leq f$

$f \leq g$ Y $g \leq f \Rightarrow f \simeq g$, POR LO TANTO $[f] = [g]$

iii) TRANSITIVA: SI $[f] \leq [g]$ Y $[g] \leq [h]$ ENTONCES $[f] \leq [h]$

$[f] \leq [g] \Leftrightarrow f \leq g$ Y $[g] \leq [h] \Leftrightarrow g \leq h$

$f \leq g$ Y $g \leq h \Rightarrow f \leq h$, POR LO TANTO $[f] \leq [h]$

ENTONCES $(Sub(d), \leq)$ ES UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO.

PARA SIMPLIFICAR UN POCO LA NOTACIÓN, DIREMOS EL SUBOBJETO f EN LUGAR DEL SUBOBJETO $[f]$, Y $f \leq g$ EN LUGAR DE $[f] \leq [g]$.

SEA A UN CONJUNTO Y $x \in A$, x SE PUEDE IDENTIFICAR COMO LA INYECCIÓN $\{x\} \hookrightarrow A$, ES DECIR, UNA FUNCIÓN DEL OBJETO TERMINAL $\{x\}$ EN A. UNA FUNCIÓN $f: \{0\} \longrightarrow A$ DETERMINA UN OBJETO DE A

DEFINICIÓN 1.2.64.- SI $\mathcal{C}$ ES UNA CATEGORÍA CON OBJETO TERMINAL 1, ENTONCES UN ELEMENTO DE UN $\mathcal{C}$-OBJETO a ES UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $x: 1 \longrightarrow a$. POR LA PROPOSICIÓN 1.2.15 x ES MONOMORFISMO.

CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS

SEA $2=\{0,1\}$, D UN CONJUNTO Y $\mathcal{P}(D)$ SU CONJUNTO POTENCIA. $2^D \{f \mid f: D \longrightarrow 2\}$

SEA $\varphi: \mathcal{P}(D) \longrightarrow 2^D \ni$ SI $A \subseteq D$ $\varphi(A)=\chi_A : D \longrightarrow 2$ FUNCIÓN CARACTERÍSTICA TAL QUE $\forall x \in D$

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 1 & \text{SI } x \in A \\ 0 & \text{SI } x \notin A \end{cases}$$

SEAN $A, B \subseteq D$ SI $\varphi(A)=\varphi(B)$ ENTONCES $\chi_A=\chi_B$ Y $x \in A \iff \chi_A(x)=1=\chi_B(x) \iff x \in B$ $\therefore$ $A=B$

POR LO TANTO φ ES INYECTIVA

SEA $f: D \longrightarrow 2$, DEFINIMOS $A_f=\{x \in D \mid f(x)=1\}$

$\varphi(A_f)=\chi_{A_f}$

$$\chi_{A_f}(x)=\begin{cases} 1 & \text{SI } x \in A_f \text{, ES DECIR, SI } f(x)=1 \\ 0 & \text{SI } x \notin A_f \text{, ES DECIR, SI } f(x)=0 \end{cases}$$

POR LO TANTO $\chi_{A_f}(x)=f(x)$, ES DECIR, $\chi_{A_f}=f$

POR LO TANTO $\varphi(A_f)=f$ Y φ ES SOBRE

ENTONCES $\varphi : \mathcal{P}(D) \longrightarrow 2^D$ ES BIYECTIVA Y $\mathcal{P}(D) \cong 2^D$

ESTA CORRESPONDENCIA ENTRE SUBOBJETOS Y FUNCIÓN CARACTERÍSTICA ESTÁ DADA EN EL SIGUIENTE PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "!_A"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\
\{1\} \arrow[r, hook, "VER"'] & 2
\end{tikzcd}$$

DONDE $VER : \{1\} \longrightarrow \{0,1\}$ ES TAL QUE $VER(1)=1$

SEA $x \in A$ $\chi_A(i(x))=\chi_A(x)=1$, $VER(!(x))=VER(1)=1$

POR LO TANTO $\chi_A \circ i = VER \circ !_A$

Supongamos que existen $\alpha : B \longrightarrow D$ y $\beta : B \longrightarrow \{1\}$ tales que $VER \circ \beta = \mathcal{X}_A \circ \alpha$ como $\{1\}$ es objeto terminal $\beta = !_B$ y $\forall\, y \in B$ $!_B(y) = 1$

Si $y \in B$ entonces $\mathcal{X}_A(\alpha(y)) = 1$, por lo tanto $\alpha(y) \in A$

Sea $\varphi : B \longrightarrow A \ni \varphi(y) = \alpha(y)$, entonces

$!_A(\varphi(y)) = !_A(\alpha(y)) = 1 = !_B(y) = \beta(y)$, por lo tanto $!_A \circ \varphi = \beta$ y

$i(\varphi(y)) = i(\alpha(y)) = \alpha(y)$, por lo tanto $i \circ \varphi = \alpha$

Además si $\bar{\varphi} : B \longrightarrow A_f \ni i \circ \bar{\varphi} = \alpha$ entonces

$i(\bar{\varphi}(y)) = \bar{\varphi}(y) = \alpha(y)$, por lo tanto $\varphi = \bar{\varphi}$

Entonces el diagrama anterior es producto fibrado

Además $\mathcal{X}_A$ es la única función tal que $(*)$ es producto fibrado. Sea $f : D \longrightarrow 2$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "!_A"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & D \arrow[d, "f"] \\
\{1\} \arrow[r, "VER"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es producto fibrado

Sea $A_f = \{x \in D \mid f(x) = 1\}$ entonces $\mathcal{X}_{A_f} = f$. Sea $j : A_f \hookrightarrow D$

sea $x \in A$ entonces $f(i(x)) = f(x) = 1$, por lo tanto $x \in A_f$ y $A \subseteq A_f$. Por ser $(**)$ producto fibrado existe un único morfismo $k : A_f \longrightarrow A$ tal que $i \circ k = j$, por lo tanto k es inyección y $A_f \subseteq A$. Por lo que $A = A_f$ y

$\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A_f} = f$

Definición 1.2.65.- Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal 1, un clasificador de subobjetos para $\mathcal{C}$, es un $\mathcal{C}$-objeto

Ω Y UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $V: 1 \longrightarrow \Omega$ TAL QUE SATISFACE LA SIGUIENTE PROPIEDAD.

PROPIEDAD Ω : PARA TODO $\mathcal{C}$- MONOMORFISMO $f: a \rightarrowtail d$ EXISTE UN UNICO $\mathcal{C}$-MORFISMO $\chi_f : d \longrightarrow \Omega$ $\ni$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "1_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "V"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

PROPOSICIÓN 1.2.16: SI EXISTE UN CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS, ENTONCES ES ÚNICO SALVO ISOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEAN $V: 1 \longrightarrow \Omega$ Y $V': 1 \longrightarrow \Omega'$ CLASIFICADORES DE SUBOBJETOS, POR SER 1 OBJETO TERMINAL V Y V' SON MONOMORFISMOS CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "V"] \arrow[d, "1_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi'_V"] \\
1 \arrow[r, tail, "V'"] \arrow[d, "1_1"'] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{V'}"] \\
1 \arrow[r, tail, "V"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EL CUADRADO SUPERIOR ES PRODUCTO FIBRADO UTILIZANDO QUE V' ES CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS, POR LO TANTO $V' = \chi'_V \circ V$

EL CUADRADO INFERIOR ES PRODUCTO FIBRADO UTILIZANDO QUE V ES CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS, POR LO TANTO $V = \chi_{V'} \circ V'$

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO EXTERIOR

ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "v"'] \arrow[d, "1_1"'] & \Omega \arrow[d, "1_\Omega"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO YA QUE: $V \circ 1_1 = V = 1_\Omega \circ V$ Y SI $\alpha : a \longrightarrow \Omega$ Y $!a : a \longrightarrow 1$ SON TALES QUE $1_\Omega \circ \alpha = V \circ !a$ ENTONCES $\alpha = V \circ !_a$, POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $!a : a \longrightarrow 1$ TAL QUE $\alpha = V \circ !a$ Y $1_1 \circ !a = !a$

POR LA UNICIDAD DE LA PROPIEDAD Ω $\chi_{V'} \circ \chi'_V = 1_\Omega$

DE MANERA ANÁLOGA, INTERCAMBIANDO V Y V' TENEMOS QUE $\chi'_V \circ \chi_{V'} = 1_{\Omega'}$, POR LO TANTO $\chi_{V'} : \Omega' \longrightarrow \Omega$ ES ISOMORFISMO Y $\Omega' \cong \Omega$

COMO $V' = \chi'_V \circ V$ Y $V = \chi_{V'} \circ V'$, ENTONCES DOS CLASIFICADORES DE SUBOBJETOS SE PUEDEN OBTENER UNO DEL OTRO POR MEDIO DE LA COMPOSICIÓN CON UN ISOMORFISMO.

PROPOSICIÓN 1.1.67: SI $f : a \rightarrowtail d$ Y $g : b \rightarrowtail d$ ENTONCES $\chi_f = \chi_g$ SI Y SÓLO SI $f \simeq g$

SUPONGAMOS QUE $\chi_f = \chi_g$ Y CONSIDEREMOS EL DIAGRAMA.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rrd, tail, bend left, "g"] \arrow[rdd, dashed, bend right, "!_b"'] & & \\ & a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!a"'] & d \arrow[d, dashed, "\chi_f = \chi_g"] \\ & 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

EL CUADRADO EXTERIOR Y EL CUADRADO INTERIOR SON PRODUCTOS FIBRADOS, POR LO TANTO EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS $k : b \longrightarrow a$ Y $h : a \longrightarrow b$ TALES QUE $f \circ k = g$ Y $g \circ h = f$, POR LO TANTO $g \subseteq f$ Y $f \subseteq g$ ES DECIR $f \simeq g$

SUPONGAMOS QUE $f \simeq g$, ENTONCES EXISTE $k : b \longrightarrow a$ ISO-

MORFISMO TAL QUE $f \circ k = g$ Y $g \circ k^{-1} = f$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_b"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\chi_f \circ g = \chi_f \circ (f \circ k) = (\chi_f \circ f) \circ k = (v \circ !_a) \circ k$
$= v \circ (!_a \circ k) = v \circ !_b$. POR LO TANTO (**) CONMUTA

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\alpha : c \longrightarrow d$ Y $!c : c \longrightarrow 1$ TALES QUE $\chi_f \circ \alpha = v \circ !c$ POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : c \longrightarrow a$ TAL QUE $!_a \circ \varphi = !_c$ Y $f \circ \varphi = \alpha$. ENTONCES $k^{-1} \circ \varphi : c \longrightarrow b$ Y $g \circ (k^{-1} \circ \varphi) = (g \circ k^{-1}) \circ \varphi = f \circ \varphi = \alpha$ Y $!_b \circ (k^{-1} \circ \varphi) = !_c$.

SUPONGAMOS QUE $\bar{\varphi} : c \longrightarrow b$ ES TAL QUE $g \circ \bar{\varphi} = \alpha$ ENTONCES $g \circ \bar{\varphi} = g \circ (k^{-1} \circ \varphi)$ POR SER g MONOMORFISMO $\bar{\varphi} = k^{-1} \circ \varphi$
POR LO TANTO (**) ES PRODUCTO FIBRADO Y POR LA UNICIDAD DE LA PROPIEDAD Ω $\chi_f = \chi_g$

PROPOSICIÓN 1.2.68.- $\mathrm{Sub}(d) \cong \mathcal{C}(d, \Omega)$

DEMOSTRACIÓN: SEA $\varphi : \mathrm{sub}(d) \longrightarrow \mathcal{C}(d, \Omega)$ TAL QUE SI $f : a \rightarrowtail d$ ENTONCES $\varphi(f) = \chi_f$, ES DECIR, EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

Si $\varphi(f) = \varphi(g)$ entonces, $\chi_f = \chi_g$, así que $f \simeq g$ por lo tanto $[f] = [g]$ y φ es inyectiva

Sea $h: d \longrightarrow \Omega$, sea el siguiente diagrama el producto fibrado de h sobre $V: 1 \rightarrowtail \Omega$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, tail, "V"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como V es monomorfismo por la proposición 1.2.47 f es monomorfismo. Por lo tanto $h = \chi_f$ Entonces existe $f \in \mathrm{Sub}(d)$ tal que $\varphi(f) = \chi_f = h$ y φ es sobre

Por lo tanto $\varphi : \mathrm{Sub}(d) \longrightarrow \mathcal{C}(d, \Omega)$ es isomorfismo y

$\mathrm{Sub}(d) \cong \mathcal{C}(d, \Omega)$

CAPITULO 2

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE TOPOS

SECCION 1.-

La categoría mas común es la categoría Conj, cuyos objetos son conjuntos y sus morfismos son funciones entre conjuntos. Aquí los conceptos matemáticos fundamentales, tales como, funcion, relacion, se les da una descripción formal. Las operaciones y características básicas de la teoría de conjuntos, tales como, conjunto vacío, intersección, función inyectiva, etcetera; pueden ser descritas en referencia a morfismos en Conj, y estas descripciones pueden interpretarse en toda categoría. Sin embargo los axiomas de categoría son débiles, en el sentido de que se satisfacen en contextos que difieren exageradamente de los ejemplos citados anteriormente. En tales contextos la interpretación de nociones de la teoría de conjuntos puede comportarse en forma muy diferente a las contrapartes correspondientes en Conj.

Entonces uno se puede preguntar, ¿ hasta donde se puede evadir esta situación ? es decir, ¿ cuando una categoría se comporta como la categoría Conj ?. Una respuesta un poco vaga es, cuando la categoría es al menos un topo. Esto nos da una primera indicación de lo que es un topo; es una categoría cuya estructura es suficientemente parecida a la de Conj.

La palabra "topos" fue usada originalmente por Alexander Grothendieck en al contexto de la geometría algebraica, aquí existe una noción llamada "haz" sobre un espacio topológico. La colección de haces sobre un espacio topológico forman una categoría. A esta categoría Grothendieck la llamó topo.

En 1969, Myles Tierney y Lawvere, estudiaron a las categorías que tenían un morfismo especial, llamado clasificador de subobjetos. Lawvere descubrió que los topos de Grothendieck todos tenían clasificador de subobjetos, y por lo tanto tomo el mismo nombre. El resultado es el concepto axiomatico de topo elemental, formulado en el lenguaje de categorías e independiente de la teoría de conjuntos.

Definición de topo

Definición 2.1.1.- Un topo elemental es una categoría $\mathcal{E}$ tal que

1') $\mathcal{E}$ es finitamente completa,

2') $\mathcal{E}$ es finitamente cocompleta,

3') $\mathcal{E}$ tiene exponenciación, y

4') $\mathcal{E}$ tiene clasificador de subobjetos.

Proposición 2.1.2.- Si $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto terminal y productos fibrados entonces $\mathcal{C}$ es finitamente completa.

No daremos la demostración de esta proposición, la cual

SE PUEDE ENCONTRAR EN HERRLICH Y STRECKER, TEOREMA 23.7, SIN EMBARGO DEMOSTRAREMOS QUE SI $\mathcal{C}$ TIENE OBJETO TERMINAL Y PRODUCTOS FIBRADOS ENTONCES $\mathcal{C}$ TIENE PRODUCTOS E IGUALADORES:

SEA 1 OBJETO TERMINAL DE $\mathcal{C}$ Y $a, b \in Ob(\mathcal{C})$, POR LO TANTO EXISTEN MORFISMOS ÚNICOS $!_a : a \longrightarrow 1$ Y $!_b : b \longrightarrow 1$

SEA

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "P_a"] \arrow[d, "P_b"] & a \arrow[d, "!_a"] \\
b \arrow[r, "!_b"] & 1
\end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE $!_a$ SOBRE $!_b$

SUPONGAMOS QUE $\alpha : c \longrightarrow a$ Y $\beta : c \longrightarrow b$

$!_a \circ \alpha : c \longrightarrow 1$ Y $!_b \circ \beta : c \longrightarrow 1$ POR SER 1 OBJETO TERMINAL $!_a \circ \alpha = !_b \circ \beta$. POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle \alpha, \beta \rangle : c \longrightarrow P$ TAL QUE $P_a \circ \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha$ Y $P_b \circ \langle \alpha, \beta \rangle = \beta$

POR LO TANTO $(P, P_a : P \longrightarrow a, P_b : P \longrightarrow b)$ ES EL PRODUCTO DE a Y b

SEAN $f, g : a \longrightarrow b$ SEA $(a \times b, P_a : a \times b \longrightarrow a, P_b : a \times b \longrightarrow b)$ EL PRODUCTO DE a Y b

CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[d, dashed, "\langle 1_a, f \rangle"] \arrow[dr, "f"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[d, dashed, "\langle 1_a, g \rangle"] \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE a Y b EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS $\langle 1_a, f \rangle, \langle 1_a, g \rangle : a \longrightarrow a \times b$ TALES QUE

$P_a \circ \langle 1_a, f \rangle = 1_a$, $P_b \circ \langle 1_a, f \rangle = f$ Y $P_a \circ \langle 1_a, g \rangle = 1_a$, $P_b \circ \langle 1_a, g \rangle = g$

SEA

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & a \arrow[d, "\langle 1_a, g\rangle"'] \\ a \arrow[r, "\langle 1_a, f\rangle"'] & a \times b \end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE $\langle 1_a, g\rangle$ SOBRE $\langle 1_a, f\rangle$

POR LO TANTO $\langle 1_a, f\rangle \circ p = \langle 1_a, g\rangle \circ q$

$q = 1_a \circ q = P_a \circ \langle 1_a, g\rangle \circ q = P_a \circ \langle 1_a, f\rangle \circ p = 1_a \circ p = p$

$f \circ p = P_b \circ \langle 1_a, f\rangle \circ p = P_b \circ \langle 1_a, g\rangle \circ q = g \circ q = g \circ p$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $h : c \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ h = g \circ h$

$\langle 1_a, g\rangle \circ h = \langle 1_a \circ h, g \circ h\rangle = \langle 1_a \circ h, f \circ h\rangle = \langle 1_a, f\rangle \circ h$

POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k : c \longrightarrow e$ TAL QUE $p \circ k = h$

POR LO TANTO $(e, p : e \longrightarrow a)$ ES EL IGUALADOR DE f Y g.

POR EL PRINCIPIO DE DUALIDAD TENEMOS LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN:

SI $\mathcal{E}$ ES UNA CATEGORÍA CON OBJETO INICIAL Y COPRODUCTOS FIBRADOS, ENTONCES $\mathcal{E}$ ES FINITAMENTE COCOMPLETA.

POR LO TANTO LA DEFINICION ANTERIOR ES EQUIVALENTE A LA SIGUIENTE

UN TOPO ELEMENTAL $\mathcal{E}$ ES UNA CATEGORÍA TAL QUE

1') $\mathcal{E}$ TIENE OBJETO TERMINAL Y PRODUCTOS FIBRADOS,

2') $\mathcal{E}$ TIENE OBJETO INICIAL Y COPRODUCTOS FIBRADOS,

3') $\mathcal{E}$ TIENE EXPONENCIACIÓN, Y

4') $\mathcal{E}$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS.

ESTA DEFINICIÓN, FUE LA PRIMERA PROPUESTA POR LAWVERE Y TIERNEY EN 1969. POSTERIORMENTE C. JUUL MIKKELSEN DESCUBRIÓ QUE LA CONDICIÓN (2') ERA IMPLICADA POR LA CONJUNCIÓN DE LAS

CONDICIONES (1'), (3') y (4'). DANDO LA SIGUIENTE DEFINICION:

DEFINICION 2.1.2.- UN TOPO ELEMENTAL ES UNA CATEGORÍA $\mathcal{E}$ TAL QUE

1) $\mathcal{E}$ TIENE OBJETO TERMINAL,
2) $\mathcal{E}$ TIENE PRODUCTOS FIBRADOS,
3) $\mathcal{E}$ TIENE EXPONENCIACIÓN, Y
4) $\mathcal{E}$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS.

EJEMPLOS <u>BÁSICOS</u>

1.- $\mathcal{C}on$ ES UN TOPO

1) TODO CONJUNTO CON UN SÓLO ELEMENTO ES OBJETO TERMINAL

SEA $\{0\}$ UN CONJUNTO CON UN ÚNICO ELEMENTO Y A UN CONJUNTO CUALQUIERA. SEA $f: A \longrightarrow \{0\} \ni \forall x \in A \quad f(x)=0$, COMO EL CODOMINIO DE f TIENE UN ELEMENTO, f ES LA ÚNICA FUNCIÓN DE A EN $\{0\}$

2) $\mathcal{C}on$ TIENE PRODUCTOS FIBRADOS. (VER PAGINA 38)

3) $\mathcal{C}on$ TIENE EXPONENCIACIÓN. (VER PAGINA 41)

4) $\mathcal{C}on$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS (VER PAGINA 56)

2.- SI $\mathcal{E}_1$ Y $\mathcal{E}_2$ SON TOPOS ENTONCES $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ ES UN TOPO.

1) SEAN $1_1, 1_2$ LOS OBJETOS TERMINALES DE $\mathcal{E}_1$ Y $\mathcal{E}_2$ RESPECTIVAMENTE. $(1_1, 1_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ ES OBJETO TERMINAL.

SEA $(a_1, a_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ ENTONCES $a_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$ Y $a_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$ POR LO TANTO EXISTEN MORFISMOS ÚNICOS $!a_1 : a_1 \longrightarrow 1_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ Y $!a_2 : a_2 \longrightarrow 1_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$. ENTONCES EXISTE UN UNICO $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$-MORFISMO $(!a_1, !a_2) : (a_1, a_2) \longrightarrow (1_1, 1_2)$

EN GENERAL SI $f_1 : a_1 \longrightarrow b_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ Y $f_2 : a_2 \longrightarrow b_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$ SON ÚNICOS, ENTONCES $(f_1, f_2) : (a_1, a_2) \longrightarrow (b_1, b_2)$ ES UNICO

EN $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$. YA QUE SI $(g_1, g_2) : (a_1, a_2) \longrightarrow (b_1, b_2)$ ENTONCES $g_1 : a_1 \longrightarrow b_1$ Y $g_2 : a_2 \longrightarrow b_2$ PERO POR SER f_1 Y f_2 ÚNICOS $f_1 = g_1$ Y $f_2 = g_2$, POR LO TANTO $(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$

2) SEAN $(f_1, f_2) : (a_1, a_2) \longrightarrow (c_1, c_2)$ Y $(g_1, g_2) : (b_1, b_2) \longrightarrow (c_1, c_2)$ MORFISMOS EN $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, ENTONCES $f_1 : a_1 \longrightarrow c_1$, $g_1 : b_1 \longrightarrow c_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ Y $f_2 : a_2 \longrightarrow c_2$, $g_2 : b_2 \longrightarrow c_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$

SEAN LOS SIGUIENTES PRODUCTOS FIBRADOS EN $\mathcal{E}_1$ Y $\mathcal{E}_2$ RESPECTIVAMENTE

$$\begin{tikzcd}
d_1 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d, "g_1'"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_1 \arrow[r, "f_1"'] & c_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d_2 \arrow[r, "f_2'"] \arrow[d, "g_2'"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
a_2 \arrow[r, "f_2"'] & c_2
\end{tikzcd}$$

$(f_1', f_2') : (d_1, d_2) \longrightarrow (b_1, b_2)$, $(g_1', g_2') : (d_1, d_2) \longrightarrow (a_1, a_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$

ENTONCES.

$$\begin{tikzcd}
(d_1, d_2) \arrow[r, "(f_1', f_2')"] \arrow[d, "(g_1', g_2')"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & (b_1, b_2) \arrow[d, "(g_1, g_2)"] \\
(a_1, a_2) \arrow[r, "(f_1, f_2)"'] & (c_1, c_2)
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$

$$(g_1, g_2) \circ (f_1', f_2') = (g_1 \circ f_1', g_2 \circ f_2') = (f_1 \circ g_1', f_2 \circ g_2') = (f_1, f_2) \circ (g_1', g_2')$$

POR LO TANTO (***) CONMUTA.

SEAN $(\alpha_1, \alpha_2) : (a_1, e_2) \longrightarrow (b_1, b_2)$ Y $(\beta_1, \beta_2) : (e_1, e_2) \longrightarrow (a_1, a_2) \ni$

$$(g_1, g_2) \circ (\alpha_1, \alpha_2) = (f_1, f_2) \circ (\beta_1, \beta_2) \quad \text{ENTONCES}$$

$(g_1 \circ \alpha_1, g_2 \circ \alpha_2) = (f_1 \circ \beta_1, f_2 \circ \beta_2)$ POR LO TANTO $g_1 \circ \alpha_1 = f_1 \circ \beta_1$ Y $g_2 \circ \alpha_2 = f_2 \circ \beta_2$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi_1 : e_1 \longrightarrow d_1$

TAL QUE $f_1' \circ \varphi_1 = \alpha_1$ Y $g_1' \circ \varphi_1 = \beta_1$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\varphi_2 : c_2 \longrightarrow d_2$ TAL QUE $f_2' \circ \varphi_2 = \alpha_2$ Y $g_2' \circ \varphi_2 = \beta_2$

POR LO TANTO $(\varphi_1, \varphi_2) : (c_1, c_2) \longrightarrow (d_1, d_2)$ ES EL ÚNICO MORFISMO

TAL QUE $(f_1' \; f_2') \circ (\varphi_1, \varphi_2) = (f_1' \circ \varphi_1 , f_2' \circ \varphi_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ Y

$$(g_1', g_2') \circ (\varphi_1, \varphi_2) = (g_1' \circ \varphi_1 , g_2' \circ \varphi_2) = (\beta_1, \beta_2)$$

POR LO TANTO (***) ES PRODUCTO FIBRADO.

3) SEAN $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$

$$(b_1, b_2)^{(a_1, a_2)} = \{ (f_1, f_2) : (a_1, a_2) \longrightarrow (b_1, b_2) \}$$

POR LO TANTO $(b_1, b_2)^{(a_1, a_2)} = (b_1^{a_1}, b_2^{a_2})$

SEAN $ev_1 : b_1^{a_1} \times a_1 \longrightarrow b_1$ EL MORFISMO EVALUACION DE $\mathcal{E}_1$ Y

$ev_2 : b_2^{a_2} \times a_2 \longrightarrow b_2$ EL MORFISMO EVALUACION DE $\mathcal{E}_2$

$$(b_1^{a_1} \times a_1 , \; b_2^{a_2} \times a_2) = (b_1^{a_1}, b_2^{a_2}) \times (a_1, a_2) = (b_1, b_2)^{(a_1, a_2)} \times (a_1, a_2)$$

POR LO TANTO $(ev_1, ev_2) : (b_1, b_2)^{(a_1, a_2)} \times (a_1, a_2) \longrightarrow (b_1, b_2)$ ES EL MORFISMO EVALUACIÓN EN $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$

SI $(g_1, g_2) : (c_1, c_2) \times (a_1, a_2) \longrightarrow (b_1, b_2)$ ENTONCES $g_1 : c_1 \times a_1 \longrightarrow b_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$

Y $g_2 : c_2 \times a_2 \longrightarrow b_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$

POR LO TANTO EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS $\bar{g}_1 : c_1 \longrightarrow b_1^{a_1} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ Y

$\bar{g}_2 : c_2 \longrightarrow b_2^{a_2} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$ TALES QUE $ev_1 \circ (\bar{g}_1 \times 1_{a_1}) = g_1$ Y $ev_2 \circ (\bar{g}_2 \times 1_{a_2}) = g_2$

POR LO TANTO $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) : (c_1, c_2) \longrightarrow (b_1, b_2)^{(a_1, a_2)}$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$(ev_1, ev_2) \circ ((\bar{g}_1, \bar{g}_2) \times (1_{a_1}, 1_{a_2})) = (ev_1, ev_2) \circ (\bar{g}_1 \times 1_{a_1}, \bar{g}_2 \times 1_{a_2})$$

$$= (ev_1 \circ (\bar{g}_1 \times 1_{a_1}), \; ev_2 \circ (\bar{g}_2 \times 1_{a_2})) = (g_1, g_2)$$

POR LO TANTO $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ TIENE EXPONENCIACIÓN

4) SEAN $\Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$ Y $V_1 : 1_1 \longrightarrow \Omega_1$ EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS EN $\mathcal{E}_1$ Y, $\Omega_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$ Y $V_2 : 1_2 \longrightarrow \Omega_2$ EL CLASI-

FICADOR DE SUBOBJETOS EN $\mathcal{E}_2$.

$(\Omega_1,\Omega_2)\in\mathcal{O}(\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_2)$ Y $(V_1,V_2):(1_1,1_2)\longrightarrow(\Omega_1,\Omega_2)$ ES EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS EN $\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_2$

SEA $(f_1,f_2):(a_1,a_2)\rightarrowtail(d_1,d_2)$ UN MONOMORFISMO, ENTONCES SI $\alpha_1,\beta_1:c_1\longrightarrow a_1\in\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ SON TALES QUE $f_1\circ\alpha_1=f_1\circ\beta_1$ Y $\alpha_2,\beta_2:c_2\longrightarrow a_2\in\mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$ SON TALES QUE $f_2\circ\alpha_2=f_2\circ\beta_2$ ENTONCES $(f_1,f_2)\circ(\alpha_1,\alpha_2)=(f_1\circ\alpha_1,f_2\circ\alpha_2)=(f_1\circ\beta_1,f_2\circ\beta_2)=(f_1,f_2)\circ(\beta_1,\beta_2)$ POR SER (f_1,f_2) MONOMORFISMO $(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2)$ Y POR LO TANTO $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$ Y f_1 Y f_2 SON MONOMORFISMOS.

POR LO TANTO EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS $\chi_{f_1}:d_1\longrightarrow\Omega_1$ Y $\chi_{f_2}:d_2\longrightarrow\Omega_2$ EN $\mathcal{E}_1$ Y $\mathcal{E}_2$ RESPECTIVAMENTE, TALES QUE LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, tail, "f_1"] \arrow[d, "!_{a_1}"'] & d_1 \arrow[d, "\chi_{f_1}"] \\
1_1 \arrow[r, tail, "V_1"'] & \Omega_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_2 \arrow[r, tail, "f_2"] \arrow[d, "!_{a_2}"'] & d_2 \arrow[d, "\chi_{f_2}"] \\
1_2 \arrow[r, tail, "V_2"'] & \Omega_2
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $(\chi_{f_1},\chi_{f_2}):(d_1,d_2)\longrightarrow(\Omega_1,\Omega_2)$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
(a_1,a_2) \arrow[r, tail, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[d, "{(!_{a_1},!_{a_2})}"'] & (d_1,d_2) \arrow[d, "{(\chi_{f_1},\chi_{f_2})}"] \\
(1_1,1_2) \arrow[r, "{(V_1,V_2)}"'] & (\Omega_1,\Omega_2)
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_2$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS

3.- $\overrightarrow{\mathcal{C}on}$, LA CATEGORÍA DE FUNCIONES ES UN TOPO

1) EL OBJETO TERMINAL EN $\overrightarrow{\mathcal{C}on}$ ES LA FUNCIÓN $1_{\{0\}}:\{0\}\longrightarrow\{0\}$

DONDE $\{0\}$ ES EL OBJETO TERMINAL EN Con.

SEA $f: A \to B \in \mathcal{O}(\vec{Con})$, POR LO TANTO EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS

$!_A : A \to \{0\}$ Y $!_B : B \to \{0\}$ EN Con

$!_B \circ f : A \to \{0\}$ POR LO TANTO $!_B \circ f = !_A = 1_{\{0\}} \circ !_A$

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, "f"'] & \{0\} \arrow[d, "1_{\{0\}}"] \\
B \arrow[r, "!_B"'] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $(!_A, !_B) : (A \xrightarrow{f} B) \to (\{0\} \xrightarrow{1_{\{0\}}} \{0\})$ ES EL ÚNICO MORFISMO DE f EN $1_{\{0\}}$

2) SEAN $(i, j) : (A \xrightarrow{f} B) \to (E \xrightarrow{g} F)$ Y

$(p, q) : (C \xrightarrow{h} D) \to (E \xrightarrow{g} F) \in \mathcal{M}(\vec{Con})$

POR LO TANTO $i : A \to E$, $j : B \to F$, $p : C \to E$ Y $q : D \to F \in \mathcal{M}(Con)$

Y LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS CONMUTAN

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "j"'] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "q"'] & F
\end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE (i, j) SOBRE (p, q) SE FORMAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

SEAN LOS SIGUIENTES LOS PRODUCTOS FIBRADOS DE p SOBRE i Y DE q SOBRE j EN Con

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & C \arrow[d, dashed, "p"] \\
A \arrow[r, "i"'] & E
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "s"] \arrow[d, dash, "v"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & D \arrow[d, "q"] \\
B \arrow[r, dash, "j"'] & F
\end{tikzcd}$$

$h\circ r : P \longrightarrow D$ Y $f\circ u : P \longrightarrow B$

$$q\circ(h\circ r) = (q\circ h)\circ r = g\circ p)\circ r = g\circ(p\circ r) = g\circ(i\circ u) = (g\circ i)\circ u$$
$$= (j\circ f)\circ u = j\circ(f\circ u)$$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$K: P \longrightarrow Q$ TAL QUE $s\circ k = h\circ r$ Y $v\circ k = f\circ u$

POR LO TANTO
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ Q \arrow[r, "v"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "h"] \\ Q \arrow[r, "s"] & D \end{tikzcd}$$
CONMUTAN

Y $(u,v):(P\xrightarrow{k}Q)\longrightarrow(A\xrightarrow{f}B)$, $(r,s):(P\xrightarrow{k}Q)\longrightarrow(C\xrightarrow{h}D)\in\mathcal{M}(\overrightarrow{Con})$

$$\begin{tikzcd} (P\xrightarrow{k}Q) \arrow[r, "{(u,v)}"] \arrow[d, "{(r,s)}"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & (A\xrightarrow{f}B) \arrow[d, "{(i,j)}"] \\ (C\xrightarrow{h}D) \arrow[r, dashed, "{(p,q)}"'] & (E\xrightarrow{g}F) \end{tikzcd}$$

ES EL PRODUCTO FIBRADO BUSCADO

$(i,j)\circ(u,v) = (i\circ u, j\circ v) = (p\circ r, q\circ s) = (p,q)\circ(r,s)$

SEAN $(\alpha,\beta):(\bar{A}\xrightarrow{\bar{f}}\bar{B})\longrightarrow(A\xrightarrow{f}B)$ Y

$(\gamma,\delta):(\bar{A}\xrightarrow{\bar{f}}\bar{B})\longrightarrow(C\xrightarrow{h}D)\in\mathcal{M}(\overrightarrow{Con})\ni(i,j)\circ(\alpha,\beta)=(p,q)\circ(\gamma,\delta)$

ENTONCES $(i\circ\alpha, j\circ\beta) = (p\circ\gamma, q\circ\delta)$, POR LO TANTO $i\circ\alpha = p\circ\gamma$ Y $j\circ\beta = q\circ\delta$

Y
$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ \bar{B} \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}"'] & C \arrow[d, "h"] \\ \bar{B} \arrow[r, "\delta"] & D \end{tikzcd}$$
CONMUTAN

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\varphi : \bar{A} \longrightarrow P$ TAL QUE $r\circ\varphi = \gamma$ Y $u\circ\varphi = \alpha$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\psi : \bar{B} \longrightarrow Q$ TAL QUE $s \circ \psi = \delta$ Y $v \circ \psi = \beta$

$$v \circ (k \circ \varphi) = (v \circ k) \circ \varphi = (f \circ u) \circ \varphi = f \circ (u \circ \varphi) = f \circ \alpha = \beta \circ \bar{F}$$

$$= (v \circ \psi) \circ \bar{F} = v \circ (\psi \circ \bar{F})$$

$$s \circ (k \circ \varphi) = (s \circ k) \circ \varphi = (h \circ r) \circ \varphi = h \circ (r \circ \varphi) = h \circ \gamma = \delta \circ \bar{F}$$

$$= (s \circ \psi) \circ \bar{F} = s \circ (\psi \circ \bar{F})$$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.46 $k \circ \varphi = \psi \circ \bar{F}$

POR LO TANTO $(\varphi, \psi) : (\bar{A} \xrightarrow{\bar{F}} \bar{B}) \longrightarrow (P \xrightarrow{k} Q) \in \mathcal{M}(\overrightarrow{Can})$

Y ES EL UNICO MORFISMO TAL QUE

$$(r, s) \circ (\varphi, \psi) = (r \circ \varphi, s \circ \psi) = (\gamma, \delta)$$

$$(u, v) \circ (\varphi, \psi) = (u \circ \varphi, v \circ \psi) = (\alpha, \beta)$$

POR LO TANTO (∗∗∗) ES PRODUCTO FIBRADO EN $\overrightarrow{Can}$

3) SEAN $f : A \longrightarrow B$ Y $g : C \longrightarrow D \in \mathcal{O}(\overrightarrow{Can})$

SEA $g^f : E \longrightarrow F \in \mathcal{O}(\overrightarrow{Can})$ TAL QUE, E ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS MORFISMOS EN $\overrightarrow{Can}$ CON DOMINIO f Y CODOMINIO g

ES DECIR, $E = \{ (h, k) \mid$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

CONMUTA. $\}$

Y $F = D^B$ LA EXPONENCIACION EN Can. Y $g^f((h, k)) = k$

EL MORFISMO EVALUACIÓN ES $(u, v) : g^f \times f \longrightarrow g$,.

$v : D^B \times B \longrightarrow D$ MORFISMO EVALUACION EN Can Y

$u : E \times A \longrightarrow C$, $u((h, k), x) = h(x)$

SEA $((h, k), x) \in E \times A$ ENTONCES $g(u((h, k), x)) = g(h(x)) = k(f(x))$

$$= v((g^f \times f)((h, k), x)) = v((g^f \circ P_E, f \circ P_A)((h, k), x))$$

$$= v(g^f((h, k)), f(x)) = v(k, f(x)) = k(f(x))$$

POR LO TANTO $(u, v) : g^f \times f \longrightarrow g \in \mathcal{M}(\overrightarrow{Can})$

ES DECIR

$$\begin{tikzcd} E \times A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g^F \times F"'] & C \arrow[d, "g"] \\ D^B \times B \arrow[r, "v"] & D \end{tikzcd}$$

CONMUTA.

SEA $\bar{F} : \bar{A} \longrightarrow \bar{B} \in \mathcal{O}(\overrightarrow{Con})$ Y $(\alpha, \beta) : (\bar{A} \times A \xrightarrow{\bar{F} \times F} \bar{B} \times B) \longrightarrow (C \xrightarrow{g} D)$ $\in \mathcal{M}(\overrightarrow{Con})$

POR TANTO

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \times A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\bar{F} \times F"'] & C \arrow[d, "g"] \\ \bar{B} \times B \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

CONMUTA.

POR TENER Con EXPONENCIACIÓN EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\hat{\beta} : \bar{B} \longrightarrow D^B$ TAL QUE $v \circ (\hat{\beta} \times 1_B) = \beta$

SEA $\alpha(y, -) : A \longrightarrow C$ TAL QUE $\alpha(y, -)(x) = \alpha(y, x)$

SEA $\hat{\alpha} : \bar{A} \longrightarrow E$ TAL QUE $\forall y \in \bar{A}$ $\hat{\alpha}(y) = (\alpha(y, -), (\hat{\beta} \circ \bar{F})(y))$

$$(u \circ (\hat{\alpha} \times 1_A))(y, x) = u \circ (\hat{\alpha}(y), x) = u \circ ((\alpha(y, -), (\hat{\beta} \circ \bar{F}(y)), x)$$

$$= \alpha(y, -)(x) = \alpha(y, x)$$

POR LO TANTO $u \circ (\hat{\alpha} \times 1_A) = \alpha$. SI $y \in \bar{A}$ ENTONCES

$$g^F(\hat{\alpha}(y)) = g^F(\alpha(y, -), (\hat{\beta} \circ \bar{F})(y)) = (\hat{\beta} \circ \bar{F})(y)$$

POR LO TANTO $g^F \circ \hat{\alpha} = \hat{\beta} \circ \bar{F}$

ES DECIR,

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\hat{\alpha}"] \arrow[d, "\bar{F}"'] & E \arrow[d, "g^F"] \\ \bar{B} \arrow[r, "\hat{\beta}"'] & D^B \end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) : \bar{F} \longrightarrow g^F \in \mathcal{M}(\overrightarrow{Con})$

$$(u, v) \circ ((\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \times 1_F) = (u, v) \circ ((\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \times (1_A, 1_B))$$

$$= (u, v) \circ (\hat{\alpha} \times 1_A, \hat{\beta} \times 1_B) = (u \circ (\hat{\alpha} \times 1_A), v \circ (\hat{\beta} \times 1_B)) = (\alpha, \beta)$$

SI EXISTE $(\alpha_0, \beta_0) : \bar{F} \longrightarrow g^F$ TAL QUE $(U, V) \circ ((\alpha_0, \beta_0) \times 1_F) = (\alpha, \beta)$

ENTONCES $(U \circ (\alpha_0 \times 1_A), V \circ (\beta_0 \times 1_B)) = (\alpha, \beta)$

POR LO TANTO $V \circ (\beta_0 \times 1_\beta) = \beta$ ASÍ QUE $\beta_0 = \hat{\beta}$ Y $U \circ (\alpha_0 \times 1_A) = \alpha$

SI $\alpha_0 : \bar{A} \longrightarrow E$ TAL QUE $\alpha_0(y) = (h, k) \in E$ ENTONCES

$K = g^F((h,k)) = g^F(\alpha_0(y)) = (\hat{\beta} \circ \bar{F})(y)$ Y

$U \circ (\alpha_0 \times 1_A)((y,x)) = U \circ (\alpha_0(y), x) = U \circ ((h, (\hat{\beta} \circ \bar{F})(y)), x)$

$= h(x) = \alpha(y, x)$

POR LO TANTO $h = \alpha(y, -)$ Y $\alpha_0(y) = (\alpha(y,-), (\hat{\beta} \circ \bar{F})(y))$

ASÍ QUE $\alpha_0 = \hat{\alpha}$

POR LO TANTO $(\alpha_0, \beta_0) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ Y $\overrightarrow{Can}$ TIENE EXPONENCIACIÓN

4) SI $(i, j) : (A \xrightarrow{f} B) \rightarrowtail (C \xrightarrow{g} D)$ ES UN MONOMORFISMO EN $\overrightarrow{Can}$ ENTONCES

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, tail, "j"] & D
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

CONSIDEREMOS A i, j COMO INCLUSIONES, ES DECIR, $A \subseteq C$ Y $B \subseteq D$, COMO EL DIAGRAMA ANTERIOR CONMUTA f ES LA RESTRICCIÓN DE g, ES DECIR, $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$.

CADA ELEMENTO $x \in C$ LO PODEMOS CLASIFICAR COMO SIGUE:

i) $x \in A$ o ii) $x \notin A$ y $g(x) \in B$ o iii) $x \notin A$ y $g(x) \notin B$

SEA $\psi : C \longrightarrow \{0, \tfrac{1}{2}, 1\} \ni$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x \in A \\ \tfrac{1}{2} & \text{SI } x \notin A \text{ Y } g(x) \in B \\ 0 & \text{SI } x \notin A \text{ Y } g(x) \notin B \end{cases}$$

SEA $t' : \{0\} \longrightarrow \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$ TAL QUE $t'(0) = 1$

SEA $t:\{0,\frac{1}{2},1\}\longrightarrow\{0,1\}$ TAL QUE $t(0)=0$ $t(\frac{1}{2})=t(1)=1$

SEA VER $:\{0\}\longrightarrow\{0,1\}$ EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS EN $Conj$ POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "j"'] \arrow[d, "!_B"'] & D \arrow[d, "\chi_B"] \\
\{0\} \arrow[r, "VER"] & \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS $V:1\longrightarrow\Omega$ PARA $\overrightarrow{Conj}$ ES

$\Omega = t:\{0,\frac{1}{2},1\}\longrightarrow\{0,1\}$

$V:(t',VER):(\{0\}\xrightarrow{1_{\{0\}}}\{0\})\longrightarrow(\{0,\frac{1}{2},1\}\xrightarrow{t}\{0,1\})$

$(\psi,\chi_B):(C\xrightarrow{g}D)\longrightarrow(\{0,\frac{1}{2},1\}\xrightarrow{t}\{0,1\})$ ES EL MORFISMO CARACTERÍSTICO EN $\overrightarrow{Conj}$ DE $(i,j):(A\xrightarrow{f}B)\rightarrowtail(C\xrightarrow{g}D)$

$(t\circ t')(0)=t(t'(0))=t(1)=1=VER(0)$

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "1_{\{0\}}"'] & \{0,\frac{1}{2},1\} \arrow[d, "t"] \\
\{0\} \arrow[r, "VER"] & \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

Y $V=(t',VER)\in \mathcal{M}(\overrightarrow{Conj})$

SI $x\in C$, ENTONCES i) $x\in A$ o ii) $x\notin A$ y $g(x)\in B$ o iii) $x\notin A$ y $g(x)\notin B$

i) SI $x\in A$ $t(\psi(x))=t(1)=1$, $\chi_B(g(x))=\chi_B(f(x))=1$ YA QUE $f(x)\in B$.

ii) SI $x\notin A$ y $g(x)\in B$ $t(\psi(x))=t(\frac{1}{2})=1$, $\chi_B(g(x))=1$

iii) SI $x\notin A$ y $g(x)\notin B$ $t(\psi(x))=t(0)=0$, $\chi_B(g(x))=0$

POR LO TANTO $t\circ\psi=\chi_B\circ g$ y $(\psi,\chi_B)\in\mathcal{M}(\overrightarrow{Conj})$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!_A"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & C \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ \{0\} \arrow[r, "\iota'"] & \{0,\frac{1}{2},1\} \end{tikzcd}$$

Si $x \in A$ $\psi(i(x)) = \psi(x) = 1$

$\iota'(!_A(x)) = \iota'(0) = 1$

Por lo tanto $\psi \circ i = \iota' \circ !_A$ y

el diagrama conmuta

Supongamos que existen $h: Q \longrightarrow C$ y $!_Q : Q \dashrightarrow \{0\}$ $\ni$ $\psi \circ h = \iota' \circ !_Q$ entonces $\forall\, y \in Q$ $\psi(h(y)) = \iota'(0) = 1$

Así que $h(y) \in A$, por lo tanto existe un único morfismo $K: Q \longrightarrow A \ni K(y) = h(y)$ y, $i \circ K = h$ y $!_A \circ K = !_Q$

Por lo tanto $(*)$ es producto fibrado en $\mathcal{C}onj$

Por la construcción de productos fibrados en $\overrightarrow{\mathcal{C}onj}$ (pag 71)

$$\begin{tikzcd} (A \xrightarrow{f} B) \arrow[r, tail, "(i,j)"] \arrow[d, "(!_A,!_B)"'] & (C \xrightarrow{g} D) \arrow[d, "(\psi,\chi_B)"] \\ (\{0\} \xrightarrow{1_{\{0\}}} \{0\}) \arrow[r, "(\iota',\mathrm{vec})"] & (\{0,\frac{1}{2},1\} \xrightarrow{\iota} \{0,1\}) \end{tikzcd}$$

es producto fibrado en $\overrightarrow{\mathcal{C}onj}$

Por lo tanto $\overrightarrow{\mathcal{C}onj}$ tiene clasificador de subobjetos

4.- HACES Y GAVILLAS

Sea I un conjunto de índices y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos tal que, $\forall\, i \in I$ $A_i \in \mathcal{A}$ y $\forall\, B \in \mathcal{A}$ existe $j \in I \ni B = A_j$

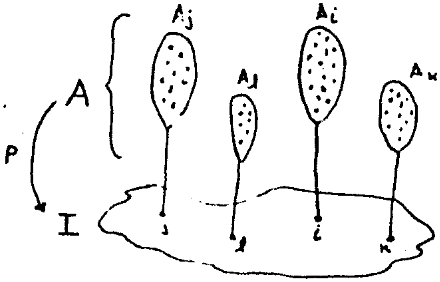
Por lo tanto $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ con la siguiente propiedad.

Si $i,j \in I \ni i \neq j$ entonces $A_i \cap A_j = \phi$

Sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, si $x \in A$ entonces $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, por lo tanto existe una única $i \in I$ tal que $x \in A_i$, si $x \in A_i$ entonces existe una única función p $A \longrightarrow I$ tal que $p(x) = i$

Cada conjunto A_i es llamado una fibra sobre i. Los elementos de A_i son llamados los germenes en i. La estructura $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ es llamada una gavilla de conjuntos sobre el conjunto base I.

El conjunto $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ es llamado el espacio de fibras de la gavilla.



Esta construcción en un principio puede parecer un poco extraña, pero se le puede encontrar dondequiera que haya funciones. Hemos visto que una gavilla tiene una función p de su espacio de fibras a la base.

Inversamente si P es una función de un conjunto A en un conjunto I, entonces podemos definir:

$A_i = P^{-1}(\{i\})\ \forall i \in I$ y $\mathcal{A} = \{P^{-1}(\{i\}) \mid i \in I\} = \{A_i\}_{i\in I}$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es una gavilla de conjuntos sobre I, cuyo espacio de fibras es al conjunto original A.

Entonces una gavilla de conjuntos sobre I es esencialmente una función con codominio I

Sea $\mathcal{G}a(I)$ la categoría de gavillas sobre I, es decir, la categoría coma $\mathbf{Conj} \downarrow I$ de funciones con codominio I

Por lo tanto los objetos de $\mathcal{G}a(I)$ son los pares $(A, f) \ni f: A \longrightarrow I$ es una función. Un morfismo $K: (A,f) \longrightarrow (B,g)$ es una función $K: A \longrightarrow B \ni f = g \circ K$

Por lo tanto si $x \in A$ y $f(x) = i$ entonces $g(K(x)) = i$, es decir, si $x \in A_i$ entonces $K(x) \in B_i$

POR LO TANTO K MAPEA A LOS GERMENES EN i EN (A,f), A LOS GERMENES EN i EN (B,g)

DEMOSTRAREMOS AHORA QUE $\mathcal{G}_a(I)$ ES UN TOPO.

1) $(I, 1_I)$ ES EL OBJETO TERMINAL EN $\mathcal{G}_a(I)$

SEA (A,f) UNA GAVILLA POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO A SABER $f: A \longrightarrow I$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & I \arrow[d, "1_I"] \\ & I \end{tikzcd}$$

CONMUTA

2) SEAN $k:(A,f)\longrightarrow(C,h)$ Y $\ell:(B,g)\longrightarrow(C,h)\in \mathcal{M}(\mathcal{G}_a(I))$

POR LO TANTO $k: A\longrightarrow C$ Y $\ell: B\longrightarrow C$ SON TALES QUE:

$f = h\circ k$ Y $g = h\circ \ell$

SEA

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B \arrow[d, "\ell"] \\ A \arrow[r, "k"] & C \end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE ℓ SOBRE k EN Con.

SEA $j: P\longrightarrow I$ TAL QUE $j = f\circ p$

$j = f\circ p = (h\circ k)\circ p = h\circ(k\circ p) = h\circ(\ell\circ q) = (h\circ \ell)\circ q = g\circ q$

POR LO TANTO $p:(P,j)\longrightarrow(A,f)$, $q:(P,j)\longrightarrow(B,g)\in \mathcal{M}(\mathcal{G}_a(I))$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} (P,j) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & (B,g) \arrow[d, "\ell"] \\ (A,f) \arrow[r, "k"] & (C,h) \end{tikzcd}$$

, ES DECIR,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "q"] \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "j"] & & B \arrow[dd, "\ell"] \arrow[dl, "g"'] \\ & I & \\ A \arrow[rr, "k"] \arrow[ur, "f"] & & C \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

COMO (*) CONMUTA , (**) CONMUTA.

SEAN $\alpha : (\bar{A}, \bar{f}) \longrightarrow (A, f)$ Y $\beta : (\bar{A}, \bar{f}) \longrightarrow (B, g)$ TALES QUE $K\circ\alpha = l\circ\beta$. POR LO TANTO $\alpha : \bar{A} \longrightarrow A$ Y $\beta : \bar{A} \longrightarrow B$ SON TALES QUE $\bar{f} = f\circ\alpha$ Y $\bar{f} = g\circ\beta$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : \bar{A} \longrightarrow P$ TAL QUE $p\circ\varphi = \alpha$ Y $q\circ\varphi = \beta$

$$j\circ\varphi = (f\circ p)\circ\varphi = f\circ(p\circ\varphi) = f\circ\alpha = \bar{f}$$

POR LO TANTO $\varphi : (\bar{A}, \bar{f}) \longrightarrow (P, j) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}a(I))$ Y (**) ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{Y}a(I)$.

3) SEAN (A, f) , $(B, g) \in \mathcal{O}(\mathcal{Y}a(I))$

SEA

$$\begin{tikzcd}
A \underset{I}{\times} B \arrow[r, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & I
\end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE g SOBRE f.

SEA $h : A \underset{I}{\times} B \longrightarrow I$ TAL QUE $h = g\circ p_B = f\circ p_A$

POR LO TANTO $p_A : (A \underset{I}{\times} B, h) \longrightarrow (A, f)$, $p_B : (A \underset{I}{\times} B, h) \longrightarrow (B, g) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}a(I))$

SEAN $\alpha : (C, k) \longrightarrow (A, f)$ Y $\beta : (C, k) \longrightarrow (B, g) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}a(I))$

POR LO TANTO $\alpha : C \longrightarrow A$ Y $\beta : C \longrightarrow B$ SON TALES QUE $k = f\circ\alpha$ Y $k = g\circ\beta$

ASI QUE $f\circ\alpha = g\circ\beta$. POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle\alpha, \beta\rangle : C \longrightarrow A \underset{I}{\times} B$ TAL QUE $\alpha = p_A\circ\langle\alpha,\beta\rangle$ Y $\beta = p_B\circ\langle\alpha,\beta\rangle$

$$k = f\circ\alpha = f\circ(p_A\circ\langle\alpha,\beta\rangle) = (f\circ p_A)\circ\langle\alpha,\beta\rangle = h\circ\langle\alpha,\beta\rangle$$

POR LO TANTO $\langle\alpha,\beta\rangle : (C, k) \longrightarrow (A \underset{I}{\times} B, h) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}a(I))$

ENTONCES $((A \underset{I}{\times} B, h), p_A, p_B)$ ES EL PRODUCTO DE (A, f) Y (B, g)

SEAN (A, f) , $(B, g) \in \mathcal{O}(\mathcal{Y}a(I))$

SEAN $A_i = f^{-1}(\{i\})$ Y $B_i = g^{-1}(\{i\})$

SEA $D_i = \{k : A_i \longrightarrow B \mid g\circ k = f^{*}\}$

DONDE f^* ES LA RESTRICCIÓN DE f A A_i

COMO LAS D_i PUEDEN NO SER AJENAS DEFINIMOS:

$E_i = \{i\} \times D_i$, POR LO TANTO $\{E_i\}_{i \in I}$ ES UNA GAVILLA DE CONJUNTOS. SEA $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ Y $p: E \longrightarrow I$ LA FUNCIÓN INDUCIDA TAL QUE $p((i,k)) = i$

SEA $(B,g)^{(A,f)} = (E,p)$ Y SEA $ev: (E,p) \times (A,f) \longrightarrow (B,g)$ EL MORFISMO EVALUACIÓN ENTONCES

$ev: (E \times_I A, h) \longrightarrow (B,g)$ DONDE $h = f \circ P_A$ Y

$ev(((i,k),x)) = k(x)$

$h(((i,k),x)) = f(P_A((i,k),x)) = f(x)$

$(g \circ ev)(((i,k),x)) = g(ev(((i,k),x))) = g(k(x)) = (g \circ k)(x) = f^*(x)$

POR LO TANTO $g \circ ev = h$ Y $ev: (E \times_I A, h) \longrightarrow (B,g) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}_a(I))$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\alpha: (\bar{A}, \bar{f}) \times (A,f) \longrightarrow (B,g)$ ENTONCES

$\alpha: (\bar{A} \times_I A, \bar{h}) \longrightarrow (B,g)$ DONDE $\bar{h} = \bar{f} \circ P_{\bar{A}} = f \circ \bar{P}_A$

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} \times A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\bar{h}"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

Y

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} \times_I A \arrow[r, "\bar{P}_A"] \arrow[d, "P_{\bar{A}}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\bar{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & I
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SEA $\bar{a} \in \bar{A}$. DEFINIMOS $K_{\bar{a}}: A_i \longrightarrow B \ni K_{\bar{a}}(a) = \alpha((\bar{a},a))$

$(g \circ K_{\bar{a}})(a) = (g \circ \alpha)((\bar{a},a)) = \bar{h}((\bar{a},a)) = f(\bar{P}_A((\bar{a},a))) = f(a) = f^*(a)$

POR LO TANTO $K_{\bar{a}} \in D_i$

DEFINIMOS $\varphi: \bar{A} \longrightarrow E$ TAL QUE $\varphi(\bar{a}) = (i, K_{\bar{a}})$

$(p \circ \varphi)(\bar{a}) = p((i, K_{\bar{a}})) = i = \bar{f}(\bar{a})$

POR LO TANTO $\varphi: (\bar{A}, \bar{f}) \longrightarrow (E,p) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}_a(I))$

$(ev \circ (\varphi \times 1_A))(\bar{a},a) = ev((\varphi(\bar{a}),a)) = ev(((i,K_{\bar{a}}),a)) = K_{\bar{a}}(a) = \alpha((\bar{a},a))$

POR LO TANTO $ev \circ (\varphi \times 1_A) = \alpha$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\psi : (A, \bar{F}) \longrightarrow (E, P)$ TAL QUE

$ev \circ (\psi \times 1_A) = \alpha$, ENTONCES $ev((\psi \times 1_A)(\bar{a}, a)) = ev((\psi(\bar{a}), a))$

$= \alpha((\bar{a}, a))$

SI $\psi(\bar{a}) = (i, k)$ ENTONCES $ev((\psi(\bar{a}), a)) = k(a)$

POR LO TANTO $k(a) = \alpha((\bar{a}, a))$, POR LO TANTO $k(a) = k_{\bar{a}}(a)$ Y

$k = k_{\bar{a}}$. ENTONCES $\varphi(\bar{a}) = (i, k_{\bar{a}}) = \psi(\bar{a})$ Y $\psi = \varphi$

POR LO TANTO $\mathcal{G}a(I)$ TIENE EXPONENCIACIÓN

4) SEA $\Omega = (2 \times I, P_I)$ DONDE $2 \times I = \{0, 1\} \times I$, $P_I : 2 \times I \longrightarrow I$,

$P_I((x, i)) = i \quad \forall (x, i) \in 2 \times I$

SEA $V : I \longrightarrow 2 \times I$ TAL QUE $V(i) = (1, i)$

$(P_I \circ V)(i) = P_I(V(i)) = P_I((1, i)) = i = 1_I(i)$, POR LO TANTO $P_I \circ V = 1_I$

Y $V : (I, 1_I) \longrightarrow (2 \times I, P_I) \in \mathcal{M}(\mathcal{G}a(I))$

SEA $k : (A, f) \rightarrowtail (B, g)$ UN MONOMORFISMO EN $\mathcal{G}a(I)$

POR LO TANTO $k : A \rightarrowtail B$ ES UN MONOMORFISMO EN $\mathcal{C}on$ TAL QUE $f = g \circ k$. SUPONGAMOS QUE k ES UNA INCLUSIÓN, ES DECIR, $A \subseteq B$, POR LO TANTO $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

SEA $\chi_A : B \longrightarrow 2$ LA CARACTERÍSTICA DE k EN $\mathcal{C}on$

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B \arrow[d, dashed, "\chi_A"] \\
\{0\} \arrow[r, "VER"] & 2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{C}on$

SEA $\chi_k : (B, g) \longrightarrow (2 \times I, P_I)$, $\chi_k : B \longrightarrow 2 \times I$ ES TAL QUE $\chi_k = \langle \chi_A, g \rangle$. SI $x \in A$ ENTONCES $\chi_A(x) = 1$ Y SI $x \notin A$ ENTONCES $\chi_A(x) = 0$

POR LO TANTO $\chi_k(x) = \begin{cases} (1, g(x)) & \text{SI } x \in A \\ (0, g(x)) & \text{SI } x \notin A. \end{cases}$

SEA $y \in B$, SI $y \in A$ ENTONCES $P_I(\chi_K(x)) = P_I(1, g(x)) = g(x)$

SI $y \notin A$ ENTONCES $P_I(\chi_K(x)) = P_I(0, g(x)) = g(x)$

POR LO TANTO $P_I \circ \chi_K = g$ Y $\chi_K : (B, g) \longrightarrow (2 \times I, P_I) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}a(I))$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
(A, f) \arrow[r, hook, "K"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & (B, g) \arrow[d, "\chi_K"] \\
(I, 1_I) \arrow[r, "V"] & (2 \times I, P_I)
\end{tikzcd}$$

SEA $x \in A$. $(\chi_K \circ K)(x) = \chi_K(K(x)) = \chi_K(x) = (1, g(x))$

$(V \circ f)(x) = (V \circ (g \circ K))(x) = (V \circ g)(K(x)) = (V \circ g)(x) = (V \circ (P_I \circ \chi_K))(x)$

$= V(P_I(1, g(x))) = (V \circ g)(x) = V(g(x)) = (1, g(x))$

POR LO TANTO $\chi_K \circ K = V \circ f$ Y $(**)$ CONMUTA.

SEAN $\alpha : (C, h) \longrightarrow (B, g)$ Y $\beta : (C, h) \longrightarrow (I, 1_I)$ TALES QUE

$\chi_K \circ \alpha = V \circ \beta$ POR LO TANTO $\alpha : C \longrightarrow B$ Y $\beta : C \longrightarrow I$ SON

TALES QUE $h = g \circ \alpha$ Y $h = 1_I \circ \beta = \beta$

SEA $! \circ \beta : C \longrightarrow I \longrightarrow \{0\}$. SI $c \in C$ ENTONCES

$(V \circ \beta)(c) = V((g \circ \alpha)(c)) = (1, (g \circ \alpha)(c))$, POR LO TANTO

$\chi_K(\alpha(c)) = (1, (g \circ \alpha)(c))$, POR LO TANTO $\alpha(c) \in A$

SEA $\varphi : (C, h) \longrightarrow (A, f)$ TAL QUE $\varphi(c) = \alpha(c)$

$(f \circ \varphi)(c) = f(\varphi(c)) = f(\alpha(c)) = g(\alpha(c)) = (g \circ \alpha)(c) = h(c)$

POR LO TANTO $f \circ \varphi = h$ Y $\varphi : (C, h) \longrightarrow (A, f) \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}a(I))$

$f \circ \varphi = h = \beta$ Y $(K \circ \varphi)(c) = K(\kappa(c)) = \alpha(c)$ POR LO TANTO $K \circ \varphi = \alpha$

POR LO TANTO $(**)$ ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{Y}a(I)$ Y $\mathcal{Y}a(I)$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS

SECCION 2.-

DEMOSTRAREMOS AHORA ALGUNAS PROPIEDADES ACERCA DE LOS TOPOS

PROPOSICIÓN 2.2.1.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO; SI $a \xrightarrow{f} b$ ES UN MONOMORFISMO EN $\mathcal{E}$, ENTONCES f ES EL IGUALADOR DE χ_f Y $V\circ !_b$

DEMOSTRACIÓN: POR SER $\mathcal{E}$ UN TOPO EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & b \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$!_b\circ f : a \longrightarrow 1$, POR SER 1 OBJETO TERMINAL $!_a = !_b\circ f$

POR LO TANTO $\chi_f\circ f = V\circ !_a = V\circ(!_b\circ f) = (V\circ !_b)\circ f$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $g: c \longrightarrow b$ TAL QUE $\chi_f\circ g = (V\circ !_b)\circ g$

$!_b\circ g : c \longrightarrow 1$, POR SER 1 OBJETO TERMINAL $!_c = !_b\circ g$

POR LO TANTO $\chi_f\circ g = V\circ !_c$, POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $K: c \longrightarrow a$ TAL QUE $f\circ K = g$.

POR LO TANTO f ES IGUALADOR DE χ_f Y $V\circ !_b$

PROPOSICIÓN 2.2.2.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO, f ES ISOMORFISMO SI Y SÓLO SI f ES MONOMORFISMO Y f ES EPIMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SUPONGAMOS QUE f ES ISOMORFISMO, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 1.2.7 f ES MONOMORFISMO Y f ES EPIMORFISMO

SUPONGAMOS QUE f ES EPIMORFISMO Y f ES MONOMORFISMO

POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR, SI f ES MONOMORFISMO ENTONCES f ES IGUALADOR, PERO f ES TAMBIÉN EPIMORFISMO, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 1.2.39. f ES ISOMORFISMO

SEAN A Y B CONJUNTOS Y $f: A \longrightarrow B$ UNA FUNCIÓN, ENTONCES f SE PUEDE FACTORIZAR ATRAVÉS DE UNA FUNCIÓN SOBRE SEGUIDA DE UNA FUNCIÓN INVECTIVA

SEA $f(A) = \operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$. SEA $f^*: A \longrightarrow f(A) \ni f^*(x) = f(x)$ $\forall x \in A$. f^* ES UNA FUNCIÓN SOBRE. $f(A) \subseteq B$

SEA $i: f(A) \hookrightarrow B$ TAL QUE $i(f(x)) = f(x)$. i ES UNA FUNCIÓN INYECTIVA.

SEA $x \in A$ $(i \circ f^*)(x) = i(f^*(x)) = i(f(x)) = f(x)$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] & & B \\
& f(A) \arrow[ur, rightarrowtail, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

ADEMÁS, ESTA FACTORIZACIÓN ES ÚNICA SALVO ISOMORFISMO CONMUTATIVO, ES DECIR, SI $h \circ g: A \twoheadrightarrow C \rightarrowtail B$ Y $h' \circ g': A \twoheadrightarrow C' \rightarrowtail B$ SON DOS FACTORIZACIONES DE $f: A \longrightarrow B$, ENTONCES EXISTE UNA ÚNICA FUNCIÓN BIYECTIVA $k: C \longrightarrow C'$ TAL QUE EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
& C' \arrow[dr, "h'"] & \\
A \arrow[ur, "g'"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & & B \\
& C \arrow[uu, dashed, "k"] \arrow[ur, dotted, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

SEA $c\in C$ POR SER g SOBRE EXISTE $a\in A$ TAL QUE $g(a)=c$

SEA $K: C \longrightarrow C'$ TAL QUE $K(c)=g'(a)$

$(K\circ g)(a) = K(g(a)) = K(c) = g'(a)$ POR LO TANTO $K\circ g = g'$

ENTONCES K ESTÁ BIEN DEFINIDA Y

$(h'\circ k)(c) = h'(k(c)) = h'(g'(a)) = (h'\circ g')(a) = f(a) = (h\circ g)(a) = h(c)$

POR LO TANTO $h'\circ k = h$

g' ES SOBRE POR LO TANTO $K\circ g$ ES SOBRE POR LA PROPOSICIÓN 1.2.4 K ES SOBRE

h ES INYECTIVA POR LO TANTO $h'\circ k$ ES INYECTIVA POR LA PROPOSICIÓN 1.2.2 K ES INYECTIVA

POR LO TANTO K ES BIYECTIVA.

PROPOSICIÓN 2.2.3.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y $f: a\longrightarrow b \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ENTONCES EXISTE UNA EPIMONO FACTORIZACIÓN DE f, ES DECIR f SE PUEDE FACTORIZAR ATRAVÉS DE UN EPIMORFISMO SEGUIDO DE UN MONOMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN: SEAN $f: a\longrightarrow b \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ Y

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b \arrow[d, "q"] \\
b \arrow[r, "p"] & r
\end{tikzcd}$$

EL COPRODUCTO FIBRADO DE f CON f.

POR LO TANTO $q\circ f = p\circ f$.

SEA $\mathrm{im} f: f(a) \rightarrowtail b$ EL IGUALADOR DE P y q. POR LA PROPOSICIÓN 1.1.37 $\mathrm{im} f$ ES MONOMORFISMO

COMO $q\circ f = p\circ f$ POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $f^*: a \longrightarrow f(a)$ TAL QUE $\mathrm{im} f\circ f^* = f$

PARA DEMOSTRAR QUE f^* ES EPIMORFISMO, DEMOSTRAREMOS LA SIGUIENTE AFIRMACIÓN:

$\mathrm{im} f$ ES EL MENOR SUBOBJETO DE b A TRAVÉS DEL CUAL f SE FACTORIZA, ES DECIR,

SI

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "u"'] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "v"'] & \end{tikzcd}$$

CONMUTA PARA TODO u Y v MONOMORFISMO ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k: f(a) \longrightarrow c$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd} & f(a) \arrow[dr, dashed, tail, "\mathrm{im} f"] \arrow[dd, dashed] & \\ a \arrow[ur, "f^*"] \arrow[dr, "u"'] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "v"'] & \end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $\mathrm{im} f \leq v$

v ES MONOMORFISMO POR LA PROPOSICIÓN 2.2.1 v ES EL IGUALADOR DE UN PAR DE MORFISMOS $s, t: b \longrightarrow d$

$$s \circ f = s \circ (v \circ u) = (s \circ v) \circ u = (t \circ v) \circ u = t \circ (v \circ u) = t \circ f$$

POR SER (*) COPRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $h: r \longrightarrow d$ TAL QUE $h \circ p = s$ Y $h \circ q = t$

$$s \circ \mathrm{im} f = (h \circ p) \circ \mathrm{im} f = h \circ (p \circ \mathrm{im} f) = h \circ (q \circ \mathrm{im} f) = (h \circ q) \circ \mathrm{im} f = t \circ \mathrm{im} f$$

POR SER v IGUALADOR EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k: f(a) \longrightarrow c$ TAL QUE $v \circ k = \mathrm{im} f$

$v \circ k \circ f^* = \mathrm{im} f \circ f^* = f = v \circ u$ POR SER v MONOMORFISMO $k \circ f^* = u$

APLIQUEMOS LA CONSTRUCCIÓN ANTERIOR PARA FACTORIZAR A f^*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, dash, "(f^*)^*"'] & & f(a) \\
& f^*(a) \arrow[ur, tail, dotted, "\mathrm{im} f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO

$$\begin{tikzcd}
& f^*(a) \arrow[dd, tail, "\mathrm{im} f^*"] \arrow[dr, "\mathrm{im} f \circ \mathrm{im} f^*"] & \\
a \arrow[ur, "(f^*)^*"] \arrow[dr, "f^*"'] & & b \\
& f(a) \arrow[ur, tail, "\mathrm{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{im} f \circ \mathrm{im} f^*$ ES MONOMORFISMO POR LO TANTO $\mathrm{im} f \circ \mathrm{im} f^* \leq \mathrm{im} f$

COMO $\mathrm{im} f$ ES EL MENOR SUBOBJETO DE b A TRAVÉS DEL CUAL f SE FACTORIZA, ENTONCES $\mathrm{im} f \leq \mathrm{im} f \circ \mathrm{im} f^*$

POR LO TANTO $\mathrm{im} f \cong \mathrm{im} f \circ \mathrm{im} f^*$ EN $\mathrm{Sub}(b)$

POR LO TANTO $f^*(a) \cong f(a)$ Y $\mathrm{im} f^*$ ES ISOMORFISMO.

PERO $\mathrm{im} f^*$ SE CONSTRUYO COMO EL IGUALADOR DE $p', q' : f(a) \longrightarrow r'$

DONDE p' Y q' SE OBTUVIERON DEL COPRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & f(a) \arrow[d, "p'"] \\
f(a) \arrow[r, "q'"] & r'
\end{tikzcd}$$

$p' \circ \mathrm{im} f^* = q' \circ \mathrm{im} f^*$ POR SER $\mathrm{im} f^*$ ISOMORFISMO $p' = q'$

SEAN $h, g : f(a) \longrightarrow c$ TALES QUE $h \circ f^* = g \circ f^*$

POR SER (**) COPRODUCTO FIBRADO, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$K: r' \longrightarrow c$ TAL QUE $K \circ q' = h$ Y $K \circ p' = g$

$p' = q'$ POR LO TANTO $K \circ q' = K \circ p'$ Y $h = g$

POR LO TANTO f^* ES EPIMORFISMO

PROPOSICIÓN 2.2.4.- $\operatorname{im} f \circ f^*: a \twoheadrightarrow f(a) \rightarrowtail b$ ES UNA EPIMONO FACTORIZACIÓN DE f QUE ES ÚNICA SALVO ISOMORFISMO CONMUTATIVO, ES DECIR, SI $v \circ u: a \twoheadrightarrow c \rightarrowtail b$ ES TAL QUE $v \circ u = f$ ENTONCES EXISTE $K: f(a) \longrightarrow c$ ISOMORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
 & f(a) \arrow[dr, tail, "\operatorname{im} f"] \arrow[dd, dashed, "k"] & \\
a \arrow[ur, two heads, "f^*"] \arrow[dr, two heads, "u"'] & & b \\
 & c \arrow[ur, tail, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

DEMOSTRACIÓN:

POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR SABEMOS QUE EXISTE UNA ÚNICA $K: f(a) \longrightarrow c$ TAL QUE $v \circ K = \operatorname{im} f$ Y $K \circ f^* = u$

$\operatorname{im} f$ ES MONOMORFISMO, POR LO TANTO $v \circ K$ ES MONOMORFISMO

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.2 K ES MONOMORFISMO.

u ES EPIMORFISMO, POR LO TANTO $K \circ f^*$ ES EPIMORFISMO

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.4 K ES EPIMORFISMO

POR LO TANTO K ES ISOMORFISMO

CAPITULO 3

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TOPOS

SECCION 1.-

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE MORFISMOS PARCIALES

SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y $b \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$

DEFINIMOS $\Delta_b = \langle 1_b, 1_b \rangle : b \rightarrowtail b \times b$

SEA $\delta_b : b \times b \longrightarrow \Omega$ EL MORFISMO CARACTERÍSTICO DE Δ_b

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "\Delta_b"] \arrow[d, "!b"'] & b \times b \arrow[d, dashed, "\delta_b"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SEA $\{\}_b : b \longrightarrow \Omega^b$ EL ADJUNTO EXPONENCIAL DE δ_b

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
\Omega^b \times b \arrow[r, "ev"] & \Omega \\
b \times b \arrow[u, "\{\}_b \times 1_b"] \arrow[ur, "\delta_b"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA, ES DECIR, $ev \circ (\{\}_b \times 1_b) = \delta_b$

PROPOSICIÓN 3.11 - $\{\}_b : b \longrightarrow \Omega^b$ ES UN $\mathcal{E}$ - MONOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\alpha, \beta : a \longrightarrow b$ TALES QUE

$\{\}_b \circ \alpha = \{\}_b \circ \beta$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle 1_a, \alpha \rangle"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \times b \arrow[d, "\alpha \times 1_b"] \\
b \arrow[r, tail, "\Delta_b"] & b \times b
\end{tikzcd}$$

$(\alpha\times 1_b)\circ\langle 1_a,\alpha\rangle = \langle \alpha\circ 1_a, 1_b\circ\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle = \Delta_b\circ\alpha$

POR LO TANTO (A) CONMUTA.

SEAN $\varphi : c \longrightarrow a\times b$ Y $\psi : c \longrightarrow b$ $\in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ TALES QUE

$(\alpha\times 1_b)\circ\varphi = \Delta_b\circ\psi$

POR LO TANTO $\langle \alpha\circ P_a, 1_b\circ P_b\rangle\circ\varphi = \langle\psi,\psi\rangle$

POR LO TANTO $\langle \alpha\circ P_a\circ\varphi, 1_b\circ P_b\circ\varphi\rangle = \langle\psi,\psi\rangle$

POR LO TANTO $\alpha\circ P_a\circ\varphi = \psi$ Y $1_b\circ P_b\circ\varphi = \psi$

ASÍ QUE EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "P_a\circ\varphi"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
a & a\times b \arrow[l, dash, "P_a"] \arrow[r, dash, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO $\varphi = \langle P_a\circ\varphi, \psi\rangle$

POR LO TANTO EXISTE $K = P_a\circ\varphi : c \longrightarrow a$ TAL QUE:

$\langle 1_a,\alpha\rangle\circ P_a\circ\varphi = \langle P_a\circ\varphi, \alpha\circ P_a\circ\varphi\rangle = \langle P_a\circ\varphi, \psi\rangle = \varphi$ Y $\alpha\circ P_a\circ\varphi = \psi$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{K} : c \longrightarrow a$ TAL QUE $\langle 1_a,\alpha\rangle\circ\bar{K} = \varphi$.

ENTONCES $\langle\bar{K}, \alpha\circ\bar{K}\rangle = \varphi = \langle P_a\circ\varphi, \psi\rangle$ POR LO TANTO $\bar{K} = P_a\circ\varphi$

POR LO TANTO K ES ÚNICA Y (A) ES PRODUCTO FIBRADO

POR UN ARGUMENTO ANÁLOGO EL SIGUIENTE CUADRADO ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle 1_a,\beta\rangle"] \arrow[d, "\beta"'] & a\times b \arrow[d, "\beta\times 1_b"] \\
b \arrow[r, "\Delta_b"] & b\times b
\end{tikzcd}$$

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS LOS RECTANGULOS EXTERIORES DE LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle 1_a, \alpha \rangle"] \arrow[d, "\alpha"'] & a \times b \arrow[d, "\alpha \times 1_b"] \\
b \arrow[r, "\Delta_b"] \arrow[d, "!_b"'] & b \times b \arrow[d, "\delta_b"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle 1_a, \beta \rangle"] \arrow[d, "\beta"'] & a \times b \arrow[d, dashed, "\beta \times 1_b"] \\
b \arrow[r, dashed, "\Delta_b"] \arrow[d, "!_b"'] & b \times b \arrow[d, dashed, "\delta_b"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\delta_b \circ (\alpha \times 1_b) = ev \circ (\{\}_b \times 1_b) \circ (\alpha \times 1_b) = ev \circ (\{\}_b \circ \alpha) \times 1_b$$

$$= ev \circ (\{\}_b \circ \beta) \times 1_b = ev \circ (\{\}_b \times 1_b) \circ (\beta \times 1_b) = \delta_b \circ (\beta \times 1_b)$$

$\chi_{\langle 1_a, \alpha \rangle} = \delta_b \circ (\alpha \times 1_b)$ Y $\chi_{\langle 1_a, \beta \rangle} = \delta_b \circ (\beta \times 1_b)$

POR LO TANTO $\chi_{\langle 1_a, \alpha \rangle} = \chi_{\langle 1_a, \beta \rangle}$ Y $\langle 1_a, \alpha \rangle \simeq \langle 1_a, \beta \rangle$

POR LO TANTO EXISTE $h : a \longrightarrow a$ $\mathcal{E}$ ISOMORFISMO TAL QUE

$\langle 1_a, \alpha \rangle = \langle 1_a, \beta \rangle \circ h$ POR LO TANTO $\langle 1_a, \alpha \rangle = \langle h, \beta \circ h \rangle$

POR LO TANTO $1_a = h$ Y $\alpha = \beta \circ h = \beta \circ 1_a = \beta$

POR LO TANTO $\{\}_b : b \longrightarrow \Omega^b$ ES MONOMORFISMO

PROPOSICIÓN 3.1.2.- TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE MORFISMOS PARCIALES

SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO, ENTONCES PARA TODO $b \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ EXISTEN $\bar{b} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ Y $\eta_b : b \rightarrowtail \bar{b}$ $\mathcal{E}$-MONOMORFISMO TAL QUE PARA TODO $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ COMO EN EL SIGUIENTE DIAGRAMA, EXISTE UN ÚNICO $\bar{f} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "\bar{f}"] \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

DEMOSTRACIÓN: POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $\{\}_b : b \longrightarrow \Omega^b$ ES $\mathcal{E}$-MONOMORFISMO. POR LO TANTO $\langle \{\}_b, 1_b \rangle : b \longrightarrow \Omega^b \times b$ ES MONOMORFISMO

SEA $h : \Omega^b \times b \longrightarrow \Omega$ EL MORFISMO CARACTERÍSTICO DE $\langle \{\}_b , 1_b \rangle$

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "\langle \{\}_b, 1_b \rangle"] \arrow[d, "!_b"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \Omega^b \times b \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SEA $\bar{h} : \Omega^b \longrightarrow \Omega^b$ EL ADJUNTO EXPONENCIAL DE h

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
\Omega^b \times b \arrow[r, "ev"] & \Omega \\
\Omega^b \times b \arrow[u, "\bar{h} \times 1_b"] \arrow[ur, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

CONMUTA, ES DECIR,

$$h = ev \circ (\bar{h} \times 1_b)$$

SEA $k : \bar{b} \rightarrowtail \Omega^b$ EL IGUALADOR DE $\bar{h}, 1_{\Omega^b} : \Omega^b \longrightarrow \Omega^b$,

ENTONCES $\bar{h} \circ k = 1_{\Omega^b} \circ k$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "\Delta_b"] \arrow[d, "1_b"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & b \times b \arrow[d, dashed, "\{\}_b \times 1_b"] \\
b \arrow[r, "\langle \{\}_b, 1_b \rangle"] & \Omega^b \times b
\end{tikzcd}$$

$$(\{\}_b \times 1_b) \circ \Delta_b = \langle \{\}_b \circ p_b , 1_b \circ p'_b \rangle \circ \Delta_b$$

$$= \langle \{\}_b \circ p_b \circ \Delta_b , 1_b \circ p'_b \circ \Delta_b \rangle$$

$$= \langle \{\}_b \circ 1_b , 1_b \circ 1_b \rangle = \langle \{\}_b , 1_b \rangle \circ 1_b$$

POR LO TANTO $(**)$ CONMUTA.

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\varphi : c \longrightarrow b \times b$ Y $\psi : c \longrightarrow b \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$

TALES QUE $\langle \{\}_b , 1_b \rangle \circ \psi = (\{\}_b \times 1_b) \circ \varphi$.

POR LO TANTO $\langle \{\}_b \circ p_b \circ \varphi , 1_b \circ p'_b \circ \varphi \rangle = \langle \{\}_b \circ \psi , 1_b \circ \psi \rangle$

POR LO TANTO $\{\}_b \circ p_b \circ \varphi = \{\}_b \circ \psi$ Y $p'_b \circ \varphi = \psi$

POR SER $\{\}_b$ MONOMORFISMO $p_b \circ \varphi = \psi$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
b & b\times b \arrow[l, "p_b"] \arrow[r, "p'_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO $\varphi = \langle\psi,\psi\rangle$

POR LO TANTO EXISTE $\psi : c \longrightarrow b$ TAL QUE $1_b\circ\psi = \psi$ y $\Delta_b\circ\psi = \langle\psi,\psi\rangle = \varphi$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{\psi} : c \longrightarrow b$ TAL QUE $1_b\circ\bar{\psi} = \psi$ POR LO TANTO $\bar{\psi} = \psi$ y $(1,1)$ ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL RECTÁNGULO EXTERIOR DEL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "\Delta_b"] \arrow[d, "1_b"'] & b\times b \arrow[d, dashed, "\{\}_b\times 1_b"] \\
b \arrow[r, tail, "\langle\{\}_b,1_b\rangle"'] \arrow[d, dashed, "!_b"'] & \Omega^b\times b \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $h\circ(\{\}_b\times 1_h)$ CARACTERIZA A Δ_b, ES DECIR,

$\chi_{\Delta_b} = h\circ(\{\}_b\times 1_b)$ PERO $\chi_{\Delta_b} = \delta_b$ POR LO TANTO $\delta_b = h\circ(\{\}_b\times 1_b)$

$ev\circ(\{\}_b\times 1_b) = \delta_b = h\circ(\{\}_h\times 1_b) = ev\circ(\bar{h}\times 1_b)\circ(\{\}_b\times 1_b)$

$= ev\circ(\bar{h}\circ\{\}_b)\times 1_b$

POR LA UNICIDAD DEL ADJUNTO EXPONENCIAL TENEMOS QUE

$\bar{h}\circ\{\}_b = \{\}_b = 1_{\Omega^b}\circ\{\}_b$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR $K : \bar{b} \longrightarrow \Omega^b$

EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $m_b : b \dashrightarrow \bar{b}$ TAL QUE $K\circ m_b = \{\}_b$

$\lambda\zeta_b$ ES MONOMORFISMO, POR LO TANTO $k\circ\eta_b$ ES MONOMORFISMO, POR LA PROPOSICIÓN 1.2.2 η_b ES MONOMORFISMO.

SEAN $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ COMO EN EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE a Y b EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle g, f\rangle : d \longrightarrow a\times b$. TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\langle g, f\rangle"] \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $p_a\circ\langle g, f\rangle = g$, POR SER g MONOMORFISMO $p_a\circ\langle g, f\rangle$ ES MONOMORFISMO, POR LA PROPOSICIÓN 1.2.1 $\langle g, f\rangle$ ES MONOMORFISMO

SEA $\gamma : a\times b \longrightarrow \Omega$ EL MORFISMO CARACTERÍSTICO DE $\langle g, f\rangle$

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "\langle g, f\rangle"] \arrow[d, "!_d"'] & a\times b \arrow[d, "\gamma"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SEA $\bar{\gamma} : a \longrightarrow \Omega^b$ EL ADJUNTO EXPONENCIAL DE γ

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
\Omega^b\times b \arrow[r, "ev"] & \Omega \\
a\times b \arrow[u, "\bar{\gamma}\times 1_b"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA, ES DECIR, $\gamma = ev\circ(\bar{\gamma}\times 1_b)$

EN LA PROPOSICIÓN 3.1.1 SE DEMOSTRÓ QUE EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "\langle 1_d, f\rangle"] \arrow[d, "f"'] & d\times b \arrow[d, dashed, "f\times 1_b"] \\
b \arrow[r, tail, "\Delta_b"] & b\times b
\end{tikzcd}$$

ADEMÁS EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "\langle 1_d, f\rangle"] \arrow[d, "1_d"'] & d\times b \arrow[d, "g\times 1_b"] \\
d \arrow[r, tail, "\langle g, f\rangle"] & a\times b
\end{tikzcd}$$

$(g\times 1_b)\circ\langle 1_d, f\rangle = \langle g, f\rangle = \langle g, f\rangle\circ 1_d$

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\alpha: c \longrightarrow d$ Y $\beta: c \longrightarrow d\times b \in \mathcal{M}(E)$ TALES QUE $(g\times 1_b)\circ\beta = \langle g, f\rangle\circ\alpha$.

POR LO TANTO $\langle g\circ P_d\circ\beta\, ,\, P_b\circ\beta\rangle = \langle g\circ\alpha\, ,\, f\circ\alpha\rangle$

POR LO TANTO $g\circ P_d\circ\beta = g\circ\alpha$ Y $P_b\circ\beta = f\circ\alpha$

POR SER g MONOMORFISMO $P_d\circ\beta = \alpha$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "f\circ\alpha"] & \\
d & d\times b \arrow[l, dashed, "P_d"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO $\beta = \langle\alpha, f\circ\alpha\rangle$

POR LO TANTO EXISTE $\alpha: c \longrightarrow d$ TAL QUE $1_d\circ\alpha = \alpha$ Y $\langle 1_d, f\rangle\circ\alpha = \langle\alpha, f\circ\alpha\rangle = \beta$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{\alpha}\ c \longrightarrow d$ TAL QUE $1_d\circ\bar{\alpha} = \alpha$ ENTONCES $\bar{\alpha} = \alpha$

Y EL DIAGRAMA ANTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS TENEMOS QUE LOS RECTÁNGULOS EXTERIORES DE LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "\langle 1_d, f\rangle"] \arrow[d, "f"'] & d\times b \arrow[d, "f\times 1_b"] \\
b \arrow[r, "\Delta_b"] \arrow[d, "!_b"'] & b\times b \arrow[d, "\delta_b"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "\langle 1_d, f\rangle"] \arrow[d, "1_d"'] & d\times b \arrow[d, "g\times 1_b"] \\
d \arrow[r, tail, "\langle g, f\rangle"] \arrow[d, "!_d"'] & a\times b \arrow[d, "\gamma"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $\delta_b\circ(f\times 1_b)$ Y $\gamma\circ(g\times 1_b)$ CARACTERIZAN AL MISMO MORFISMO, POR LO TANTO $\delta_b\circ(f\times 1_b)=\gamma\circ(g\times 1_b)$

$$ev\circ((\{\}_b\circ f)\times 1_b) = ev\circ(\{\}_b\times 1_b)\circ(f\times 1_b) = \delta_b\circ(f\times 1_b) = \gamma\circ(g\times 1_b)$$

$$= ev\circ(\bar{\gamma}\times 1_b)\circ(g\times 1_b) = ev\circ((\bar{\gamma}\circ g)\times 1_b)$$

POR LA UNICIDAD DEL ADJUNTO EXPONENCIAL $\{\}_b\circ f = \bar{\gamma}\circ g$.

POR LO TANTO
$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & a \arrow[d, "\bar{\gamma}"] \\
b \arrow[r, "\{\}_b"] & \Omega
\end{tikzcd}$$
CONMUTA

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\bar{\alpha}: c\longrightarrow a$ Y $\bar{\beta}: c\longrightarrow b$ TALES QUE $\bar{\gamma}\circ\bar{\alpha} = \{\}_b\circ\bar{\beta}$

SEA $\langle\bar{\alpha},\bar{\beta}\rangle: c\longrightarrow a\times b$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[drr, dashed, "\langle\bar{\alpha},\bar{\beta}\rangle"] \arrow[ddr, bend right, "!_c"'] & & \\
& d \arrow[r, tail, "\langle g, f\rangle"] \arrow[d, "!_d"'] & a\times b \arrow[d, "\gamma"] \\
& 1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\gamma\circ\langle\bar{\alpha},\bar{\beta}\rangle = ev\circ(\bar{\gamma}\times 1_b)\circ\langle\bar{\alpha},\bar{\beta}\rangle$$
$$= ev\circ(\bar{\gamma}\circ\bar{\alpha},\ 1_b\circ\bar{\beta}\rangle$$
$$= ev\circ(\{\}_b\circ\bar{\beta},\ 1_b\circ\bar{\beta}\rangle$$
$$= ev\circ(\{\}_b, 1_b\rangle\circ\bar{\beta}$$
$$= ev\circ(\{\}_b\times 1_b)\circ\Delta_b\circ\bar{\beta}$$

$$= \delta_b\circ\Delta_b\bar{\beta} = v\circ !_b\circ\bar{\beta} = v\circ !_c$$

POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO

$\bar{\varphi}: c \longrightarrow d$ TAL QUE $\langle g, f\rangle \circ \bar{\varphi} = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}\rangle$ POR LO TANTO $\langle g \circ \bar{\varphi}, f \circ \bar{\varphi}\rangle = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}\rangle$. POR LO TANTO $g \circ \bar{\varphi} = \bar{\alpha}$ Y $f \circ \bar{\varphi} = \bar{\beta}$ Y (***) ES PRODUCTO FIBRADO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "{\langle g, f\rangle}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & a \times b \arrow[d, dashed, "\bar{\gamma} \times 1_b"] \\
b \arrow[r, tail, "{\langle \{1\}_b, 1_b\rangle}"'] & \Omega^b \times b
\end{tikzcd}$$

$(\bar{\gamma} \times 1_b) \circ \langle g, f\rangle = \langle \bar{\gamma} \circ g, f\rangle = \langle \{1\}_b \circ f, f\rangle$

$= \langle \{1\}_b, 1_b\rangle \circ f$

POR LO TANTO (**) CONMUTA

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\alpha: c \longrightarrow a \times b$ Y $\beta: c \longrightarrow b$ TALES QUE $(\bar{\gamma} \times 1_b) \circ \alpha = \langle \{1\}_b, 1_b\rangle \circ \beta$, ENTONCES $\langle \bar{\gamma} \circ P_a \circ \alpha, P_b \circ \alpha\rangle = \langle \{1\}_b \circ \beta, \beta\rangle$

POR LO TANTO $\bar{\gamma} \circ P_a \circ \alpha = \{1\}_b \circ \beta$ Y $P_b \circ \alpha = \beta$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, dashed, "P_a \circ \alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO $\alpha = \langle P_a \circ \alpha, \beta\rangle$

COMO $\bar{\gamma} \circ P_a \circ \alpha = \{1\}_b \circ \beta$ Y (***) ES PRODUCTO FIBRADO, ENTONCES EXISTE UN ÚNICO $\bar{\varphi}: c \longrightarrow d$ TAL QUE $f \circ \bar{\varphi} = \beta$ Y $g \circ \bar{\varphi} = P_a \circ \alpha$

POR LO TANTO $\langle g, f\rangle \circ \bar{\varphi} = \langle g \circ \bar{\varphi}, f \circ \bar{\varphi}\rangle = \langle P_a \circ \alpha, \beta\rangle = \alpha$ Y (**) ES PRODUCTO FIBRADO.

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS, TENEMOS QUE EL RECTÁNGULO EXTERIOR DEL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "\langle g,f\rangle"] \arrow[d, "f"'] & a\times b \arrow[d, "\bar\gamma\times 1_b"] \\
b \arrow[r, "\langle\{\}_b,1_b\rangle"] \arrow[d, "!_b"'] & \Omega^b\times b \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $\chi_{\langle g,f\rangle} = h\circ(\bar\gamma\times 1_b)$, PERO $\chi_{\langle g,f\rangle} = \gamma$

POR LO TANTO $h\circ(\bar\gamma\times 1_b) = \gamma$

$ev\circ(\bar\gamma\times 1_b) = \gamma = h\circ(\bar\gamma\times 1_b) = ev\circ(\bar h\times 1_b)\circ(\bar\gamma\times 1_b) = ev\circ((\bar h\circ\bar\gamma)\times 1_b)$

POR LA UNICIDAD DEL ADJUNTO EXPONENCIAL $\bar h\circ\bar\gamma = \bar\gamma = 1_{\Omega^b}\circ\bar\gamma$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR $k:\bar b\longrightarrow\Omega$ EXISTE UN ÚNICO $\bar f: a\longrightarrow\bar b$ TAL QUE $k\circ\bar f = \bar\gamma$

DEMOSTRAREMOS QUE

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "\bar f"] \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar b
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

$k\circ\bar f\circ g = \bar\gamma\circ g = \{\}_b\circ f = k\circ\eta_b\circ f$ POR SER k MONOMORFISMO

$\bar f\circ g = \eta_b\circ f$, POR LO TANTO EL DIAGRAMA ANTERIOR CONMUTA

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\alpha: c\longrightarrow a$ Y $\beta: c\longrightarrow b$ TALES QUE

$\bar f\circ\alpha = \eta_b\circ\beta$, ENTONCES $k\circ\bar f\circ\alpha = k\circ\eta_b\circ\beta$

POR LO TANTO $\bar\gamma\circ\alpha = \{\}_b\circ\beta$

POR SER (***) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO $\varphi: c\longrightarrow d$ TAL QUE

$f\circ\varphi = \beta$ Y $g\circ\varphi = \alpha$

POR LO TANTO EL DIAGRAMA ANTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO

SECCION 2.-

FUNTORES.

UN FUNTOR ES UNA TRANSFORMACIÓN DE UNA CATEGORÍA A OTRA QUE PRESERVA LA ESTRUCTURA CATEGÓRICA

DEFINICIÓN 3.2.1.- UN FUNTOR $\mathcal{G}$ DE UNA CATEGORÍA $\mathcal{C}$ A LA CATEGORÍA $\mathcal{D}$ ES UNA FUNCIÓN $\mathcal{G}$ TAL QUE:

i) $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, $\mathcal{G}(a) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

ii) $\forall f: a \to b \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\mathcal{G}(f): \mathcal{G}(a) \to \mathcal{G}(b) \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$

CON LAS SIGUIENTES PROPIEDADES.

1) $\mathcal{G}(1_a) = 1_{\mathcal{G}(a)}$

2) SI $g \circ f$ ESTÁ DEFINIDA EN $\mathcal{C}$ ENTONCES $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$

ES DECIR, SI

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & b \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

CONMUTA EN $\mathcal{C}$, ENTONCES

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(a) \arrow[rr, "\mathcal{G}(f)"] \arrow[dr, "\mathcal{G}(h)"'] & & \mathcal{G}(b) \arrow[dl, "\mathcal{G}(g)"] \\ & \mathcal{G}(c) & \end{tikzcd}$$

CONMUTA EN $\mathcal{D}$.

DENOTAMOS $\mathcal{G}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ o $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ PARA INDICAR QUE $\mathcal{G}$ ES UN FUNTOR DE $\mathcal{C}$ EN $\mathcal{D}$.

EJEMPLOS

1.- FUNTOR IDÉNTICO

$1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \ni 1_{\mathcal{C}}(a) = a$ y $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ y $f \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

2.- FUNTOR QUE OLVIDA

SEA $\mathcal{C}$ CUALQUIER CATEGORÍA DE LA LISTA EN LA PÁGINA 5, ENTONCES UN $\mathcal{C}$ OBJETO ES UN CONJUNTO CON UNA ESTRUCTURA ADICIONAL

EL FUNTOR QUE OLVIDA $U:\mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{C}on$ ES TAL QUE $\forall\ A\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$

$U(A)=A$ Y $\forall\ f\in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ $U(f)=f$.

ENTONCES EL FUNTOR U "SE OLVIDA" DE LA ESTRUCTURA DE LOS $\mathcal{C}$ OBJETOS Y "SÓLO RECUERDA" QUE LOS $\mathcal{C}$-MORFISMOS SON FUNCIONES ENTRE CONJUNTOS

3.- FUNTORES HOM

SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA Y $a\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}(a,-):\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}on$ ES TAL QUE $\forall\ b\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}(a,-)(b)=\mathcal{C}(a,b)$, ES DECIR, EL CONJUNTO DE $\mathcal{C}$ MORFISMOS CON DOMINIO a Y CODOMINIO b

$\forall f:b\rightarrow c\in\mathcal{M}(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}(a,-)(f)=\mathcal{C}(a,f):\mathcal{C}(a,b)\longrightarrow\mathcal{C}(a,c)$ TAL QUE SI $g:a\longrightarrow b$, ENTONCES $\mathcal{C}(a,f)(g)=f\circ g:a\longrightarrow c$

4.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA Y $b\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$, SEA $\mathcal{C}\downarrow b$ LA CATEGORÍA COMA, CUYOS OBJETOS SON $\mathcal{C}$ MORFISMOS $f:a\longrightarrow b$ CON CODOMINIO b Y UN MORFISMO $g:(a\xrightarrow{f}b)\longrightarrow(a'\xrightarrow{f'}b)$ ES UN $\mathcal{C}$-MORFISMO $g:a\longrightarrow a'$ TAL QUE $f'\circ g=f$.

SEA $\Sigma_b:\mathcal{C}\downarrow b\longrightarrow\mathcal{C}$ TAL QUE $\Sigma_b(a\xrightarrow{f}b)=a$ Y

$\Sigma_b((a\xrightarrow{f}b)\xrightarrow{g}(a'\xrightarrow{f'}b))=g:a\longrightarrow a'$

DEMOSTRAREMOS QUE Σ_b ES UN FUNTOR

1) SEA $1_f:(a\xrightarrow{f}b)\longrightarrow(a\xrightarrow{f}b)$ IDENTIDAD EN $\mathcal{C}\downarrow b$

$f=f\circ 1_a$ POR LO TANTO $1_f=1_a$

POR LO TANTO $\Sigma_b(1_f)=1_a=1_{\Sigma_b(f)}$

2) SEAN $g:(a\xrightarrow{f}b)\longrightarrow(a'\xrightarrow{f'}b)$ Y $h:(a'\xrightarrow{f'}b)\longrightarrow(a''\xrightarrow{f''}b)\in\mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b)$

POR LO TANTO $f'\circ g=f$ Y $f''\circ h=f'$

$f = f'\circ g = f''\circ h\circ g$ POR LO TANTO $h\circ g : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a'' \xrightarrow{f''} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b)$

POR LO TANTO $\Sigma_b(h\circ g) = h\circ g = \Sigma_b(h)\circ \Sigma_b(g)$

5.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON PRODUCTOS

SEA $-\times b : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\downarrow b$ TAL QUE:

$-\times b(a) = p_b : a\times b \longrightarrow b \quad \forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$

$-\times b(a \xrightarrow{f} a') = g : (a\times b \xrightarrow{p_b} b) \longrightarrow (a'\times b \xrightarrow{q_b} b)$, DONDE g ES EL ÚNICO MORFISMO QUE EXISTE DE $a\times b$ EN $a'\times b$ QUE HACE CONMUTAR EL SIGUIENTE DIAGRAMA.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & a\times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[dl, "f\circ p_a"'] \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dr, dotted, "p_b"] & \\
a' & a'\times b \arrow[l, "q_{a'}"] \arrow[r, dashed, "q_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $q_b\circ g = p_b$ Y $g \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b)$

DEMOSTRAREMOS QUE $-\times b$ ES UN FUNTOR

1) SEA $1_a : a \longrightarrow a$ IDENTIDAD EN $\mathcal{C}$

$-\times b(a \xrightarrow{1_a} a) = 1_{a\times b} : (a\times b \xrightarrow{p_b} b) \longrightarrow (a\times b \xrightarrow{p_b} b)$

2) SEAN $f : a \longrightarrow a'$ Y $g : a' \longrightarrow a'' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$-\times b(g\circ f) = h : (a\times b \xrightarrow{p_b} b) \longrightarrow (a''\times b \xrightarrow{r_b} b)$, DONDE $h : a\times b \longrightarrow a''\times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "g\circ f"'] & a\times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[dl, "g\circ f\circ p_a"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "p_b"] & \\
a'' & a''\times b \arrow[l, dashed, "r_{a''}"] \arrow[r, "r_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA.

POR LO TANTO $r_b\circ h = p_b$

$-\times b(g) = \alpha : (a'\times b \xrightarrow{q_b} b) \longrightarrow (a''\times b \xrightarrow{r_b} b)$, DONDE $\alpha : a'\times b \longrightarrow a''\times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[d, "g"'] & a'\times b \arrow[l, "q_{a'}"'] \arrow[dl, "g\circ q_{a'}"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "q_b"] & \\
a'' & a''\times b \arrow[l, "r_{a''}"] \arrow[r, "r_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $r_b \circ \alpha = q_b$.

$- \times b(f) = \beta : (a\times b \xrightarrow{p_b} b) \longrightarrow (a'\times b \xrightarrow{q_b} b)$, DONDE $\beta : a\times b \to a'\times b$

ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & a\times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[dl, "f\circ p_a"'] \arrow[d, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "p_b"] & \\
a' & a'\times b \arrow[l, "q_{a'}"] \arrow[r, dashed, "q_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $q_b \circ \beta = p_b$

$p_b = q_b \circ \beta = (r_b \circ \alpha)\circ \beta = r_b \circ (\alpha \circ \beta)$, POR SER h ÚNICA $h = \alpha \circ \beta$

POR LO TANTO $- \times b(g \circ f) = h = \alpha \circ \beta = - \times b(g) \circ - \times b(f)$

6.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON OBJETO TERMINAL, PRODUCTOS FIBRADOS Y EXPONENCIACIÓN

SEA $\Pi_b : \mathcal{C}\downarrow b \longrightarrow \mathcal{C}$ TAL QUE

SI $f : a \to b \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b)$, $\Pi_b(f)$ ES EL SIGUIENTE PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f) \arrow[r] \arrow[d] & a^b \arrow[d, "f^b"] \\
1 \arrow[r, "\beta"] & b^b
\end{tikzcd}$$

DONDE $f^b : a^b \longrightarrow b^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[rr, "ev_b"] & & b \\
& a \arrow[ur, "f"] & \\
a^b \times b \arrow[uu, "f^b\times 1_b"] \arrow[ur, "ev_a"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

Y $\beta : 1 \longrightarrow b^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[r, "ev_b"] & b \\
1 \times b \arrow[u, "\beta \times 1_b"] \arrow[ur, "p_b"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

SI $g : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a' \xrightarrow{f'} b) \in \mathcal{M}(C \downarrow b)$ ENTONCES $f' \circ g = f$

$\Pi_b(g) : \Pi_b(f) \longrightarrow \Pi_b(f')$

POR LO TANTO LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS.

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "!f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a^b \arrow[d, "f^b"] & & \Pi_b(f') \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "!f'"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & a'^b \arrow[d, "f'^b"] \\
1 \arrow[r, "\beta"] & b^b & & 1 \arrow[r, "\beta"] & b^b
\end{tikzcd}$$

DONDE $f^b : a^b \longrightarrow b^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[rr, "ev_b"] & & b \\
& a \arrow[ur, "f"'] & \\
a^b \times b \arrow[uu, "f^b \times 1_b"] \arrow[ur, "ev_a"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_b \circ (f^b \times 1_b) = f \circ ev_a$

Y $f'^b : a'^b \longrightarrow b^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[rr, "ev_b"] & & b \\
& a' \arrow[ur, "f'"'] & \\
a'^b \times b \arrow[uu, "f'^b \times 1_b"] \arrow[ur, "ev_{a'}"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_b \circ (f'^b \times 1_b) = f' \circ ev_{a'}$

SEA $g^b : a^b \longrightarrow a'^b$ EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a'^b \times b \arrow[rr, "ev_{a'}"] & & a' \\
& a \arrow[ur, "g"'] & \\
a^b \times b \arrow[uu, "g^b \times 1_b"] \arrow[ur, "ev_a"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_{a'} \circ (g^b \times 1_b) = g \circ ev_a$

$$ev_b \circ ((f'^b \circ g^b) \times 1_b) = ev_b \circ (f'^b \times 1_b) \circ (g^b \times 1_b) = f' \circ ev_{a'} \circ (g^b \times 1_b)$$

$$= f' \circ g \circ ev_a = f \circ ev_a$$

COMO f^b ES ÚNICO $f^b = f'^b \circ g^b$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO $f^b \circ \beta' = \beta \circ !_f$ ENTONCES

$f'^b \circ g^b \circ \beta = \beta \circ !_f$. POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $h: \Pi_b(f) \longrightarrow \Pi_b(f')$ TAL QUE

$\beta'' \circ h = g^b \circ \beta'$ Y $!_{f'} \circ h = !_f$

SEA $h = \Pi_b(g)$

DEMOSTRAREMOS QUE Π_b ES UN FUNTOR.

1) SEA $1_f : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{f} b)$ IDENTIDAD EN $\mathcal{C}\downarrow b$

$\Pi_b(1_f) : \Pi_b(f) \longrightarrow \Pi_b(f)$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f) \arrow[rr, "\beta'"] \arrow[ddr, bend right, "!_f"'] & & a^b \arrow[dr, "1_a^b"] & \\
& \Pi_b(f) \arrow[rr, "\beta'"] \arrow[d, "!_f"] & & a^b \arrow[d, "f^b"] \\
& 1 \arrow[rr, "\beta"] & & b^b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

DONDE $1_a^b : a^b \longrightarrow a^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a^b \times b \arrow[rr, "ev_a"] & & a \\
& a \arrow[ur, "1_a"] & \\
a^b \times b \arrow[uu, "1_a^b \times 1_b"] \arrow[ur, "ev_a"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_a \circ (1_a^b \times 1_b) = 1_a \circ ev_a = ev_a$

$1_{a^b} \times 1_b = 1_{a^b \times b}$, ENTONCES $ev_a = ev_a \circ 1_{a^b \times b} = ev_a \circ (1_{a^b} \times 1_b)$

POR LO TANTO $1_a^b = 1_{a^b}$

ENTONCES $1_{\Pi_b(f)}$ HACE CONMUTAR AL PRIMER DIAGRAMA

POR LO TANTO $\Pi_b(1_f) = 1_{\Pi_b(f)}$

2) SEAN $g : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (a' \xrightarrow{f'} b)$, $h : (a' \xrightarrow{f'} b) \longrightarrow (a'' \xrightarrow{f''} b) \in Mor(\mathcal{C}\downarrow b)$

$\Pi_b(h\circ g) : \Pi_b(f) \longrightarrow \Pi_b(f'')$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f) \arrow[r, "\beta'''"] \arrow[ddr, dashed, "!_f"'] & a^b \arrow[dr, "(h\circ g)^b"] & \\
& \Pi_b(f'') \arrow[r, "\beta''"'] \arrow[dd, "!_{f''}"] & a''^b \arrow[dd, "f''^b"] \\
& & \\
& 1 \arrow[r, "\beta"'] & b^b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

DONDE $(h\circ g)^b : a^b \longrightarrow a''^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a''^b\times b \arrow[rr, "ev_{a''}"] & & a'' \\
& a \arrow[ur, "h\circ g"'] & \\
a^b\times b \arrow[uu, "(h\circ g)^b\times 1_b"] \arrow[ur, "ev_a"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_{a''}\circ((h\circ g)^b\times 1_b) = h\circ g\circ ev_a$

$\Pi_b(h) : \Pi_b(f') \longrightarrow \Pi_b(f'')$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f') \arrow[r, "\beta'"] \arrow[ddr, dashed, "!_{f'}"'] & a'^b \arrow[dr, "h^b"] & \\
& \Pi_b(f'') \arrow[r, "\beta''"'] \arrow[dd, "!_{f''}"] & a''^b \arrow[dd, "f''^b"] \\
& & \\
& 1 \arrow[r, "\beta"'] & b^b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

DONDE $h^b : a'^b \longrightarrow a''^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a''^b\times b \arrow[rr, "ev_{a''}"] & & a'' \\
& a' \arrow[ur, "h"'] & \\
a'^b\times b \arrow[uu, "h^b\times 1_b"] \arrow[ur, "ev_{a'}"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_{a''}\circ(h^b\times 1_b) = h\circ ev_{a'}$

$\Pi_b(g) : \Pi_b(f) \longrightarrow \Pi_b(f')$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f) \arrow[rr, "\beta'''"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "!_f"'] & & a^b \arrow[dr, dashed, "g^b"] & \\
& \Pi_b(f') \arrow[rr, "\beta'"'] \arrow[d, "!_{f'}"'] & & a'^b \arrow[d, "f'^b"] \\
& 1 \arrow[rr, "\beta"'] & & b^b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

DONDE $g^b: a^b \longrightarrow a'^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a'^b \times b \arrow[rr, "av_{a'}"] & & a' \\
& a \arrow[ur, "g"'] & \\
a^b \times b \arrow[uu, "g^b \times 1_b"] \arrow[ur, "av_a"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $av_{a'} \circ (g^b \times 1_b) = g \circ av_a$

$av_{a''} \circ ((h^b \circ g^b) \times 1_b) = av_{a''} \circ (h^b \times 1_b) \circ (g^b \times 1_b) = h \circ av_{a'} \circ (g^b \times 1_b) = h \circ g \circ av_a$

POR SER $(h \circ g)^b$ ÚNICO $(h \circ g)^b = h^b \circ g^b$

$\beta'' \circ \Pi_b(h) \circ \Pi_b(g) = h^b \circ \beta' \circ \Pi_b(g) = h^b \circ g^b \circ \beta''' = (h \circ g)^b \circ \beta'''$

COMO $\Pi_b(h \circ g)$ ES ÚNICO $\Pi_b(h \circ g) = \Pi_b(h) \circ \Pi_b(g)$

PROPOSICIÓN 3.2.2.· SI $G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ Y $H: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$ SON FUNTORES ENTONCES $H \circ G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ ES UN FUNTOR

DEMOSTRACIÓN:

i) SEA $a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ ENTONCES $G(a) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ Y POR LO TANTO $H(G(a)) \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$

POR LO TANTO $\forall\, a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, $(H \circ G)(a) \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$

ii) SEA $f: a \longrightarrow b \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ ENTONCES $G(f): G(a) \longrightarrow G(b) \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ Y

POR LO TANTO $H(G(f)): H(G(a)) \longrightarrow H(G(b)) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

POR LO TANTO $\forall\, f: a \longrightarrow b \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ $(H \circ G)(f): (H \circ G)(a) \longrightarrow (H \circ G)(b) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

1) $(H \circ G)(1_a) = H(G(1_a)) = H(1_{G(a)}) = 1_{H(G(a))} = 1_{(H \circ G)(a)}$

2) SEAN $f: a \longrightarrow b$ Y $g: b \longrightarrow c \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$(H\circ G)(g\circ f) = H(G(g\circ f)) = H(G(g)\circ G(f)) = H(G(g))\circ H(G(f)) = (H\circ G)(g)\circ(H\circ G)(f)$

POR LO TANTO $H\circ G$ ES UN FUNTOR

DEFINICIÓN 3.2.3.- EL FUNTOR $H\circ G$ DE LA PROPOSICIÓN ANTERIOR ES LLAMADO EL FUNTOR COMPOSICIÓN DE G Y H

DEFINICIÓN 3.2.4.- UN FUNTOR $G:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ ES ISO, SI TIENE INVERSO, ES DECIR, SI EXISTE UN FUNTOR $H:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}$ TAL QUE $H\circ G = 1_{\mathcal{C}}$ Y $G\circ H = 1_{\mathcal{D}}$

DEFINICIÓN 3.2.5.- SEAN $\mathcal{C}$ Y $\mathcal{D}$ CATEGORÍAS, $\mathcal{C}$ Y $\mathcal{D}$ SON CATEGORÍAS ISOMORFAS $\mathcal{C}\cong\mathcal{D}$ SI EXISTE $G:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ FUNTOR ISO.

EJEMPLO

SEA $f:b_1\longrightarrow b_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_2)$ ENTONCES $(\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1\xrightarrow{f}b_2)$ Y $\mathcal{C}\downarrow b_1$ SON CATEGORÍAS ISOMORFAS

DEMOSTRACION: SEA $G:(\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1\xrightarrow{f}b_2)\longrightarrow\mathcal{C}\downarrow b_1$ TAL QUE

SI $h:(a\xrightarrow{g}b_2)\longrightarrow(b_1\xrightarrow{f}b_2) \in \mathcal{M}((\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1\xrightarrow{f}b_2))$ ENTONCES

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & & b_1 \arrow[dl, dash, "f"] \\
& b_2 &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA EN $\mathcal{C}$

SEA $G(h) = h:a\longrightarrow b_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_1)$

SI $K:((a\xrightarrow{g}b_2)\xrightarrow{h}(b_1\xrightarrow{f}b_2))\longrightarrow((a'\xrightarrow{g'}b_2)\longrightarrow(b_1\xrightarrow{f}b_2)) \in m((\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1\xrightarrow{f}b_2))$

ENTONCES EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA EN $\mathcal{C}\downarrow b_2$

$$\begin{tikzcd}
(a \xrightarrow{g} b_2) \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "h"'] & & (a' \xrightarrow{g'} b_2) \arrow[dl, "h'"] \\
& (b_1 \xrightarrow{f} b_2) &
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "h"'] & & a' \arrow[dl, "h'"] \\
& b_1 &
\end{tikzcd}$$
CONMUTA EN $\mathcal{C}$

$\mathcal{G}(K): \mathcal{G}(h) \longrightarrow \mathcal{G}(h')$ POR LO TANTO $\mathcal{G}(K): (a \xrightarrow{h} b_1) \longrightarrow (a' \xrightarrow{h'} b_1)$

ENTONCES $\mathcal{G}(k) = K \in \mathcal{M}(\mathcal{C} \downarrow b_1)$

1) SEA 1_h IDENTIDAD EN $(\mathcal{C}\downarrow h_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2)$

$\mathcal{G}(1_h) = 1_h = 1_{\mathcal{G}(h)}$

2) SEAN $K, K' \in \mathcal{M}((\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2)) \ni K' \circ K$ ESTÁ DEFINIDA

$\mathcal{G}(K' \circ K) = K' \circ K = \mathcal{G}(K') \circ \mathcal{G}(K)$

POR LO TANTO $\mathcal{G}$ ES UN FUNTOR

SEA $H: \mathcal{C}\downarrow b_1 \longrightarrow (\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2)$ TAL QUE

SI $h: a \longrightarrow b_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b_1)$ SEA $g = f \circ h: a \longrightarrow b_2$

POR LO TANTO $h: (a \xrightarrow{g} b_2) \longrightarrow (b_1 \xrightarrow{f} b_2) \in \mathcal{O}((\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1 \xrightarrow{f} b_2))$

ENTONCES $H(h) = h$

SI $K: (a \xrightarrow{h} b_1) \longrightarrow (a' \xrightarrow{h'} b_1) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_1)$ ENTONCES $h' \circ K = h$

SEAN $g = f \circ h: a \longrightarrow b_2$ y $g' = f \circ h': a' \longrightarrow b_2$

POR LO TANTO
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "h"] \arrow[ddr, "g"'] & & a' \arrow[dl, "h'"'] \arrow[ddl, "g'"] \\
& b_1 \arrow[d, "f"] & \\
& b_2 &
\end{tikzcd}$$
CONMUTA EN $\mathcal{C}$

Y

$$\begin{tikzcd}
(a \xrightarrow{g} b_2) \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "h"'] & & (a' \xrightarrow{g'} b_2) \arrow[dl, "h'"] \\
& (b_1 \xrightarrow{f} b_2) &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA EN $\mathcal{C}\downarrow b_2$

$\therefore\ k : ((a \xrightarrow{g} b_2) \xrightarrow{h} (b_1 \xrightarrow{f} b_2)) \longrightarrow ((a' \xrightarrow{g'} b_2) \xrightarrow{h'} (b_1 \xrightarrow{f} b_2)) \in \mathcal{M}_\ell((\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1 \xrightarrow{f} b_2))$

1) SEA 1_h IDENTIDAD EN $\mathcal{C}\downarrow b_1$

$H(1_h) = 1_h = 1_{H(h)}$

2) SEAN $k, k' \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{C}\downarrow b_1)$ TALES QUE $k' \circ k$ ESTA DEFINIDA.

$H(k' \circ k) = k' \circ k = H(k') \circ H(k)$

POR LO TANTO H ES UN FUNTOR

SEA $k \in \mathcal{M}_\ell((\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1 \xrightarrow{f} b_2))$

$(H \circ G)(k) = H(G(k)) = H(k) = k = 1_{(\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1 \xrightarrow{f} b_2)}(k)$

POR LO TANTO $H \circ G = 1_{(\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1 \xrightarrow{f} b_2)}$

SEA $k \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{C}\downarrow b_1)$

$(G \circ H)(k) = G(H(k)) = G(k) = k = 1_{\mathcal{C}\downarrow b_1}(k)$

POR LO TANTO $G \circ H = 1_{\mathcal{C}\downarrow b_1}$

POR LO TANTO G ES FUNTOR ISO Y $(\mathcal{C}\downarrow b_2)(b_1 \xrightarrow{f} b_2) \cong \mathcal{C}\downarrow b_1$

ADJUNCIONES

DEFINICION 3.2.6.- SEAN $\mathcal{C}$ Y $\mathcal{D}$ CATEGORÍAS, UNA ADJUNCIÓN DE $\mathcal{C}$ A $\mathcal{D}$ ES UNA TERNA (G, H, φ) TAL QUE $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ SON FUNTORES Y $\varphi : \mathcal{O}(\mathcal{C}) \times \mathcal{O}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{M}_\ell(\mathcal{C}onj)$ ES UNA FUNCION TAL QUE SI $c \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ Y $d \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ ENTONCES $\varphi((c,d)) = \varphi_{cd} : \mathcal{D}(G(c), d) \cong \mathcal{C}(c, H(d))$ ES UNA BIYECCION TAL QUE PARA TODA $k : d \longrightarrow d' \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{D})$ Y PARA

TODA $h: c' \to c' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS CONMUTAN

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c),d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "(k)_*"'] & \mathcal{C}(c,H(d)) \arrow[d, "(H(k))_*"] & d \arrow[d, "k"] \\
\mathcal{D}(G(c),d') \arrow[r, "\varphi_{cd'}"'] & \mathcal{C}(c,H(d')) & d'
\end{tikzcd}$$

DONDE SI $f: G(c) \to d$ Y $g: c \to H(d)$ ENTONCES

$(k)_*(f) = k \circ f$ Y $(H(k))_*(g) = H(k) \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c),d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "(G(h))^*"'] & \mathcal{C}(c,H(d)) \arrow[d, "(h)^*"] & c \\
\mathcal{D}(G(c'),d) \arrow[r, "\varphi_{c'd}"'] & \mathcal{C}(c',H(d)) & c' \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

DONDE SI $f: G(c) \to d$ Y $g: c \to H(d)$ ENTONCES

$(G(h))^*(f) = f \circ G(h)$ Y $(h)^*(g) = g \circ h$

DEFINICIÓN 3.2.7.- SI (G, H, φ) ES UNA ADJUNCIÓN ENTONCES SE DICE QUE EL FUNTOR G ES ADJUNTO IZQUIERDO DEL FUNTOR H Y EL FUNTOR H ES ADJUNTO DERECHO DEL FUNTOR G

EJEMPLOS

1.- SI $\mathcal{C}$ ES UNA CATEGORÍA CON PRODUCTOS, ENTONCES $\Sigma_b: \mathcal{C}\downarrow b \to \mathcal{C}$ ES ADJUNTO IZQUIERDO DE $-\times b: \mathcal{C} \to \mathcal{C}\downarrow b$

SEA $f: c \to b \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b)$ Y $a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, ENTONCES

$\Sigma_b(f) = c$ Y $-\times b\,(a) = P_b: a \times b \to b$

SEA $\varphi: \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b) \times \mathcal{O}(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}(Conj)$ TAL QUE

$\varphi((f,a)) = \varphi_{fa}: \mathcal{C}(\Sigma_b(f), a) \cong \mathcal{C}\downarrow b(f, -\times b(a))$ TAL QUE

SI $g: c \to a \in \mathcal{C}(\Sigma_b(f), a)$ ENTONCES, POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE a Y b EXISTA UN ÚNICO MORFISMO $h. c \to a \times b$ TAL QUE $P_a \circ h = g$ Y $P_b \circ h = f$, ES DECIR,

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "f"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $h: (c \xrightarrow{f} b) \to (a \times b \xrightarrow{P_b} b) \in \mathcal{C}\downarrow b(f, - \times b(a))$

ENTONCES $\varphi_{fa}(g) = h$

SEAN $g, g': c \to a$ TALES QUE $\varphi_{fa}(g) = \varphi_{fa}(g')$ ENTONCES

$g = P_a \circ \varphi_{fa}(g) = P_a \circ \varphi_{fa}(g') = g'$. POR LO TANTO φ_{fa} ES INYECTIVA

SEA $h: (c \xrightarrow{f} b) \to (a \times b \xrightarrow{P_b} b) \in \mathcal{C}\downarrow b(f, - \times b(a))$ ENTONCES $P_b \circ h = f$

SEA $g: c \to a$ TAL QUE $g = P_a \circ h$, ENTONCES

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "g = P_a \circ h"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "P_a"] \arrow[r, "P_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $\varphi_{fa}(g) = h$ Y φ_{fa} ES SOBRE

POR LO TANTO φ_{fa} ES UNA BIYECCIÓN

SEA $\beta: a \to a' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ Y CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\Sigma_b(f), a) \arrow[r, "\varphi_{fa}"] \arrow[d, "(\beta)_*"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}\downarrow b(f, - \times b(a)) \arrow[d, "(- \times b(\beta))_*"] \\
\mathcal{C}(\Sigma_b(f), a') \arrow[r, "\varphi_{fa'}"'] & \mathcal{C}\downarrow b(f, - \times b(a'))
\end{tikzcd}$$

SEA $g: c \to a \in \mathcal{C}(\Sigma_b(f), a)$

$(\varphi_{Fa'} \circ (\beta)_*)(g) = \varphi_{Fa'}((\beta)_*(g)) = \varphi_{Fa'}(\beta \circ g) = k$ DONDE $k : c \to a' \times b$

ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\beta \circ g"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
a' & a' \times b \arrow[l, "q_{a'}"] \arrow[r, "q_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

ES DECIR, $q_{a'} \circ k = \beta \circ g$ Y $q_b \circ k = f$

$\varphi_{Fa}(g) = h$ DONDE $h : c \to a \times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $p_a \circ h = g$ Y $p_b \circ h = f$

$-\times b(\beta) : a \times b \to a' \times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "\beta"'] & a \times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[d, "-\times b(\beta)"] \arrow[dr, dashed, "p_b"] & \\
a' & a' \times b \arrow[l, "q_{a'}"'] \arrow[r, dashed, "q_b"] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $q_{a'} \circ -\times b(\beta) = \beta \circ p_a$ Y $q_b \circ -\times b(\beta) = p_b$

$((-\times b(\beta))_* \circ \varphi_{Fa})(g) = (-\times b(\beta))_*(h) = -\times b(\beta) \circ h$

$q_{a'} \circ (-\times b(\beta) \circ h) = (q_{a'} \circ -\times b(\beta)) \circ h = (\beta \circ p_a) \circ h = \beta \circ (p_a \circ h) = \beta \circ g.$

$q_b \circ (-\times b(\beta) \circ h) = (q_b \circ -\times b(\beta)) \circ h = p_b \circ h = f$

POR SER K ÚNICA $k = -\times b(\beta) \circ h$

POR LO TANTO $\varphi_{Fa'} \circ (\beta)_* = (-\times b(\beta))_* \circ \varphi_{Fa}$ Y $(*)$ CONMUTA.

SEA $\alpha : (c' \xrightarrow{f'} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{f} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{C} \downarrow b)$, ENTONCES $f \circ \alpha = f'$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\Sigma_b(f), a) \arrow[r, "\varphi_{fa}"] \arrow[d, "(\Sigma_b(\alpha))^*"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \mathcal{C}\downarrow b(f, -\times b(a)) \arrow[d, "(\alpha)^*"] \\
\mathcal{C}(\Sigma_b(f'), a) \arrow[r, "\varphi_{f'a}"] & \mathcal{C}\downarrow b(f', -\times b(a))
\end{tikzcd}$$

SEA $g: c \to a \in \mathcal{C}(\Sigma_b(f), a)$

$\varphi_{f'a}((\Sigma_b(\alpha))^*(g)) = \varphi_{f'a}(g \circ \Sigma_b(\alpha)) = \varphi_{f'a}(g \circ \alpha) = k$, DONDE $k: c' \to a \times b$

ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
 & c' \arrow[dl, "g \circ \alpha"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "f'"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $p_a \circ k = g \circ \alpha$ Y $p_b \circ k = f'$

$\varphi_{fa}(g) = h$ DONDE $h: c \to a \times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $p_a \circ h = g$ Y $p_b \circ h = f$

$((\alpha)^* \circ \varphi_{fa})(g) = (\alpha)^*(h) = h \circ \alpha$

$p_a \circ (h \circ \alpha) = (p_a \circ h) \circ \alpha = g \circ \alpha$ Y $p_b \circ (h \circ \alpha) = (p_b \circ h) \circ \alpha = f \circ \alpha = f'$

POR SER k ÚNICA $k = h \circ \alpha$

POR LO TANTO $\varphi_{f'a} \circ (\Sigma_b(\alpha))^* = (\alpha)^* \circ \varphi_{fa}$ Y $(**)$ CONMUTA

POR LO TANTO Σ_b ES ADJUNTO IZQUIERDO DE $-\times b$

2.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON OBJETO TERMINAL, PRODUCTOS FIBRADOS Y EXPONENCIACIÓN, ENTONCES $\Pi_b: \mathcal{C}\downarrow b \to \mathcal{C}$ ES ADJUNTO DERECHO DE $-\times b: \mathcal{C} \to \mathcal{C}\downarrow b$

SEA $a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ Y $f: c \to b \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b)$ ENTONCES

$- \times b(a) = P_b : a \times b \to b$ Y $\Pi_b(f)$ ES EL SIGUIENTE PRODUCTO

FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(F) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "!_F"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & c^b \arrow[d, "f^b"] \\
1 \arrow[r, "\beta"] & b^b
\end{tikzcd}$$

DONDE $f^b : c^b \to b^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[rr, "ev_b"] & & b \\
& c \arrow[ur, "f"'] & \\
c^b \times b \arrow[uu, "f^b \times 1_b"] \arrow[ur, "ev_c"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_b \circ (f^b \times 1_b) = f \circ ev_c$

Y $\beta : 1 \to b^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[r, "ev_b"] & b \\
1 \times b \arrow[u, "\beta \times 1_b"] \arrow[ur, dashed, "q_b"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_b \circ (\beta \times 1_b) = q_b$

SEA $\varphi : \mathcal{O}(\mathcal{C}) \times \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b) \to \mathcal{M}(Con)$ TAL QUE

$\varphi((a, f)) = \varphi_{af} : \mathcal{C}\downarrow b(- \times b(a), f) \cong \mathcal{C}(a, \Pi_b(f))$ TAL QUE

SI $g : (a \times b \xrightarrow{p_b} b) \to (c \xrightarrow{f} b)$ ENTONCES $f \circ g = p_b$

SEA $\alpha : a \to c^b$ EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
c^b \times b \arrow[r, "ev_c"] & c \\
a \times b \arrow[u, "\alpha \times 1_b"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $ev_c \circ (\alpha \times 1_b) = g$

SEA $!_a : a \to 1$ POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE 1 Y b EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $!_a \times 1_b : a \times b \to 1 \times b$ TAL QUE

$!a \times 1_b = \langle !a \circ P_a, 1_b \circ P_b \rangle$ Y EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "!a"'] & a \times b \arrow[l, "P_a"'] \arrow[r, "P_b"] \arrow[d, dashed, "!a \times 1_b"] & b \arrow[d, "q_h"] \\
1 & 1 \times b \arrow[l, "!_{1 \times b}"'] \arrow[r, "q_b"] & b
\end{tikzcd}$$

ES DECIR, $q_b \circ (!a \times 1_b) = P_b$

SEA $\gamma : a \longrightarrow b^a$ EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
b^b \times b \arrow[r, "ev_b"] & b \\
a \times b \arrow[u, dashed, "\gamma \times 1_b"] \arrow[ur, "P_b"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $ev_b \circ (\gamma \times 1_b) = P_b$

$ev_b \circ ((\beta \circ !a) \times 1_b) = ev_b \circ (\beta \times 1_b) \circ (!a \times 1_b) = q_h \circ (!a \times 1_b) = P_b$

$ev_b \circ ((f^b \circ \alpha) \times 1_h) = ev_b \circ (f^b \times 1_b) \circ (\alpha \times 1_b) = f \circ ev_c \circ (\alpha \times 1_b) = f \circ g = P_b$

POR SER γ ÚNICA $\gamma = \beta \circ !a = f^b \circ \alpha$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $K : a \longrightarrow \Pi_b(f)$

TAL QUE $\delta \circ K = \alpha$ Y $!f \circ K = 1_a$. ENTONCES SEA $\varphi_{af}(g) = K$

SEA $g' : (a \times b \xrightarrow{P_b} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{f} b)$ TAL QUE $\varphi_{af}(g) = \varphi_{af}(g')$, ENTONCES

$\alpha' : a \longrightarrow c^h$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE $ev_c \circ (\alpha' \times 1_b) = g'$

$\alpha = \delta \circ \varphi_{af}(g) = \delta \circ \varphi_{af}(g') = \alpha'$ POR LO TANTO $\alpha = \alpha'$

$g = ev_c \circ (\alpha \times 1_b) = ev_c(\alpha' \times 1_b) = g'$. POR LO TANTO $g = g'$ Y φ_{af}

ES INYECTIVA

SEA $K : a \longrightarrow \Pi_b(f)$, SEA $\bar{g} = \delta \circ K : a \longrightarrow c^b$

SEA $g = ev_c \circ (\bar{g} \times 1_b) : a \times b \longrightarrow c$ POR LO TANTO $\varphi_{af}(g) = K$

POR LO TANTO φ_{af} ES SOBRE Y φ_{af} ES BIYECTIVA

SEA $\alpha : (c \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (c' \xrightarrow{f'} b) \in \mathcal{M}_\ell(C \downarrow b)$ ENTONCES $f' \circ \alpha = f$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\downarrow b(-\times b(a), f) \arrow[r, "\varphi_{af}"] \arrow[d, "(\alpha)_*"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \mathcal{C}(a, \Pi_b(f)) \arrow[d, "(\Pi_b(\alpha))_*"] \\
\mathcal{C}\downarrow b(-\times b(a), f') \arrow[r, "\varphi_{af'}"] & \mathcal{C}(a, \Pi_b(f'))
\end{tikzcd}$$

SEA $g : (a\times b \xrightarrow{p_b} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{f} b) \in \mathcal{C}\downarrow b(-\times b(a), f)$ ENTONCES

$f \circ g = p_b$

$\varphi_{af}(g) = k : a \longrightarrow \Pi_b(f)$ EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE $\delta \circ k = \alpha$ Y $!_f \circ k = !_a$. DONDE α ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE $ev_c \circ (\alpha \times 1_b) = g$

$(\Pi_b(\alpha))_*(k) = \Pi_b(\alpha) \circ k$ DONDE $\Pi_b(\alpha) : \Pi_b(f) \longrightarrow \Pi_b(f')$ ES EL ÚNICO MORFISMO QUE HACE CONMUTAR EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
\Pi_b(f) \arrow[r, "\delta"] \arrow[ddr, bend right, "!_f"'] & c^b \arrow[dr, "\alpha^b"] & \\
& \Pi_b(f') \arrow[r, "\delta'"'] \arrow[d, dashed, "!_{f'}"'] & c'^b \arrow[d, dashed, "f'^b"] \\
& 1 \arrow[r, "\beta"] & b^b
\end{tikzcd}$$

DONDE $\alpha^b : c^b \longrightarrow c'^b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
c'^b \times b \arrow[rr, "ev_{c'}"] & & c' \\
& c \arrow[ur, "\alpha"'] & \\
c^b \times b \arrow[uu, "\alpha^b \times 1_b"] \arrow[ur, "ev_c"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $ev_{c'} \circ (\alpha^b \times 1_b) = \alpha \circ ev_c$

$(\alpha)_*(g) = \alpha \circ g : a \times b \longrightarrow c'$

$\varphi_{af'}(\alpha \circ g) = h : a \longrightarrow \Pi_b(f')$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$\delta' \circ h = \alpha'$ Y $!_{f'} \circ h = !_a$. DONDE α' ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$ev_{c'} \circ (\alpha' \times 1_b) = \alpha \circ g$

$ev_{c'} \circ ((\alpha^b \circ \alpha) \times 1_b) = ev_{c'} \circ (\alpha^b \times 1_b) \circ (\alpha \times 1_b) = \alpha \circ ev_c \circ (\alpha \times 1_b) = \alpha \circ g$

POR SER α' ÚNICA $\alpha' = \alpha^b \circ \alpha$

$\delta' \circ (\Pi_b(\alpha) \circ k) = (\delta' \circ \Pi_b(\alpha)) \circ k = \alpha^b \circ \delta \circ k = \alpha^b \circ \alpha = \alpha'$

$!_{f'} \circ (\Pi_b(\alpha) \circ k) : a \longrightarrow 1$ POR LO TANTO $!_{f'} \circ (\Pi_b(\alpha) \circ k) = !_a$

POR SER h ÚNICA $h = \Pi_b(\alpha) \circ k$

POR LO TANTO $(\Pi_b(\alpha))_* \circ \varphi_{af} = \varphi_{af'} \circ (\alpha)_*$ Y (**) CONMUTA

SEA $\gamma : a' \longrightarrow a \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ Y CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\downarrow b(-\times b(a), f) \arrow[r, "\varphi_{af}"] \arrow[d, "(-\times b(\gamma))^*"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & \mathcal{C}(a, \Pi_b(f)) \arrow[d, "(\gamma)^*"] \\
\mathcal{C}\downarrow b(-\times b(a'), f) \arrow[r, "\varphi_{a'f}"] & \mathcal{C}(a', \Pi_b(f))
\end{tikzcd}$$

SEA $g : (a \times b \xrightarrow{p_b} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{f} b) \in \mathcal{C}\downarrow b(-\times b(a), f)$ ENTONCES

$f \circ g = p_b$

$(-\times b(\gamma))^*(g) = g \circ -\times b(\gamma) : a' \times b \longrightarrow b$ DONDE $-\times b(\gamma) : a' \times b \longrightarrow a \times b$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & a' \times b \arrow[l, "q_{a'}"'] \arrow[r, "q_b"] \arrow[d, "-\times b(\gamma)"] & b \arrow[d, dashed, "1_b"] \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[r, "p_b"] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

POR LO TANTO $-\times b(\gamma) = \gamma \times 1_b$

$\varphi_{a'f}(g \circ -\times b(\gamma)) = k : a' \longrightarrow \Pi_b(f)$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE $\delta \circ k = \alpha'$ Y $!_f \circ k = !_{a'}$. DONDE α' ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
c^b \times b \arrow[r, "ev_c"] & c \\
a' \times b \arrow[u, dashed, "\alpha' \times 1_b"] \arrow[ur, dashed, "g \circ -\times b(\gamma)"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $ev_c \circ (\alpha' \times 1_b) = g \circ -\times b(\gamma)$

$\varphi_{af}(g) = h : a \longrightarrow \Pi_b(f)$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$\delta \circ h = \alpha$ y $!_f \circ h = !_a$. DONDE α ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
c^b \times b \arrow[r, "ev_c"] & c \\
a \times b \arrow[u, "\alpha \times 1_b"] \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $ev_c \circ (\alpha \times 1_b) = g$

$(\gamma)^* \circ h = h \circ \gamma : a' \longrightarrow \Pi_b(f)$

$ev_c \circ ((\alpha \circ \gamma) \times 1_b) = ev_c \circ (\alpha \times 1_b) \circ (\gamma \times 1_b) = g \circ (\gamma \times 1_b) = g \circ -\times b(\gamma)$

POR SER α' ÚNICA $\alpha \circ \gamma = \alpha'$

$\delta \circ (h \circ \gamma) = (\delta \circ h) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma = \alpha'$

$!_f \circ (h \circ \gamma) : a' \longrightarrow 1$ POR LO TANTO $!_f \circ (h \circ \gamma) = !_{a'}$

POR SER K ÚNICA $K = h \circ \gamma$

POR LO TANTO $\varphi_{\alpha f} \circ (-\times b(\gamma))^* = (\gamma)^* \circ \varphi_{af}$ y (**) CONMUTA

POR LO TANTO Π_b ES ADJUNTO DERECHO DE $-\times b$

HEMOS DEMOSTRADO LA SIGUIENTE

PROPOSICIÓN 3.2.8.- SI $\mathcal{C}$ ES UNA CATEGORÍA CON OBJETO TERMINAL PRODUCTOS FIBRADOS Y EXPONENCIACIÓN ENTONCES $-\times b : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \perp b$ TIENE ADJUNTO IZQUIERDO $\Sigma_b : \mathcal{C} \perp b \longrightarrow \mathcal{C}$ Y ADJUNTO DERECHO $\Pi_b : \mathcal{C} \perp b \longrightarrow \mathcal{C}$

PROPOSICIÓN 3.2.9.- SI (G, H, φ) ES UNA ADJUNCIÓN ENTONCES EL FUNTOR G PRESERVA EPIMORFISMOS

DEMOSTRACIÓN: SEAN $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ Y $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ FUNTORES

SEA $f : c' \twoheadrightarrow c$ UN $\mathcal{C}$-EPIMORFISMO, QUEREMOS DEMOSTRAR QUE $G(f) : G(c') \longrightarrow G(c)$ ES UN $\mathcal{D}$-EPIMORFISMO

POR SER (G, H, φ) ADJUNCIÓN TENEMOS QUE $\forall c \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ y $d \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

$\varphi((c,d)) = \varphi_{cd} : \mathcal{D}(G(c),d) \cong \mathcal{C}(c,H(d))$ TAL QUE PARA $f: c' \longrightarrow c$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c),d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "(G(f))^*"'] & \mathcal{C}(c,H(d)) \arrow[d, "(f)^*"] \\
\mathcal{D}(G(c'),d) \arrow[r, "\varphi_{c'd}"] & \mathcal{C}(c',H(d))
\end{tikzcd}$$ CONMUTA

SEAN $g_1, g_2 : G(c) \longrightarrow d$ TALES QUE $g_1 \circ G(f) = g_2 \circ G(f)$

$\varphi_{cd}(g_1) \circ f = (f)^* \circ \varphi_{cd}(g_1) = \varphi_{c'd}((G(f))^*(g_1)) = \varphi_{c'd}(g_1 \circ G(f)) = \varphi_{c'd}(g_2 \circ G(f))$

$= \varphi_{c'd}((G(f))^*(g_2)) = (f)^* \circ \varphi_{cd}(g_2) = \varphi_{cd}(g_2) \circ f$

POR LO TANTO $\varphi_{cd}(g_1) \circ f = \varphi_{cd}(g_2) \circ f$ POR SER f EPIMORFISMO

$\varphi_{cd}(g_1) = \varphi_{cd}(g_2)$, COMO φ_{cd} ES UNA BIYECCIÓN $g_1 = g_2$

POR LO TANTO $G(f) : G(c') \longrightarrow G(c)$ ES EPIMORFISMO

PROPOSICIÓN 3.2.10.- SI (G, H, φ) ES UNA ADJUNCIÓN ENTONCES EL FUNTOR G PRESERVA COPRODUCTOS

DEMOSTRACIÓN: SEAN $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ Y $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$

SEA $c_1 \xrightarrow{i_1} c_1 + c_2 \xleftarrow{i_2} c_2$ COPRODUCTO EN $\mathcal{C}$

QUEREMOS DEMOSTRAR QUE $G(c_1) \xrightarrow{G(i_1)} G(c_1+c_2) \xleftarrow{G(i_2)} G(c_2)$ ES COPRODUCTO EN $\mathcal{D}$

SEAN $f_1 : G(c_1) \longrightarrow d$ Y $f_2 : G(c_2) \longrightarrow d$

POR SER (G, H, φ) ADJUNCIÓN TENEMOS QUE $\forall c \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ Y $d \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

$\varphi((c,d)) = \varphi_{cd} : \mathcal{D}(G(c),d) \cong \mathcal{C}(c,H(d))$ TAL QUE $\forall \alpha : c' \longrightarrow c$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c),d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "(G(\alpha))^*"'] & \mathcal{C}(c,H(d)) \arrow[d, "(\alpha)^*"] \\
\mathcal{D}(G(c'),d) \arrow[r, "\varphi_{c'd}"'] & \mathcal{C}(c',H(d))
\end{tikzcd}$$ CONMUTA

$\varphi_{c_1d}(f_1)=\varphi_{f_1}: c_1 \longrightarrow H(d)$ Y $\varphi_{c_2d}(f_2)=\varphi_{f_2}: c_2 \longrightarrow H(d)$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EN $\mathcal{C}$, EXISTE UN ÚNICO

MORFISMO $g: c_1+c_2 \longrightarrow H(d)$ TAL QUE $g\circ i_1 = \varphi_{f_1}$ Y $g\circ i_2=\varphi_{f_2}$

$\varphi^{-1}_{c_1+c_2d}(g)=\varphi^{-1}_g : G(c_1+c_2)\longrightarrow d$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c_1+c_2),d) \arrow[d, "(G(i_1))^*"'] & & \mathcal{C}(c_1+c_2, H(d)) \arrow[ll, "\varphi^{-1}_{c_1+c_2d}"'] \arrow[d, "(i_1)^*"] \\
\mathcal{D}(G(c_1),d) & & \mathcal{C}(c_1, H(d)) \arrow[ll, "\varphi^{-1}_{c_1d}"']
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

$((G(i_1))^*\circ \varphi^{-1}_{c_1+c_2d})(g) = (G(i_1))^*(\varphi^{-1}_g) = \varphi^{-1}_g\circ G(i_1)$

$(\varphi^{-1}_{c_1d}\circ (i_1)^*)(g) = \varphi^{-1}_{c_1d}(g\circ i_1) = \varphi^{-1}_{c_1d}(\varphi_{f_1}) = (\varphi^{-1}_{c_1d}\circ \varphi_{c_1d})(f_1) = f_1$

POR LO TANTO $\varphi^{-1}_g\circ G(i_1) = f_1$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c_1+c_2),d) \arrow[d, "(G(i_2))^*"'] & & \mathcal{C}(c_1+c_2, H(d)) \arrow[ll, "\varphi^{-1}_{c_1+c_2d}"'] \arrow[d, "(i_2)^*"] \\
\mathcal{D}(G(c_2),d) & & \mathcal{C}(c_2, H(d)) \arrow[ll, "\varphi^{-1}_{c_2d}"]
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

$((G(i_2))^*\circ \varphi^{-1}_{c_1+c_2d})(g) = (G(i_2))^*(\varphi^{-1}_g) = \varphi^{-1}_g\circ G(i_2)$

$(\varphi^{-1}_{c_2d}\circ (i_2)^*)(g) = \varphi^{-1}_{c_2d}(g\circ i_2) = \varphi^{-1}_{c_2d}(\varphi_{f_2}) = (\varphi^{-1}_{c_2d}\circ \varphi_{c_2d})(f_2) = f_2$

POR LO TANTO $\varphi^{-1}_g\circ G(i_2) = f_2$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{g}: G(c_1+c_2)\longrightarrow d$ TAL QUE

$\bar{g}\circ G(i_1) = f_1$ Y $\bar{g}\circ G(i_2)=f_2$

$\varphi^{-1}_{c_1+c_2d}(\bar{g}) = \varphi^{-1}_{\bar{g}} : c_1+c_2 \longrightarrow H(d)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c_1+c_2),d) \arrow[rr, "\varphi_{c_1+c_2d}"'] \arrow[d, "(G(i_1))^*"'] & & \mathcal{C}(c_1+c_2, H(d)) \arrow[d, "(i_1)^*"] \\
\mathcal{D}(G(c_1),d) \arrow[rr, "\varphi_{c_1d}"] & & \mathcal{C}(c_1, H(d))
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

$((i_1)^* \circ \varphi_{c_1+c_2 d})(\bar{g}) = (i_1)^* \circ \varphi_{\bar{g}} = \varphi_{\bar{g}} \circ i_1$

$(\varphi_{c_1 d} \circ (G(i_1))^*)(\bar{g}) = \varphi_{c_1 d}(\bar{g} \circ G(i_1)) = \varphi_{c_1 d}(f_1) = \varphi_{f_1}$

POR LO TANTO $\varphi_{\bar{g}} \circ i_1 = \varphi_{f_1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G(c_1+c_2),d) \arrow[r, "\varphi_{c_1+c_2 d}"] \arrow[d, "(G(i_2))^*"'] & \mathcal{C}(c_1+c_2, H(d)) \arrow[d, "(i_2)^*"] \\
\mathcal{D}(G(c_2),d) \arrow[r, "\varphi_{c_2 d}"'] & \mathcal{C}(c_2, H(d))
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

$((i_2)^* \circ \varphi_{c_1+c_2 d})(\bar{g}) = (i_2)^* \circ \varphi_{\bar{g}} = \varphi_{\bar{g}} \circ i_2$

$(\varphi_{c_2 d} \circ (G(i_2))^*)(\bar{g}) = \varphi_{c_2 d}(\bar{g} \circ G(i_2)) = \varphi_{c_2 d}(f_2) = \varphi_{f_2}$

POR LO TANTO $\varphi_{\bar{g}} \circ i_2 = \varphi_{f_2}$

POR SER g ÚNICO $\varphi_{\bar{g}} = g$ POR LO TANTO $\varphi_{c_1+c_2 d}(\bar{g}) = g$,

ENTONCES $\bar{g} = (\varphi^{-1}_{c_1+c_2 d} \circ \varphi_{c_1+c_2 d})(\bar{g}) = \varphi^{-1}_{c_1+c_2 d}(g) = \varphi^{-1} g$

POR LO TANTO $G(c_1) \xrightarrow{G(i_1)} G(c_1+c_2) \xleftarrow{G(i_2)} G(c_2)$ ES COPRODUCTO EN

$\mathcal{D}$ Y G PRESERVA COPRODUCTOS

SECCION 3.-

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TOPOS

SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA Y $f: b_1 \longrightarrow b_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

1.- SEA $\Sigma_f : \mathcal{C}\downarrow b_1 \longrightarrow \mathcal{C}\downarrow b_2$ TAL QUE

SI $g: a \longrightarrow b_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b_1)$, $\Sigma_f(g) = f \circ g : a \longrightarrow b_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b_2)$

SI $K: (a \xrightarrow{g} b_1) \longrightarrow (a' \xrightarrow{g'} b_1) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_1)$ ENTONCES

$g' \circ K = g$, POR LO TANTO $f \circ g' \circ K = f \circ g$ Y

$K: (a \xrightarrow{f \circ g} b_2) \longrightarrow (a' \xrightarrow{f \circ g'} b_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_2)$

SEA $\Sigma_f(K) = K \in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_2)$

SEA $\Sigma_{(b_1 \xrightarrow{f} b_2)} : (\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2) \longrightarrow \mathcal{C}\downarrow b_2$ EL FUNTOR DEL EJEMPLO 4 PÁGINA 102. POR LO TANTO:

SI $g: ((a \xrightarrow{h} b_2) \longrightarrow (b_1 \xrightarrow{f} b_2)) \in \mathcal{O}((\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2))$ ENTONCES

$f \circ g = h$ Y $\Sigma_{(b_1 \xrightarrow{f} b_2)}(g) = h = f \circ g$.

SI $K: ((a \xrightarrow{h} b_2) \xrightarrow{g} (b_1 \xrightarrow{f} b_2)) \longrightarrow ((a' \xrightarrow{h'} b_2) \xrightarrow{g'} (b_1 \xrightarrow{f} b_2)) \in \mathcal{M}((\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2))$

$\Sigma_{(b_1 \xrightarrow{f} b_2)}(K) = K : (a \xrightarrow{h} b_2) \longrightarrow (a' \xrightarrow{h'} b_2)$

COMO $(\mathcal{C}\downarrow b_2)\downarrow(b_1 \xrightarrow{f} b_2) \cong \mathcal{C}\downarrow b_1$, TENEMOS QUE EL FUNTOR $\Sigma_{(b_1 \xrightarrow{f} b_2)}$ ES EL FUNTOR Σ_f

PROPOSICIÓN 3.3.1.- SI $\mathcal{C}$ ES UNA CATEGORÍA CON PRODUCTOS FIBRADOS, ENTONCES $\mathcal{C}\downarrow b$ TIENE PRODUCTOS.

DEMOSTRACIÓN: SEAN $f: a \longrightarrow b$ Y $g: c \longrightarrow b \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b)$

SEA
$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \arrow[d, "f"] \\ c \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$
EL PRODUCTO FIBRADO DE f SOBRE g, EN $\mathcal{C}$

POR LO TANTO $f\circ\bar{g} = g\circ\bar{f}$

SEA $h: d\longrightarrow b \in \mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b)$ TAL QUE $h = f\circ\bar{g} = g\circ\bar{f}$

POR LO TANTO $\bar{g}: (d\xrightarrow{h} b)\longrightarrow (a\xrightarrow{f} b)$ Y $\bar{f}: (d\xrightarrow{h} b)\longrightarrow (c\xrightarrow{g} b)\in \mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b)$

$(h,\bar{g},\bar{f})$ ES EL PRODUCTO DE f Y g EN $\mathcal{C}\downarrow b$

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $h': d'\longrightarrow b$, $g': (d'\xrightarrow{h'} b)\longrightarrow (a\xrightarrow{f} b)$ Y

$f': (d'\xrightarrow{h'} b)\longrightarrow (c\xrightarrow{g} b)$ POR LO TANTO $f\circ g' = h'$ Y $g\circ f' = h'$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$K: d\longrightarrow d'$ TAL QUE $\bar{g}\circ K = g'$ Y $\bar{f}\circ K = f'$

$h\circ K = f\circ\bar{g}\circ K = f\circ g' = h'$. POR LO TANTO

$K: (d'\xrightarrow{h'} b)\longrightarrow (d\xrightarrow{h} b)\in\mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b)$ Y $(h,\bar{g},\bar{f})$ ES PRODUCTO DE f Y g EN $\mathcal{C}\downarrow b$.

2.- SEA $f^*: \mathcal{C}\downarrow b_2\longrightarrow \mathcal{C}\downarrow b_1$ TAL QUE

SI $g: a\longrightarrow b_2\in\mathcal{O}(\mathcal{C}\downarrow b_2)$ ENTONCES $f^*(g): c\longrightarrow b_1$ SE OBTIENE AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO DE g SOBRE f, ES DECIR,

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f^*(g)"'] & a \arrow[d, "g"] \\
b_1 \arrow[r, "f"] & b_2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SI $h: (a\xrightarrow{g} b_2)\longrightarrow (a'\xrightarrow{g'} b_2)\in\mathcal{M}(\mathcal{C}\downarrow b_2)$ ENTONCES $g'\circ h = g$.

$f^*(h): f^*(g)\longrightarrow f^*(g')$ Y

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f^*(g')"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a' \arrow[d, "g"] \\
b_1 \arrow[r, "f"] & b_2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

$g'\circ h\circ\alpha = g\circ\alpha = f\circ f^*(g)$ POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN

UNICO MORFISMO $K: c \to d$ TAL QUE $f^{\#}(g') \circ K = f^{\#}(g)$ Y $\alpha' \circ K = h \circ \alpha$

POR LO TANTO $K : (c \xrightarrow{f^{\#}(g)} b_1) \longrightarrow (d \xrightarrow{f^{\#}(g')} b_1) \in \mathcal{M}(\mathcal{C} \downarrow b_1)$

SEA $f^{\#}(h) = K \in \mathcal{M}(\mathcal{C} \downarrow b_1)$

SEA $- \times (b_1 \xrightarrow{f} b_2) : \mathcal{C} \downarrow b_2 \longrightarrow (\mathcal{C} \downarrow b_2) \downarrow (b_1 \xrightarrow{f} b_2)$ EL FUNTOR DEL EJEMPLO 5 PÁGINA 105 ENTONCES SI $g : a \longrightarrow b_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{C} \downarrow b_2)$,

$- \times (b_1 \xrightarrow{f} b_2)(g) = f^{\#}(g) : c \longrightarrow b_1$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f^{\#}(g)"'] & a \arrow[d, "g"] \\
b_1 \arrow[r, "f"] & b_2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SI $h : (a \xrightarrow{g} b_2) \longrightarrow (a' \xrightarrow{g'} b_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{C} \downarrow b_2)$ ENTONCES $g' \circ h = g$

$- \times (b_1 \xrightarrow{f} b_2)(h) = K : (c \xrightarrow{f^{\#}(g)} b_1) \to (d \xrightarrow{f^{\#}(g')} b_1)$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE $f^{\#}(g') \circ K = f^{\#}(g)$

COMO $(\mathcal{C} \downarrow b_2) \downarrow (b_1 \xrightarrow{f} b_2) \cong \mathcal{C} \downarrow b_1$, TENEMOS QUE EL FUNTOR $- \times (b_1 \xrightarrow{f} b_2)$ ES EL FUNTOR $f^{\#}$

PROPOSICIÓN 8.3.2: TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TOPOS.

SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO ENTONCES

a) PARA TODO $b \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, LA CATEGORÍA COMA $\mathcal{E} \downarrow b$ ES UN TOPO

b) PARA TODO $f : b_1 \to b_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, EL FUNTOR $f^{\#} : \mathcal{E} \downarrow b_2 \to \mathcal{E} \downarrow b_1$ TIENE ADJUNTO IZQUIERDO Y ADJUNTO DERECHO.

DEMOSTRACION:

b) EL FUNTOR $f^{\#} : \mathcal{E} \downarrow b_2 \to \mathcal{E} \downarrow b_1$ ES EL FUNTOR

$- \times (b_1 \xrightarrow{f} b_2) : \mathcal{E} \downarrow b_2 \longrightarrow (\mathcal{E} \downarrow b_2) \downarrow (b_1 \xrightarrow{f} b_2) \cong \mathcal{E} \downarrow b_1$

SI SUPONEMOS VERDADERA LA PARTE (a) DE ESTE TEOREMA TENEMOS QUE $\mathcal{E} \downarrow b_2$ ES UN TOPO, POR LO TANTO $\mathcal{E} \downarrow b_2$ TIENE OBJETO TERMINAL,

PRODUCTOS FIBRADOS Y EXPONENCIACIÓN, POR LA PROPOSICIÓN 3.2.8.

$f^{\#}$ TIENE ADJUNTO IZQUIERDO $\Sigma_f : \mathcal{E}\downarrow b_1 \longrightarrow \mathcal{E}\downarrow b_2$ Y ADJUNTO DERECHO $\Pi_f : \mathcal{E}\downarrow b_1 \longrightarrow \mathcal{E}\downarrow b_2$

a) 1) $1_b : b \longrightarrow b \in \mathcal{O}(\mathcal{E}\downarrow b)$ ES OBJETO TERMINAL EN $\mathcal{E}\downarrow b$

SEA $f: a \longrightarrow b \in \mathcal{O}(\mathcal{E}\downarrow b)$, ENTONCES EXISTE $f: a \longrightarrow b$ TAL QUE

$1_b \circ f = f$ POR LO TANTO $f : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (b \xrightarrow{1_b} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

SI EXISTE $g: (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (b \xrightarrow{1_b} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$ ENTONCES $1_b \circ g = f$

POR LO TANTO $1_b \circ f = 1_b \circ g$ Y $f = g$.

POR LO TANTO f ES ÚNICO Y $1_b : b \longrightarrow b$ ES OBJETO TERMINAL.

2) SEAN $f: a \longrightarrow b$, $g: c \longrightarrow b$ Y $h: d \longrightarrow b \in \mathcal{O}(\mathcal{E}\downarrow b)$, Y

$k : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{g} b)$, $l : (d \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (c \xrightarrow{g} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$ ENTONCES

$g \circ k = f$ Y $g \circ l = h$

QUEREMOS ENCONTRAR EL PRODUCTO FIBRADO DE k SOBRE l EN $\mathcal{E}\downarrow b$

SEA

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \arrow[d, "k"] \\
d \arrow[r, "l"] & c
\end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE k SOBRE l EN $\mathcal{E}$

POR LO TANTO $l \circ p = k \circ q$

SEA $j : e \longrightarrow b$ TAL QUE $j = f \circ q$

$h \circ p = (g \circ l) \circ p = g \circ (l \circ p) = g \circ (k \circ q) = (g \circ k) \circ q = f \circ q = j$

POR LO TANTO $q : (e \xrightarrow{j} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{f} b)$ Y $p : (e \xrightarrow{j} b) \longrightarrow (d \xrightarrow{h} b)$

$\in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

$$\begin{tikzcd}
(e \xrightarrow{j} b) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & (a \xrightarrow{f} b) \arrow[d, "k"] \\
(d \xrightarrow{h} b) \arrow[r, "l"] & (c \xrightarrow{g} b)
\end{tikzcd}$$

ES EL PRODUCTO FIBRADO DE k SOBRE l EN $\mathcal{E}\downarrow b$

$l\circ p = k\circ q$, POR LO TANTO (**) CONMUTA

SEAN $\alpha : (a^* \xrightarrow{i} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{f} b)$ Y $\beta : (a^* \xrightarrow{i} b) \longrightarrow (d \xrightarrow{h} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

TALES QUE $k\circ\alpha = l\circ\beta$. POR LO TANTO $f\circ\alpha = i$ Y $h\circ\beta = i$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{E}$ EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\varphi : a^* \longrightarrow a$ TAL QUE $p\circ\varphi = \beta$ Y $q\circ\varphi = \alpha$

$i = f\circ\alpha = f\circ(q\circ\varphi) = (f\circ q)\circ\varphi = j\circ\varphi$

POR LO TANTO $\varphi : (a^* \xrightarrow{i} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{j} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

SI $\varphi^* : (a^* \xrightarrow{i} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{j} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$ TAL QUE $q\circ\varphi^* = \alpha$ Y

$p\circ\varphi^* = \beta$, ENTONCES POR SER φ ÚNICA $\varphi = \varphi^*$

POR LO TANTO (*c) ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{E}\downarrow b$ Y $\mathcal{E}\downarrow b$ TIENE PRODUCTOS FIBRADOS.

3) SEAN $f : a \rightarrow b$ Y $g : c \rightarrow b \in \mathcal{O}(\mathcal{E}\downarrow b)$, QUEREMOS ENCONTRAR EL $(\mathcal{E}\downarrow b)$-OBJETO $(c \xrightarrow{g} b)^{(a \xrightarrow{f} b)} : g^f$

SEAN $\langle f, 1_a\rangle : a \rightarrowtail b\times a$ Y $f : a \rightarrow b$, POR EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE MORFISMOS PARCIALES ; PROPOSICIÓN 3.1.2. , EXISTEN $\eta_b : b \rightarrowtail \bar{b}$ Y UN ÚNICO MORFISMO $k : b\times a \longrightarrow \bar{b}$ TALES QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "{\langle f, 1_a\rangle}"] \arrow[d, "f"'] & b\times a \arrow[d, "k"] \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{E}$

POR SER $\mathcal{E}$ UN TOPO, $\mathcal{E}$ TIENE EXPONENCIACIÓN POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\bar{k} : b \longrightarrow \bar{b}^a$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
\bar{b}^a\times a \arrow[r, "ev_{\bar{b}}"] & \bar{b} \\
b\times a \arrow[u, "\bar{k}\times 1_a"] \arrow[ur, dashed, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $ev_{\bar{b}}\circ(\bar{K}\times 1_a) = K$

POR EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE MORFISMOS PARCIALES

EXISTEN $\eta_c : c \longrightarrow \bar{c}$ Y UN ÚNICO MORFISMO $\bar{g} : \bar{c} \longrightarrow \bar{b}$ ∋

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\eta_c"] \arrow[d, "g"'] & \bar{c} \arrow[d, "\bar{g}"] \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

COMO $\mathcal{E}$ TIENE EXPONENCIACIÓN EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\bar{g}^a : \bar{b}^a \longrightarrow \bar{c}^a$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
\bar{b}^a \times a \arrow[rr, "ev_{\bar{b}}"] & & \bar{b} \\
& \bar{c} \arrow[ur, "\bar{g}"] & \\
\bar{c}^a \times a \arrow[uu, "\bar{g}^a \times 1_a"] \arrow[ur, "ev_{\bar{c}}"] & &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA

ES DECIR, $ev_{\bar{b}} \circ (\bar{g}^a \times 1_a) = \bar{g} \circ ev_{\bar{c}}$

SEA

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\bar{\delta}"] \arrow[d, "g^f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \bar{c}^a \arrow[d, "\bar{g}^a"] \\
b \arrow[r, "\bar{\kappa}"] & \bar{b}^a
\end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE $\bar{g}^a$ SOBRE $\bar{\kappa}$

$g^f : P \longrightarrow b \in \mathcal{W}/\mathcal{E}\downarrow b)$ Y ES EL OBJETO $(c \xrightarrow{g} b)^{(a \xrightarrow{f} b)}$

SEAN $h : x \longrightarrow b$, $i : \mathcal{E}\downarrow b\,(h, g^f) \longrightarrow \mathcal{E}(x, P)$ TAL QUE

SI $\gamma : (x \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (P \xrightarrow{g^f} b)$, $i(\gamma) = \gamma$

$(g^F)_* : \mathcal{E}(x, P) \longrightarrow \mathcal{E}(x, b)$ TAL QUE SI $\gamma : x \longrightarrow P$ ENTONCES

$(g^F)_*(\gamma) = g^f \circ \gamma$, $j : \{0\} \longrightarrow \mathcal{E}(x, b)$ TAL QUE $j(0) = h : x \to b$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \mathcal{E}(x, P) \arrow[d, "(g^f)_*"] \\
\{0\} \arrow[r, "j"'] & \mathcal{E}(x, b)
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{C}onj$

SEA $\gamma \in \mathcal{E}lb(h, g^F)$ ENTONCES $h = g^F \circ \gamma$

$((g^F)_* \circ i)(\gamma) = (g^F)_*(i(\gamma)) = (g^F)_*(\gamma) = g^F \circ \gamma = h$

$(j \circ !)(\gamma) = j(!(\gamma)) = j(0) = h$

POR LO TANTO $(g^F)_* \circ i = j \circ !$ Y (**) CONMUTA.

SEAN $\alpha : Y \longrightarrow \mathcal{E}(X, P)$ Y $\beta : Y \longrightarrow \{0\}$ TALES QUE
$(g^F)_* \circ \alpha = j \circ \beta$.

SEA $y \in Y$ POR LO TANTO $(g^F)_*(\alpha(y)) = j(\beta(y)) = j(0) = h$

ENTONCES $\alpha(y) : X \longrightarrow P$ TAL QUE $g^F \circ \alpha(y) = h$, POR LO TANTO
$\alpha(y) \in \mathcal{E}lb(h, g^F)$

SEA $\varphi : Y \longrightarrow \mathcal{E}lb(h, g^F)$ TAL QUE $\varphi(y) = \alpha(y)$

$(i \circ \varphi)(y) = i(\varphi(y)) = i(\alpha(y)) = \alpha(y)$ POR LO TANTO $i \circ \varphi = \alpha$

POR SER $\{0\}$ OBJETO TERMINAL $! \circ \varphi = \beta$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{\varphi} : Y \longrightarrow \mathcal{E}lb(h, g^F)$ TAL QUE
$i \circ \bar{\varphi} = \alpha$ Y $! \circ \bar{\varphi} = \beta$

POR LO TANTO $i \circ \bar{\varphi} = i \circ \varphi$, ASI QUE $i(\bar{\varphi}(y)) = i(\varphi(y))$

POR LO TANTO $\bar{\varphi}(y) = \varphi(y)$ Y $\bar{\varphi} = \varphi$

POR LO TANTO (**) ES PRODUCTO FIBRADO

SEA $\mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X \times a, c) = \{ (s, \ell) \mid s : a' \rightarrowtail X \times a \, , \ \ell : a' \longrightarrow c \}$

DEMOSTRAREMOS QUE $\mathcal{E}(X \times a, \bar{c}) \cong \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X \times a, c)$

SEAN $m : X \times a \longrightarrow \bar{c}$ Y

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "\ell"'] & X \times a \arrow[d, "m"] \\
c \arrow[r, tail, "\eta_c"] & \bar{c}
\end{tikzcd}$$

EL PRODUCTO FIBRADO DE m SOBRE η_c

SEA $\varphi : \mathcal{E}(X \times a, \bar{c}) \dashrightarrow \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X \times a, c)$ TAL QUE $\varphi(m) = (s, \ell)$

$(s, \ell) \in \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X \times a, c)$ PORQUE $s : a' \rightarrowtail X \times a$ Y $\ell : a' \longrightarrow c$.

POR EL TEOREMA DE CLASIFICACION DE MORFISMOS PARCIALES DADO $(s,l) \in \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X\times a, c)$ EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $m : X\times a \longrightarrow \bar{c}$

TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "l"'] & X\times a \arrow[d, "m"] \\
c \arrow[r, tail, "\eta_c"] & \bar{c}
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SEA $\varphi^{-1} : \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X\times a, c) \longrightarrow \mathcal{E}(X\times a, \bar{c})$ TAL QUE $\varphi^{-1}((s,l)) = m$

POR LO TANTO $\mathcal{E}(X\times a, \bar{c}) \cong \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X\times a, c)$

POR LA PROPOSICIÓN 1.1.59 $\mathcal{E}(X\times a, \bar{c}) \cong \mathcal{E}(X, \bar{c}^a)$

POR LO TANTO $\mathcal{E}(X, \bar{c}^a) \cong \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X\times a, c)$

ANALOGAMENTE $\mathcal{E}(X, \bar{b}^a) \cong \mathrm{Par}\,\mathcal{E}(X\times a, b)$

SEAN $(\bar{\delta})_* : \mathcal{E}(X,P) \longrightarrow \mathcal{E}(X, \bar{c}^a)$ TAL QUE SI $\gamma : X \longrightarrow P$

ENTONCES $(\bar{\delta})_*(\gamma) = \bar{\delta}\circ\gamma$

$(\bar{g}^a)_* : \mathcal{E}(X, \bar{c}^a) \longrightarrow \mathcal{E}(X, \bar{b}^a)$ TAL QUE SI $\alpha : X \longrightarrow \bar{c}^a$

ENTONCES $(\bar{g}^a)_*(\alpha) = \bar{g}^a\circ\alpha$

$(\bar{K})_* : \mathcal{E}(X, b) \longrightarrow \mathcal{E}(X, \bar{b}^a)$ TAL QUE SI $h : X \longrightarrow b$

ENTONCES $(\bar{K})_*(h) = \bar{K}\circ h$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(X,P) \arrow[r, "(\bar{\delta})_*"] \arrow[d, "(g^f)_*"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & \mathcal{E}(X, \bar{c}^a) \arrow[d, "(\bar{g}^a)_*"] \\
\mathcal{E}(X,b) \arrow[r, "(\bar{K})_*"] & \mathcal{E}(X, \bar{b}^a)
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{C}on$

SEA $\gamma : X \longrightarrow P \in \mathcal{E}(1, P)$

$$((\bar{g}^a)_* \circ (\bar{\delta})_*)(\gamma) = (\bar{g}^a)_*((\bar{\delta})_*(\gamma)) = (\bar{g}^a)_*(\bar{\delta}\circ\gamma) = \bar{g}^a\circ\bar{\delta}\circ\gamma = \bar{K}\circ g^f\circ\gamma$$

$$= (\bar{K})_*(g^f\circ\gamma) = (\bar{K})_*((g^f)_*(\gamma)) = ((\bar{K})_*\circ(g^f)_*)(\gamma)$$

POR LO TANTO (***) CONMUTA

SEAN $\alpha : Y \longrightarrow \mathcal{E}(X, \bar{c}^a)$ Y $\beta : Y \longrightarrow \mathcal{E}(X, b)$ TALES QUE $(\bar{g}^a)_*\circ\alpha = (\bar{K})_*\circ\beta$

SEA $y \in Y$ ENTONCES $(\bar{g}^a)_*(\alpha(y)) = (\bar{\kappa})_*(\beta(y))$, POR LO TANTO

$\bar{g}^a \circ \alpha(y) = \bar{\kappa} \circ \beta(y)$

$\alpha(y): x \longrightarrow \bar{c}^a$ Y $\beta(y): x \longrightarrow b$ POR SER $(*)$ PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: x \longrightarrow P$ TAL QUE $\bar{\delta} \circ \varphi = \alpha(y)$ Y $g^f \circ \varphi = \beta(y)$. SEA $\psi: Y \longrightarrow \mathcal{E}(x, P)$ TAL QUE $\psi(y) = \varphi$

$((\bar{\delta})_* \circ \psi)(y) = (\bar{\delta})_*(\psi(y)) = (\bar{\delta})_*(\varphi) = \bar{\delta} \circ \varphi = \alpha(y)$

POR LO TANTO $(\bar{\delta})_* \circ \psi = \alpha$

$((g^f)_* \circ \psi)(y) = (g^f)_*(\psi(y)) = (g^f)_*(\varphi) = g^f \circ \varphi = \beta(y)$

POR LO TANTO $(g^f)_* \circ \psi = \beta$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{\psi}: Y \longrightarrow \mathcal{E}(x, P)$ TAL QUE

$(\bar{\delta})_* \circ \bar{\psi} = \alpha$ Y $(g^f)_* \circ \bar{\psi} = \beta$

$((\bar{\delta})_* \circ \bar{\psi})(y) = \bar{\delta} \circ \bar{\psi}(y) = \alpha(y)$ Y $((g^f)_* \circ \bar{\psi})(y) = g^f \circ \bar{\psi}(y) = \beta(y)$

POR SER φ ÚNICA $\varphi = \bar{\psi}(y)$ PERO $\varphi = \psi(y)$ POR LO TANTO $\psi = \bar{\psi}$ Y $(***)$ ES PRODUCTO FIBRADO.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] & \mathcal{E}(x, P) \arrow[r, "(\bar{\delta})_*"] \arrow[d, "(g^f)_*"] & \mathcal{E}(x, \bar{c}^a) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\bar{g}^a)_*"] & \mathcal{E}(x \times a, \bar{c}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\bar{g})_*"] & \operatorname{Par}\mathcal{E}(x \times a, c) \arrow[d, "(g)_*"] \\
\{0\} \arrow[r, "j"'] & \mathcal{E}(x, b) \arrow[r, "(\bar{\kappa})_*"'] & \mathcal{E}(x, \bar{b}^a) \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{E}(x \times a, \bar{b}) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Par}\mathcal{E}(x \times a, b)
\end{tikzcd}$$

$0 \rightsquigarrow h \rightsquigarrow \bar{\kappa} \circ h \rightsquigarrow a v_{\bar{b}} \circ ((\bar{\kappa} \circ h) \times 1_a) \rightsquigarrow (\sigma, \sigma')$ TAL QUE

$a v_{\bar{b}} \circ ((\bar{\kappa} \circ h) \times 1_a) = a v_{\bar{b}} \circ (\bar{\kappa} \times 1_a) \circ (h \times 1_a) = \kappa \circ (h \times 1_a)$ Y

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, tail, "\sigma"'] \arrow[dd, "\sigma'"'] & x \times a \arrow[d, dashed, "h \times 1_a"] \\
 & b \times a \arrow[d, dashed, "\kappa"] \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $\kappa \circ (h \times 1_a) \circ \sigma = \eta_b \circ \sigma'$

COMO
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "\langle f, 1_a \rangle"] \arrow[d, "f"'] & b \times a \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b} \end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO

EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $q : Q \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ q = \sigma'$ Y $\langle f, 1_a \rangle \circ q = (h \times 1_a) \circ \sigma$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & x \times a \arrow[d, "h \times 1_a"] \\ a \arrow[r, tail, "\langle f, 1_a \rangle"] \arrow[d, "f"'] & b \times a \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b} \end{tikzcd} \quad \ldots\ldots (1)$$

EL CUADRADO EXTERIOR(1) Y EL INFERIOR SON PRODUCTOS FIBRADOS

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO SUPERIOR(2) ES PRODUCTO FIBRADO.

EL PRODUCTO FIBRADO ANTERIOR (1) ES EL MISMO QUE EL DE h SOBRE f

$$\begin{tikzcd} Q' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q'"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & x \arrow[d, "h"] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

$\langle p', q' \rangle : Q' \longrightarrow x \times a$, $f \circ q' : Q' \longrightarrow b$ TALES QUE

$$k \circ (h \times 1_a) \circ \langle p', q' \rangle = k \circ \langle h \circ p', q' \rangle = k \circ \langle f \circ q', q' \rangle = k \circ \langle f, 1_a \rangle \circ q'$$
$$= \eta_b \circ f \circ q'$$

POR SER (1) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : Q' \longrightarrow Q$

TAL QUE $\sigma\circ\varphi = \langle p', g'\rangle$ y $f\circ q\circ\varphi = f\circ g'$

$$\begin{tikzcd}
X\times a \arrow[r, "P_x"] \arrow[d, "h\times 1_a"'] \arrow[rd, phantom, "(4)"] & X \arrow[d, "h"] \\
b\times a \arrow[r, "P_b"] & b
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

$P_b\circ(h\times 1_a) = P_b\circ\langle h\circ P_x, 1_a\circ P_a\rangle = h\circ P_x$

POR LO TANTO (4) CONMUTA.

SEAN $\alpha: Y\longrightarrow b\times a$ y $\beta: Y\longrightarrow x$ TALES QUE $h\circ\beta = P_b\circ\alpha$

SEA $\epsilon: Y\longrightarrow x\times a$ TAL QUE $\epsilon = \langle\beta, P_a'\circ\alpha\rangle$

$P_x\circ\epsilon = P_x\circ\langle\beta, P_a'\circ\alpha\rangle = \beta$

$P_b\circ(h\times 1_a)\circ\epsilon = P_b\circ\langle h\circ P_x, P_a\rangle\circ\epsilon = h\circ P_x\circ\epsilon = h\circ\beta = P_b\circ\alpha$

$P_a'\circ(h\times 1_a)\circ\epsilon = P_a'\circ\langle h\circ P_x, P_a\rangle\circ\epsilon = P_a\circ\epsilon = P_a\circ\langle\beta, P_a'\circ\alpha\rangle = P_a'\circ\alpha$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.18 $(h\times 1_a)\circ\epsilon = \alpha$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{\epsilon}: Y\longrightarrow X\times a$ TAL QUE $P_x\circ\bar{\epsilon} = \beta$ y $(h\times 1_a)\circ\bar{\epsilon} = \alpha$. POR LO TANTO $(h\times 1_a)\circ\epsilon = (h\times 1_a)\circ\bar{\epsilon}$ y $P_x\circ\epsilon = P_x\circ\bar{\epsilon}$

$(h\times 1_a)\circ\epsilon = \langle h\circ P_x, P_a\rangle\circ\epsilon = \langle h\circ P_x\circ\epsilon, P_a\circ\epsilon\rangle$

$(h\times 1_a)\circ\bar{\epsilon} = \langle h\circ P_x, P_a\rangle\circ\bar{\epsilon} = \langle h\circ P_x\circ\bar{\epsilon}, P_a\circ\bar{\epsilon}\rangle$

POR LO TANTO $P_a\circ\epsilon = P_a\circ\bar{\epsilon}$ y $P_x\circ\epsilon = P_x\circ\bar{\epsilon}$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.18 $\epsilon = \bar{\epsilon}$

POR LO TANTO (4) ES PRODUCTO FIBRADO.

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO EXTERIOR (5) DEL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q"'] & X\times a \arrow[r, "P_x"] \arrow[d, "h\times 1_a"] & X \arrow[d, "h"] & \cdots (5) \\
a \arrow[r, "\langle f, 1_a\rangle"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & b\times a \arrow[r, "P_b"] & b &
\end{tikzcd}$$

POR SER (3) PRODUCTO FIBRADO, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\psi : Q \longrightarrow Q'$ TAL QUE $p'\circ\psi = P_x\circ\sigma$ y $q'\circ\psi = q$

$$p'\circ\psi\circ\varphi = P_x\circ\sigma\circ\varphi = P_x\circ\langle p', q'\rangle = p' = p'\circ 1_{Q'}$$

$$\langle f, 1_a\rangle\circ q\circ\varphi = (h\times 1_a)\circ\sigma\circ\varphi = (h\times 1_a)\circ\langle p', q'\rangle = \langle h\circ p', q'\rangle$$
$$= \langle f\circ q', q'\rangle = \langle f, 1_a\rangle\circ q'$$

COMO $\langle f, 1_a\rangle$ ES MONOMORFISMO $q\circ\varphi = q'$

$$q'\circ\psi\circ\varphi = q\circ\varphi = q' = q'\circ 1_{Q'}$$

POR LO TANTO $p'\circ\psi\circ\varphi = p'\circ 1_{Q'}$ y $q'\circ\psi\circ\varphi = q'\circ 1_{Q'}$

POR SER (3) PRODUCTO FIBRADO Y POR LA PROPOSICIÓN 1.2.46.

$$\psi\circ\varphi = 1_{Q'}$$

$$P_x\circ\sigma\circ\varphi\circ\psi = P_x\circ\langle p', q'\rangle\circ\psi = P_x\circ\langle p'\circ\psi, q'\circ\psi\rangle = P_x\circ\langle P_x\circ\sigma, q'\rangle$$
$$= P_x\circ\sigma = P_x\circ\sigma\circ 1_Q.$$

$$q\circ\varphi\circ\psi = q'\circ\psi = q = q\circ 1_Q$$

POR SER (5) PRODUCTO FIBRADO Y POR LA PROPOSICIÓN 1.2.46.

$$\varphi\circ\psi = 1_Q$$

DEMOSTRAREMOS AHORA QUE SI $h : x \longrightarrow b$ ENTONCES

$$\mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \cong \mathcal{E}\downarrow b(h\times f, g)$$

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "!"'] & \operatorname{Par}\mathcal{E}(x\times a, c) \arrow[d, "(g)_*"] \\
\{0\} \arrow[r, "\beta"] & \operatorname{Par}\mathcal{E}(x\times a, b)
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN Con

SI $\gamma : (x \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (p \xrightarrow{g^f} b)$ ENTONCES $\gamma : x \longrightarrow p$ ES TAL QUE

$g^f\circ\gamma = h$, y $(\beta\circ !)(\gamma) = \beta(!(\gamma)) = \beta(0) = (\sigma, f\circ q)$,

$((g)_*\circ\alpha)(\gamma) = (g)_*(\alpha(\gamma)) = (g)_*(\hat{c}, y) = (\hat{c}, g\circ y)$

DONDE $\hat{c} : Q^* \rightarrowtail x\times a$, $y : Q^* \longrightarrow c$, $(\sigma, f\circ q)$ SE OBTIENE

AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO DE $\kappa\circ(h\times 1_a)$ SOBRE η_b Y (τ, y) SE OBTIENE AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO DE $\delta\circ(\gamma\times 1_a)$ SOBRE η_c . POR LO TANTO LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, tail, "\sigma"] \arrow[d, "q"'] & x\times a \arrow[d, "h\times 1_a"] \\
a \arrow[r, tail, "{\langle f, 1_a\rangle}"] \arrow[d, "f"'] & b\times a \arrow[d, "\kappa"] \\
b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q^* \arrow[r, tail, "\tau"] \arrow[dd, "y"'] & x\times a \arrow[d, "\gamma\times 1_a"] \\
 & p\times a \arrow[d, "\delta"] \\
c \arrow[r, tail, "\eta_c"] & \bar{c}
\end{tikzcd}$$

COMO $\beta\circ ! = (g)_*\circ\alpha$ ENTONCES $(\sigma, f\circ q) = (\tau, g\circ y)$, POR LO TANTO $\sigma = \tau$ y $f\circ q = g\circ y$. POR LO TANTO $Q = Q^*$

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[r, tail, "\sigma=\tau"] \arrow[dl, "y"'] \arrow[d, "q"] & x\times a \arrow[d, "h\times 1_a"] \\
c \arrow[dr, "g"'] & a \arrow[r, dash] \arrow[d, "f"] & b\times a \arrow[d, "\kappa"] \\
 & b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $\mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \cong \{(\tau, y) \mid (\tau, g\circ y) = (\sigma, f\circ q)\}$

$$\begin{aligned}
&\cong \{(\sigma, y) \mid g\circ y = f\circ q\} \\
&\cong \{y : Q \to c \mid g\circ y = f\circ q\} \\
&\cong \mathcal{E}\downarrow b(f\circ q, g)
\end{aligned}$$

COMO

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, tail, "p_x \circ \sigma"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ q"] & X \arrow[d, "h"] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{E}$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 3.31, ES PRODUCTO EN $\mathcal{E}\downarrow b$

POR LO TANTO $f \circ q : Q \longrightarrow b$ ES EL PRODUCTO DE h Y f EN $\mathcal{E}\downarrow b$. POR LO TANTO $\mathcal{E}\downarrow b(f \circ q, g) \cong \mathcal{E}\downarrow b(h \times f, g)$ Y

$\mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \cong \mathcal{E}\downarrow b(h \times f, g)$.

SEA $\varphi : \mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \cong \mathcal{E}\downarrow b(h \times f, g)$, ENTONCES TENEMOS QUE $\forall\ \alpha : h \longrightarrow h'$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\alpha)^*"'] & \mathcal{E}\downarrow b(h \times f, g) \arrow[d, "(\alpha \times 1_f)^*"] \\ \mathcal{E}\downarrow b(h', g^f) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{E}\downarrow b(h' \times f, g) \end{tikzcd}$$

CONMUTA

SEA $1_{g^f} : g^f \longrightarrow g^f$, ENTONCES $\varphi(1_{g^f}) = ev_g : g^f \times f \longrightarrow g$.

SEA $\alpha : h \times f \longrightarrow g$ ENTONCES EXISTE UNA ÚNICA $\varphi^{-1}(\alpha) = \hat{\alpha} : h \longrightarrow g^f$, POR LO TANTO $\varphi(\hat{\alpha}) = \alpha$, Y

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}\downarrow b(h, g^f) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\hat{\alpha})^*"'] & \mathcal{E}\downarrow b(h \times f, g) \arrow[d, "(\hat{\alpha} \times 1_f)^*"] \\ \mathcal{E}\downarrow b(g^f, g^f) \arrow[r, "\varphi'"] & \mathcal{E}\downarrow b(g^f \times f, g) \end{tikzcd}$$

CONMUTA

$((\hat{\alpha} \times 1_f)^* \circ \varphi)(1_{g^f}) = (\hat{\alpha} \times 1_f)^*(\varphi(1_{g^f})) = (\hat{\alpha} \times 1_f)^*(ev_g) = ev_g \circ (\hat{\alpha} \times 1_f)$

$(\varphi \circ (\hat{\alpha})^*)(1_{g^f}) = \varphi((\hat{\alpha})^*(1_{g^f})) = \varphi(1_{g^f} \circ \hat{\alpha}) = \varphi(\hat{\alpha}) = \alpha$

COMO $(\hat{\alpha} \times 1_f)^* \circ \varphi = \varphi \circ (\hat{\alpha})^*$ ENTONCES $ev_g \circ (\hat{\alpha} \times 1_f) = \alpha$

POR LO TANTO $\mathcal{E}\downarrow b$ TIENE EXPONENCIACIÓN.

4) SEA $g : (a' \xrightarrow{f'} b) \rightarrowtail (a \xrightarrow{f} b)$ SUBOBJETO DE f EN $\mathcal{E}\downarrow b$.

POR LO TANTO $g : a' \rightarrowtail a$ ES UN SUBOBJETO DE a EN $\mathcal{E}$ TAL QUE $f \circ g = f'$

POR SER $\mathcal{E}$ UN TOPO $\mathcal{E}$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS, POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\chi_g : a \longrightarrow \Omega$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_{a'}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \arrow[d, "\chi_g"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "\chi_g"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "f"] & \\
\Omega & \Omega \times b \arrow[l, "p_\Omega"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE Ω y b, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle \chi_g, f \rangle : a \longrightarrow \Omega \times b$ TAL QUE

$p_\Omega \circ \langle \chi_g, f \rangle = \chi_g$ y $p_b \circ \langle \chi_g, f \rangle = f$

POR LO TANTO $\langle \chi_g, f \rangle : (a \xrightarrow{f} b) \longrightarrow (\Omega \times b \xrightarrow{p_b} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E} \downarrow b)$

COMO $\mathcal{E}$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "1_b"] \arrow[d, "!_b"'] & b \arrow[d, dashed, "\chi_{1_b} = v \circ !_b"] \\
1 \arrow[r, dashed, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dl, "v \circ !_b"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "1_b"] & \\
\Omega & \Omega \times b \arrow[l, "p_\Omega"'] \arrow[r, "p_b"] & b
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL PRODUCTO DE Ω Y b, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\langle V\circ !_b , 1_b \rangle : b \longrightarrow \Omega \times b$ TAL QUE

$p_\Omega \circ \langle V\circ !_b, 1_b \rangle = V\circ !_b$ Y $p_b \circ \langle V\circ !_b, 1_b \rangle = 1_b$

POR LO TANTO $\langle V\circ !_b, 1_b \rangle : (b \xrightarrow{1_b} b) \longrightarrow (\Omega\times b \xrightarrow{p_b} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

$p_b : \Omega\times b \longrightarrow b$, $\langle V\circ !_b, 1_b \rangle : (b \xrightarrow{1_b} b) \longrightarrow (\Omega\times b \xrightarrow{p_b} b)$ ES EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS EN $\mathcal{E}\downarrow b$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
(a' \xrightarrow{f'} b) \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & (a \xrightarrow{f} b) \arrow[d, "\langle \chi_g , f \rangle"] \\
(b \xrightarrow{1_b} b) \arrow[r, "\langle V\circ !_b , 1_b \rangle"] & (\Omega\times b \xrightarrow{p_b} b)
\end{tikzcd}$$

$\langle \chi_g , f \rangle \circ g = \langle \chi_g \circ g , f\circ g \rangle = \langle V\circ !_{a'} , f' \rangle$

$!_b \circ f' : a' \longrightarrow 1$ POR SER 1 OBJETO TERMINAL $!_b \circ f' = !_{a'}$

$\langle V\circ !_b , 1_b \rangle \circ f' = \langle V\circ !_b \circ f', f' \rangle = \langle V\circ !_{a'} , f' \rangle$

POR LO TANTO $(**)$ CONMUTA

SEAN $\alpha : (c \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (a \xrightarrow{f} b)$ Y $\beta : (c \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (b \xrightarrow{1_b} b)$ TALES QUE

$\langle \chi_g , f \rangle \circ \alpha = \langle V\circ !_b , 1_b \rangle \circ \beta$, POR LO TANTO $f\circ\alpha = h$ Y $\beta = h$

$\langle \chi_g , f \rangle \circ \alpha = \langle \chi_g \circ \alpha , f\circ\alpha \rangle$, $\langle V\circ !_b , 1_b \rangle \circ \beta = \langle V\circ !_b \circ \beta , \beta \rangle = \langle V\circ !_c , \beta \rangle$

POR LO TANTO $\chi_g \circ \alpha = V\circ !_c$ Y $f\circ\alpha = \beta = h$

POR SER $(*)$ PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\varphi : c \longrightarrow a'$ TAL QUE $g\circ\varphi = \alpha$ Y $!_{a'} \circ \varphi = !_c$

$f'\circ\varphi = (f\circ g)\circ\varphi = f\circ(g\circ\varphi) = f\circ\alpha = h = \beta$

POR LO TANTO $\varphi : (c \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (a' \xrightarrow{f'} b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\Phi : (c \xrightarrow{h} b) \longrightarrow (a' \xrightarrow{f} b)$ TAL QUE

$f'\circ\Phi = \beta$. Y $g\circ\Phi = \alpha$ $\therefore$ $!_{a'} \circ \Phi : c \longrightarrow 1$ POR SER 1 OBJETO TERMINAL

$!_{a'} \circ \Phi = !_c$, PERO φ ES ÚNICA , POR LO TANTO $\varphi = \Phi$ Y

(**) ES PRODUCTO FIBRADO

SUPONGAMOS QUE EXISTE $K:(a\xrightarrow{f}b)\longrightarrow(\Omega\times b\xrightarrow{p_b}b)\in\mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b)$

TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
(a'\xrightarrow{f'}b) \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f'"'] & (a\xrightarrow{f}b) \arrow[d, "K"] \\
(b\xrightarrow{1_b}b) \arrow[r, "\langle V\circ !_b , 1_b\rangle"] & (\Omega\times b\xrightarrow{p_b}b)
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

ENTONCES $p_b\circ K = f$

$K\circ g = \langle V\circ !_b\circ f', f'\rangle = \langle V\circ !_{a'}, f'\rangle$ POR LO TANTO

$p_\Omega\circ K\circ g = p_\Omega\circ\langle V\circ !_{a'}, f'\rangle = V\circ !_{a'}$

POR SER χ_g ÚNICA $p_\Omega\circ K = \chi_g$.

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "\chi_g"'] \arrow[d, "K"] \arrow[dr, "f"] & \\
\Omega & \Omega\times b \arrow[l, "p_\Omega"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

CONMUTA.

ENTONCES $K=\langle\chi_g, f\rangle$

POR LO TANTO EL MORFISMO CARACTERÍSTICA DE

$g:(a'\xrightarrow{f}b)\rightarrowtail(a\xrightarrow{f}b)$ ES $\langle\chi_g, f\rangle:(a\xrightarrow{f}b)\longrightarrow(\Omega\times b\xrightarrow{p_b}b)$ Y

$\mathcal{E}\downarrow b$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS

HECHOS FUNDAMENTALES

. UNO DE LOS RESULTADOS DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TOPOS MÁS IMPORTANTES EN LA TEORÍA DE TOPOS, SON DOS PROPOSICIONES LLAMADAS HECHOS FUNDAMENTALES. EL PRIMERO AFIRMA QUE EN UN TOPO EL PRODUCTO FIBRADO PRESERVA EPIMORFISMOS, Y EL SEGUNDO AFIRMA QUE EN UN TOPO COPRODUCTOS PRESERVAN PRODUCTOS FIBRADOS.

PROPOSICIÓN 3.3.3.- HECHO FUNDAMENTAL 1: EN UN TOPO EL PRODUCTO FIBRADO PRESERVA EPIMORFISMOS, ES DECIR,

SI
$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & c \arrow[d, twoheadrightarrow, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO EN UN TOPO $\mathcal{E}$

Y g ES EPIMORFISMO, ENTONCES g' ES EPIMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEAN $f: a \longrightarrow b$ Y $g: c \twoheadrightarrow b$, POR LO TANTO $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{E}\downarrow b)$. $f^{\#}: \mathcal{E}\downarrow b \longrightarrow \mathcal{E}\downarrow a$ ES UN FUNTOR TAL QUE $f^{\#}(g)$ SE OBTIENE AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO DE g SOBRE f

POR LO TANTO,
$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g' = f^{\#}(g)"'] & c \arrow[d, twoheadrightarrow, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL SABEMOS QUE $f^{\#}$ TIENE ADJUNTO IZQUIERDO Y POR LA PROPOSICIÓN 3.1.9 $f^{\#}$ PRESERVA EPIMORFISMOS POR LO TANTO $f^{\#}(g) = g'$ ES EPIMORFISMO.

PROPOSICIÓN 3.3.4.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y $b \xrightarrow{i_b} b+c \xleftarrow{i_c} c$ EL COPRODUCTO EN $\mathcal{E}$ DE b Y c, ENTONCES
$(b \xrightarrow{i_b} b+c) \xrightarrow{i_b} (b+c \xrightarrow{1_{b+c}} b+c) \xleftarrow{i_c} (c \xrightarrow{i_c} b+c)$ ES EL COPRODUCTO EN $\mathcal{E}\downarrow b+c$.

DEMOSTRACIÓN: SEAN $g: (b \xrightarrow{i_b} b+c) \longrightarrow (d \xrightarrow{f} b+c)$ Y
$h: (c \longrightarrow b+c) \longrightarrow (d \xrightarrow{f} b+c) \in m(\mathcal{E}\downarrow b+c)$. POR LO TANTO $f \circ g = i_b$
Y $f \circ h = i_c$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EN $\mathcal{E}$, EXISTE UN ÚNICO

MORFISMO $k: b+c \longrightarrow d$ TAL QUE $k \circ i_b = g$ Y $k \circ i_c = h$

$f \circ k \circ i_b = f \circ g = i_b = 1_{b+c} \circ i_b$, $f \circ k \circ i_c = f \circ h = i_c = 1_{b+c} \circ i_c$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.18. $f \circ k = 1_{b+c}$. POR LO TANTO

$k: (b+c \xrightarrow{1_{b+c}} b+c) \longrightarrow (d \xrightarrow{f} b+c) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}\downarrow b+c)$ Y

$(b \xrightarrow{i_b} b+c) \xrightarrow{i_b} (b+c \xrightarrow{1_{b+c}} b+c) \xleftarrow{i_c} (c \xrightarrow{i_c} b+c)$ ES COPRODUCTO EN $\mathcal{E}\downarrow b+c$

PROPOSICIÓN 3.8.5.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y $f: a \longrightarrow b+c$, ENTONCES EXISTEN

$$\begin{tikzcd}
a_1+a_2 \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "f_1+f_2"'] & a \arrow[d, "f"] \\
& b+c
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: SEA $b \xrightarrow{i_b} b+c \xleftarrow{i_c} c$ EL COPRODUCTO DE b Y c EN $\mathcal{E}$, POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR

$(b \xrightarrow{i_b} b+c) \xrightarrow{i_b} (b+c \xrightarrow{1_{b+c}} b+c) \longleftarrow (c \xrightarrow{i_c} b+c)$ ES COPRODUCTO EN $\mathcal{E}\downarrow b+c$

$f^*: \mathcal{E}\downarrow b+c \longrightarrow \mathcal{E}\downarrow a$ ES UN FUNTOR TAL QUE $f^*(i_b)$ Y $f^*(i_c)$ SE OBTIENEN AL FORMAR LOS PRODUCTOS FIBRADOS DE i_b SOBRE f Y i_c SOBRE f RESPECTIVAMENTE . POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f^*(i_b)"'] & b \arrow[d, "i_b"] \\
a \arrow[r, "f"] & b+c
\end{tikzcd}
\quad \text{Y} \quad
\begin{tikzcd}
a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f^*(i_c)"'] & c \arrow[d, "i_c"] \\
a \arrow[r, "f"] & b+c
\end{tikzcd}$$

SON PRODUCTOS FIBRADOS.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_a"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b+c \arrow[d, "1_{b+c}"] \\
a \arrow[r, "f"] & b+c
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO YA QUE:

$1_{b+c} \circ f = f = f \circ 1_a$ POR LO TANTO (*) CONMUTA

SEAN $\alpha : d \longrightarrow a$ y $\beta : d \longrightarrow b+c$ TAL QUE $1_{b+c} \circ \beta = f \circ \alpha$

POR LO TANTO $\beta = f \circ \alpha$.

POR LO TANTO EXISTE $\alpha : d \longrightarrow a$ TAL QUE $1_a \circ \alpha = \alpha$ y $f \circ \alpha = \beta$

SI EXISTE $\bar{\alpha} : d \longrightarrow a$ TAL QUE $1_a \circ \bar{\alpha} = \alpha$ y $f \circ \bar{\alpha} = \beta$ ENTONCES

$1_a \circ \bar{\alpha} = 1_a \circ \alpha$, ES DECIR, $\bar{\alpha} = \alpha$

POR LO TANTO (*) ES PRODUCTO FIBRADO y $f^{\#}(1_{b+c}) = 1_a$

POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL SABEMOS QUE $f^{\#}$ TIENE ADJUNTO IZQUIERDO, POR LA PROPOSICIÓN 3.2.10. TENEMOS QUE f^{*} PRESERVA COPRODUCTOS, POR LO TANTO

$(a_1 \xrightarrow{f^{\#}(i_b)} a) \xrightarrow{f^{\#}(i_b)} (a \xrightarrow{1_a} a) \xleftarrow{f^{\#}(i_c)} (a_2 \xrightarrow{f^{\#}(i_c)} a)$ ES COPRODUCTO EN $\mathcal{E}/a$

SEA $(a_1+a_2,\ a_1 \xrightarrow{i_1} a_1+a_2,\ a_2 \xrightarrow{i_2} a_1+a_2)$ EL COPRODUCTO DE a_1 y a_2 EN $\mathcal{E}$ $f^{\#}(i_b) : a_1 \longrightarrow a$ y $f^{\#}(i_c) : a_2 \longrightarrow a$, POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO DE a_1 y a_2 EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : a_1+a_2 \longrightarrow a$ TAL QUE $\varphi \circ i_1 = f^{\#}(i_b)$ y $\varphi \circ i_2 = f^{\#}(i_c)$

POR LO TANTO $i_1 : (a_1 \xrightarrow{f^{\#}(i_b)} a) \longrightarrow (a_1+a_2 \xrightarrow{\varphi} a)$ y $i_2 : (a_2 \xrightarrow{f^{\#}(i_c)} a) \longrightarrow (a_1+a_2 \xrightarrow{\varphi} a) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}/a)$. POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EN $\mathcal{E}/a$ EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\psi : (a \xrightarrow{1_a} a) \longrightarrow (a_1+a_2 \xrightarrow{\varphi} a)$ TAL QUE $\psi \circ f^{\#}(i_b) = i_1$ y $\psi \circ f^{\#}(i_c) = i_2$

$$\psi \circ \varphi \circ i_1 = \psi \circ f^{\#}(i_b) = i_1 = 1_{a_1+a_2} \circ i_1$$

$$\psi \circ \varphi \circ i_2 = \psi \circ f^{\#}(i_c) = i_2 = 1_{a_1+a_2} \circ i_2$$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.18. $\psi \circ \varphi = 1_{a_1+a_2}$

$$\varphi \circ \psi \circ f^{\#}(i_b) = \varphi \circ i_1 = f^{\#}(i_b) = 1_a \circ f^{\#}(i_b)$$

$$\varphi \circ \psi \circ f^{\#}(i_c) = \varphi \circ i_2 = f^{\#}(i_c) = 1_a \circ f^{\#}(i_c)$$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.18. $\varphi \circ \psi = 1_a$

POR LO TANTO $\varphi : a_1 + a_2 \longrightarrow a$ ES ISOMORFISMO Y $a_1 + a_2 \cong a$

PROPOSICIÓN 3.3.6.- HECHO FUNDAMENTAL 2. EN UN TOPO EL COPRODUCTO PRESERVA PRODUCTOS FIBRADOS, ES DECIR,

SI

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & d \arrow[d, "k"] & \text{Y} & a' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & d \arrow[d, "k"] \\
b \arrow[r, "h"] & e & & b' \arrow[r, "h'"] & e
\end{tikzcd}$$

SON PRODUCTOS FIBRADOS, ENTONCES

$$\begin{tikzcd}
a+a' \arrow[r, "{[f,f']}"] \arrow[d, "g+g'"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & d \arrow[d, "k"] \\
b+b' \arrow[r, "{[h,h']}"] & e
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

DEMOSTRACIÓN: COMO (*) Y (**) CONMUTAN, ENTONCES

$k \circ f = h \circ g$ Y $k \circ f' = h' \circ g'$

$$k \circ [f, f'] = [k \circ f, k \circ f'] = [h \circ g, h' \circ g'] = [[h,h'] \circ i_b \circ g, [h,h'] \circ i_{b'} \circ g']$$

$$= [h,h'] \circ [i_b \circ g, i_{b'} \circ g'] = [h,h'] \circ (g+g')$$

POR LO TANTO (***) CONMUTA.

SEAN $\alpha : c \longrightarrow d$ Y $\beta : c \longrightarrow b+b'$ TALES QUE $k \circ \alpha = [h,h'] \circ \beta$

POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR EXISTEN

$$\begin{tikzcd}
c_1 + c_2 \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "\beta_1 + \beta_2"'] & c \arrow[d, "\beta"] \\
 & b+b'
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "\varphi\circ i_{c_1}"] \arrow[d, "\beta_1"'] & C \arrow[d, "\beta"] & C_2 \arrow[l, "\varphi\circ i_{c_2}"'] \arrow[d, "\beta_2"] \\
b \arrow[r, "i_b"] & b+b' & b' \arrow[l, "i_{b'}"']
\end{tikzcd}$$

$$\kappa\circ(\kappa\circ\varphi\circ i_{c_1}) = (\kappa\circ\alpha)\circ\varphi\circ i_{c_1} = ([h,h']\circ\beta)\circ\varphi\circ i_{c_1} = [h,h']\circ(\beta\circ\varphi\circ i_{c_1})$$

$$= [h,h']\circ(i_b\circ\beta_1) = ([h,h']\circ i_b)\circ\beta_1 = h\circ\beta_1$$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\gamma_1 : C_1 \longrightarrow a$

TAL QUE $f\circ\gamma_1 = \alpha\circ\varphi\circ i_{c_1}$ y $g\circ\gamma_1 = \beta_1$

$$\kappa\circ(\alpha\circ\varphi\circ i_{c_2}) = (\kappa\circ\alpha)\circ\varphi\circ i_{c_2} = ([h,h']\circ\beta)\circ\varphi\circ i_{c_2} = [h,h']\circ(\beta\circ\varphi\circ i_{c_2})$$

$$= [h,h']\circ(i_{b'}\circ\beta_2) = ([h,h']\circ i_{b'})\circ\beta_2 = h'\circ\beta_2$$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\gamma_2 : C_2 \longrightarrow a'$

TAL QUE $f'\circ\gamma_2 = \alpha\circ\varphi\circ i_{c_2}$ y $g'\circ\gamma_2 = \beta_2$

SEA $\gamma_1+\gamma_2 : C_1+C_2 \longrightarrow a+a'$ y $\gamma = (\gamma_1+\gamma_2)\circ\varphi^{-1} : C \longrightarrow a+a'$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "i_{c_1}"] & a \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i_a"] \arrow[dr, "f"] & & b \arrow[d, "i_b"] \\
c \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & c_1+c_2 \arrow[r, "\gamma_1+\gamma_2"] & a+a' \arrow[r, "{[f,f']}"] \arrow[rr, bend right, "g+g'"'] & d & b+b' \\
 & c_2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[u, "i_{c_2}"] & a' \arrow[u, "i_{a'}"] \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "g'"] & & b' \arrow[u, "i_{b'}"']
\end{tikzcd}$$

$$[f,f']\circ\gamma = [f,f']\circ(\gamma_1+\gamma_2)\circ\varphi^{-1} = [f\circ\gamma_1, f'\circ\gamma_2]\circ\varphi^{-1} = [\alpha\circ\varphi\circ i_{c_1}, \alpha\circ\varphi\circ i_{c_2}]\circ\varphi^{-1}$$

$$= \alpha\circ\varphi\circ[i_{c_1}, i_{c_2}]\circ\varphi^{-1} = \alpha\circ\varphi\circ 1_{c_1+c_2}\circ\varphi^{-1} = \alpha\circ\varphi\circ\varphi^{-1} = \alpha$$

$$(g+g')\circ\gamma = (g+g')\circ(\gamma_1+\gamma_2)\circ\varphi^{-1} = ([i_b\circ g, i_{b'}\circ g']\circ[i_a\circ\gamma_1, i_{a'}\circ\gamma_2])\circ\varphi^{-1}$$

$$= [i_b\circ g\circ\gamma_1, i_{b'}\circ g'\circ\gamma_2]\circ\varphi^{-1} = [i_b\circ\beta_1, i_{b'}\circ\beta_2]\circ\varphi^{-1}$$

$$= [\beta \circ \varphi \circ i_{c_1}, \beta \circ \varphi \circ i_{c_2}] \circ \varphi^{-1} = \beta \circ \varphi \circ [i_{c_1}, i_{c_2}] \circ \varphi^{-1}$$

$$= \beta \circ \varphi \circ 1_{c_1+c_2} \circ \varphi^{-1} = \beta \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \beta$$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{\gamma} : c \longrightarrow a+a'$ TAL QUE $[f, f'] \circ \gamma = \alpha$ Y $(g+g') \circ \gamma = \beta$. POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR EXISTEN

$$\begin{tikzcd}
\bar{c}_1+\bar{c}_2 \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2"'] & c \arrow[d, "\bar{\gamma}"] \\
& a+a'
\end{tikzcd}$$

COMO $c \cong c_1+c_2$ ENTONCES $\bar{c}_1+\bar{c}_2 \cong c_1+c_2$, ES DECIR, $\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2 \simeq \gamma_1+\gamma_2$

$(\gamma_1+\gamma_2) \circ \varphi^{-1} \circ \psi = \bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2$, POR LO TANTO $\gamma \circ \psi = \bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2$

ASI QUE $\gamma = \gamma \circ \psi \circ \psi^{-1} = (\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2) \circ \psi^{-1} = \bar{\gamma}$

POR LO TANTO (***) ES PRODUCTO FIBRADO

CAPITULO 4

TEOREMA DE RADU DIACONESCU

SECCION 1.-

EXTENCIONALIDAD Y BIVALENCIA

Nuestra motivación de topo es una categoría que se comporte como la categoría $\mathcal{C}onj$, por lo tanto el objeto inicial 0 debe comportarse como el conjunto vacio ϕ, el cual no tiene elementos.

Si existe en un topo $\mathcal{E}$ un morfismo $x:1\longrightarrow 0$ por la proposición 1.1.54. $\mathcal{E}$ es degenerado, es decir, todos los objetos de $\mathcal{E}$ son isomorfos. Entonces en un topo no degenerado, el objeto inicial 0 no tiene elementos.-

Definición 4.1.1.- Un objeto a en un topo $\mathcal{E}$ es no cero si $a\neq 0$, y es no vacio si existe al menos un $\mathcal{E}$-morfismo $x:1\longrightarrow a$

El principio de extensión para conjuntos establece que conjuntos con los mismos elementos son identicos. Para funciones, este principio toma la siguiente forma:

Dos funciones $f,g:A\longrightarrow B$ son iguales si $\forall x\in A$ $f(x)=g(x)$

Definición 4.1.2.- Principio de extensión para morfismos: Si $f,g:a\longrightarrow b$ son un par de morfismos distintos, entonces existe un elemento $x:1\longrightarrow a$ tal que $f\circ x\neq g\circ x$

DEFINICIÓN 4.1.3.- UN TOPO $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO, SI $\mathcal{E}$ ES NO DEGENERADO Y SATISFACE EL PRINCIPIO DE EXTENSIÓN PARA MORFISMOS.

PROPOSICIÓN 4.1.4.- SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO BIEN PUNTEADO, ENTONCES TODO $\mathcal{E}$-OBJETO NO CERO ES NO VACIO

DEMOSTRACIÓN: SEA $a \in \mathcal{O}b(\mathcal{E})$ TAL QUE a ES NO CERO, ES DECIR, $a \ncong 0$, ENTONCES $0_a : 0 \rightarrowtail a$ Y $1_a : a \to a$ TIENEN DOMINIOS DISTINTOS, POR LO TANTO $0_a \neq 1_a$

$\chi_{0_a} : a \to \Omega$ Y $\chi_{1_a} : a \to \Omega$ SON MORFISMOS DISTINTOS, YA QUE SI $\chi_{0_a} = \chi_{1_a}$ ENTONCES $0_a \simeq 1_a$ Y POR LO TANTO $0 \cong a$

POR EL PRINCIPIO DE EXTENSIÓN EXISTE $x : 1 \to a$ TAL QUE $\chi_{0_a} \circ x \neq \chi_{1_a} \circ x$. POR LO TANTO a ES NO VACIO

EN LA CATEGORÍA $\mathcal{C}onj$ EXISTEN DOS MORFISMOS DE $1 = \{0\}$ EN $\Omega = 2 = \{0,1\}$. UNO ES EL MORFISMO VER: $\{0\} \to \{0,1\}$ TAL QUE VER$(0) = 1$, EL OTRO LO DENOTAREMOS FALSO: $\{0\} \to \{0,1\}$ TAL QUE FALSO$(0) = 0$. ADEMAS EN $\mathcal{C}onj$ EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO. $\phi = \{x \mid \text{FALSO}(x) = 1\}$

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & \{0\} \arrow[d, "\text{FALSO}"] \\
\{0\} \arrow[r, "\text{VER}"] & \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO FALSO $= \chi_{0_1}$

DEFINICIÓN 4.1.5.- EN UN TOPO $\mathcal{E}$ EL MORFISMO $F : 1 \to \Omega$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "F"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN $\mathcal{E}$

POR LO TANTO $F = \chi_{0_1}$

PROPOSICIÓN 4.1.6.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO, ENTONCES $\forall a \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "!"'] & a \arrow[d, "F\circ !_a"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

ES DECIR, $\chi_{0_a} = F\circ !_a$

DEMOSTRACIÓN: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "1_0"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \arrow[d, "!_a"] \\
0 \arrow[r, "0_1"] & 1
\end{tikzcd}$$

$!_a \circ 0_a : 0 \longrightarrow 1$ POR SER 0 OBJETO INICIAL $!_a \circ 0_a = 0_1 = 0_1 \circ 1_0$

POR LO TANTO (*) CONMUTA

SEAN $f : c \longrightarrow 0$ Y $g : c \longrightarrow a$ TALES QUE $!_a \circ g = 0_1 \circ f$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.54. $c \cong 0$, POR LO TANTO EXISTE

$h : c \longrightarrow 0$ ISOMORFISMO

$0_a \circ h \circ h^{-1} : 0 \longrightarrow a$ Y $g \circ h^{-1} : 0 \longrightarrow a$ POR SER 0 OBJETO INICIAL

$0_a \circ h \circ h^{-1} = g \circ h^{-1}$, ASI QUE $0_a \circ h = g$.

$1_0 \circ h \circ h^{-1} : 0 \longrightarrow 0$ Y $f \circ h^{-1} : 0 \longrightarrow 0$ POR SER 0 OBJETO INICIAL

$1_0 \circ h \circ h^{-1} = f \circ h^{-1}$, ASI QUE $1_0 \circ h = f$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\bar{h}: c \longrightarrow 0$

POR LO TANTO $1_0 \circ \bar{h} = 1_0 \circ h$, ASI QUE $\bar{h} = h$

POR LO TANTO (*) ES PRODUCTO FIBRADO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "1_0"'] & a \arrow[d, "!_a"] \\
0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "F"] \\
1 \arrow[r, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EL CUADRADO SUPERIOR Y EL CUADRADO INFERIOR SON PRODUCTOS FIBRADOS, POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO EXTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO, POR LO TANTO $\chi_{0_a} = F \circ !_a$

PROPOSICIÓN 4.1.7.- EN UN TOPO $\mathcal{E}$ NO DEGENERADO $V \neq F$

DEMOSTRACIÓN: SUPONGAMOS QUE $V = F$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "F"] \\
1 \arrow[r, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

SI $V = F$ ENTONCES $V \circ 1_1 = F \circ 1_1$

POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO EXISTE $x: 1 \longrightarrow 0$

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.54. $\mathcal{E}$ ES DEGENERADO.

DEFINICIÓN 4.1.8.- UN TOPO $\mathcal{E}$ NO DEGENERADO ES LLAMADO BIVALENTE

Si V y F son los únicos valores de verdad, es decir, elementos de Ω.

Proposición 4.1.9.- Si un topo $\mathcal{E}$ es bien punteado, entonces $\mathcal{E}$ es bivalente

Demostración: Supongamos que $\mathcal{E}$ es bien punteado.

Sea $f: 1 \to \Omega$ elemento de Ω

Sea
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "!_a"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & 1 \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, tail, "V"] & \Omega \end{tikzcd}$$
el producto fibrado de f sobre V

Por la proposición 1.2.47. g es monomorfismo

Si $a \cong 0$ entonces a es objeto inicial y $g \cong 0_1$

Por lo tanto $f = \chi_g = \chi_{0_1} = F$

Si $a \ncong 0$, por ser $\mathcal{E}$ bien punteado y por la proposición 4.1.4. existe $x: 1 \to a$.

Sean $h, K: 1 \to b$ tales que $h \circ g = K \circ g$. Entonces $h \circ g \circ x = K \circ g \circ x$, pero $g \circ x: 1 \to 1$, por ser 1 objeto terminal $g \circ x = 1_1$, por lo tanto $h \circ 1_1 = K \circ 1_1$, así que $h = K$

Por lo tanto g es epimorfismo. Pero g es monomorfismo por lo tanto $g: a \to 1$ es isomorfismo y $a \cong 1$. Entonces a es objeto terminal y $g \cong 1_1$, por lo tanto $f = \chi_g = \chi_{1_1}$

Pero
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "1_1"] \arrow[d, "1_1"'] & 1 \arrow[d, "V"] \\ 1 \arrow[r, "V"] & \Omega \end{tikzcd}$$
es producto fibrado

Por lo tanto $\mathcal{X}_{1_1} = V$ y $f = V$

Sea $(1+1,\ i_1: 1 \longrightarrow 1+1,\ j_1: 1 \longrightarrow 1+1)$ el coproducto de 1 consigo mismo. Como todo topo $\mathcal{E}$ tiene coproductos el morfismo $[V,F]: 1+1 \longrightarrow \Omega$ esta definido

Definición 4.1.10.- Un topo $\mathcal{E}$ es llamado clásico si el morfismo $[V,F]: 1+1 \longrightarrow \Omega$ es isomorfismo.

Definición 4.1.11.- Sea $\mathcal{E}$ un topo, si $f: a \longrightarrow b$ y $g: c \longrightarrow b$ son $\mathcal{E}$-morfismos, decimos que f y g son ajenos si su producto fibrado es 0, es decir,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_c"] \arrow[d, "0_a"'] & c \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

es producto fibrado en $\mathcal{E}$.

Proposición 4.1.12.- Si $f: a \rightarrowtail b$ y $g: c \rightarrowtail b$ son monomorfismos ajenos en un topo $\mathcal{E}$, entonces $[f,g]: a+c \longrightarrow b$ es monomorfismo

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "1_c"] \arrow[d, "1_c"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & c \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[r, "g"] & b
\end{tikzcd}$$

Si $\alpha: d \longrightarrow c$ y $\beta: d \longrightarrow c$ tales que $g \circ \alpha = g \circ \beta$, entonces por ser g monomorfismo $\alpha = \beta$. Por lo tanto existe $\alpha: d \longrightarrow c$ tal que

$1_c \circ \alpha = \alpha = \beta$. POR LO TANTO (*) ES PRODUCTO FIBRADO

POR SER f Y g AJENOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_c"] \arrow[d, "0_a"'] & c \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2

$$\begin{tikzcd}
0+c \arrow[r, "{[0_c, 1_c]}"] \arrow[d, "0_a+1_c"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & c \arrow[d, "g"] \\
a+c \arrow[r, "{[f,g]}"] & b
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.32 $[0_c, 1_c]$ ES ISOMORFISMO

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[dl, "0_c"'] \arrow[d, "0_c"] & a \arrow[d, "i_a"] \arrow[dr, "f"] & \\
c & 0+c \arrow[l, "{[0_c, 1_c]}"'] \arrow[r, "0_a+1_c"'] & a+c \arrow[r, "{[f,g]}"] & b \\
 & c \arrow[ul, "1_c"] \arrow[u, "{[0_c, 1_c]^{-1}}"'] \arrow[r, "1_c"] & c \arrow[u, "i_c"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "1_c"] \arrow[d, "i_c"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & c \arrow[d, "g"] \\
a+c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b
\end{tikzcd}$$

$[f,g]\circ i_c = g = g\circ 1_c$ POR LO TANTO (***) CONMUTA

SEAN $\alpha : d \longrightarrow c$ y $\beta : d \longrightarrow a+c$ TALES QUE $g\circ\alpha = [f,g]\circ\beta$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\varphi : d \longrightarrow 0+c$ TAL QUE $[0_c, 1_c]\circ\varphi = \alpha$ y $(0_a + 1_c)\circ\varphi = \beta$

SEA $[0_c, 1_c]\circ\varphi : d \longrightarrow c$, $1_c \circ [0_c, 1_c]\circ\varphi = 1_c\circ\alpha = \alpha$

$i_c \circ [0_c, 1_c]\circ\varphi = i_c\circ 1_c \circ [0_c, 1_c]\circ\varphi = (0_a + 1_c)\circ\varphi = \beta$

POR LO TANTO (***) ES PRODUCTO FIBRADO.

DE MANERA ANÁLOGA PARA f

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "1_a"] \arrow[d, "i_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\
a+c \arrow[r, "{[f,g]}"] & b
\end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2

$$\begin{tikzcd}
a+c \arrow[r, "1_a+1_c"] \arrow[d, "{[i_a, i_c]}"'] & a+c \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
a+c \arrow[r, "{[f,g]}"] & b
\end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO

POR LA PROPOSICIÓN 1.2.29. $[i_a, i_c] = 1_{a+c}$

POR LA PROPOSICIÓN 1.1.34. $1_a + 1_c = 1_{a+c}$

ENTONCES,
$$\begin{tikzcd}
a+c \arrow[r, "1_{a+c}"] \arrow[d, "1_{a+c}"'] & a+c \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
a+c \arrow[r, "{[f,g]}"] & b
\end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO.

SEAN $\alpha, \beta : d \longrightarrow a+c$ TALES QUE $[f,g]\circ\alpha = [f,g]\circ\beta$

POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : d \longrightarrow a+c$ TAL QUE $1_{a+c}\circ\varphi = \alpha$ y $1_{a+c}\circ\varphi = \beta$

POR LO TANTO $\alpha=\beta$ Y $[f,g]$ ES MONOMORFISMO

PROPOSICIÓN 4.1.13.- EN TODO TOPO $[V,F]:1+1\longrightarrow\Omega$ ES MONOMORFISMO.

DEMOSTRACIÓN: POR LA PROPOSICIÓN 1.2.15. $V,F:1\longrightarrow\Omega$ SON MONOMORFISMOS. POR LA DEFINICIÓN 4.1.5

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, tail, "F"] \\
1 \arrow[r, tail, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO V Y F SON MONOMORFISMOS AJENOS, POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $[V,F]:1+1\longrightarrow\Omega$ ES MONOMORFISMO.

PROPOSICIÓN 4.1.14.- SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO BIEN PUNTEADO, ENTONCES $[V,F]:1+1\cong\Omega$, ES DECIR, $\mathcal{E}$ ES CLÁSICO.

DEMOSTRACIÓN: POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $[V,F]$ ES MONOMORFISMO SOLO TENEMOS QUE DEMOSTRAR QUE SI $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO, ENTONCES $[V,F]$ ES EPIMORFISMO

SEAN $g,f:\Omega\longrightarrow a$ TALES QUE $f\circ[V,F]=g\circ[V,F]$

$$f\circ V=f\circ[V,F]\circ i=g\circ[V,F]\circ i=g\circ V$$

$$f\circ F=f\circ[V,F]\circ j=g\circ[V,F]\circ j=g\circ F$$

POR LA PROPOSICIÓN 4.1.9. TENEMOS QUE SI $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO ENTONCES $\mathcal{E}$ ES BIVALENTE. POR LO TANTO V Y F SON LO ÚNICOS ELEMENTOS DE Ω.

SUPONGAMOS QUE $f\neq g$ POR SER $\mathcal{E}$ BIEN PUNTEADO $\mathcal{E}$ SATISFACE EL PRINCIPIO DE EXTENCIÓN, POR LO TANTO EXISTE $x:1\longrightarrow\Omega$

ELEMENTO DE Ω TAL QUE $f\circ x\neq g\circ x$ ∇

POR LO TANTO $f=g$ Y $[V,F]$ ES EPIMORFISMO

POR LO TANTO $[V,F]:1+1\cong\Omega$ Y $\mathcal{E}$ ES CLÁSICO

PROPOSICIÓN 4.1.15.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO BIEN PUNTEADO, ENTONCES $\mathcal{E}$ ES CLÁSICO Y TODO $\mathcal{E}$-OBJETO NO CERO ES NO VACÍO.

DEMOSTRACION: SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO BIEN PUNTEADO, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $\mathcal{E}$ ES CLÁSICO, Y POR LA PROPOSICIÓN 4.1.4 TODO $\mathcal{E}$-OBJETO NO CERO ES NO VACÍO.

DEFINICIÓN 4.1.16.- SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA CON OBJETO TERMINAL 1

a) $f:a\longrightarrow b\in m_1(\mathcal{C})$ ES SOBRE, SI PARA TODO $y:1\longrightarrow b$, EXISTE $x:1\longrightarrow a$ TAL QUE $f\circ x=y$.

b) $f:a\longrightarrow b\in m_1(\mathcal{C})$ ES INYECTIVA SI PARA TODO PAR $x,y:1\longrightarrow a$ TALES QUE $f\circ x=f\circ y$, ENTONCES $x=y$.

PROPOSICIÓN 4.1.17.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO BIEN PUNTEADO Y $f:a\longrightarrow b\in m_1(\mathcal{E})$. ENTONCES

a) f ES SOBRE SI Y SÓLO SI f ES EPIMORFISMO

b) f ES INYECTIVA SI Y SÓLO SI f ES MONOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN:

a) SUPONGAMOS QUE $f:a\longrightarrow b$ ES SOBRE.

SEAN $g,h:b\longrightarrow c$ TAL QUE $g\circ f=h\circ f$ Y SUPONGAMOS QUE $g\neq h$ POR SER $\mathcal{E}$ BIEN PUNTEADO EXISTE $y:1\longrightarrow b$ TAL QUE $g\circ y\neq h\circ y$. POR SER f SOBRE EXISTE $x:1\longrightarrow a$ TAL QUE $f\circ x=y$. POR LO TANTO

$g \circ y = g \circ f \circ x = h \circ f \circ x = h \circ y$ 8

POR LO TANTO $g = h$ Y f ES EPIMORFISMO.

SUPONGAMOS QUE $f: a \twoheadrightarrow b$ ES EPIMORFISMO. SEA $y: 1 \longrightarrow b$

SEA
$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & 1 \arrow[d, "y"] \\ a \arrow[r, two heads, "f"] & b \end{tikzcd}$$
EL PRODUCTO FIBRADO DE y SOBRE f

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 1. $p: c \longrightarrow 1$ ES EPIMORFISMO

SI $c \cong 0$ ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 1.2.54. P ES MONOMORFISMO

POR LO TANTO P ES ISOMORFISMO Y $0 \cong 1$, ES DECIR, $\mathcal{E}$ ES DEGENERADO 8 YA QUE $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO

POR LO TANTO $c \ncong 0$, ENTONCES EXISTE $z: 1 \longrightarrow c$

SEA $x: 1 \longrightarrow a$ TAL QUE $x = q \circ z$

$p \circ z: 1 \longrightarrow 1$ POR SER 1 OBJETO TERMINAL $p \circ z = 1_1$

$f \circ x = f \circ q \circ z = y \circ p \circ z = y \circ 1_1 = y$

POR LO TANTO f ES SOBRE

b) SUPONGAMOS QUE $f: a \longrightarrow b$ ES INYECTIVA

SEAN $g, h: c \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ g = f \circ h$ Y SUPONGAMOS QUE $g \neq h$ POR SER $\mathcal{E}$ BIEN PUNTEADO EXISTE $x: 1 \longrightarrow c$ TAL QUE $g \circ x \neq h \circ x$. $g \circ x, h \circ x: 1 \longrightarrow a$ TAL QUE

$f \circ g \circ x = f \circ h \circ x$ POR SER f INYECTIVA $g \circ x = h \circ x$ γ

POR LO TANTO $g = h$ Y f ES MONOMORFISMO

SUPONGAMOS QUE $f: a \rightarrowtail b$ ES MONOMORFISMO

SEAN $x, y: 1 \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ x = f \circ y$, POR SER f MONOMORFISMO $x = y$. POR LO TANTO f ES INYECTIVA.

SECCION 2.-

Sea D un conjunto y $\mathcal{P}(D)$ el conjunto potencia de D, es decir, $\mathcal{P}(D)=\{A \mid A\subseteq D\}$. Consideremos las siguientes operaciones entre elementos de $\mathcal{P}(D)$

Intersección: $A\cap B=\{x\in D\mid x\in A \text{ y } x\in B\}$.

Unión: $A\cup B=\{x\in D\mid x\in A \text{ ó } x\in B\}$

Complemento: $-A=\{x\in D\mid x\notin A\}$

El conjunto $\mathcal{P}(D)$ junto con las operaciones $\cap$, $\cup$ y $-$ forman una estructura de álgebra booleana que definiremos posteriormente. Estas algebras estan intimamente relacionadas con la noción de verdad de la lógica clásica.

Las operaciones de $\cap$ $\cup$ y $-$ pueden ser caracterizadas por propiedades universales, y por lo tanto pueden ser definidas en un topo, dando como resultado un álgebra de subobjetos.

Las reglas de la lógica clásica son representadas en $\mathcal{C}an$ por operaciones en el conjunto $2=\{0,1\}$, y pueden ser desarrolladas en cualquier topo $\mathcal{E}$, utilizando a Ω en lugar de 2, esto nos da la lógica de $\mathcal{E}$ la cual caracteriza los subobjetos en $\mathcal{E}$.

En esta sección veremos brevemente lo básico de la lógica clásica y como se generaliza a un topo.

Proposiciones

DEFINICIÓN [illegible]. UNA PROPOSICIÓN ES [illegible] CON UN VALOR DE VERDAD DETERMINADO, ES DECIR, ES VERDADERO O ES FALSO. SI UNA PROPOSICIÓN ES VERDADERA, ENTONCES LE ASIGNAMOS EL NÚMERO 1; SI ES FALSA, LE ASIGNAMOS EL NÚMERO 0. POR LO TANTO EL CONJUNTO DE VALORES DE VERDAD ES $2=\{0,1\}$.

DADAS PROPOSICIONES, PODEMOS FORMAR NUEVAS CON AYUDA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS $\sim$(NO), $\wedge$(Y), $\vee$(O), $\supset$(IMPLICA); ES DECIR, SI α Y β SON PROPOSICIONES, ENTONCES $\sim\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\supset\beta$ LO SON. SE DICE QUE ESTAS SE OBTUVIERON POR, NEGACIÓN, CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN O IMPLICACIÓN RESPECTIVAMENTE.

PARA CALCULAR EL VALOR DE VERDAD DE PROPOSICIONES COMPUESTAS A PARTIR DE SUS PROPOSICIONES SIMPLES, UTILIZAMOS LAS SIGUIENTES REGLAS:

NEGACIÓN: LA PROPOSICIÓN $\sim\alpha$ ES VERDADERA (1) SI α ES FALSA (0) Y ES FALSA (0) SI α ES VERDADERA (1). ESTA REGLA QUEDA DETERMINADA EN LA SIGUIENTE TABLA

α	$\sim\alpha$
1	0
0	1

ESTA REGLA NOS INDUCE UNA FUNCIÓN $7:2\longrightarrow 2$ TAL QUE $7(1)=0$ Y $7(0)=1$, ESTA FUNCIÓN ES LLAMADA LA FUNCIÓN DE VERDAD DE LA NEGACIÓN.

CONJUNCIÓN: LA PROPOSICIÓN $\alpha\wedge\beta$ ES VERDADERA (1) SI Y SÓLO SI α ES VERDADERA (1) Y β ES VERDADERA (1). ESTA REGLA QUEDA

DETERMINADA EN LA SIGUIENTE TABLA

α	β	$\alpha\wedge\beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

LA CUAL INDUCE LA FUNCIÓN $\wedge: 2\times 2 \longrightarrow 2$ TAL QUE $1\wedge 1=1$, $1\wedge 0=0$, $0\wedge 1=0$ Y $0\wedge 0=0$, ESTA ES LLAMADA LA FUNCIÓN DE VERDAD DE LA CONJUNCIÓN

DISYUNCIÓN: LA PROPOSICIÓN $\alpha\vee\beta$ ES FALSA (0) SI Y SÓLO SI α ES FALSA (0) Y β ES FALSA (0). ESTA REGLA QUEDA DETERMINADA EN LA SIGUIENTE TABLA

α	β	$\alpha\vee\beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

LA CUAL INDUCE LA FUNCIÓN $\vee: 2\times 2 \longrightarrow 2$ TAL QUE $1\vee 1=1$, $1\vee 0=1$, $0\vee 1=1$ Y $0\vee 0=0$, ESTA ES LLAMADA LA FUNCIÓN DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN.

IMPLICACIÓN: LA PROPOSICIÓN $\alpha\supset\beta$ ES VERDADERA (1) SI Y SÓLO SI α ES FALSA (0) O β ES VERDADERA (1). ESTA REGLA QUEDA DETERMINADA EN LA SIGUIENTE TABLA

α	β	$\alpha\supset\beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

LA CUAL INDUCE LA FUNCIÓN $\Rightarrow: 2\times 2 \longrightarrow 2$ TAL QUE

$1 \Rightarrow 1 = 1$, $1 \Rightarrow 0 = 0$, $0 \Rightarrow 1 = 1$ y $0 \Rightarrow 0 = 1$, esta es llamada la función de verdad de la implicación.

Por aplicaciones sucesivas de estas reglas, se puede construir la tabla de verdad de cualquier proposición compuesta.

Definición 4.2.2.- Una tautología, es una proposición cuya tabla de verdad sólo contiene 1

EL CÁLCULO PROPOSICIONAL

Definición 4.2.3- Un sistema formal está constituido por:

1.- Un conjunto de símbolos.

2.- Un conjunto de expresiones formadas con un número finito de símbolos; llamadas fórmulas bien formadas (f.b.f).

3.- Un conjunto de f.b.f llamadas axiomas.

4.- Un conjunto finito de reglas de inferencia, es decir, una regla que nos permita inferir una f.b.f. como consecuencia de otras.

El cálculo proposicional, es un sistema formal L tal que

1.- el conjunto de símbolos es:

i) Un conjunto numerable $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$ de letras o variables proposicionales.

ii) conectivos lógicos $\sim, \wedge, \vee, \supset$.

iii) signos de agrupación), (.

2.- EL CONJUNTO DE f.b.f ESTÁ GENERADO DE LA SIGUIENTE MANERA:

i) π_i ES f.b.f $\forall i \in \mathbb{N}$

ii) SI α Y β SON f.b.f ENTONCES $(\sim\alpha)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\supset\beta)$ SON f.b.f.

3.- EL CONJUNTO DE AXIOMAS ES EL SIGUIENTE.

I.- $\alpha\supset(\alpha\wedge\alpha)$

II.- $(\alpha\wedge\beta)\supset(\beta\wedge\alpha)$

III.- $(\alpha\supset\beta)\supset((\alpha\wedge\gamma)\supset(\beta\wedge\gamma))$

IV.- $((\alpha\supset\beta)\wedge(\beta\supset\gamma))\supset(\alpha\supset\gamma)$

V.- $\beta\supset(\alpha\supset\beta)$

VI.- $(\alpha\wedge(\alpha\supset\beta))\supset\beta$

VII.- $\alpha\supset(\alpha\vee\beta)$

VIII.- $(\alpha\vee\beta)\supset(\beta\vee\alpha)$

IX.- $((\alpha\supset\gamma)\wedge(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\vee\beta)\supset\gamma)$

X.- $\sim\alpha\supset(\alpha\supset\beta)$

XI.- $((\alpha\supset\beta)\wedge(\alpha\supset\sim\beta))\supset\sim\alpha$

XII.- $\alpha\vee\sim\alpha$

4.- LA ÚNICA REGLA DE INFERENCIA ES:

DE α Y $\alpha\supset\beta$ SE INFIERE β, ESTA REGLA ES CONOCIDA CON EL NOMBRE DE MODUS PONENS.

DEFINICIÓN 4.1.4.- UNA PRUEBA EN EL CÁLCULO PROPOSICIONAL L ES UNA SUCESIÓN FINITA $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ DE f.b.f. TALES QUE α_i ES UN AXIOMA O α_i ES INFERIDA DE DOS f.b.f ANTERIORES A ESTA EN LA SUCESIÓN POR LA REGLA MODUS PONENS. $\forall i=1,\ldots,n$.

A LA ÚLTIMA f.b.f DE UNA PRUEBA SE LE LLAMA L-TEOREMA Y

SE DENOTA $\vdash_L \alpha$

LA DEMOSTRACIÓN DE QUE LOS L·TEOREMAS SON PRECISAMENTE LAS TAUTOLOGÍAS ESTÁ DIVIDIDA EN DOS TEOREMAS:

TEOREMA DE CONSISTENCIA: SI $\vdash_L \alpha$ ENTONCES α ES TAUTOLOGÍA

TEOREMA DE COMPLETEZ: SI α ES TAUTOLOGÍA ENTONCES $\vdash_L \alpha$.

LAS DEMOSTRACIONES DE ESTOS TEOREMAS SE PUEDEN ENCONTRAR EN KLEENE.

ÁLGEBRAS BOOLEANAS

DEFINICIÓN 4.2.5.- UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO (COPO) ES UN PAR ORDENADO $\langle P, \leq \rangle$ DONDE P ES UN CONJUNTO NO VACÍO Y $\leq$ ES UNA RELACIÓN BINARIA EN P CON LAS SIGUIENTES PROPIEDADES

i) REFLEXIVILIDAD: $\forall x \in P \quad x \leq x$

ii) ANTISIMETRÍA: $\forall x, y \in P$ SI $x \leq y$ Y $y \leq x$ ENTONCES $x = y$.

iii) TRANSITIVIDAD: $\forall x, y, z \in P$ SI $x \leq y$ Y $y \leq z$ ENTONCES $x \leq z$

DEFINICIÓN 4.2.6.- SEA $\langle P, \leq \rangle$ UN COPO Y $A \subseteq P$

1.- $x \in P$ ES UNA COTA SUPERIOR DE A SI Y SÓLO SI $a \leq x \quad \forall a \in A$.

2.- $x \in P$ ES UNA COTA INFERIOR DE A SI Y SÓLO SI $x \leq a \quad \forall a \in A$.

3.- $x \in P$ ES EL SUPREMO DE A SI Y SÓLO SI x ES COTA SUPERIOR DE A Y SI $y \in P$ ES TAL QUE $a \leq y \quad \forall a \in A$ ENTONCES $x \leq y$.

4.- $x \in P$ ES EL ÍNFIMO DE A SI Y SÓLO SI x ES COTA INFERIOR DE A Y SI $y \in P$ ES TAL QUE $y \leq a \quad \forall a \in A$ ENTONCES $y \leq x$.

SI $A = \{x, y\}$ ENTONCES $x \sqcup y$ DENOTA AL SUPREMO DE A Y $x \sqcap y$

DENOTA AL ÍNFIMO DE A.

DEFINICIÓN 4.2.7.- UNA RED ES UN COPO $\langle P,\leq\rangle$ TAL QUE $\forall x,y\in P$ $x\sqcup y$ Y $x\sqcap y$ EXISTEN

DEFINICIÓN 4.2.8.- SEA $\langle P,\leq\rangle$ UNA RED

1.- UN MÍNIMO DE P ES UN ELEMENTO $0\in P$ TAL QUE $0\leq x$ $\forall x\in P$

2.- UN MÁXIMO DE P ES UN ELEMENTO $1\in P$ TAL QUE $x\leq 1$ $\forall x\in P$

DEFINICIÓN 4.2.9.- UNA RED $\langle P,\leq\rangle$ SE DICE COMPLEMENTADA SI TIENE ELEMENTO MÍNIMO 0 Y ELEMENTO MÁXIMO 1 TALES QUE $\forall x\in P$ EXISTE $y\in P$ TAL QUE $x\sqcup y=1$ Y $x\sqcap y=0$. y ES LLAMADO EL COMPLEMENTO DE x

DEFINICIÓN 4.2.10.- SEA $\langle P,\leq\rangle$ UNA RED Y $A\subseteq P$

1.- $x\in P$ ES EL ELEMENTO MÍNIMO DE A, SI x ES EL ÍNFIMO DE A Y $x\in A$.

2.- $x\in P$ ES EL ELEMENTO MÁXIMO DE A, SI x ES EL SUPREMO DE A Y $x\in A$

DEFINICIÓN 4.2.11.- SEA $\langle P,\leq\rangle$ UNA RED CON ELEMENTO MÍNIMO 0 $b\in P$ ES EL PSEUDO COMPLEMENTO DE $a\in P$, SI Y SÓLO SI, b ES EL ELEMENTO MÁXIMO DE $L=\{x\in P\mid a\sqcap x=0\}$

DEFINICIÓN 4.2.12.- SEA $\langle P,\leq\rangle$ UNA RED CON ELEMENTO MÍNIMO 0 $\langle P,\leq\rangle$ ES UNA RED PSEUDO COMPLEMENTADA SI TODO ELEMENTO $x\in P$ TIENE PSEUDO COMPLEMENTO

LA NOCIÓN DE PSEUDO COMPLEMENTO SE PUEDE GENERALIZAR AL REMPLAZAR EL ELEMENTO 0 POR OTRO ELEMENTO DE LA RED.

DEFINICIÓN 4.2.13.- SEA $\langle P, \le \rangle$ UNA RED.

$c \in P$ ES EL PSEUDO COMPLEMENTO DE $a \in P$ RELATIVO A $b \in P$, SI Y SÓLO SI c ES EL ELEMENTO MAXIMO DE $L' = \{x \in P \mid a \sqcap x \le b\}$.

EL PSEUDO COMPLEMENTO DE a RELATIVO A b SERA DENOTADO $a \to b$.

DEFINICIÓN 4.2.14.- UNA RED $\langle P, \le \rangle$ SE DICE RELATIVAMENTE PSEUDO COMPLEMENTADA, SI $a \to b$ EXISTE $\forall\, a, b \in P$

DEFINICIÓN 4.2.15.- UNA RED $\langle P, \le \rangle$ SE DICE DISTRIBUTIVA SI $\forall\, x, y, z \in P$

$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ Y $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

DEFINICIÓN 4.2.16.- UN ÁLGEBRA BOOLEANA ES UNA RED DISTRIBUTIVA Y COMPLEMENTADA

DEFINICIÓN 4.2.17.- UN ÁLGEBRA DE HEYTING ES UNA RED RELATIVAMENTE PSEUDO COMPLEMENTADA CON ELEMENTO MÍNIMO 0.

PROPOSICIÓN 4.2.18.- SEA $\langle P, \le \rangle$ UNA RED, ENTONCES $\forall\, x, y \in P$

a) $x \le x \sqcup y$.
a') $y \le x \sqcup y$.
b) $x \sqcap y \le x$
b') $x \sqcap y \le y$
c) $x \le z$ Y $y \le z \Rightarrow x \sqcup y \le z$
c') $z \le x$ Y $z \le y \Rightarrow z \le x \sqcap y$.
d) $x \le y \Rightarrow x \sqcap z \le y \sqcap z$
d') $x \le y \Rightarrow x \sqcup z \le y \sqcup z$

LEYES CONMUTATIVAS:

$L_1: x \sqcup y = y \sqcup x$ $\qquad$ $L_1': x \sqcap y = y \sqcap x$

LEYES ASOCIATIVAS:

$L_2: x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ $\qquad$ $L_2': x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

LEYES DE ABSORCIÓN

$L_3: (x \sqcap y) \sqcup y = y$ $\qquad$ $L_3': x \sqcap (x \sqcup y) = x$

DEMOSTRACIÓN

(a), (a'), (b) Y (b') SE CUMPLEN POR LA DEFINICIÓN 4.2.6

SI $x \leq z$ Y $y \leq z$ COMO $x \sqcup y$ ES EL SUPREMO DE $\{x, y\}$ ENTONCES $x \sqcup y \leq z$. POR LO TANTO (c) ES VERDADERA.

SI $z \leq x$ Y $z \leq y$ COMO $x \sqcap y$ ES EL ÍNFIMO DE $\{x, y\}$ ENTONCES $z \leq x \sqcap y$. POR LO TANTO (c') ES VERDADERA.

$x \sqcap z \leq x$ Y $x \sqcap z \leq z$, SI $x \leq y$ ENTONCES $x \sqcap z \leq y$, COMO $y \sqcap z$ ES EL ÍNFIMO DE $\{y, z\}$ ENTONCES $x \sqcap z \leq y \sqcap z$ Y (d) ES VERDADERA

$y \leq y \sqcup z$ Y $z \leq y \sqcup z$, SI $x \leq y$ ENTONCES $x \leq y \sqcup z$, COMO $x \sqcup z$ ES EL SUPREMO DE $\{x, y\}$ ENTONCES $x \sqcup z \leq y \sqcup z$ Y (d') ES VERDADERA

SEA $a = x \sqcup y$ Y $b = y \sqcup x$ ENTONCES,

$x \leq a$ Y $y \leq a$, COMO b ES EL SUPREMO DE $\{y, x\}$ ENTONCES $b \leq a$

$y \leq b$ Y $x \leq b$, COMO a ES EL SUPREMO DE $\{x, y\}$ ENTONCES $a \leq b$

POR LO TANTO $a = b$ Y (L_1) ES VERDADERA

SEA $a = x \sqcap y$ Y $b = y \sqcap x$ ENTONCES,

$a \leq x$ Y $a \leq y$, COMO b ES EL ÍNFIMO DE $\{y, x\}$ ENTONCES $a \leq b$

$b \leq y$ Y $b \leq x$, COMO a ES EL ÍNFIMO DE $\{x, y\}$ ENTONCES $b \leq a$

POR LO TANTO $a = b$ Y (L_1') ES VERDADERA

SEA $a = x \sqcup (y \sqcup z)$ Y $b = (x \sqcup y) \sqcup z$ ENTONCES,

$x \leq a$ Y $y \sqcup z \leq a$ PERO $y \leq y \sqcup z$ Y $z \leq y \sqcup z$ POR LO TANTO $y \leq a$ Y $z \leq a$

$x\le a, y\le a \Rightarrow x\cup y\le a$ PERO $z\le a$ POR LO TANTO $b\le a$

$z\le b$ Y $x\cup y\le b$ PERO $x\le x\cup y$ Y $y\le x\cup y$ POR LO TANTO $x\le b$ Y $y\le b$

$y\le b, z\le b \Rightarrow y\cup z\le b$ PERO $x\le b$ POR LO TANTO $a\le b$

POR LO TANTO $a=b$ Y (L_2) ES VERDADERA.

SEA $a=x\sqcap(y\sqcap z)$ Y $b=(x\sqcap y)\sqcap z$ ENTONCES

$a\le x$ Y $a\le y\sqcap z$ PERO $y\sqcap z\le y$ Y $y\sqcap z\le z$ POR LO TANTO $a\le y$ Y $a\le z$

$a\le x, a\le y \Rightarrow a\le x\sqcap y$ PERO $a\le z$ POR LO TANTO $a\le b$

$b\le z$ Y $b\le x\sqcap y$ PERO $x\sqcap y\le x$ Y $x\sqcap y\le y$ POR LO TANTO $b\le x$ Y $b\le y$

$b\le y, b\le z \Rightarrow b\le y\sqcap z$ PERO $b\le x$ POR LO TANTO $b\le a$

POR LO TANTO $a=b$ Y (L_2') ES VERDADERA.

$y\le(x\sqcap y)\sqcup y$. $x\sqcap y\le y$ Y $y\le y$ POR (c) TENEMOS QUE $(x\sqcap y)\sqcup y\le y$

POR LO TANTO $(x\sqcap y)\sqcup y=y$ Y (L_3) ES VERDADERA

$x\sqcap(x\sqcup y)\le x$. $x\le x$ Y $x\le x\sqcup y$ POR (c') TENEMOS QUE $x\le x\sqcap(x\sqcup y)$

POR LO TANTO $x\sqcap(x\sqcup y)=x$ Y (L_3') ES VERDADERA.

PROPOSICIÓN 4.2.19.- SEA $\langle P,\le\rangle$ UNA RED COMPLEMENTADA, ENTONCES $x\sqcap 1=x$ Y $x\sqcup 0=x$

DEMOSTRACIÓN: $x\le x$ Y $x\le 1$ POR LO TANTO x ES COTA INFERIOR DE $\{x,1\}$. SEA $y\in P$ TAL QUE $y\le x$ Y $y\le 1$ ENTONCES $y\le x$ POR LO TANTO x ES EL ÍNFIMO DE $\{x,1\}$, ES DECIR, $x\sqcap 1=x$.

$x\le x$ Y $0\le x$ POR LO TANTO x ES COTA SUPERIOR DE $\{x,0\}$. SEA $y\in P$ TAL QUE $x\le y$ Y $y\le 0$ ENTONCES $x\le y$ POR LO TANTO x ES EL SUPREMO DE $\{x,0\}$, ES DECIR, $x\sqcup 0=x$

PROPOSICIÓN 4.2.20.- SEA $\langle P,\le\rangle$ UNA RED, $a\to b$ ES EL PSEUDO COMPLEMENTO DE a RELATIVO A b SI Y SÓLO SI $\forall x\in P$.

$x \leq a \to b \Leftrightarrow a \sqcap x \leq b$

DEMOSTRACIÓN: SEA $a \to b$ ES PSEUDO COMPLEMENTO DE a RELATIVO A b, ENTONCES $a \to b$ ES EL ELEMENTO MÁXIMO DE $L' = \{x \in P \mid a \sqcap x \leq b\}$ POR LO TANTO $a \sqcap (a \to b) \leq b$. SI $x \leq a \to b$ ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 4.2.18.-(d) $a \sqcap x \leq a \sqcap (a \to b)$, POR LO TANTO $a \sqcap x \leq b$

SI $a \sqcap x \leq b$ ENTONCES $x \in L'$ Y POR SER $a \to b$ ELEMENTO MÁXIMO $x \leq a \to b$. POR LO TANTO $\forall x \in P$ $x \leq a \to b \Leftrightarrow a \sqcap x \leq b$

SUPONGAMOS QUE $\forall x \in P$ $x \leq a \to b \Leftrightarrow a \sqcap x \leq b$

$a \to b \leq a \to b \Rightarrow a \sqcap (a \to b) \leq b$ POR LO TANTO $a \to b \in L'$.

SEA $x \in L'$ ENTONCES $a \sqcap x \leq b$, ASÍ QUE $x \leq a \to b$. POR LO TANTO $a \to b$ ES COTA SUPERIOR DE L'. SEA $c \in L'$ TAL QUE $x \leq c$ $\forall x \in L'$ COMO $c \in L'$ ENTONCES $a \sqcap c \leq b$ POR LO TANTO $c \leq a \to b$ POR LO TANTO $a \to b$ ES EL ELEMENTO MÁXIMO DE L', ES DECIR, $a \to b$ ES EL PSEUDO COMPLEMENTO DE a RELATIVO A b.

PROPOSICIÓN 4.2.21.- SEA $\langle P, \leq \rangle$ UNA RED RELATIVAMENTE PSEUDO COMPLEMENTADA ENTONCES $\langle P, \leq \rangle$ ES DISTRIBUTIVA.

DEMOSTRACIÓN: SEA $d = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$, ENTONCES $x \sqcap y \leq d$ Y $x \sqcap z \leq d$. POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $y \leq x \to d$ Y $z \leq x \to d$ POR LA PROPOSICIÓN 4.2.18 (c) $y \sqcup z \leq x \to d$ Y POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $x \sqcap (y \sqcup z) \leq d$. $y \leq y \sqcup z$ Y $z \leq y \sqcup z$, POR LA PROPOSICIÓN 4.2.18 (d) $x \sqcap y \leq x \sqcap (y \sqcup z)$ Y $x \sqcap z \leq x \sqcap (y \sqcup z)$, POR LA PROPOSICIÓN 4.2.18 (c) $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$, ES DECIR, $d \leq x \sqcap (y \sqcup z)$

POR LO TANTO $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ .... (+)

$(x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) = ((x \sqcup y) \sqcap x) \sqcup ((x \sqcup y) \sqcap z)$ POR (+)

$= x \sqcup ((x \sqcup y) \sqcap z)$ POR L_3

$= x \cup ((x \cap z) \cup (y \cap z))$ por (*)

$= (x \cup (x \cap z)) \cup (y \cap z)$ por L_2

$= x \cup (y \cap z)$ por L_3

Por lo tanto $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ y $\langle P, \leq \rangle$ es una red distributiva.

Proposición 4.2.22.- Sean $\langle P, \leq \rangle$ una red distributiva y complementada, entonces cada elemento tiene un único complemento.

Demostración: Sean y y z complementos de x, entonces

$x \cup y = 1$, $x \cap y = 0$ y $x \cup z = 1$, $x \cap z = 0$

$y = y \cup 0 = y \cup (x \cap z) = (y \cup x) \cap (y \cup z) = 1 \cap (y \cup z) = y \cup z$

$z = z \cup 0 = z \cup (x \cap y) = (z \cup x) \cap (z \cup y) = 1 \cap (z \cup y) = z \cup y = y \cup z$

Por lo tanto $y = z$.

Al complemento de x lo denotaremos por x'

FUNCIONES DE VERDAD COMO MORFISMOS

Cada una de las funciones de verdad tienen codominio 2, y por lo tanto es la función característica de algún subobjeto de su dominio. Esta observación nos llevará a la definición de las funciones de verdad como morfismos, para que tengan un significado en un topo.

Negación: $\neg : 2 \longrightarrow 2$ es la función característica del conjunto $\{x \mid \neg x = 1\} = \{0\} \subseteq 2$. La inclusión $\{0\} \hookrightarrow 2$ es la función falso, por lo tanto en el topo Conj.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, hook, "FALSO"] \arrow[d, "!"'] & \{0,1\} = 2 \arrow[d, "\neg"] \\
\{0\} \arrow[r, "VER"] & \{0,1\} = 2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

DEFINICIÓN 4.2.13: SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO CON CLASIFICADOR $V: 1 \longrightarrow \Omega$ EL MORFISMO DE VERDAD NEGACIÓN ES EL ÚNICO MORFISMO $\neg: \Omega \longrightarrow \Omega$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "F"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

ES DECIR $\neg = \chi_F$ DONDE $F = \chi_{!_0}$

CONJUNCIÓN: EL ÚNICO ELEMENTO DEL DOMINIO DE $\wedge: 2 \times 2 \longrightarrow 2$ PARA EL CUAL, AL APLICARLE LA FUNCIÓN $\wedge$ DE 1 ES EL PAR $(1,1)$. SI $A = \{(1,1)\}$ ENTONCES $\wedge = \chi_A$

A PUEDE SER IDENTIFICADO CON LA FUNCIÓN $\{0\} \longrightarrow 2 \times 2$. ESTE MORFISMO ES EL MORFISMO PRODUCTO $\langle VER, VER \rangle$ TAL QUE $\langle VER, VER \rangle (0) = \langle VER(0), VER(0) \rangle = (1,1)$ Y POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, tail, "{\langle VER, VER \rangle}"] \arrow[d, "!"'] & 2 \times 2 \arrow[d, "\wedge"] \\
\{0\} \arrow[r, "VER"] & 2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $\wedge = \chi_{\langle VER, VER \rangle}$

DEFINICIÓN 4.2.24 - SEA $\mathcal{E}$ UN TOPOS CON CLASIFICADOR $v:1 \longrightarrow \Omega$

EL MORFISMO DE VERDAD CONJUNCIÓN ES EL ÚNICO MORFISMO

$\cap : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{\langle v,v\rangle}"] \arrow[d, "!"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

ES DECIR, $\cap = \chi_{\langle v,v\rangle}$

DISYUNCION: SEA $D = \{(1,1), (1,0), (0,1)\}$ ENTONCES

$\cup : 2\times 2 \longrightarrow 2$ ES χ_D. SEA $A = \{(1,1), (1,0)\}$ Y

$B = \{(1,1), (0,1)\}$ POR LO TANTO $D = A\cup B$

$A \subseteq 2\times 2$ SE LE PUEDE IDENTIFICAR CON EL MORFISMO

$\langle \text{ver}\circ !_2 , 1_2 \rangle : 2 \longrightarrow 2\times 2$ DONDE $!_2 : 2 \longrightarrow \{0\}$

$B \subseteq 2\times 2$ SE LE PUEDE IDENTIFICAR CON EL MORFISMO

$\langle 1_2 , \text{ver}\circ !_2 \rangle : 2 \longrightarrow 2\times 2$

$$\begin{tikzcd}
 & 2\times 2 & \\
2 \arrow[ur, "{\langle \text{ver}\circ !_2 , 1_2\rangle}"] \arrow[r, "i_1"'] & 2+2 \arrow[u, dashed, "f"'] & 2 \arrow[l, "i_2"] \arrow[ul, "{\langle 1_2 , \text{ver}\circ !_2\rangle}"']
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EXISTE UNA FUNCIÓN

$f : 2+2 \longrightarrow 2\times 2$ DONDE $f = [\langle \text{ver}\circ !_2 , 1_2\rangle , \langle 1_2 , \text{ver}\circ !_2\rangle]$ Y

ES TAL QUE $\text{im} f = D$, ENTONCES TENEMOS LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN

$$\begin{tikzcd}
2+2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] & & 2\times 2 \\
 & \text{im} f = D \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 4.2.25.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO CON CLASIFICADOR $V: 1 \longrightarrow \Omega$ EL MORFISMO DE VERDAD DISYUNCIÓN $\vee: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ ES LA CARACTERÍSTICA DE LA IMAGEN DEL MORFISMO

$$[\langle V \circ !_\Omega , 1_\Omega \rangle , \langle 1_\Omega , V \circ !_\Omega \rangle] : \Omega + \Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega$$

IMPLICACIÓN: SEA $(\leq) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ ENTONCES $\Rightarrow : 2 \times 2 \longrightarrow 2$ ES LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE $(\leq)$ Y

$$\begin{tikzcd}
(\leq) \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & 2 \times 2 \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
\{0\} \arrow[r, "VER"] & 2
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO EN Con

ADEMÁS $(\leq) = \{(x,y) \mid x,y \in 2 \text{ y } x \leq y\}$. PERO EN UNA RED $x \leq y$ SI Y SÓLO SI $x \cap y = x$. POR LO TANTO

$$(\leq) = \{(x,y) \mid x,y \in 2 \text{ y } x \cap y = x\}$$

SEA $P_1 : 2 \times 2 \longrightarrow 2$ TAL QUE $P_1((x,y)) = x$. POR LO TANTO

$(\leq) = \{(x,y) \mid x,y \in 2 \text{ y } x \cap y = P_1((x,y))\}$. POR LO TANTO

$(\leq) \hookrightarrow 2 \times 2$ ES EL IGUALADOR DE $\cap, P_1 : 2 \times 2 \longrightarrow 2$.

DEFINICIÓN 4.2.26.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO CON CLASIFICADOR $V: 1 \longrightarrow \Omega$ EL MORFISMO DE VERDAD IMPLICACIÓN $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ ES EL MORFISMO CARACTERÍSTICO DE $a : (\leq) \rightarrowtail \Omega \times \Omega$ DONDE a ES EL IGUALADOR DE $\cap, P_1 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$

POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
(\leq) \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

SECCION 3.-

Si D es un conjunto entonces la estructura $\langle \mathcal{P}(D), \subseteq \rangle$ tal que $\mathcal{P}(D)$ es el conjunto potencia de D y $\subseteq$ es la relación de inclusión es un álgebra booleana. En esta sección veremos que esta depende de las reglas de la lógica clásica, a través de las propiedades de los conectivos $\sim, \wedge, \vee$. Esto se puede hacer considerando las funciones caracteristicas.

En el siguiente resultado veremos como las operaciones de conjuntos dependen de las funciones de verdad.

Si A y B son subconjuntos de D con caracteristicas $\chi_A : D \to 2$, $\chi_B : D \longrightarrow 2$ entonces:

i) $\chi_{-A} = \neg \circ \chi_A$

ii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cap \chi_B = \cap \circ \langle \chi_A, \chi_B \rangle$

iii) $\chi_{A \cup B} = \chi_A \cup \chi_B = \cup \circ \langle \chi_A, \chi_B \rangle$

i) Sea $x \in D$ si $\chi_{-A}(x) = 1$ entonces $x \in -A$, así que $x \notin A$

por lo tanto $\chi_A(x) = 0$, $\neg(\chi_A(x)) = \neg(0) = 1$

Si $\chi_{-A}(x) = 0$ entonces $x \notin -A$, así que $x \in A$

por lo tanto $\chi_A(x) = 1$, $\neg(\chi_A(x)) = \neg(1) = 0$

por lo tanto $\chi_{-A} = \neg \circ \chi_A$

ii) Sea $x \in D$ si $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ entonces $x \in A \cap B$, así que $x \in A$ y $x \in B$

por lo tanto $\chi_A(x) = 1$ y $\chi_B(x) = 1$, $\chi_A(x) \cap \chi_B(x) = 1 \cap 1 = 1$

Si $\chi_{A \cap B}(x) = 0$ entonces $x \notin A \cap B$, así que $x \notin A$ o $x \notin B$

1) Supongamos $x \in A$ y $x \notin B$ por lo tanto $\chi_A(x) = 1$ y $\chi_B(x) = 0$

$\chi_A(x) \cap \chi_B(x) = 1 \cap 0 = 0$

2) Supongamos $x \notin A$ y $x \in B$ por lo tanto $\chi_A(x) = 0$ y $\chi_B(x) = 1$

$\chi_A(x) \cap \chi_B(x) = 0 \cap 1 = 0$

3) SUPONGAMOS $x \notin A$ y $x \notin B$ POR LO TANTO $\chi_A(x)=0$ y $\chi_B(x)=0$

$\chi_A(x) \cap \chi_B(x) = 0 \cap 0 = 0$

POR LO TANTO $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cap \chi_B$

iii) SEA $x \in D$. SI $\chi_{A\cup B}(x)=1$ ENTONCES $x \in A\cup B$, ASI QUE $x\in A$ o $x\in B$

1) SUPONGAMOS $x\in A$ y $x \in B$ POR LO TANTO $\chi_A(x)=1$ y $\chi_B(x)=1$

$\chi_A(x) \cup \chi_B(x) = 1 \cup 1 = 1$

2) SUPONGAMOS $x\in A$ y $x\notin B$ POR LO TANTO $\chi_A(x)=1$ y $\chi_B(x)=0$

$\chi_A(x) \cup \chi_B(x) = 1 \cup 0 = 1$

3) SUPONGAMOS $x\notin A$ y $x\in B$ POR LO TANTO $\chi_A(x)=0$ y $\chi_B(x)=1$

$\chi_A(x) \cup \chi_B(x) = 0 \cup 1 = 1$

SI $\chi_{A\cup B}(x)=0$ ENTONCES $x\notin A\cup B$, ASI QUE $x\notin A$ y $x\notin B$

POR LO TANTO. $\chi_A(x)=0$ y $\chi_B(x)=0$, $\chi_A(x) \cup \chi_B(x) = 0 \cup 0 = 0$.

POR LO TANTO $\chi_{A\cup B} = \chi_A \cup \chi_B$

ÁLGEBRA DE SUBOBJETOS

DEFINICIÓN 4.3.1.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO y $d \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$. DEFINIREMOS OPERACIONES EN $Sub(d)$.

1.- COMPLEMENTOS: SEA $f: a \rightarrowtail d \in Sub(d)$, EL COMPLEMENTO DE f (CON RESPECTO A d) ES EL SUBOBJETO $-f: -a \rightarrowtail d$ CUYA CARACTERÍSTICA ES $\neg\circ\chi_f$. ENTONCES $-f$ SE DEFINE COMO EL PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d, "!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\neg\circ\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES DECIR, $\chi_{-f} = \neg\circ\chi_f$

2.- INTERSECCIONES. LA INTERSECCIÓN DE $f: a \rightarrowtail d$ Y $g: b \rightarrowtail d$ ES EL SUBOBJETO $f \cap g: a \cap b \rightarrowtail d$ QUE SE OBTIENE AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO DE $\chi_f \cap \chi_g$ SOBRE $v: 1 \to \Omega$

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, tail, "f \cap g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f \cap \chi_g = \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES DECIR, $\chi_{f \cap g} = \chi_f \cap \chi_g$

3.- UNIONES. LA UNION DE $f: a \rightarrowtail d$ Y $g: b \rightarrowtail d$ ES EL SUBOBJETO $f \cup g: a \cup b \rightarrowtail d$ QUE SE OBTIENE AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO DE $\chi_f \cup \chi_g$ SOBRE $v: 1 \to \Omega$

$$\begin{tikzcd}
a \cup b \arrow[r, tail, "f \cup g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f \cup \chi_g = \cup \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

. ES DECIR, $\chi_{f \cup g} = \chi_f \cup \chi_g$

PROPOSICIÓN 4.3.2.: SI EN UN TOPO $\mathcal{E}$ $f: a \rightarrowtail d$ Y $g: b \rightarrowtail d$ TIENEN COMO PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] & d
\end{tikzcd}$$

ENTONCES

SI $\alpha: c \rightarrowtail d$ ES TAL QUE $\alpha = g \circ f' = f \circ g'$ ENTONCES $\chi_\alpha = \chi_{f \cap g}$, ES DECIR $\alpha \simeq f \cap g$ Y EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f \cap g"] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] & d
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACION: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "!_c"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f , \chi_g \rangle"] \\
1 \arrow[r, tail, "\langle v , v \rangle"] \arrow[d, "1_1"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EL CUADRADO INFERIOR ES PRODUCTO FIBRADO POR LA DEFINICION DE $\cap$

$$\langle \chi_f , \chi_g \rangle \circ \alpha = \langle \chi_f \circ \alpha , \chi_g \circ \alpha \rangle = \langle \chi_f \circ (f \circ g') , \chi_g \circ (g \circ f') \rangle$$

$$= \langle (\chi_f \circ f) \circ g' , (\chi_g \circ g) \circ f' \rangle = \langle v \circ !_a \circ g' , v \circ !_b \circ f' \rangle$$

$$= \langle v \circ !_c , v \circ !_c \rangle = \langle v , v \rangle \circ !_c$$

POR LO TANTO EL CUADRADO SUPERIOR CONMUTA

SEAN $\beta : e \longrightarrow d$ y $\gamma : e \longrightarrow 1$ TALES QUE $\langle \chi_f , \chi_g \rangle \circ \beta = \langle v , v \rangle \circ \gamma$

ENTONCES $\langle \chi_f \circ \beta , \chi_g \circ \beta \rangle = \langle v \circ \gamma , v \circ \gamma \rangle$ POR LO TANTO

$\chi_f \circ \beta = v \circ \gamma$ y $\chi_g \circ \beta = v \circ \gamma$

COMO LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] & & b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_b"'] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega & & 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EXISTEN ÚNICOS MORFISMOS $\varphi : e \longrightarrow a$ y $\psi : e \longrightarrow b$ TALES QUE

$f \circ \varphi = \beta$ y $g \circ \psi = \beta$ POR LO TANTO $f \circ \varphi = g \circ \psi$.

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\eta : e \longrightarrow c$

TAL QUE $f' \circ \eta = \psi$ y $g' \circ \eta = \varphi$. $\alpha \circ \eta = g \circ f' \circ \eta = g \circ \psi = \beta$ y

$! \circ \eta : e \longrightarrow 1$ POR LO TANTO $! \circ \eta = \gamma$ y EL CUADRADO SUPERIOR

ES PRODUCTO FIBRADO. POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL

RECTÁNGULO EXTERIOR

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "1_c"'] & d \arrow[d, "\chi_f \cap \chi_g"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $\chi_\alpha = \chi_f \cap \chi_g$, $\alpha \simeq f \cap g$, $c \cong a \cap b$ Y EXISTE $h: a \cap b \longrightarrow c$ ISOMORFISMO TAL QUE $f \cap g = \alpha \circ h$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[rr, "f' \circ h"] \arrow[dd, "g' \circ h"'] \arrow[dr, "h"] & & b \arrow[dd, "g"] \\ & c \arrow[ur, "f'"] \arrow[dl, "g'"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ a \arrow[rr, tail, "f"] & & d \end{tikzcd}$$

$g \circ f' \circ h = f \circ g' \circ h$. SEAN $\beta: e \longrightarrow b$ Y $\gamma: e \longrightarrow a$ TALES QUE $g \circ \beta = f \circ \gamma$ POR SER (1) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: e \longrightarrow c$ TAL QUE $f' \circ \varphi = \beta$ Y $g' \circ \varphi = \gamma$

SEA $\bar{\varphi} = h^{-1} \circ \varphi : e \longrightarrow a \cap b$, $f' \circ h \circ \bar{\varphi} = f' \circ h \circ h^{-1} \circ \varphi = f' \circ \varphi = \beta$

$g' \circ h \circ \bar{\varphi} = g' \circ h \circ h^{-1} \circ \varphi = g' \circ \varphi = \gamma$. POR LO TANTO EL DIAGRAMA ANTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO.

PROPOSICIÓN 4.3.3.- EN TODO TOPOS $\mathcal{E}$ SI

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & b \arrow[d, "v"] \\ c \arrow[r, "g"] & d \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO, ENTONCES EXISTE UN MORFISMO $h: f(a) \longrightarrow g(c)$ TAL QUE EL CUADRADO DE LA DERECHA DEL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[d, "u"'] & f(a) \arrow[r, tail, "imf"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(c) \arrow[r, tail, "img"] & d
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b \arrow[d, "v"] \\
g(c) \arrow[r, tail, "img"] & d
\end{tikzcd}$$

SEA (*) EL PRODUCTO FIBRADO DE v SOBRE img

COMO img ES MONOMORFISMO ENTONCES i ES MONOMORFISMO

$v \circ f = g \circ u = img \circ g^* \circ u$, POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $f' : a \longrightarrow a$ TAL QUE $i \circ f' = f$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & a \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "h'"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(c) \arrow[r, tail, "img"] & d
\end{tikzcd}$$

POR HIPÓTESIS EL RECTÁNGULO EXTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO DE LA IZQUIERDA ES PRODUCTO FIBRADO Y POR EL HECHO FUNDAMENTAL 1, f' ES EPIMORFISMO, POR LO TANTO $i \circ f' = f$ ES UNA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE f, POR LA PROPOSICIÓN 2.2.4. EXISTE UN ÚNICO ISOMORFISMO $K : a \longrightarrow f(a)$ TAL QUE $K \circ f' = f^*$ Y $imf \circ K = i$

SEA $h : f(a) \longrightarrow g(c)$ TAL QUE $h = h' \circ K^{-1}$

$v \circ imf = v \circ i \circ K^{-1} = img \circ h' \circ K^{-1} = img \circ h$

POR LO TANTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, tail, "imf"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & b \arrow[d, "v"] \\
f(c) \arrow[r, tail, "img"] & d
\end{tikzcd}$$

SI $\alpha : x \longrightarrow b$ y $\beta : x \longrightarrow g(c)$ TALES QUE $v \circ \alpha = img \circ \beta$. POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : x \longrightarrow a$ TAL QUE $i \circ \varphi = \alpha$ y $h' \circ \varphi = \beta$. SEA $\psi : x \longrightarrow f(a)$ TAL QUE $\psi = k \circ \varphi$ $imf \circ \psi = imf \circ k \circ \varphi = i \circ \varphi = \alpha$, $h \circ \psi = h' \circ k^{-1} \circ k \circ \varphi = h' \circ \varphi = \beta$ SUPONGAMOS QUE EXISTE $\psi' : x \longrightarrow f(c)$ TAL QUE $imf \circ \psi' = \alpha$ y $h \circ \psi' = \beta$, ENTONCES $imf \circ \psi' = imf \circ \psi$ POR SER imf MONOMORFISMO $\psi' = \psi$, POR LO TANTO (**) ES PRODUCTO FIBRADO.

PROPOSICIÓN 4.3.4.- SEAN $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ MONOMORFISMOS EN UN TOPO $\mathcal{E}$, ENTONCES EL MORFISMO $\alpha : c \rightarrowtail d$ QUE ES LA IMAGEN DEL MORFISMO $[f, g] : a + b \longrightarrow d$.

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr, "{[f,g]^*}"'] & & d \\
& c \arrow[ur, tail, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

TIENE CARACTERÍSTICA $\chi_f \cup \chi_g$.

ES DECIR, $\chi_\alpha = \chi_{f \cup g}$ y $\alpha \simeq f \cup g$. , ADEMÁS EXISTE UNA EPI-MONO FACTORIZACIÓN

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr] & & d \\
& a \cup b \arrow[ur, tail, "f \cup g"'] &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\chi_g \circ f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\Omega \arrow[r, "\langle V\circ !_\Omega, 1_\Omega \rangle"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

$\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ f = \langle \chi_f \circ f, \chi_g \circ f \rangle = \langle V \circ !_a, \chi_g \circ f \rangle$

$\langle V \circ !_\Omega, 1_\Omega \rangle \circ \chi_g \circ f = \langle V \circ !_\Omega \circ \chi_g \circ f, \chi_g \circ f \rangle = \langle V \circ !_a, \chi_g \circ f \rangle$

POR LO TANTO (*) CONMUTA

SI $\gamma : x \longrightarrow d$ Y $\beta : x \longrightarrow \Omega$ SON TALES QUE $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ \gamma = \langle V \circ !_\Omega, 1_\Omega \rangle \circ \beta$

ENTONCES $\langle \chi_f \circ \gamma, \chi_g \circ \gamma \rangle = \langle V \circ !_\Omega \circ \beta, \beta \rangle$ POR LO TANTO

$\chi_f \circ \gamma = V \circ !_\Omega \circ \beta$ Y $\chi_g \circ \gamma = \beta$

COMO

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, dashed, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : x \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ \varphi = \gamma$ Y $!_a \circ \varphi = !_\Omega \circ \beta$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\varphi' : x \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ \varphi' = \gamma$ Y $!_a \circ \varphi' = !_\Omega \circ \beta$

ENTONCES $f \circ \varphi' = f \circ \varphi$ POR SER f MONOMORFISMO $\varphi = \varphi'$

POR LO TANTO (*) ES PRODUCTO FIBRADO

ANALOGAMENTE

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "\chi_f \circ g"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\Omega \arrow[r, "\langle 1_\Omega, V \circ !_\Omega \rangle"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2 EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[d, "(\chi_g \circ f)+(\chi_f \circ g)"'] & d \arrow[d, "{\langle \chi_f, \chi_g \rangle}"] \\
\Omega+\Omega \arrow[r, "{[\langle v\circ !_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, v\circ !_\Omega \rangle]}"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & d \arrow[d, dashed, "{\langle \chi_f, \chi_g \rangle}"] \\
a \arrow[r, "i"] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

DONDE $\alpha = \operatorname{im}[f,g]$ Y $i = \operatorname{im}[\langle v\circ !_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, v\circ !_\Omega \rangle]$

POR DEFINICIÓN i ES EL MORFISMO CUYA CARACTERÍSTICA ES EL MORFISMO $\cup : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$, POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "!_a"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cup"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS, EL RECTÁNGULO EXTERIOR DEL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & d \arrow[d, "{\langle \chi_f, \chi_g \rangle}"] \\
a \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "!_a"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cup"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $\Psi_\alpha = \Psi_f \cup \Psi_g = \Psi_{f\cup g}$, $\alpha \cong f \cup g$, $c \cong a \cup b$

Y EXISTE $K : c \longrightarrow a \cup b$ ISOMORFISMO TAL QUE $(f \cup g) \circ K = \alpha$

SEA $\delta : a + b \longrightarrow a \cup b$ TAL QUE $\delta = K \circ [f, g]^*$. ENTONCES

δ ES EPIMORFISMO . $(f \cup g) \circ \delta = (f \cup g) \circ (K \circ [f,g]^*) = ((f \cup g) \circ K) \circ [f,g]^*$

$$= \alpha \circ [f,g]^* = [f, g]$$

POR LO TANTO $(f \cup g) \circ \delta$ ES UNA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE $[f, g]$

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr, "\delta"'] & & d \\
& a \cup b \arrow[ur, tail, "f \cup g."'] &
\end{tikzcd}$$

Sub(d) COMO UNA RED

PROPOSICIÓN 4.3.5.- $(Sub(d) \leq)$ ES UNA RED DONDE:

1) $f \cap g$ ES EL INFIMO DE f Y g

2) $f \cup g$ ES EL SUPREMO DE f Y g

DEMOSTRACIÓN: EN LA PROPOSICIÓN 1.2.63 SE DEMOSTRÓ QUE $\leq$ ES UN ORDEN PARCIAL, POR LO TANTO $(Sub(d), \leq)$ ES UN COPO.

1) POR LA PROPOSICIÓN 4.3.2

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, tail, "i_b"] \arrow[d, tail, "i_a"'] \arrow[dr, tail, "f\cap g"] & b \arrow[d, tail, dashed, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] & d
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

COMO $f \circ i_a = f \cap g$ Y $g \circ i_b = f \cap g$ ENTONCES $f \cap g \leq f$ Y $f \cap g \leq g$.

SUPONGAMOS QUE EXISTE $\alpha : c \rightarrowtail d$ TAL QUE $\alpha \leq f$ Y $\alpha \leq g$, ENTONCES EXISTEN $\beta_a : c \longrightarrow a$ Y $\beta_b : c \longrightarrow b$ TALES QUE $\alpha = f \circ \beta_a$ Y $\alpha = g \circ \beta_b$

POR SER EL DIAGRAMA ANTERIOR PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO

MORFISMO $\varphi : c \to a \cap b$ TAL QUE $\iota_b \circ \varphi = \beta_b$ Y $\iota_a \circ \varphi = \beta_a$

$f \cap g \circ \varphi = g \circ \iota_b \circ \varphi = g \circ \beta_b = \alpha$ POR LO TANTO $\alpha \leq f \cap g$ Y $f \cap g$ ES EL ÍNFIMO DE f y g.

2) POR LA PROPOSICIÓN 4.34 Y POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\iota_a"] \arrow[rdd, tail, "f"'] & a+b \arrow[d, "\delta"] & b \arrow[l, "\iota_b"'] \arrow[ldd, tail, dashed, "g"] \\
 & a \cup b \arrow[d, "f \cup g"] & \\
 & d &
\end{tikzcd}$$

COMO $f \cup g \circ (\delta \circ \iota_a) = f$ Y $f \cup g \circ (\delta \circ \iota_b) = g$ ENTONCES $f \leq f \cup g$ Y $g \leq f \cup g$

SUPONGAMOS QUE EXISTE $h : c \rightarrowtail d$ TAL QUE $f \leq h$ Y $g \leq h$ ENTONCES EXISTEN $h_a : a \to c$ Y $h_b : b \to c$ TALES QUE $h \circ h_a = f$ Y $h \circ h_b = g$

$[f, g] = [h \circ h_a, h \circ h_b] = h \circ [h_a, h_b]$, SEA

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[rr, "{[h_a, h_b]}"] \arrow[rd, "j"'] & & c \\
 & e \arrow[ru, tail, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE $[h_a, h_b]$ ES DECIR, $[h_a, h_b] = k \circ j$

$[f, g] = h \circ [h_a, h_b] = h \circ k \circ j$, POR LO TANTO $(h \circ k) \circ j$ ES UNA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE $[f, g]$ POR LA PROPOSICIÓN 2.2.4 EXISTE $u : a \cup b \to e$ ISOMORFISMO TAL QUE $j = u \circ \delta$ Y $h \circ k \circ u = f \cup g$. POR LO TANTO $f \cup g \leq h$ Y $f \cup g$ ES EL SUPREMO DE f y g.

PROPOSICIÓN 4.36.-

1) $f \leq g$ SI Y SÓLO SI $f \cap g \simeq f$ SI Y SÓLO SI $f \cup g \simeq g$.

2) $f \leq g$ SI Y SÓLO SI $\langle \chi_f, \chi_g \rangle$ SE FACTORIZA DE MANERA ÚNICA POR

ES IGUALADOR DE $\cap, P_1 : \Omega\times\Omega \to \Omega$

$$\begin{tikzcd}
(\leq) \arrow[r, tail, "e"] & \Omega\times\Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "P_1"'] & \Omega \\
& d \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "{\langle \chi_f, \chi_g \rangle}"'] &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN:

1) SE CUMPLE POR SER $(Sub(d), \leq)$ UNA RED.

2) $f \leq g$ SI Y SOLO SI $f \cap g = f$, SI Y SÓLO SI $\chi_{f\cap g} = \chi_f$, SI Y SÓLO SI $\cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle = \chi_{f\cap g} = \chi_f = P_1 \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $K : d \longrightarrow (\leq)$ TAL QUE $e \circ K = \langle \chi_f, \chi_g \rangle$

PROPOSICIÓN 4.3.7: $(Sub(d), \leq)$ ES UNA RED ACOTADA CON MÁXIMO $1_d : d \rightarrowtail d$ Y MÍNIMO $0_d : 0 \rightarrowtail d$

DEMOSTRACIÓN: SEA $f : a \rightarrowtail d$

$1_d \circ f = f$ POR LO TANTO $f \leq 1_d$.

$f \circ 0_a : 0 \longrightarrow a \longrightarrow d$ POR LO TANTO $f \circ 0_a = 0_d$ Y $0_d \leq f$

IMPLICACIÓN

PARA DEMOSTRAR QUE $(Sub(d), \leq)$ ES UNA RED DISTRIBUTIVA INTRODUCIREMOS LA NOCIÓN DE IMPLICACIÓN ENTRE DOS SUBOBJETOS Y DEMOSTRAREMOS QUE $(Sub(d), \leq)$ ES UNA RED RELATIVAMENTE PSEUDO COMPLEMENTADA Y POR LO TANTO DISTRIBUTIVA

DEFINICIÓN 4.3.8: SI $f : a \rightarrowtail d$ Y $g : b \rightarrowtail d \in Sub(d)$ ENTONCES $f \Rightarrow g : (a \Rightarrow b) \rightarrowtail d$ SE OBTIENE AL FORMAR EL PRODUCTO FIBRADO

$\chi_f \Rightarrow \chi_g = \Rightarrow \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$ SOBRE $v: 1 \longrightarrow \Omega$

$$\begin{tikzcd}
a \Rightarrow b \arrow[r, tail, "f \Rightarrow g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f \Rightarrow \chi_g"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES DECIR, $\chi_{f \Rightarrow g} = \chi_f \Rightarrow \chi_g$

PROPOSICIÓN 4.3.9.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y $d \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, $f, g, h \in Sub(d)$ ENTONCES $f \cap h = g \cap h$ SI Y SÓLO SI $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$, ES DECIR, $\chi_f \cap \chi_h = \chi_g \cap \chi_h$ SI Y SÓLO SI $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$

DEMOSTRACIÓN: SEAN $f: a \rightarrowtail d$, $g: b \rightarrowtail d$ Y $h: c \rightarrowtail d$

CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS

$$\begin{tikzcd}
a \cap c \arrow[r, tail, "\alpha_1"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, tail, "f \cap h"] & c \arrow[d, tail, "h"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \cap c \arrow[r, tail, "\alpha_2"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, tail, "g \cap h"] & c \arrow[d, tail, "h"] \\
b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_b"'] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

LOS CUADRADOS INFERIORES SON PRODUCTOS FIBRADOS POR LA DEFINICIÓN 1.2.65 Y LOS CUADRADOS SUPERIORES SON PRODUCTOS FIBRADOS POR LA PROPOSICIÓN 4.3.2 POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS SON PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
a \cap c \arrow[r, tail, "\alpha_1"] \arrow[d, "!_{a \cap c}"'] & c \arrow[d, "\chi_f \circ h"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \cap c \arrow[r, tail, "\alpha_2"] \arrow[d, "!_{b \cap c}"'] & c \arrow[d, "\chi_g \circ h"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $\chi_{\alpha_1} = \chi_f \circ h$ Y $\chi_{\alpha_2} = \chi_g \circ h$.

$\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$ SI Y SÓLO SI $\chi_{\alpha_1} = \chi_{\alpha_2}$ SI Y SÓLO SI $\alpha_1 \simeq \alpha_2$

SI Y SÓLO SI EXISTE $k : b \cap c \to a \cap c$ ISOMORFISMO TAL QUE $\alpha_1 \circ k = \alpha$

SI Y SÓLO SI EXISTE k ISOMORFISMO TAL QUE $h \circ \alpha_1 \circ k = h \circ \alpha_2$

SI Y SÓLO SI EXISTE k ISOMORFISMO TAL QUE $(f \cap h) \circ k = g \cap h$

SI Y SÓLO SI $f \cap h \simeq g \cap h$

PROPOSICIÓN 4.3.10.- $f \cap h \leq g$ SI Y SOLO SI $\chi_{f \cap g} \circ h = \chi_f \circ h$

DEMOSTRACION $f \cap h \leq g$ SI Y SOLO SI $(f \cap h) \cap g \simeq f \cap h$ SI Y SÓLO SI $(f \cap g) \cap h \simeq f \cap h$ SI Y SÓLO SI $\chi_{f \cap g} \circ h = \chi_f \circ h$

PROPOSICIÓN 4.3.11.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y $d \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ ENTONCES EN $(\mathrm{Sub}(d), \leq)$ $h \leq f \Rightarrow g$ SI Y SÓLO SI $f \cap h \leq g$ Y POR LO TANTO $f \Rightarrow g$ ES EL PSEUDO COMPLEMENTO DE f RELATIVO A g, ES DECIR $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$ ES UNA RED RELATIVAMENTE PSEUDO COMPLEMENTADA.

DEMOSTRACIÓN: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \Rightarrow b \arrow[r, tail, "f \Rightarrow g"] \arrow[d, dashed, "j"] \arrow[dd, bend right=60, "!"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
(\leq) \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EL RECTÁNGULO EXTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO POR LA DEFINICIÓN 4.3.8

EL CUADRADO INFERIOR ES PRODUCTO FIBRADO POR LA DEFINICIÓN 4.2.26

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS

$$\begin{tikzcd}
a \Rightarrow b \arrow[r, tail, "f \Rightarrow g"'] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & d \arrow[d, "\langle \chi_f , \chi_g \rangle"] & & \\
\textcircled{\leq} \arrow[r, tail, "e"] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

$h \leq f \Rightarrow g$ SI Y SÓLO SI EXISTE $k : c \rightarrow a \Rightarrow b$ TAL QUE $f \Rightarrow g \circ k = h$:

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO, $k : c \rightarrow a \Rightarrow b$ EXISTE SI Y SÓLO SI $\langle \chi_f , \chi_g \rangle \circ h$ SE FACTORIZA A TRAVÉS DE e; POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR e, $\langle \chi_f , \chi_g \rangle \circ h$ SE FACTORIZA A TRAVÉS DE e SI Y SÓLO SI $p_1 \circ \langle \chi_f , \chi_g \rangle \circ h = \cap \circ \langle \chi_f , \chi_g \rangle \circ h$ SI Y SÓLO SI $p_1 \circ \langle \chi_f \circ h , \chi_g \circ h \rangle = (\chi_f \cap \chi_g) \circ h$ SI Y SÓLO SI $\chi_f \circ h = \chi_{f \cap g} \circ h$ SI Y SÓLO SI $f \cap h \leq g$.

PROPOSICIÓN 4.3.12.- SI $f : a \rightarrowtail d$ ENTONCES $f \cap -f \simeq 0_d$

DEMOSTRACIÓN: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d, "!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "F"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EL RECTÁNGULO EXTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO POR LA DEFINICIÓN 4.3.1.

EL CUADRADO INFERIOR ES PRODUCTO FIBRADO POR LA DEFINICIÓN 4.2.29

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO SUPERIOR ES PRODUCTO FIBRADO.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \cap -a \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, tail, "g"'] \arrow[dr, tail, "f\cap -f"] & -a \arrow[r, "!_{-a}"] \arrow[d, tail, "-f"] & 1 \arrow[d, "F"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] & d \arrow[r, "\chi_f"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

EL CUADRADO IZQUIERDO ES PRODUCTO FIBRADO POR LA PROPOSICIÓN 4.3.2.

$F \circ !_{-a} \circ h = \chi_f \circ f \circ g$ $\quad !_{-a} \circ h : a \cap -a \to 1$ POR LO TANTO $!_{-a} \circ h = !_{a\cap -a}$

$\chi_f \circ f = V \circ !_a$, $\quad !_a \circ g : a \cap -a \to 1$ POR LO TANTO $!_a \circ g = !_{a\cap -a}$

$F \circ !_{a\cap -a} = V \circ !_a \circ g = V \circ !_{a\cap -a}$, POR LA DEFINICIÓN 4.1.5

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, tail, "F"] \\
1 \arrow[r, tail, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k : a \cap -a \to 0$ Y $a \cap -a \cong 0$. ASÍ QUE $a \cap -a$ ES OBJETO INICIAL. POR LO TANTO

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, tail, "0_d"] & & d \\
& a \cap -a \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, tail, "f\cap -f"'] &
\end{tikzcd}$$

CONMUTA, ES DECIR, $k \circ 0_d = f \cap -f$

POR LO TANTO $f \cap -f \subseteq 0_d$, Y POR SER 0_d ELEMENTO MÍNIMO $0_d \subseteq f \cap -f$

POR LO TANTO $f \cap -f \simeq 0_d$

PROPOSICIÓN 4.9.13.- PARA TODO TOPO $\mathcal{E}$, EN $Sub(\Omega)$ $F \simeq -V$

DEMOSTRACIÓN: $\chi_F = \neg = \neg \circ 1_\Omega = \neg \circ \chi_V = \chi_{-V}$

POR LO TANO $\chi_F = \chi_{-V}$ Y $F \simeq -V$

PROPOSICIÓN 4.9.14.- PARA TODO TOPO $\mathcal{E}$ SI $V : 1 \to \Omega$ TIENE COMPLE-

MENTO EN $Sub(\Omega)$, ENTONCES ESTE COMPLEMENTO ES $F: 1 \to \Omega$

DEMOSTRACIÓN: SEA $f: a \to \Omega$ EL COMPLEMENTO DE $V: 1 \to \Omega$ ENTONCES $V \cap f \simeq 0_\Omega$ Y EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d] & a \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $f = \chi_{0_a}$ POR LA PROPOSICIÓN 4.1.6 $\chi_{0_a} = F \circ !_a$

ASÍ QUE $f = F \circ !_a$, ENTONCES $f \leq F$ Y $V \cup f \leq V \cup F$

$1_\Omega \simeq V \cup f \leq V \cup F$ POR LO TANTO $1_\Omega \leq V \cup F$ PERO 1_Ω ES ELEMENTO MÁXIMO EN $Sub(\Omega)$, POR LO TANTO $V \cup F \leq 1_\Omega$ Y $1_\Omega \simeq V \cup F$

POR LA PROPOSICIÓN 4.3.12 $V \cup -V \simeq 0_\Omega$ Y POR LA PROPOSICIÓN 4.3.13 $F \simeq -V$ POR LO TANTO $V \cup -V \simeq V \cup F \simeq 0_\Omega$.

POR LA PROPOSICIÓN 4.2.22 EL COMPLEMENTO ES ÚNICO POR LO TANTO $f \simeq F$

TOPOS BOOLEANOS

DEFINICIÓN 4.3.15.- UN TOPO $\mathcal{E}$ ES BOOLEANO SI $\forall\, d \in Ob(\mathcal{E})$ $(Sub(d), \leq)$ ES UN ÁLGEBRA BOOLEANA

PROPOSICIÓN 4.3.16.- EN CUALQUIER TOPO $\mathcal{E}$, LAS SIGUIENTES SON EQUIVALENTES

1) $\mathcal{E}$ ES BOOLEANO

2) $(Sub(\Omega), \subseteq)$ ES UN ÁLGEBRA BOOLEANA

3) $V: 1 \to \Omega$ TIENE COMPLEMENTO EN $Sub(\Omega)$

4) $F: 1 \longrightarrow \Omega$ es el complemento de V en $Sub(\Omega)$

5) $V \cup F \simeq 1_\Omega$ en $Sub(\Omega)$

6) $\mathcal{E}$ es clásico, es decir, $[V,F]: 1+1 \longrightarrow \Omega$ es isomorfismo

7) $i_1: 1 \longrightarrow 1+1$ es clasificador de subobjetos

Demostración:

1)⇒2) Si $\mathcal{E}$ es booleano, entonces $(Sub(d), \subseteq)$ es álgebra booleana $\forall d \in O(\mathcal{E})$ en particular $(Sub(\Omega), \subseteq)$ es álgebra booleana

2)⇒3) $V: 1 \longrightarrow \Omega \in Sub(\Omega)$ por ser $(Sub(\Omega), \subseteq)$ álgebra booleana $V: 1 \longrightarrow \Omega$ tiene complemento en $Sub(\Omega)$

3)⇒4) Por la proposición 4.3.14

4)⇒5) Si F es el complemento de V en $Sub(\Omega)$ entonces $V \cup F \simeq 1_\Omega$

5)⇒6) Supongamos que $V \cup F \simeq 1_\Omega$, por la proposición 4.1.13. $[V,F]$ es monomorfismo. Por la proposición 4.3.4

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[rr, "{[V,F]}"] \arrow[dr, "{\widehat{[V,F]}}"'] & & \Omega \\
& 1 \cup 1 \arrow[ur, "V \cup F"'] &
\end{tikzcd}$$

es una epi-mono factorización de $[V,F]$

Pero

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[rr, "{[V,F]}"] \arrow[dr, "1_{1+1}"'] & & \Omega \\
& 1+1 \arrow[ur, dashed, "{[V,F]}"'] &
\end{tikzcd}$$

es una epi-mono factorización de $[V,F]$

Por lo tanto $[V,F] \simeq V \cup F \simeq 1_\Omega$ por lo tanto $[V,F]$ es isomorfismo

6)⇒7) Supongamos que $[V,F]: 1+1 \longrightarrow \Omega$ es isomorfismo entonces

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dashed, "i_1"] \arrow[dr, "V"'] & 1+1 \arrow[d, "{[V,F]}"] & 1 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, dashed, "F"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

$[V,F]\circ i_1 = V$ POR LO TANTO $i_1 \leq V$.

$i = 1_{1+1}\circ i_1 = [V\circ F]^{-1}\circ[V,F]\circ i = [V,F]^{-1}\circ V$ POR LO TANTO $V \leq i_1$

POR LO TANTO $V \simeq i_1$

SEA $f: a \rightarrowtail b$ POR SER V CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS EXISTE UN ÚNICO $\chi_f : b \to \Omega$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & b \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "V"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & b \arrow[d, "{[V,F]^{-1}\circ\chi_f}"] \\
1 \arrow[r, "i_1"] & 1+1
\end{tikzcd}$$

$[V,F]^{-1}\circ\chi_f\circ f = [V,F]^{-1}\circ V\circ !_a = i_1\circ !_a$ POR LO TANTO (**) CONMUTA

SEA $g: c \to b$ Y $h: a \to 1$ TAL QUE $[V,F]^{-1}\circ\chi_f\circ g = i_1\circ h$., ENTONCES

$[V,F]\circ[V,F]^{-1}\circ\chi_f\circ g = [V,F]\circ i_1\circ h$ ASI QUE $\chi_f\circ g = V\circ h$

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi: c \to a$ TAL QUE $f\circ\varphi = g$ Y $!_a\circ\varphi = h$, POR LO TANTO (**) ES PRODUCTO FIBRADO

SUPONGAMOS QUE EXISTE $K: b \to 1+1$ TAL QUE

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & b \arrow[d, "K"] \\
1 \arrow[r, "i_1"] & 1+1
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & b \arrow[d, "{[V,F] \circ K}"] \\ 1 \arrow[r, "V"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$[V,F] \circ K \circ f = [V,F] \circ i_1 \circ !_a = V \circ !_a$ POR LO TANTO (**) CONMUTA

SEAN $g : c \to b$ y $h : c \to 1$ TALES QUE $[V,F] \circ K \circ g = V \circ h$.

$[V,F]^{-1} \circ [V,F] \circ K \circ g = [V,F]^{-1} \circ V \circ h$, ENTONCES $K \circ g = i_1 \circ h$

POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$\varphi : c \to a$ TAL QUE $f \circ \varphi = g$ y $!_a \circ \varphi = h$.

POR LO TANTO (**) ES PRODUCTO FIBRADO

COMO χ_f ES ÚNICO ENTONCES $\chi_f = [V,F] \circ K$ POR LO TANTO

$[V,F]^{-1} \circ \chi_f = [V,F]^{-1} \circ [V,F] \circ K = K$

POR LO TANTO $i_1 : 1 \to 1+1$ ES CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS.

7) ⇒ 1) CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & 1 \arrow[d, "i_2"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"] & 1+1 \end{tikzcd}$$

POR SER 0 OBJETO INICIAL (*) CONMUTA.

SEAN $f : 1 \to a$ y $g : 1 \to a$ TAL QUE $f \circ ! = g \circ 0_1$, POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO

$[f,g] : 1+1 \to a$ TAL QUE $[f,g] \circ i_1 = f$ y $[f,g] \circ i_2 = g$, POR LO TANTO

(*) ES COPRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & 1 \arrow[d, "F"] \\ 1 \arrow[r, "V"] & \Omega \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $F\circ O_1 = V\circ !$ COMO (*) ES COPRODUCTO FIBRADO EXISTE UNA ÚNICA $K: 1+1 \dashrightarrow \Omega$ TAL QUE $K\circ i_2 = F$ y $K\circ i_1 = V$

SEA $!_a : a \to 1$ TAL QUE $i_1\circ !_a = i_2\circ !_a$

$V\circ !_a = K\circ i_1\circ !_a = K\circ i_2\circ !_a = F\circ !_a$ POR SER (**) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : a \dashrightarrow 0$ TAL QUE $O_1\circ\varphi = 1_a$ y $!\circ\varphi = 1_a$

POR LO TANTO (*) ES PRODUCTO FIBRADO

DENOTAREMOS χ'_f, F' LOS MORFISMOS DEFINIDOS EN LA MISMA MANERA QUE LOS MORFISMOS χ_f, F PERO UTILIZANDO i_1 COMO CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS EN LUGAR DE V.

POR SER (*) PRODUCTO FIBRADO $i_2 = F'$. SEA $f: a \rightarrowtail d$

POR SER $i_1 : 1 \to 1+1$ CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
1 \arrow[r, "i_1"] & 1+1
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

EN LA DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 4.3.12 SE DEMOSTRO QUE

$$\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d, "!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
1 \arrow[r, "i_2"] & 1+1
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2 EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
a+-a \arrow[r, tail, "{[f,-f]}"] \arrow[d, "!_a+!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
1+1 \arrow[r, "{[i_1,i_2]}"] & 1+1
\end{tikzcd}$$

$[i_1,i_2] = 1_{1+1}$ POR EL HECHO FUNDAMENTAL 1 $[f,-f]$ ES EPIMORFISMO

Por lo tanto $a+-a \xrightarrow{[f,-f]'} a\cup -a \xrightarrow{f\cup -f} d$ y $a+-a \xrightarrow{[f,-f]} d \xrightarrow{1_d} d$ son epi-mono factorizaciones de $[f,-f]$. Por la proposición 2.2.4 existe $k: d \rightarrow a\cup -a$ tal que $f\cup -f \circ k = 1_d$ por lo tanto $1_d \leq f\cup -f$ y por ser 1_d elemento máximo $f\cup -f \leq 1_d$. Por lo tanto $f\cup -f \simeq 1_d$ y $\mathcal{E}$ es un topo booleano

Proposición 4.3.17: Sea $\mathcal{E}$ un topo clásico tal que todo objeto no cero es no vacío, entonces $\mathcal{E}$ es bien punteado.

Demostración: Si $\mathcal{E}$ es clásico entonces $\mathcal{E}$ es booleano

Sean $f, g: a \rightarrow b$ tales que $f \neq g$. Sea $h: c \rightarrowtail a$ el igualador de f y g entonces $f\circ h = g\circ h$. Sea $-h: -c \rightarrowtail a$ el complemento de h en $Sub(a)$. Si $-c \cong 0$ entonces $-h \cong 0_a$ por lo tanto $h \simeq h \vee 0_a \simeq h\cup -h \simeq 1_a$ y h es isomorfismo.

Como $f\circ h = g\circ h$ entonces $f = g$ ↯ por lo tanto $-c \ncong 0$. Entonces existe $y: 1 \rightarrow -c$. Sea $x: 1 \rightarrow a$ tal que $x = -h\circ y$

Si $f\circ x = g\circ x$ entonces por la propiedad universal del igualador existe un único morfismo $z: 1 \rightarrow c$ tal que $h\circ z = x$

$h \cap -h \simeq 0_c$ por lo tanto $c \cap -c \cong 0$ y por la proposición 4.3.2.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_c"] \arrow[d, "0_c"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & -c \arrow[d, "-h"] \\
c \arrow[r, "h"] & a
\end{tikzcd}$$

es producto fibrado

$h\circ z = x = -h\circ y$ por ser $(*)$ producto fibrado existe un único morfismo $\varphi: 1 \rightarrow 0$, por la proposición 1.2.54. $\mathcal{E}$ es degenerado ↯ por lo tanto $f\circ x \neq g\circ x$ y $\mathcal{E}$ es bien punteado.

SECCION 4.-

AXIOMA DE ELECCIÓN

DEFINICION 4.4.1.- $s: a \to b$ ES UNA SECCIÓN SI EXISTE $g: b \to a$ TAL QUE $g \circ s = 1_a$

PROPOSICIÓN 4.4.2.- TODA SECCIÓN ES MONOMORFISMO

DEMOSTRACIÓN: SEA $s: a \to b$ SECCIÓN, ENTONCES EXISTE $g: b \to a$ TAL QUE $g \circ s = 1_a$. SEAN $\alpha, \beta: c \to a$ TALES QUE $s \circ \alpha = s \circ \beta$ ENTONCES $g \circ s \circ \alpha = g \circ s \circ \beta$, ASI QUE $1_a \circ \alpha = 1_a \circ \beta$ Y $\alpha = \beta$

SEA $f: A \twoheadrightarrow I$ UN EPIMORFISMO EN $\mathcal{C}onj$. SEA $A_i = f^{-1}(\{i\})$ LA FIBRA SOBRE i. SEA $\mathcal{A} = \{f^{-1}(\{i\}) \mid i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$ UNA GAVILLA SOBRE i PODEMOS CONSTRUIR UNA SECCIÓN DE f, ES DECIR, UNA FUNCIÓN $s: I \to A$ TAL QUE $f \circ s = 1_I$.: SI $I = \phi$ ENTONCES $f: A \to \phi$ Y $A = \phi$ SEA $s = !: \phi \to \phi$ Y $f \circ s = 1_\phi$. SI $I \neq \phi$ ENTONCES EXISTE $i \in I$ POR SER f SOBRE EXISTE $a \in A$ TAL QUE $f(a) = i$ POR LO TANTO $a \in A_i$ Y $A_i \neq \phi$. SEA $s: I \to A$ TAL QUE $s(i) = a$

$(f \circ s)(i) = F(s(i)) = f(a) = i$ POR LO TANTO $f \circ s = 1_I$ Y s ES SECCIÓN DE f

SE DICE QUE LA SECCIÓN s SEPARA AL EPIMORFISMO f, ENTONCES EN $\mathcal{C}onj$ TODO EPIMORFISMO SE SEPARA.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE PRINCIPIO:

ES: TODO EPIMORFISMO $f: a \twoheadrightarrow b$ TIENE UNA SECCIÓN $s: b \to a$ TAL QUE $f \circ s = 1_b$

EL PRINCIPIO ES ES UNA VARIANTE DEL AXIOMA DE ELECCIÓN; YA QUE se escoge arbitrariamente un elemento $s(i)$ de A_i. La función s selecciona un elemento de A_i y por lo tanto es llamada función de elección).

Informalmente el axioma de elección asegura que es permitido efectuar un número ilimitado de elecciones. Este principio fue dado por Zermelo en 1904. Para muchos matemáticos clásicos el axioma de elección es un principio aceptable.

En 1940 Gödel demostró que este principio no es refutable en el sistema axiomático de la teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel. Paul Cohen demostró en 1966 que este principio no se deriva de éste sistema. Esto quiere decir que la función de elección s no se puede definir explícitamente en terminos de operaciones de la teoría de conjuntos que involucren a $f: A \longrightarrow I$.

Si $f: A \longrightarrow I$ tiene una sección $s: I \longrightarrow A$ tal que $f \circ s = 1_I$ entonces si $\alpha, \beta: I \longrightarrow B$ son tales que $\alpha \circ f = \beta \circ f$ entonces $\alpha \circ f \circ s = \beta \circ f \circ s$, asi que $1_I \circ \alpha = 1_I \circ \beta$ y $\alpha = \beta$. Por lo tanto f es sobre.

Entonces si f es una función no sobre entonces f no tiene sección. Sin embargo f tendra una sección parcial al tomar tomar la epi-mono factorización de f, es decir, $s': f(A) \longrightarrow A$ es la sección de f^* y es una función parcial de I en A. La imagen $f(A)$ es conocida como el soporte de la gavilla (A, f), $f(A) \subseteq I$ por lo tanto se identifica como un subobjeto de $1 = (I, 1_I)$ en $\mathrm{Conj} \downarrow I$. Si $\mathrm{sop}(\;) = (f(A), i)$,

$$\begin{tikzcd}
\overset{a}{\overset{\shortparallel}{(A, f)}} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] & & (I, 1_I) \\
& \underset{\mathrm{sop}(a)}{\underset{\shortparallel}{(f(A), i)}} \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathrm{Conj} \downarrow I$

DEFINICIÓN 4.4.3.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO, PARA TODO $a \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ EL SOPORTE DE a ES EL SUBOBJETO $Sop(a) \rightarrowtail 1$ DEL OBJETO TERMINAL DADA POR LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DEL MORFISMO $!_a : a \longrightarrow 1$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "!_a"'] \arrow[dr, two heads] & & 1 \\
& Sop(a) \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

AXIOMA SS: (SEPARACIÓN DE SOPORTE) EL EPIMORFISMO $a \twoheadrightarrow Sop(a)$ DE LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE $!_a$ TIENE SECCIÓN $s : Sop(a) \longrightarrow a$

AXIOMA NE: PARA TODO $a \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ TAL QUE $a \not\cong 0$ EXISTE $x : 1 \longrightarrow a$

PROPOSICIÓN 4.4.4.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO SI $g : a \rightarrowtail 1$ ES SUBOBJETO DE 1, ENTONCES EXISTE UN ELEMENTO $x : 1 \longrightarrow a$ DE a SI Y SÓLO SI $g \cong 1$ SI Y SÓLO SI $g : a \cong 1$

DEMOSTRACIÓN: SUPONGAMOS QUE EXISTE $x : 1 \longrightarrow a$. SEAN $\alpha, \beta : 1 \longrightarrow b$ TAL QUE $\alpha \circ g = \beta \circ g$ ENTONCES $\alpha \circ g \circ x = \beta \circ g \circ x$ PERO $g \circ x : 1 \longrightarrow 1$ POR LO TANTO $g \circ x = 1_1$ Y $\alpha \circ 1_1 = \beta \circ 1_1$ ES DECIR, $\alpha = \beta$. POR LO TANTO g ES EPIMORFISMO Y POR LO TANTO g ES ISOMORFISMO $g : a \cong 1$ SI Y SÓLO SI $g \cong 1_1$.

SUPONGAMOS AHORA QUE $g : a \cong 1$ ES ISOMORFISMO. SEA $x = g^{-1} : 1 \longrightarrow a$

LAS EXPRESIONES $\mathcal{E} \models ES$, $\mathcal{E} \models SS$, ETC. SIGNIFICAN QUE LOS AXIOMAS ES, SS, ETC. SE VERIFICAN EN $\mathcal{E}$

PROPOSICIÓN 4.4.5.- SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO NO DEGENERADO. ENTONCES

$\mathcal{E}$ FNE si y sólo si $\mathcal{E}$ es bivalente y $\mathcal{E}$ FSS.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{E}$ FNE y se $t: 1 \to \Omega$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_a"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ 1 \arrow[r, "V"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Sea el producto fibrado de t sobre V

Por lo tanto $\chi_g = t$ si $t \neq F$ entonces como $F = \chi_{0_1}$ $\chi_g \neq \chi_{0_1}$ por lo tanto $a \not\cong 0$ por NE existe $x: 1 \to a$ por la proposición anterior $g \cong 1_1$, entonces $\chi_g = \chi_{1_1}$ pero $V = \chi_{1_1}$ por lo tanto $t = V$ y $\mathcal{E}$ es bivalente

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "!_a"] \arrow[dr, two heads, "!_a^*"'] & & 1 \\ & sop(a) \arrow[ur, tail, "!_{sop(a)}"'] & \end{tikzcd}$$

Sea la epi-mono factorización de $!_a$

Si $Sop(a) \cong 0$ entonces existe un morfismo $0 \to a$ y por la proposición 1.2.54 $a \cong 0$ entonces el morfismo $1_0 : sop(a) \to a$ es sección de $1_0 : a \twoheadrightarrow Sop(a)$

Si $Sop(a) \not\cong 0$ por NE existe $x: 1 \to Sop(a)$ por la proposición anterior $!_{sop(a)} : Sop(a) \cong 1$ por lo tanto $Sop(a)$ es objeto terminal y $!_a$ es epimorfismo

Si $a \cong 0$ entonces $!_a : 0 \to 1$ es monomorfismo, por lo tanto $!_a$ es isomorfismo, es decir, $a \cong 1$, como $a \cong 0$ entonces $1 \cong 0$ y $\mathcal{E}$ es degenerado ↯ por lo tanto $a \not\cong 0$ por NE existe $x: 1 \to a$. Sea $x' : Sop(a) \to a$ tal que $x' = x \circ !_{sop(a)}$

$!_a^* \circ x' : sop(a) \to sop(a)$ por ser $sop(a)$ objeto terminal $!_a^* \circ x' = 1_{sop(a)}$ por lo tanto x' es sección de $!_a^*$ y $\mathcal{E}$ FSS

SUPONGAMOS AHORA QUE $\mathcal{E}$ ES BIVALENTE Y $\mathcal{E} \models SS$

SEA $a \neq 0$ EN $Sub(1)$ $sop(a) \rightarrowtail 1$ ES EL MORFISMO $0_1 : 0 \to 1$

O EL MORFISMO $1_1 : 1 \to 1$ YA QUE $\chi_{0_1} = F$ Y $\chi_{1_1} = V$

SI $a \not\cong 0$ ENTONCES $sop(a) \not\cong 0$ POR LO TANTO $sop(a) \rightarrowtail 1 \neq 0_1$

POR LO TANTO $Sop(a) \to 1 = 1_1$ POR LO TANTO $Sop(a) \cong 1$

COMO $\mathcal{E} \models SS$ ENTONCES $a \twoheadrightarrow Sop(a)$ TIENE UNA SECCIÓN

$s : sop(a) \to a$, COMO $Sop(a) \cong 1$ ENTONCES EXISTE $x : 1 \to a$

POR LO TANTO $\mathcal{E} \models NE$

PROPOSICIÓN 4.4.6.- SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO ENTONCES $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO SI Y SÓLO SI $\mathcal{E}$ ES CLÁSICO, BIVALENTE Y $\mathcal{E} \models SS$

DEMOSTRACIÓN: EN LA PROPOSICIÓN 4.1.15 Y EN LA PROPOSICIÓN 4.3.17 SE DEMOSTRO $\mathcal{E}$ BIEN PUNTEADO SI Y SÓLO SI $\mathcal{E}$ ES CLASICO Y $\mathcal{E} \models NE$ Y EN LA PROPOSICIÓN ANTERIOR SE DEMOSTRO $\mathcal{E} \models NE$ SI Y SÓLO SI $\mathcal{E}$ ES BIVALENTE Y $\mathcal{E} \models SS$

DEFINICIÓN 4.4.7.- SE DICE QUE UN TOPO $\mathcal{E}$ ES DEBILMENTE EXTENSIONAL SI PARA TODO PAR DE $\mathcal{E}$-MORFISMOS $f, g : a \to b$ TALES QUE $f \neq g$ EXISTE UN ELEMENTO PARCIAL $x : 1 \rightsquigarrow a$ TAL QUE $f \circ x \neq g \circ x$

PROPOSICIÓN 4.4.8. SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPO BOOLEANO (CLÁSICO) Y $\mathcal{E} \models SS$ ENTONCES $\mathcal{E}$ ES DEBILMENTE EXTENSIONAL.

DEMOSTRACIÓN: SEAN $f, g : a \to b$ TALES QUE $f \neq g$.

SEA $h : c \rightarrowtail a$ EL IGUALADOR DE f Y g POR LO TANTO $f \circ h = g \circ h$

SEA $-h : -c \rightarrowtail a$ EL COMPLEMENTO DE h EN $sub(a)$

SUPONGAMOS QUE $-c \cong 0$, ENTONCES $-h \cong 0_a : c \to a$, PERO COMO $h \cong h \cup 0_a \cong h \cup -h \cong 1_a$ ENTONCES h ES ISOMORFISMO $f \circ h = g \circ h$ POR LO TANTO $f = g$ $\between$ POR LO TANTO $-c \ncong 0$

SEA $-c \twoheadrightarrow sop(-c) \rightarrowtail 1$ LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE $!_{-c}$
COMO $\mathcal{E} \models SS$ $-c \twoheadrightarrow sop(-c)$ TIENE SECCIÓN $y : sop(-c) \to -c$
SEA $x = -h \circ y$ ENTONCES $x : 1 \rightsquigarrow a$ ES UN ELEMENTO PARCIAL YA QUE $\operatorname{cod} x = a$ Y POR SER 1 OBJETO TERMINAL EXISTE UN MORFISMO CON $\operatorname{dom} x$ $sop(-c) \to 1$

SUPONGAMOS QUE $f \circ x = g \circ x$, ENTONCES $f \circ -h \circ y = g \circ -h \circ y$.
POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL IGUALADOR h EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $k : sop(-c) \to c$ TAL QUE $h \circ k = -h \circ y$

COMO

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_{-c}"] \arrow[d, "0_c"'] & -c \arrow[d, tail, "-h"] \\
c \arrow[r, tail, "h"] & a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

ENTONCES EXISTE UN MORFISMO $Sop(-c) \to 0$ POR LA PROPOSICIÓN 1.2.64 $Sop(-c) \cong 0$ Y $-c \cong 0$ $\between$. POR LO TANTO $f \circ x \neq g \circ x$

SEA $f : A \to I$ UNA FUNCIÓN EN $\mathcal{C}on$. SEA $A \xrightarrow{f^+} f(A) \hookrightarrow I$ LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE f. SI $\mathcal{C}on \models ES$ ENTONCES f^+ TIENE UNA SECCIÓN $s : f(A) \to A$. SI $A \neq \emptyset$ AL ELEGIR UN ELEMENTO $x_0 \in A$ SE PUEDE DEFINIR UNA FUNCIÓN $g : I \to A$ TAL QUE

$$g(i) = \begin{cases} s(i) & \text{si } i \in f(A) \\ x_0 & \text{si } i \in I - f(A) \end{cases}$$

SI EXISTE $i \in I$ TAL QUE $i \in F(A)$ ENTONCES g NO ES UNA SECCIÓN DE f YA QUE $f(g(i)) = f(x_0) \circ f(A)$

SI $x \in A$ $g(f(x)) = s(f(x))$ ENTONCES $f(g(f(x))) = f(s(f(x)))$

COMO $f(x) \in f(A)$ $f \circ s_{1_{f(A)}} = f^{*} \circ s = 1_{f(A)}$ POR LO TANTO $f \circ g \circ f = f$

ESTO NO LLEVA A OTRA FORMULACIÓN DEL AXIOMA DE ELECCIÓN DADA POR MACLANE

AE: SI $a \not\cong 0$ ENTONCES PARA TODO MORFISMO $f: a \to b$ EXISTE UN MORFISMO $g: b \to a$ TAL QUE $f \circ g \circ f = f$

PROPOSICIÓN 4.4.9.- SI $\mathcal{E} \models AE$ ENTONCES $\mathcal{E} \models NE$, $\mathcal{E} \models ES$ Y $\mathcal{E}$ ES BIVALENTE

DEMOSTRACIÓN: SEA $a \not\cong 0$ SEA $!a: a \to 1$ COMO $\mathcal{E} \models AE$ ENTONCES EXISTE $x: 1 \to a$ POR LO TANTO $\mathcal{E} \models NE$

SEA $f: a \twoheadrightarrow b$ EPIMORFISMO. SI $a \cong 0$ ENTONCES f ES MONOMORFISMO Y POR LO TANTO f ES ISOMORFISMO. ENTONCES EXISTE $s = f^{-1}: b \to a$ TAL QUE $f \circ s = 1_b$. SI $a \not\cong 0$ COMO $\mathcal{E} \models AE$, ENTONCES EXISTE $g: b \to a$ TAL QUE $f \circ g \circ f = f = 1_b \circ f$ COMO f ES EPIMORFISMO $f \circ g = 1_b$

POR LO TANTO $\mathcal{E} \models ES$

POR LA PROPOSICIÓN 4.45 $\mathcal{E} \models NE \Rightarrow \mathcal{E}$ ES BIVALENTE

PROPOSICIÓN 4.4.10.- SI $\mathcal{E} \models ES$ Y $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO ENTONCES $\mathcal{E} \models AE$

DEMOSTRACIÓN: SEA $f: a \to b$ Y $a \xrightarrow{f^{*}} f(a) \xrightarrow{imf} b$ LA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE f.

COMO $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO POR LA PROPOSICIÓN 4.1.15. $\mathcal{E}$ ES CLÁSICO (BOOLEANO) POR LO TANTO imf TIENE COMPLEMENTO $-mf: -f(a) \rightarrowtail b$ TAL QUE $imf \cup -imf \simeq 1_d$ Y $imf \cap -mf \simeq 0_b$ POR LO TANTO imf Y $-imf$ SON MORFISMOS AJENOS POR LA PROPOSICIÓN 4.1.12

$[imf, -imf] : f(a) + -f(a) \longrightarrow b$ ES MONOMORFISMO

POR LA PROPOSICIÓN 4.3.4 EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA

$$\begin{tikzcd}
f(a)+-f(a) \arrow[rr, "{[imf,-imf]}"] \arrow[dr, "g"'] & & b \\
& f(a)\cup -f(a) \arrow[ur, dashed, "imf\cup -imf"'] &
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $[imf, -imf] \leq imf \cup -imf$

COMO $\mathcal{E} \models ES$, EXISTE $s: f(a)\cup -f(a) \longrightarrow f(a)+-f(a)$ SECCIÓN DE g

TAL QUE $g \circ s = 1_{f(a)\cup -f(a)}$

$[imf, -imf]\circ s = imf \cup -imf \circ g \circ s = imf \cup -imf$

POR LO TANTO $imf\cup -imf \leq [imf, -imf]$

POR LO TANTO $[imf, -imf] \simeq imf \cup -imf \simeq 1_b$ Y $f(a)+-f(a) \cong b$

SEA $a \not\cong 0$ COMO $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO ENTONCES $\mathcal{E} \models NE$ Y EXISTE $x: 1 \longrightarrow a$. SEA $h: -f(a) \longrightarrow a$ TAL QUE $h = x \circ !_{-f(a)}$

COMO $\mathcal{E} \models ES$ EXISTE $s': f(a) \longrightarrow a$ SECCIÓN DE f^* TAL QUE $f^* \circ s' = 1_{f(a)}$

POR SER $(b, imf, -imf)$ COPRODUCTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $[s', h] : b \longrightarrow a$ TAL QUE $[s', h]\circ imf = s$

$f = imf \circ f^* = imf \circ 1_{f(a)} \circ f^* = imf \circ f^* \circ s' \circ f^* = f \circ [s', h] \circ f$

POR LO TANTO EXISTE $g = [s', h] : b \longrightarrow a$ TAL QUE $f \circ g \circ f = f$ Y $\mathcal{E} \models AE$.

TEOREMA DE RADU DIACONESCU.

EN 1975 RADU DIACONESCU DEMOSTRÓ QUE EL AXIOMA DE ELECCIÓN IMPLICA QUE LA LÓGICA DE UN TOPO ES CLÁSICA.

$$\begin{tikzcd}
b_1 \cap b_2 \arrow[r, "\bar{\beta}_1"] \arrow[d, "\bar{\beta}_2"'] & b_2 \arrow[d, tail, "\beta_2"] & b_1 \cap c_2 \arrow[r, "\hat{\beta}_2"] \arrow[d, "\bar{\gamma}_2"'] & c_2 \arrow[d, tail, "\gamma_2"] \\
b_1 \arrow[r, tail, "\beta_1"] & a & b_1 \arrow[r, tail, "\beta_1"] & a
\end{tikzcd}$$

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2

$$\begin{tikzcd}
(b_1 \cap b_2)+(b_1 \cap c_2) \arrow[r, "\bar{\beta}_1 + \hat{\beta}_1"] \arrow[d, "{[\bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2]}"'] & b_2 + c_2 \arrow[d, tail, "{[\beta_2, \gamma_2]}"] \\
b_1 \arrow[r, tail, "\beta_1"] & a
\end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $b_1 \cap (b_2 + c_2) \cong (b_1 \cap b_2) + (b_1 \cap c_2)$

$$\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[r, tail, "\beta_1"] \arrow[d, "1_{b_1}"'] & a \arrow[d, "1_a"] \\
b_1 \arrow[r, tail, "\beta_1"] & a
\end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO, YA QUE

$1_a \circ \beta_1 = \beta_1 = \beta_1 \circ 1_{b_1}$. SEAN $\alpha : c \to a$ Y $\beta : c \to b_1$ TALES QUE $1_a \circ \alpha = \beta_1 \circ \beta$, ENTONCES EXISTE $\beta : c \to b_1$ TAL QUE $1_{b_1} \circ \beta = \beta$ Y $\beta_1 \circ \beta = \alpha$. SI $\bar{\beta} : c \to b_1$ ES TAL QUE $1_{b_1} \circ \bar{\beta} = \beta$ ENTONCES $\bar{\beta} = \beta$ POR LO TANTO $b_1 \cap a \cong b_1$

PROPOSICIÓN 4.4.13. SEA $(d+a,\ i_d : d \to d+a,\ i_a : a \to d+a)$ EL COPRODUCTO DE d Y a, ENTONCES.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_d"] \arrow[d, "0_a"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & d \arrow[d, "i_d"] \\
a \arrow[r, "i_a"] & d+a
\end{tikzcd}$$
ES PRODUCTO FIBRADO.

DEMOSTRACIÓN: POR SER 0 OBJETO INICIAL (*) CONMUTA.

PROPOSICIÓN 4.4.11 SEA $\mathcal{E}$ UN TOPO Y

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[r, dashed, "h"] & c \end{tikzcd}$$

UN COPRODUCTO FIBRADO TAL QUE g ES MONOMORFISMO, ENTONCES h ES MONOMORFISMO Y EL DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO.

DEMOSTRACIÓN: POR EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE MORFISMOS PARCIALES EXISTEN $\bar{b} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\eta_b : b \rightarrowtail \bar{b}$ Y UN ÚNICO $\bar{f} : a \to \bar{b} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$

TAL QUE

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, tail, "g"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & a \arrow[d, "\bar{f}"] \\ b \arrow[r, tail, "\eta_b"] & \bar{b} \end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $\bar{f} \circ g = \eta_b \circ f$

POR SER $(*)$ COPRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : c \to \bar{b}$ TAL QUE $\varphi \circ h = \eta_b$ Y $\varphi \circ k = \bar{f}$

COMO η_b ES MONOMORFISMO, $\varphi \circ h$ ES MONOMORFISMO, ENTONCES h ES MONOMORFISMO

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $\alpha : e \to a$ Y $\beta : e \to b$ TALES QUE $k \circ \alpha = h \circ \beta$

$\bar{f} \circ \alpha = \varphi \circ k \circ \alpha = \varphi \circ h \circ \beta = \eta_b \circ \beta$. POR SER $(**)$ PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\psi : e \to d$ TAL QUE $g \circ \psi = \alpha$ Y $f \circ \psi = \beta$

POR LO TANTO $(*)$ ES PRODUCTO FIBRADO

PROPOSICIÓN 4.4.12.- SEAN $\beta_1 : b_1 \rightarrowtail a$, $\beta_2 : b_2 \rightarrowtail a$, $\gamma_2 : c_2 \rightarrowtail a \in \mathrm{Sub}(a)$ ENTONCES $b_1 \cap (b_2 + c_2) \cong (b_1 \cap b_2) + (b_1 \cap c_2)$ Y $b_1 \cap a \cong b_1$

DEMOSTRACIÓN: SEAN LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS LOS PRODUCTOS FIBRADOS DE β_2 Y γ_2 SOBRE β_1 RESPECTIVAMENTE.

SEAN $f: d \to \alpha$ y $g: a \to \alpha$ TALES QUE $f \circ 0_d = g \circ 0_a$, POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $[f,g]: d+a \to \alpha$ TAL QUE $[f,g] \circ i_d = f$ y $[f,g] \circ i_a = g$

POR LO TANTO (*) ES COPRODUCTO FIBRADO.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "1_d"] \arrow[d, "!_d"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & d \arrow[d, "V \circ !_d"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

SEAN $\alpha: a \to d$ y $\beta: a \to 1$, ENTONCES EXISTE $\alpha: a \to d$ TAL QUE $1_d \circ \alpha = \alpha$, $!_d \circ \alpha: a \to 1$ y $\beta: a \to 1$ POR SER 1 OBJETO TERMINAL $!_d \circ \alpha = \beta$ y (**) ES PRODUCTO FIBRADO

POR LA PROPOSICIÓN 4.1.6.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & a \arrow[d, "F \circ !_a"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO.

POR SER 0 OBJETO INICIAL $F \circ !_a \circ 0_a = V \circ !_d \circ 0_d$, POR SER (*) COPRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $K: d+a \to \Omega$ TAL QUE $K \circ i_d = V \circ !_d$ y $K \circ i_a = F \circ !_a$

SEAN $f: a \to d$ y $g: a \to a$ TALES QUE $i_d \circ f = i_a \circ g$

POR SER 1 OBJETO TERMINAL $!_a = !_d \circ f$

$F \circ !_a \circ g = K \circ i_a \circ g = K \circ i_d \circ f = V \circ !_d \circ f = V \circ !_a$. POR SER (***) PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $h: a \to 0$ TAL QUE $0_a \circ h = g$ y $! \circ h = !_a$. POR LO TANTO $a \cong 0$ y a ES OBJETO INICIAL POR LO TANTO $f = 0_d \circ h$ y (*) ES PRODUCTO FIBRADO.

PROPOSICIÓN 4.4.14 · TEOREMA DE RADU DIACONESCU:

SEA $\mathcal{E}$ UN TOPOS TAL QUE $\mathcal{E} \models ES$ ENTONCES $\mathcal{E}$ ES BOOLEANO

DEMOSTRACIÓN: SE $m: a' \rightarrowtail a$ SUBOBJETO DE a

SEA $a \xrightarrow{i_1} a+a \xleftarrow{i_2} a$ UN DIAGRAMA COPRODUCTO

SEA $p: a+a \longrightarrow a \underset{a'}{+} a$ EL COIGUALADOR DE $i_1 \circ m, i_2 \circ m$

POR LA PROPOSICIÓN 1.A.41 p ES EPIMORFISMO

p TAMBIÉN SE PUEDE OBTENER AL FORMAR EL COPRODUCTO FIBRADO DE m SOBRE m

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[rr, tail, "m"] \arrow[dd, tail, "m"'] & & a \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dd, dashed, "j_1"] \\
& a+a \arrow[dr, dashed, "p"'] & \\
a \arrow[ur, "i_2"] \arrow[rr, "j_2"'] & & a \underset{a'}{+} a
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $j_1 \circ m = j_2 \circ m$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $p: a+a \longrightarrow a \underset{a'}{+} a$ TAL QUE $p \circ i_1 = j_1$ Y $p \circ i_2 = j_2$

$p \circ i_1 \circ m = j_1 \circ m = j_2 \circ m = p \circ i_2 \circ m$. SI EXISTE $\bar{p}: a+a \longrightarrow b$ TAL QUE $\bar{p} \circ i_1 \circ m = \bar{p} \circ i_2 \circ m$ POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $q: a \underset{a'}{+} a \longrightarrow b$ TAL QUE $q \circ j_1 = \bar{p} \circ i_1$ Y $q \circ j_2 = \bar{p} \circ i_2$

$q \circ p \circ i_1 = q \circ j_1 = \bar{p} \circ i_1$ Y $q \circ p \circ i_2 = q \circ j_2 = \bar{p} \circ i_2$ POR LA PROPOSICIÓN 1.2.28 $q \circ p = \bar{p}$. POR LO TANTO p ES EL COIGUALADOR DE $i_1 \circ m$ Y $i_2 \circ m$

POR LA PROPOSICIÓN 4.4.11

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & a \arrow[d, tail, dashed, "j_1"] \\
a \arrow[r, tail, "j_2"'] & a \underset{a'}{+} a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO Y j_1, j_2 SON MONOMORFISMOS

COMO EN $\mathcal{E} \models ES$ ENTONCES EXISTE $s: a \underset{a'}{+} a \rightarrowtail a+a$ SECCIÓN

DE P. SEAN LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS LOS PRODUCTOS FIBRADOS DE ι_1 Y ι_2 SOBRE S

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "s_d"] \arrow[d, "\delta"'] & a \arrow[d, dashed, "\iota_1"] \\
a\underset{a'}{+}a \arrow[r, tail, dashed, "s"] & a+a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "s_a"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & a \arrow[d, "\iota_2"] \\
a\underset{a'}{+}a \arrow[r, tail, "s"] & a+a
\end{tikzcd}$$

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2

$$\begin{tikzcd}
d+a \arrow[r, tail, "s_d+s_a"] \arrow[d, "{[\delta,\varepsilon]}"'] & a+a \arrow[d, dashed, "{[\iota_1,\iota_2]=1_{a+a}}"] \\
a\underset{a'}{+}a \arrow[r, tail, dashed, "s"] & a+a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LAS PROPOSICIONES 1.2.47 Y 3.3.3 $[\delta,\varepsilon]$ ES ISOMORFISMO

POR LO TANTO $a\underset{a'}{+}a \cong d+a$

SEAN LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS LOS PRODUCTOS FIBRADOS DE δ Y ε SOBRE j_1

$$\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[r, tail, "\kappa_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & d \arrow[d, "\delta"] \\
a \arrow[r, tail, "j_1"'] & a\underset{a'}{+}a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, tail, "\ell_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & a \arrow[d, "\varepsilon"] \\
a \arrow[r, tail, "j_1"'] & a\underset{a'}{+}a
\end{tikzcd}$$

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2

$$\begin{tikzcd}
b_1+c_1 \arrow[r, tail, "\kappa_1+\ell_1"] \arrow[d, "{[\beta_1,\gamma_1]}"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & d+a \arrow[d, dashed, "{[\delta,\varepsilon]}"] \\
a \arrow[r, tail, "j_1"'] & a\underset{a'}{+}a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

COMO $[\delta,\varepsilon]$ ES ISOMORFISMO ENTONCES $[\beta_1,\gamma_1]$ ES ISOMORFISMO Y $a \cong b_1+c_1$

SEAN LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS LOS PRODUCTOS FIBRADOS DE δ Y ϵ SOBRE j_2

$$\begin{tikzcd}
b_2 \arrow[r, tail, "k_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & d \arrow[d, "\delta"] \\
a \arrow[r, tail, "j_2"'] & a+_{a'}a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_2 \arrow[r, tail, "l_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & e \arrow[d, "\epsilon"] \\
a \arrow[r, tail, "j_2"'] & a+_{a'}a
\end{tikzcd}$$

POR EL HECHO FUNDAMENTAL 2

$$\begin{tikzcd}
b_2+c_2 \arrow[r, tail, "k_2+l_2"] \arrow[d, "{[\beta_2,\gamma_2]}"'] \arrow[dr, phantom, "(***)"] & d+e \arrow[d, dashed, "{[\delta,\epsilon]}"] \\
a \arrow[r, tail, "j_2"'] & a+_{a'}a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

COMO $[\delta,\epsilon]$ ES ISOMORFISMO ENTONCES $[\beta_2,\gamma_2]$ ES ISOMORFISMO Y $a \cong b_2+c_2$

$$a \cong b_1+c_1 \cong (b_1\cap a)+(c_1\cap a) \cong (b_1\cap(b_2+c_2))+(c_1\cap(b_2+c_2))$$

$$\cong (b_1\cap b_2)+(b_1\cap c_2)+(c_1\cap b_2)+(c_1\cap c_2)$$

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[rrr, tail, "{[\beta_1,\gamma_1]^{-1}\circ m\circ 1_{a'}}"] \arrow[dr, "1_{a'}"] \arrow[ddd, tail, "{[\beta_2,\gamma_2]^{-1}\circ m\circ 1_{a'}}"'] & & & b_1+c_1 \arrow[dl, "{[\beta_1,\gamma_1]}"'] \arrow[ddd, tail, "k_1+l_1"] \\
& a' \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, tail, "m"'] & a \arrow[d, tail, "j_1"] & \\
& a \arrow[r, tail, "j_2"'] & a+_{a'}a & \\
b_2+c_2 \arrow[ur, "{[\beta_2,\gamma_2]}"'] \arrow[rrr, tail, "k_2+l_2"] & & & d+e \arrow[ul, "{[\delta,\epsilon]}"]
\end{tikzcd}$$

EL CUADRADO INSCRITO ES PRODUCTO FIBRADO

DEMOSTRAREMOS QUE EL CUADRADO EXTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO

$$[\delta,\epsilon]^{-1}\circ j_1\circ m\circ 1_{a'} = [\delta,\epsilon]^{-1}\circ j_2\circ m\circ 1_{a'}$$

COMO (**) CONMUTA $[\delta,\varepsilon]^{-1}\circ j_1 = (k_1+\ell_1)\circ[\beta_1,\gamma_1]^{-1}$

COMO (***) CONMUTA $[\delta,\varepsilon]^{-1}\circ j_2 = (k_2+\ell_2)\circ[\beta_2,\gamma_2]^{-1}$

POR LO TANTO $(k_1+\ell_1)\circ[\beta_1,\gamma_1]^{-1}\circ m\circ 1_{a'} = (k_2+\ell_2)\circ[\beta_2,\gamma_2]^{-1}\circ m\circ 1_{a'}$ Y EL CUADRADO EXTERIOR CONMUTA

SEAN $\alpha : x \to b_1+c_1$ Y $\beta : x \to b_2+c_2$ TALES QUE $(k_1+\ell_1)\circ\alpha = (k_2+\ell_2)\circ\beta$

COMO (**) CONMUTA $j_1\circ[\beta_1,\gamma_1] = [\delta,\varepsilon]\circ(k_1+\ell_1)$

COMO (***) CONMUTA $j_2\circ[\beta_2,\gamma_2] = [\delta,\varepsilon]\circ(k_2+\ell_2)$

$j_1\circ[\beta_1,\gamma_1]\circ\alpha = [\delta,\varepsilon]\circ(k_1+\ell_1)\circ\alpha = [\delta,\varepsilon](k_2+\ell_2)\circ\beta = j_2\circ[\beta_2,\gamma_2]\circ\beta$

POR SER EL CUADRADO INSCRITO PRODUCTO FIBRADO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $\varphi : x \to a'$ TAL QUE $m\circ\varphi = [\beta_1,\gamma_1]\circ\alpha$ Y $m\circ\varphi = [\beta_2,\gamma_2]$

$m\circ\varphi = [\beta_1,\gamma_1]\circ\alpha \Rightarrow [\beta_1,\gamma_1]^{-1}\circ m\circ 1_{a'}\circ\varphi = [\beta_1,\gamma_1]^{-1}\circ[\beta_1,\gamma_1]\circ\alpha = \alpha$

$m\circ\varphi = [\beta_2,\gamma_2]\circ\beta \Rightarrow [\beta_2,\gamma_2]^{-1}\circ m\circ 1_{a'}\circ\varphi = [\beta_2,\gamma_2]^{-1}\circ[\beta_2,\gamma_2]\circ\beta = \beta$

POR LO TANTO EL CUADRADO EXTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
(b_1+c_1)\cap(b_2+c_2) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & b_1+c_1 \arrow[d, tail, "k_1+\ell_1"] \\
b_2+c_2 \arrow[r, tail, "k_2+\ell_2"] & d+a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $a' \cong (b_1+c_1)\cap(b_2+c_2)$ COMO SUBOBJETO DE $d+a$

$$(b_1+c_1)\cap(b_2+c_2) \cong (b_1\cap(b_2+c_2)) + (c_1\cap(b_2+c_2))$$

$$\cong (b_1\cap b_2) + (b_1\cap c_2) + (c_1\cap b_2) + (c_1\cap c_2)$$

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "s_d"] \arrow[d, "i_d"'] & a \arrow[d, "i_1"] \\
d+a \arrow[r, tail, "s_d+s_a"] & a+a \\
a \arrow[u, "i_a"] \arrow[r, tail, "s_a"] & a \arrow[u, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

$s_d+s_a : d+a \rightarrowtail a+a$ ES EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE EL DIAGRAMA CONMUTA

POR LO TANTO $(s_d+s_a)\circ i_d = i_1\circ s_d$ Y $(s_d+s_a)\circ i_a = i_2\circ s_a$.

COMO $i_1\circ s_d$ ES MONOMORFISMO ENTONCES $(s_d+s_a)\circ i_d$ ES MONOMORFISMO Y i_d ES

MONOMORFISMO. COMO $i_2 \circ S_2$ ES MONOMORFISMO ENTONCES $(S_1+S_0)\circ i_2$ ES MONOMORFISMO Y i_2 ES MONOMORFISMO

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "1_O"] \arrow[d, "1_O"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & O \arrow[r, "O_{b_1}"] \arrow[d, "1_O"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & b_1 \arrow[d, tail, "k_1"] \\
O \arrow[r, "1_O"] \arrow[d, "O_{c_2}"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & O \arrow[r, "O_d"] \arrow[d, "O_a"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & d \arrow[d, tail, "i_d"] \\
c_2 \arrow[r, tail, "l_2"] & a \arrow[r, tail, "i_a"] & d+a
\end{tikzcd}$$

ES FÁCIL VERIFICAR QUE (1) ES PRODUCTO FIBRADO

POR SER O OBJETO INICIAL (2) CONMUTA, SI $\alpha: a \to b_1$ Y $\beta: a \to O$ SON TALES QUE $k_1 \circ \alpha = 1_O \circ \beta$ ENTONCES $a \cong O$ Y a ES OBJETO INICIAL, POR LO TANTO EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $a_0 : a \to O$ TAL QUE $O_{b_1} \circ a_0 = \alpha$ Y $1_O \circ a_0 = \beta$ POR LO TANTO (2) ES PRODUCTO FIBRADO.

DE MANERA ANÁLOGA (3) ES PRODUCTO FIBRADO

POR LA PROPOSICIÓN 4.4.13 (4) ES PRODUCTO FIBRADO.

POR EL TEOREMA DE PRODUCTOS FIBRADOS EL CUADRADO EXTERIOR DEL DIAGRAMA ANTERIOR ES PRODUCTO FIBRADO.

POR LO TANTO $b_1 \cap c_2 \cong O$ COMO SUBOBJETO DE $d+a$

DE MANERA ANÁLOGA EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES PRODUCTO FIBRADO

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "O_{c_1}"] \arrow[d, "O_{b_2}"'] & c_1 \arrow[d, tail, "i_a \circ l_1"] \\
b_2 \arrow[r, tail, "i_d \circ k_2"'] & d+a
\end{tikzcd}$$

POR LO TANTO $c_1 \cap b_2 \cong 0$ COMO SUBOBJETO DE $d+e$

POR LO TANTO $a' \cong (b_1 \cap b_2) + (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2)$

$$\cong (b_1 \cap b_2) + 0 + 0 + (c_1 \cap c_2)$$

$$\cong (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2)$$

SEA $\varphi : (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) \cong a'$ ENTONCES $m \circ \varphi : (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) \rightarrowtail a$

POR LO TANTO $a' \cong (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2)$ COMO SUBOBJETO DE $d+e$

SEA $\psi : (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) + (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \cong a$

SEA $(b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) \xrightarrow[j]{} (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) + (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \xleftarrow[i]{} (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2)$

EL COPRODUCTO DE $(b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2)$ Y $(b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2)$

SEA $-m : (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \rightarrowtail a$ TAL QUE $-m = \psi \circ i$

SEAN $\alpha : a' \longrightarrow c$ Y $\beta : (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \longrightarrow c$

$\alpha \circ \varphi : (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) \longrightarrow c$ POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL COPRODUCTO

EXISTE UN ÚNICO $[\alpha \circ \varphi, \beta] : (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) + (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \longrightarrow c$ TAL QUE

$[\alpha \circ \varphi, \beta] \circ j = \alpha \circ \varphi$ Y $[\alpha \circ \varphi, \beta] \circ i = \beta$

SEA $[\alpha, \beta] : a \longrightarrow c$ TAL QUE $[\alpha, \beta] = [\alpha \circ \varphi, \beta] \circ \psi^{-1}$

$[\alpha, \beta] \circ m = [\alpha \circ \varphi, \beta] \circ \psi^{-1} \circ m = [\alpha \circ \varphi, \beta] \circ j \circ \varphi^{-1} = \alpha \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \alpha$

$[\alpha, \beta] \circ -m = [\alpha \circ \varphi, \beta] \circ \psi^{-1} \circ -m = [\alpha \circ \varphi, \beta] \circ i = \beta$

POR LO TANTO $a' \overset{m}{\rightarrowtail} a \xleftarrow{-m} (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2)$ ES COPRODUCTO

POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & a' \arrow[d, tail, "m"] \\
(b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \arrow[r, tail, "-m"] & a
\end{tikzcd}$$

ES PRODUCTO FIBRADO

POR LO TANTO $m \wedge -m \cong 0_a$

$$\psi \circ (\varphi^{-1} + 1_{(b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2)}) = \psi \circ [j \circ \varphi^{-1}, i \circ 1_{(b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2)}] = [\psi \circ j \circ \varphi^{-1}, \psi \circ i]$$

$$= [m \circ \varphi \circ \varphi^{-1}, -m] = [m, -m]$$

POR LO TANTO

$$a' + (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \xrightarrow{\varphi^{-1} + 1_{(b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2)}} (b_1 \cap b_2) + (c_1 \cap c_2) + (b_1 \cap c_2) + (c_1 \cap b_2) \xrightarrow{\psi} a$$

ES UNA EPI-MONO FACTORIZACIÓN DE $[m, -m]$, POR LA PROPOSICIÓN 4.3.41 $\chi_\psi = \chi_{m \cup -m}$

COMO $\psi \simeq 1_a$ ENTONCES $\chi_\psi = \chi_{1_a}$. POR LO TANTO $\chi_{m \cup -m} = \chi_{1_a}$

ASÍ QUE $m \cup -m \simeq 1_a$

POR LO TANTO m TIENE COMPLEMENTO $-m$ Y $\mathcal{E}$ ES BOOLEANO

PROPOSICIÓN 4.4.15: SI $\mathcal{E}$ ES UN TOPOS ENTONCES $\mathcal{E} \models AE$ SI Y SÓLO SI $\mathcal{E} \models ES$, $\mathcal{E} \models NE$

DEMOSTRACIÓN: POR LA PROPOSICIÓN 4.4.7 TENEMOS QUE SI $\mathcal{E} \models AE$ ENTONCES $\mathcal{E} \models ES$ Y $\mathcal{E} \models NE$

SUPONGAMOS QUE $\mathcal{E} \models ES$ Y $\mathcal{E} \models NE$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $\mathcal{E}$ ES BOOLEANO (CLÁSICO), POR LA PROPOSICIÓN 4.3.17 $\mathcal{E}$ ES BIEN PUNTEADO Y POR LA PROPOSICIÓN 4.4.10 $\mathcal{E} \models AE$.

REFERENCIAS

- J.L. BELL AND A.B. SIOMSON
  MODELS AND ULTRAPRODUCTS
  NORTH HOLLAND, 1974.

- R. DIACONESCU
  AXIOM OF CHOICE AND COMPLEMENTATION
  PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 51, 1975, 176-178.

- PETER FREYD
  ASPECTS OF TOPOI
  BULLETIN OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY, 7, 1972, 1-26.

- ROBERT GOLDBLATT
  TOPOI, THE CATEGORIAL ANALYSIS OF LOGIC
  NORTH HOLLAND, 1979.

- H. HERRLICH AND G.E. STRECKER
  CATEGORY THEORY
  ALLYN AND BACON, 1973.

- STEPHEN C. KLEENE
  INTRODUCCIÓN A LA METAMATEMÁTICA
  EDITORIAL TECNOS, 1974.

- SAUNDERS MACLANE
  CATEGORIES FOR THE WORKING MATEMATICIAN
  SPRINGER - VERLAG, 1971.

- H. RASIOWA AND R. SIKORSKI
  THE MATHEMATICS OF METAMATHEMATICS
  POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS, 1963.