Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

LA CATEGORIA DE ESPACIOS COMPACTAMENTE GENERADOS

Tesis Profesional que presenta

MA.DE JESUS FIGUEROA TORRES

para obtener el título de:

MATEMATICO

México, D. F. 1983

INDICE

INTRODUCCION

Los espacios compactamente generados fueron considerados en 1955, en el libro de topología general de Kelley (K) y la conveniencia de utilizarlos en topología la estableció Steenrod (S) en 1967, en su importante artículo del cual nos ocuparemos en este trabajo.

Ha sido una preocupación de los topólogos algebraicos establecer una categoría de espacios topológicos adecuada en la cual trabajar. Muchas de las propiedades elementales de la teoría de homotopía pueden establecerse casi en cualquier categoría de espacios topológicos punteados. Pero a medida que nos adentramos más en el estudio, necesitamos hacer ciertas construcciones tales como las de formar espacios producto, espacios de funciones, etc., y es deseable que la categoría en cuestión sea cerrada bajo estas operaciones. Por ejemplo, la categoría de todos los espacios topológicos no es conveniente pues falla la ley exponencial; la categoría de los complejos CW tampoco es conveniente pues no admite espacios de funciones, y tampoco la categoría de Milnor de espacios que tienen el mismo tipo de homotopía de un complejo CW. Parecería que en la categoría de espacios topológicos, se han estado estudiando objetos matemáticos "equivocados", y que los "correctos" serían los espacios compactamente generados de Hausdorff. Veamos por qué: Una categoría de espacios topológicos es conveniente si es lo suficientemente "grande", para que contenga todos los espacios particulares que surgen en la práctica. Además, deberá ser cerrada bajo operaciones como la formación de subespacios, espacios producto, espacios de funciones, espacios de descomposición, composición de operaciones, etc.. También la categoría debe ser lo suficientemente pequeña para que se puedan formular proposiciones verdaderas, a saber que sea cerrada bajo ciertas operaciones, tales como formar productos de espacios y espacios de funciones.

Veremos que la categoría $\mathcal{CG}$ de los espacios compactamente generados es "grande" pues todo espacio Hausdorff localmente compacto, todo espacio Hausdorff que satisface el primer axioma de numerabilidad y todo espacio métrico pertenecen a $\mathcal{CG}$. Modificaremos el producto de dos espacios para que éste sea cerrado, así como las definiciones de subespacio y espacio de funciones y veremos que entonces es una "buena" categoría para hacer topología algebraica.

En el Capítulo I estableceremos algunos conceptos y resultados de topología de conjuntos y teoría de categorías necesarios para que el material subsecuente sea autocontenido. No pretendemos hacer una lista innumerable de resultados, sino que estableceremos únicamente los resultados específicos que utilizaremos en los capítulos siguientes.

En el Capítulo II presentamos un análisis detallado de las propiedades de los espacios compactamente generados que establecerán la conveniencia de dicha categoría.

En el Capítulo III veremos que $\pi_n(X,*)$ posee una estructura de grupo si $n \geq 1$. Dicha ley de composición se puede construir directamente para un espacio topológico punteado X, pero la construcción es más sencilla si X es compactamente generado y si se utilizan los resultados del Capítulo II.

Los prerrequisitos para entender este trabajo son únicamente un curso de topología elemental. El lector encontrará en el Capítulo I los hechos fundamentales que supondremos le son conocidos, de otra manera le señalaremos donde puede encontrarlos en la literatura.

CAPITULO I

RESULTADOS PRELIMINARES

En este capítulo recopilaremos algunos resultados elementales de topología y fijaremos la terminología.

1 RESULTADOS DE TOPOLOGIA GENERAL.

1.1 NOTACION. Sea $B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \right\}$ la bola cerrada de dimensión n en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Denotamos por S^{n-1} a la esfera de dimensión n-1 en $\mathbb{R}^n$, es decir

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \right\} .$$

El cubo de dimensión n en $\mathbb{R}^n$, lo denotamos por I^n, es decir

$$I^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \right\} .$$

1.2 TEOREMA. (G-M (1.8)). Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces un subconjunto A de X es abierto si A es vecindad de cada uno de sus puntos. $V \subset X$ es una vecindad de x en X, si existe $W \in \mathcal{T}$ tal que x está en $W \subset V$.

1.3 DEFINICION. Si A es un subconjunto de X, $x \in X$ se llamará un punto de acumulación de A si y sólo si todo abierto que contiene a x contiene un punto de A distinto de x.

1.4 TEOREMA (G-M (1.11.8)). Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, un subconjunto A de X es cerrado si todos los puntos de acumulación de A están en A.

1.5 DEFINICION. Una base de vecindades de x, en el espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es una subcolección B_x tomada del sistema de vecindades de x, U_x, con la propiedad de que cada U en U_x contiene alguna V en B_x. (La colección U_x de todas las vecindades de x, es el sistema de vecindades de x).

1.6 DEFINICION. Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, una base para $\mathcal{T}$ es una colección $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que

$$\mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \}.$$

1.7 DEFINICION. La topología producto sobre $\prod X_\alpha$ se obtiene tomando como base para los conjuntos abiertos, conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde:

a) U_α es abierto en X_α.

b) $U_\alpha = X_\alpha$ para un número finito de coordenadas.

1.8 TEOREMA (W(17.5)). a) Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto. b) Todo subconjunto compacto de un espacio topológico Hausdorff, es cerrado.

1.9 TEOREMA (G-M(2.19.1)). Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset C \subset X$ dos subconjuntos de X, entonces A es compacto en X si y sólo si A es compacto en C.

1.10 TEOREMA (W(6.3 b)). Si A es un subespacio de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, entonces un subconjunto F de A es cerrado en A si existe un subconjunto cerrado K de X tal que $F = K \cap A$.

1.11 DEFINICION. Si $f: X \rightarrow Y$ y A es un subconjunto de X, entonces $f|A$ (f restringida a A) es la función de A en Y definida por $(f|A)(a) = f(a)$ para toda a en A.

1.12 DEFINICIONES. a) Una sucesión (x_n) en un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice que converge a x en X, y se escribe $x_n \to x$, si para cada vecindad U de x, existe un entero positivo n_0 tal que si $n > n_0$ entonces x_n está en U.
b) Un espacio topológico satisface el primer axioma de numerabilidad, si todo punto en el espacio topológico tiene una base numerable de vecindades.
c) Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es metrizable si existe una función $d: X\times X \to \mathbb{R}$ que satisface para x, y, z en X las siguientes propiedades: i) $d(x,y) \geq 0$; ii) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x=y$; iii) $d(x,y) = d(y,x)$; iv) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

1.13 TEOREMA (W(10.4)). Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio que satisface el primer axioma de numerabilidad y E es un subconjunto de X, entonces x está en la cerradura de E si y sólo si hay una sucesión (x_n) contenida en E la cual converge a x.

1.14 PROPOSICION (G-M(2.34.2)). Todo espacio compacto y Hausdorff es localmente compacto.

1.15 TEOREMA (G-M(3.10)). Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in M\}$ una familia de espacios compactos. Entonces el producto $X = \prod_{\alpha\in M} X_\alpha$ es compacto.

1.16 TEOREMA (W(18.2)). Un espacio Hausdorff ($X,\mathcal{T}$) es localmente compacto si cada punto de X tiene una vecindad compacta.

1.17 TEOREMA (G-M(2.35.2)). Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto, $x \in X$ y U un abierto tal que x está en U. Entonces existe un abierto W tal que $\overline{W}$ es compacto y $x \in W \subset \overline{W} \subset U$.

1.18 DEFINICION. Sean ($X,\mathcal{T}$) y ($Y,\mathcal{T}'$) espacios topológicos y $f:X \rightarrow Y$ una función . Decimos que f es continua en $x \in X$ si y sólo si para cada vecindad V de $f(x)$ en Y existe una vecindad U de x en X tal que $f(U) \subset V$. Diremos que f es continua en X si y sólo si f es continua en cada $x \in X$.

1.19 TEOREMA (G-M(2.11)). Sea f una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}(C)$ es un cerrado en X para todo cerrado C contenido en Y.

1.20 PROPOSICION (G-M(2.10)). i) Si f de X en Y es continua y Z es un subconjunto de Y tal que $f(X)$ está contenido en Z, entonces la imagen inversa de cada abierto en Z es un abierto en X. ii) Si f de X en Y es continua y A es un subconjunto de X entonces $f|A$ es continua.

1.21 TEOREMA (W(7.3)). Si X, Y y Z son espacios topológicos y $f:X \to Y$ y $g:Y \to Z$ son continuas, entonces

$g \circ f:X \to Z$ es continua.

1.22 TEOREMA (G-M(3.4.1)). Sea X_α un espacio topológico para toda α en M. Si $X = \prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ entonces para cada α en M, la α-proyección $\pi_\alpha:X \to X_\alpha$ dada por $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ la α-coordenada de x, es continua y abierta; es decir, la imagen de cada abierto es un abierto.

1.23 TEOREMA (W(8.8)). Una función $f: X \to \prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada α en M.

1.24 DEFINICION. Si X y Y son espacios topológicos, una función $f:X \to Y$ es un homeomorfismo si y sólo si f es inyectiva, suprayectiva, continua y f^{-1} es continua. Diremos que X es homeomorfo a Y si existe un homeomorfismo $f:X \longrightarrow Y$ y lo denotamos por $X \cong Y$.

1.25 TEOREMA (W(17.14)). Una función biyectiva y continua, de un espacio compacto X en un espacio Hausdorff Y, es un homeomorfismo.

1.26 DEFINICION. Un espacio X es regular si dado U un abierto en X y $x \in U$, existe un conjunto abierto V que contiene a x y tal que la cerradura de V en X está contenida en U.

1.27 DEFINICION. Sean X y Y espacios topológicos. Entonces $f: X \longrightarrow Y$ es cerrada si la imagen de cada cerrado es un cerrado.

1.28 PROPOSICION (W 17 N.1). Sea f una función cerrada y suprayectiva de X en Y y $f^{-1}(y)$ un compacto para cada $y \in Y$. Entonces Y es Hausdorff si X es Hausdorff.

1.29 PROPOSICION (W(17.2 c)). El conjunto Y de números ordinales que preceden e incluyen el primer ordinal no numerable Ω, es compacto.

1.30 DEFINICION. La segunda clase de números es el conjunto de números ordinales de conjuntos bién ordenados de cardinalidad $\aleph_0$.

1.31 PROPOSICION (C(221C)). Sea Y como en 1.29. Toda sucesión contenida en Y y que no contenga a Ω converge a un límite ordinal de la segunda clase.

2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE TEORIA DE CATEGORIAS

2.1 DEFINICION. Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

a) Una clase de $\mathcal{C}$-objetos.

b) Para cada pareja (A,B) de $\mathcal{C}$-objetos, hom(A,B) será el conjunto de todos los $\mathcal{C}$-morfismos con dominio A y codomonio B de tal manera que las siguientes condiciones se cumplan.

1) Ley de composición. Si A, B y C son $\mathcal{C}$ -objetos, f pertenece a hom(A,B) y g pertenece a hom(B,C) entonces $g \circ f$ pertenece a hom(A,C).

2) Asociatividad. Si $f \in hom(A,B)$, $g \in hom(B,C)$ y $h \in hom(C,D)$ entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

3) Identidad. Para cada $\mathcal{C}$ -objeto A, existe un $\mathcal{C}$-morfismo $I_A \in hom(A,A)$ tal que si $f \in hom(B,A)$ y $g \in hom(A,C)$ entonces $I_A \circ f = f$ y $g \circ I_A = g$.

2.2 DEFINICION. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una regla F, la cual asigna a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un objeto F(A) de $\mathcal{D}$; y a cada morfismo $f: A \to B$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f): f(B) \to f(A)$ de $\mathcal{D}$ tal que $F(I_A) = I_{F(A)}$ y $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

2.3 DEFINICION. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor (covariante) de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una regla F la cual asigna a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un objeto F(A) de $\mathcal{D}$; y a cada morfismo $f: A \to B$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f): F(A) \to F(B)$ de $\mathcal{D}$ tal que $F(I_A) = I_{F(A)}$ y $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

2.4 NOTACION. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Denotamos por $\mathcal{C}^*$ ó $(\mathcal{C},*)$ a la categoría $\mathscr{C}$ con punto base, cuyos objetos son parejas de la forma $(A,*)$ donde A es un objeto de la categoría $\mathscr{C}$ y $* \in A$. Escribimos $\hom((A,*),(B,*))$ como el conjunto de funciones $f \in \hom(A,B)$ tal que $f(*) = *$, donde usamos $*$ ambiguamente para denotar al punto base de cualquier objeto.

2.5 NOTACION. Denotaremos por $\mathcal{T}$ a la categoría de espacios topológicos y funciones continuas y por $\mathcal{G}r$ a la categoría cuyos objetos son los grupos y sus morfismos son los homomorfismos de grupos.

CAPITULO II

ESPACIOS COMPACTAMENTE GENERADOS

En este capítulo describiremos la Categoría de Espacios Compactamente Generados . Haremos algunas construcciones para poder verificar ciertas propiedades que nos gustaría que cumpliera ;por ejemplo, que dicha categoría sea cerrada bajo ciertas operaciones, tales como formar productos de espacios y espacios de funciones ; que cumpla la ley exponencial; etc..

1. LA CATEGORIA DE ESPACIOS COMPACTAMENTE GENERADOS.

En esta sección introduciremos las definiciones y propiedades elementales de los espacios compactamente generados.

1.1 DEFINICION. Un espacio topológico Hausdorff X es compactamente generado si y sólo si cada subconjunto A de X con la propiedad de que $A\cap C$ es cerrado para todo subconjunto compacto C de X es él mismo cerrado.

1.2 NOTACION.

Denotaremos por $\mathcal{CG}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios compactamente generados y cuyos morfismos son las funciones continuas entre tales espacios.

1.3 LEMA. Sea X es un espacio topológico Hausdorff tal que para cada subconjunto M de X y cada punto de acumulación x de M, existe un subconjunto compacto C de X tal que x es un punto de acumulación de $M\cap C$. Entonces X está en $\mathcal{CG}$.

Demostración. Supongamos que M interseca a cada subconjunto compacto de X en un conjunto cerrado. Sea x un punto de acumulación de M. Por hipótesis existe un subconjunto compacto C de X tal que x es punto de acumulación de $M\cap C$. Como C es compacto, $M\cap C$ es cerrado; por I.1.4 x está en $M\cap C$, luego x está en M. Por lo tanto tenemos que todo punto de acumulación de M está en M. Entonces, por I.1.4, M es cerrado y de aquí que X esté en $\mathcal{CG}$. ///

La siguiente proposición nos muestra que $\mathcal{CG}$ es suficientemente grande en el sentido de que contiene a los espacios mas usuales. Por ejemplo, los espacios metrizables son objetos de la categoría $\mathcal{CG}$.

1.4 PROPOSICION. Todos los espacios Hausdorff localmente compactos y todos los espacios Hausdorff que satisfacen el primer axioma de numerabilidad están en la categoría $\mathcal{CG}$.

Demostración . En ambos casos aplicaremos 1.3. Si X es localmente compacto, cada punto de X tiene una vecindad compacta. Sea M un subconjunto de X y x en X un punto de acumulación de M. Luego x posee una vecindad compacta C. De aquí que existe un abierto W contenido en C tal que x está en W. Sea V un abierto tal que x está en V. Por lo tanto x está en $V \cap W$ el cual es abierto, y como x es punto de acumulación de M tenemos por I.1.3 que $((V\cap W)\cap M)-\{x\} \neq \phi$.

De aquí que $((V\cap W)\cap M)-\{x\}$ está contenido en $((V\cap C)\cap M)-\{x\} = (V\cap (C\cap M))-\{x\}$. Luego $(V\cap (C\cap M))-\{x\} \neq \phi$ lo cual implica, por I.1.3 que x es punto de acumulación de $M\cap C$ y , por 1.3, concluímos que X está en $\mathcal{CG}$. Por lo tanto , si X es localmente compacto y Hausdorff, X está en $\mathcal{CG}$.

Supongamos que X es un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad. Sea M un subconjunto de X y $x \in X$ un punto de acumulación de M. Por I.1.4 sabemos que x está en la cerradura de M. Luego por I.1.13 existe una sucesión (x_n) contenida en $M - \{x\}$ la cual converge a x. Definimos $C = \{x_n \mid n \text{ está en } \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Como (x_n) converge a x, C es compacto y X es Hausdorff. Sea V un abierto tal que x está en V. Entonces , por I.1.12, existe una n_o en $\mathbb{N}$ tal que si $n > n_o$, x_n está en V . Luego x_{n_o+1} está en $V \cap (M \cap C) - \{x\}$. Por lo tanto, por I.1.3 , x es punto de acumulación de $M \cap C$ y por 1.3, X está en $\mathcal{CG}$. Entonces si X es Hausdorff y satisface el primer axioma de numerabilidad, X está en $\mathcal{CG}$. ///

1.5 A continuación veamos que, en general, un subespacio Y de un espacio compactamente generado Y, no necesariamente es compactamente generado.

Sea Y el conjunto de números ordinales que preceden e incluyen el primer ordinal no numerable Ω. Le asignamos a Y la topología definida por su orden, para la cual una sub-base consiste de los conjuntos $[1, \alpha) = \{\gamma \in Y \mid 1 \leq \gamma < \alpha\}$ y $(\beta, \Omega] = \{\gamma \in Y \mid \beta < \gamma \leq \Omega\}$ para α y β en Y. Notamos que si α no es un ordinal límite, $\{\alpha\}$ es un abierto que contiene a α en esta topologia, mientras que si α es un ordinal límite, los conjuntos $(\beta, \alpha] := \{\gamma \in Y \mid \beta < \gamma \leq \alpha\}$, $\beta < \alpha$ forma una base en α para la topología.

Es fácil ver que Y es Hausdorff y como Y es compacto , tenemos que Y es localmente compacto. Entonces por II.1.4 Y es compactamente generado. Sea X el subespacio obtenido de Y al suprimir todos los límites ordinales excepto Ω . Los únicos subconjuntos compactos de X son los conjuntos finitos, ya que por I.1,31, cada conjunto infinito contiene una sucesión que converge a un límite ordinal de la segunda clase. Entonces el conjunto $X-\{\Omega\}$ interseca cada conjunto compacto de X en un conjunto cerrado, pero no es cerrado en X porque tiene a Ω como punto límite. De aquí que X no es compactamente generado.

Los siguientes resultados demuestran que ciertos subespacios de un espacio que está en $\mathcal{CG}$, también están en $\mathcal{CG}$.

1,6 PROPOSICION. i) Si X está en $\mathcal{CG}$, entonces todo subconjunto cerrado de X está en $\mathcal{CG}$. ii) Si X está en $\mathcal{CG}$,entonces todo subconjunto abierto y regular de X está en $\mathcal{CG}$. (Un subconjunto U de X es regular si cada punto x en U tiene una vecindad en X cuya cerradura en X está contenida en U).

Demostración. i) Sea A un subconjunto cerrado de X. Supongamos que existe un subconjunto B de A tal que la intersección con cada compacto de A es un conjunto cerrado en A. Si C es un subconjunto compacto de X y como X es Hausdorff, por I.1.8 tenemos que C es cerrado en X. Por lo tanto $A \cap C$ es cerrado en X, luego cerrado en C. Por I.1.8, $A \cap C$ es compacto en C y por lo tanto es compacto en A. Entonces $B \cap (A \cap C)$ es cerrado en A. Pero $B \cap (A \cap C) = (B \cap A) \cap C = B \cap C$ ya que B es un subconjunto de A. De aquí que $B \cap C$ es cerrado en A y como A es cerrado en X tenemos que $B \cap C$ es cerrado en X. Como X está en $\mathcal{CG}$, B es cerrado en X. Luego B es cerrado en A ya que B está contenido en A. Y se concluye por 3.1 que A está en $\mathcal{CG}$. ii) Sea U un subconjunto abierto y regular de X. Supongamos que existe un subconjunto B de U que interseca a cada subconjunto compacto de U en un conjunto cerrado en U. Si $x \in U$ y x es un punto de acumulación de B, por I.1.26, existe una vecindad V de x en X tal que la cerradura de V en X está contenida en U. Sea C un subconjunto compacto de X. Por I.1.8, C es cerrado en X. Así que $\overline{V} \cap C$ es cerrado en X. Luego $\overline{V} \cap C$ es cerrado en C. Se sigue que $\overline{V} \cap C$ es compacto en C ya que C es compacto. De aquí que por I.1.9 $\overline{V} \cap C$ es compacto en X. Como $\overline{V} \subset U$, se deduce que $\overline{V} \cap C$ es compacto en U. Entonces $B \cap \overline{V} \cap C$ es cerrado en U. Luego es cerrado en $\overline{V} \cap C$. Finalmente $B \cap \overline{V} \cap C$ es cerrado en X. Además como C es compacto en X y X está en $\mathcal{CG}$, concluímos que $B \cap \overline{V}$ es cerrado en X. Como x es punto de acumulación de B, x es punto de acumulación de $B \cap \overline{V}$. Luego $x \in B \cap \overline{V}$. De aquí que $x \in B$. Así, tenemos que todo punto de acumulación de B está en B. Entonces B es cerrado en U (ver I.1.4) y se deduce que U está en $\mathcal{CG}$.

///

1.7.1 DEFINICION. Si X es un espacio topológico, Y es un conjunto y $g:X \to Y$ es una función suprayectiva. Diremos que $F\subset Y$ es cerrado si y sólo si $g^{-1}(F)$ es cerrado en X. Con esto queda bién definida una topología de Y, llamada la topología cociente de Y inducida por g. A Y lo llamaremos un espacio cociente de X y a g la llamaremos una aplicación cociente.

1.7.2 TEOREMA (W(9.4)). Si $f:X \to Y$ es una aplicación cociente entonces una función $g:Y \to Z$ es continua si y sólo si $g\circ f:X \to Z$ es continua.

1.8 PROPOSICION. Sea $f:X \to Y$ una aplicación cociente donde X es compactamente generado y Y un espacio Hausdorff. Entonces Y es un espacio compactamente generado.

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto B de Y que interseca a cada subconjunto compacto de Y en un conjunto cerrado en Y. Sea C un subconjunto compacto de X. Como f es continua, f(C) es compacto en Y. Por hipótesis, $B\cap f(C)$ es cerrado en Y. Entonces $f^{-1}(B\cap f(C))$ es cerrado en X ya que f es continua. Luego C es cerrado en X pues C es compacto en X y X es Hausdorff. Se sigue que $f^{-1}(B\cap f(C))\cap C$ es cerrado en X. Como $f^{-1}(B\cap f(C))\cap C = f^{-1}(B)\cap C$, $f^{-1}(B)\cap C$ es cerrado en X. Como X está en $\mathcal{CG}$ concluímos que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X. Como f es una aplicación cociente, B es cerrado en Y. Esto demuestra que Y está en $\mathcal{CG}$. ///

El siguiente resultado nos facilitará saber cuando es continua una función.

1.9 PROPOSICION. Sea X un objeto de $\mathcal{CG}$ y Y un espacio Hausdorff. Si $f: X \to Y$ es una función continua en cada subconjunto compacto de X, entonces f es continua.

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de Y y C un conjunto compacto en X. Por hipótesis $f|C$ es continua y se sigue que $(f|C)(C)=f(C)$ es compacto y está contenido en un Hausdorff; por lo tanto $f(C)$ es cerrado. De aquí que $A \cap f(C)$ es cerrado. Por lo tanto $(f|C)^{-1}(A \cap f(C))$ es cerrado. Como $(f|C)^{-1}(A \cap f(C)) = (f^{-1}(A)) \cap C$, $(f^{-1}(A)) \cap C$ es cerrado. Como X está en $\mathcal{CG}$ se sigue que $f^{-1}(A)$ es cerrado. Por lo tanto f es continua. ///

2 EL FUNTOR k.

En esta sección definiremos para cada espacio Hausdorff X un espacio asociado compactamente generado y probaremos sus principales propiedades.

2.1 DEFINICION. Si X es un espacio Hausdorff, el espacio compactamente generado $k(X)$ es el conjunto X con la topo logía definida como sigue: un conjunto cerrado de $k(X)$ es un conjunto que interseca cada conjunto compacto de X en un conjunto cerrado en X. Si $f:X\to Y$ es una función de espacios Hausdorff, $k(f)$ es la misma función $k(X)\to k(Y)$.

2.2 TEOREMA. i) La función identidad $k(X)\to X$ es continua. ii) $k(X)$ es un espacio Hausdorff. iii) $k(X)$ y X tienen los mismos subconjuntos compactos. iv) $k(X)$ está en $\mathcal{CG}$. v) Si X está en $\mathcal{CG}$, entonces $k(X)=X$. vi) Si $f:X\to Y$ es continua sobre conjuntos compactos, entonces $k(f)$ es continua.

Demostración. i) Si A es un subconjunto cerrado de X, y C es un subconjunto compacto de X, entonces C es cerrado en X pués X es Hausdorff. Luego $A\cap C$ es cerrado en X y por lo tanto A es cerrado en $k(X)$. De aquí que la función identidad $k(X)\to X$ es continua. ii) Como X es un espacio Hausdorff, por i), tenemos que $k(X)$ es un espacio Hausdorff.
iii) Sea A un subconjunto compacto de $k(X)$. Por i) concluímos que A es compacto en X. Supongamos ahora que C es compacto en X, y que C' es el conjunto C con la topología relativa de $k(X)$. Por i) tenemos que la función identidad $C'\to C$ es continua. Veamos ahora que la función inversa es continua: Sea B un subconjunto cerrado de C'. Por definición, B interseca cada subconjunto compacto de X en un conjunto cerrado. Por

lo que $B \cap C = B$ es cerrado en C. Luego la función identidad $I: C \to C'$ es continua. Pero $C = I(C) = C'$ por lo que C' es compacto en $k(X)$. Entonces $k(X)$ y X tienen los mismos subconjuntos compactos.

iv) Supongamos que existe un subconjunto A de $k(X)$ que interseca cada subconjunto compacto de $k(X)$ en un cerrado en $k(X)$. Sea C compacto en X. Por iii), C es compacto en $k(X)$ y por lo tanto $A \cap C$ es cerrado en $k(X)$. Por definición de la topología de $k(X)$ tenemos que $A \cap C$ es cerrado en X y por 2.1 se sigue que A es cerrado en $k(X)$. Entonces $k(X)$ está en $\mathcal{CG}$.

v) Sea A un cerrado en $k(X)$. Luego A interseca cada subconjunto compacto de X en un cerrado en X. Como X está en $\mathcal{CG}$, tenemos que A es cerrado en X. Además por i) tenemos que $I: k(X) \to X$ es un homeomorfismo.

vi) Por 1.9 es suficiente demostrar que $k(f)$ es continua en cada subconjunto compacto de $k(X)$. Sea C' un subconjunto compacto de $k(X)$ y C el mismo conjunto con su topología en X. Por iii), C es compacto en X y la función identidad $C' \to C$ es un homeomorfismo. Como $f|C$ es continua, $f(C)$ es compacto en Y. De aquí que nuevamente la identidad $k(f)(C') \to f(C)$ es un homeomorfismo, donde $k(f)(C')$ es el conjunto $f(C)$ en $k(Y)$.

$k(f)| C':C' \longrightarrow (k(f))(C')$ es la composición de $f | C$ y dos funciones identidades $C' \longrightarrow C \longrightarrow (k(f))(C) \longrightarrow (k(f))(C')$, las cuales son continuas. Entonces $(k(f))| C'$ es continua y concluímos por 1.9 que $k(f)$ es continua. ///

3. PRODUCTO DE ESPACIOS.

Si X y Y son espacios en la categoría $\mathcal{CG}$, no siempre su producto topológico está en $\mathcal{CG}$. Por ello modificaremos la definición de producto, de tal manera que el producto de dos espacios compactamente generados sea compactamente generado.

3.1 DEFINICION. Si X y Y están en $\mathcal{CG}$, su producto $X \times Y$ en $\mathcal{CG}$ es $k(X \times_c Y)$, donde $\times_c$ es el producto cartesiano con la topología producto usual.

Veamos que el producto definido satisface la propiedad universal.

3.2 TEOREMA. Sean X, Y y W espacios compactamente generados. Entonces

i) Existen proyecciones continuas $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ y

ii) Si $f:W \longrightarrow X$ y $g:W \longrightarrow Y$ son continuas entonces existe una función única $F:W \longrightarrow X \times Y$ tal que $f = \pi_1 \circ F$ y $g = \pi_2 \circ F$.

Demostración. i) Por 2.2 la función identidad $I: X \times Y \longrightarrow X\times_c Y$ es continua. Como las proyecciones $p_1: X\times_c Y \longrightarrow X$ y $p_2: X\times_c Y \longrightarrow Y$ son continuas tenemos que $\pi_1 = p_1 \circ I$ y $\pi_2 = p_2 \circ I$ son continuas, y son las proyecciones de $X \times Y$ en X y Y respectivamente. Luego son morfismos de $\mathcal{CG}$. ii) Supongamos que existen $f: W \longrightarrow X$ y $g: W \longrightarrow Y$ en $\mathcal{CG}$. Como $X\times_c Y$ satisface la propiedad universal, existe $(f,g): W \longrightarrow X\times_c Y$ continua y única tal que $p_1 \circ (f,g) = f$ y $p_2 \circ (f,g) = g$. Por lo tanto, por 2.2 v) y 3.1, $k(f,g): W \longrightarrow X \times Y$. Además $\pi_1 \circ k(f,g) = p_1 \circ I \circ k(f,g) = p_1 \circ (f,g) = f$ y $k(f,g) = p_2 \circ I \circ k(f,g) = p_2 \circ (f,g) = g$, la cual es claramente la única con esa propiedad. ///

3.3 OBSERVACION. Es inmediato, de 3.2, que el producto $X \times Y$ en $\mathcal{CG}$ es conmutativo y asociativo. Además se puede extender la construcción a productos que tienen cualquier número de factores, aplicando el funtor k al producto usual.

El siguiente teorema nos establece cuando coinciden los productos $\times$ y $\times_c$.

3.4 TEOREMA. Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y Y en $\mathcal{CG}$. Entonces $X\times_c Y$ está en $\mathcal{CG}$.

Demostración. Sea A un subconjunto de $X\times_c Y$ que interseca cada subconjunto compacto de $X\times_c Y$ en un conjunto cerrado en $X\times_c Y$ y sea (x_0,y_0) un punto del complemento de A. Entonces

$x_0 \in X$ y como X es localmente compacto tenemos por I.1.16 que x_0 tiene una vecindad compacta N. De aquí que $N \times_c y_0$ es compacto. Luego $A \cap (N \times_c y_0)$ es cerrado en $X \times_c Y$. De aquí que $(A \cap (N \times_c y_0))^c = A^c \cup (N \times_c y_0)^c$ es abierto en $X \times_c Y$. Como (x_0, y_0) está en $A^c \cup (N \times_c y_0)^c$ abierto, x_0 tiene una vecindad U tal que $\bar{U} \times_c y_0$ no interseca a A. Sea B la proyección en Y de $A \cap (U \times_c Y)$. Si C es un subconjunto compacto de Y, entonces $A \cap (\bar{U} \times_c C)$ es compacto en $X \times_c Y$ por ser un cerrado de $\bar{U} \times_c C$ compacto. Como las proyecciones son continuas tenemos que $B \cap C$ es compacto en Y, Y Hausdorff. De aquí que $B \cap C$ es cerrado en Y. Como Y está en $\mathcal{CG}$ tenemos que B es cerrado en Y. Como y_0 no está en B, se sigue que $U \times_c (Y-B)$ es una vecindad de (x_0, y_0) que no interseca a A. Luego, está contenida en el complemento de A. Por lo tanto, por I.1.27, el complemento de A es abierto. Entonces A es cerrado y concluímos que $X \times_c Y$ está en $\mathcal{CG}$. ///

3.5 TEOREMA. Si $f: X \to X'$ y $g: Y \to Y'$ son aplicaciones cociente en $\mathcal{CG}$, entonces $f \times g: X \times Y \to X' \times Y'$ es también una aplicación cociente en $\mathcal{CG}$.

Demostración. Como $f \times g = (f \times I) \circ (I \times g)$, y la composición de aplicaciones cociente es una aplicación cociente, es suficiente con demostrar que $f \times I : X \times Y \longrightarrow X' \times Y$ es una aplicación cociente. Sea A un subconjunto de $X' \times Y$ tal que $(f \times I)^{-1}(A)$ es cerrado en $X \times Y$. Sea C un subconjunto compacto de $X'\times Y$ donde D y E son las proyecciones de C en X' y Y respectivamente. Como las proyecciones son continuas, D y E son compactos. Luego $D\times E$ es compacto en $X'\times Y$. Si demostramos que $A\cap(D\times E)$ es cerrado, tenemos que $A\cap C$ es cerrado y como $X'\times Y$ está en $\mathcal{CG}$ entonces A es cerrado y el teorema estaría demostrado. Como $(f\times I)^{-1}(D\times E) = f^{-1}(D)\times E$ es cerrado en $X\times Y$, entonces $(f\times I)^{-1}(A\cap(D\times E))$ es cerrado en $f^{-1}(D)\times E$. Si sustituímos X, X', Y por $f^{-1}(D)$, D y E respectivamente, tenemos el caso donde X' y Y son compactos. Luego por 3.4, $X'\times Y = X'\times_c Y$ y $X\times Y = X\times_c Y$.

Sea $V\subset X'\times Y$ tal que $(f\times I)^{-1}(V)$ es abierto en $X\times Y$, y $(x,y)\in V$. Sea $x'\in X$, donde $f(x') = x$. Como $(x',y)\in(f\times I)^{-1}(V)$, el cual es abierto, y Y es compacto, existe un abierto W tal que $y\in W$, $\overline{W}$ es compacto y $x'\times\overline{W}\subset(f\times I)^{-1}(V)$. Sea U el conjunto de $x_0\in X$ tal que $f(x_0)\times\overline{W}\subset V$. Veremos que U es abierto, sea $x_1\in U$. Nosotros podemos cubrir $x_1\times\overline{W}$ con productos de conjuntos abiertos contenidos en $(f\times I)^{-1}(V)$. Luego existe una subcubierta finita. Sea N la intersección de los factores en X, de los productos de la subcubierta finita. De aquí que N es abierto, $x_1\in N$ y $N\times\overline{W}\subset(f\times I)^{-1}(V)$. Entonces U es abierto. Como $U = f^{-1}(f(U))$ es abierto y f es una aplicación cociente, $f(U)$ es abierto en X'. Como $(x,y)\in f(U)\times W$, $f(U)\times W$ es abierto y $(f(U)\times W)\subset V$, tenemos que V es abierto. Entonces $f\times I$ es una aplicación cociente en $\mathcal{CG}$. ///

Por 2.2 i) las funciones identidades $k(X) \longrightarrow X$ y $k(Y) \longrightarrow Y$ son continuas. Luego por I.1.21, la función identidad $g: k(X) \times_c k(Y) \longrightarrow X \times_c Y$ es continua. Por lo tanto, todo subconjunto compacto de $k(X) \times_c k(Y)$ es compacto en $X \times_c Y$. Sea A un subconjunto compacto de $X \times_c Y$ y B, C sus proyecciones en X y Y respectivamente. Como las proyecciones son continuas, tenemos que B y C son compactos en X y Y respectivamente. Por 2.2 iii) son compactos en $k(X)$ y $k(Y)$ respectivamente. Por I.1.15, $B \times_c C$ es compacto en $k(X) \times_c k(Y)$. Luego $g \mid B \times_c C$ tiene inversa continua. Como $A \subset B \times_c C$ de aquí que A es compacto en $k(X) \times_c k(Y)$. Entonces $k(X) \times_c k(Y)$ y $X \times_c Y$ tienen los mismos subconjuntos compactos y son espacios sobre el mismo conjunto. Luego al asociarles k se tiene $k(k(X) \times_c k(Y))$ y $k(X \times_c Y)$ coinciden. Por definición el primer espacio es precisamente $k(X) \times k(Y)$. Por lo tanto tenemos la siguiente:

3.6 PROPOSICION. Si X y Y son espacios Hausdorff, entonces las dos topologías $k(X) \times k(Y)$ y $k(X \times_c Y)$ sobre el espacio producto coinciden.

4. ESPACIOS DE FUNCIONES.

En esta sección introduciremos el producto aplastado y estableceremos algunas propiedades importantes de los espacios de funciones en $\mathcal{CG}$.

4.1 DEFINICION. Sean X y Y espacios Hausdorff. Denotamos por C(X,Y) al espacio de funciones continuas de X en Y y le damos la topología compactoabierta. Es decir, una base está formada por la familia W(A,U) de todas las parejas (A,U), donde A es un subconjunto compacto de X, U es un subconjunto abierto de Y y W(A,U) el conjunto de funciones continuas $f: X \longrightarrow Y$ tales que f(A) está contenido en U.

A continuación veamos un ejemplo de que no siempre que X y Y estén en $\mathcal{CG}$, C(X,Y) está en $\mathcal{CG}$.

4.2 EJEMPLO. Sea $X = \{1,2\}$, $C(X,Y) = Y \times_c Y$. Sabemos que el producto de dos espacios en $\mathcal{CG}$ no necesariamente está en $\mathcal{CG}$. Por lo tanto C(X,Y) no está en $\mathcal{CG}$ para algún espacio Y.

Sean X, Y espacios Hausdorff. Denotemos al espacio $kC(X,Y)$ por Y^X, es decir

4.3 $Y^X = kC(X,Y)$ y

definamos a la función evaluación $e:C(X,Y)\times_c X \longrightarrow Y$ mediante

4.4 $e(f,x) = f(x)$.

4.5 PROPOSICION. i) La función evaluación es continua sobre conjuntos compactos. ii) Si X y Y están en $\mathcal{CG}$, entonces la función evaluación es continua como función de $Y^X \times X$ en Y.

Demostración. i) Como cualquier conjunto compacto de el producto está contenido en el producto de sus proyecciones, es suficiente demostrar que e es continua sobre cualquier conjunto de la forma $F\times A$, donde F es compacto en $C(X,Y)$ y A es compacto en X. Sea $(f_o,x_o) \in F\times A$ y U un subconjunto abierto de Y que contenga a $e(f_o,x_o) = f_o(x_o)$. Como f_o es continua, existe una vecindad V de x_o tal que $f_o(V)\subset U$. Como A es compacto y Hausdorff, A es localmente compacto. Por I.1.17, existe un abierto N en A tal que $\overline{N}$ es compacto y $x_o \in N\subset \overline{N} \subset V$. De aquí que $f_o(N)\subset f_o(\overline{N})\subset f_o(V)\subset U$. Luego $(W(\overline{N},U)\cap F)\times N$ es abierto en $F\times A$ y contiene a (f_o,x_o). Sea $(f,n)\in (W(\overline{N},U)\cap F)\times N$. Se sigue que $f(\overline{N})\subset U$ y como $n \in N$ tenemos que $f(n)$ está en U. Por lo tanto $e(f,n)$ está en U. Luego $e((W(\overline{N},U) \cap F) \times N) \subset U$, lo cual demuestra que e es continua sobre conjuntos compactos. ii) Por 2.2 vi) tenemos que $k(e)$ es continua. Pero por 2.2 v) y 4.3 $k(C(X,Y) \times_c X) = Y^X \times X$ y $k(Y) = Y$. Por lo tanto e es continua como una función $Y^X \times X \longrightarrow Y$. ///

4.6 PROPOSICION. Si X está en $\mathcal{CG}$, y Y es un espacio Hausdorff, entonces $C(X,k(Y))$ y $C(X,Y)$ son iguales como conjuntos, y las dos topologías tienen los mismos conjuntos compactos.

Demostración. Si $f: X \longrightarrow k(Y)$ es continua, luego también su composición con $k(Y) \rightarrow Y$ es continua. Por lo que f está en $C(X,Y)$. Recíprocamente, si $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces $k(f): k(X) \rightarrow k(Y)$ es continua. De aquí que f está en $C(X,k(Y))$. Entonces $C(X,k(Y))$ y $C(X,Y)$ son iguales como conjuntos de funciones. Sabemos por 2.2 i) que la función identidad $k(Y) \rightarrow Y$ es continua. Por lo cual se demuestra fácilmente que la función identidad $C(X,k(Y)) \rightarrow C(X,Y)$ es continua. Por lo tanto, todo subconjunto compacto de $C(X,k(Y))$ es compacto en $C(X,Y)$. Supongamos que F es un subconjunto compacto con la topología relativa en $C(X, Y)$. Tenemos que demostrar que F' es compacto en $C(X,k(Y))$; donde F' es el mismo conjunto F con su topología relativa en $C(X,k(Y))$. Es suficiente con demostrar que cada subconjunto abierto W de $C(X,k(Y))$ interseca a F' en un conjunto abierto de F, porque esto implica que la función inversa de la identidad $F \to F'$ es continua. Luego F' es compacto. Basta con demostrarlo cuando W es un conjunto abierto sub-básico $W(C,U)$, donde C es compacto en X y U es abierto en $k(Y)$. Sea f_0 en $W(C,U) \cap F$, como $F \times C$ es compacto , por 4.5, la función evaluación $e: F \times C \to Y$ es continua. Luego, por 2.2 vi), es continua como una función $F \times C \to k(Y)$. De aquí que $e^{-1}(U)$ es un abierto en $F \times C$. Cómo f_0 está en $W(C,U)$ y $f_0(C)=e(f_0 \times C)$, tenemos que $e(f_0 \times C) \subset U$. Por lo tanto $(f_0 \times C) \subset e^{-1}(U)$, y como C es compacto, existe un subconjunto abierto V de F tal que f_0 está en V y $V \times C \subset e^{-1}(U)$. Sea $g_0 \in V$, luego $g_0 \times C \subset e^{-1}(U)$. De aquí que $g_0(C) \subset U$. Por lo tanto $g_0 \in W(C,U)$, y $V \subset W(C,U)$. Como $f_0 \in V$, tenemos por I.1.2 que $W(C,U) \cap F$ es abierto en F. Esto demuestra que F' es compacto. Entonces concluímos que las topologías de $C(X,k(Y))$ y $C(X,Y)$ tienen los mismos subconjuntos compactos. ///

En vista de la proposición anterior podemos decir que $k(C(X,k(Y)))$ y $k(C(X,Y))$ son iguales como espacios en la categoría $\mathcal{CG}$.

El siguiente teorema establece la ley exponencial para los espacios compactamente generados.

4.7 TEOREMA. Sean X, Y y Z espacios compactamente generados. Entonces existe un homeomorfismo entre $Z^{Y\times X}$ y $(Z^Y)^X$.

Demostración. Definamos

$$\text{(P)} \qquad \mu : C(Y\times X, Z) \longrightarrow C(X, C(Y,Z))$$

por $((\mu(f))(x))(y) = f(y,x)$ donde $f\in C(Y\times X,Z)$, $x\in X$ y $y\in Y$.

Sea $y_0\in Y$ y U un abierto en Z donde $((\mu(f))(x))(y_0)\in U$. Como f es continua, por I.1.5 y I.1.7, existe un conjunto abierto V en Y tal que $y_0\in V$ y $f(V\times\{x\})\subset U$. Luego $((\mu(f))(x))(V)\subset U$. Entonces por I.1.18,

$$(\mu(f))(x) : Y \longrightarrow Z \text{ es continua.}$$

Sea $x_0\in X$ y $W(B,U)$ un conjunto abierto subbásico de $C(Y,Z)$ tal que $(\mu(f))(x_0)\in W(B,U)$. Luego $f(B\times\{x_0\}) = ((\mu(f))(x_0))(B)\subset U$. Por lo tanto, para cada $b\in B$, $f(b,x_0)\in U$. Como f es continua, existe un abierto $W_b\subset Y\times X$ tal que $f(W_b)\subset U$ y $(b,x_0)\in W_b$. Por I.1.5 y I.1.7, existen abiertos subbásicos $W_{b,1}$ y $W_{b,2}$ donde $b\in W_{b,1}$ y $x_0\in W_{b,2}$. Entonces $\{W_{b,1} \mid b\in B\}$ es una cubierta abierta de B. Como B es compacto, existe una subcubierta finita $\{W_{b_i,1} \mid i = 1,2,\ldots,n\}$. Sea $N = \bigcap_{i=1}^{n} W_{b_i,2}$. Tenemos que N es abierto, $x_0\in N$ y $f(B\times N)\subset U$. Por lo tanto $(\mu(f))(N)\subset W(B,U)$. Entonces

$$\text{(Q)} \qquad \mu(f) : X \longrightarrow C(Y,Z) \text{ es continua.}$$

Consideremos la función evaluación $e:Y\times X\times C(Y\times X,Z)\to Z$. Si en (Q) sustituímos X por $X\times C(Y\times X,Z)$, tenemos que $\mu(e):X\times C(Y\times X,Z)\longrightarrow C(Y,Z)$ es continua. Ahora, si en (Q) sustituímos X por $C(Y\times X,Z)$, Y por X y Z por $C(Y,Z)$. Concluímos que $\mu(\mu(e)):C(Y\times X,Z)\longrightarrow C(X,C(Y,Z))$ es continua. Es fácil verificar que $\mu(\mu(e))=\mu$. Por lo tanto

μ es continua.

Sean $e:X\times C(X,C(Y,Z))\longrightarrow C(Y,Z)$ y $e':Y\times C(Y,Z)\longrightarrow Z$ funciones evaluación. Por 4.5 y I.1.21, $e'\circ(I\times e):Y\times X\times C(X,C(Y,Z))\longrightarrow Z$ es continua. Sustituímos en (Q), X por $C(X,C(Y,Z))$ y Y por $Y\times X$. Luego $\mu(e'\circ(I\times e)):C(X,C(Y,Z))\longrightarrow C(Y\times X,Z)$ está bién definida y es continua. Se verifica fácilmente que $\mu(e'\circ(I\times e))$ es la inversa de μ. Entonces

μ es un homeomorfismo.

Por 4.3, $k(C(Y\times X,Z))=Z^{Y\times X}$. $k(C(X,C(Y,Z))=k(C(X,k(C(Y,Z)))=k(C(X,Z^Y))=(Z^Y)^X$ por 4.3 y 4.6. Luego, por 2.2 vi) $k(\mu)=\mu:Z^{Y\times X}\longrightarrow(Z^Y)^X$ es un homeomorfismo. Por lo tanto

$$Z^{Y\times X}\cong(Z^Y)^X.$$

///

4.8 TEOREMA. Si X, Y y Z son objetos de la categoría $\mathcal{CG}$ entonces la función $Z^Y \times Y^X \longrightarrow Z^X$ dada por $(f,g) \longmapsto f \circ g$ es continua.

Demostración. Por 4.5, las funciones
$Z^X \times Y^X \times X \xrightarrow{(I \times e)} Z^Y \times Y \xrightarrow{e'} Z$ son continuas. Luego $e' \circ (I \times e)$ es continua. Si en (Q) de 4.7 sustituímos X por $Z^Y \times Y^X$, Y por X y f por $e' \circ (I \times e)$, tenemos que $\mu(e' \circ (I \times e)) : Z^Y \times Y^X \longrightarrow C(X,Z)$ es continua. Entonces $k(\mu(e' \circ (I \times e))) : Z^Y \times Y^X \longrightarrow Z^X$ dada por $(k(\mu(e' \circ (I \times e))))(f,g) = f \circ g$ es continua. ///

4.9 NOTACION. Denotemos por $C((X,A),(Y,B))$ al conjunto de funciones $f \in C(X,Y)$ donde $f(A)$ está contenido en B. Denotemos por $(Y,B)^{(X,A)}$ al espacio $k(C((X,A),(Y,B)))$.

4.10 DEFINICION. El producto aplastado (smash product), $X \wedge Y$, de dos espacios X, Y lo definimos como el cociente $(X \times Y)/(X \vee Y)$, donde $X \vee Y = (X \times \{*\}) \cup (\{*\} \times Y)$ es el producto cuña (wedge product). El punto con el cual se identifica $X \vee Y$ es el punto base de $X \wedge Y$.

4.11 NOTACION. Denotemos por $(Y,*)^{(X,*)}$ al espacio $k(C((X,*),(Y,*)))$ cuyo punto base es la función constante.

4.12 DEFINICION. Sea X en $\mathcal{CG}$, Y en $\mathcal{CG}^*$ y A un subespacio cerrado de X tal que X/A es Hausdorff. Si $p_A:(X,A) \longrightarrow (X/A,*)$ es la aplicación cociente, definimos $(p_A)^*:C(X/A,Y) \longrightarrow C((X,A),(Y,*))$ mediante $(p_A)^*(f) = f\circ p_A$, $f \in C(X/A,*)$.

4.13 PROPOSICION. La función $(p_A)^*:C(X/A,Y) \longrightarrow C((X,A),(Y,*))$ es continua y biyectiva. Además establece una correspondencia biyectiva entre subconjuntos compactos.

Demostración. La continuidad y biyectividad de $(p_A)^*$ se demuestran fácilmente. Veamos que $(p_A)^*$ establece una correspondencia biyectiva entre subconjuntos compactos. Es suficiente demostrar que $((p_A)^*)^{-1}$ es continua sobre subconjuntos compactos. Sea F un subconjunto compacto de $C((X,A),(Y,*))$, $g_0 \in F$ y $W(C,U)$ un subconjunto abierto subbásico de $C(X/A,Y)$ tal que $((p_A)^*)^{-1}(g_0)$ está en $W(C,U)$. Como $((p_A)^*)^{-1}(g_0) = g_0 \circ p_A^{-1}$ tenemos que $g_0 \circ p_A^{-1}(C) \subset U$. Si C no contiene el punto base $*$, $p_A^{-1}(C)$ es compacto en X. Luego $W(p_A^{-1}(C),U)$ es un conjunto abierto, g_0 está en $W(p_A^{-1}(C),U)$ y $((p_A)^*)^{-1}(W(p_A^{-1}(C),U)) \subset W(C,U)$. Entonces, por I.1.18, $((p_A)^*)^{-1}$ es continua sobre F. Supongamos ahora que C contiene al punto base $*$. Tenemos que la función evaluación $e:F\times X \longrightarrow Y$ es continua. Sea $f \in F \subset C((X,A),(Y,*))$ y $a \in A$. Entonces $e(f,a) = f(a) = *$. Luego $e(F\times A) = \{*\}$.

Sabemos que $F\times(X/A)$ es un espacio cociente de $F\times X$. Entonces e induce una función continua $e':F\times(X/A)\longrightarrow Y$. Como $e'(g_0,*)$ está en U, existe una vecindad V de g_0 en F y una vecindad N abierta de $*$ en X/A tal que $e'(V\times N)\subset U$. Sea $C'=C-C\cap N$. Luego C' es compacto y $*$ no está en C. De aquí que $V\cap W(P_A^{-1}(C'),U)$ es una vecindad de g_0 en F (pués $g_0(P_A^{-1}(C))\subset U$) y si g está en $V\cap W(P_A^{-1}(C'),U)$ tenemos que $g(P_A^{-1}(N))\subset U$, ya que $e'(V\times N)\subset U$. Además g está en V. Como g está en $W(P_A^{-1}(C'),U)$, tenemos que $g\circ P_A^{-1}(C')\subset U$. Se deduce que $((P_A)^*)^{-1}(g)$ está en $W(C,U)$ pués $C\subset C'\cup N$. Luego $((P_A)^*)^{-1}$ es continua. ///

Aplicando el funtor k, obtenemos de inmediato un homeomorfismo $(Y,*)^{(X/A,*)}\equiv(Y,*)^{(X,A)}$.

4.14 TEOREMA. Si X, Y y Z están en $\mathcal{CG}^*$ entonces $(Z,*)^{(Y\wedge X,*)}\equiv((Z,*)^{(Y,*)})^{(X,*)}$.

Demostración. Sea $W=(Y\times\{*\})\cup(\{*\}\times X)$. Si en 4.13 sustituimos Y por Z y (X,A) por $(Y\times X,W)$, obtenemos un homeomorfismo:

(R) $(Z,*)^{(Y\wedge X,*)}\equiv(Z,*)^{(Y\times X,W)}$.

Como $(Z,*)^{(Y\times X,W)}$ es un subespacio de $Z^{Y\times X}$, por 4.7 es homeomorfo a $(Z^Y)^X$. Se verifica fácilmente que bajo el homeomorfismo dado en 4.7, $(Z,*)^{(Y\times X,W)}\equiv((Z,*)^{(Y,*)})^{(X,*)}$. Entonces $(Z,*)^{(Y\wedge X,*)}\equiv((Z,*)^{(Y,*)})^{(X,*)}$. ///

A continuación veamos algunas propiedades del producto aplastado.

4.15 PROPOSICION.

a) $X\wedge(Y\wedge Z) \equiv (X\wedge Y)\wedge Z$

b) $X\wedge Y \equiv Y\wedge X$

c) $(X\vee Y)\wedge Z \equiv (X\wedge Y)\vee(Y\wedge Z)$.

Demostración. a) Consideremos la composición de funciones $X\times(Y\times Z) \xrightarrow{I\times f} X\times(Y\wedge Z) \xrightarrow{g} X\wedge(Y\wedge Z)$; como $I\times f$ y g son aplicaciones cociente, tenemos que $g\circ(I\times f)$ es una aplicación cociente. Entonces $X\wedge(Y\wedge Z)$ y $(X\wedge Y)\wedge Z$ son espacios cociente de $X\times Y\times Z$ bajo las mismas aplicaciones cociente. De aquí que $X\wedge(Y\wedge Z) \equiv (X\wedge Y)\wedge Z$. Análogamente se prueba que $X\wedge Y$ y $Y\wedge X$ son espacios cociente de $X\times Y \equiv Y\times X$.
c) Se demuestra de la misma manera que a). ///

4.16 LEMA. Existe una aplicación cociente entre $X\vee Y$ y la unión ajena $X\cup Y$.

Demostración. Sean $X \xrightarrow{i_1} X\cup Y$ y $Y \xrightarrow{i_2} X\cup Y$ las inclusiones. Sea A un abierto en $X\cup Y$. Entonces $i_1^{-1}(A) = A\cap X$ es un abierto en X, luego i_1 es continua. Análogamente i_2 es continua. Definimos $f: X\cup Y \longrightarrow X\vee Y$ mediante $f(z) = (i_1^{-1}(z), *)$, $z\in X$ y $f(z) = (*, i_2^{-1}(z))$, $z\in Y$. Sea $F\subset X\vee Y$ tal que $f^{-1}(F)$ es cerrado en $X\cup Y$. Como i_1 e i_2 son continuas tenemos que $i_1^{-1}(f^{-1}(F))$ e $i_2^{-1}(f^{-1}(F))$ son cerrados en X y Y respectivamente. Pero $F=(i_1^{-1}(f^{-1}(F))\times\{*\})\cup(\{*\}\times i_2^{-1}(f^{-1}(F)))$ es cerrado en $X\times Y$ pués $i_1^{-1}(f^{-1}(F))$, $i_2^{-1}(f^{-1}(F))$ y $\{*\}$ son cerrados. Por lo tanto, por 2.2 i), F es cerrado en $X\times Y$.

La continuidad y la suprayectividad de f se demuestran fácilmente. Por lo tanto f es una aplicación cociente. ///

Recordemos el concepto de homotopía.

4.17 DEFINICION. Sean f y g funciones continuas de X en Y. Diremos que f es homotópica a g ($f\sim g$), si existe una función continua $H:X\times I\longrightarrow Y$ tal que $H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=g(x)$ para toda x en X.

4.18 TEOREMA. (W(32.3)). $\sim$ es una relación de equivalencia en el espacio C(X,Y) de todas las funciones continuas de X a Y. Las clases de equivalencia en C(X,Y) bajo la relación $\sim$ son llamadas clases de homotopía en C(X,Y) y al conjunto de clases de homotopía en C(X,Y) lo denotaremos por $[X,Y]$.

4.19 TEOREMA. El homeomorfismo de 4.14 induce una función biyectiva $\psi:[(X,*),\ (Z,*)^{(Y,*)}]\longrightarrow[(Y\wedge X,*),(Z,*)]$.

Demostración. Supongamos que g_0 es homotópica a g_1, $g_0\sim g_1:(Y\wedge X,*)\longrightarrow(Z,*)$. Por lo tanto, existe una función continua $G':((Y\wedge X)\times I,\{*\}\times I)\longrightarrow(Z,*)$ tal que $G'(x,0)=g_0(x)$ y $G'(x,1)=g_1(x)$ para toda x en $Y\wedge X$. Consideremos

$Y\times X\times I \xrightarrow{\beta\times I} (Y\wedge X)\times I$ donde es β la aplicación cociente. Definamos $G:(Y\times X)\times I \to Z$, mediante $G=G'\circ(\beta\times I)$. Luego es claro que G es continua. Por 4.7 existe una función continua $F:X\times I \to Z^Y$, donde $F=\mu(G)$. Por 4.7 y 4.14,

$$(Z,*)^{(Y\wedge X,*)} \equiv (Z,*)^{(Y\times X,W)} \equiv ((Z,*)^{(Y,*)})^{(X,*)} .$$

$$g_0 \longmapsto g_0\circ\beta \longmapsto \mu(g_0\circ\beta)$$
$$g_1 \longmapsto g_1\circ\beta \longmapsto \mu(g_1\circ\beta)$$

Sean $f_0=\mu(g_0\circ\beta)$ y $f_1=\mu(g_1\circ\beta)$. Como $(F(x,t))(*)=((\mu(G))(x,t))(*)=((\mu(G'\circ(\beta\times I)))(x,t))(*)=(G'\circ(\beta\times I))(*,x,t)=G'(\beta(*,x),t)=G'(*,t)=*$, $F(x,t)$ está en $(Z,*)^{(X,*)}$. Ya que $(F(x,0))(y)=((\mu(G))(x,0))(y)=((\mu(G'\circ(\beta\times I)))(x,0))(y)=(G'\circ(\beta\times I))(y,x,0)=G'(\beta(y,x),0)=g_0\circ\beta(y,x)=((\mu(g_0\circ\beta))(x))(y)=(f_0(x))(y)$ tenemos que $F(x,0)=f_0(x)$. Como $(F(x,1))(y)=((\mu(G))(x,1))(y)=((\mu(G'\circ(\beta\times I)))(x,1))(y)=(G'\circ(\beta\times I))(y,x,1)=G'(\beta(y,x),1)=g_1\circ\beta(y,x)=((\mu(g_1\circ\beta))(x))(y)=(f_1(x))(y)$, $F(x,1)=f_1(x)$. Finalmente, $(F(*,t))(y)=((\mu(G'\circ(\beta\times I)))(*,t))(y)=(G'\circ(\beta\times I))(y,*,t)=G'(\beta(y,*),t)=G'(*,t)=*$. De aquí que $F(*,t)$ es el punto base de $(Z,*)^{(Y,*)}$. Por lo tanto $F:f_0\sim f_1$. El recíproco es similar ya que en todos los casos tenemos homeomorfismos. ///

4.20 PROPOSICION. Existe una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $[(X/A,*),(Y,*)]$ y $[(X,A),(Y,*)]$.

Demostración. Sea $P_A:(X,A)\to(X/A,*)$ una aplicación cocien te. Supongamos que α está en $[(X/A,*),(Y,*)]$. Entonces existe una $f \in (Y,*)^{(X/A,*)}$ tal que $\alpha = [f]$. Definamos $c(\alpha)$ por $[f \circ P_A]$. Si α_1 y α_2 están en $[(X/A,*),(Y,*)]$ con $c(\alpha_1)=c(\alpha_2)$, existen f_1 y f_2 en $(Y,*)^{(X/A,*)}$ donde $\alpha_1 = [f_1]$ y $\alpha_2 = [f_2]$. Se sigue que $[f_1 \circ P_A] = [f_2 \circ P_A]$. Luego $[f_1 \circ P_A \circ P_A^{-1}] = [f_2 \circ P_A \circ P_A^{-1}]$ y por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2$. Entonces c es inyectiva. Sea $\beta \in [(X,A),(Y,*)]$. Luego existe una $g \in (Y,*)^{(X,A)}$ tal que $\beta = [g]$. Sea $f:(X/A,*) \longrightarrow (Y,*)$ donde $f \circ P_A = g$. Por 1.7.2 tenemos que f es continua. Sea $\alpha = [f]$. Por lo tanto $c(\alpha) = [f \circ P_A] = [g] = \beta$. De aquí que c es supreyectiva. Entonces c es biyectiva.

CAPITULO III

GRUPOS DE HOMOTOPIA

En este capítulo le asignaremos al conjunto de clases de homotopía $\pi_n(X,*)$ una estructura de grupo para $n \geq 1$. Dicha estructura puede construirse directamente, sin embargo lo haremos fácilmente utilizando los resultados del Capítulo II.

1. EL FUNTOR SUSPENSION Σ.

En esta sección definiremos la suspensión reducida de un espacio topológico X y estableceremos algunas de sus propiedades.

1.1 NOTACION. Denotemos por $\pi_n(X,*)$ al conjunto de clases de homotopía $[(I^n, \partial I^n)', (X,*)]$ de funciones continuas de $(I^n, \partial I^n)$ en $(X,*)$.

1.2 DEFINICION. La suspensión reducida ΣX de un espacio topológico X es $X \wedge S^1$.

Es claro que Σ es un funtor de la categoría $\mathcal{T}^*$ en $\mathcal{T}^*$ dado por $\Sigma(X,*) = (\Sigma X,*)$. Si $f \in C((X,*),(X',*))$ denotaremos por Σf a la aplicación $I \wedge f:(S^1 \wedge X,*) \longrightarrow (S^1 \wedge X',*)$.

1.3 OBSERVACION. $S^n \cong I^n/\partial I^n$. El homeomorfismo $S^n \longrightarrow I^n/\partial I^n$ está dado por

$$(x_1,\ldots,x_{n+1}) \longmapsto \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{1-x_1}\right),\ldots,1+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x_{n+1}}{1-x_1}\right)\right).$$

1.4 PROPOSICION. Si X y Y están en $\mathcal{CG}^*$ entonces

$$F(X,Y) = [(\Sigma X,*),(Y,*)]$$

es un funtor de dos variables de $\mathcal{CG}^*$ a $\mathcal{Gr}$.

Además $F(\_\_,Y)$ es contravariante y $F(X,\_\_)$ es covariante.

Demostración. Tenemos que $[(\Sigma X,*),(Y,*)] = [(X \wedge S^1,*),(Y,*)]$

$$\begin{aligned} &\overset{s}{\longleftrightarrow} [(S^1,*),(Y,*)^{(X,*)}] \\ &\overset{c}{\longleftrightarrow} [(I^1,\partial I^1),(Y,*)^{(X,*)}] \\ &= \pi_1((Y,*)^{(X,*)},*) \end{aligned}$$

donde s es biyectiva por II.4.19 y II.4.15 y c es biyectiva por II.4.20 y 1.3.

Sea $f:(X,*) \longrightarrow (X',*)$ una función continua. Definimos $f':(Y,*)^{(X',*)} \longrightarrow (Y,*)^{(X,*)}$ por $f'(g) = g \circ f$. Luego

$$\begin{aligned} (f')_*:\pi_1((Y,*)^{(X',*)},*) &\longrightarrow \pi_1((Y,*)^{(X,*)},*) \\ [p] &\longmapsto [f' \circ p]. \end{aligned}$$

Pero $(f')_{*}=f^{*}:[(\Sigma X',*),(Y,*)]\longrightarrow[(\Sigma X,*),(Y,*)]$.

Si definimos $F(\_\_,Y): \mathcal{C}\mathcal{g}^{*}\longrightarrow \mathcal{g}r$

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & [(\Sigma X,*),(Y,*)] \\ f\downarrow & & \uparrow f^{*} \\ X' & \longmapsto & [(\Sigma X',*),(Y,*)] \end{array}$$

tenemos que $(f_1\circ f_2)^{*}([p])=[(f_1\circ f_2)'\circ(p)\ =[f_2'\circ f_1'\circ p]=f_2^{*}([f_1\circ p])=$ $f_2^{*}\circ f_1^{*}([p])$ y $((I'\circ m)(t))(x)=(m(t))(x)$. Luego $I'\circ m=m$. Por lo tanto $I^{*}([m])=[I'\circ m]=[m]$. De aquí que $I^{*}=I_{\pi_1(Y^X_{,*})}$. Entonces $F(\_\_,Y)$ es un funtor contravariante.

Semejantemente, la función $g:(Y,*)\longrightarrow(Y',*)$ induce

$$\begin{array}{ccc} g':(Y,*)^{(X,*)} & \longrightarrow & (Y',*)^{(X,*)} \\ m & \longmapsto & g\circ m\ , \end{array}$$

de la cual obtenemos
$$\begin{array}{ccc} g_{*}:\pi_1((Y,*)^{(X,*)},*) & \rightarrow & \pi_1((Y',*)^{(X,*)},*) \\ [s] & \longmapsto & [g'\circ s] \end{array}$$

donde
$$\begin{array}{ccc} g'\circ s:S^1 & \longrightarrow & (Y',*)^{(X,*)} \\ t & \longmapsto & g\circ(s(t)) \end{array}$$

Pero $\quad g_{*}:[(\Sigma X,*),(Y,*)]\longrightarrow[(\Sigma X,*),(Y',*)]$.

Si definimos $\quad F(X,\_\_): \mathcal{C}\mathcal{g}^{*}\longrightarrow \mathcal{g}r$

$$\begin{array}{ccc} Y & \longmapsto & [(\Sigma X,*),(Y,*)] \\ g\downarrow & & \downarrow g_{*} \\ Y' & \longmapsto & [(\Sigma X,*),(Y',*)] \end{array}$$

vemos que $(g_1\circ g_2)_{*}([t])=[(g_1\circ g_2)'\circ t]\ =[g_1'\circ g_2'\circ t]=g_{1*}([g_2'\circ t])=$ $g_{1*}\circ g_{2*}([t])$ y $((I'\circ m)(t))(x)=(I\circ(m(t)))(x)=I((m(t))(x))=$ $(m(t))(x)$. Por lo que $I_{*}([m])=[I'\circ m]=[m]$. De aquí que $I_{*}=I_{\pi_1(Y^X_{,*})}$. Luego $F(X,\_\_)$ es un funtor covariante.

///

1.5 DEFINICION. El cono reducido de un espacio topológico X es $(X,*)\wedge(I,1)$ y lo denotamos por C^*X.

Tenemos las siguientes propiedades:

1.6 PROPOSICION. a) $X\subset C^*X$.

b) $(C^*(S^{n-1}),S^{n-1})\equiv(B^n,S^{n-1})$.

Demostración. a) Definamos $i:X\longrightarrow C^*X$ mediante $i(x)=(x,0)$. Luego $X\subset C^*X$. b) Sea $h:(C^*(S^{n-1}),S^{n-1})\longrightarrow(B^n,S^{n-1})$ donde $h(x,t)=(1-t)x+t*$ con $x,*\in S^{n-1}$. Es fácil ver que $h(x,t)\in B^n$, por lo que h está bién definida. Sea $f:B^n\longrightarrow B^n$ dada por $f(x)=*$ para toda $x\in B^n$ y $U=\{x\mid f(x)\neq x\}=B^n-\{*\}$. Sea $g:B^n-\{*\}\longrightarrow S^{n-1}$ dada por $g(u)=ru+(1-r)*$. La función $g|((B^n-\{*\})\cap S^{n-1})$ es la inclusión. Definimos $l:(B^n,S^{n-1})\longrightarrow(C^*(S^{n-1}),S^{n-1})$ donde $l(*)=*$ y $l(u)=(g(u),\frac{r-1}{r})$ con $u\neq *$. Se puede verificar fácilmente que l es la inversa de h. Por lo tanto h es biyectiva. La continuidad de h también es fácil demostrarla.

Como existe una aplicación cociente $(S^{n-1},*)\times(I,1)\longrightarrow C^*(S^{n-1})$ y además $(S^{n-1},*)\times(I,1)$ es compacto, tenemos que $C^*(S^{n-1})$ es compacto. Como B^n es Hausdorff concluímos por I.1.25 que

$$(C^*(S^{n-1}),S^{n-1})\equiv(B^n,S^{n-1}).$$

///

Sea $\phi : \Sigma(I^{n-1}/\partial I^{n-1}) \longrightarrow I^n/\partial I^n$ dado por $\phi(x_1,\ldots,x_{n+1},t) = (x_1,\ldots,x_{n+1},t)$. Claramente es una función biyectiva. Como las aplicaciones cociente son continuas y suprayectivas y como I^{n-1} es compacto, tenemos que $I^{n-1}/\partial I^{n-1}$ es compacto; luego $((I^{n-1}/\partial I^{n-1})\times S^1)/((I^{n-1}/\partial I^{n-1})\vee S^1) = \Sigma(I^{n-1}/\partial I^{n-1})$ es compacto ya que S^1 es compacto. Por I.1.28 sabemos que $I^n/\partial I^n$ es Hausdorff. Entonces por I.1.25 ϕ es un homeomorfismo.

Sea $f_n:S^n \longrightarrow I^n/\partial I^n$ el homeomorfismo dado en 1.3. Ahora, como Σ es un funtor, $\Sigma f_{n-1}:\Sigma(S^{n-1}) \longrightarrow \Sigma(I^{n-1}/\partial I^{n-1})$ es un homeomorfismo. Definimos $\varphi = f_n^{-1} \circ \phi \circ \Sigma f_{n-1}:\Sigma(S^{n-1}) \to S^n$. Por I.1.21 y I.1.24 sabemos que φ es un homeomorfismo. Por lo tanto tenemos el siguiente:

1.7 TEOREMA.a) $\Sigma(I^{n-1}/\partial I^{n-1}) \equiv I^n/\partial I^n$.

b) $\Sigma(S^{n-1}) \equiv S^n$.

Como $\Sigma(S^1) = S^1 \wedge S^1$ y $S^2 \equiv \Sigma(S^1)$ por 1.7; tenemos que $S^2 \equiv S^1 \wedge S^1$. Supongamos que $S^{n-1} \equiv S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$. Sabemos que $S^n \equiv \Sigma(S^{n-1}) = S^{n-1} \wedge S^1 \equiv S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$. Por lo cual tenemos el siguiente :

1.8 COROLARIO. $S^n \equiv S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$.

2. ESTRUCTURA DE GRUPO DEFINIDA EN CLASES DE HOMOTOPIA.

A continuación definiremos una multiplicación entre clases de homotopía.

2.1 DEFINICION. Un grupo es un conjunto punteado (X,e) junto con una multiplicación $\mu:X\times X\to X$ y un inverso $\nu:X\to X$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

i)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(e,I)}"] \arrow[dr, "I"'] & X\times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "{(I,e)}"'] \arrow[dl, "I"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
(e es una identidad por los dos lados)

ii)
$$\begin{tikzcd} X\times X\times X \arrow[r, "\mu\times I"] \arrow[d, "I\times\mu"'] & X\times X \arrow[d, "\mu"] \\ X\times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$
(asociatividad)

iii)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(\nu,I)}"] \arrow[dr, "e"'] & X\times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "{(I,\nu)}"'] \arrow[dl, "e"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
(inverso)

dónde $e:X\to X$ tal que $e(x)=e$ es la aplicación constante y $(e,I):X\to X\times X$ con $(e,I)(x)=(e,x)$.

Sea $T:X\times X\to X\times X$ dado por $T(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$ para todo (x_1,x_2) en $X\times X$, entonces X es abeliano si el siguiente diagrama conmuta

iv)
$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & X\times X \arrow[d, "\mu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

2.2 DEFINICION. Un H-espacio es un espacio punteado (X,e,μ), donde $\mu:(X\times X,e\times e)\rightarrow(X,e)$ es una función continua (llamada multiplicación), tal que $\mu/X\vee X\sim\nabla$ donde $\nabla:X\vee X\rightarrow X$ está dada por $\nabla(x,e)=\nabla(e,x)=x$. (Claramente ∇ está bién definida, es continua y preserva el punto base); y e es la identidad homotópica, es decir el diagrama 2.1 i) conmuta homotópicamente $(\mu\circ(I,e)\sim I\sim\mu\circ(e,I))$.

2.3 DEFINICION. μ es homotópicamente asociativa si el diagrama 2.1 ii) conmuta homotópicamente; es decir $\mu\circ(\mu\times I)\sim\mu\circ(I\times\mu)$.
La función $\nu:(X,e)\rightarrow(X,e)$ se llama inverso homotópico si el diagrama 2.1 iii) conmuta homotópicamente es decir $\mu\circ(\nu,I)\sim e\sim\mu\circ(I,\nu)$.
Diremos que μ es homotópicamente conmutativo si el diagrama 2.1 iv) conmuta homotópicamente, es decir $\mu\circ T\sim\mu$, donde $T(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$.

2.4 DEFINICION. Un H-grupo es un H-espacio (X,e,μ) donde μ es homotópicamente asociativa y además tiene un inverso homotópico ν.

2.5 EJEMPLO. Todo grupo topológico es un H-grupo.

2.6 PROPOSICION. Si (X,e,μ) es un H-espacio entonces $[(Y,*),(X,e)]$ posee una multiplicación inducida por la estructura de H-espacio.

Demostración. Si $f,\ g:(Y,*) \longrightarrow (X,e)$, definimos $f\cdot g:(Y,*) \longrightarrow (X,e)$ por $f\cdot g(y) = \mu(f(y),g(y))$. De aquí que $f\cdot g(*) = \mu(f(*),g(*)) = \mu(e,e) = e$. Veamos que $f\cdot g$ depende únicamente de la clase de homotopía de f y g. Supongamos que $f_0 \sim f_1:(Y,*) \longrightarrow (X,e)$ y $g_0 \sim g_1:(Y,*) \longrightarrow (X,e)$. Por lo tanto existen $F,G:(Y\times I, *\times I) \longrightarrow (X,e)$ continuas tales que $F(y,0) = f_0(y)$, $F(y,1) = f_1(y)$. $G(y,0) = g_0(y)$ y $G(y,1) = g_1(y)$ para toda $y \in Y$. Definimos $H:(Y\times I,*\times I) \to (X,e)$ mediante $H(y,t) = \mu(F(y,t),G(y,t))$. Luego
$H(y,0) = \mu(F(y,0),G(y,0)) = \mu(f_0(y),g_0(y)) = f_0\cdot g_0(y)$ y
$H(y,1) = \mu(F(y,1),G(y,1)) = \mu(f_1(y),g_1(y)) = f_1\cdot g_1(y)$ para toda $y \in Y$. Es fácil ver que H es continua. Luego
$f_0\cdot g_0 \sim f_1\cdot g_1$. Por lo tanto
$\cdot: [(Y,*),(X,e)] \times [(Y,*),(X,e)] \longrightarrow [(Y,*),(X,e)]$ dada por $\cdot([f],[g]) = [f\cdot g]$ está bién definida. ///

2.7 DEFINICION. Sean $f,\ g:(\Sigma X,*) \longrightarrow (Y,e)$. El producto $f \odot g$ en $[(\Sigma X,*),(Y,e)]$ inducido por la estructura de ΣX está dado por

$$(f\odot g)(x,t) = g(x,2t) \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{y}$$
$$(f\odot g)(x,t) = f(x,2t-1) \quad \text{si} \quad \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

2.8 PROPOSICION. Si (Y,e) es un H-espacio entonces las dos multiplicaciones en $[(\Sigma X,*),(Y,e)]$ son las mismas y son conmutativas.

Demostración. Primero veamos que las multiplicaciones conmutan una con la otra . Es decir, que

$$(1) \qquad (f\cdot g)\odot(f'\cdot g') = (f\odot f')\cdot(g\odot g').$$

Si $0\leq t\leq\frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}((f\cdot g)\odot(f'\cdot g'))(x,t) &= f'\cdot g'(x,2t)\\ &=\mu(f'(x,2t),g'(x,2t))\\ &=\mu((f\odot f')(x,t),(g\odot g')(x,t))\\ &= ((f\odot f')\cdot(g\odot g'))(x,t),\end{aligned}$$

de aquí que ambos lados de la ecuación (1) están dados por

$$h(x,t) =\mu(f'(x,2t),g'(x,2t)).$$

De manera semejante, si $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$, ambos lados de la ecuación (1) están dados por

$$h(x,t) =\mu(f(x,2t-1),g(x,2t-1)).$$

Las dos multiplicaciones tienen el mismo elemento identidad, a saber la función $e':(\Sigma X,*) \longrightarrow (Y,e)$ donde $e'(x,t) =e$. Si $g = f' = e'$ tenemos, por (1), que $f\odot g' = f\cdot g'$. De aquí que ambas multiplicaciones son iguales. Ahora, supongamos que $f = g' = e'$. Por lo tanto, por (1), $g\odot f' = f'\cdot g$. Entonces las multiplicaciones son conmutativas. ///

3. EL FUNTOR LAZO Ω, EL FUNTOR π_n Y EL ISOMORFISMO $[(\Sigma X,*),(Y,*)] \longleftrightarrow [(X,*),(\Omega Y,*)]$.

En esta sección definiremos un espacio ΩX asociado a un espacio topológico X y estableceremos algunas de sus propiedades.

3.1 DEFINICION. El espacio de lazos ΩX de un espacio topológico X es el conjunto de funciones continuas $w: I \longrightarrow X$ tal que $w(0) = w(1) = *$. La función continua $w_0: I \longrightarrow X$ dada por $w_0(s) = *$, $s \in I$, es el punto base de ΩX, el cual omitiremos en la notación. Definimos $\Omega^n X = \Omega(\Omega^{n-1} X)$.

3.2 PROPOSICION. $\Omega X \cong (X,*)^{(S^1,*)}$.

Demostración. Tenemos que $\Omega X = (X,*)^{(I,\{0,1\})}$, (3.1)

$$\cong (X,*)^{(I/\{0,1\},*)} \quad \text{por II.4.13}$$

$$\cong (X,*)^{(S^1,*)} \quad \text{por 1.1.}$$

Entonces $\Omega X \cong (X,*)^{(S^1,*)}$. ///

3.3 OBSERVACION. Ω es un funtor de la categoría $\mathcal{T}^*$ en $\mathcal{T}^*$ donde $\Omega(Y,*) = (\Omega Y,*)$. Si $g:(Y,*) \longrightarrow (Y',*)$ es una función continua, denotamos por $\Omega g:(\Omega Y,*) \longrightarrow (\Omega Y',*)$ a la función continua dada por $(\Omega g(w))(t) = (g \circ w)(t)$ para toda $t \in S^1$.

3.4 PROPOSICION. Si $n \geq 1$, $\Omega^n X$ es un H-espacio.

Demostración. Sea $e_0 : \Omega X \longrightarrow \Omega X$ dada por $e_0(h) = w_0$, la identidad homotópica, donde w_0 es el punto base de ΩX. Sea $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ dada por

$$(\mu(w_1, w_2))(t) = \begin{cases} w_2(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w_1(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

una multiplicación en ΩX. Para demostrar que es continua, observamos que la función correspondiente a μ de $\Omega X \times \Omega X \times I \longrightarrow X$ es continua. Por lo tanto por II.4.7, μ es continua. Sea $H : (\Omega X \vee \Omega X) \times I \longrightarrow \Omega X$ dada por:

$$(H(w,*,s))(t) = \begin{cases} *, & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ w\left(\frac{2t-s}{2-s}\right), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$(H(*,w,s))(t) = \begin{cases} w\left(\frac{2t}{2-s}\right), & 0 \leq t \leq 1-\frac{s}{2} \\ *, & 1-\frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por II.4.7 es fácil ver que H es continua.

Como
$$(H(w,*,0))(t) = w(t) = (\nabla(w,*))(t)$$
$$(H(*,w,0))(t) = w(t) = (\nabla(*,w))(t)$$
$$(H(w,*,1))(t) = * = *(2t) = (\mu(w,*))(t)$$
$$(H(*,w,1))(t) = w(2t) = (\mu(*,w))(t) \text{ si } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}$$

y
$$(H(w,*,0))(t) = w(t) = (\nabla(w,*))(t)$$
$$(H(*,w,0))(t) = w(t) = (\nabla(*,w))(t)$$
$$(H(w,*,1))(t) = w(2t-1) = (\mu(w,*))(t)$$
$$(H(*,w,1))(t) = * = *(2t-1) = (\mu(*,w))(t)$$

si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, tenemos que $H : \nabla \sim \mu / (\Omega X \vee \Omega X)$. Entonces

$\Omega^n X$ es un H-espacio. ///

3.5 PROPOSICION. π_n es un funtor de $\mathcal{Cg}^*$ a $\mathcal{Gr}$ para $n \geq 1$.

Demostración, Por II.4.20 y 1.1 existe una función biyectiva entre $\pi_n(X,*)$ y $[(S^n,*),(X,*)]$. Luego por 1.7 sabemos que existe una función biyectiva entre $[(S^n,*),(X,*)]$ y $[(\Sigma(S^{n-1}),*),(X,*)]$. Entonces por 1.4 π_n es un funtor de $\mathcal{Cg}^*$ a $\mathcal{Gr}$ para $n \geq 1$. ///

$\pi_n(X,*)$ es llamado el enésimo grupo de homotopía de X.

3.6 PROPOSICION. La función biyectiva

$$[(\Sigma X,*),(Y,*)] \xrightarrow{A} [(X,*),(\Omega Y,*)]$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $f,g:(\Sigma X,*) \longrightarrow (Y,*)$. Basta demostrar que $A(f\cdot g) = A(f)\cdot A(g)$. Sean $x \in X$ y $t \in I$, por lo tanto

$$((A(f\cdot g))(x))(t) = (f\cdot g)(x,t) = \begin{cases} g(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y $$((A(f)\cdot A(g))(x))(t) = ((A(f))(x)\cdot(A(g))(x))(t)$$

$$= \begin{cases} ((A(g))(x))(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ((A(f))(x))(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(ver 2.6, 2.7 y 3.4)

Pero $((A(g))(x))(2t) = g(x,2t)$ y $((A(f))(x))(2t-1) = f(x,2t-1)$. Luego $A(f\cdot g) = A(f)\cdot A(g)$, por lo que concluímos que A es un isomorfismo de grupos. ///

3.7 COROLARIO. $\pi_n(X,*)$ es abeliano si $n > 1$.

Demostración. $\pi_n(X,*) \longleftrightarrow [(S^n,*),(X,*)]$ es biyectiva (ver II.4.20, 1,1 y II.4.17)

$\longleftrightarrow [(\Sigma S^{n-1},*),(X,*)]$ es biyectiva (1.5)

$\longrightarrow [(S^{n-1},*),(\Omega X,*)]$ es isomorfismo (3.6)

$\longleftrightarrow [(\Sigma S^{n-2},*),(\Omega X,*)]$ es biyectiva (1.5)

$\longrightarrow [(S^{n-2},*),(\Omega^2 X,*)]$ es isomorfismo (3.6)

$\vdots$

$\longrightarrow [(S^1,*),(\Omega^{n-1} X,*)]$ es isomorfismo

$= \pi_1(\Omega^{n-1} X,*)$.

Por 3.4 Ω^{n-2} es un H-espacio; por 2.8 tenemos que $\pi_1(\Omega^{n-1}(X,*),*)$ es abeliano. Entonces $\pi_n(X,*)$ es abeliano.

///

Bibliografía

(C) Cantor G., Contributions to the founding of the theory of Transfinite Numbers, Dover, New York, 1955.

(G) Gray B., Homotopy Theory, Academic Press, 1975.

(G-M) García Máynez A., Introducción a la topología de conjuntos, Trillas, México, 1971.

(K) Kelley J.L., General Topology, Van Nostrand, New York, 1955.

(S) Steenrod N.E., A Convenient Category of Topological Spaces, Michigan Mathematical Journal 14, 1967.

(Sw) Switzer R., Algebraic Topology:Homotopy and Homology, Springer Verlag, 1975.

(W) Willard S., General Topology, Addison Wesley, 1970.