U.N.A.M.

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONJUNTOS EXCEPCIONALES"

TESIS

Que para obtener el título de

MATEMATICO

presenta

EUGENIO GARNICA VIGIL

México, D.F. 1983

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCION

En este trabajo, se tratan algunos temas que pertenecen tanto a la teoría del potencial como a la teoría de la medida.

En el primer capítulo se introducen los conjuntos de Souslín. Su definición, aunque en apariencia abstracta, es la natural al querer estudiar la imagen de un conjunto A bajo una función f. Si $x \in A$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ es tal que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{C}} \alpha \supset A$, y $F_x := \{\alpha \in \mathcal{C} \mid x \in \mathcal{C}\}$, entonces $f(A)$ puede descomponerse como

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \bigcap_{\alpha \in F_x} f(\alpha)$$

También en el capítulo I se introducen los conjuntos analí ticos que en determinados casos coinciden con los conjuntos de Souslin y en todos los casos que nos van a interesar, estas clases contienen a los borelianos. Se sabe que imagenes continuas de analíticos son analíticos. Esto tiene clara importancia si conocemos el resultado que afirma que en espacios euclidianos las imagenes continuas de borelianos no siempre son borelianos.

En el capítulo I también se define la capacidad y los conjuntos capacitables. Se ve que la definición clásica de capacidad es un caso particular de la definición abstracta de capacidad dada por Meyer.

En el capítulo II se define la medida de Hausdorff y se estudian algunas de sus propiedades. Se definen otras funciones de conjuntos y todas ellas quedan relacionadas con la medida de Hausdorff por medio del corolario 1. En el teorema 2 se establece la existencia de una medida estrechamente vinculada con la medida de Hausdorff; este resultado es de gran importancia y se usará en el capítulo IV para estudiar la relación entre medida de Hausdorff y la capacidad newtoniana. Por último en el teorema 4 se da una condición suficiente para que un conjunto de Souslin contenga a un compacto con medida de Hausdorff positiva.

Ahora, en el tercer capítulo se define el potencial newtoniano y luego a partir de él, se define la capacidad newtoniana; este es en realidad el origen histórico del concepto de capacidad. En este capítulo se exponen el principio del máximo y el principio de continuidad para el potencial newtoniano y otras propiedades de este.

En el capítulo IV se dan nuevas expresiones para el potencial newtoniano tales como una integral de Lebesgue para otra medida (prop. 1) y como una integral de Lebesque - Stieljes (prop. 2, Lema 3). Los teoremas fundamentales de este capítulo son los que nos relacionan a la capacidad newtoniana con la medida de Hausdorff para ciertas h's. El teorema 1 nos dice que los conjuntos de Souslin con medida de Hausdorff positiva tienen necesariamente capacidad newtoniana positiva y en el teorema 2 se da una condición suficiente para que un conjunto acotado tenga capacidad newtoniana cero. Por último se estudian los ejemplos de Carleson: ciertos conjuntos de Cantor tienen capacidad newtoniana positiva y otros conjuntos de Cantor tienen capacidad newtoniana nula.

Los conjuntos excepcionales, entendidos como los que tienen capacidad newtoniana nula ó en su caso de medida de Hausdorff cero, son los que juegan en teoría del potencial el papel análogo a los conjuntos de medida cero en teoría de la medida. Así las propiedades que valen en un conjunto $\Omega - E$ y $C_K(E)=0$ ó $\Lambda_h(E)=0$, para alguna función-medida h, en muchas ocaciones se puede mostrar que valen en todo Ω. A esto se debe el gran interés por estudiar estos conjuntos.

No quisiera dar fin a esta pequeña introducción sin antes agradecer a la Dra. Mª Emilia Caballero por sus valiosas enseñanzas, por su estímulo y por la gran paciencia que tuvo para asesorarme en este trabajo.

E. G. V.

A mis padres.

I CONJUNTOS DE SOUSLIN.

1.- Considérese un conjunto arbitrario X y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Defínanse los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{A} := \bigcup_{p=1}^{\infty} \{s_p : \{1,2,\dots,p\} \longrightarrow \mathbb{N}\}$$
$$S := \{s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$$
$$\Phi := \{\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{C}\}$$

Ya que:
$\bigcup_{p=1}^{\infty} \{s_p : \{1,2,\dots,p\} \longrightarrow \mathbb{N}\} = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \mid p = 1,2,\dots \; n_i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{s|\bar{p} \mid s \in S$ y $\bar{p} = \{1,2,\dots,p\}\}$

son tres posibles notaciones para $\mathbb{A}$, las usaremos indistintamente.

La operación de Souslin consiste en hacer corresponder a una familia de $\mathcal{C}$:

$\{\varphi(s|\bar{p})\}_{p \in \mathbb{N},\, s \in S}$ (con φ fija en Φ)

el conjunto $\bigcup_{s \in S} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \varphi(s|\bar{p}) = \bigcup_{s \in S} A_\varphi(s)$

donde $A_\varphi(s) = \varphi(m_1) \cap \varphi(m_1, m_2) \cap \dots \cap \varphi(m_1, m_2, \dots, m_p) \cap \dots$ y

$s = (m_1, m_2, \dots, m_p, \dots)$.

Proposición 1.- Podemos suponer que $\varphi(s|\bar{p}) \supset \varphi(s|\overline{p+1})$ para toda $s \in S$ y toda $p \in \mathbb{N}$, siempre que $\mathcal{C}$ sea estable bajo intersecciones finitas (i,e $F_1, F_2, \dots, F_m \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} F_i \in \mathcal{C}$):

Demostración. Sea $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ y se define $\varphi': \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ a partir de la φ como $\varphi'(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \varphi(n_1) \cap \varphi(n_1, n_2) \cap \ldots \cap \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ para toda $s \in S$ de la forma $s = (n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots)$ y $p \in \mathbb{N}$. Es claro que $A_\varphi(s) = A_{\varphi'}(s)$ para toda $s \in S$. De aquí resulta

$$\bigcup_{s \in S} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \varphi(s|\bar{p}) = \bigcup_{t \in S} \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \varphi'(t|\bar{q}) \qquad \blacksquare$$

Definición 1.- Una "σ-álgebra $\mathcal{G}$ en X" es una clase de subconjuntos de X tal que

i) $\emptyset \in \mathcal{G}$

ii) Si $F \in \mathcal{G}$, $F^c = X - F \in \mathcal{G}$

iii) Si $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathcal{G}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{G}$.

Resulta que $\mathcal{G}$ con las propiedades i), ii) y iii) satisface una cuarta propiedad:

iv) Si $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathcal{G}$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{G}$

e inversamente una clase $\mathcal{G}$ que satisfaga i), ii) y iv) es una σ-álgebra en X.

Un ejemplo de una σ-álgebra en X es $\mathcal{P}(X)$.

Proposición 2.- Con cualquier familia no vacía $\mathcal{G}$ de σ-álgebras en X se tiene que $\mathcal{L} := \bigcap_{g \in \mathcal{G}} g$ es una σ-álgebra en X.

Demostración :

i) $\emptyset \in g \quad \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{L}$

ii) $F \in \mathcal{L} \Rightarrow F \in g \quad \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow F^c \in g \quad \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow F^c \in \mathcal{L}$

iii) $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathcal{C} \Rightarrow F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in g \quad \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in g \quad \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{C}$ ■

Proposición 3.- Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, existe "la mínima" σ-álgebra en X que contiene a $\mathcal{E}$ (mínima en el sentido que ella esta contenida en cualquier σ-álgebra en X que contiene a $\mathcal{E}$).

Demostración. Tomando $\mathcal{G}_0$ como la familia de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{E}$, se define $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{g \in \mathcal{G}_0} g$. Como $\mathcal{G}_0$ es no vacía, pues $\mathcal{P}(X)$ es elemento de $\mathcal{G}_0$, $\sigma(\mathcal{E})$ es una σ-álgebra en X. Además $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$, y por como está definida $\sigma(\mathcal{E})$, $\sigma(\mathcal{E})$ es la mínima ■

A $\sigma(\mathcal{E})$ también se le llama la σ-álgebra en X generada por $\mathcal{E}$.

En el caso que $\mathcal{E}$ consista de los subconjuntos de X (un conjunto en $\mathbb{R}^d$) que son abiertos ó cerrados, $\sigma(\mathcal{E})$ se llama σ-álgebra de Borel en X.

Definición 2.- Sea $S(\mathcal{E})$ la clase de subconjuntos de X que se obtienen mediante la operación de Souslin a la clase $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ dada.

Teorema 1.- $\mathcal{E} \subset S(\mathcal{E})$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{E}$, defino $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ como $\varphi(s|\bar{p}) := F$ para toda $s \in S$ y $p \in \mathbb{N}$. Así $\bigcup_{s \in S} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \varphi(s|\bar{p}) = F$ ■

Teorema 2.- $S(\mathcal{C})$ es estable bajo uniones e intersecciones numerables (i,e $S(\mathcal{C})$ satisface las propiedades iii) y iv) de una σ-álgebra en X), siempre que $X \subset \mathcal{C}$.

Demostración. Sean $a_{\varphi_1}, a_{\varphi_2}, \ldots, a_{\varphi_n}, \ldots \in S(\mathcal{C})$ con $a_{\varphi_i} = \bigcup_{s \in S} A_{\varphi_i}(s)$ y $\varphi_i \in \Phi$.

Definiendo $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$ como:

$$\varphi(s|_{\{1,2,\ldots,p\}}) := \varphi_{s(1)}(s|_{\{2,3,\ldots,p\}}) \qquad \forall s \in S, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$y \qquad \varphi(s|_{\{1\}}) := X$$

se tiene que $\varphi \in \Phi$ y $a_\varphi \in S(\mathcal{C})$.

Dado $s \in S$, $s = (m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots)$, se tiene:

$$A_\varphi(s) = X \cap \varphi_{m_1}(m_2) \cap \varphi_{m_1}(m_2, m_3) \cap \ldots = X \cap A_{\varphi_{m_1}}(s') = A_{\varphi_{m_1}}(s')$$

con $s' = (m_2, m_3, \ldots, m_p, \ldots)$. Pero $a_{\varphi_{m_1}} \supset A_{\varphi_{m_1}}(s') = A_\varphi(s)$ implica que dado $s \in S$, existe $k \in \mathbb{N}$, $k := s|_{\{1\}}$, tal que $A_\varphi(s) \subset a_{\varphi_k}$ lo cual implica que:

$$a_\varphi = \bigcup_{s \in S} A_\varphi(s) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k}$$

Veamos que $a_\varphi \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k}$. Para ello probaremos que $a_\varphi \supset a_{\varphi_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Tómense $k \in \mathbb{N}$ y $s \in S$, suponiendo $s = (n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots)$, entonces:

$$A_{\varphi_k}(s) = \varphi_k(n_1)\cap\varphi_k(n_1,n_2)\cap\ldots = \mathbb{X}\cap\varphi(k,n_1)\cap\varphi(k,n_1,n_2)\cap\ldots = A_\varphi(s')$$

con $s'=(k,n_1,n_2,\ldots,n_p,\ldots)$. Pero como $a_\varphi\supset A_\varphi(s') = A_{\varphi_k}(s)$, hemos mostrado que para toda $s\in S$ y para toda $k\in\mathbb{N}$ se tiene $A_{\varphi_k}(s)\subset a_\varphi$.

Entonces $a_{\varphi_k} = \bigcup_{s\in S} A_{\varphi_k}(s) \subset a_\varphi$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k} = a_\varphi$ y luego:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k} \in S(\mathcal{B})$$

Ahora con la biyección $\theta: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ ideada por Cantor:

$$\theta(1)=(1,1),\ \theta(2)=(1,2),\ \theta(3)=(2,1),\ \theta(4)=(3,1),\ \theta(5)=(2,2),\ \ldots$$

definamos $g: \mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{B}$.

Sea $s\in S$, $s=(m_1,m_2,\ldots,m_p,\ldots)$. Acomódense los m_i de s en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con ayuda de θ (i,e coloquense m_i en el lugar $\theta(i)$-ésimo ó equivalentemente, remplacense los subíndices como $m_{\theta(i)} := m_i$).

Se define:

$$g(m_1,m_2,\ldots,m_p) := \varphi_{P_1(\theta(p))}(m_{(P_1(\theta(p)),1)}, m_{(P_1(\theta(p)),2)},\ldots, m_{\theta(p)})$$

donde $P_1:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ es la proyección sobre el primer factor y $p\in\mathbb{N}$. Así $g\in\Phi$ y $a_g\in S(\mathcal{B})$.

Dado $s \in S$, $s = (n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots)$, tenemos elementos en S $s_k := (n_{(k,1)}, n_{(k,2)}, \ldots, n_{(k,p)}, \ldots)$ tal que $n_{\sigma(i)} := n_i$ por lo que:

$$A_g(s) = A_{\varphi_1}(s_1) \cap A_{\varphi_2}(s_2) \cap \ldots \subset A_{\varphi_t}(s_t) \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

y puesto que $A_{\varphi_t}(s_t) \subset a_{\varphi_t}$ para toda $t \in \mathbb{N}$, $A_g(s) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k}$. Como la s fué arbitraria:

$$a_g = \bigcup_{s \in S} A_g(s) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k}$$

Tómese $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k}$, esto implica que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists s_k \in S$, $s_k = (m_{(k,1)}, m_{(k,2)}, \ldots, m_{(k,p)}, \ldots)$, tal que $x \in A_{\varphi_k}(s_k)$.

Con estos elementos s_k definimos uno, $s := (m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots)$ con $m_j := m_{\theta(j)}$. Luego:

$$x \in A_{\varphi_1}(s_1) \cap A_{\varphi_2}(s_2) \cap \ldots = A_g(s) \subset a_g$$

y por lo tanto $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k} \subset a_g$. Entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k} = a_g$ y:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} a_{\varphi_k} \in S(\mathcal{G}) \qquad \blacksquare$$

Un lema importante es el siguiente:

Lema 1.- Si X y Y son conjuntos y F es cualquier función sobre

$\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, entonces :

$$\bigcap_{x\in\mathbb{X}}\bigcup_{y\in\mathbb{Y}} F(x,y) = \bigcup_{f\in\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}}\bigcap_{x\in\mathbb{X}} F(x,f(x))$$

Demostración. Sea $p\in\bigcap_{x\in\mathbb{X}}\bigcup_{y\in\mathbb{Y}} F(x,y)$. Por esto, $\forall x\in\mathbb{X}$ $\exists\, y_x\in\mathbb{Y}$ tal que $p\in F(x,y_x)$. Usando el axioma de elección existe $f:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{Y}$ definida por $f(x)=y_x$. Esto implica que $p\in\bigcap_{x\in\mathbb{X}} F(x,f(x))\subset\bigcup_{f\in\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}}\bigcap_{x\in\mathbb{X}} F(x,f(x))$ y por lo tanto :

$$\bigcap_{x\in\mathbb{X}}\bigcup_{y\in\mathbb{Y}} F(x,y) \subset \bigcup_{f\in\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}}\bigcap_{x\in\mathbb{X}} F(x,f(x))$$

Suponiendo que $p\in\bigcup_{f\in\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}}\bigcap_{x\in\mathbb{X}} F(x,f(x))$, se sigue que $p\in F(x,f(x))$ para alguna $f\in\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$ y toda $x\in\mathbb{X}$. De aquí, se tiene que dado $x\in\mathbb{X}$, existe $y\in\mathbb{Y}$, $y:=f(x)$, tal que $F(x,y)$. Así pues $p\in\bigcap_{x\in\mathbb{X}}\bigcup_{y\in\mathbb{Y}} F(x,y)$, y luego la contención que falta :

$$\bigcap_{x\in\mathbb{X}}\bigcup_{y\in\mathbb{Y}} F(x,y) \supset \bigcup_{f\in\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}}\bigcap_{x\in\mathbb{X}} F(x,f(x)) \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.– $S(\mathcal{C})$ es estable bajo la operación de Souslin (i,e $S(S(\mathcal{C}))=S(\mathcal{C})$), siempre que $\mathcal{C}$ sea estable bajo intersecciones finitas.

Demostración. Por el teorema 1 $S(\mathcal{C})\subset S(S(\mathcal{C}))$.

Para demostrar la otra contención, tómese $A\in S(S(\mathcal{C}))$. Entonces existen $f:\mathcal{N}\longrightarrow S(\mathcal{C})$ y para cada $s\in S$ y $p\in\mathbb{N}$ $g(s|p;\_):\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{C}$ tales que :

$$A = \bigcup_{s\in S}\bigcap_{p\in\mathbb{N}} f(s|\bar{p}) \qquad y \qquad f(s|\bar{p}) = \bigcup_{t\in S}\bigcap_{q\in\mathbb{N}} g(s|\bar{p}\,;t|\bar{q})$$

Con el lema 1 se siguen las igualdades:

$$A = \bigcup_{s\in S}\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{t\in S}\bigcap_{q\in\mathbb{N}} g(s|\bar{p}\,;t|\bar{q}) = \bigcup_{s\in S}\bigcup_{\xi\in S^{\mathbb{N}}}\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcap_{q\in\mathbb{N}} g(s|\bar{p}\,;\xi(p)|\bar{q})$$

Ya que $\mathcal{C}$ es estable bajo intersecciones finitas, por la proposición 1, supongamos $g(s|\bar{p}\,;t|\bar{q}) \supset g(s|\bar{p}\,;t|\overline{q+1})$.

Sea $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ la sucesión definida con ayuda de θ y P_1 como $c_n = P_1(\theta(n))$. Por eso:

$$c_1, c_2\ c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, \ldots = 1,1,2,3,2,1,1,2,3,\ldots$$

Por lo que $c_n \leq n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\{i \mid c_i = n\}$ es infinito.

Ordenando $\{i \mid c_i = n\}$ resulta el conjunto $\{N_j(n)\}$ tal que $N_1(n) < N_2(n) < \ldots < N_j(n) < N_{j+1}(n) < \ldots$ y $c_{N_j(n)} = n$ para toda $i\in\mathbb{N}$.

Es claro que $n\in\{i \mid c_i = c_n\}$. Entonces sea K_n el único elemento de $\{N_j(c_n)\}$ tal que $N_{K_n}(c_n) = n$.

Si i es tal que $N_i(c_n) \leq n$ entonces $N_i(c_n) \leq N_{K_n}(c_n)$. Por lo que $i \leq K_n$. Así K_n es la j más grande tal que $N_j(c_n) \leq n$.

Otras consecuencias son:

Si $m \geq n$ y $c_m = c_n$ entonces $K_m \geq K_n$ y $N_{K_m}(c_m) \geq N_{K_n}(c_n)$.

$\forall\, t\in\mathbb{N}$, $N_{K_t}(c_t) \leq N_{K_t}(t)$.

Sean P_1 y θ como antes, $P_2 : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la proyección sobre el segundo factor.

Dado $s \in S$, $s = (x_1, x_2, \dots, x_k; \dots)$, definimos s' y s'' como $s' := (x'_1, x'_2, \dots, x'_k, \dots)$ y $s'' := (x''_1, x''_2, \dots, x''_p, \dots)$ donde $x'_k := x_{P_1(\theta(k))}$ y $x''_k := x_{P_2(\theta(k))}$.

Defínase $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{G}$ como sigue:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := g(x'_1, x'_2, \dots, x'_{c_n}; x''_{N_1(c_n)}, x''_{N_2(c_n)}, \dots, x''_{N_{k_n}(c_n)})$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a > n$ y $c_a = c_n$ y por las consecuencias para $N_j(n)$ se tienen las desigualdades $N_{k_{c_n}}(c_n) \leq N_{k_n}(c_n) \leq N_{k_a}(c_n) = N_{k_a}(c_a)$. Por lo tanto:

$$g(x'_1, \dots, x'_{c_n}; x''_{N_1(c_n)}, \dots, x''_{N_{k_{c_n}}(c_n)}) \supset g(x'_1, \dots, x'_{c_a}; x''_{N_1(c_a)}, \dots, x''_{N_{k_a}(c_a)})$$

Esto quiere decir que si $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $m = c_n$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a > n$ y $c_a = c_n$, y $h(s|\bar{a}) \subset g(s'|\bar{m}; x''_{N_1(m)}, \dots, x''_{N_{k_m}(m)})$.
Se sigue:

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ c_n = m}} g(s'|\bar{m}; x''_{N_1(m)}, \dots, x''_{N_{k_m}(m)}) \supset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} h(s|\bar{n})$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ c_n=m}} g(s'|\bar{m}; x''_{N_1(m)}, \dots, x''_{N_{k_m}(m)}) \subset f(s'|\bar{m})$, luego $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} h(s|\bar{n}) \subset f(s'|\bar{m})$ y de aquí $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} h(s|\bar{n}) \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} f(s'|\bar{m})$. Pero como la s fué arbitraria:

$$\bigcup_{s\in S} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} h(s|\bar{n}) \subset \bigcup_{s'\in S} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} f(s'|\bar{m}) = A$$

Por otro lado, para toda $b \in S$, $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ y $\xi \in S^{\mathbb{N}}$ sea $x_K := \theta(b_K, \xi_i(c_K))$ donde θ es como antes, i es tal que $N_i(c_K)=K$ y $\xi(c_K) = (\xi_1(c_K), \xi_2(c_K), \ldots, \xi_p(c_K), \ldots)$. Luego sea $s := (x_1, x_2, \ldots, x_K, \ldots)$, así s' y s'' resultan estar dadas por $x'_K := b_K$ y $x''_K := \xi_i(c_K)$.

Por lo que $h(s|\bar{m}) = g(b_1, \ldots, b_{c_m}; \xi_1(c_m), \ldots, \xi_{K_m}(c_m))$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, y sea $a_0 = c_m$ y $b_0 = K_m$. Con estas a_0 y b_0 $g(s|\bar{a}_0; \xi(a_0)|\bar{b}_0) = h(s|\bar{m})$, lo cual implica:

$$\bigcap_{b_0 \in \mathbb{N}} g(s|\bar{a}_0; \xi(a_0)|\bar{b}_0) \subset h(s|\bar{m})$$

y en seguida:

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(s|\bar{m}; \xi(m)|\bar{n}) \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} h(s|\bar{m})$$

Como s y ξ fueron arbitrarias:

$$A = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{\xi \in S^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(s|\bar{m}; \xi(m)|\bar{n}) \subset \bigcup_{s \in S} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} h(s|\bar{m})$$

Por lo tanto $A = \bigcup_{s \in S} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} h(s|\bar{m})$ y:

$$A \in S(\mathscr{C}) \quad \blacksquare$$

Corolario 1.- $S(\mathscr{C})$ es estable bajo uniones e intersecciones numerables si $\mathscr{C}$ es estable bajo intersecciones finitas.

Demostración. Analogamente como se demuestra la existencia de $\sigma(\mathscr{C})$, una σ-álgebra en X, se puede demostrar la de $\sigma'(\mathscr{C})$, una familia de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ con las propiedades

(i) $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j \in \sigma'(\mathcal{C})$

(ii) $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j \in \sigma'(\mathcal{C})$

que además como $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima que contiene a $\mathcal{C}$.

No es difícil ver que $\sigma'(\mathcal{C}) \subset S(\mathcal{C})$ definiendo para cada $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathcal{C}$ las funciones $f, g \in \Phi$ como :

$$g(s|\bar{p}) = F_{s(1)} \quad y \quad f(t|\bar{q}) = F_q \qquad \forall s,t\in S, \forall p,q\in\mathbb{N}$$

y verificando :

$$\bigcup_{s\in S}\bigcap_{p\in\mathbb{N}} g(s|\bar{p}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \qquad y \quad \bigcup_{t\in S}\bigcap_{q\in\mathbb{N}} f(t|\bar{q}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$$

Entonces $S(\mathcal{C}) \subset \sigma'(S(\mathcal{C})) \subset S(S(\mathcal{C}))$. Pero por el teorema 3 :

$$S(\mathcal{C}) = \sigma'(S(\mathcal{C})) = S(S(\mathcal{C})) \qquad \blacksquare$$

Comparense el teorema 2 y el corolario 1.

Podemos concluir un segundo corolario :

Corolario 2.- $\mathcal{C}$ es estable bajo intersecciones finitas ó $\mathfrak{X}\in\mathcal{C}$ implica

$$S(\mathscr{C}) = \sigma'(S(\mathscr{C}))$$

Demostración. ■

Teorema 4.- Si $F \in \mathscr{C} \Rightarrow F^c \in S(\mathscr{C})$ entonces $\sigma(\mathscr{C}) \subset S(\mathscr{C})$.

Demostración. Construyase el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{L} := \{F \in S(\mathscr{C}) \mid F^c \in S(\mathscr{C})\}$$

Es claro que $\mathscr{C} \subset \mathfrak{L} \subset S(\mathscr{C})$. Pero además $\mathfrak{L}$ es una σ-álgebra en X pues:

i) $\phi = F \cap F^c$, $X = F \cup F^c \in S(\mathscr{C}) \Rightarrow \phi \in \mathfrak{L}$

ii) $F \in \mathfrak{L} \Rightarrow F, F^c \in S(\mathscr{C}) \Rightarrow (F^c)^c, F^c \in S(\mathscr{C}) \Rightarrow F^c \in \mathfrak{L}$

iii) $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in \mathfrak{L} \Rightarrow F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in S(\mathscr{C})$ y $F_1^c, F_2^c, \ldots, F_n^c, \ldots \in S(\mathscr{C}) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j^c \in S(\mathscr{C}) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ y $(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j)^c \in S(\mathscr{C}) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathfrak{L}$ ■

Un ejemplo donde sucede la hipótesis del teorema 4 es tomando a X como un conjunto acotado de $\mathbb{R}^d$. A $\mathscr{C}$ como la familia de cerrados de $\mathbb{R}^d$ que son subconjuntos de X.

Ya que los abiertos son uniones numerables de cerrados, Pasa que $S(\mathscr{C})$ contiene tanto a los abiertos como a los cerrados en X.

Por el teorema 4, $S(\mathscr{C})$ contiene a la σ-álgebra de Borel.

Souslin introdujo su operación sobre una familia $\mathcal{E}$ con el propósito de mostrar que en espacios Euclidianos la imagen continua de un conjunto de Borel es no necesariamente de Borel.

De la misma manera esta motivada la definición de "conjuntos analíticos" cuando uno esta interesado en trabajar sobre imágenes continuas de borelianos.

La definición de conjunto analítico que usaremos es debido a Choquet.

Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y sean los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{F}_\sigma := \{A \mid A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ con } B_n \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{F}_\delta := \{A \mid A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \text{ con } B_n \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

y luego:

$$\mathcal{F}_{\sigma_\delta} := (\mathcal{F}_\sigma)_\delta$$

Ahora consideremos $\mathcal{K} := \{K \subset X \mid K \text{ es compacto}\}$ y $\mathcal{K}_{\sigma_\delta}$.

Definición 3.- Dado $E \in \mathcal{K}$ y dada $f: E \longrightarrow X$ continua, $f(E)$ se llama "conjunto analítico".

(i,e los conjuntos analíticos son las imágenes continuas de elementos de $\mathcal{K}_{\sigma_\delta}$).

Sea $\mathcal{A}(X) := \{A \subset X \mid A \text{ es analítico}\}$.

Se sabe lo siguiente*:

a) Si $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ acotado y $\mathscr{C} = \{F \subset \mathbb{X} \mid F$ es cerrado en $\mathbb{R}^d\}$ entonces $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}) \subset S(\mathscr{C}) = \mathscr{A}(\mathbb{X})$.

b) Para un espacio métrico (en general) $\mathbb{X}$, y $\mathscr{C} = \{F \subset \mathbb{X} \mid F$ es cerrado en $\mathbb{X}\}$, se tiene:

b₁) $\sigma(\mathbb{X}) \subset S(\mathscr{C})$

b₂) Si $\mathbb{X}$ esta en $\mathscr{K}_\sigma$, $S(\mathscr{C}) = S(\mathscr{K}) = \mathscr{A}(\mathbb{X})$.

b₃) Si $\mathbb{X}$ es completo y separable, $S(\mathscr{C}) = \mathscr{A}(\mathbb{X})$.

Nosotros nos restringiremos desde ahora al caso $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ acotado y $\mathscr{C} = \{F \subset \mathbb{X} \mid F$ es cerrado en $\mathbb{R}^d\}$. En este caso se cumple que:

$$\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}) \subset S(\mathscr{C}) = \sigma'(\mathscr{C}) = S(S(\mathscr{C})) = \mathscr{A}(\mathbb{X})$$

Cuando no se haga tal restricción se dirá.

Lema 2.- Supongamos que a_ζ es un conjunto de **Souslin**

$$a_\zeta = \bigcup_{s \in S} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \zeta(s|\bar{p}) \qquad (\zeta \in \Phi)$$

Sean $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos, y los conjuntos:

*[1]

$$F_p := \bigcup_{\substack{n_i \leq h_i \\ i \leq p}} f(n_1) \cap f(n_1, n_2) \cap \ldots \cap f(n_1, n_2, \ldots, n_p) \quad y \quad F := \bigcap_{p \in N} F_p$$

Entonces F es un subconjunto cerrado de ∂_f.

Demostración. Para toda p existen solo un número finito de $(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathcal{A}$ tal que $n_i \leq h_i$. Por lo tanto F_p es cerrado y luego F también lo es.

Para probar que $F \subset \partial_f$, tómese $x \in F = \bigcap_{p \in N} F_p$. Esto implica que $x \in F_p$ para toda $p \in \mathbb{N}$ y por lo tanto existen naturales n_{ip} $i = 1, 2, \ldots, p$ tal que $n_{ip} \leq h_i$ y:

$$x \in f(n_{1p}) \cap f(n_{1p}, n_{2p}) \cap \ldots \cap f(n_{1p}, n_{2p}, \ldots, n_{pp}) \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

Se han formado, entonces, sucesiones $\{n_{ip}\}_{p \in \mathbb{N}}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. $\{n_{ip}\}_{p \in \mathbb{N}}$ esta acotada por h_i. De aquí $\{n_{1p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Pero como $\{n_{1p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ esta sobre un discreto, $\{n_{1p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión donde todos los terminos son algún $m_1 := n_{1p_0}$ para alguna $p_0 \in \mathbb{N}$.

Supongamos definida m_k.

Considérese la sucesión $\{n_{k+1,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ y la subsucesión $\{n_{k,p_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{n_{k,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ tal que $m_k = n_{k,p_j}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $\{n_{k+1,p_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{n_{k+1,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ Y esta subsucesión por estar acotada por h_{k+1} y estar definida sobre un discreto tiene a su vez una subsucesión donde todos los terminos son un m_{k+1} de $\{n_{k+1,p_j}\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \{n_{k+1,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$.

Las m_k definidas tienen la propiedad :

$$x \in f(m_1) \cap f(m_1,m_2) \cap \ldots \cap f(m_1,m_2,\ldots,m_p) \cap \ldots$$

ya que para toda $p \in \mathbb{N}$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_j = n_{j p_{i_0}}$ $j = 1,2,\ldots,p$. Por lo que $x \in A_f(s) \subset \partial_f$ donde el elemento s es $s = (m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots)$ ∎

2.- Capacidades y conjuntos capacitables.

Sean $\mathcal{L}$ la familia de conjuntos compactos F de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función de conjuntos con la propiedad $F_1 \subset F_2 \Rightarrow f(F_1) \leq f(F_2)$ $F_1, F_2 \in \mathcal{L}$.

Podemos extender f a $\overline{\mathcal{L}}$, la familia de conjuntos acotados D de $\mathbb{R}^d$, de la siguiente manera:

$$f(D) = \sup_{F \subset D} f(F) \quad , F \text{ compacto} \qquad \ldots (1)$$

Como f es creciente en $\mathcal{L}$ resulta que también lo es en $\overline{\mathcal{L}}$:

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow f(E_1) \leq f(E_2) \quad E_1, E_2 \in \overline{\mathcal{L}} \qquad \ldots (2)$$

Luego se define $f^* : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por medio de f:

$$f^*(D) = \inf_{O \supset D} f(O) \qquad O \text{ abierto y acotado}$$

De nuevo f^* resulta ser creciente. A f^* se le pide la siguiente propiedad :

$$E_n \nearrow E \Rightarrow f^*(E) = \lim_{n\to\infty} f^*(E_n) \qquad E_n, E \in \overline{\mathcal{L}} \qquad \ldots (3)$$

donde $E_n \nearrow E$ significa $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$

Definición 4.- Una función de conjuntos $f : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ con las propiedades (1), (2) y (3) se llama "capacidad".

Un conjunto E se llama "capacitable" si $f(E) = f^*(E)$.

Estas definiciones de capacidad y capacitable son las clásicas. Sinembargo daremos otras importantes definiciones de capacidad y capacitable; las usadas por **André Meyer** :

Definición 5.- Sea D un conjunto, $\mathcal{E}(D) \subset \mathcal{P}(D)$ estable bajo uniones e intersecciones finitas.

Una "capacidad" sobre D es una función $I : \mathcal{P}(D) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades

a) $A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B) \qquad A, B \in \mathcal{P}(D)$

b) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Rightarrow I(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sup_{j\in\mathbb{N}} I(A_j)$, $A_j \in \mathcal{P}(D)$

c) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \Rightarrow I(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \inf_{j\in\mathbb{N}} I(A_j)$, $A_j \in \mathcal{E}(D)$

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(D)$ se llama "capacitable" si $I(A) = \sup\{I(B) \mid B \in \mathcal{E}(D)_\delta$ y $B \subset A\}$.

Sucede que bajo condiciones especiales la definición 4 es un caso particular de la definición 5:

Proposición 4.- Tomando a D como un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}(D)=\{F\subset D \mid F \text{ es compacto}\}$ y a f^* por I, y suponiendo que los compactos son capacitables en el sentido de la definición 4, se tiene que coinciden los conceptos de capacitable y f^* es una capacidad en el sentido de la definición 5.

Demostración. Primero lo de capacitable:

$$A \text{ es capacitable (Def. 4)} \iff f^*(A)=\sup_{B\in\mathcal{C}(D) \text{ y } B\subset A} f(B)$$

$$\iff f^*(A)=\sup_{B\in\mathcal{C}(D) \text{ y } B\subset A} f^*(B) \iff I(A)=\sup_{B\in\mathcal{C}(D) \text{ y } B\subset A} I(B) \iff$$

$$I(A)=\sup_{B\in\mathcal{C}(D)_\delta \text{ y } B\subset A} I(B) \iff A \text{ es capacitable (Def. 5)}$$

pues en este caso $\mathcal{C}(D)=\mathcal{C}(D)_\delta$ y por ser los compactos B capacitables $(f(B)=f^*(B))$.

Es directo que f^* satisface a y b de la definición 5 por ser creciente y satisfacer la propiedad (3) de la definición 4.

Para ver que f^* cumple la propiedad c, sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{C}(D)$ con $A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_n\supset\ldots$ y $K:=\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ (resulta $K\in\mathcal{C}(D)$).

Sean $\mathcal{A}_n=\{O_n \mid O_n \text{ abierto y } O_n\supset A_n\}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}=\{O\mid O \text{ abierto y } O\supset K\}$.

Claramente $\mathcal{A}_n\subset \mathcal{A}_{n+1}\subset \mathcal{A}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, y luego $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n\subset\mathcal{A}$.

Probaremos que $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n\supset\mathcal{A}$. Para esto tómese $O\in\mathcal{A}$. El objetivo es demostrar que existe N_0 tal que para toda $n>N_0$, $O\in\mathcal{A}_n$.

Supongamos por un momento que para cada N existe n_N tal que $O\notin\mathcal{A}_{n_N}$, eso es, $O\not\supset A_{n_N}$.

Se construye $N_1, N_2, \dots, N_p, \dots$ tal que $O\not\supset A_{N_p}$

Para toda $j\in\mathbb{N}$ existe $P_j\in A_{N_j}-O$. Así $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}\subset A_{N_1}$ y como A_{N_1} es compacto existe una subsucesión $\{P_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente:

$$\lim_{i\to\infty} P_{j_i}=P$$

El elemento P esta en A_{j_i} $\forall i\in\mathbb{N}$, luego $P\in\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{j_i}$. Pero $P_{j_i}\in O^c$ para toda j_i, esto implica que $P\in O^c$ y finalmente $P\notin K$. Esto es una contradicción porque $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{j_i}=K$.

$$\beta:=\lim_{n\to\infty}\Big[\inf_{O_n\in\mathcal{A}_n} f(O)\Big]=\lim_{n\to\infty} f^*(A_n)=\lim_{n\to\infty} f(A_n)$$

pero además con $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n=\mathcal{A}$ se sigue que:

$$\alpha:=\inf_{O\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n} f(O)=\inf_{O\in\mathcal{A}} f(O)=f^*(K)=f(K)$$

El siguiente objetivo es demostrar que $\alpha=\beta$.

Es claro que $f(A_n)\geq f(K)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, por lo que $\alpha\leq\beta$.

Sean $b_n:=\inf\limits_{O\in\mathcal{A}_n} f(O)$ entonces $\beta=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Supongamos por un instante que $\alpha<\beta$. Esto implica la existencia de $O\in\mathcal{A}$ tal que $\alpha\leq f(O)<\beta$. Y puesto que $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $O\in\mathcal{A}_n$ y $b_n\geq\beta$ $\forall n>N$ lo cual implica que $b_n\leq f(O)$ y esto es una contradicción. Por lo tanto:

$$f^*\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\inf_{i\in\mathbb{N}} f^*(A_i) \qquad \blacksquare$$

Nosotros usaremos la definición 4.

No siempre los compactos son capacitables, pero en el caso que lo sean, los conjuntos de Souslin también lo son:

Proposición 5.- Si los conjuntos compactos son capacitables entonces los conjuntos de Souslin lo son.

Demostración. Sea $a_f=\bigcup\limits_{s\in S}A_f(s)$, con $f\in\Phi$, un conjunto de Souslin.

Fíjese $\varepsilon>0$. Sea $S_1^{(h)}=\bigcup\limits_{\substack{s\in S\\ s(1)\leq h}}A_f(s)$, por lo que $S_1^{(h)}\nearrow a_f$ cuando $h\to\infty$

Por la propiedad (3) existe h_1 tal que:

$$f^*(S_1^{(h)})\geq f^*(a_f)-\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } h\geq h_1$$

Se define $S_1 := S_1^{(h_1)}$. Supongamos definidos $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ para ciertas $h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}$.

Sea $S_p^{(h)} := \bigcup_{\substack{s \in S \\ s(i) \leq h_i,\ i<p \\ s(p) \leq h}} A_f(s)$. Esto lleva otra vez a que $S_p^{(h)} \nearrow S_{p-1}$ cuando $h \to \infty$.

Además dado $\varepsilon 2^{-p} > 0$ existe h_p tal que

$$f^*(S_p^{(h)}) \geq f^*(S_{p-1}) - \varepsilon \cdot 2^{-p} \qquad \text{para } h \geq h_p$$

Definiendo $S_p := S_p^{(h)}$ se tiene:

$$f^*(S_p) \geq f^*(S_{p-1}) - \varepsilon \cdot 2^{-p} \geq f^*(a_f) - \left(\sum_{i=1}^{p} 2^{-i}\right) \cdot \varepsilon \geq f^*(a_f) - \varepsilon$$

ya que $\left(\sum_{i=1}^{p} 2^{-i}\right) \leq 1$ para toda $p \in \mathbb{N}$.

Con la sucesión $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ construimos F_p y luego F del lema 2. Se tiene que $S_p \subset F_p$ $\forall p \in \mathbb{N}$ y porque f^* es creciente, $f^*(S_p) \leq f^*(F_p)$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Por consiguiente $f^*(F_p) \geq f^*(a_f) - \varepsilon$.

Dado $O \supset F$ abierto, implica que existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $O \supset F_p$ $\forall p \geq p_0$. Ya que $f^*(O) \geq f^*(F_p)$ $\forall p \geq p_0$, $f^*(O) \geq f^*(a_f) - \varepsilon$. Luego:

$$f^*(F) = \inf_{O \supset F} f^*(O) \geq f^*(a_f) - \varepsilon$$

Pero F es compacto por el lema 2, por lo tanto $f^*(F) = f(F)$. Así $f(F) \geq f^*(a_f) - \varepsilon$. Por el mismo lema 2, $F \subset a_f$, esto implica $f(F) \leq f(a_f)$ y como consecuencia $f(a_f) \geq f^*(a_f) - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

Se sigue la desigualdad $f(a_f) \geq f^*(a_f)$. Y como siempre se cumple que $f(a_f) \leq f^*(a_f)$, llegamos a que:

$$f(a_f) = f^*(a_f) \qquad \blacksquare$$

Con la función $g: \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$:

$$g(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ no tiene puntos interiores} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se satisface (1), (2) y (3). Sinembargo no todos los compactos son capacitables. Por ejemplo para $\{x\}$ se tienen dos valores :

$$g(\{x\}) = 0 \quad \text{mientras que} \quad g^*(\{x\}) = 1 .$$

II MEDIDA DE HAUSDORFF

1.- Sea $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua

Definición 1.- h se llama "función - medida" si cumple

i) $h(0) = 0$

ii) $r_1 < r_2 \Rightarrow h(r_1) < h(r_2) \qquad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$

h sera una función - medida en todo el capítulo.

Para toda $\rho > 0$ sea $\Lambda_h^{(\rho)} : \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ definida por:

$$\Lambda_h^{(\rho)}(E) = \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \mid \bigcup_{\nu=1}^{\infty} S r_\nu \supset E \text{ y } r_\nu \leq \rho \right\}$$

donde Sr_ν es una esfera de radio $r_\nu \leq 1$ (no importa si Sr_ν es abierta ó cerrada). Luego con estas $\Lambda_h^{(\rho)}$ se define la función $\Lambda_h : \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$:

$$\Lambda_h(E) := \lim_{\rho \to 0} \Lambda_h^{(\rho)}$$

Si $\rho_1 < \rho_2$ entonces $\Lambda_h^{(\rho_2)} \leq \Lambda_h^{(\rho_1)}$, por lo que $\Lambda_h(E)$ existe.

Definición 2.- $\Lambda_h : \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ se llama "la medida de Hausdorff con respecto a h".

Afirmación 1.- Λ_h es una medida exterior de Carathéodory

Demostración.- $\Lambda_h \geq 0$ satisface:

i) $\Lambda_h(\phi)=0$:

Es claro de que $\Lambda_h^{(\rho)}(\phi)=0 \quad \forall \rho>0$.

ii) Si $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tales que $A \subset B$, entonces $\Lambda_h(A) \leq \Lambda_h(B)$:

Es consecuencia de que $\Lambda_h^{(\rho)}(A) \leq \Lambda_h^{(\rho)}(B) \quad \forall \rho>0$.

iii) Si $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y $A := \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $\Lambda_h(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_h(A_n)$:

Pero $\Lambda_h^{(\rho)}(A)$, sí es menor ó igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_h^{(\rho)}(A_n)$ para toda $\rho>0$. Luego observando que

$$\lim_{\rho\to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(A) \leq \lim_{\rho\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_h^{(\rho)}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\rho\to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(A_n)$$

se concluye iii).

iv) Si A y $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y $d(A,B)=\varepsilon>0$, entonces $\Lambda_h(A\cup B) = \Lambda_h(A) + \Lambda_h(B)$:

Si tomamos ρ's tales que $0<\rho<\varepsilon/2$ entonces sí sucede que $\Lambda_h^{(\rho)}(A\cup B) = \Lambda_h^{(\rho)}(A) + \Lambda_h^{(\rho)}(B)$, y desde luego $0<\rho<\varepsilon/2$ no es ningún impedimento para que

$$\lim_{\rho\to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(A\cup B) = \lim_{\rho\to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(A) + \Lambda_h^{(\rho)}(B) = \lim_{\rho\to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(A) + \lim_{\rho\to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(B) \quad \blacksquare$$

En particular, si nos restringiéramos a tomar Λ_h sobre los borelianos, Λ_h es una medida.

Una función muy relacionada a la medida de Hausdorff es $M_h : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ definida por

$$M_h(E) = \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \mid \bigcup_{\nu=1}^{\infty} S_{r_\nu} \supset E \right\}_{r_\nu \leq 1}$$

$\Lambda_h^{(\rho)} \geq M_h \quad \forall \rho > 0$ y luego $\Lambda_h \geq M_h$. Se sigue que si $\Lambda_h(E) = 0$ entonces $M_h(E) = 0$.

El inverso sucede tambien :

Proposición 1.- $\Lambda_h(E) = 0 \iff M_h(E) = 0$.

Demostración. Por lo anterior, resta demostrar $\Leftarrow$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \rho < \delta \Rightarrow 0 < h(\rho) < \varepsilon$. Despues, dado $h(\rho) > 0$ existe $\{S_{r_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ cubierta de E tal que $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) < h(\rho)$. Como h es creciente, $r_\nu < \rho$ para toda ν. Por lo que :

$$\Lambda_h^{(\rho)}(E) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) < h(\rho) < \varepsilon$$

siempre que $0 < \rho < \delta$. Por lo tanto

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(E) = 0 \qquad \blacksquare$$

Lema 1.- Sean $f, F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ funciones-medida. Entonces para cualquier conjunto acotado E :

$$\Lambda_f(E) \leq \left(\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{f(t)}{F(t)}\right) \Lambda_F(E)$$

Demostración. Dado $\rho>0$ sea $\{S_{r_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una cubierta de E con $r_\nu<\rho$.

Para cada r_ν tal que $r_\nu<\rho$ se tiene:

$$\frac{f(r_\nu)}{F(r_\nu)} \leq \sup_{0<t<\rho} \frac{f(t)}{F(t)} \quad \text{y luego} \quad f(t) \leq \left[\sup_{0<t<\rho} \frac{f(t)}{F(t)}\right] F(t)$$

por lo tanto $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(r_\nu) \leq \left[\sup_{0<t<\rho} \frac{f(t)}{F(t)}\right] \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} F(r_\nu)$, lo cual a su vez implica que

$$\Lambda_f^{(\rho)}(E) \leq \left[\sup_{0<t<\rho} \frac{f(t)}{F(t)}\right] \cdot \Lambda_F^{(\rho)}(E)$$

Tomando límite cuando $\rho\to 0$ en ambos lados:

$$\Lambda_f(E) \leq \left(\overline{\lim_{\rho\to 0}} \frac{f(t)}{F(t)}\right) \cdot \Lambda_F(E) \qquad \blacksquare$$

Ya que las funciones crecientes de clase C^∞ son densas en las funciones crecientes continuas sobre cualquier intervalo cerrado, no es difícil encontrar para cada h una función-medida de clase C^∞ tal que*:

$$\lim_{t\to 0} \frac{H(t)}{h(t)} = 1 \qquad t>0$$

El siguiente teorema permite suponer a h de clase C^∞:

*[8]

Teorema 1.- Dado $h:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función-medida, existe una $H:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ función-medida de clase C^∞ tal que $\Lambda_h = \Lambda_H$.

Demostración. Por lo ya dicho existe H función-medida de clase C^∞ tal que $\lim_{t\to 0} H(t)/h(t) = 1$.

Por el Lema 1 $\Lambda_H \leq \Lambda_h$.

Pero también $\lim_{t\to 0} h(t)/H(t) = 1$. De aquí la desigualdad que faltaba $\Lambda_h \leq \Lambda_H$ ∎

Sea $\mathcal{G}_0$ el conjunto de todos los cubos $\omega(q_1,q_2,\dots,q_d)$ en $\mathbb{R}^d$ definidos por:

$$\omega(q_1,q_2,\dots,q_d) := \{(x_1,x_2,\dots,x_d) \mid q_i \leq x_i \leq q_i+1\}$$

con $q_1,q_2,\dots,q_d \in \mathbb{Z}$.

Supongamos definido $\mathcal{G}_p$, $\mathcal{G}_{p+1}$ es obtenido de $\mathcal{G}_p$ subdividiendo los cubos de $\mathcal{G}_p$ en 2^d cubos iguales.

Defínase $\mathcal{G} := \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathcal{G}_p$

Ahora la función $m_h: \mathcal{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ definida como:

$$m_h(E) = \inf\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} h(\delta_\nu) \mid \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu \supset E \right\}$$

donde $\omega_\nu \in \mathcal{G}$ de lado δ_ν.

Hay una definición parecida a la anterior de m_h, pero sobre varias redes :

Sea $\mathcal{Q}_s$ el conjunto formado por todos los cubos de $\mathbb{R}^d$ de lados paralelos a los ejes y de longitud 2^{-s} siendo $s\in\mathbb{R}^+$. Luego $\mathcal{Q} := \bigcup_{s\in\mathbb{R}^+} \mathcal{Q}_s$.

$\overline{m}_h : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ estará definida como :

$$\overline{m}_h(E) = \inf \{ \sum_{\nu=1}^{\infty} h(\overline{\delta}_\nu) \mid \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \overline{\omega}_\nu \supset E \}$$

con $\overline{\omega}_\nu \in \mathcal{Q}$ de lado $\overline{\delta}_\nu$.

Lema 2.- Cada elemento $\overline{\omega} \in \mathcal{Q}$ puede ser cubierto por 3^d elementos de $\mathcal{G}$ tal que el lado de $\overline{\omega}$ sea mayor que el lado de cada uno de estos cubos.

La demostración del lema 2 no es mas que la simple generalización de la siguiente para $d=2$.

Supongase que $\overline{\omega} = \{(x_1,y)\mid l_1 \leq x_1 \leq l_1' \text{ y } l_2 \leq x_2 \leq l_2'\}$ siendo l_1, l_2, l_3 y $l_4 \in \mathbb{R}$, tales que $r := |l_2 - l_1| = |l_2' - l_1'| = |l_2' - l_2| = |l_1' - l_1|$ y $0<r<1$.

Sea $p_0 = \sup\{p \mid 2^{-p} \leq r\}$. Como cada $\mathcal{G}_p$ es una cubierta cerrada del espacio $\mathbb{R}^d$, en este caso $\mathbb{R}^2$, el punto $(l_1, l_2) \in \omega$, para algún $\omega \in \mathcal{G}_{p_0}$ de vértices (a,b), $(a+2^{-p_0}, b)$, $(a+2^{-p_0}, b+2^{-p_0})$ y $(a, b+2^{-p_0})$. Tómense los 9 elementos de $\mathcal{G}_{p_0+1}$ que hay entre estos vértices. Estos claramente cubren a $\overline{\omega}$ y $r > 2^{-p_0}/3$ ■

Hay una relación agradable entre M_h, m_h y $\overline{m}_h$:

Proposición 2.- $M_h(E) \leq \overline{m}_h(E) \leq m_h(E) \leq 2^d 3^d M_h(E) \leq 2^d 3^d \overline{m}_h(E)$.

Demostración. La primera desigualdad de izquierda a derecha es inmediata. Dada una cubierta $\{\overline{\omega}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ de E considérese la formada por las esferas circunscritas a las $\overline{\omega}_\nu$ $\{S_{r_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$. Cada $r_\nu \leq \overline{\delta}_\nu$, por lo que $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} h(\overline{\delta}_\nu)$ y luego $M_h(E) \leq \overline{m}_h(E)$.

La segunda es obvia pues $G \subset Q$.

Para la tercera tómese una cubierta $\{S_{r_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ de E. Considérese $\{\overline{\omega}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ la cubierta de E formada por los cubos de Q circunscritos a las S_{r_ν} respectivas. Cada $\overline{\omega}_\nu$ se subdivide en 2^d cubos iguales $\overline{\omega}_{\nu_1}, \overline{\omega}_{\nu_2}, \ldots, \overline{\omega}_{\nu 2^d} \in Q$ de lados r_ν. Por el lema 2 cada $\overline{\omega}_{\nu_i}$ es cubierto por 3^d elementos de G $\omega^1_{\nu_i}, \omega^2_{\nu_i}, \ldots, \omega^{3^d}_{\nu_i}$ tales que $\delta^k_{\nu_i} \leq r_\nu$. Por lo tanto:

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^d} \bigcup_{k=1}^{3^d} \omega^k_{\nu_j} \supset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} S_{r_\nu} \supset E$$

Pero como $\delta^k_{\nu_j} \leq r_\nu$, implica que:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^d} \sum_{k=1}^{3^d} \delta^k_{\nu_j} \leq 2^d 3^d \sum_{\nu=1}^{\infty} r_\nu$$

como la h es creciente, $m_h(E) \leq 2^d 3^d \sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$. Así se concluye $m_h(E) \leq 2^d 3^d M_h(E)$.

La ultima desigualdad no es mas que la primera multiplicada en ambos miembros por $2^d 3^d$ ∎

Corolario 1.- Basta que alguno de los valores $\Lambda_h(E)$, $m_h(E)$, $M_h(E)$ ó $\overline{m}_h(E)$ sea cero para que todos lo sean.

Demostración.- Proposiciónes 1 y 2 ■

Teorema 2.- Si una medida $\mu : \mathcal{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ es tal que

$$\mu(S_{r_v}) \leq h(r_v) \qquad \ldots (1)$$

para cualquier S_v bola de radio $r_v \leq 1$, entonces

$$\mu(E) \leq M_h(E) \qquad \ldots (2)$$

Inversamente, existe una constante $A > 0$, que solo depende de la dimensión, tal que para cada F compacto, existe una medida μ positiva, con el soporte contenido en F que satisface la propiedad (1) (y por lo tanto la propiedad (2)) y

$$\mu(F) \geq A\, M_h(F) \qquad \ldots (3)$$

Demostración. Sea $\{S_{r_v}\}_{v=1}^{\infty}$ una cubierta de bolas para E. Por ser μ una medida y por satisfacer (1)

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{v=1}^{\infty} S_{r_v}\right) \leq \sum_{v=1}^{\infty} \mu(S_{r_v}) \leq \sum_{v=1}^{\infty} h(r_v)$$

por lo tanto $\mu(E) \leq \inf\left\{\sum_{v=1}^{\infty} h(r_v) \mid \bigcup_{v=1}^{\infty} S_{r_v} \supset E\right\}_{r_v \leq 1} = M_h(E)$.

Para el inverso, sea F un compacto y defínanse, para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n' := \{\omega_n \in G_n \mid \omega_n \cap F \neq \emptyset\}$ y $G' := \bigcup_n G_n'$. Luego se define $Q_n := \bigcup_{\omega_n \in G_n'} \omega_n$. Entonces $Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots \supset F$ y además $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ es igual a F.

Considérese la medida de Lebesgue $\lambda : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ tal que para todo $\omega_\nu \in G_\nu$ de lado $\delta_\nu = 2^{-\nu}$ y para toda $\nu = 0, 1, \ldots$, $\lambda(\omega_\nu) = (\delta_\nu)^d$.

Se define $\lambda_n : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ para cada $n \in \mathbb{N}$ como $\lambda_n(A) := \lambda(A \cap Q_n)$ para toda $A \in \overline{\mathcal{L}}$. Por lo tanto λ_n es una medida positiva.

Ahora fíjese una $n \in \mathbb{N}$. Se define una medida $\mu_n^{(n)} : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ como:

$$\mu_n^{(n)} := a_n \lambda_n \qquad , \text{ donde } a_n := \frac{h(2^{-n})}{2^{-nd}}$$

Esta medida satisface $\mu_n^{(n)}(\omega_n) = h(2^{-n})$ para todo $\omega_n \in G_n'$.

Defínase $\mu_{n-1}^{(n)} : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ como:

$$\mu_{n-1}^{(n)} := \begin{cases} \mu_n^{(n)} & \text{si } \forall \omega_{n-1} \in G_{n-1}' \,,\ \mu_n^{(n)}(\omega_{n-1}) \leq h(2^{-n+1}) \\ a_{n-1}\lambda_n & \text{si } \exists \omega_{n-1} \in G_{n-1}' \text{ .+. } \mu_n^{(n)}(\omega_{n-1}) > h(2^{-n+1}) \end{cases}$$

Por lo tanto $\mu_{n-1}^{(n)}$ es una medida positiva que satisface, para ν igual a n ó $n-1$, $\mu_{n-1}^{(n)}(\omega_\nu) \leq h(2^{-\nu})$. (Si $\omega_\nu \notin G_\nu'$ $\mu_{n-1}^{(n)}(\omega_\nu)$ es cero.)

Seguimos el mismo procedimiento $n-1$ veces mas y obtenemos $\mu_0^{(n)} : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, una medida positiva:

$$\mu_0^{(n)} := \begin{cases} \mu_1^{(n)} & \text{si } \forall \omega_0 \in G_0' \,,\ \mu_1^{(n)}(\omega_0) \leq h(1) \\ a_0 \lambda_n & \text{si } \exists \omega_0 \in G_0' \text{ .+. } \mu_1^{(n)}(\omega_0) > h(1) \end{cases}$$

Por lo que $\mu_0^{(n)}(\omega_\nu) \leq h(2^{-\nu})$ para toda $\omega_\nu \in G_\nu$ y para toda $\nu \leq n$.

Como $\mu_0^{(n)} = a_{i_0}\lambda_n$ para alguna $i_0 \leq n$, entonces, dado $a \in F$ existe $\omega_{i_0} \in G'_{i_0}$ tal que $\mu_0^{(n)}(\omega_{i_0}) = h(2^{-i_0})$ y $a \in \omega_{i_0}$. Definamos como $W_j^{(n)}$ los elementos mas grandes en G' que satisfacen :

$\mu_0^{(n)}(W_j^{(n)}) = h(\delta_j^{(n)})$, con $\delta_j^{(n)}$ el lado de $W_j^{(n)}$.

Por lo que $\{W_j^{(n)}\}$ es una cubierta de ajenos para E. Además con θ la cardinalidad de G'_0 se tiene

$$\infty > \theta h(1) \geq \mu_0^{(n)}(Q_0) \geq \mu_0^{(n)}(Q_n) \geq \sum_j \mu_0^{(n)}(W_j^{(n)}) = \sum_j h(\delta_j^{(n)}) \geq m_h(F) \geq 0 \quad \ldots (A)$$

Así, hemos construido una sucesión $\{\mu_0^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ de medidas positivas, que por (A) son acotadas por $\theta h(1)$. Y ya que para todo conjunto $E \in \mathbb{R}^d$ $\mu_0^{(n)}(\partial E) = 0$, existe una subsucesión $\{\mu_0^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{\mu_0^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ que converge debilmente a una medida μ^*.

Sucede entonces que $\mu(\omega_\nu) \leq h(2^{-\nu})$ para toda ν y $\omega_\nu \in G_\nu$.

Ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = F$ y $\theta h(1) \geq \mu_0^{(k)}(Q_0)$, tenemos

$$\mu_0^{(k)}(F) = \lim_{n\to\infty} \mu_0^{(k)}(Q_n) \quad \ldots (B)$$

Por converger $\mu_0^{(n_j)}$ debilmente a μ se tiene

$$\mu(Q_n) = \lim_{j\to\infty} \mu_0^{(n_j)}(Q_n) \qquad \forall\, Q_n \quad \ldots (C)$$

En particular $\mu(Q_0) = \lim_{j\to\infty} \mu_0^{(n_j)}(Q_0) \leq \theta h(1)$ de (C), lo que implica $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n)$.

*[A]

Por lo tanto $\mu(F) = \lim_{m_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(F) = \lim_{m_j \to \infty} \lim_{n_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(Q_{n_j})$

pues $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_{m_j}$. Pero $\lim_{m_j \to \infty} \lim_{n_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(Q_{n_j}) = \lim_{n_j \to \infty} \lim_{m_j \to \infty} \mu^{(m_j)}(Q_{n_j})$,

ya que el soporte de $\mu_0^{(m_j)}$ esta contenido en Q_{m_j}:

$$\mu(F) = \lim_{n_j \to \infty} \lim_{m_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(Q_{m_j}) = \lim_{m_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(Q_{m_j}) \qquad \ldots (D)$$

Dado $n_0 \in \mathbb{N}$. $\mu(Q_{n_0}) = \lim_{m_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(Q_{n_0}) = \lim_{n_0 < m_j \to \infty} \mu_0^{(m_j)}(Q_{m_j}) = \mu(F)$. Lo que significa que el soporte de μ esta en F. Además ya que de (A), $\mu_0^{(m_j)}(Q_{m_j}) \geq m_h(F)$, de (D) obtenemos que $\mu(F) \geq m_h(F)$.

Por la proposición 2, $m_h(F) \geq M_h(F)$, por lo que $M_h(F) \leq \mu(F)$.

Ya sabemos que $\mu(\omega_\nu) \leq h(2^{-\nu})$ para toda ν , pero nosotros quisieramos la desigualdad para S_ν, bolas de radio $r_\nu \leq 1$, para ello , sea S_ν una bola de radio r_ν . Consideremos el cubo H de lado $5 \cdot 2^{-K}$ formado por cubos de G_K, tal que el cubo central contiene el centro de S_ν y tal que $2^{-K} < r_\nu < 2^{-K+1}$. Por lo que $H \supset S_\nu$ y esto implica que existen 5^d cubos $\omega_{K_i} \in G_K$ tal que $S_\nu \subset \bigcup_{i=1}^{5^d} \omega_{K_i}$. Así $\mu(S_\nu) \leq \sum_{i=1}^{5^d} h(2^{-K}) \leq 5^d h(r_\nu)$. Ahora tómese $A := 5^{-d} > 0$ y defínase $\tilde{\mu} := A\mu$. Entonces $\tilde{\mu}$ es una medida que satisface (1), (2) , es positiva , con su soporte contenido en F ∎

2.- M_h es una medida exterior :

Proposición.- $M_h(E) = \inf_{O \supset E} M_h(O)$, O abierto

Demostración.- Como $M_h(E) \leq M_h(O)$ para todo abierto tal que

$O \supset E$ entonces $M_h(E) \leq \inf_{O \supset E} M_h(O)$.

Tomando las esferas abiertas $\inf_{O\supset E} M_h(O) \leq \inf_{\bigcup_{v=1}^{\infty} S_{r_v} \supset E} M_h(\bigcup_{v=1}^{\infty} S_{r_v})$

y como $M_h(\bigcup_{v=1}^{\infty} S_{r_v}) \leq \sum_{v=1}^{\infty} h(r_v)$:

$$\inf_{O\supset E} M_h(O) \leq \inf_{\bigcup S_{r_v} \supset E} \sum h(r_v) = M_h(E) \qquad \blacksquare$$

m_h no siempre es medida exterior, pero :

Proposición 4.- Si $d=1$, $m_h(E) = \inf_{O\supset E} m_h(O)$

Demostración.- Otra vez es claro que $m_h(E) \leq \inf_{O\supset E} m_h(O)$.

En $\mathbb{R}^1$ cada abierto acotado es unión numerable de intervalos (elementos de $\mathcal{C}$). Así $\inf_{O\supset E} m_h(O) \leq \inf_{\bigcup \omega^v \supset E} m_h(\bigcup \omega^v)$ y porque $m_h(\bigcup \omega^v) \leq \sum h(\delta^v)$:

$$\inf_{O\supset E} m_h(O) \leq \inf_{\bigcup \omega^v \supset E} \sum h(\delta^v) = m_h(E) \qquad \blacksquare$$

Proposición 5.- $\lim_{n\to\infty} m_h(E_n) = m_h(E) \qquad E_n \nearrow E$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y con ella la sucesión $\{\varepsilon\cdot 2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$

Para toda $\varepsilon\cdot 2^{-n}$ existe una cubierta $\{\omega_{v_n}\}$ de E_n tal que :

$$\sum_{v_n} h(\delta_{v_n}) < m_h(E_n) + \varepsilon\cdot 2^{-n} \qquad \ldots(1)$$

Si se considera $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_{v_n}\}$, es una cubierta de E. Sea $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega'_{\alpha_n}\}$ un subconjunto de tal cubierta donde los elementos son ajenos en el sentido que $\operatorname{int} \omega'_{\alpha n} \cap \operatorname{int} \omega'_{\beta m} = \phi$. Esto se puede hacer porque si $\operatorname{int} \omega_{\gamma n} \cap \operatorname{int} \omega_{\delta m} \neq \phi$ entonces $\omega_{\gamma n} \supset \omega_{\delta m}$ ó $\omega_{\delta m} \supset \omega_{\gamma n}$, así los $\omega'_{\alpha n}$ son los elementos máximos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_{\gamma n}\}$ en el sentido que no hay otro elemento distinto de $\{\omega'_{\alpha n}\}$ en esta cubierta que lo contenga.

Obviamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega'_{\alpha n}\}$ es numerable y cubre a E.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Considérese los $\omega'_{\alpha n}$ tomados de $\{\omega_{\gamma_1}\}$ digamos el conjunto $\{\omega_{\gamma_1}\}^1$. Este cubre un cierto Q_1 de E_m, $Q_1 := E_m \cap [\overset{1}{\bigcup} \omega_{\gamma_1}]$.

Tómese el conjunto $\{\omega_{\gamma m}\}^{(1)}$ de los elementos de $\{\omega_{\gamma m}\}$ que intersectan a Q_1. Por ser $\{\omega_{\gamma m}\}$ cubierta de E_m y Q_1 estar formado de elementos máximos:

$$\overset{(1)}{\bigcup} \omega_{\gamma m} = Q_1 = E_m \cap [\overset{1}{\bigcup} \omega_{\gamma_1}]$$

Después sea $\{\omega_{\gamma_1}\}^c := \{\omega_{\gamma_1}\} - \{\omega_{\gamma_1}\}^1$. Por eso y por (1) $m_h(Q_1) + \sum^c h(\delta_{\gamma_1}) \geq m_h(E) \geq \sum^1 h(\delta_{\gamma_1}) + \sum^c h(\delta_{\gamma_1}) - \varepsilon \cdot 2^{-1}$ y como $\sum^{(1)} h(\delta_{\gamma m}) \geq m_h(Q_1)$ se sigue:

$$\sum^1 h(\delta_{\gamma_1}) \leq \sum^{(1)} h(\delta_{\gamma m}) + \varepsilon \cdot 2^{-1}$$

Ahora considerando $\{\omega_{\gamma_2}\}^2$ como el conjunto de los elementos $\omega'_{\alpha n}$ de $\{\omega_{\gamma_2}\}$ que no están en $\{\omega_{\gamma_1}\}$ y definimos $Q_2 := E_m \cap [\overset{2}{\bigcup} \omega_{\gamma_2}]$, así que $\operatorname{int} Q_1 \cap \operatorname{int} Q_2 = \phi$.

Tómese el conjunto $\{\omega_{\nu_m}\}^{(2)}$ de los elementos de $\{\omega_{\nu_m}\}$ que intersectan a Q_2 ($\mathrm{int}\, \omega_{\nu_m} \cap Q_2 \neq \phi$). Por ser $\{\omega_{\nu_m}\}$ cubierta de E_m y Q_2 estar formado de elementos máximos :

$$\overset{(2)}{\bigcup} \omega_{\nu_m} = Q_2 = E_m \cap \left[\overset{2}{\bigcup} \omega_{\nu_2}\right]$$

Definiendo $\{\omega_{\nu_2}\}^c := \{\omega_{\nu_2}\} - \{\omega_{\nu_2}\}^2$ y observando que $\sum^{(2)} h(\delta_{\nu_m}) \geq m_h(Q_2)$ se sigue

$$\sum^2 h(\delta_{\nu_2}) \leq \sum^{(2)} h(\delta_{\nu_m}) + \varepsilon \cdot 2^{-2}$$

ya que $m_h(Q_2) + \sum^c h(\delta_{\nu_2}) \geq m_h(E) \geq \sum^2 h(\delta_{\nu_2}) + \sum^c h(\delta_{\nu_2}) - \varepsilon \cdot 2^{-2}$.

Repitiendo el mismo argumento para toda n que es menor que m se sigue

$$\mathrm{int}\, Q_j \cap \mathrm{int}\, Q_k = \phi \qquad \forall\, j,k \leq m \qquad \ldots (2)$$

$$\sum^j h(\delta_{\nu_j}) \leq \sum^{(j)} h(\delta_{\nu_m}) + \varepsilon \cdot 2^{-j} \qquad \forall_{j=1}^{m} \quad \ldots (3)$$

De (3) y de (2) tenemos respectivamente :

$$\sum_{j=1}^{m} \sum^j h(\delta_{\nu_j}) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum^{(j)} h(\delta_{\nu_m}) + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} \cdot \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{m} \sum^{(j)} h(\delta_{\nu_m}) \leq \sum h(\delta_{\nu_m})$$

y por (1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sum^j h(\delta_{\nu_j}) \leq \sum_{j=1}^{m} h(\delta_{\nu_m}) + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} \varepsilon \leq m_h(E) + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} \cdot \varepsilon + 2^{-m} \cdot \varepsilon$.

Hagamos tender m al infinito así $\sum_{j=1}^{\infty} \sum^{j} h(\delta v_i) = \sum h(\delta'_{\alpha n})$ y $\lim_{m\to\infty} \left[m_h(E_m) + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} \cdot \varepsilon + 2^{-m} \cdot \varepsilon \right] = \lim_{n\to\infty} m_h(E_m) + \varepsilon$, por lo que

$$m_h(E) \leq \sum h(\delta'_{\alpha n}) \leq \lim_{m\to\infty} m_h(E_m) + \varepsilon$$

Como ε es arbitraria $m_h(E) \leq \lim_{m\to\infty} m_h(E_m)$. Pero $m_h(E_n) \leq m_h(E)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $m_h(E) \geq \lim_{m\to\infty} m_h(E_m)$ y luego:

$$m_h(E) = \lim_{m\to\infty} m_h(E_m) \qquad \blacksquare$$

Tomando E_n compacto $\forall n \in \mathbb{N}$ y E abierto y acotado la proposición 5 implica

Corolario 2.- $m_h(O) = \sup_{F \subset O} m_h(F)$

Demostración. $F_n \nearrow O$ para ciertos F_n compactos, así $m_h(O) = \lim_{n\to\infty} m_h(F_n) \leq \sup_{F \subset O} m_h(F)$

Pero para todo compacto F contenido en O existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_{n_0} \supset F$ por lo que $m_h(F_{n_0}) \geq m_h(F)$ y $m_h(O) = \lim_{n\to\infty} m_h(F_n) \geq \sup_{F \supset O} m_h(F)$ $\blacksquare$

En el caso $d=1$ con la proposición 4, proposición 5 y el corolario 2 muestran que $m_h : \mathcal{L} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ es una capacidad y los conjuntos compactos son capacitables. Por la proposición 5 del capítulo 1, todos los conjuntos de Souslin son capacitables.

Además el corolario 2 y la proposición 4 implican que si $d=1$, entonces para todo conjunto A de Souslin tal que $m_h(A)>0$, contiene un conjunto F compacto, con la misma propiedad de ser $m_h(F)>0$.

Pero el resultado se tiene en general:

Teorema 3.- Un conjunto A de Souslin tal que $m_h(A)>0$ contiene un conjunto F compacto, con la misma propiedad de $m_h(F)>0$.

Demostración.- Sea $m'_h : \mathcal{L} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ definida por

$$m'_h(E) := \inf \{ \sum h(\delta_\nu) \mid \operatorname{int}(\bigcup \omega_\nu) \supset E \}$$

La primera afirmación es que m'_h es una medida exterior:

Es claro que $m'_h(E) \leq m'_h(O)$ para O abierto y $O \supset E$ por lo que $m'_h(E) \leq \inf_{O \supset E} m'_h(O)$. La otra desigualdad es inmediata, pues

$$m'_h(E) = \inf_{\operatorname{int}(\bigcup\omega_\nu)\supset E} \sum h(\delta_\nu) \geq \inf_{\operatorname{int}(\bigcup\omega_\nu)\supset E} m'_h(\bigcup \omega_\nu) \geq \inf_{O \supset E} m'_h(O) .$$

La segunda afirmación es que se satisfacen la proposición 5 y el corolario 2 sustituyendo m_h por m'_h. La demostración es escencialmente la misma.

Entonces como en el caso $d=1$ para m_h, se obtienen las conclusiones para m'_h; que es una capacidad, que los compactos son capacitables y que los conjuntos de Souslin tambien son capacitables.

El teorema 2 es cierto, por lo tanto, para m'_h.

Hay una relación importante entre m'_h y m_h:

$$m_h(E) \leq m'_h(E) \leq 3^d m_h(E), E \in \mathcal{Z} \quad \ldots (1)$$

La primera desigualdad de izquierda a derecha es inmediata.

Para la segunda supongase que $\{\omega_{\nu_n}\}$ es una cubierta de E. Pero para cada ω_{ν_n} hay 3^d cubos $\omega^1_{\nu_n}$, $\omega^2_{\nu_n}, \ldots, \omega^{3^d}_{\nu_n} \in G$ tales que $\delta^j_{\nu_n} = \delta_n$ y $\omega_n \subset \operatorname{int}(\bigcup_{j=1}^{3^d} \omega^j_{\nu_n})$ Por lo tanto $E \subset \operatorname{int}(\bigcup_{\nu_n} \bigcup_{j=1}^{3^d} \omega^{(j)}_{\nu_n})$ y se sigue:

$$m'_h(E) \leq \sum_{\nu_n} \sum_{j=1}^{3^d} h(\delta^{(j)}_{\nu_n}) = 3^d \sum h(\delta_{\nu_n})$$

que concluye que $m'_h(E) \leq 3^d m_h(E)$.

Ahora supongase que $m_h(A) > 0$ A un conjunto de Souslin. Esto implica $m'_h(A) > 0$ y después existe $F \subset A$ compacto tal que $m'_h(F) > 0$. Por (1) $3^d m_h(F) > 0$ Como 3^d es una constante que solo depende de la dimensión $m_h(F) > 0$ ∎

El siguiente teorema es en parte un corolario del teorema 3 :

Teorema 4.- Cualquier conjunto de Souslin E tal que $m_h(E)>0$ contiene un subconjunto compacto tal que:

$$0<\Lambda_h(F)<\infty \quad , \quad F\subset E$$

Demostración. Sabemos por el teorema 2 que existe F_1 tal que $F_1 \subset E$ y $a_1 := m_h(F_1) > 0$.

Supongamos definidos F_j $j=1,\dots,n$ compactos tales que $E\supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n$ $m_h(F_j)=a_j$ $\forall_{j=1}^{n}$ y
$b_j := \inf\{\sum h(\delta^{(i)}) \mid \cup\omega^{(i)}\supset F_j$ y $\delta^{(i)}\le 2^{-j}$ $\forall_i\}$ $\forall_{j=1}^{n}$

Sea $\{\omega^{(j)}\}$ una cubierta de F_n tal que $\delta^{(i)}\le 2^{-n}$ como F_n es compacto la podemos suponer finita y ajena ($\operatorname{int}\omega^{(t)}\cap \operatorname{int}\omega^{(s)}=\phi$). y :

$$\sum_{j=1}^{N} h(\delta^{(i)}) \le b_n + 2^{-n}$$

Si $\delta^{(j)}<2^{-n}$ ó si $\delta^{(j)}=2^{-n}$ y $m_h(\omega^{(j)}\cap F_n)<h(2^{-n})$ definimos $A_j=\omega^{(j)}\cap F_n$

En el otro caso, eso es cuando $\delta^{(j)}=2^{-n}$ y $m_h(\omega^{(j)}\cap F_n)\ge h(2^{-n})$, la definición de A_j es un poco mas complicada:

Primero considerense los 2^d elementos de lados iguales contenidos en $\omega^{(j)}$, $\omega_1^{(j)1}\ \omega_2^{(j)1},\dots,\omega_{2^d}^{(j)1}$ ordenados en tal forma que $m_h(\omega_i^{(j)_1} \cap F_n) \geq m_h(\omega_{i+1}^{(j)_1} \cap F_n)$.

Definiendo $\alpha_i^1 := m_h(\omega_i^{(j)_1} \cap F_n)$ se toma K_1 como:

$$K_1 := \max\{K \mid \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \ldots + \alpha_K^1 < h(2^{-n})\}$$

Resulta que $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq K_1 < 2^d$.

Se define $C_1 := [\omega_1^{(j)_1} \cup \ldots \cup \omega_{K_1}^{(j)_1}] \cap F_n$ y ya que $m_h(C_1) < h(2^{-n})$ entonces $m_h(C_1) = \inf\{\sum h(\omega_{v_n}) \mid \cup \omega_{v_n} \supset C_1$ y $\delta_{v_n} < 2^{-n}\}$ y luego

$$m_h(C_1) = m_h(\omega_1^{(j)_1} \cap F_n) + \ldots + m_h(\omega_{K_1}^{(j)_1} \cap F_n) = \alpha_1^1 + \ldots + \alpha_{K_1}^1$$

Por lo tanto $m_h(\omega^{(j)} \cap F_n) - m_h(C_1) \leq \alpha_{K_1+1}^1 \leq h(2^{-n-1})$.

Supongamos definidas K_m y C_m. Considerense los 2^d cubos de lado $\delta_{K_{m+1}}^{(j)m}/2$ que estan en $\omega_{K_{m+1}}^{(j)m}$, $\omega_1^{(j)m+1}$, $\omega_2^{(j)m+1}, \ldots, \omega_{2^d}^{(j)m+1}$ ordenados tales que

$$m_h(\omega_i^{(j)m+1} \cap F_n) \geq m_h(\omega_{i+1}^{(j)m+1} \cap F_n) \qquad \forall_{i=1}^{2^d-1}$$

Definiendo $\alpha_i^{m+1} := m_h(\omega_i^{(j)m+1} \cap F_n)$ se toma K_{m+1} como:

$$K_{m+1} := \max\{K \mid \alpha_1^{m+1} + \ldots + \alpha_K^{m+1} < h(2^{-n}) - \sum_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{K_t} \alpha_s^t\}$$

K_{m+1} puede no existir, si existe $K_{m+1} \in \mathbb{N}$ es tal que $1 \leq K_{m+1} < 2^d$.

Si K_{m+1} existe se define $C_{m+1} := [\omega_1^{(i)m+1} \cup \ldots \cup \omega_{K_{m+1}}^{(i)m+1}] \cap F_n$ y ya que $m_h(C_{m+1}) < h(2^{-n-m})$ entonces $m_h(C_{m+1})$ es el conjunto $\inf\{\sum h(\omega_{\nu_n}) \mid \bigcup \omega_{\nu_n} \supset C_{m+1}$ y $\delta_{\nu_n} < 2^{-n-m}\}$ y luego :

$$m_h(C_{m+1}) = m_h(\omega_1^{(i)m+1} \cap F_n) + \ldots + m_h(\omega_{K_{m+1}}^{(i)m+1} \cap F_n) = \alpha_1^{m+1} + \ldots + \alpha_{K_{m+1}}^{m+1}$$

Por lo tanto $m_h(C_m) - m_h(C_{m+1}) \leq \alpha_{K_{m+1}+1}^{m+1} \leq h(2^{-n-m-1})$

Así para cualquier $M \in \mathbb{N}$, $M > n$ $B_M^j := C_1 \cup \ldots \cup C_M$ es tal que $m_h(B_M^j) = m_h(C_1) + \ldots + m_h(C_M)$, por lo tanto $m_h(\omega^{(i)} \cap F_n) - m_h(B_M^j) \leq h(2^{-n-M})$ y $m_h(B_M^j) < h(2^{-n})$.

Tómese $M = (s-1)n$ y $A_j := B_M^j$. Así

$$h(2^{-n}) - h(2^{-sn}) \leq m_h(A_j) < h(2^{-n}) \qquad \ldots (1)$$

Definamos $F_{n+1} := \bigcup_{j=1}^{N} A_j$. Como $m_h(A_j) < h(2^{-m})$ y $m_h(F_{n+1}) \leq \sum_{j=1}^{N} m_h(A_j)$:

$$b_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{N} h(\delta^{(i)}) \leq b_n + 2^{-n}$$

por lo tanto $\overline{\lim}\, b_n < b_1 + 1 < \infty$ $\qquad \ldots (2)$

Por otro lado, $m_h(F_{n+1}) = m_h(\bigcup_{j=1}^{N} A_j)$ es igual a $m_h(\bigcup_{i=1}^{N_1} A_{j_i}) + \sum_{i=N_1+1}^{N} m_h(A_{j_i})$ donde A_{j_i} fué tomada como $\omega^{(j_i)} \cap F_n$ para $i = 1, 2, \ldots, N_1$ y $B_M^{j_i}$ para $i = N_1+1, N_2+2, \ldots, N$. (Esto es claro pues $m_h(F_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{N} h(\delta^{(i)})$).

Pero eso lleva de (1) a:

$$m_h(F_n) \leq m_h\left(\bigcup_{i=1}^{N_1} \omega^{(j_i)} \cap F_n\right) + \sum_{i=N_1+1}^{N} m_h(\omega^{(j_i)} \cap F) \leq$$

$$m_h\left(\bigcup_{i=1}^{N_1} A_{j_i}\right) + \sum_{i=N_1+1}^{N} \left(m_h(A_{j_i}) + h(2^{-sn})\right) = m_h(F_{n+1}) + (N-N_1)h(2^{-sn})$$

por lo tanto $a_{n+1} \geq a_n - (N-N_1)h(2^{-sn})$. De aquí obtenemos $\lim_{n\to\infty} a_n > a_1 - N \cdot h(2^{-s}) > 0$ ... (3)

Finalmente definimos $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Por lo que $F \subset E$ y F es compacto.

Entonces de (2) $\Lambda_h(F) \leq \overline{\lim}\, b_n < \infty$ y de (3) $m_h(F) \geq \lim_{n\to\infty} a_n > 0$, ya que como F es compacto las cubiertas que se usan para m'_h que cubran a F tienen que contener alguna F_n.

Como $m'_h(E) \leq 2^d 3^{2d} M_h(E) \leq 2^d 3^{2d} \Lambda_h(F)$, entonces $\Lambda_h(F) > 0$ y

$$0 < \Lambda_h(F) < \infty \qquad \blacksquare$$

III POTENCIAL Y CAPACIDAD NEWTONIANOS

1.- Consideremos aquí medidas σ positivas, de soporte compacto y finitas; donde finita significa:

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\sigma(w) < \infty$$

Denotaremos como S_σ al soporte de σ.

Se define $K : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$K(r) = \begin{cases} \log(r^{-1}) & \text{si } d=2 \\ r^{2-d} & \text{si } d>2 \end{cases}$$

Esta función es conocida como el <u>Kernel de Newton</u>

Definición.- El "potencial newtoniano" de una medida σ es la función $\mathcal{U}_\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ definida por

$$\mathcal{U}_\sigma(z) := \int_{\mathbb{R}^d} K(|z-w|)\, d\sigma(w)$$

Nosotros demostraremos los resultados del capítulo para $d=3$, pero ellos son ciertos en general $(d \geq 2)$.

Es claro que si $x \notin S_\sigma$, $\mathcal{U}_\sigma(x) < \infty$; pues la distancia de

x al compacto S_σ es estrictamente positiva, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, S_\sigma) > \delta > 0$.

$$\Rightarrow |x-y| > \delta > 0 \quad \forall y \in S_\sigma \Rightarrow 0 < |x-y|^{-1} < \delta^{-1} \quad \forall y \in S_\sigma$$

Así: $$\mathcal{U}_\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} d\sigma(y) = \int_{S_\sigma} \frac{1}{|x-y|} d\sigma(y) < \int_{S_\sigma} \delta^{-1} d\sigma(y) = \delta^{-1} \int_{S_\sigma} d\sigma(y) < \infty$$

Lo sorprendente es que de hecho $\mathcal{U}_\sigma$ es finita casi donde quiera (a,e) para toda $d \geq 2$:

Proposición $\mathcal{U}_\sigma(x) < \infty$ a.e

Demostración.- Sea $d = 3$. Fíjese $R > 0$. Por lo que

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|} dx = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} |r^2 \operatorname{sen} \theta| \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

es obtenido haciendo cambio de coordenadas. Así:

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|} dx \leq \int_0^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\varphi \, d\theta = 2\pi^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi^2 R^2$$

Si hacemos lo análogo al transladar del origen, obtenemos:

$$\int_{B_R(y)} \frac{1}{|x-y|} dx < \infty$$

Ahora: $$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-y|} dx = \int_{B_R(0) \cap B_R(y)} \frac{1}{|x-y|} dx + \int_{B_R(0) \cap B_R^c(y)} \frac{1}{|x-y|} dx \leq \int_{B_R(y)} \frac{1}{|x-y|} dx + \int_B \frac{1}{|x-y|} dx$$

con B como $\overline{B_R(0) \cap B^c_R(Y)}$. Aquí $|X-Y| \geq R$, por lo que:

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|X-Y|}\, dx \leq \int_{B_R(Y)} \frac{1}{|X-Y|}\, dx + R^{-1} \int_B dx < \infty$$

pues $\int_B dx < \infty$, por ser B compacto.

Por el teorema de Fubini y lo anterior, se tiene:

$$\int_{B_R(0)} {}^{\gamma}U_\sigma(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{B_R(0)} \frac{1}{|X-Y|}\, dx\, d\sigma(Y) < M \int_{\mathbb{R}^3} d\sigma(Y) < \infty$$

para alguna M. Por lo tanto ${}^{\gamma}U_\sigma(X) < \infty$ a.e ■

La demostración se generaliza para toda d, en una manera análoga, usando el cambio de coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^d$.

Ahora, estudiemos dos importantes propiedades del potencial newtoniano, llamadas el principio del máximo y el principio de continuidad. Para ello necesitamos dos lemas:

Lema 1.- $\underline{\lim}_{X \to X_0} {}^{\gamma}U_\sigma(x) \geq {}^{\gamma}U_\sigma(x_0)$

Demostración.- Sea $d=3$. Defínanse:

$$K_j(t) = \begin{cases} 1/t & t > 1/j \\ j & t \leq 1/j \end{cases}$$

$$y \qquad \mathcal{U}_j(x) := \int_{\mathbb{R}^3} K_j(|x-y|)\, d\sigma(y)$$

Resulta $K_j \leq K_{j+1}$ y $\mathcal{U}_j \leq \mathcal{U}_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Defínase $K_j^n(y) := K_j(|x_n - y|)$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} K_j^n(y) = K_j(|x_0 - y|)$$

lo cual implica, por el teorema de convergencia acotada:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_j(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int K_j^n(y)\, d\sigma(y) = \int K_j(|x_0-y|) = \mathcal{U}_j(x_0)$$

Esto es, $\mathcal{U}_j$ es continua, para toda j en $\mathbb{N}$.

K_j es medible (por ser continua) $\forall j \in \mathbb{N}$. Además sucede que $\lim_{j\to\infty} K_j = K$ y $K_j \leq K_{j+1} \leq K$. Y por el teorema de convergencia dominada:

$$\mathcal{U}_j(x) \longrightarrow \mathcal{U}_\sigma(x) \qquad \forall\, x$$

Supongamos que $\mathcal{U}_\sigma(x_0) > a$. Lo que implica que existe j_0 en $\mathbb{N}$ tal que, para toda j mayor que o igual a j_0, $\mathcal{U}_j(x_0) > a$. Por la continuidad de $\mathcal{U}_{j_0}$, $\exists\, \delta > 0 \ni |x - x_0| < \delta \implies \mathcal{U}_{j_0}(x) > a$ y puesto que $\mathcal{U}_j(x) \geq \mathcal{U}_{j_0}(x)$ $\forall j \geq j_0$, para toda x tal que $|x - x_0| < \delta$ $\mathcal{U}_\sigma(x) > a$. Por lo tanto con $a = \mathcal{U}_\sigma(x_0) - \varepsilon$ implica:

$$\sup_{\delta>0}\ \inf_{|x-x_0|<\delta} \mathcal{U}_\sigma(x) > \mathcal{U}_\sigma(x_0) - \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Lema 2.- Dado $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^d$ compacto, $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en $\tilde{K}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q.

$$\int_{|x-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^{d-2}} < \varepsilon \qquad \forall x \in \tilde{K}$$

Demostración.- $\Leftarrow$) Sean $d=3$ y $\varepsilon>0$. Sea $\delta>0$ tal que $\int_{|x-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} < \varepsilon$.

Entonces:

$$\int_{|x-y|\geq\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} + \varepsilon > \int_{|x-y|\geq\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} + \int_{|x-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} = \mathcal{U}_\sigma(x) \qquad \forall x \in \tilde{K}$$

i.e,

$$\int_{|x-y|\geq\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} > \mathcal{U}_\sigma(x) - \varepsilon \qquad \forall x \in \tilde{K}$$

Y como $\mathcal{U}_\sigma \geq \mathcal{U}_j$:

$$\mathcal{U}_\sigma(x) + \varepsilon > \int K_j(|x-y|)\, d\sigma(y) > \mathcal{U}_\sigma(x) - \varepsilon \qquad \forall x \in \tilde{K}$$

con lo que $\mathcal{U}_j$ converge uniformemente sobre $\tilde{K}$ a $\mathcal{U}_\sigma$. Ya que $\mathcal{U}_j$ es continua $\forall j \in \mathbb{N}$, es continua sobre $\tilde{K}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, luego $\mathcal{U}_\sigma$ lo es también sobre $\tilde{K}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}_\sigma$ es continua sobre $\tilde{K}$ pero existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$, existe $x_n \in \tilde{K}$ con:

$$\int_{|x_n-y|<1/n} \frac{d\sigma(y)}{|x_n-y|} \geq \varepsilon_0$$

De este conjunto de x_n's, por estar en un compacto, existe una subsucesión convergente a alguna $\bar{x} \in \vec{K}$. Tal subsucesión la seguiremos denotando por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \to \bar{x})$.

Definimos $\forall r>0$ $\mathcal{U}'_r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ como:

$$\mathcal{U}'_r(x) := \int_{|y-\bar{x}|\geq r} \frac{d\sigma(y)}{|y-x|}$$

Estas funciones son continuas en $\bar{x}$ porque $f(y) = \frac{1}{|y-\bar{x}|}$ es continua en el conjunto de y's que satisfacen $|y-\bar{x}| \geq r$.

Defínase $V_r := \mathcal{U}_\sigma - \mathcal{U}'_r$. Por lo tanto V_r es continua sobre $\vec{K}$ en $\bar{x}$.

Dado $r>0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \bar{x}| < r/2$ y $1/n < r/2$ para $n \geq N$. Esto implica que $\forall n \geq N$, $\{y \mid |x_n - y| < 1/n\} \subset \{y \mid |\bar{x} - y| < r\}$, luego:

$$V_r(x_n) = \int \frac{d\sigma(y)}{|x_n - y|} - \int_{|y-\bar{x}|\geq r} \frac{d\sigma(y)}{|x_n - y|} = \int_{|y-\bar{x}|<r} \frac{d\sigma(y)}{|x_n - y|} \geq \int_{|y-x_n|<1/n} \frac{d\sigma(y)}{|x_n - y|} \geq \varepsilon_0$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por continuidad $V_r(\bar{x}) \geq \varepsilon_0$.

Con

$$\chi_n(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y-\bar{x}| \geq 1/n \\ 0 & \text{si } |y-\bar{x}| < 1/n \end{cases}$$

construimos la sucesión de funciones:

$$\left\{ \chi_n \cdot \frac{1}{|\ \ -\bar{x}|} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

las cuales satisfacen $\lim_{n\to\infty} X_n \cdot \frac{1}{|\,-\bar{x}|} = \frac{1}{|\,-\bar{x}|}$ y la desigualdad $0 \leq X_n \cdot \frac{1}{|\,-\bar{x}|} \leq X_{n+1} \cdot \frac{1}{|\,-\bar{x}|}$.

Por el teorema de convergencia monotona aplicado a las $X_n \cdot \frac{1}{|\,-\bar{x}|}$, se tiene :

$$\mathcal{U}_\sigma(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}'_{1/n}(\bar{x})$$

Y ya que $r_1 < r_2 \Longrightarrow \mathcal{U}'_{r_1} \leq \mathcal{U}'_{r_2}$, entonces cuando $r \to 0$ $\mathcal{U}'_r(\bar{x}) \longrightarrow \mathcal{U}_\sigma(\bar{x})$. Pero $\mathcal{U}_\sigma(\bar{x}) < \infty$, pues es continua en $\tilde{K}$. Por lo tanto, si $r \to 0$, $V_r(\bar{x}) \to 0$. Contradicción con lo que habiamos ya encontrado $V_r(\bar{x}) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ ∎

Teorema 1.- (Principio de Continuidad). Supongamos que $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en S_σ. Entonces $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en todas partes.

Demostración.- Sea $d=3$. Sea $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^3$ compacto. Usemos el lema 2 para demostrar que $\mathcal{U}_\sigma$ es continua sobre $\tilde{K}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el mismo lema 2 y por ser $\mathcal{U}_\sigma$ continua en S_σ, existe $\delta > 0$ tal que :

$$\int_{|x-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} < \varepsilon/2 \qquad \forall x \in S_\sigma .$$

Si $x_0 \in \tilde{K} \cap S_\sigma$, $\displaystyle\int_{|x_0-y|<\delta/2} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} \leq \int_{|x_0-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} < \varepsilon/2 < \varepsilon$

Supongamos que $x_0 \in \tilde{K} - S_\sigma$ y considérese $B_{\delta/2}(x_0)$. Si $B_{\delta/2}(x_0) \cap S_\sigma = \phi$, entonces se cumple:

$$\int_{|x_0-y|<\delta/2} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} = 0 < \varepsilon$$

Si $B_{\delta/2}(x_0) \cap S_\sigma \neq \phi$, sea $\xi_0 \in S_\sigma$ tal que $|x_0 - \xi_0| = d(x_0, S_\sigma)$. Por lo que $|x_0 - \xi_0| < \delta/2$ y $B_{\delta/2}(x_0) \subset B_\delta(\xi_0)$.

Para toda $y \in S_\sigma$ $|\xi_0 - y| \leq |\xi_0 - x_0| + |x_0 - y|$, lo cual implica:

$$|\xi_0 - y| / |x_0 - y| \leq |\xi_0 - x_0| / |x_0 - y| + 1 \leq 2$$

pues $|\xi_0 - x_0| \leq |x_0 - y|$. Entonces:

$$\int_{|x_0-y|<\delta/2} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} \leq \int_{|\xi_0-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} = \int_{|\xi_0-y|<\delta} \frac{|\xi_0-y|\, d\sigma(y)}{|x_0-y|\,|\xi_0-y|} \leq 2\int_{|\xi_0-y|<\delta} \frac{d\sigma(y)}{|\xi_0-y|} < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Se obtiene finalmente $\displaystyle\int_{|x_0-y|<\delta/2} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} < \varepsilon \qquad \forall x_0 \in \tilde{K}$

Por lo tanto $\mathcal{U}_\sigma$ es continua sobre $\tilde{K}$. Como $\tilde{K}$ es arbitrario, $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en todas partes ∎

Lema 3.- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ K \subset S_\sigma$ compacto t.q. $\sigma(S_\sigma - K) < \varepsilon$ y $\mathcal{U}_{\sigma_K}$ es continua sobre K $\quad (\sigma_K(A) := \sigma(A \cap K))$.

Demostración.- $\mathcal{U}_\sigma$ es medible pues ella es límite de las $\mathcal{U}_j$ que son continuas; mas que medibles. Por el teorema de Lusin, existe $K \subset S_\sigma$ compacto tal que $\mathcal{U}_\sigma|K$ es continua y $\sigma(S_\sigma - K) < \varepsilon$.

Sea $\{x_n\} \subset K$ tal que $x_n \to x_0$. Queremos mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_n) = \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_0)$$

para demostrar la continuidad de $\mathcal{U}_{\sigma_K}$ sobre K. Pero por el lema 1, ya que $S_{\sigma_K} \subset S_\sigma$, esto es, S_{σ_K} es compacto, solo resta demostrar $\overline{\lim}\, \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_n) \leq \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_0)$.

Sea $\sigma' := \sigma - \sigma_K$. Dado $\delta > 0$, como $S_{\sigma'} \subset S_\sigma$, esto es, $S_{\sigma'}$ es compacto, por el lema 1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$

$$\mathcal{U}_{\sigma'}(x_n) > \mathcal{U}_{\sigma'}(x_0) - \delta$$

También $\mathcal{U}_\sigma(x_n) < \mathcal{U}_\sigma(x_0) + \delta$ para n suficientemente grande, por ser $\mathcal{U}_\sigma$ continua sobre K.

Así $\mathcal{U}_\sigma(x_n) - \mathcal{U}_{\sigma'}(x_n) < \mathcal{U}_\sigma(x_0) - \mathcal{U}_{\sigma'}(x_0) + 2\delta$ y luego $\mathcal{U}_{\sigma_K}(x_0) + 2\delta > \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_n)$ para n suficientemente grande.
De aquí $\overline{\lim}\, \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_n) \leq \mathcal{U}_{\sigma_K}(x_0)$ ∎

Antes de demostrar el principio del máximo, veamos ciertas propiedades que cumple $\mathcal{U}_\sigma$:

Lema 1.- $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en $\overline{\mathbb{R}}^d - S_\sigma$, tomando $\mathcal{U}_\sigma(\infty) = 0$ y es armónica en $\mathbb{R}^d - S_\sigma$:

Demostración.- Primero veamos que $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en $\mathbb{R}^d - S_\sigma$ y después, definiendo $\mathcal{U}_\sigma(\infty) = 0$, que $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en $\overline{\mathbb{R}}^d - S_\sigma$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$ y $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}^d - S_\sigma$. Por ser $\overline{\mathbb{R}}^d - S_\sigma$ abierto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \cap S_\sigma = \phi$. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $x_n \in B_\delta(x_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \Rightarrow |x_0 - x_n| < \varepsilon$. Sea $N_2 := \text{máx}(N, N_1)$. Entonces $(|x_0 - y||x_n - y|)^{-1} < \delta^2$ con $n \geq N_2$ y $y \in S_\sigma$. Esto implica:

$$|\mathcal{U}_\sigma(x_n) - \mathcal{U}_\sigma(x_0)| \leq \int_{S_\sigma} \frac{||x_0 - y| - |x_n - y||}{|x_0 - y|\,|x_n - y|}\, d\sigma(y) < \delta^2 \cdot \varepsilon \cdot \int_{S_\sigma} d\sigma(y)$$

para $n \geq N_2$. Pero si tomamos δ fija, $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en $\mathbb{R}^d - K$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \longrightarrow \infty$. Por demostrar que cuando $n \longrightarrow \infty$, $\mathcal{U}_\sigma(x_n) \longrightarrow 0$. Para esto, sea $M > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \geq N$ implica $|x - y| \geq M$, para toda $y \in S_\sigma$. En particular los x_n's que satisfacen $|x_n| \geq N$, satisfacen que $|x_n - y| \geq M$. Así $(|x_n - y|)^{-1} \leq M^{-1}$ para x_n tal que $|x_n| \geq N$ y luego

$$\int_{S_\sigma} \frac{d\sigma(y)}{|x_n - y|} \leq \left[\int_{S_\sigma} d\sigma(y)\right] M^{-1}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{U}_\sigma(x_n) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{U}_\sigma$ es continua en $\overline{\mathbb{R}}^3 - S_\sigma$.

Como suponemos que σ es finita, de soporte compacto y se cumple que $f(x,y) := \dfrac{1}{|x-y|}$ es continua y diferenciable sobre $(\overline{\mathbb{R}}^d - S_\sigma) \times S_\sigma$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\int f(x,y)\, d\sigma(y)\right] = \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}\, d\sigma(y)$$

Aplicando el laplaciano ∇^2 a $\mathcal{U}_\sigma$, obtenemos

$$\nabla^2 \mathcal{U}_\sigma(x) = \int_{S_\sigma} \nabla^2 \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma(y) \qquad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}^d - S_\sigma,$$

pero $\nabla^2 f(x,y) = 0$, luego esto implica que $\nabla^2 \mathcal{U}_\sigma(x) = 0$ ■

En estas condiciones, existe un <u>principio del máximo</u> para <u>funciones armónicas</u>*:

$$\mathcal{U}_\sigma(x) \leq \max_{\partial S_\sigma} \mathcal{U}_\sigma \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}^d} - S_\sigma$$

Dicho esto, apliquémoslo al teorema:

Teorema 2.- (Principio del Máximo). $\mathcal{U}_\sigma(x) \leq M \quad \forall x \in S_\sigma \implies \mathcal{U}_\sigma(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. En otras palabras

$$\sup_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}_\sigma \leq \sup_{S_\sigma} \mathcal{U}_\sigma$$

Demostración.- Sea $d=3$. Sea K como en el lema 3 y sea $x \in S_\sigma^c$. Sea $m := d(x, S_\sigma)$.

Con σ_K como en el lema 3, se tiene:

$$\mathcal{U}_\sigma(x) = (\mathcal{U}_\sigma - \mathcal{U}_{\sigma_K})(x) + \mathcal{U}_{\sigma_K}(x) \qquad \ldots (1)$$

*[A]

Se tiene :

$$(\mathcal{U}_\sigma - \mathcal{U}_{\sigma_K})(x) = \int_{S_\sigma - K} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} \leq \frac{\sigma(S_\sigma - K)}{m} \leq \varepsilon/m$$

Ya que $\sigma_K \leq \sigma$, $\mathcal{U}_{\sigma_K} \leq \mathcal{U}_\sigma \leq M$ sobre S_σ. Por el lema 3 $\mathcal{U}_{\sigma_K}$ es continua sobre K y $S_{\sigma_K} \subset K$.

Por el principio de continuidad aplicado a σ_K, resulta que $\mathcal{U}_{\sigma_K}$ es continua en todo $\mathbb{R}^3$. Por el lema 4 :

$$\mathcal{U}_\sigma(x) \leq \max_{S_{\sigma_K}} \mathcal{U}_{\sigma_K} \leq \max_{S_\sigma} \mathcal{U}_{\sigma_K} \leq M$$

Entonces de (1) $\mathcal{U}_\sigma(x) \leq \varepsilon/m + M \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$. Como la ε es arbitraria

$$\mathcal{U}_\sigma(x) \leq M \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3 \qquad \blacksquare$$

Los teoremas 1 y 2 son casi el mismo. Tan es así que es posible también demostrar el principio de continuidad a partir del principio del máximo.

2.- Sea E un conjunto acotado y sea Γ_E el conjunto de medidas σ de soporte compactas, finitas, positivas, con las propiedades extras $S_\sigma \subset E$ y $\mathcal{U}_\sigma(x) \leq 1$ para todo x en E. (Por el principio del máximo, $\sigma \in \Gamma_E \Longrightarrow \mathcal{U}_\sigma(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$).

Definición.- La "capacidad" $C_K : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ se define como :

$$C_K(E) := \sup_{\sigma \in \Gamma_E} \sigma(E)$$

y se llama "la capacidad newtoniana"

Proposición 2.- $C_K : \overline{\mathcal{Z}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ es una capacidad.

Demostracion:-

i) $C_K(E) = \sup\limits_{F \subset E} C_K(E)$ F compacto :

$\mu \in \Gamma_F \Rightarrow \mu \in \Gamma_E$ y $\mu(F) \leq \mu(E) \Rightarrow C_K(F) \leq C_K(E) \Rightarrow$
$C_K(E) \geq \sup\limits_{F \subset E} C_K(F)$.
Dado $\mu \in \Gamma_E \Rightarrow \mu \in \Gamma_{S_\mu} \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(S_\mu)$ y ya que S_μ es compacto $C_K(E) \leq \sup\limits_{F \subset E} C_K(F)$.

ii) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow C_K(E_1) \leq C_K(E_2)$:

$\mu \in \Gamma_{E_1} \Rightarrow \mu \in \Gamma_{E_2}$ y $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$

Se define $C_K^*(E) := \inf\limits_{O \supset E} C_K(O)$

iii) $C_K^*(E) = \lim\limits_{n \to \infty} C_K^*(E_n)$ con $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ y $E_n \subset E_{n+1}$:

Como sucede ii, entonces $E_1 \subset E_2 \Rightarrow C_K^*(E_1) \leq C_K^*(E_2)$.
Luego $C_K^*(E) \geq \lim\limits_{n \to \infty} C_K^*(E_n)$.
Sea $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists\, O_n \supset E_n$ abierto .t.
$C_K^*(E_n) + \varepsilon > C_K(O_n)$.

Defínase $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Ahora dado $F \subset O$ compacto, implica $F \subset O_n$ para alguna n y, $C_K^*(F) \leq C_K^*(O_n) \leq \sup C_K^*(E_n) + \varepsilon$.
De aquí:

$$C_K^*(E) \leq C_K(O) \leq \lim_{n\to\infty} C_K^*(E) + \varepsilon$$

pues $O \supset E$. Como ε es arbitraria

$$C_K^*(E) \leq \lim_{n\to\infty} C_K^*(E) \qquad \blacksquare$$

Proposición 3.- Cualquier conjunto de Souslin en $\mathbb{R}^d$ es capacitable para la capacidad C_K.

Demostración: Por la proposición 5 del capítulo I basta ver que los conjuntos compactos son capacitables.

Queremos demostrar:

$$C_K(F) = C_K^*(F) = \inf_{O\supset F} C_K(O) \qquad \text{con } F \text{ compacto y } O \text{ abierto.}$$

Primero, es claro que $C_K^*(F) \geq C_K^*(F)$. Para demostrar la otra desigualdad, sea O_n el conjunto de X's tal que $d(x,F) < 1/n$. Sea $\mu_n \in I'_{O_n}$ tal que $\mu_n(O_n) > C_K(O_n) - 1/n$. Pero por estar $\mu_n(O_n)$ acotados $\forall n \in \mathbb{N}$, existe* una subsucesión debilmente convergente $\mu_{n_\nu} \longrightarrow \mu$. Y como para toda función f continua pasa que:

*[A]

$$\int f\, d\mu_{n_\nu} \longrightarrow \int f\, d\mu \qquad \text{cuando} \quad \nu \longrightarrow \infty$$

tenemos :
$$\mathcal{U}_j^{\mu_{n_\nu}}(x) := \int K_j(|x-y|)\, d\mu_{n_\nu} \longrightarrow \int K_j(|x-y|)\, d\mu =: \mathcal{U}_j^{\mu}(x)$$
cuando $\nu \longrightarrow \infty$

Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{U}_j^{\mu_{n_\nu}}(x) > \mathcal{U}_j^{\mu}(x) - \varepsilon$
así pues, $\underline{\lim}\, \mathcal{U}_{\mu_{n_\nu}}(x) > \mathcal{U}_j^{\mu}(x) - \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\underline{\lim}\, \mathcal{U}_{\mu_{n_\nu}}(x) > \mathcal{U}_{\mu}(x) - \varepsilon$. Como la ε es arbitraria :

$$\underline{\lim}\ \mathcal{U}_{\mu_{n_\nu}}(x) \geqslant \mathcal{U}_{\mu}(x)$$

Luego entonces $1 \geqslant \underline{\lim}\, \mathcal{U}_{\mu_{n_\nu}}(x) \geqslant \mathcal{U}_{\mu}(x)$. Así $\mu \in \Gamma_E$. Como inmediata consecuencia :

$$\mu(F) = \lim_{\nu \to \infty} \mu_{n_\nu}(O_n) = \lim_{n \to \infty} C_K(O_n)$$

y luego

$$C_K(F) \geqslant \mu(F) \geqslant C_K^*(F) \qquad \blacksquare$$

IV CIERTAS PROPIEDADES DE LA CAPACIDAD NEWTONIANA Y LA MEDIDA DE HAUSDORFF.

1.- Una forma útil de manejar el potencial newtoniano es como una integral de Riemann – Stieltjes ó como una integral de Lebesgue :

Sea μ una medida finita de soporte compacto S_μ, Definimos para cada $z \in \mathbb{R}^d$ $\quad m_z : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y $\rho_z : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$m_z(r) := \mu(B_r(z)) =: \rho_z\,[0, r)$$

Luego ρ_z es una medida sobre los borelianos de $\mathbb{R}^+$ y m_z cumple

i) $m_z(0) = 0$

ii) $m_z(r)$ es no decreciente y acotada

iii) Existe $R_z \geq 1$ real tal que $m_z(R_z) = m_z(R+\alpha) \leq \|\mu\|$ para toda $\alpha > 0$ y $\|\mu\| = \mu(\mathbb{R}^d)$

Proposición 1.- Se dan las igualdades

$$\mathcal{U}_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|z-y|^{d-2}} = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r}\, d\rho_z = \int_0^{R_z} \frac{1}{r}\, d\rho_z$$

donde la primera igualdad se da en el sentido de que si una de ellas existe la otra también y son iguales.

Demostración: Por el teorema C en ([15]) pag 163 es inmediato. Tómese $T_z : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, definida por $T_z(y) = |z-y|$ para $\mathcal{B}$ borelianos, λ la medida de Lebesgue. Tómese además $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $g(r) = 1/r$. Entonces obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r}\, d\mu(T_z^{-1}(r)) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y) \qquad \ldots \quad (1)$$

pero $\mu(T_z^{-1}(r))$ es justamente $\rho_z[0, r)$ y $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|z-y|}\, d\sigma(y)$ es ${}^{N}U_\mu(z)$.

El mismo teorema C nos garantiza que si una de las dos integrales de (1) existe, entonces la otra también existe y son iguales.

Por lo dicho al principio del capítulo, en el inciso iii, es claro que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r}\, d\rho_z = \int_{[0, R_z)} \frac{1}{r}\, d\rho_z$$

donde la integral de la derecha es igual a $\int_0^{R_z} \frac{1}{r}\, d\rho_z$ ∎

En la anterior proposición se relacionan el potencial newtoniano y la integral de Lebesgue.

Definición: Una medida σ positiva, finita, de soporte compacto para la cual existe una constante A, que depende solo de la dimensión, tal que $\sigma(S_r) \leq A \cdot h(r_y)$, para toda S_r bola de radio r_v, σ se llama "de crecimiento h."

O lo que es equivalente, σ es de crecimiento h, si existe una constante A', que depende solo de la dimensión, tal que $\sigma(\omega_v) \leq A' h(\delta_v)$ para todo cubo ω_v de lado δ_v.

Definición.- Una función-medida que satisface

$$\text{i) } \lim_{t\to 0} h(t)/t = 0 \quad \text{y} \quad \text{ii) } \exists\, R \geq 1 \ni \int_0^R h(t)/t^2\, dt < \infty$$

se llama "regular".

La siguiente proposición relaciona la integral de Riemann-Stieltjes con el potencial newtoniano, por medio de la proposición 1 :

Proposición 2.- Si h es una función-medida regular y σ es una medida de crecimiento h, entonces, para cada $z \in \mathbb{R}^d$, existe $M_z \geq 0$ tal que $M_z \leq \|\sigma\| = \sigma(\mathbb{R}^d)$ y

$$\mathcal{U}_\sigma(z) = \int_0^\infty \frac{dm_z(r)}{r} = M_z + \int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr$$

Demostración.- Por la proposición 1 sabemos que $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r}\, d\rho_z$ existe (aunque puede valer $+\infty$), porque $f(r) = 1/r$ es medible y no-negativa en $\mathbb{R}^+$.

Además $\int_{(a,b)} \frac{1}{r}\, d\rho_z = \int_a^b \frac{1}{r}\, dm_z(r)$ $\forall\, a>0$, ya que

$\rho_z[0,r] = m_z(r)$ y $f(r) = 1/r$ es continua en $[a,b]$.

Pero $m_z(r)$ es no decreciente en $\mathbb{R}^+$, entonces por el ejercicio 7, capítulo 6 en ([10]) tenemos

$$\int_a^b \frac{1}{r}\, dm_z(r) = \frac{m_z(r)}{r}\Big]_a^b + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr$$

donde lo segundo es $\frac{m_z(b)}{b} - \frac{m_z(a)}{a} + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr$

Por lo que suponemos, $m_z(r) \le \min(Ah(r), \|\sigma\|)$ lo que implica $0 \le \lim_{r\to 0} \frac{m_z(r)}{r} \le A \lim_{r\to 0} \frac{h(r)}{r}$

pero h es regular, por lo que $\lim_{r\to 0} m_z(r)/r = 0$. Además $m_z(r) \le \|\sigma\|$ implica que $\lim_{r\to\infty} m_z(r)/r = 0$. También es cierto que

$$\int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr < A\int_a^b \frac{h(r)}{r^2}\, dr$$

lo que implica que la integral de la izquierda existe, pues h es regular.

Podemos entonces pensar en $\lim_{a\to 0}\left[\frac{m_z(b)}{b} - \frac{m_z(a)}{a} + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr\right]$

Existe y es igual a $\frac{m_z(b)}{b} + \int_0^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr$, puesto que $\lim_{a\to 0} \frac{m_z(a)}{a} = 0$ y la integral es una integral impropia de Riemann.

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,b)}\chi_{[1/n,b]}(r)\cdot\frac{1}{r}\,d\rho_z = \frac{m(b)}{b} + \int_0^b \frac{m(r)}{r^2}\,dr$$

Pero por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,b)}\chi_{[1/n,b]}(r)\cdot\frac{1}{r}\,d\rho_z = \int_{[0,b]} 1/r\,d\rho_z$$

Recurriendo a la proposición 1 y haciendo $b = R_z$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r}\,d\rho_z = \frac{m_z(R_z)}{R_z} + \int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r}\,dr \qquad \forall z\in\mathbb{R}^d$$

Y para terminar, puesto que $R_z \geq 1$, entonces

$$m_z(R_z)/R_z \leq m_z(R_z) \leq \|\sigma\| \qquad \forall z\in\mathbb{R}^d$$

Tómese $\quad M_z := \dfrac{m_z(R_z)}{R_z}$ ∎

Una conexión entre capacidad newtoniana y medida de Hausdorff, es la siguiente:

Teorema 1.- Si E es un conjunto de Souslin en $\mathbb{R}^d$, h es una función medida regular y $\Lambda_h(E)>0$ entonces $C_K(E)>0$.

Demostración.- Por el corolario 1 y teorema 4 del capitulo II existe F un compacto, contenido en E, tal que $M_h(F)>0$. Como en el teorema 2 del capítulo II, existe σ una medida de crecimiento h y tal que $\sigma(F) \geq A M_h(F)$, con $A>0$ y que solo depende de la dimensión. Por lo que $\sigma(F)>0$.

Por la proposición 2, $\mathcal{U}_\sigma(z) = \int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\,dr + M_z$. Ya que σ es de crecimiento h, existe una constante A', que solo depende de la dimensión, tal que $m_z(r) \leq \min(A'h(r), \|\sigma\|)$. De aquí se sigue que

$$\mathcal{U}_\sigma(z) = \int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\,dr + M_z \leq \int_0^R \frac{h(r)}{r^2}\,dr + \int_R^\infty \frac{\|\sigma\|}{r^2}\,dr + M_z$$

Sea T la suma de la parte derecha. Por ser el primer sumando finito, dado que h es regular, y el segundo igual a $\|\sigma\|/R$, entonces $\mathcal{U}_\sigma(z) \leq T < \infty \quad \forall z \in \mathbb{R}^d$.

Defínase $\tilde{\sigma} := T^{-1}\cdot\sigma$. Como $S_\sigma \subset F \subset E$, $S_{\tilde{\sigma}} \subset F \subset E$. Como σ es finita, positiva, con soporte compacto, $\tilde{\sigma}$ también lo es.

Resta observar que $\mathcal{U}_{\tilde{\sigma}}(x) \leq 1 \quad \forall x \in E$, para que $\tilde{\sigma}$ este en Γ_E. Pero esto es claro, pues

$$\mathcal{U}_\sigma(x)\cdot T^{-1} \leq 1 \quad \forall x \in E \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_\sigma(x)\cdot T^{-1} = \mathcal{U}_{\tilde{\sigma}}(x)$$

Hemos obtenido de esta manera, una $\tilde{\sigma}$ en Γ_E tal que $\tilde{\sigma}(E)>0$, pues $T^{-1}\sigma(E)>0$. De lo cual se sigue que $C_K(E)>0$ ■

Con el fin de dar un criterio conveniente para que la capacidad newtoniana se anule para un conjunto E acotado, definimos $A(r)$ como:

$$A(r) := \inf \{ \# \{S_r\} \mid \bigcup S_r \supset E \}$$

i,e.. $A(r)$ es el número mas pequeño que se puede obtener sobre las cardinalidades de las cubiertas de bolas con radio r para E.

$A(r)$ esta bien definida por el principio del buen orden.

Lema 1.- a) $A(r)$ es no creciente

b) Existe C, constante que solo depende de la dimensión, tal que para toda r en $\mathbb{R}^+$, si x es un elemento de E, entonces x pertenece a lo más a C bolas de cualquier cubierta de bolas, con radio r, minimal, para E.

Demostración.- a) Supongamos que $r_1 \leq r_2$ y que $\{B_{r_1}(x_i)\}_{i=1}^{s}$ es cubierta de E. Entonces $\{B_{r_2}(x_i)\}_{i=1}^{s}$ también es cubierta de E. Por lo tanto $A(r_1) \geq A(r_2)$

b) Sea $C = 4^d$; d la dimensión. Supongamos que $\{\tilde{B}_r(x_i)\}_{i=1}^{A(r)}$ es una cubierta minimal.

Dado una bola $B_{2r}(x)$ existen 4^d bolas de radio r que la cubren.

Supóngase que $x \in E$ y que $x \in \bigcap_{j=1}^{q} \tilde{B}_r(x_{i_j})$. Así se tiene $B_{2r}(x) \supset \bigcup_{j=1}^{q} \tilde{B}_r(x_{i_j})$. Por lo tanto q tiene que ser menor que ó igual a $C=4^d$. Pues de lo contrario $4^d + A(r) - q < A(r)$, que es una contradicción a que $\{\widetilde{B}_r(x_i)\}_{i=1}^{A(r)}$ sea minimal ■

Lema 2: Si E es un conjunto de Souslin acotado en $\mathbb{R}^d$ y si $\{\vec{B}_r(x_i)\}_{i=1}^{A(r)}$ es una cubierta minimal de E, con bolas de radio r, entonces para cualquier medida μ con $S\mu \subset E$ se tiene la desigualdad $C\cdot\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{A(r)} \mu(\vec{B}_r(x_i))$. En particular, dado una función f medible no-negativa, entonces se cumple que:

$$C\int_E f\,d\mu \geq \sum_{i=1}^{A(r)} \int_{\vec{B}_r(x_i)} f\,d\mu$$

Demostración: Si $A(r) \leq C$ entonces el lema es claro, pues sucede $\mu(E) \geq \mu(E\cap\vec{B}_r(x_i)) = \mu(\vec{B}_r(x_i))$ para toda $i=1,2,\ldots,A(r)$ y $C\cdot\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{A(r)} \mu(E) \geq \sum_{i=1}^{A(r)} \mu(\vec{B}_r(x_i))$.

Supongamos que $A(r) > C$.

Tomemos $B_1^1 := \vec{B}_r(x_1)$ y $B_i^1 := \vec{B}_r(x_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j^1$, entonces

$$\mu(E) \geq \sum_{j=1}^{A(r)} \mu(E_j).$$

Considérese

$$\begin{array}{lll}
\vec{B}_r(x_1)\cap\vec{B}_r(x_2) & & \\
\vec{B}_r(x_1)\cap\vec{B}_r(x_3) & \vec{B}_r(x_2)\cap\vec{B}_r(x_3) & \vdots \\
\cdots\quad\cdots & \cdots\quad\cdots & \\
\vec{B}_r(x_1)\cap\vec{B}_r(x_{A(r)}) & \widetilde{B}_r(x_2)\cap\vec{B}_r(x_{A(r)}) & \vec{B}_r(x_{A(r)-1})\cap\vec{B}_r(x_{A(r)})
\end{array}$$

defínase $\mathcal{Q}_j^i$ como la intersección i-ésima que marca la flecha.

Entonces se define $B^2_i := Q^2_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} B^2_j$ y tenemos

$$\mu(E) \geq \sum_i \mu(B^2_i)$$

Ahora veamos las C- intersecciones :

$\tilde{B}_r(x_1)\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{c-1})\cap\tilde{B}_r(x_c)$

... ...

$\tilde{B}_r(x_1)\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{c-1})\cap\tilde{B}_r(x_{c+1})$

... ...

$\tilde{B}_r(x_1)\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)-c+1})\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)})$

$\tilde{B}_r(x_2)\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{c+1})$

... ...

$\tilde{B}_r(x_2)\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)-c})\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)-1})$

$\tilde{B}_r(x_2)\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)-c})\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)})$

$\tilde{B}_r(x_{A(r)})\cap\dots\cap\tilde{B}_r(x_{A(r)})$

Sea Q^c_j la c-intersección que marca la flecha y se define $B^c_i := Q^c_j - \bigcup_{j=1}^{i-1} Q^c_j$ y así $\mu(E) \geq \sum_i \mu(B^c_i)$. Ya que $C+1$-intersecciones son vacias por el lema 1, y ya que $\mu(E) \geq \sum_i \mu(B^k_i)$, para $k=1,\dots,c$:

$$c\,\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1} \mu(B^i_j) \geq \sum_{i=1}^{A(r)} \mu(\tilde{B}_r(x_i)) \qquad \blacksquare$$

Para un conjunto E finito , $A(r)$ es constante , igual a la cardinalidad de E , para todos los radios r mayores que una cierta r_0 De lo cual se tiene $\int_0^1 \frac{dr}{A(r)\,r^2} = \infty$. Pero también, $C_K(E) = 0$ porque no existe $\mu \in \Gamma_E$ tal que $\mu \neq 0$. En efecto, $0 \neq \mu \in \Gamma_E$ implicaría que existe $x_0 \in E$ tal que $\mu(x_0) > 0$, lo que a su vez implicaría :

$$1 \geq \mathcal{U}_\mu(x_0) \geq \int_{x_0} \frac{1}{|x-x_0|}\, d\mu(y) = \int_{x_0} \frac{1}{|x_0-x_0|}\, d\mu(y) = \infty$$

Lo que es una contradicción . Mas en general se tiene :

Teorema 2.- $-\int_0^1 \frac{K'(r)}{A(r)}\,dr = \infty \Longrightarrow C_K(E)=0$. Con $K'(r) = \frac{dK(r)}{dr}$.

Antes de la demostración, demostremos un lema.

Lema 3.- Si $\mu \in \Gamma_E$, entonces existe M_0 (constante) tal que:

$$\mathcal{U}_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r}\,d\rho_z = \int_0^\infty \frac{dm_z(r)}{r} \geq M_0 + \int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\,dr$$

Demostración.- Las tres primeras igualdades son directas usando la proposición 1. Para la desigualdad, nótese que en la proposición 2 no se utilizan sus hipótesis para decir que:

$$\int_{(a,b)} \frac{1}{r}\,d\rho_z = \int_a^b \frac{1}{r}\,dm_z(r) = \frac{m_z(b)}{b} - \frac{m_z(a)}{a} + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\,dr \qquad \ldots(1)$$

La desigualdad de Tchebycheff nos dice que si tomamos γ una medida finita y f una función medible

$$\gamma\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha}\int f\,d\gamma$$

En nuestro caso μ es finita y $f(x) = |x-z|^{-1}$ es medible, así:

$$m_z(r) = \mu\{x \mid |x-z| \leq r\} = \mu\{x \mid f(x) \geq r^{-1}\} \geq (r^{-1})^{-1}\int f\,d\mu$$

Pero $(r^{-1})^{-1}\int f\,d\mu = r\int \frac{1}{|x-z|}\,d\mu(x) = r\,\mathcal{U}_\mu(z) \leq r$, pues $\mathcal{U}_\mu(z) \leq 1$ para toda z que pertenece a E. Por lo tanto:

$$\frac{m_z(r)}{r} \leq 1 \qquad \text{para toda } r \text{ en } \mathbb{R}^+$$

Por lo tanto, de (1) :

$$\int_{(a,b)} \frac{1}{r}\, d\rho_z = \int_a^b \frac{1}{r}\, dm_z(r) \geq \frac{m_z(b)}{b} - 1 + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr \quad \ldots (2)$$

El limite $\lim_{a \to 0} \left[\frac{m_z(b)}{b} - 1 + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr \right]$ existe y al sacar limite a (2) se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,b)} \chi_{[1/n,b]}(r) \cdot \frac{1}{r}\, d\rho_z \geq \lim_{a\to 0} \left[\frac{m_z(b)}{b} - 1 + \int_a^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr \right]$$

de, donde se sigue que :

$$\int_0^b \frac{1}{r}\, d\rho_z \geq \frac{m_z(b)}{b} - 1 + \int_0^b \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr$$

Tómese $b = R_z$ y $M_0 = \frac{m_z(b)}{b} - 1$ y obtenemos lo que deseabamos ■

Demostración del teorema 2.- Sea $d = 3$. Entonces $K'(r) = -\frac{1}{r^2}$. Supo- nemos pues que $\int_0^1 \frac{dr}{A(r)\, r^2} = \infty$.

Por contradicción. Supongamos que $C_K(E) > 0$. Esto implica que existe $\mu \in \Gamma_E$ tal que $\mu(E) > 0$.

$I(\mu) := \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|X-Y|}$ es finita, pues

$$\iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|X-Y|} = \int \mathcal{U}_\mu(Y)\, d\mu(Y) \leq \int d\mu(Y) < \infty$$

pues μ es finita y $\mathcal{U}_\mu(Y) \leq 1$.

Usemos el lema 3, y se obtiene :

$$l(\mu) = \int\int_0^\infty \frac{1}{r}\, dm_z(r)\, d\mu(z) \geqslant \int\left[M_0 + \int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr\right] d\mu(z)$$

donde el último término es $M_0\int d\mu(z) + \int\int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr\, d\mu(z)$. Por lo tanto:

$$\infty > H := l(\mu) - M_0\int d\mu(z) > \int\int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr\, d\mu(z)$$

Como $\frac{m_z(r)}{r^2} \geqslant \frac{m_z(\frac{1}{2^{n+1}})}{r^2}$ cuando $\frac{1}{2^n} \geqslant r \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr \geqslant \int_0^1 \frac{m_z(r)}{r^2}\, dr \geqslant \sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{m_z(\frac{1}{2^{n+1}})}{r^2}\, dr$$

Por consiguiente $H \geqslant \int\left[\sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{m_z(\frac{1}{2^{n+1}})}{r^2}\, dr\right] d\mu(z)$

y por el teorema de convergencia monotona:

$$\int\left[\sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{m_z(\frac{1}{2^{n+1}})}{r^2}\, dr\right] d\mu(z) = \sum_{n=0}^\infty \left[\int\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{m_z(\frac{1}{2^{n+1}})}{r}\, dr\, d\mu(z)\right]$$

por lo que

$$H \geqslant \sum_{n=0}^\infty \left[\int\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{m_z(\frac{1}{2^{n+1}})}{r^2}\, dr\, d\mu(z)\right] = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{1}{r^2}\, dr\right)\left[\int m_z\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right) d\mu(z)\right]$$

Es decir:

$$H \geqslant \sum_{n=0}^\infty 2^n \int m_z\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right) d\mu(z)$$

Sean $A_n := A\left(\frac{1}{2^n}\right)$ y $\left\{\widetilde{B}_{\frac{1}{2^n}}(x_i)\right\}_{i=1}^{A_n}$ una cubierta minimal para E, $n \in \mathbb{N}$.

Por el lema 2

$$C\int m_z\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right) d\mu(z) \geq \sum_{i=1}^{A_{n+2}} \int_{\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)} m_z\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right) d\mu(z)$$

Para toda z en $\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}$, resulta que $B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(z) \supset \widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)$. De donde :

$$\mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)\right) \leq m_z\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Por tal razón :

$$\int_{\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)} m_z\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right) d\mu(z) \geq \int_{\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)} \mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)\right) = \mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x_i)\right)\int_{\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x_i)} d\mu(z)$$

donde el último término es $\mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)\right)^2$. De aquí :

$$H \geq \sum_{n=0}^{\infty}\left[2^n C^{-1} \sum_{i=1}^{A_{n+2}} \mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)\right)^2\right]$$

Por Schuartz , tenemos

$$\mu(E)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{A_{n+2}} \mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)\right)\right)^2 \leq A_{n+2}\left[\sum_{i=1}^{A_{n+2}} \mu\left(\widetilde{B}_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_i)\right)^2\right]$$

por lo tanto $H \geq \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n C^{-1} A_{n+2}^{-1} \mu(E)^2\right)$, y esto implica que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n A_{n+2}^{-1} < \infty$, lo que a su vez implica $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} A_{n+2} = 4\sum_{n=0}^{\infty} 2^n A_{n+2} < \infty$.

Pero $\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{dr}{A(r)r^2} \le A_n^{-1} \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{dr}{r^2} = A_n^{-1} 2^n$, de lo que se concluye:

$$\int_0^1 \frac{dr}{A(r)r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{dr}{A(r)r^2} \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} A_{n+2}^{-1} < \infty$$

que es una contradicción. Por lo tanto $C_K(E)$ tiene que ser cero ■

2.- Algunas relaciones entre C_K y Λ_h, se dan a continuación, para ciertos conjuntos de Cantor:

Sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión no-creciente con $\lambda_1 < 1/2$. Definimos, por inducción, K_n. Sea $K_0 := [0,1]$, K_n es obtenido de K_{n-1}, remplazando cada componente de K_{n-1} por sus intervalos extremos de longitud $q_n := \prod_{j \le n} \lambda_j$. Así, $K_1 = [0, \lambda_1] \cup [1-\lambda_1, 1]$

$K_2 = [0, \lambda_1 \cdot \lambda_2] \cup [\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2, \lambda_1] \cup [1-\lambda_1, 1-\lambda_1+\lambda_1\lambda_2] \cup [1-\lambda_1\lambda_2, 1]$.

Es claro que $K_{n+1} \subset K_n$ y K_n consiste de intervalos de longitud q_n.

Luego definimos $K(\lambda) := \bigcap K_n$ y $E = E(\lambda) := K(\lambda) \times K(\lambda)$. Esto es, $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$, donde $E_n := K_n \times K_n$.

Sean $E_{n,j}$ las componentes de E_n. Se tiene la siguiente afirmación:

Proposición 3.- Existe una medida μ en E tal que $\mu(E_{n,j}) = 4^{-n}$, para toda n y j.

Demostración.- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de uniones finitas de intervalos ajenos en $[0,1]$; ellos pueden ser $(a,b), [a,b); (a,b]$ ó $[a,b]$.

$\mathcal{A}$ casí es un σ-álgebra sobre $[0,1]$:

Es claro que $\emptyset \in \mathcal{A}$ y si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$. Para la unión finita, basta fijarse en A_1 y A_2 elementos de $\mathcal{A}$ y ver que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Pero si dos componentes $I_1 \subset A_1$ y $I_2 \subset A_2$ se intersectan, se considera $I := I_1 \cup I_2$ como componente de $A_1 \cup A_2$ y por lo tanto $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

El primer paso será construir una función σ sobre $\mathcal{A}$, tal que $\sigma(K_{n,j}) = 2^{-n}$, donde $K_{n,j}$ es una componente de K_n, y que satisfaga

a) $\sigma(\emptyset) = 0$ b) $\sigma(A \sqcup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$

c) $A_n \searrow \emptyset \Rightarrow \sigma(A_n) \searrow 0$ y d) $\sigma[0,1] < \infty$

para A, B y $A_n \in \mathcal{A}$.

Defínase antes $\sigma_n : \{K_{n,j}\} \longrightarrow [0,1]$, para toda $n \in \mathbb{N}$, como $\sigma_n(K_{n,j}) := 2^{-n}$.

Luego sea $\sigma[a,b] := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{K_{n,j} \subset [a,b]} \sigma_n(K_{n,j})$

Veamos que σ puede ser función sobre $\mathcal{A}$, con las propiedades deseadas. Defínase $\sigma\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{m} I_i\right) := \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(I_i)$ para todo $\bigsqcup\limits_{i=1}^{m} I_i \in \mathcal{A}$. Para ver que σ es efectivamente una función sobre $\mathcal{A}$ basta demostrar que $\sigma(I \sqcup J) = \sigma(I) + \sigma(J)$ con I y J intervalos ajenos. Hay dos posibilidades:

i) $\bar{I} \cap \bar{J} = \emptyset$ ($\bar{I}$ la cerradura de I).

Aquí

$$\sum_{K_{m,i} \subset \overline{I \cup J}} \sigma_m(K_{m,i}) = \sum_{K_{m,i} \subset \bar{I}} \sigma_m(K_{m,i}) + \sum_{K_{m,i} \subset \bar{J}} \sigma(K_{m,i})$$

Por lo tanto $\delta(I \sqcup J) = \delta(I) + \delta(J)$

ii) $\bar{I} \cap \bar{J} = \{P\}$

Hay dos nuevas posibilidades:

i') $P \notin K(\lambda)$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ni \forall n, i, \ K_{n,i} \cap (P-\varepsilon, P+\varepsilon) = \phi \Rightarrow$

$\delta(I \sqcup J) = \delta(I \sqcup J - (P-\varepsilon, P+\varepsilon)) = \delta(I - (P-\varepsilon, P+\varepsilon)) + \delta(J - (P-\varepsilon, P+\varepsilon))$

$= \delta(I) + \delta(J)$ (por i))

ii') $P \in K(\lambda)$

$\Rightarrow \forall n \ \exists i_n \ni P \in K_{n,i_n} \Rightarrow \delta(I \sqcup J - K_{n,i_n}) =$

$\delta(I - K_{n,i_n}) + \delta(I - K_{n,i_n})$. Pero $\delta(A - K_{n,i_n}) \leq \delta(A)$

$\leq \delta(A - K_{n,i_n}) + \delta(K_{n,i_n}) = \delta(A - K_{n,i_n}) + 2^{-n}$. Entonces

$\lim_{n\to\infty} \delta(A - K_{n,i_n}) = \delta(A)$. Por lo tanto

$$\delta(I \sqcup J) = \delta(I) + \delta(J)$$

Esto además muestra que δ satisface b).

En vista de que $K_{n,i} \supset \bigcup_{j=1}^{2^{m-n}} K_{m,i_j}$ y $K_{n,i} \cap K_{m,i} = \phi$

para $i \neq i_1, \ldots, i_{2^{m-n}}$ $(m \geq n)$, se tiene:

$$\delta(K_{n,i}) = \lim_{m\to 0} \sum_{K_{m,i} \subset K_{n,i}} \delta(K_{m,i}) = \lim_{m\to 0} 2^{m-n}(2^{-m}) = 2^{-n}$$

Además, es claro que δ satisface a) y d), pues $\delta(I)$ es menor que ó igual a 1 para I intervalo contenido $[0,1]$.

Resta ver que δ satisface c:

Sea $A_n \downarrow \phi$, $A_n \in \mathcal{A}$. Con los intervalos ajenos que forman las A_n's podemos formar un número numerable de ajenos. Si demostramos que $J_m \downarrow \emptyset \Rightarrow \sigma(J_m) \downarrow 0$, para cualquier encaje de intervalos, entonces $\sigma(A_n) \downarrow 0$. Basta pues demostrar que si $\bar{J}_n \downarrow \{p\}$, $\sigma(\bar{J}_n) \downarrow 0$.

Hay dos posibilidades

i).- $p \notin K(\lambda)$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ∍. $\forall n \geq n_0$ $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \cap K_{n,i} = \emptyset$, y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0$ ∍ $\forall m \geq m_0$ $J_m \subset (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \Rightarrow \exists \varepsilon$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ∍ $\forall n \geq n_0$, $\sigma(J_n) \leq \sigma(p-\varepsilon, p+\varepsilon) = 0$.

ii) $p \in K(\lambda)$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Hay dos nuevos casos

i') $\exists j_0$ ∍ $p \in \partial K_{n,j_0}$

Como $d(K_{n,j_0}, \bigcup_{i \neq j_0} K_{n,i}) = \varepsilon > 0$ y $\lim_{n \to 0} \ell(J_m) = 0$, $\exists m_0$ ∍ $\forall m > m_0$ $\ell(J_m) \leq \varepsilon/2$, $\Rightarrow \exists m_0$ ∍ $\forall m \geq m_0$ $(K^c_{n,j_0} \cap J_m) \cap K_{n,i} = \emptyset$ $(\forall i) \Rightarrow$ $\exists m_0$ ∍ $\forall m \geq m_0$ $\sigma(J_m) \leq \sigma(J_m \cap K^c_{n,j_0}) + \sigma(J_m \cap K_{n,j_0}) \leq 0 + \sigma(K_{n,j_0}) = 2^{-n}$.

ii') $\exists j_0$ ∍ $p \in \mathring{K}_{n,j_0}$

$\Rightarrow \exists m_0$ ∍ $\forall m \geq m_0$ $J_m \subset \mathring{K}_{n,j} \subset K_{n,j}$. Por lo tanto, $\exists m_0$ ∍ $\forall m \geq m_0$, $\sigma(J_m) \leq 2^{-n}$.

Así, existe σ, definida sobre el álgebra $\mathcal{A}$, con las propiedades requeridas. Pero la σ-algebra generada por $\mathcal{A}$ es precisamente la σ-álgebra de Borel en $[0,1]$, $B[0,1]$. Por lo tanto se aplica el teorema de extensión para medidas (pag. 27)* y concluimos que existe una medida

$$\tilde{\sigma} : B[0,1] \longrightarrow [0,1]$$

tal que $\tilde{\sigma}|\mathcal{A} = \sigma$. Por lo tanto, para toda n y para toda j $\tilde{\sigma}(K_{n,j}) = 2^{-n}$.

Ahora defino $\mu : B[0,1] \otimes B[0,1] \longrightarrow [0,1]$ como la medida producto.

Es claro que μ satisface las condiciones de la proposición 3 ■

* [13]

Lema 4.- Sea h una función-medida. Entonces son equivalentes:

a) $m_h(E(\lambda)) > 0$

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} 4^n h(q_n) > 0 \qquad (q_n = \prod_{j\leq n} \lambda_j)$

c) μ de la proposición 3 es de crecimiento h

Demostración: c) $\Rightarrow$ a) $\mu(E(\lambda)) > 0$. Por ser μ de crecimiento h, implica la existencia de $A > 0$ tal que $\mu(S_v) \leq A\,h(r_v)$ para toda bola S_v de radio r_v. Por el teorema 2 capítulo II se tiene que $\mu(E(\lambda)) \leq A\,M_h(E(\lambda))$ y que $M_h(E(\lambda)) > 0$. Usemos el corolario 1, capítulo II para concluir que $m_h(E(\lambda)) > 0$.

a) $\Rightarrow$ b) Ya que $E(\lambda) \subset \bigcup_{j=1}^{4^n} E_{n,j}$ para toda n en $\mathbb{N}$, $m_h(E(\lambda)) \leq 4^n h(q_n)$ para toda n en $\mathbb{N}$. Por lo tanto

$$0 < m_h(E(\lambda)) \leq \underline{\lim}\, 4^n h(q_n)$$

b) $\Rightarrow$ c) Sea S un cuadrado de lado δ. Supongamos que $q_{n+1} \leq \delta \leq q_n$. Entonces S está cubierto por a lo mas 4 cuadrados $E_{n,i}$. Así $\mu(S) = \mu(E(\lambda) \cap S) \leq 4^{-n}\cdot 4$. Por b) existe K_0 tal que $\forall n \geq K_0$, $h(q_n)4^n > C_0$. De donde $\mu(S) \leq 4^{-n}\cdot 4 < C_0^{-1}\cdot 4\cdot h(\delta)$. Por lo tanto, existe $C_1 := C_0^{-1}\cdot 4$ tal que $\mu(S) \leq h(\delta)C_1$ siempre que $\delta \leq q_{K_0}$. Sea $A := C_1\cdot 4\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 4^{K_0-1}$. Por lo tanto, para toda δ, $\mu(S) \leq A\cdot h(\delta)$. ∎

Teorema 3.- Sea h una función-medida. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum 4^{-n}/q_n < \infty$

b) Existe h función-medida tal que $\int_0^{\lambda_1} \frac{h(r)}{r}\,dr < \infty$ y

$m_h(E(\lambda)) > 0$

c) μ, de la proposición 3, tiene potencial newtoniano acotado

d) $C_K(E) > 0$

Demostración.- a) $\Rightarrow$ b) Existe una función diferenciable, creciente h tal que* $h(q_n) = 4^{-n}$. Tomemos a h como función medida. Se sigue:

$$\int_0^{\lambda_1} \frac{h(t)}{t^2}\,dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{q_{n+1}}^{q_n} \frac{h(t)}{t^2}\,dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \int_{q_{n+1}}^{q_n} \frac{dt}{t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}(1-\lambda_1)/q_n$$

es decir $$\int_0^{\lambda_1} \frac{h(t)}{t^2}\,dt \leq (1-\lambda_1) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}/q_n < \infty$$

Por otro lado, $m_h(E(\lambda)) = 1$, porque en cada cubierta de $E(\lambda)$ esta contenida, para alguna n_0 en $\mathbb{N}$, $\bigcup_j E_{n,j}$.

b) $\Rightarrow$ c) Por el lema 1, μ es de crecimiento h. Es claro, como en la demostración del teorema 1, que $\mathcal{U}_\mu(x) \leq T$ para toda x en E.

c) $\Rightarrow$ d) Tomando $\tilde{\mu} := T^{-1}\mu$ tenemos que $\tilde{\mu} \in \Gamma_E$ y $\tilde{\mu}(E(\lambda)) = T^{-1}\mu(E(\lambda)) = T^{-1} > 0$

d) $\Rightarrow$ a) Usemos el teorema 2. Como suponemos que $C_K(E(\lambda)) > 0$, entonces sucede que:

$$\int_0^1 \frac{dr}{A(r)\,r^2} < \infty$$

* [8]

Es claro que $A(q_n) \leq 4^n$, pues cada $E_{n,j}$ es cubierto por una circunferencia de radio q_n (la concéntrica a la circunscrita). Después:

$$\infty > \int_0^1 \frac{dr}{A(r)r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{q_{n+1}}^{q_n} \frac{dr}{A(r)r^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A(q_n)} \int_{q_{n+1}}^{q_n} \frac{1}{r^2}\, dr =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A(q_n)} \left[\frac{1}{q_{n+1}} - \frac{1}{q_n}\right] \geq \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \left[\frac{1-\lambda_1}{q_n}\right] = (1-\lambda_1) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}/q_n \qquad \blacksquare$$

Con teorema anterior podemos encontrar entre los conjuntos de Cantor algunos que tienen capacidad newtoniana positiva y otros con capacidad newtoniana nula:

i) Dado ε_0 tal que $0 < \varepsilon_0 < 1/2$ el conjunto de Cantor $E(\lambda)$ construido a partir de una sucesión $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ no-creciente con $\frac{1}{4(1-\varepsilon_0)} \leq \lambda_i < \frac{1}{2}$ para toda i, tiene capacidad newtoniana positiva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}/q_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} (4(1-\varepsilon_0))^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_0)^n < \infty$$

Un ejemplo para este caso es $\lambda_i = \frac{1}{3}$ para toda i. $E(\lambda)$ es el conjunto clasico de Cantor.

b) El conjunto de Cantor $E(\lambda)$ construido a partir de una sucesión no-creciente $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lambda_1 < 1/2$ y existe una i_0 tal que $\lambda_{i_0} \leq 1/4$, tiene capacidad newtoviana nula :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}/q_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_0-1})^{-1} 4^{(n-i_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_0-1})^{-1} 4^{-i_0}$$

$$= (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_0-1} \cdot 4^{i_0})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Un ejemplo para este caso es $\lambda_i = 1/4$ para toda i.

[A] APENDICE

Convergencia débil.

Definición.- Un conjunto E se llama "regular con respecto a una medida μ" si $\mu(\partial E)=0$. Se denota $R\mu$ al conjunto de conjuntos regulares con respecto a μ.

Si E es regular con respecto a μ es claro que

$$\mu(E)=\mu(\bar{E})=\mu(E^{\circ})$$

Definición.- Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas positivas, definidas sobre los borelianos de $\mathbb{R}^d$. Si existe una medida positiva definida también sobre los borelianos tal que para todo $E\in R_\mu$ $\lim_{n\to\infty}\mu_n(E)=\mu(E)$, entonces diremos que μ_n converge debilmente a μ.

Teorema 1.- Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas positivas definidas sobre los borelianos E contenidos en un acotado A, tales que $0\leq\mu_n(E)\leq M_0$ para toda n, entonces podemos seleccionar una subsucesión μ_{n_K} de μ_n, la cual converge debilmente a una medida positiva μ.

Demostración.- Sea $d=2$. Supongamos que A esta contenido en un cuadrado Δ.

Dividimos los lados del cuadrado en 2^n partes iguales, entonces obtenemos 4^n cuadrados. De aquí, el conjunto α formado por la unión de todos los cuadrados producidos por todas las particiones para $n \in \mathbb{N}$. También el conjunto de subconjuntos finitos de α es numerable, denotemoslos por $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ Sean $A_{2j-1} := \mathring{I}_j$ y $A_{2j} := \overline{I}_j$. Considerese el arreglo:

$$
\begin{array}{llll}
\mu_1(A_1), & \mu_2(A_1), & \ldots, & \mu_n(A_1), \ldots \\
\mu_1(A_2), & \mu_2(A_2), & \ldots, & \mu_n(A_2), \ldots \\
\ldots & \ldots & & \ldots \\
\mu_1(A_n), & \mu_2(A_n), & \ldots, & \mu_n(A_n), \ldots \\
\ldots & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Como $\{\mu_k(A_1)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de términos positivos y acotada por μ_0, existe $\{k_1\} \subset \mathbb{N}$ tal que $1_1 \leq 2_1 \leq \ldots \leq n_1 \leq \ldots$ y $\{\mu_{k_1}(A_1)\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Definimos $\tilde{\mu}_1 := \mu_{1_1}$. Ahora consideramos $\{\mu_{k_1}(A_2)\}_{k=1}^{\infty}$. Ya que también esta sucesión está acotado por μ_0, existe $\{k_2\} \subset \{k_1\}$ tal que $1_2 \leq 2_2 \leq \ldots \leq n_2 \leq \ldots$ y $\{\mu_{k_2}(A_2)\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Definimos $\tilde{\mu}_2 := \mu_{2_2}$

De una manera análoga se define $\tilde{\mu}_n$ como μ_{n_n}. Nótese que entonces la sucesión $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_i)$ existe para toda i.

Sin perdida de generalidad supongamos que $\tilde{\mu}_n = \mu_n$.

Sea F un conjunto compacto y O un abierto entonces se define $\mu(F) := \inf_{I_j \supset F} (\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{I}_j))$ y $\mu(O) = \sup_{\overline{I}_j \subset O} \lim_{n\to\infty} \mu_n(\overline{I}_j)$

Si $F \subset O \subset A$, existe I_j, tal que $F \subset \mathring{I}_j \subset \overline{I}_j \subset O$, así por definición, $\mu(F) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{I}_j) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n(\overline{I}_j) \leq \mu(O)$, de aquí

$$\mu(F) \leq \mu(O) \quad \text{si} \quad F \subset O \qquad \ldots (1)$$

Ya que $\overline{I}_j \subset O$, tenemos $\mu_n(\overline{I}_j) \leq \mu_n(O)$ y luego $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\overline{I}_j)$ es menor que ó igual a $\underline{\lim}_{n} \mu_n(O)$ así por definición:

$$\mu(O) \leq \underline{\lim}_{n} \mu_n(O) \qquad \ldots (2)$$

Ya que $F \subset \mathring{I}_j$, tenemos $\mu_n(F) \leq \mu_n(\mathring{I}_j)$ y luego $\overline{\lim}_{n} \mu_n(F)$ es menor que ó igual a $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{I}_j)$ así por definición:

$$\overline{\lim}_{n} \mu_n(F) \leq \mu(F) \qquad \ldots (3)$$

De (1) y (2) y por definición:

$$\mu(O) \geq \sup_{F \subset O} \mu(F) \geq \sup_{F \subset O} \left(\overline{\lim}_{n} \mu_n(F)\right) \geq \sup_{\overline{I}_j \subset O} \left(\lim_{n\to\infty} \mu_n(\overline{I}_j)\right) = \mu(O)$$

esto es:

$$\mu(O) = \sup_{F \subset O} \mu(F) \qquad \ldots (4)$$

De (1) y (3) y por definición:

$$\mu(F) \leq \inf_{F \subset O} \mu(O) \leq \inf_{F \subset O} \left(\underline{\lim}_{n} \mu_n(O)\right) \leq \inf_{F \subset \mathring{I}_j} \left(\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{I}_j)\right) = \mu(F)$$

esto es:

$$\mu(F) = \inf_{F \subset O} \mu(O) \qquad \ldots (5)$$

Por (4) y (5) se prueba que μ es una medida positiva sobre los borelianos contenidos en A.

Supongamos que $E \in R_\mu$, entonces

$$\mu(E) = \mu(E^\circ) \leq \underline{\lim}_{n} \mu_n(E^\circ) \leq \underline{\lim}_{n} \mu_n(E) \leq \overline{\lim}_{n} \mu_n(E) \leq \overline{\lim}_{n} \mu_n(\overline{E})$$
$$\leq \mu(\overline{E}) = \mu(E)$$

y esto es:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(E) = \mu(E) \qquad \blacksquare$$

Sean $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de todas las medidas sobre $(X,\mathcal{B})$, $C_b(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas, acotadas sobre X, $U_\rho(X)$ el conjunto de todas las funciones uniformemente continuas, acotadas sobre (X,ρ) (ρ es cualquier métrica equivalente sobre X).

Teorema 2.- Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{M}(X)$. Dado $\mu \in \mathcal{M}(X)$ son equivalentes

i) $\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n = \int f\, d\mu \qquad \forall f \in C_b(X)$

ii) $\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n = \int f\, d\mu \qquad \forall f \in U_\rho(X)$

iii) $\overline{\lim_n}\ \mu_n(C) \leq \mu(C) \qquad \forall\ C$ cerrado en X

iv) $\underline{\lim_n}\ \mu_n(G) \geq \mu(G) \qquad \forall\ G$ abierto en X

v) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B) \qquad \forall\ B \in R_\mu$

Demostración:- i) $\Rightarrow$ ii) y iii) $\Leftrightarrow$ iv) son obvios.

iv) $\Rightarrow$ v) :

$$\overline{\lim_n}\ \mu_n(B) \leq \overline{\lim_n}\ \mu_n(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(B^\circ) \leq \underline{\lim_n}\ \mu_n(B^\circ) \leq \underline{\lim_n}\ \mu_n(B)$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B) .$$

v) $\Rightarrow$ i) :

Sea $f \in C_b(X)$ y dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ y $\{a_i\}_{i=1}^{N-1}$ tal que $-\|f\| - 1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = \|f\| + 1$.

$$\mu(\{x \mid f(x) = a_i\}) = 0 \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, N-1$$

y $a_i - a_{i-1} < \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, N$.

Sea $B_i = \{x \mid a_{i-1} \leq f(x) < a_i\} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, N$, entonces las B_i's son ajenas, su unión es $\mathbb{X}$ y $\mu(\partial B_i) = 0 \quad \forall i$. También $\| f - \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{B_i}(x) \| < \varepsilon$. De aquí

$$\overline{\lim_n} \left| \int f \, d\mu_n - \int f \, d\mu \right| \leq 2\varepsilon + \overline{\lim_n} \left| \int \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{B_i} \right) d\mu_n - \int \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{B_i} \right) d\mu \right|$$

$$\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{N} |a_i| \, \overline{\lim_n} \, |\mu_n(B_i) - \mu(B_i)| \leq 2\varepsilon$$

pero ε fué arbitraria.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Sea C cerrado y sea

$$f_K(x) := \left[\frac{1}{1 + \rho(x, C)} \right]^K, \qquad K \geq 1$$

Entonces $f_K \in \mathcal{U}_\rho(\mathbb{X}) \quad \forall K$ y $f_K(x) \searrow \chi_C(x) \quad \forall x$.

Por lo tanto:

$$\mu(C) = \lim_{K \to \infty} \int f_K \, d\mu = \lim_{K \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int f_K \, d\mu_n \geq \overline{\lim_n} \, \mu_n(C)$$

por lo que la prueba esta completa ∎

Principio del máximo para funciones armónicas.

Sea K compacto de $\mathbb{R}^n$. Sea $U := \overline{\mathbb{R}}^n - K$. ($\overline{\mathbb{R}}^n$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$)

Teorema 3.- Supóngase que u es armónica en U y continua en $\overline{U}$. Entonces u alcanza su máximo en $\partial U = \partial K$.

Demostración: u es continua sobre el compacto $\overline{U}$, entonces u alcanza su máximo en $\mathcal{U}$.

Veremos dos casos:

i) Si $\mathcal{U}$ es conexo en $\mathbb{R}^n$

ii) Si $\mathcal{U}$ no es conexo en $\mathbb{R}^n$

Sea $m = \max_{z \in \overline{\mathcal{U}}} u(z)$:

i) Si u alcanza su máximo en $x_0 \in \mathcal{U}$, por propiedades conocidas de funciones armónicas existe una vecindad V_{x_0} de x_0 tal que u toma el máximo en cada punto $y \in V_{x_0}$. Por lo tanto

$$\underline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid u(x) = m\}$$
$$\underline{B} = \{x \in \mathcal{U} \mid u(x) < m\}$$

son abiertos por ser u continua.

Por ser $\underline{A}$ y $\underline{B}$ abiertos, $\mathcal{U}$ conexo y $\underline{A}$ distinto del vacio, $\underline{A}$ tiene que ser igual a $\mathcal{U}$, i.e. $u(x) = m$ para toda x en $\mathcal{U}$.

ii) Sean $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ las componentes conexas de $\mathcal{U}$ (en $\mathbb{R}^n$)
Supongamos que u alcanza su máximo en x_0 elemento de $\mathcal{U}$. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_i$. Tenemos que u es armónica en C_i y continua en $\overline{C_i}$ (cerradura en $\overline{\mathbb{R}^n}$), pues $\overline{C_i} \subset \overline{\mathcal{U}}$

Si C_i es acotado, por el principio del máximo usual, $u(x) \equiv m$ para toda x en $\overline{C_i}$ y toma su máximo en $\partial C_i \subset \partial \mathcal{U}$.

Si C_i no es acotado, por i), se tiene que $u(x) \equiv m$ para toda x en $\overline{C_i}$. ∎

BIBLIOGRAFIA

1.- Bressler, D. W. y Sion M. The current theory of analytic sets. Canad J. Math. 16 (1964) 207-230.

2.- Carleson, Lenart. Selected problems on exceptional sets. Princeton, N. J., Van Nostrand - c 1967 - 207-229.

3.- Conway, John B. Functions of one complex variable. 2nd Ed. Springer - Verlag N.Y. Heidelberg Berlin

4.- Garnet, John. Analytic capacity and measure. Springer - Verlag Berlin. Heidelberg N.Y.

5.- Kahane, J.P. Mesures et dimensions. Roger Temam (ed.) P 94 - 103, Springer - Verlag Lectures Notes in Math. Vol 565

6.- Marstrand, J. M. Hausdorff two-dimensional measure in 3-space. Proc. London Math. Soc. (1961) 91 - 108

7.- Meyer P. André. Probabilités et potentiel. Herman Publications de L'Institute de mathematique de L'Université de Strasbourg (1966).

8.- Dold, A. Aplicaciones a la teoría de punto fijo. Según un manuscrito de Dold por Prieto C. Notas para topología diferencial I.

9.- Royden H.L. Real Análisis. 2ª edition. Collier Mc Millan International Editions.

10.- Rudin, Walter. Principios de Análisis Matemático 3ª Ed. Mc Graw - Hill.

11.- Stroock D.W. Varadhan S.R.S. Multidimentional Diffusión Process Springer - Verlag Berlin Heidelberg N.Y.

12.- Tsuji, M. Potential theory in modern function theory. Chelsea Publishing Company New York, N.Y.

13.- Veneu, J. Bases mathématiques de calcule des probabilités Ed. Masson et Cie.

14.- Wermer, J. Potencial theory. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg New York.

15.- Halmos, Paul R. Measury theory. Springer-Verlag New-York Heidelberg Berlin.