UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

REPRESENTACIONES DE CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

María Guadalupe Alférez Hernández

México, D. F. Septiembre, 1983

INDICE

	INTRODUCCION	I
I.	CARCAJES Y ALGEBRAS DE CARCAJ.	1
II.	DIFERENTES DEFINICIONES DE REPRESENTACIONES DE UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO.	9
III	EL ALGORITMO DE ROITER-NAZAROVA.	36
IV	LA INTERPRETACION DE GABRIEL.	101
V	ANALISIS DE LOS CONJUNTOS DE ANCHO TRES.	139
	BIBLIOGRAFIA	168

INTRODUCCION:

Veamos qué se sabía alrededor de 1940 sobre representaciones inescindibles de álgebras de dimensión finita [Ri].

Para anillos artinianos conmutativos, Köthe [Kö] probó que los anillos uniseriales son los únicos para los que cada módulo es suma directa de módulos cíclicos. Y propuso el problema de caracterizar todos los anillos artinianos con esta propiedad.

Mas tarde Nakayama [Na] investigó los anillos seriales en gran detalle y en particular probó que cualquier módulo (finitamente generado o nó) sobre un anillo serial es suma directa de módulos inescindibles y demostró también que los inescindibles son seriales, es decir, imágenes epimorfas de módulos proyectivos inescindibles. En este caso, los módulos inescindibles son de longitud acotada.

Al mismo tiempo, Brummund [Bu] probó que los p-grupos no cíclicos siempre son representaciones p-modulares inescindibles de longitud arbitrariamente grande.

Nakayama [Na] insistió en el hecho

de que los argumentos de Brummund trabajaban para hipótesis mas generales y planteó el problema de determinar el tipo general de los anillos que poseen módulos izquierdos o derechos, directamente inescindibles y arbitrariamente grandes. Pero dejó este problema abierto.

En 1941 aparece un resumen de Brauer [Br] en el boletín de AMS donde anuncia un artículo en que estudia los casos en que un álgebra de dimensión finita A tiene infinitas representaciones inescindibles no equivalentes.

Este artículo nunca se publicó. Sin embargo mas tarde Thrall [Tr1] aparentemente se refiere a este artículo en otro artículo del mismo boletín titulado "On ahdis algebras" donde ahdis son las siglas en inglés de "álgebras con representaciones inescindibles de grado arbitrariamente alto". Thrall afirma que Brauer dió tres condiciones, suficientes para asegurar que A es ahdis. Estas condiciones están establecidas en términos de las invariantes de Cartan de A, A/N, A/N², ... donde N es el radical de A. Las condiciones fueron la exclu sión de los diagramas $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_n$ con $n \geq 2$ y $\tilde{D}_4$. Thrall también excluye los diagramas $\tilde{D}_n$ con $n \geq 5$. Esto fué estudiado en gran detalle por Jans [Ja].

De esta manera Thrall pensó que había caracterizado las álgebras con radical cuadrado cero de tipo de representación finita.

Nueve años mas tarde Yoshii [Yo] publicó su intento de tratar con estas álgebras y señaló que Brauer le había dicho que él y Thrall habían obtenido los mismos resultados en trabajos que no se habían publicado.

En contraste con el uso extensivo de matrices que hizo Yoshii, Brauer y Thrall se dieron cuenta de que la mejor manera de tratar estos problemas era considerar espacios vectoriales con subespacios. y en uno de sus artículos sobre lattices modulares que tampoco se publicó, Thrall [Tr2] sugiere la posibilidad de investigar las conexiones entre la teoría de representaciones y la teoría de lattices.

La primera formulación actual de las conjeturas está en un artículo de Jans [Ja] donde define tipo de representación finita, acotada y fuertemente no acotada. Las conjeturas para un álgebra Λ de dimensión finita son las siguientes:

a) Si Λ tiene un número infinito de representaciones inescindibles, entonces tiene representaciones inescindibles de dimensión tan grande como se quiera.

b) Si las dimensiones de las representaciones inescindibles de Λ sobre un campo infinito son no acotadas entonces existen infinitas dimensiones en las que existen infinitas representaciones inescindibles.

Se cuenta que Braue y Thrall considera son las conjeturas como problemas para los estudiantes, sin embargo han sido estas conjeturas, los problemas más estimulantes para el desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita.

Roiter resolvió la primera conjetura de mostrando que un álgebra de dimensión finita es de tipo de representación finita o existen módulos inescindibles de dimensión arbitrariamente grande.

También Nazarova y Roiter probaron la segunda conjetura para el caso de campos base algebraicamente cerrados (y también perfectos). Su teorema dice que si A es un álgebra de dimensión finita sobre un campo k algebraicamente cerrado entonces A es de tipo de representación finita o existe una inmersión exacta $M_{k[T]} \longrightarrow M_A$ que manda los k[T]-módulos irreducibles a A-módulos de dimensión fija, los módulos inescindibles en módulos inescindibles y módulos no isomorfos a módulos no isomorfos. Aquí k[T] denota el anillo de polinomios en una variable T sobre el campo k.

Los métodos introducidos por Nazarova y Roiter para probar su teorema fueron de gran importancia. Como primer paso probaron la segunda conjetura para la categoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados [N-R1], [N,R2] y de esta manera desarrollaron una elaborada teoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados.

Usando estos métodos Kleiner [Kl1] y [Kl2] dió una descripción completa de los conjuntos parcialmente ordenados de tipo finito y de todas sus representaciones.

El segundo paso fué la consideración de categorías de espacios vectoriales arbitrarias y sus categorías de subespacios [N-R3]. El desarrollo de estas ideas llevó a la introducción de las categorías diferencialmente graduadas que formalizan completamente los cálculos matriciales.

Raymundo Bautista [Ba] utilizando cubiertas universales probó la segunda conjetura para algebras sobre campos algebraicamente cerrados de característica diferente de dos. Se espera que el caso general se pueda reducir a éste. La segunda conjetura se reduce al estudio de las álgebras simplemente conexas y éstas como ha mostrado Bongartz requieren el uso de los conjuntos parcialmente ordenados.

Debido a la importancia que tienen los conjuntos parcialmente ordenados, este trabajo surgió de la necesidad de entender el artículo de Nazarova-Roiter titulado "Representaciones de conjuntos parcialmente ordenados" [N-R1] donde demuestran la segunda conjetura para conjuntos parcialmente ordenados, es decir, demuestran que si un conjunto parcialmente ordenado S tiene infinitas representaciones inescindibles sobre un campo infinito k entonces existen infinitas dimensiones para las que existen infinitas representaciones inescindibles.

Básicamente ellos prueban utilizando métodos matriciales, que los conceptos de tipo infinito y tipo no acotado coinciden.

Nuestro trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el capítulo I se introduce la noción de carcaj, se definen las álgebras de carcaj y se enuncian sin demostración algunos resultados importantes, en particular se enuncian los teoremas que dicen como traducir módulos a representaciones y viceversa. Para este capítulo ver [G-L-S].

El capítulo II incluye las tres definiciones de representación de un conjunto parcialmente ordenado dadas en términos de matrices [N-R$_1$], espacios vectoriales [Ga$_1$],[Ga$_2$], y módulos [Ba-M]. Se demuestra también que las representaciones de estas tres categorías son equivalentes. Ver [Ba-L].

En el capítulo III se describen los algoritmos que Nazarova-Roiter [N-R$_1$], [N-R$_2$] utilizan para "derivar" conjuntos y para obtener las representaciones del conjunto derivado a partir de las representaciones del conjunto original. Incluimos un esquema de la prueba del lema de reducción y las demostraciones de algunos resultados importantes del artículo de Nazarova-Roiter, para que el lector tenga una idea del "sabor" de las pruebas originales".

En el capítulo IV se estudia la interpretación que hace P. Gabriel [Ga1], [Ga5] del algoritmo de Nazarova-Roiter. Gabriel introduce el concepto de S-espacio y prueba los resultados de Roiter utilizando técnicas de S-espacios.

En el capítulo V se demuestra que los conjuntos de ancho tres se pueden llevar mediante el algoritmo definido anteriormente a conjuntos de ancho menor o igual que dos o a conjuntos de ancho mayor o igual que cuatro en un número finito de pasos. [N-R1]. Con el análisis de los conjuntos de ancho tres se termina la prueba de la segunda conjetura de Brauer-Thrall para conjuntos parcialmente ordenados.

I. CARCAJES Y ALGEBRAS DE CARCAJ.

En este primer capítulo introduciremos la noción de carcaj, definiremos las algebras de carcaj y enunciaremos sin demostración algunos resultados que serán usados en el capítulo II para probar que las diferentes definiciones de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado son esencialmente equivalentes. Ver [C-L-S].

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Un carcaj C es una gráfica orientada, conexa y finita. C_0 denotará el conjunto de vértices de C y C_1 el conjunto de flechas. Además tenemos dos funciones $\alpha, \beta : C_1 \to C_0$ tales que a una flecha $\gamma \in C_1$, $\alpha(\gamma)$ le asocia el vértice inicial y $\beta(\gamma)$ el vértice final

Un camino dirigido (de longitud n) de i a j en un carcaj C es una sucesión de vértices y flechas $(j|\gamma_n, \dots, \gamma_1|i)$ con $n \geq 0$ tal que $\alpha(\gamma_1) = i$ $\beta(\gamma_n) = j$ y para toda $i = 1, \dots, n$, $\alpha(\gamma_{i+1}) = \beta(\gamma_i)$. Si $n = 0$ pedimos que $i = j$. Dado un vértice $i \in C_0$ le asociamos su camino trivial $\gamma_i := (i||i)$.

Sea kC la k-álgebra asociada a C

y que se define de la siguiente manera:

Como k-espacio vectorial tiene por base el conjunto de todas los caminos dirigidos del carcaj C. La multiplicación de dos caminos dirigidos $(m|\beta_p,\ldots,\beta_1|h)\cdot(j|\alpha_n,\ldots,\alpha_1|i)$ vale cero si $h\neq j$ y vale $(m|\beta_p,\ldots,\beta_1,\alpha_n,\ldots,\alpha_1|i)$ si $h=j$. Este producto se extiende de manera única a todo kC y se obtiene una k-álgebra cuyo uno es $\sum_{i\in C_0}\gamma_i$. A kC se le llama el álgebra de carcaj asociada a C.

kC resulta un álgebra inescindible y $\{\gamma_i \mid i\in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos para kC. Además kC es una k-álgebra de dimensión finita si y solo si C no tiene ciclos dirigidos.

Sea J el ideal izquierdo de kC generado por todas las flechas de C. J resulta ideal bilateral.

Un ideal bilateral R del álgebra de carcaj kC es admisible si $R\subset J^2$ y existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $J^n\subset R$.

Denotaré por $k(C,R)=kC/R$. Esta k-álgebra es de dimensión finita sobre k, inescindible y básica. $\{\bar{\gamma}_i \mid i\in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita, inescindible y básica.

Se puede asociar a Λ un carcaj C_Λ de la manera siguiente:

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ, entonces C_Λ tiene n vértices, $C_{\Lambda_0} = \{1, \dots, n\}$ y el número de flechas que empiezan en el vértice i y terminan en el vértice j es $\dim_k [e_j (\operatorname{rad}\Lambda / \operatorname{rad}^2 \Lambda) e_i]$

Como Λ es inescindible se tiene que esta gráfica es conexa y por lo tanto C_Λ es un carcaj.

Para construir un morfismo $\phi: kC_\Lambda \to \Lambda$ que resultará suprayectivo se hace lo siguiente:

Sean $i, j \in C_{\Lambda_0}$. Elegimos una k-base $\{y_\alpha \mid \alpha \in A_{ij}\}$ donde A_{ij} es el conjunto de flechas de i a j en C_Λ. La imagen en Λ de los básicos de kC_Λ es $\phi(\gamma_i) = e_i$ si $i \in C_{\Lambda_0}$ y $\phi(\alpha) = y_\alpha$ si $i \xrightarrow{\alpha} j \in C_{\Lambda_1}$. Además $R = \ker \phi$ es ideal admisible de kC_Λ y por lo tanto $\Lambda \cong k(C_\Lambda, R)$

La conclusión es que es equivalente estudiar álgebras inescindibles de k-dimensión finita con k algebraicamente cerrado a estudiar cocientes de álgebras de carcaj por ideales admisibles. Ahora queremos interpretar mod Λ.

Sea C un carcaj y R un ideal admisible de kC. Una relación ρ es un elemento no nulo $\rho \in R$ y será legible si los caminos que constituyen a ρ tienen todas el mismo punto inicial y el mismo punto final. Se puede probar que R puede generarse con un número finito de relaciones legibles.

Una k-representación del carcaj C es una pareja $V = ((V_i), (f_\alpha))$ que consta de una familia de k-espacios vectoriales $\{V_i\}_{i\in C_0}$ y una familia de transformaciones lineales $\{f_\alpha\}_{\alpha\in C_1}$ (Se pide que si $\alpha: i \longrightarrow j$ entonces $f_\alpha: V_i \longrightarrow V_j$)

Un morfismo de representaciones $\phi: V \longrightarrow V'$ es una familia $\phi = \{\phi_i : V_i \longrightarrow V'_i\}_{i\in C_0}$ tal que para cada flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C, conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\phi_i"'] & V_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ V'_i \arrow[r, "f'_\alpha"] & V'_j \end{tikzcd}$$

Si V es una representación de C y $\gamma = (j|\alpha_n \ldots \alpha_1|i)$ es un camino dirigido no trivial de C se puede evaluar V en γ como sigue: $V(\gamma) = f_{\alpha_n}\circ f_{\alpha_{n-1}}\circ\cdots\circ f_{\alpha_1}$, siendo entonces $V(\gamma): V_i \longrightarrow V_j$ una transformación lineal. Si $\rho = \sum \lambda_\gamma \gamma$ es una relación legible de i a j se evalúa V en ρ poniendo $V(\rho) = \sum \lambda_\gamma V(\gamma)$ y de nuevo $V(\rho): V_i \longrightarrow V_j$ es lineal.

Si V es una representación de C y ρ es una relación legible de R, se dice que V satisface ρ si $V(\rho)=0$ y se dice que V satisface R si V satisface cada relación legible de R.

Mod (C,R) denotará a la categoría cuyos objetos son las representaciones de (C,R) y cuyos morfismos son los morfismos de representaciones con la composición por coordenadas.

mod (C,R) denotará la subcategoría plena de Mod (C,R) cuyos objetos son los objetos V de Mod (C,R) tales que para todo vértice i de C, V_i es de k-dimensión finita.

Si Mod Λ y mod Λ denotan respectivamente a la categoría de todos los módulos izquierdos sobre Λ y a la subcategoría plena de Mod Λ constituida por los módulos de k-dimensión finita entonces se tiene que las categorías Mod Λ y Mod (C,R) son equivalentes y también que las k-categorías mod Λ y mod (C,R) son equivalentes.

Las demostraciones de estos teoremas son tan importantes como los teoremas mismos ya que dicen como traducir módulos a representaciones y viceversa. Es por esto que daremos a continuación una idea de las pruebas.

Para pasar de módulos a representaciones se define un funtor $F:\text{Mod}\Lambda \longrightarrow \text{Mod}(C,R)$

como sigue:

Para objetos: Sea M un Λ-módulo. Si $i \in \mathcal{C}_0$ definimos V_i como el k-espacio vectorial $V_i := \overline{\gamma}_i M$ donde $\overline{\gamma}_i$ es la clase de γ_i en $\Lambda = k\mathcal{C}/R$

Si $\alpha : i \longrightarrow j$ es una flecha en $\mathcal{C}$ definimos $f_\alpha : V_i \longrightarrow V_j$ como $f_\alpha(x) := \overline{\alpha}(x) = \overline{\gamma}_j \overline{\alpha} x \in V_j$

Como M es Λ-módulo, f_α es k-lineal. Entonces se tiene una representación $V = ((V_i),(f_\alpha))$ de $\mathcal{C}$ y se define $F(M) = V$ después de checar que $V \in \operatorname{Mod}(\mathcal{C}, R)$

Para morfismos: Sea $\phi : M \longrightarrow M'$ un morfismo en $\operatorname{Mod} \Lambda$. Ya tenemos que $F(M) = V$ y $F(M') = V'$ y queremos un morfismo $F(\phi) = (\phi_i) : V \longrightarrow V'$

Si $i \in \mathcal{C}_0$, a cada elemento $\overline{\gamma}_i x$ de $V_i = \overline{\gamma}_i M$ le podemos aplicar ϕ y obtener $\phi(\overline{\gamma}_i x) = \overline{\gamma}_i \phi(x)$ o sea que ϕ puede restringirse a una aplicación lineal $\phi_i : V_i \longrightarrow V_i'$ Se checa fácilmente que $(\phi_i) = F(\phi)$ es un morfismo de $\operatorname{Mod}(\mathcal{C}, R)$

Para pasar de representaciones a módulos se define un funtor $G : \operatorname{Mod}(\mathcal{C}, R) \longrightarrow \operatorname{Mod} \Lambda$ como sigue:

Sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de $\operatorname{Mod}(\mathcal{C}, R)$ Consideremos el k-espacio vectorial $M = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$. Queremos una estructura de Λ-módulo en M para definir $G(V) = M$

se demuestra fácilmente que M tiene estructura natural de kC-módulo y que si $\lambda \in R$ entonces $\lambda m = 0$ para toda $m \in M$. Esto permite definir $\bar{\lambda} m := \lambda m$ para toda $\lambda \in kC$. Aquí $\bar{\lambda}$ denota la clase de λ en Λ y se verifica que con esta acción $G(V) := M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$

Sea $\phi = (\phi_i) : V \longrightarrow V'$ un morfismo en $\mathrm{Mod}\,(C,R)$. Como $G(V) = \oplus V_i$ y $G(V') = \oplus V_i'$ entonces se tiene una transformación k-lineal $G(\phi) = \oplus \phi_i : G(V) \longrightarrow G(V')$ y se prueba que como ϕ era morfismo de representaciones entonces $G(\phi)$ es kC-morfismo y por tanto Λ-morfismo de $G(V)$ a $G(V')$.

Es fácil probar que F, G son k-funtores y que existen isos naturales $\eta : FG \xrightarrow{\sim} 1_{\mathrm{Mod}\,(C,R)}$ y $\rho : GF \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}\,\Lambda}$.

También es fácil demostrar que todo objeto de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ se aplica bajo F en uno de $\mathrm{mod}\,(C,R)$ y que todo objeto de $\mathrm{mod}\,(C,R)$ se aplica bajo G en uno de $\mathrm{mod}\,\Lambda$.

Con esto hemos dado una idea de como probar que las categorías $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ y $\mathrm{Mod}(C,R)$ son equivalentes. Al igual que $\mathrm{mod}\,\Lambda$ y $\mathrm{mod}(C,R)$

Por último, los módulos simples y proyectivos se describen de la siguiente manera:

si $j \in \mathcal{C}_0$, S_j denotará a la representación $S_j = ((S_j)_i, (f_\alpha))$ definida como sigue:

$$(S_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ k & \text{si } i = j \end{cases}$$

y para toda $\alpha \in \mathcal{C}_1$, $f_\alpha = 0$

Claramente S_j es una representación simple de $(\mathcal{C}, R)$ porque no tiene ninguna sub-representación propia no trivial. Se dice que S_j es el simple asociado al vértice j.

Para describir los proyectivos inescindibles basta traducir cada $\Lambda \bar{\gamma}_i$ a una representación $P_i = ((P_i)_j, (f_\alpha))$ de $(\mathcal{C}, R)$ mediante la equivalencia dada por los teoremas anteriores. Se obtiene que

$$(P_i)_j = \bar{\gamma}_j \Lambda \bar{\gamma}_i = (\gamma_j k\mathcal{C} \gamma_i) / (\gamma_j R \gamma_i)$$

Además si $P_1^*, \ldots, P_n^*$ son los proyectivos inescindibles de mod Λ^{op} entonces $D(P_1^*)$, $D(P_2^*), \ldots, D(P_n^*)$ son los inyectivos inescindibles de mod Λ donde $D: \text{mod}\,\Lambda^{op} \to \text{mod}\,\Lambda$ es la dualidad usual. Por lo tanto tenemos que:

$$(I_j)_i = (P_j^*)_i^* = (\gamma_i k\mathcal{C}^* \gamma_j / \gamma_i R^* \gamma_j)^* =$$

$$= (\gamma_j k\mathcal{C} \gamma_i)^* \cong \gamma_j k\mathcal{C} \gamma_i / \gamma_j R \gamma_i$$

II DIFERENTES DEFINICIONES DE REPRESENTACIONES DE UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO.

El objetivo de este capítulo es enunciar las definiciones de representación de un conjunto parcialmente ordenado dadas en términos de matrices [N-R1], [N-R2], espacios vectoriales [Ga1], [Ga2] y módulos [Ba-M] y probar que estas categorías tienen el mismo número de clases de isomorfía [Ba-L]

En todo el trabajo se utilizarán únicamente conjuntos parcialmente ordenados finitos.

Sea k un campo. Recordemos que existe una biyección entre el conjunto de transformaciones lineales $L: k^n \to k^m$ y el conjunto de matrices A de $n \times m$ con entradas en k.

Consideremos el caso particular de la transformación lineal $L: k \to k$
$x \mapsto 0$

Entonces L se puede factorizar por su imagen:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "L_1"'] & & k \\ & \{0\} \arrow[ur, "L_2"'] & \end{tikzcd}$$

donde a la transformación L_1 le corresponde una matriz A_1 con un renglón y cero columnas y a la transformación L_2 le corresponde una matriz A_2 con cero renglones y una columna.

Denotaremos a la matriz vacía A_1 por $J_{1,0}$ para indicar que tiene un renglón y cero columnas y a la matriz vacía A_2 por $J_{0,1}$ para indicar que tiene cero renglones y una columna.

De igual manera podemos factorizar a la transformación $T: \begin{array}{l} k^n \longrightarrow k^m \\ x \longmapsto \bar{0} \end{array}$ para obtener las matrices $J_{n,0}$ y $J_{0,m}$.

Sea M_k el conjunto de todas las matrices de dimensión finita con coeficientes en k. Entonces M_k tiene estructura de semigrupo con la operación $\oplus$ definida como sigue:

Si $A, B \in M_k$ entonces $A \oplus B = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$

Esta operación está bien definida.

Veamos algunos ejemplos para familiarizarnos con las matrices vacías y con la operación $\oplus$.

Si $n \in \mathbb{N}$ y A es una matriz no vacía se tiene que:

$$J_{0,n} \oplus A = [0 \mid A] \quad , \quad A \oplus J_{0,n} = [A \mid 0]$$

$$J_{n,0} \oplus A = \left[\frac{0}{A}\right] \qquad y \qquad A \oplus J_{n,0} = \left[\frac{A}{0}\right]$$

Aquí la matriz $[0]$ tiene n columnas en los casos $A \oplus J_{0,n}$ y $J_{0,n} \oplus A$ y tiene n renglones en los casos $J_{n,0} \oplus A$ y $A \oplus J_{n,0}$.

Si $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$J_{m,0} \oplus J_{n,0} = J_{m+n,0}$$

$$J_{0,m} \oplus J_{0,n} = J_{0,m+n}.$$

$J_{m,0} \oplus J_{0,n} = J_{0,n} \oplus J_{m,0} = [0]$ con m renglones y n columnas.

Como caso particular tenemos que la matriz $[0] = J_{1,0} \oplus J_{0,1}$

Para cualquier $A \in M_k$, $\alpha(A)$ denotará el número de renglones de A y $\beta(A)$ el número de columnas de A.

Ejemplo:

$$\alpha(J_{0,n}) = \beta(J_{n,0}) = 0$$

$$\beta(J_{0,n}) = \alpha(J_{n,0}) = 0$$

2.1 DEFINICION (A. ROITER, L. NAZAROVA)

Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Una representación de S sobre k es una función $\varphi: S \to M_k$ tal que $\alpha(\varphi(s_1)) = \alpha(\varphi(s_2)) = \ldots = \alpha(\varphi(s_n))$

Obsérvese que en la definición de representación no intervino el orden de S. Sin embargo éste será muy importante en la definición de equivalencia de representaciones.

En la definición 2.1 podemos pensar que una representación de un conjunto parcialmente ordenado S con n elementos es un conjunto de n matrices A_i que tienen un número fijo m de renglones y donde además algunas de estas matrices pueden ser vacías. Si colocamos estas matrices una tras otra obtenemos una matriz con m renglones, dividida en n bloques.

Si $\{A_i\}_{i\in S}$ es una representación del conjunto parcialmente ordenado S entonces el número $\alpha(A_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta(A_i)$ es la dimensión de la representación.

Sean $\{A_i\}_{i\in S}$, $\{B_i\}_{i\in S}$ representaciones del conjunto parcialmente ordenado S. Se dice que son similares si se puede obtener una de otra aplicando un número finito de transformaciones elementales de la forma siguiente:

+ Operaciones elementales arbitrarias en las columnas de cualquier bloque de la representación

+ Operaciones elementales arbitrarias

en las columnas de cualquier bloque de la representación.

1.+ y si $i<j$ en el orden de S, podemos sumar columnas de A_i a columnas de A_j.

Nótese que si se pueden sumar columnas de A_i a columnas de A_j y columnas de A_j a columnas de A_k entonces se pueden sumar columnas de A_i a columnas de A_k. Si suponemos además que si podemos sumar columnas de A_i a columnas de A_j no se puede al revés, obtenemos un orden parcial en las matrices.

Obsérvese que la definición de que dos representaciones $M=[M_1,\dots,M_n]$ y $\bar{M}=[\bar{M}_1,\dots,\bar{M}_n]$ son similares equivale a pedir que $\alpha(M)=\alpha(\bar{M})$; que para toda $i\in S$, $\beta(M_i)=\beta(\bar{M}_i)$ y que existan matrices invertibles X, Y tales que $MX=Y\bar{M}$ donde además X se descompone como sigue:

$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}$$

donde X_{ii} es invertible de $m_i \times m_i$, $X_{ij}=0$ si $j \nleq i$ en el orden de S.

Con esto podemos formar la categoría de representaciones rep(S) del conjunto parcialmente ordenado S donde los objetos de rep(S) son las matrices asociadas a S (de dimensiones arbitrarias) y los morfismos $(X,Y): M \to \bar{M}$ entre dos objetos $M, \bar{M}$ son pares de matrices X, Y tales que $MX = YM$ donde X se descompone como:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}$$ con X_{ii} matriz de $m_i \times m_i$ y $X_{ij} = 0$ si $j \not\leq i$ en el orden de S.

Además en rep(S) dos representaciones M y $\bar{M}$ son equivalentes si existe un morfismo $(X,Y): M \longrightarrow \bar{M}$ que cumple las condiciones definidas anteriormente y X, Y son invertibles.

Con esto es claro que el problema de clasificar las representaciones (según la definición de Raiter) de un conjunto parcialmente ordenado es un problema de matrices ya que se trata de reducir matrices mediante operaciones elementales simultáneas en los renglones, operaciones elementales en las columnas dentro de cada matriz y suma de columnas de la matriz i-ésima a la j-ésima si $i<j$.

P. Gabriel ha dado otra definición de representación de un conjunto parcialmente ordenado.

2.2 DEFINICION (P. GABRIEL) Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Un S-espacio $(V, (V(s))_{s\in S})$ es un k-espacio vectorial V de dimensión finita, con una familia de subespacios $(V(s))_{s\in S}$ tal que $V(s)\subseteq V(t)$ si $s\leq t$. Denotaremos a $(V, (V(s))_{s\in S})$ simplemente por V.

Un morfismo de S-espacios es una aplicación lineal

$$f: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup \\ V(s) & \longrightarrow & W(s) \end{array}$$

tal que para toda $s\in S$, $f(V(s))\subseteq W(s)$.

Denotaremos por $\mathcal{S}(S)$ a la categoría de todos los S-espacios sobre k.

Una observación que será importante en el capítulo IV es que la categoría $\mathcal{S}(S)$ no es una categoría abe liana.

Entonces demostraré que si la categoría $\mathcal{S}(S)$ tuviera conúcleos, éstos tendrían que coincidir con los conúcleos de mod Λ. Luego daré una representación M de un conjunto S y una sub-representación N de M cuyos conúcleos no coinciden.

Sea $f: W \longrightarrow V$ un morfismo de S-espacios y sea $g: X \rightarrow V$ un morfismo donde $X \in$ mod Λ. Quiero encontrar un morfismo $X \longrightarrow W$.

Como X no es subespacio de V, considero la imagen de g que sí es subespacio para formar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "f"] & & V \arrow[r, "\operatorname{conuc}_{\mathcal{S}(S)} f"] & \operatorname{conuc} f \\
& \operatorname{Im} g \arrow[ur, "j"] & & \\
& & X \arrow[uu, "g"'] \arrow[ul, "\bar{g}"] &
\end{tikzcd}$$

Si $\operatorname{conuc}_{\mathcal{S}(S)} f\, g = 0$ entonces $\operatorname{conuc}_{\mathcal{S}(S)} f\, j = 0$ y por lo tanto existe $t: \operatorname{Im} g \longrightarrow W$. Luego se tiene que $t\bar{g}: X \longrightarrow W$ y por lo tanto $\operatorname{conuc}_{\mathcal{S}(S)} f = \operatorname{conuc}_{\text{mod}\,\Lambda} f$.

Es decir, si $\mathcal{S}(S)$ tuviera conúcleos éstas tendrían que coincidir con los conúcleos en mod 1.

Sea M la siguiente representación de S:
El espacio total es k y el subespacio asociado a cada punto de S también es k.

Consideremos la siguiente sub-representación N de M:
El espacio total es k y el espacio asociado a cada punto de S es el espacio 0.

Entonces el conúcleo de M es 0 y el conúcleo de N es k. Lo cual no es posible ya que N es sub-representación de M.

Por lo tanto la categoría $\mathcal{S}(S)$ no tiene conúcleos y entonces $\mathcal{S}(S)$ no es abeliana.

En general, si S es un conjunto parcialmente ordenado podemos asignarle un carcaj C de la siguiente manera:
Los vértices de C son los puntos de S y ponemos una flecha $x \to y$ si $x \leq y$ y se tiene que si $x \leq z \leq y$ entonces $x = z$ ó $z = y$. Es decir ponemos una flecha si los puntos son inmedia

tos.

Sea I el ideal generado por todas las diferencias de caminos que tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final.

Entonces I es admisible y $\Lambda = k\mathcal{C}/I$ es un álgebra de dimensión finita sobre k, inescindible y básica. Además $\mathcal{C}$ es un carcaj sin ciclos.

También podemos interpretar a S como categoría tomando $\mathrm{Ob}\, S = S$ y $\mathrm{Hom}(x, y) = x \leq y$.

Entonces la categoría $\mathrm{Rep}(S) = (S, \mathrm{mod}\, k)$ está formada por una familia de k-espacios vectoriales $\{V_x\}_{x \in S}$ y una familia de transformaciones lineales $\{T_{x,y} : V_x \longrightarrow V_y \mid x \leq y\}$

Recordemos que $\mathrm{Rep}(\mathcal{C}, I) \simeq \mathrm{Mod}\, \Lambda$.
Queremos probar que $\mathrm{Rep}(S) \simeq \mathrm{Mod}\, \Lambda$.
Para esto definimos $\psi : \mathrm{Rep}(S) \longrightarrow \mathrm{Rep}(\mathcal{C}, I)$ donde $\psi(F) = \{ \{F_x\}_{x \in S},\ x \xrightarrow{T_{x,y}} y \}$

Esta ψ está bien definida ya que si tenemos dos caminos:

$$V_x \xrightarrow{T_{x,x_1}} V_{x_1} \xrightarrow{T_{x_1,x_2}} V_{x_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{x_k} \xrightarrow{T_{x_k,y}} V_y$$

$$V_x \xrightarrow{T_{x,y_1}} V_{y_1} \xrightarrow{T_{y_1,y_2}} V_{y_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{y_k} \xrightarrow{T_{y_k,y}} V_y$$

donde $x < x_1 < x_2 < \dots < x_k < y$. y $x < y_1 < y_2 < \dots < y_k < y$ respectivamente, entonces $T_{xx_1} T_{x_1x_2} \dots T_{x_ky} = T_{xy}$ pero también $T_{xy_1} T_{y_1y_2} \dots T_{y_ky} = T_{xy}$.

Similarmente definimos $\phi : Rep(C,I) \to Rep(S)$. donde $\phi(\{V_x, T_{xy}\}) = \{V_x, T_{xy_1}, T_{y_1y_2} \dots T_{y_ky}\}$

Es claro que $\psi\phi = 1_{Rep(C,I)}$ y $\phi\psi = 1_{Rep(S)}$.

Ahora daremos la descripción de las proyectivas e inyectivas en $Rep(S)$.

Para las proyectivas $P_x = Hom(-,x)$ y se tiene que $P_x(y) = \begin{cases} 0 & si\ y \not\leq x \\ k & si\ y \leq x \end{cases}$

Si $D : Rep(S) \longrightarrow Rep(S^{op})$ es la dualidad usual podemos definir las inyectivas I_x. Entonces $I_x(y) = \begin{cases} 0 & si\ y \not\geq x \\ k & si\ y \geq x \end{cases}$

Por último definiremos el carcaj de suspensión.

2.3 DEFINICION (BAUTISTA - MARTINEZ) Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Denotaremos por $\hat{S}$ al carcaj de "suspensión" de S que se define como sigue:

Los vértices de $\hat{S}$ son los puntos de S mas dos puntos nuevos a y b.

Dados dos vértices $i, j \in \hat{S}_0$ hay una flecha $i \to j$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

α) $i \in S$ es maximal y $j = a$

$\alpha\alpha$) $j \in S$ es minimal y $i = b$

$\alpha\alpha\alpha$) $i \leq j$ y si $i \leq l \leq j$ entonces $l = i$ ó $l = j$.

En este caso R denotará al ideal admisible de $\hat{S}$ generado por todas las diferencias de caminos que tienen los mismos puntos inicial y final. Como antes Λ denotará a la k-álgebra $k\hat{S}/R$.

Obsérvese que en $\mathrm{Rep}(\hat{S})$ tenemos un proyectivo inyectivo ya que $P_b = I_a$.

Además dado un morfismo $f: P_x \to P_y$ entre proyectivos inescindibles se tiene que f es diferente de cero si y solo si $x \leq y$.

y si f es diferente de cero entonces f es mono.

También tenemos que la envolvente inyectiva de los proyectivos inescindibles es proyectiva. Esto es porque $P_x \hookrightarrow P_b$ para toda $x \in \hat{S}$. Entonces si $\mathrm{Soc}\, P_b = S_a$ se tiene que $\mathrm{Soc}\, P_x = S_a$ y por lo tanto $S_a \subset P_x \subset P_b$ lo cual implica que $I(S_a) = I(P_x) = P_b$.

2.4 DEFINICION: $t_{S\Lambda}$ es la subcategoría plena de mod Λ formada por todos los módulos que son submódulos de proyectivos.

2.5 LEMA: $X \in t.S.\Lambda$ si y solo si para todo proyectivo inescindible P_X y para todo morfismo $f: P_X \to X$ se tiene que $f = 0$ o f es mono.

DEMOSTRACION:

"⇒" Sea $f: P_X \to X$ un morfismo. Definimos $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ donde P_i es inescindible. Por lo tanto $X \subset P$. Supongamos que $f \neq 0$. Consideremos la composición:

$$\begin{tikzcd} P_X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & P \arrow[d, "p_i"] \\ & P_i \end{tikzcd}$$

Como $f \neq 0$ entonces $p_i f \neq 0$ para alguna p_i. Entonces $p_i f$ es mono y por lo tanto f es mono.

"⇐" Consideremos el soclo de X. Entonces $S_i \subset \operatorname{Soc} X$ para todo S_i simple. Además sabemos que los simples S_i son de la forma $P_i / r P_i$. Tomemos la siguiente composición:

$$P_i \xrightarrow{p_i} S_i \xhookrightarrow{j_1} \operatorname{Soc} X \xhookrightarrow{j_2} X$$

esta composición es mono. Por lo tanto $P_i \cong S_i$. De donde $S_a = S_i$ y se tiene que $\operatorname{Soc} X = \oplus S_a$. Por lo tanto $I(X) = I(\oplus S_a) = \oplus P_b$. Entonces $X \subset P_b$ #

Ahora queremos demostrar que las representaciones de las categorías $s(S)$, $rep(S)$ y $Rep(\hat{S})$ son equivalentes.

Necesitamos la siguiente definición:

2.6 DEFINICION: Sea $F: K \longrightarrow L$ un funtor. Se dice que F es de "representación fiel" si cumple:

i) Para todas $x, y \in K$, $Hom(x,y) \longrightarrow Hom(Fx,Fy)$
$\alpha \longmapsto F\alpha$

es supráyectivo.

ii) Si $\alpha \in Hom(x,y)$ y $F\alpha$ es invertible entonces α es invertible.

iii) Para toda $z \in L$, existe $x \in K$ tal que $Fx \cong z$.

Obsérvese que si F es de representación fiel entonces F induce una biyección entre las clases de isomorfía en K y las clases de isomorfía en L.

Para demostrar algunas de las equi

valencias construiremos un funtor de representación fiel.

2.7 TEOREMA:

Sea $\mathcal{C} = \{X \in \text{t.s.}\ 1 \mid P_a \text{ no es sumando de } X\}$

Entonces $\mathcal{C} \cong \mathcal{S}(S^{op})$.

DEMOSTRACION:

Sea $M \in \mathcal{C}$. Definimos para toda $x \in S$, $M(x) = \mathrm{Hom}(P_x, M)$ donde el espacio total es $V = \mathrm{Hom}(P_b, M)$ (identificando la imagen por $\mathrm{Hom}(-, M)$ dado por el orden parcial).

Sean $x, y \in S$ tal que $x \leq y$. Queremos demostrar que $M(x) \supset M(y) \supset M(b)$.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P_x \longrightarrow P_y \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Entonces se tiene:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_y, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_x, M)$$

Supongamos que $\mathrm{Hom}(C, M) \neq 0$. Por lo tanto existe $f \neq 0$ tal que:

$$\begin{tikzcd} P_y \arrow[r] \arrow[dr, "0 \neq \bar{f}"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f \neq 0"] & 0 \\ & M & \end{tikzcd}$$

lo cual es una contradicción ya que entonces $\bar{f}$ sería mono y por tanto $P_y \cong C$.

Entonces $\mathrm{Hom}(C, M) = 0$ y se tiene que $M(y) \subset M(x)$.

Sea $M \in \mathcal{L}(S^{op})$. Podemos ver a M como representación de $\hat{S}^{op}$ definiendo $M(x) := M_x$, tomando las inclusiones $M(y) \hookrightarrow M(x)$ si $y \le x$ y definiendo $M_a = 0$ y M_b como el espacio total.

Entonces P_a no es sumando de $M \in \text{mod}\,\Lambda$.

Probaremos que M como representación de $\hat{S}^{op}$ está en t.s. 1 utilizando el lema 2.5.

Sea P_x un proyectivo inescindible y sea $f : P_x \longrightarrow M$ un morfismo.

Sean $x, y \in S^{op}$ tal que $x \le y$. De la definición de los proyectivos tenemos que $P_x(x) = k$ y $P_x(y) = k$.

Por lo tanto del diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
k = P_x(x) \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, hook, "id."'] & M(x) \arrow[d, hook] \\
k = P_x(y) \arrow[r, "f_y"] & M(y)
\end{tikzcd}$$

Si $f \neq 0$ se tiene que f_x es mono, entonces f es mono y por lo tanto $M \in$ t.s. 1. #

2.8 DEFINICION: Denotemos por $\mathcal{P}$ a la subcategoría plena de mod Λ formada por todos los módulos proyectivos que no tienen sumandos directos isomorfos a P_b ó P_a.

Recuérdese que P_a es el único proyectivo inescindible de Λ que es simple.

2.9 DEFINICION: El funtor $F: \mathcal{P} \longrightarrow \text{mod } k$. dado por $F = \text{Hom}_\Lambda(P_a, --)$ nos sirve para definir la categoría $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ de la siguiente manera:

Los objetos son las ternas (U, φ, X) donde U es un k-espacio vectorial de dimensión finita, $X \in \mathcal{P}$, y $\varphi: U \longrightarrow F(X)$ es lineal. Los morfismos son las parejas $(\alpha, \beta): (U, \varphi, X) \longrightarrow (\bar{U}, \bar{\varphi}, \bar{X})$ con $\alpha: U \longrightarrow \bar{U}$, $\beta: X \longrightarrow \bar{X}$ y tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & F(X) \arrow[d, "F(\beta)"] \\ \bar{U} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & F(\bar{X}) \end{tikzcd}$$

2.10 TEOREMA. La categoría $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ es equivalente a la categoría rep(S).

DEMOSTRACION:

Sea $(V, \varphi, X) \in \mathcal{U}(\mathcal{P})$. Por lo tanto X es un proyectivo de $\mathcal{P}$ que se escribe de la forma:

$X = P_{x_1}^{n_1} \oplus P_{x_2}^{n_2} \oplus \ldots \oplus P_{x_k}^{n_k}$ donde $P_{x_1}, \ldots, P_{x_k}$ son proyectivos inescindibles diferentes de P_a y de P_b.

Luego $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, X) = \bigoplus_i^k \mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, P_{x_i})^{n_i}$ donde $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, P_{x_i}) = k\epsilon x_i$.

Definimos $V_{x_i} = \bigoplus_{n_i} \mathrm{Hom}(P_a, P_{x_i})$ y $e_{x_i}^j = (0, \ldots, 0, \underbrace{\epsilon x_i}_{j}, 0 \ldots 0)$

Entonces $\beta_x = \{e_{x_i}^j\}$ es base de V_{x_i}.

Sea β_0 una base de V.

Entonces $\varphi : V \longrightarrow V_{x_1} \oplus V_{x_2} \oplus \ldots \oplus V_{x_k}$ es de la forma $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$

Sea $[\varphi]_{\beta_0}^{\cup\beta_i} = A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}$

La matriz que corresponde a la transformación lineal φ con respecto a las bases $\beta_0, \cup\beta_i$.

Queremos probar que si tenemos otro objeto (V', φ', X') equivalente a (V, φ, X) entonces la matriz B correspondiente a φ' se obtiene de A mediante las operaciones dadas por Roiter.

Sea β_0' base de V'.

Sea $(f_1, f_2) : (V, \varphi, X) \longrightarrow (\bar{V}, \bar{\varphi}, \bar{X})$ el morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "(\varphi_1{,}\varphi_2{,}\ldots{,}\varphi_k)", "A"'] \arrow[d, "f_1"'] & V_{x_1} \oplus V_{x_2} \oplus \ldots \oplus V_{x_k} \arrow[d, "F(f_2)"] \\ V' \arrow[r, "(\varphi'_1{,}\varphi'_2{,}\ldots{,}\varphi'_k)", "B"'] & V'_{x_1} \oplus V'_{x_2} \oplus \ldots \oplus V'_{x_k} \end{tikzcd}$$

Sea $U = [F(f_2)]$ la matriz que corres ponde a $F(f_2)$

Luego $F(f_2) = (f_{ij})$ donde $f_{ij} : V_{x_i} \longrightarrow V'_{x_j}$.
Recordemos que $Hom(P_a, P_{x_i}^{n_i}) = V_{x_i}$ y $Hom(P_a, P'^{n_j}_{x_j}) = V'_{x_j}$.

Entonces si $f_{ij} \neq 0$ existe:
$g : Hom_\Lambda(P_a, P_{x_i}) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_a, P'_{x_j})$ tal que $g \circ \neq 0$.
y por lo tanto $x_i < x_j$.

Entonces la matriz $[F(f_2)]$ es una matriz triangular de la forma:

$$[F(f_2)] = \begin{bmatrix} u_1 & & & 0 \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ u_{ij} & & & u_k \end{bmatrix}$$

donde $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son invertibles.

Luego A se obtiene de B mediante las operaciones dadas por Roiter.

Recíprocamente si B, A son similares se construyen fácilmente isomorfismos f_1 y f_2.

Ahora bien si $A \in rep(S)$ existe una transformación lineal $\psi : k^n \longrightarrow k^m$ tal que A es la matriz asociada a ψ

Entonces $k^m = k^{n_1} \oplus \dots \oplus k_\ell^{n_\ell}$

Sean $P_1, \dots, P_\ell$ las proyectivas correspondientes a los vértices $1, \dots, \ell$.

Definimos $X = \overset{\ell}{\underset{i}{\oplus}} P_i^{n_i}$ donde n_i es la dimensión de k_i.

Entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, X) = \overset{\ell}{\oplus} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, P_i)^{n_i}$ y se tiene que A es la matriz asociada a $\varphi : k^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, X) = k^m$

Por lo tanto la tríada (k^n, φ, X) es un elemento de $\mathcal{U}(\mathcal{P})$.

Luego las categorías $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ y rep(S) son equivalentes #.

2.11 TEOREMA: Existe un funtor de representación fiel $F : \mathcal{U}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{C}$.

DEMOSTRACION:

Sea $\Theta = (V, \varphi, X) \in \mathcal{U}(\mathcal{P})$. Entonces φ se factoriza por su imagen:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, X) \\
0 \arrow[r] & V' \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $\Theta' = (V', \varphi', X)$. Luego $\Theta = \Theta' \oplus \Theta''$ donde Θ'' es la tríada $V'' \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}(P_a, 0)$

Solamente hay un número finito de tríadas de la forma Θ'' que llamamos a perder.

Dijimos $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, X) = X(a)$. Ahora interpretaremos a V como representación de la siguiente manera:

$$V(a) = V, \quad V(b) = 0, \quad \varphi_a := \varphi : V(a) \longrightarrow X(a)$$

$\varphi_b := 0 : V(b) \longrightarrow X(b) = 0$ y si $x \in S$, $V(x)$ y φ_x se definen por el siguiente pullback:

$$\begin{tikzcd}
V(x) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, hook] & X(x) \arrow[d, hook] \\
V(a) \arrow[r, "\varphi_a"] & X(a)
\end{tikzcd}$$

Si $x < y$ se tiene que existe un morfismo $V(y) \longrightarrow V(x)$ ya que en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V(y) \arrow[r, "\varphi_y"] \arrow[d] & X(y) \arrow[d] \\
V(x) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d] & X(x) \arrow[d] \\
V(a) \arrow[r, "\varphi_a"] & X(a)
\end{tikzcd}$$

el pullback del cuadrado chico es el pullback de la composición. Esto es porque la composición de pullbacks es pullback.

Entonces se tiene que la representación V definida como antes es elemento de $\mathcal{C}$ y $\varphi : V \longrightarrow X$ es un morfismo.

Sea C el conúcleo de $\varphi : V \longrightarrow X$.

Luego se tiene la sucesión:

$$V \xrightarrow{\varphi} X \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

y podemos definir $F((V,\varphi,X)) = C$.

Para demostrar que F está bien definida probaremos que en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V(x) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, hook] & X(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & C(x) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
V(a) \arrow[r, "\varphi_a"] & X(a) \arrow[r] & C(a) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

el morfismo $C(x) \longrightarrow C(a)$ es mono.

Para esto basta demostrar que

$V(x) = X(x) \cap V(a)$

Considérese la imagen $Im(\varphi(a))$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Im\,\varphi(a) \cap X(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X(x) \arrow[r] \arrow[d] & C(x) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Im\,\varphi(a) \arrow[r] & X(a) \arrow[r] & C(a) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $Im\,\varphi(a) \cap X(x)$ es el pullback del diagrama correspondiente. Como la composición de pullbacks es pullback se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V(x) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & Im\,\varphi(a) \cap X(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X(x) \arrow[r, no head] \arrow[d] & C(x) \arrow[r, no head] \arrow[d, hook] & 0 \\
V(a) \arrow[r, two heads] & Im\,\varphi(a) \arrow[r, hook] & X(a) \arrow[r, no head] & C(a) \arrow[r, no head] & 0
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto se tiene que $C(x) \hookrightarrow C(a)$ es mono.

Luego $F((V,\varphi,X)) = C \in \mathcal{C}$ y F está bien definida.

Si $\psi : (f_1,f_2) : \theta \longrightarrow \theta'$ es un morfismo en $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ entonces el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dash, "\varphi"] \arrow[d, dash, "f_1"'] & X(a) \arrow[d, dash, "f_2(a)"] \\
V' \arrow[r, dash, "\varphi'"] & X'(a)
\end{tikzcd}$$

Queremos extender f_1 a un morfismo $\tilde{f}_1 : V \longrightarrow V'$. Sea $u \in V(x)$. Se quiere que $f_1(u) \in V'(x)$. Esto es cierto ya que en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V(a) \arrow[rrr, "\varphi(a)"] \arrow[dddd, "f_1"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & & & X(a) \arrow[dddd, "f_2(a)"] \\
& V(x) \arrow[r, "\varphi(x)"] \arrow[dd, dashed, "f_1(x)"'] & X(x) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& & & \\
& V'(x) \arrow[r, "\varphi'(x)"] \arrow[dl] & X'(x) \arrow[dr] & \\
V'(a) \arrow[rrr, "\varphi'(a)"'] & & & X'(a)
\end{tikzcd}$$

Se utiliza la propiedad universal del pullback formado como sigue:

$$\begin{tikzcd}
V(x) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "f_1(x)"] & & X(x) \arrow[dr] & \\
V(a) \arrow[dr] & V'(x) \arrow[rr, dash, "\varphi'(x)"] \arrow[d, hook] & & X'(x) \arrow[d, hook] \\
& V'(a) \arrow[rr, "\varphi'(a)"] & & X'(a)
\end{tikzcd}$$

para demostrar que existe un único morfismo $f_1(x) : V(x) \quad V'(x)$

Luego $f_1(u) \in V'(x)$

Si ponemos $f_1(b) = 0$ se obtiene el morfismo $\tilde{f}_1 : v \longrightarrow v'$

Como

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & X(a) \arrow[d, "f_2(a)"] \\
V' \arrow[r, "\varphi'"] & X'(a)
\end{tikzcd} \quad \text{conmuta}$$

entonces

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_1"'] & X \arrow[d, "f_2"] \\
v' \arrow[r] & X'
\end{tikzcd} \quad \text{conmuta}$$

y se tiene una única manera de hacer que todo el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_1"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F(\varphi)"] & 0 \\
v' \arrow[r] & X' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea K el conjunto cuyos elementos son las tríadas de la forma $K \to 0$ y las de la forma $Hom(P_a, P_x) \xrightarrow{1} Hom(P_a, P_x)$

Entonces K es un conjunto finito.

Denotemos por $\mathcal{U}(\mathcal{P})_K$ a $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ menos las sumas de elementos de K.

Probaremos que el funtor restringido $F: \mathcal{U}(\mathcal{P})_K \to \mathcal{C}$ es de representación fiel.

Sea $c \in \mathcal{C}$. Sea X su cubierta proyectiva. Afirmamos que X no tiene como sumando a P_b.

En efecto, si $X = P_b \oplus X'$ entonces del diagrama:

$$\begin{tikzcd} P_b \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ P_b \oplus X' \arrow[r] & c \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se tiene que $P_b = c$ ya que P_b es inyectivo. Esto es una contradicción.

Luego si $X \to c \to 0$ es la cubierta proyectiva de c se puede completar a una sucesión exacta

$$0 \to V \to X \to c \to 0$$

P_a, P_b no son sumandos de X y X es proyectivo. Entonces podemos definir $\theta: V(a) \xrightarrow{f_a} X(a)$. Afirmamos que $F(\theta) = c$.

Si evaluamos θ en un punto x y en a tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & C(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & V(a) \arrow[r] & X(a) \arrow[r] & C(a) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ es isomorfa a $\mathcal{A}(S)$ se tiene que en el diagrama anterior todos los morfismos son monos. y por lo tanto
$V(x) = V(a) \cap X(x)$

Entonces se tiene que $F(\theta) = C$ y el funtor es denso.

Sean $\theta = (V, \varphi, X)$ y $\theta' = (V', \varphi', X')$ elementos de $\mathcal{U}(\mathcal{P})_K$ y sea $C = F(\theta) \xrightarrow{h} F(\theta') = C'$ un morfismo. Entonces h induce morfismos α, ρ que hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & V' \arrow[r] & X' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego se tiene que $F(\alpha_a, \rho) = h$ y por tanto F es pleno.

Ahora veamos que refleja isos: Basta probar que el núcleo V de la sucesión $0 \to V \to X \to C \to 0$ está contenido en el radical de X.

Supongamos que $V \not\subset rX$. Entonces existe un proyectivo inescindible P_x tal que en $X \xrightarrow{\rho_X} P_X$, $\rho_X(X) = P_X$.

Por lo tanto se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho'_X"'] & X \arrow[d, "\rho_X"] \\
P_X \arrow[r, "1"] \arrow[d, dash] & P_X \arrow[d, dash] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

y entonces $V \hookrightarrow X = (V' \hookrightarrow X) \oplus (P_X \xrightarrow{1} P_X)$ lo cual es una contradicción ya que $V \hookrightarrow X \in \mathcal{U}(P)_K$.

Por la unicidad de la cubierta proyectiva, el funtor F refleja isos. Luego F es de representación fiel //

Los teoremas 2.7, 2.10, y 2.11 nos demuestran que las categorías $\mathcal{U}(P)$, rep$(\mathcal{S})$ y $\mathcal{S}(S)$ tienen el mismo número de clases de isomorfía. Luego las tres definiciones son esencialmente equivalentes.

III EL ALGORITMO DE ROITER-NAZAROVA.

En este capítulo se describen los algoritmos que Roiter - Nazarova utilizan para "derivar" conjuntos y para obtener las representaciones del conjunto derivado a partir de las representaciones del conjunto original. [N-R1], [N-R2].

En su artículo Roiter - Nazarova utilizan métodos matriciales para probar sus teoremas. En este capítulo incluimos las demostraciones de algunos teoremas y un esquema de la prueba del lema de reducción usando matrices. En el capítulo IV demostraremos el lema de reducción utilizando técnicas de S-espacios.

Similarmente a las definiciones dadas por Brauer (Ver [Ja]) tenemos la siguiente definición.

3.1 DEFINICION: Si S es un conjunto parcialmente ordenado se dice que:

i) S es de "tipo finito" si sólo tiene un número finito de representaciones inescindibles.

ii) S es de "tipo infinito" si tiene un número infinito de representaciones inescindibles.

(ii) S es de "tipo estrictamente no acotado" si existen infinitas dimensiones para las cuales existen infinitas representaciones inescindibles.

Recordemos que para Roiter una representación de un conjunto parcialmente ordenado S con n elementos es una matriz con m renglones dividida en n bloques A_s con $s \in S$. Ver definición 2.1

Por T_0 denotaremos a la representación que a cada punto de un conjunto parcialmente ordenado le asocia la matriz vacía J_{00}. Esta es la representación trivial de dimensión cero.

3.2 DEFINICION: Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Si $\{A_i\}_{i \in S}$, $\{B_i\}_{i \in S}$, $\{C_i\}_{i \in S}$ son representaciones de S se dice que $\{C_i\}_{i \in S}$ es la suma directa de las representaciones $\{A_i\}_{i \in S}$, $\{B_i\}_{i \in S}$ si para toda $i \in S$, C_i es similar a $A_i \oplus B_i$.

3.3 DEFINICION: Una representación de S es escindible si es similar a una suma de representaciones de S cada una diferente de π_0. Y será inescindible en el caso contrario.

Si S es un conjunto parcialmente ordenado con n elementos entonces S tiene al menos $2n+1$ representaciones inescindibles. A saber:

$$\begin{aligned} \pi_{a_i} : S &\longrightarrow m_k \\ a_j &\longmapsto \begin{cases} J_{0,1} & i=j \\ J_{0,0} & i\neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{a_i} : S &\longrightarrow m_k \\ a_j &\longmapsto \begin{cases} [1] & i=j \\ J_{1,0} & i\neq j \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{\pi} : S &\longrightarrow m_k \\ a &\longmapsto J_{1,0} \end{aligned}$$

Estas representaciones son las representaciones inescindibles "triviales". Es fácil probar que son inescindibles si se observa que la suma de dos representaciones triviales es no trivial y que la suma de dos representaciones no triviales no puede dar una representación trivial.

3.4 LEMA: Un conjunto S está linealmente ordenado sí y sólo sí todas sus representaciones inescindibles son trivia les

DEMOSTRACION:

"$\Rightarrow$" Supongamos que $S=\{a_1,\dots,a_n\}$ está linealmente ordenado. Sea φ una representación de S. Afirmamos que si φ es no trivial entonces φ se escinde.

En efecto, supongamos que φ es no trivial. Entonces φ tiene matrices no vacías. Queremos definir ψ_1, ψ_2 representaciones de S tales que $\psi_1 \oplus \psi_2 = \varphi$.

Se probará por casos.

CASO A: Todas las matrices no vacías son nulas.

A.1 Supongamos que φ tiene sólo un renglón.

Sea $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que la matriz $\varphi(a_i)$ correspondiente al punto a_i es no vacía. Supongamos que $\varphi(a_i)$ tiene k columnas ($\mathcal{C}(\varphi(a_i))=k$)

Definimos $\psi_1(a_i) = [0,\dots,0_{k-1}]$

$\psi_2(a_i) = J_{0,1}$

Sea $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\varphi(a_j)=\phi$

Definimos $\psi_1(a_j) = J_{1,0}$

$\psi_2(a_j) = J_{0,0}$

Entonces $\psi_1 \neq \Pi_0 \neq \psi_2$ y se tiene que $\varphi = \psi_1 \oplus \psi_2$.

Por lo tanto φ se escinde

A.2: Supongamos que φ tiene n renglones con n diferente de uno.

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi(a_i) = \phi$

Definimos $\psi_1(a_i) = J_{n-1,0}$

$$\psi_2(a_i) = J_{1,0}$$

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi(a_j) \neq \phi$

Si $\beta(\varphi(a_j)) = K > 1$

Definimos

$$\psi_1(a_j) = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right\}}_{K-1 \text{ columnas}} n-1 \text{ renglones}$$

$$\psi_2(a_j) = [0]$$

Si $\beta(\varphi(a_j)) = 1$

Definimos $\psi_1(a_j) = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} n-1$ renglones

$$\psi_2(a_j) = J_{1,0}$$

En ambos casos $\psi_1 \neq \Pi_0 \neq \psi_2$ y se tiene que $\psi_1 \oplus \psi_2 = \varphi$.

Entonces si todas las matrices no vacías de φ son nulas, φ se escinde.

CASO B: φ tiene matrices no vacías y no nulas.

B.1: Supongamos que φ tiene un renglón.

Diagonalizamos y como S está linealmente ordenado, la representación queda de la siguiente forma:

$[1,0,\ldots,0 \;||||\; 0\ldots0 \;||||\; 0\ldots0]$ donde |||| denota las matrices vacías.

Sea $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\varphi(a_i) = \phi$

Definimos $\psi_1(a_i) = J_{1,0}$

$\psi_2(a_i) = J_{0,0}$

Sea $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\varphi(a_j) \neq \phi$ y $\varphi(a_j) = [1,0\ldots,0]$ que es una matriz con l columnas.

Definimos $\psi_1(a_j) = [1]$

$\psi_2(a_j) = J_{0,l-1}$

Sea $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\varphi(a_k) \neq \phi$ y $\varphi(a_k) = [0,\ldots,0]$ con α columnas.

Definimos $\psi_1(a_k) = [0]$

$\psi_2(a_k) = J_{0,\alpha-1}$

Entonces $\psi_1 \neq \Pi_0 \neq \psi_2$ y $\psi_1 \oplus \psi_2 = \varphi$.

B.2: Supongamos que φ tiene mas de un renglón.

Tomamos la primera matriz y la diagonalizamos. Entonces nos queda de la forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donde E es la matriz identidad de

$m \times m$. SPG $\varphi(a_1) = \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Con la matriz E hacemos cero los primeros m renglones de las matrices siguientes. Entonces φ queda de la forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] ||| \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline C_1 \end{array}\right] ||| \quad \cdots \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline C_r \end{array}\right]$$

donde $C_1, \ldots, C_r$ no son necesariamente cero.

Definimos $\psi_1(a_1) = [E]$

$\psi_2(a_1) = [0]$ del tamaño correspondiente.

Si $j \in \{2, \ldots, n\}$ y $\varphi(a_j) \neq \emptyset$

Definimos $\psi_1(a_j) = J_{m,0}$

$\psi_2(a_j) = C_j$ correspondiente.

y las matrices vacías las partimos del tamaño que sea adecuado.

Entonces $\psi_1 \neq \Pi_0 \neq \psi_2$ y $\psi_1 \oplus \psi_2 = \varphi$.

"$\Leftarrow$" Supongamos que S no está linealmente ordenado. Entonces existen $a_j, a_k \in S$ tal que a_j, a_k no se comparan.

Queremos encontrar una representación φ de S que sea inescindible y no trivial. Definimos $\varphi: S \longrightarrow \mathcal{M}_k$

$$a_i \longmapsto \begin{cases} [1] & i = j, k \\ J_{1,0} & j \neq i \neq k \end{cases}$$

Entonces φ es no trivial. Supongamos que existen ψ_1, ψ_2 representaciones de S tal que $\psi_1 \oplus \psi_2 = \varphi$. Luego $\alpha(\psi_1 \oplus \psi_2) = 1$ y $\beta(\psi_1 \oplus \psi_2) = 2$. Como $J_{1,0} \oplus J_{0,1} = [0] \neq [1]$ Entonces $\psi_1(a_j) = [1]$ y $\psi_1(a_k) = [1]$. Luego $\beta(\psi_2) = 0$. Por lo tanto $\psi_2(a) = J_{0,0}$ para toda $a \in S$. y entonces $\psi_2 = \Pi_0$. y se tiene que φ es inescindible. Además las únicas representaciones similares a φ son las que tienen escalares diferentes de cero en a_j y a_k. #.

3.5 DEFINICION: Si S es un conjunto parcialmente ordenado entonces el "ancho" de S es el número máximo de elementos de S que no son comparables entre sí. Denotaremos este número por $w(S)$.

Los siguientes dos lemas son resultados importantes.

3.6 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho menor o igual que dos, entonces las representaciones inescindibles no triviales de S son de la siguiente forma:

Si s y t son los puntos no comparables de S entonces la representación tiene en los bloques que corresponden a estos puntos a la matriz $[1]$ y en los bloques correspondientes a los demás puntos tiene a la matriz vacía $\int_{1,0}$.

DEMOSTRACION:

Sea A una representación inescindible no trivial de S. Sea L el conjunto de los puntos de S que en la representación A tienen matrices no vacías y sea $s \in S$ mínima.

Denotemos por A_s a la matriz que corresponde al punto s en A.

En A_s se toma cualquier columna diferente de cero y se permuta al primer lugar. En esta columna se busca el primer elemento a diferente de cero y se permuta el renglón en que se encuentre al primer lugar. Multiplicamos este primer renglón por a^{-1} y se resta a los renglones restantes del primer renglón multiplicado por un elemento conveniente del campo de tal manera que todos los elementos de la primera columna excepto el primero se hagan cero. También hacemos cero todos los elementos del primer renglón menos el primer elemento. De esta manera A_s queda de la siguiente forma: $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

Sea $\tilde{\mathcal{L}}$ el subconjunto de $\mathcal{L}$ que consiste de los elementos de $\mathcal{L}$ que no son compara-bles con s y que tienen el primer ren-glón no cero en la representación A.

Supongamos que $\tilde{\mathcal{L}}$ es vacío. Veremos que esto no es posible.

Sea $t \in \mathcal{L}$

CASO 1: $t \leq s$ ó $s \leq t$ y A_t tiene el primer renglón no cero.

Como s es minimal entonces $s \leq t$ y podemos sumar columnas de A_s a co-lumnas de A_t. Sumando la primera columna de A_s multiplicada por un escalar conveniente hacemos cero todo el primer renglón de A_t. y entonces A queda de la siguiente forma:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right]}_{A_s} \Big|\Big|\Big| \left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \bar{A}_t & \\ & & \end{array}\right] \Big|\Big|\Big| \quad \cdots \quad \left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \bar{A}_{t'} & \\ & & \end{array}\right]$$

Es decir $A = A' \oplus A''$ donde A' y A'' están definidas como sigue:

A' tiene a la matriz $[1]$ en el

punto s, $J_{1,0}$ en los puntos diferentes de s y que tenían matrices no vacías en A y también $J_{1,0}$ en los puntos que en A tenían matrices vacías.

A'' tiene a la matriz B en el punto s y en los puntos diferentes de s que tenían matrices no vacías en A tiene a las matrices $\bar{A}_t$ que se obtuvieron de A_t quitando el primer renglón. Además en los puntos que tenían matrices vacías en A, la representación A'' tiene a la matriz $J_{m,0}$ donde m es el número adecuado de renglones.

Como A es inescindible entonces $A'' = \Pi_0$ y por lo tanto $A = A' = S_s$. Entonces A sería trivial y esto es una contradicción.

CASO 2: s y t no se comparan y A_t tiene el primer renglón de ceros.

En este caso A es de la forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right] \Bigg|\Bigg|\Bigg| \left[\begin{array}{c} 0 \cdots 0 \\ \hline A_t \end{array}\right] \quad \cdots\cdots \quad \left[\begin{array}{c} 0 \cdots 0 \\ \hline A_{t'} \end{array}\right]$$

Similarmente al caso anterior se tiene que $A = A' \oplus A''$ donde A' y A'' se definen como antes. Como A es inescindible, $A = A'$ y entonces $A = S_\ell$ lo cual contradice que A no es trivial.

Por estos dos casos se concluye que $\bar{\pi}$ es diferente del vacío.

Además $\bar{\pi}$ tiene ancho uno ya que si $\bar{\pi}$ tuviera ancho mayor que uno existirían al menos $j, \omega \in \bar{\pi}$ no comparables entre sí. Pero tampoco serían comparables con s y entonces el conjunto S tendría ancho mayor o igual que tres. Como el ancho del ϕ es cero, se tiene que $\bar{\pi}$ tiene ancho uno.

Sea $p \in \bar{\pi}$ minimal. Entonces existe $b \neq 0$ en el primer renglón de A_p.

Reducimos A_p a la forma:

$$A_s = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad A_p = \left[\begin{array}{ccc|ccc} k_{11}, & \ldots, & k_{1\ell} & k_{1,\ell+1}, & \ldots & k_{1,r} \\ \hline 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right]$$

No tocamos el primer renglón para no modificar el primer renglón de A_s.

Sumando al primer renglón de A_p el 2°, 3°, ..., ℓ° multiplicados por $-k_{11}, -k_{12}, -k_{13}, \ldots, -k_{1\ell}$, hacemos cero los primeros ℓ elementos del primer renglón de A_p. Esto no modifica la primera columna de A_s

pero tal vez sí el primer renglón. Entonces se vuelve a hacer cero el primer renglón de A_s utilizando la primera columna.

CASO 1: al final A_p tiene el primer renglón de ceros.

Buscamos el renglón correspondiente al uno con el que cancelamos la "b" y lo sumamos al primer renglón.

$$\underset{A_s}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right]} \qquad \underset{A_p}{\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|ccc} 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & 1 & & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ \hline & 0 & & 0 & & 0 & & & 0 & \end{array}\right]}$$

Permutamos esta columna con la primera columna de A_p. Hacemos cero todos los elementos del primer renglón y de la primera columna de A_p (también de A_s). Nos queda:

$$\underset{A_s}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right]} \qquad \underset{A_p}{\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right]}$$

Sea $h \in S$ diferente de s y p.

Supongamos que $A_h \neq \phi$ y tiene el primer renglón diferente de cero.

Como el ancho de S es dos, entonces h se compara con s ó h se compala comp.

Si h se compara con p, entonces $h \in \tilde{h}$. Como p es mínimal en $\tilde{h}$ se tiene que $p < h$. Con la primera columna de A_p hacemos cero el primer renglón de A_h.

Si h es comparable con s entonces $s \leq h$ ya que s es minimal en $\mathcal{L}$. Con la primera columna de A_s hacemos cero el primer renglón de A_h.

Entonces A queda de la forma:

$$\underset{A_s}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right]} \quad \underset{A_p}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_p & \\ 0 & & & \end{array}\right]} \quad \underset{A_h}{\left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & \\ & B_h & \\ & & \end{array}\right]}$$

Por lo tanto $A = A_1 \oplus A_2$ donde A_1 y A_2 están definidas como sigue:

A_1 tiene en los puntos s y p a la matriz $[1]$ y en los demás a la matriz $J_{1,0}$.

A_2 tiene en el punto s a la matriz B', en el punto p tiene a la matriz B_p y en los demás a las matrices que habíamos denotado B_k.

Como A es inescindible, entonces $A_2 = \Pi_0$ y $A = A_1$ y entonces A es de la forma predicha.

CASO 2: Al final A_p tiene el primer

renglón diferente de cero.

Entonces A_s y A_p quedaran de la forma:

$$A_s = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & k_{1,l+1}, \ldots, b, \ldots k_{1r} \\ \hline 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Permutamos la columna donde está b al lugar $l+1$ y la multiplicamos por b^{-1} para obtener un uno. Con esta columna hacemos cero los elementos del primer renglón de A_p. Por lo tanto A_p y A_s quedan de la forma:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}\right]$$

$$A_s \qquad\qquad A_p$$

Permutamos al primer lugar de A_p la columna $l+1$ quedando A_p de la forma:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 & & 0 & \\ 0 & & & 1 & & & & \\ \hline 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}\right]$$

Similarmente al caso anterior siempre podemos hacer cero el primer renglón de las otras matrices (ya que el ancho del conjunto es dos) y escindir a A en $A_1 \oplus A_2$ definiendo adecuadamente A_1 y A_2. Por lo tanto $A = A_1$ y entonces A es de la forma predicha #

En el capítulo IV se dá otra demostración utilizando técnicas de S-espacios.

Como corolario del lema anterior se obtiene que los conjuntos de ancho dos son de tipo finito.

3.7 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho mayor o igual que cuatro entonces S es de tipo estrictamente no acotado.

DEMOSTRACION:

Sean a, b, c, d cuatro puntos de S no comparables y sea X una matriz cuadrada arbitraria con entradas en k.

Construimos la representación φ_X de la siguiente manera:

$$\varphi_X(a) = \left[\frac{E}{E}\right] \qquad \varphi_X(b) = \left[\frac{0}{E}\right]$$

$$\varphi_X(c) = \left[\frac{E}{0}\right] \qquad \varphi_X(d) = \left[\frac{X}{E}\right]$$

donde E es la matriz unitaria de la misma dimensión que X.

En los puntos diferentes de a, b, c, d ponemos matrices vacías con el número adecuado de renglones.

Verificaremos que la representación φ_X es inescindible. Esto se hará demostrando varias afirmaciones:

AFIRMACION 1: Sean X, Y matrices cuadradas con entradas en k. Entonces φ_X es equivalente a φ_Y sí y sólo sí X es equivalente a Y.

DEM:

"$\Leftarrow$" Supongamos que X es equivalente a Y. Entonces existe una matriz Q elemento de $Gl_{(n,k)}$ tal que $QX = YQ$. Sea E la matriz identidad de $n \times n$. Se tiene que

$$\varphi_X = \left[\frac{E}{E} \;\middle|\; \frac{E}{0} \;\middle|\; \frac{0}{E} \;\middle|\; \frac{X}{E} \right]$$

$$\varphi_Y = \left[\frac{E}{E} \;\middle|\; \frac{E}{0} \;\middle|\; \frac{0}{E} \;\middle|\; \frac{Y}{E} \right]$$

Multiplicando cada bloque de φ_Y por Q a la derecha para hacer operaciones en las columnas se obtiene:

$$\varphi_{YQ} = \left[\frac{Q}{Q} \middle| \frac{Q}{0} \middle| \frac{0}{Q} \middle| \frac{YQ}{Q} \right]$$

Ahora, para hacer operaciones con los renglones de φ_X multiplicamos por la izquierda a φ_X por la matriz $\begin{matrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{matrix}$ y obtenemos:

$$\varphi_{QX} = \left[\frac{Q}{Q} \middle| \frac{Q}{0} \middle| \frac{0}{Q} \middle| \frac{QX}{Q} \right]$$

Es decir, φ_X y φ_Y son equivalentes.

"$\Rightarrow$" Supongamos que φ_X es equivalente a φ_Y. Entonces existe B matriz de $2n \times 2n$ con entradas en k y existen $A_1, A_2, A_3, A_4 \in Gl(n,k)$ tales que:

$$B\left[\frac{E}{E}\right] A_1 = \left[\frac{E}{E}\right] \cdots (1) \qquad B\left[\frac{0}{E}\right] A_3 = \left[\frac{0}{E}\right] \cdots (3)$$

$$B\left[\frac{E}{0}\right] A_2 = \left[\frac{E}{0}\right] \cdots (2) \qquad B\left[\frac{X}{E}\right] A_4 = \left[\frac{Y}{E}\right] \cdots (4)$$

Supongamos que la matriz B es de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

Luego de (1) se obtiene que $(B_1 + B_2)A_1 = E$ y que $(B_3 + B_4)A_1 = E$.

De (2) obtenemos $B_1 A_2 = E$ y $B_3 A_2 = 0$.
De (3) obtenemos $B_2 A_3 = 0$ y $B_4 A_3 = E$
y por último de (4) se obtiene:

$$(B_1 X + B_2) A_4 = Y \quad \text{y} \quad (B_3 X + B_4) A_4 = E$$

Como $B_3 A_2 = 0$, se tiene que $B_3 = 0$ y de $B_2 A_3 = 0$ se sigue $B_2 = 0$. O sea, B tiene en realidad la forma:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo se tiene $B_1 A_1 = E$ y $B_4 A_1 = E$. Por tanto $B_1 = A_1^{-1} = B_4$
Luego B es de la forma $B = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix}$

Como $BA_3 = E$ y $BA_2 = E$ se sigue $A_3 = A_2$. Como $BA_4 = E$ y $BA_1 = E$ entonces $A_4 = A_1$. Luego $A_1 = A_4 = A_3 = A_2$.
Como $B_4 A_4 = E$, por lo tanto $BA' = E$. Es decir $B^{-1} = A'$. Entonces $BX = YB$. y por lo tanto X es equivalente a Y. $\square$ AF.1

Queremos encontrar un número infinito de matrices inescindibles no equivalentes.

AFIRMACION 2: Si X es inescindible entonces φ_X es inescindible.

DEMOSTRACION:

Supongamos que X es inescindible. Sea u un endomorfismo de φ_X. Basta probar que u es invertible o nilpotente.

Se tiene que $Xu = uX$. Sin pérdida de generalidad suponemos que X es de Jordan.

Como X es inescindible se tiene que X tiene un solo bloque de la forma:

$$X = \begin{bmatrix} c & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & c \end{bmatrix} \quad \text{de } n \times n$$

Entonces $X = cE + N$ donde N es nilpotente. Luego $cu + uN = u(cE+N) = (cE+N)u = cu + Nu$.

Es decir $uN = Nu$.

Sea $u = (a_{ij})$

Por lo tanto

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right] (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-2)2}, & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

y además

$$(a_{ij}) \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

de donde $a_{in} = 0$ si $i = 1, \dots, n-1$
$a_{ij} = 0$ si $j = 2, \dots, n$

Entonces:

$$u = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ * & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ donde * puede ser diferente de cero

Definimos $b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ a_{(i-1)j} & \text{si } i > 1 \end{cases}$

y $b_{ij} = \begin{cases} a_{i(j+1)} & \text{si } j < n \\ 0 & j = n \end{cases}$

Por lo tanto $a_{ij} = b_{(i+1)j} = a_{(i+1)(j+1)}$ para $i > 1$ y $j < n$ y $i < n$.

y $0 = a_{in} = a_{(i-1)(n-1)}$ O sea $0 = a_{i(n-1)}$ si $i < n-1$

Entonces u es invertible si $a \neq 0$ y u es nilpotente si $a = 0$.

Por lo tanto $a_{i(n-2)} = a_{(i+1)(n-1)} = 0$ si $i < n-2$. Luego $a = a_{11} = a_{22} = \dots a_{nn}$

Entonces u es de la forma:

$$u = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ N' & & a \end{bmatrix}$$ donde N' es nilpotente.

$\square$ AF.2

Como sobre un campo infinito existen infinitas matrices de Jordán inversibles y no equivalentes hemos proba

do que los conjuntos de ancho mayor o igual que cuatro son de tipo no acotado
#

Al analizar los conjuntos de ancho tres, Roiter y Nazarova encontraron que los hay de tipo finito y también de tipo infinito. Para poderlos clasificar ellos introducen el siguiente algoritmo para derivar conjuntos que en un número finito de pasos reduce los conjuntos de ancho tres a conjuntos de ancho dos o de ancho cuatro.

3.8 DEFINICION: Sea S un conjunto parcialmente ordenado de ancho menor o igual que tres. Podemos definir los siguientes conjuntos:

$$\widehat{m} := \{ s \in S \mid s \leq m \}$$

$$T := S \setminus \widehat{m}$$

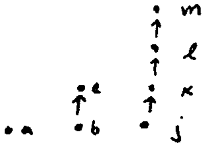
$$\tilde{T} := T \cup \left\{ \begin{matrix} \text{supremos formales de} \\ \text{pares de elementos de } T \end{matrix} \right\}$$

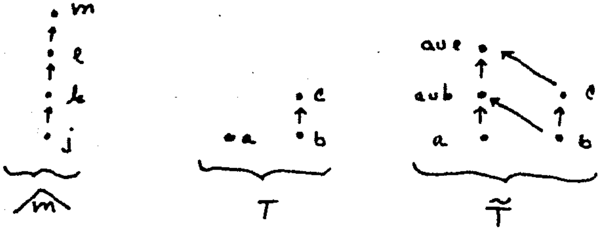
$$S(m) := \tilde{T} \cup \{ \widehat{m} \setminus m \}$$

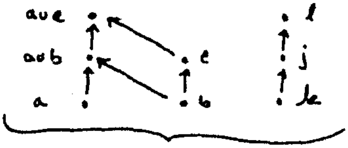
Al conjunto $S(m)$ se le llama "conjunto derivado de S con respecto al punto m"

Ejemplo:

Sea S el conjunto







$S(m)$.

Obsérvese que si m es un elemento maximal de S y el conjunto de puntos que no son comparables con m tiene ancho uno, el conjunto derivado con respecto a m es S menos el punto m, es decir $S(m) = S - \{m\}$

También obsérvese que podemos "desaparecer" a los conjuntos de ancho dos simplemente derivándolos varias veces.

ahora daremos el algoritmo para obtener las representaciones de $S(m)$ a partir de las representaciones de S.

3.9 DESCRIPCION DEL ALGORITMO EN LAS MATRICES.

Sea S un conjunto parcialmente ordenado con n elementos. Sea A una representación de S. Entonces $A = \{A_i\}_{i \in S}$.

Sea $a \in S$ maximal. Sea A_a la matriz correspondiente al punto a en la representación A. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de elementos de S que son comparables con a. Sea $\mathcal{L}'$ el conjunto de los elementos de S que no son comparables con a.

Primero se construye otra representación $\bar{A}$ de S aumentando a la matriz A_a tantas columnas de ceros como columnas hay en todas las matrices A_i de la representación A que corresponden a los puntos de $\mathcal{L}$. Esta nueva matriz se denotará por $\bar{A}_a$.

Se puede probar que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son similares si y sólo si A y B son similares.

Después se hace a la matriz $\bar{A}_a$ de rango máximo. Para esto se suman columnas de las matrices correspondientes a los elementos de $\mathcal{L}$, a las columnas de $\bar{A}_a$. Luego se reduce $\bar{A}_a$ a su forma diagonal. Se puede ver que como $\bar{A}_a$ tiene el rango máximo posible, la representación queda de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} B_r \\ \hline 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \hline C_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \bar{C}_s \\ \hline C_s \end{bmatrix} \quad *$$

donde las matrices $\begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} B_r \\ \hline 0 \end{bmatrix}$ son las que se obtienen de las matrices correspondientes a los puntos de $\mathcal{L}$, las matrices $\begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \hline C_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \bar{C}_s \\ \hline C_s \end{bmatrix}$ son las obtenidas de las matrices correspondientes a los puntos de $\mathcal{K}$ y la matriz $\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ es la que se obtiene de $\bar{A}_a$.

Ahora bien, sea $\bar{C}$ la representación del conjunto $\mathcal{K}$ formada por las matrices $C_1, \dots, C_s$.

Como S tiene ancho tres, el conjunto $\mathcal{K}$ tiene ancho menor o igual que dos. Como la representación $\bar{C}$ es indescomponible se puede llevar a la forma descrita en el lema 3.6. Entonces $\bar{C}$ queda de la siguiente forma:

En cada renglón de $\bar{C}$ no aparecen mas de dos unos y el resto del renglón son únicamente ceros. además, dos unos aparecerán en matrices diferentes sí y sólo sí estas matrices corresponden a dos elementos no comparables de $\tilde{\pi}$. Rearreglando los renglones y las columnas de las matrices de $\bar{C}$ agrupamos las representaciones inescindibles que aparecen en $\bar{C}$ en bloques individuales. Estos inducen un cierto número de divisiones verticales y horizontales en $\bar{C}$ de acuerdo con las particiones en bloques.

Cada matriz C_i está formada por matrices unitarias y matrices de ceros. En cada franja horizontal de $\bar{C}$ no aparecen mas de dos bloques unitarios, es más, dos bloques unitarios aparecen en diferentes matrices cuando los elementos correspondientes en $\tilde{\pi}$ no son comparables. En cada franja vertical puede haber a lo más un bloque unitario.

Con esta partición de $\bar{C}$ se obtuvo una partición en franjas verticales de las matrices $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ que aparecen en la franja horizontal superior en *.

Sea t_i el número de elementos de $\tilde{\pi}$

que no son comparables con el punto correspondiente a la matriz C_i, entonces la matriz C_i se parte en general en t_i+2 franjas verticales que denotaremos $\bar{C}_{i,0}$, $\bar{C}_i$ y C_{ij}. Aquí c_i y c_j no son comparables.

Bajo $\bar{C}_{i0}$ hay una franja de ceros en C_i, bajo $\bar{C}_i$ hay una franja que contiene al único bloque unitario en la correspondiente franja horizontal y bajo $\bar{C}_{ij}$ hay una franja que contiene un bloque unitario, pero en la correspondiente franja horizontal puede aparecer otro bloque unitario en la matriz C_j que es no comparable con C_i.

Sumando renglones de la franja horizontal inferior en * a la superior hacemos cero a todas las matrices $\bar{C}_i$ y a las matrices $\bar{C}_{ij}$ cuando $j>i$

Si descartamos toda la franja inferior, la matriz $\bar{A}a$ y las partes de las matrices $\bar{C}_i$ que se hicieron cero, con las matrices que quedan podemos definir la representación A' del conjunto $S(a)$ de la siguiente manera:

$A'(b_i) = B_i$ si $b_i \in \mathcal{L}$,

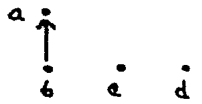
$A'(c_i) = \bar{C}_{i,0}$ si $c_i \in \tilde{R}$

y $A'(c_i, c_j) = \bar{c}_{ij}$ si $c_i, c_j \in \bar{C}$. $\square$

Con esto hemos visto como obtener una representación del derivado a partir de una representación del conjunto original.

Para familiarizarnos con este algoritmo daremos un ejemplo:

3.10 EJEMPLO: Sea S el siguiente conjunto:



entonces el conjunto $S(a)$ es:

Sea A la siguiente representación de S:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} a & \multicolumn{2}{c}{b} & \multicolumn{5}{c}{c} & \multicolumn{3}{c}{d} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc|ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

En este ejemplo $\mathcal{L} = \{b\}$ y $\tilde{h} = \{c, d\}$

Queremos obtener una representación A' de $S(a)$. Construimos $\bar{A}$ aumentando a la matriz correspondiente al punto a tantas columnas de ceros como columnas haya en las matrices correspondientes a los puntos de $\mathcal{L}$. En este ejemplo aumentamos dos columnas de ceros. Entonces $\bar{A}$ se ve como:

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|cc|ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccc}
\quad A_a \quad & \quad b \quad & \qquad c \qquad & \qquad d \qquad
\end{array}
\end{array}
$$

Se hace el rango de A_a máximo sumando columnas de las matrices correspondientes a los elementos de $\mathcal{L}$ a las columnas de A_a.

En este caso queda:

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc|ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccc} \quad A_a \qquad & \qquad b \qquad & \qquad\qquad c \qquad\qquad & \qquad d \qquad \end{array}
\end{array}$$

En seguida se diagonaliza la matriz A_a y como su rango era máximo, la representación queda dividida en dos franjas horizontales. En nuestro ejemplo la matriz ya estaba diagonalizada y la representación quedó dividida en una franja superior y otra inferior.

Obsérvese que en la franja inferior la matriz A_a y la matriz correspondiente al punto $b \in L$ tienen matrices de ceros.

En este caso $\bar{c}$ será la siguiente representación de $\tilde{L} = \{c, d\}$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \qquad\qquad c \qquad\qquad & \qquad d \qquad \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

El siguiente paso sería descomponer a $\bar{C}$ en representaciones irrescindibles (según el lema 3.6. En este caso la representación $\bar{C}$ ya es suma de representaciones irrescindibles. Como se dijo en la descripción del algoritmo (3.9), si aparecen dos unos en un mismo renglón, éstos están en diferentes matrices que corresponden a elementos no comparables de $\bar{\mathcal{X}}$.

Se acomodan los renglones y las columnas de las matrices de $\bar{C}$ de tal manera que las representaciones irrescindibles queden agrupadas.

Esto induce divisiones verticales y horizontales en $\bar{C}$ de acuerdo a la partición en bloques, en particular induce particiones verticales en las matrices que están en la franja superior. En nuestro ejemplo todo esto se ve así:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & a & & & b & & & c & & & & d & \\
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc|c:cc:cc|c:cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccc}
C_{c,1} & \bar{C}_{c,0} & \bar{C}'_c & C_{d,1} & \bar{C}'_d .
\end{array}
\end{array}
$$

Bajo $C_{c,0}$ hay una matriz de ceros, bajo $\bar{C}_c', \bar{C}_d'$ hay matrices cuyo uno es el único en el renglón y bajo $C_{c,d}$ y $C_{d,c}$ aparecen matrices que tienen dos unos en el mismo renglón pero en diferente matriz.

Sumando renglones de la franja inferior a la superior se hacen cero las matrices $\bar{C}_d'$, $\bar{C}_c'$ y la matriz $C_{d,c}$. En nuestro ejemplo queda:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad a \quad\quad & \quad b \quad & \quad\quad c \quad\quad\quad & & \quad\quad d \quad\quad \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc|c|cc|cc|c|cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccc} C_{c,d} & \bar{C}_{c,0} & \bar{C}_c' & C_{d,c} & \bar{C}_d' \end{array}
\end{array}
$$

Descartando la franja horizontal inferior, la matriz que corresponde al punto a y las partes de las matrices $\bar{C}_i$ que se hicieron cero podemos definir la representación A' de $S(a)$ como sigue:

$$A'(b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A'(e) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'(d) = J_{3,0} \qquad A'(e \cup d) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

En seguida enunciaremos el lema de reducción y daremos un esquema de la prueba original de Koiter. En el capítulo IV daremos una demostración del lema de reducción usando S-espacios.

3.11 : LEMA DE REDUCCION (NAZAROVA - ROITER)
Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho tres y $a \in S$ es cualquier maximal entonces el tipo de representación de S y de $S(a)$ coinciden.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACION:
En los párrafos anteriores vimos como obtener una representación del derivado partiendo de una representación del conjunto original. Falta verificar que las transformaciones que no cambian la forma del reducido corresponden a las transformaciones admisibles generadas por el orden

parcial inducido en $S(a)$.

Sean $x, y \in S(a)$. Probaremos que en todos los casos si $x < y$ entonces las columnas de $A'x$ se pueden sumar a columnas de $A'y$ sin alterar aquí la forma reducida de la representación A.

CASO A: Una de las matrices A'_x, A'_y es B_i.

A.1: Si la segunda es B_j, obviamente la relación de orden es la misma que en S.

A.2: Supongamos que $A'_y = \bar{C}_{ij}$, $A'_x = B_i$. Como a es maximal en S y cualquier elemento $b \in L$ se puede relacionar con cualquier elemento $c \in \bar{L}$ sólo por la relación $b < c$, entonces la única relación posible entre x, y es $x < y$.

A.2.1: $A'_x = B_i$, $A'_y = C_{i0}$. En este caso es obvio que las columnas de A'_x se pueden sumar a las columnas de A'_y.

A.2.2: $A'_x = B_i$, $A'_y = C_{ij}$ con $j \neq 0$. Entonces $x = b_i$, $y = (c_i, c_j)$ con $b_i, c_i, c_j \in S$ y $b_i < (c_i, c_j)$.

Entonces $b_i < c_i$ o $b_i < c_j$.

A.2.2.1: Si $b_i < c_i$ entonces en la representación A' de $S(a)$ se pueden sumar columnas de la matriz

$A'_x = B_i$ a $\bar{C}_{ji} = 0$. Tenemos:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} B_i & \bar{C}_{ji} & C_{ij} \\ \hline 0 & E & E \end{array}\right] \quad **$$

y hemos sumado columnas de B_i a $\bar{C}_{ji}$. Luego con la ayuda de los renglones inferiores de ** que tienen dos unos, restauramos la forma cero de $\bar{C}_{ji}$. De esta manera las columnas de B_i se restaron a columnas de $\bar{C}_{ij}$ y entonces las columnas de A'_x se sumaron a columnas de A'_y.

A.2.2.2: Si $b_i < e_j$. Se suman directamente.

CASO B: $x < y$, $A'_x = \bar{C}_{i0}$, $A'_y = \bar{C}_{j0}$. Es claro que las columnas de A'_x se pueden sumar a columnas de A'_y.

CASO C: $x < y$, $x = C_s$, $y = (C_i, C_j)$, $A'_x = \bar{C}_{s0}$ $A'_y = \bar{C}_{ij}$

Como bajo $\bar{C}_{s0}$ tenemos la matriz C_s que es una matriz de ceros (ver * en 3.9) entonces si $C_s < C_i$ se pueden sumar columnas de $\bar{C}_{s0}$ a columnas de $\bar{C}_{ij}$ o bien si $C_s < C_j$ se pueden sumar columnas de $\bar{C}_{s0}$ a columnas de $\bar{C}_{ji}$ y por el mismo argumento que en A.2.2.1 se pueden sumar las columnas de $\bar{C}_{s0}$ a columnas de $\bar{C}_{ij}$ y corregir la forma. En este caso también sumamos columnas de A'_x a columnas de A'_y

CASO D: $x=(c_i,c_j)$ $y=c_s$, $A'_x=\bar{C}_{s0}$, $A'_y=\bar{C}_{ij}$ y $x<y$. Entonces $c_i<c_s$ y $c_j<c_s$ para $c_i, c_j, c_s \in \tilde{n}$.

En este caso se pueden sumar columnas de $\bar{C}_{ij}$ y de $\bar{C}_{ji}$ a las columnas de $\bar{C}_{s0}$. Pero para no cambiar la forma, cada vez que se suman columnas de $\bar{C}_{ij}$ a columnas de $\bar{C}_{s0}$ hay que restar columnas de $\bar{C}_{ji}$ para recuperar la forma. De nuevo se sumaron columnas de A'_x a columnas de A'_y.

CASO E: $x=(c_i,c_j)$ $i>j$; $y=(c_s,c_t)$ $s>t$; $A'_x=\bar{C}_{ij}$, $A'_y=\bar{C}_{st}$ y $x<y$.

De que $x<y$ se siguen dos subcasos:

E.1: $c_i<c_s[c_t]$ y $c_j<c_s[c_t]$.

E.2: $c_i<c_s$, $c_j<c_t$ o bien $c_i<c_t$ y $c_j<c_s$ y la situación que se tiene es:

$$(1) \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c} \bar{C}_{ij} & \bar{C}_{ji}=0 & \bar{C}_{st} & \bar{C}_{ts}=0 \\ \hline E & E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E & E \end{array}\right]$$

E.1.1: $c_i < c_s$, $c_j < c_s$

En este caso se pueden sumar las matrices $\bar{C}_{ij}$ y $\bar{C}_{ji} = 0$ a la matriz $\bar{C}_{st}$. Como antes, al sumar columnas de $\bar{C}_{ij}$ a columnas de $\bar{C}_{st}$ hay que restar las correspondientes columnas de $\bar{C}_{ji}$. De esta manera la forma de la franja horizontal inferior en * de 3.9 no cambia y las columnas de $\bar{C}_{ij}$ se suman a las columnas de $\bar{C}_{st}$.

E.1.2: Si $c_i < c_t$ y $c_j < c_t$.

En este caso primero se suman y restan columnas de $\bar{C}_{ij}$ y $\bar{C}_{ji}$ a columnas de $\bar{C}_{ts}$. Entonces también como en el caso A.2.2. usando los renglones de las franjas horizontales inferiores que contienen dos unos cada uno de los cuales está respectivamente bajo $\bar{C}_{st}$ y $\bar{C}_{ts}$, se resta la matriz $\bar{C}_{ij}$ de la matriz $\bar{C}_{st}$ y con ésto se tiene nuevamente que $\bar{C}_{ts} = 0$.

Entonces en el caso E.1 las columnas de A_x se pudieran sumar a columnas de A_y.

E.2.1: $c_i < c_s$ y $c_j < c_t$.

Entonces la matriz $\bar{C}_{ij}$ se puede sumar a $\bar{C}_{st}$ y la matriz $\bar{C}_{ji}$ se pue de sumar a $\bar{C}_{ts}$

Cada vez que se sume la matriz $\bar{C}_{ij}$ a la matriz $\bar{C}_{st}$ se deberá sumar la matriz $\bar{C}_{ji}$ a la matriz $\bar{C}_{ts}$ y luego restar renglones de la última franja en (1) a los renglones de la segunda franja para recuperar la forma original C.

E.2.2 $c_i < c_t$, $c_j < c_s$.

Entonces $\bar{C}_{ij}$ se puede sumar a $\bar{C}_{ts}$ y $\bar{C}_{ji}$ a $\bar{C}_{st}$

Como en los casos anteriores se hacen ambas sumas simultáneamente y se recupera la forma de la franja horizontal inferior. Entonces $\bar{C}_{ts}$ ya no es cero mientras que $\bar{C}_{st}$ no cambia.

Usando los renglones de la última franja horizontal en (1) se hace $\bar{C}_{ts} = 0$ Aquí las columnas de $\bar{C}_{ij}$ se restan de columnas de $\bar{C}_{st}$.

También en este último caso las columnas de A'_x se pueden sumar a columnas de A'_y sin modificar la forma original.

Se puede demostrar que no hay otras

transformaciones admisibles de A que no cambian la forma de (1) además de aquéllas que se obtienen como combinaciones de las transformaciones elementales enlistadas antes y que corresponden a la relación de orden en $S(a)$.

Entonces de una representación arbitraria A de S hemos construído una representación A' de $S(a)$.

Se afirma que si A es similar a B entonces A' es similar a B'.

En efecto, si A es similar a B entonces las submatrices de A y B que corresponden al maximal a, son similares y por lo tanto tienen el mismo rango. Luego $\bar{A}$ es similar a $\bar{B}$.

Como no tenemos operaciones de las columnas de las matrices correspondientes a los puntos de Σ a las columnas de las matrices correspondientes a los puntos de $\mathcal{L}$ entonces al hacer los rangos de $\bar{A}_a$ y $\bar{B}_a$ tan grandes como sea posible nos quedan del mismo rango.

Sigamos denotando por $\bar{A}$ y $\bar{B}$ a las representaciones que se obtuvieron de $\bar{A}$ y $\bar{B}$ después de diagonalizar las submatrices $\bar{A}_a$ y $\bar{B}_a$ y de eliminarlas. Es decir, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son de la forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} B & \bar{C} \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \qquad \bar{B} = \left[\begin{array}{c|c} B' & \bar{C}' \\ \hline 0 & C' \end{array}\right]$$

Además existen matrices Q y P tales que $Q\bar{A}P = \bar{B}$ ya que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son similares.

Sean $Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \qquad P = \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right]$

Como no tenemos operaciones de las columnas de las matrices de $\mathcal{C}$ a las columnas de las matrices de $\mathcal{B}$ se tiene que $P_{21} = 0$.

Hagamos la siguiente multiplicación:

$$\left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B & \bar{C} \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline 0 & P_{22} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{11}B & Q_{11}\bar{C} + Q_{12}C \\ Q_{21}B & Q_{21}\bar{C} + Q_{22}C \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline 0 & P_{22} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{11}BP_{11} & Q_{11}BP_{12} + Q_{11}\bar{C}P_{22} + Q_{12}CP_{22} \\ Q_{21}BP_{11} & Q_{21}BP_{12} + Q_{21}\bar{C}P_{22} + Q_{22}CP_{22} \end{bmatrix} *$$

Pero $\quad * = \left[\begin{array}{c|c} B' & \bar{C}' \\ \hline 0 & C' \end{array}\right]$

Es decir, $Q_{21} B P_{11} = 0$, $Q_{21} B P_{12} = 0$, $Q_{21} \bar{C} P_{22} = 0$, $Q_{11} B P_{12} = 0$ y $Q_{12} C P_{22} = 0$

Luego $$* = \begin{bmatrix} Q_{11} B P_{11} & Q_{11} \bar{C} P_{22} \\ 0 & Q_{22} C P_{22} \end{bmatrix}$$

Como $Q_{21} B P_{11} = 0$ y se tiene que P_{11} es invertible y que B es sobre entonces $Q_{21} = 0$. Luego $Q_{22} C P_{22} = C'$ Entonces C es similar a C'. Como C y C' tienen la misma forma entonces $C = C'$

Veamos que para con $\bar{C}'$. Sabemos $\bar{C}' = Q_{11} B P_{12} + Q_{11} \bar{C} P_{22} + Q_{12} C P_{22}$.

Aquí Q_{11} es hacer operaciones en los renglones de la franja de arriba. Estas operaciones no cambian la forma del reducido así que podemos suponer que $Q_{11} = E$.

P_{12} es hacer operaciones de las columnas correspondientes a las comparables con el maximal a, a las columnas de otros vértices.

Q_{12} es hacer operaciones de los renglones de la franja de abajo a los renglones de la franja de arriba.

P_{22} es hacer operaciones en las

columnas de los bloques que no se compa-
ran con el maximal.

Se puede probar que P_{12}, P_{22} y Q_{12} se subdividen en bloques de manera que las operaciones corresponden a las inducidas por la relación de orden en $S(a)$. Esto se hará en detalle en el ejemplo 3.14.

Luego se tiene que si A es similar a B entonces A' es similar a B'.

Ahora veamos que cada representación A' de $S(a)$ se puede obtener por el método indicado antes de alguna representación A de S.

Si A' es una representación de $S(a)$, entonces A' está formada por matrices B_i para los puntos que se comparaban con el maximal a, matrices $\bar{C}_i$ para los puntos que no se comparaban con a, y matrices $\bar{C}_{ij}$ para los puntos que son los supremos de c_i, c_j donde c_i, y c_j no se comparaban con el maximal.

Supongamos que A' tiene n renglones. Construiremos una representación A de S partiendo de A' de la siguiente manera:

Al maximal a le asignamos la ma

triz identidad E de $n \times n$ que denotamos $\bar{A}_a$.

Luego consideremos una matriz del tipo $\bar{C}_{ij}$. Supongamos que $\bar{C}_{ij}$ tiene k columnas. Entonces construimos una nueva matriz $\bar{\bar{C}}_{ij}$ colocando la matriz identidad E de $k \times k$ bajo $\bar{C}_{ij}$. Además construimos otra matriz $\bar{\bar{C}}_{ji}$ poniendo en la franja superior una matriz de ceros con h renglones y k columnas (que denotaremos $\bar{C}_{ji}$) y bajo ésta colocamos otra matriz E de $k \times k$.

Bajo las otras submatrices de la representación A' ponemos matrices de ceros con k renglones y un número adecuado de columnas en cada caso.

Nótese que en la franja inferior sólo aparecen dos matrices idénticas, una bajo $\bar{C}_{ij}$ y la otra bajo $\bar{C}_{ji}$ y matrices de ceros en los demás casos.

Ahora se repite este procedimiento para todas las matrices del tipo $\bar{C}_{ij}$.

Entonces hemos obtenido un conjunto de matrices $\bar{\bar{A}}_a$, $\bar{\bar{B}}_i$, $\bar{C}_{io}$ y $\bar{\bar{C}}_{ij}$

donde $\bar{\bar{A}}_a$, $\bar{\bar{B}}_i$, $\bar{\bar{C}}_{io}$ tienen matrices de ceros bajo $\bar{A}_a$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_{io}$ y $\bar{\bar{C}}_{ij}$, $\bar{\bar{C}}_{ji}$ tienen bajo $\bar{C}_{ij}$ y $\bar{C}_{ji}$ respectivamente una matriz idéntica y estas dos matrices idénticas están en la misma sub-franja horizontal inferior.

Entonces la representación A de S se define de la siguiente manera:

$$A(a) = \bar{\bar{A}}_a$$

$$A(b_i) = \bar{\bar{B}}_i \quad \text{si } b_i \in \mathcal{L}$$

$$A(c_i) = \bar{\bar{C}}_{io} \cup \bar{\bar{C}}_{ij} \quad \text{si } c_i \in \mathcal{R}.$$

De la construcción es claro que la representación A' de $S(a)$ se obtiene por el método descrito en 3.9 de la representación A de S. Ver ejemplos 3.12 y 3.13.

Ahora afirmamos que si la representación A de S es inescindible entonces la representación A' de $S(a)$ también es inescindible.

Esto es claro ya que si A' es una representación de $S(a)$ entonces A' consta de matrices B_i si $b_i \in \mathcal{L}$, $\bar{C}_{io}$ si $c_i \in \mathcal{R}$ y $\bar{C}_{ij}$ si $c_i, c_j \in \mathcal{R}$ y por lo tanto la representación A de S está formada por matrices $\bar{\bar{B}}_i$ si $b_i \in \mathcal{L}$, $\bar{\bar{C}}_{io} \cup \bar{\bar{C}}_{ij}$ si $c_i \in \mathcal{R}$ y $\bar{\bar{A}}_a$ para el maximal a.

Supongamos que A' se escinde. Entonces $A' = A_1' \oplus A_2'$ donde A_1' está formada por matrices B_i', C_{i0}' y C_{ij}' y A_2' está formada por matrices B_i^2, C_{i0}^2 y C_{ij}^2. Entonces también la matriz $\bar{\bar{A}}_a$ (que es una identidad) se escribe como $\bar{\bar{A}}_a = I \oplus I$.

Esto induce particiones verticales en las identidades que aparecen en la franja horizontal inferior de A.

Observemos que las matrices que corresponden a cada punto de S en la representación A están formadas por uniones de matrices de la representación A'.

Ahora, dentro de la matriz que corresponde a cada punto de S permutamos columnas de manera que del lado izquierdo queden agrupadas las matrices correspondientes a A_1' y del lado derecho queden agrupadas las matrices que corresponden a A_2'.

Por último intercambiamos renglones de manera que todas las identidades que estaban bajo las ma trices de A_1' queden agrupadas en una nueva franja horizontal superior, incluyendo las matrices de A_1' y las matrices de A_2' y las identidades que estaban bajo ellas queden en la nueva franja horizontal inferior.

Después de hacer todo ésto, la representación A queda obviamente irrescindible. Ver ejemplo 3.13

Ahora bien, una representación A' de $S(a)$ se obtiene de dos representaciones diferentes A y B solamente si A y B difieren en el número de columnas de ceros en A_a o bien difieren en el número de renglones que son cero en toda la representación. Y también si A y B difieren por un sumando directo que es una representación trivial de Γ o sea $B = A \oplus S_c$ con $c \in \Gamma$, porque entonces la columna donde aparece el uno se hará cero en la franja superior y entonces no afecta la forma de A'.

Analizando con cuidado el al

goritmo para pasar de A a A' se puede ver que estos casos esencialmente agotan las posibilidades de obtener la misma representación A' de $S(a)$ partiendo de dos representaciones diferentes de S.

Es más, si W es el siguiente conjunto de representaciones triviales de S:

$$W = \{\tilde{\pi}, \pi_a, \delta_c \mid c \in \bar{F}\}$$

y $\tilde{W}$ es el conjunto de sumas directas de elementos de W entonces se tiene que si A' es similar a B' entonces $A = U \oplus W_1$ y $B = U \oplus W_2$ donde $W_1, W_2 \in \tilde{W}$.

Como W está formado sólo por un número finito de representaciones inescindibles entonces el tipo de representación de S no cambia cuando se pasa a $S(a)$ #

De los argumentos anteriores se sigue el siguiente lema:

3.11 LEMA: Si S es un conjunto de ancho tres entonces el número

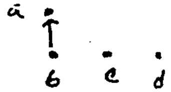
de representaciones irrescindibles de S es mayor que el número de representaciones irrescindibles de S(a).
(Ver la demostración del corolario 4.24).

#

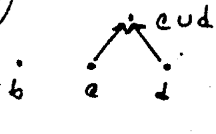
Para terminar este capítulo checaremos en ejemplos concretos algunas de las afirmaciones hechas en la prueba del lema de reducción.

3.12 EJEMPLO: En el ejemplo 3.10 dimos una representación de un conjunto S y obtuvimos una representación A' de S(a). En este ejemplo obtendremos una representación $\tilde{A}$ de S partiendo de la representación dada A' de S(a) y veremos que difiere de A por una suma de representaciones triviales.

Teníamos S el conjunto:



y S(a) el conjunto



La representación A' de $S(a)$ es:

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & 0 & 2 & 2 & & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 2 \end{array}\right] \\ b \quad\quad c \quad\quad d \quad c\cup d \end{array}$$

donde $A'(d) = J_{3,0}$

En este caso asignamos al punto a la matriz identidad de tres por tres para empezar a construir la representación $\tilde{A}$ de S:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & & 2 \end{array}\right] \\ a \quad\quad\quad b \quad\quad\quad c \quad\quad d \quad c\cup d \end{array}$$

En $S(a)$ sólo tenemos 2 puntos que no se comparan entre sí que son c y d entonces en A' únicamente aparece una matriz del tipo C_{ij} y que es la que corresponde al punto $c\cup d$. Esta matriz que denotaremos $C_{c,d}$ tiene en este ejemplo sólo una columna.

Así que el siguiente paso es construir la matriz $\bar{\bar{C}}_{c,d}$ poniendo la matriz $[1]$ bajo C_{cd} y aumentando la nueva matriz $\bar{\bar{C}}_{dc}$. Además se colocan matrices de ceros en los lugares adecuados de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} A_a & & & B_b & & C_{co} & & C_{cd} & C_{do} & C_{dc} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} a & b & c & c\cup d & d \end{array} \end{array}$$

Si tuviéramos más puntos que no se comparaban entre sí, tendríamos que construir más matrices de acuerdo al procedimiento anterior. Como en este caso sólo teníamos c y d no comparables entre sí tenemos ya todas las matrices necesarias para construir la representación $\tilde{A}$ de S. Entonces $\tilde{A}$ de S queda de la forma siguiente:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \end{array}$$

donde $\tilde{A}(a) = \bar{\bar{A}}_a$, $\tilde{A}(b) = \bar{\bar{\bar{B}}}_b$, $\tilde{A}(c) = \bar{\bar{C}}_{co} \cup \bar{C}_{cd}$ y $\tilde{A}(d) = \bar{\bar{C}}_{do} \cup \bar{\bar{C}}_{dc}$.

Es claro que A' se obtiene de $\tilde{A}$ por el método indicado en 3.9.

Además A y $\tilde{A}$ difieren únicamente por sumandos triviales. (Véase la página 67).

$\#$

En el ejemplo siguiente veamos que si se tiene una representación A' de $S(a)$ escindible entonces la representación A de S también se escinde. Lo haremos para dos conjuntos.

3.13 EJEMPLO: Sea S el siguiente conjunto

$$\begin{tikzcd} & & d \\ a & b & c \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Entonces $S(a)$ es el conjunto:

$$\begin{tikzcd} & d \cup b \\ d \arrow[ur] & c \cup b \arrow[u] \\ c \arrow[u] \arrow[ur] & b \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Sea A' la siguiente representación escindible de $S(a)$:

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} C_{b_0}^1 & 0 & C_{c_0}^1 & 0 & C_{d_0}^1 & 0 & C_{cb}^1 & 0 & C_{db}^1 & 0 \\ 0 & C_{b_0}^2 & 0 & C_{c_0}^2 & 0 & C_{d_0}^2 & 0 & C_{cb}^2 & 0 & C_{db}^2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \quad b \quad & \quad c \quad & \quad d \quad & \quad c\cup b \quad & \quad d\cup b \quad \end{array} \end{array}$$

Por comodidad denotaré a las matrices únicamente por sus sub-índices. Por ejemplo $C_{b_0}^1 := b_0^1$.

Luego la representación A de S se ve de la siguiente forma:

$$\left[\underbrace{\begin{array}{cc} A_a^1 & 0 \\ 0 & A_a^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}_{a} \middle\| \underbrace{\begin{array}{cc|cc} d_0^1 & 0 & db^1 & 0 \\ 0 & d_0^2 & 0 & db^2 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{d} \middle\| \underbrace{\begin{array}{cc|cc} c_0^1 & 0 & cb^1 & 0 \\ 0 & c_0^2 & 0 & cb^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}}_{c} \middle\| \underbrace{\begin{array}{cc|cc|cc} b_0^1 & 0 & bd^1 & 0 & bc^1 & 0 \\ 0 & b_0^2 & 0 & bd^2 & 0 & bc^2 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array}}_{b}\right]$$

Para escindir a A primero permutamos columnas de manera que todas las matrices de A_i^1 queden del lado izquierdo y las matrices de A_i^2 queden del lado derecho dentro de cada submatriz correspondiente a los puntos de S. En este ejemplo sería:

$$\left[\begin{array}{cc||cc|cc||cc|cc||ccc|ccc}
A_a^1 & 0 & d_o^1 & db^1 & 0 & 0 & C_o^1 & Cb^1 & 0 & 0 & b_o^1 & bd^1 & bc^1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A_a^2 & 0 & 0 & d_o^2 & db^2 & 0 & 0 & C_o^2 & Cb^2 & 0 & 0 & 0 & b_o^2 & bd^2 & bc^2 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I
\end{array}\right]$$

Ahora intercambiamos renglones de manera que todas las identidades que estaban bajo las matrices de A_1 queden agrupadas en una nueva franja horizontal superior y las identidades que estaban bajo las matrices de A_2 queden en la franja horizontal inferior. En nuestro ejemplo:

$$\left[\begin{array}{c:c||cc:cc||cc:cc||ccc:ccc}
A_a^1 & 0 & d_o^1 & db^1 & 0 & 0 & C_o^1 & Cb^1 & 0 & 0 & b_o^1 & bd^1 & bc^1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & A_a^2 & 0 & 0 & d_o^2 & db^2 & 0 & 0 & C_o^2 & Cb^2 & 0 & 0 & 0 & b_o^2 & bd^2 & bc^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I
\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad}_{a}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{d}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{c}\qquad\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{b}$$

Con lo cual A quedó escindida.

Daré otro ejemplo porque también aclara cómo se construye la representación A partiendo de A'.

Sea S el conjunto:

$$\begin{tikzcd} a & i_0 & j_0 \\ b_0 \arrow[u] & k_0 \arrow[u] & l_0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

entonces S(a) es el conjunto:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & ij & & \\ & & il \arrow[ur] & & kj \arrow[ul] & \\ & i_0 \arrow[ur] & & kl \arrow[ul] \arrow[ur] & & j_0 \arrow[ul] \\ b_0 & & k_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & & l_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Sea A' la siguiente representación escindible de S(a)

$$\begin{array}{ccccccccc} \left[\begin{matrix} b_0^1 & 0 \\ 0 & b_0^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} i_0^1 & 0 \\ 0 & i_0^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} il^1 & 0 \\ 0 & il^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} ij^1 & 0 \\ 0 & ij^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} k_0^1 & 0 \\ 0 & k_0^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} kl^1 & 0 \\ 0 & kl^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} kj^1 & 0 \\ 0 & kj^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} j_0^1 & 0 \\ 0 & j_0^2 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} l_0^1 & 0 \\ 0 & l_0^2 \end{matrix}\right] \\ b_0 & i_0 & il & ij & k_0 & kl & kj & j_0 & l_0 \end{array}$$

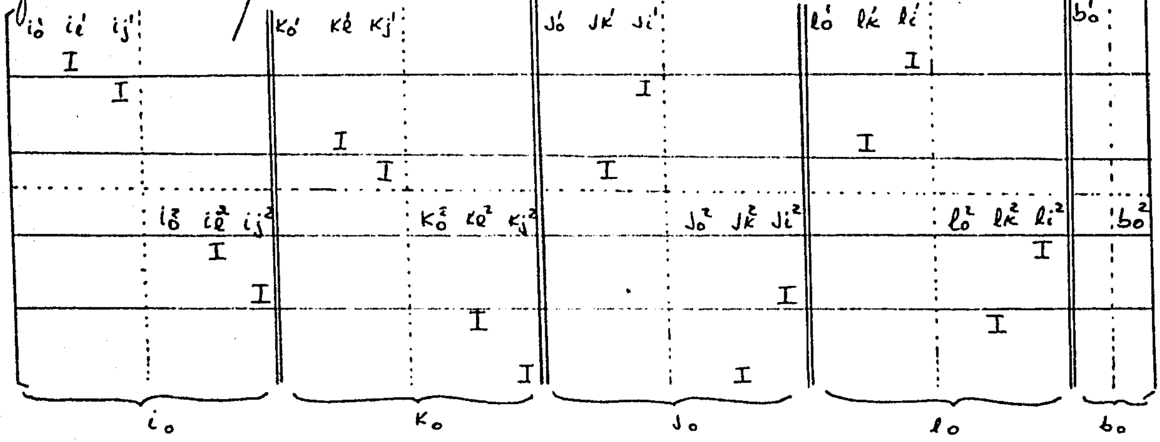
Entonces la representación A de S se ve de la siguiente forma: (no escribiré las matrices de ceros ni la matriz Aa que corresponde al maximal):

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
i_0^1 & i_0^2 & i_l^1 & i_l^2 & i_j^1 & i_j^2 & k_0^1 & k_0^2 & k_l^1 & k_l^2 & k_j^1 & k_j^2 & j_0^1 & j_0^2 & j_k^1 & j_k^2 & j_i^1 & j_i^2 & l_0^1 & l_0^2 & l_k^1 & l_k^2 & l_i^1 & l_i^2 & b_0^1 & b_0^2
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cc|cc||cc|cc|cc||cc|cc|cc||cc|cc|cc||cc}
& & I & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & I & & & \\
& & & I & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & I & & \\
\hline
& & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & & & & & & & \\
& & & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & & & & & & \\
\hline
& & & & & & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & & & \\
& & & & & & & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & & \\
\hline
& & & & & & & & & & I & & & & I & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & I & & & & I & & & & & & & & & &
\end{array}\right] \\
i_0 \qquad\qquad k_0 \qquad\qquad j_0 \qquad\qquad l_0 \qquad\qquad b_0
\end{array}$$

Si permutamos columnas queda:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
i_0^1 & i_l^1 & i_j^1 & i_0^2 & i_l^2 & i_j^2 & k_0^1 & k_l^1 & k_j^1 & k_0^2 & k_l^2 & k_j^2 & j_0^1 & j_k^1 & j_i^1 & j_0^2 & j_k^2 & j_i^2 & l_0^1 & l_k^1 & l_i^1 & l_0^2 & l_k^2 & l_i^2 & b_0^1 & b_0^2
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc||ccc|ccc||ccc|ccc||ccc|ccc||cc}
& I & & & & & & & & & & & & & & & & & & & I & & & & & \\
& & & & I & & & & & & & & & & & & & & & & & & & I & & \\
\hline
& & I & & & & & & & & & & & & I & & & & & & & & & & & \\
& & & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & & & & & & \\
\hline
& & & & & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & & & & \\
& & & & & & & & & & I & & & & & & & & & & & & I & & & \\
\hline
& & & & & & & & I & & & & & I & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & I & & & & & I & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}$$

Por último permutando los renglones nos queda que la representación A es escindible:



Olvidé mencionar que las matrices jk^1, jk^2, ji^1, ji^2, lk^1, lk^2, li^1 y li^2 son todas cero. Esto no importa cuando escindimos la representación, pero es importante cuando se obtiene la representación A partiendo de A'.

*

En la página 74 afirmamos que si una representación A de S es similar a otra representación B entonces la representación A' de $S(a)$ es similar a la representación B', donde A' y B' se obtuvieron de A y B respectivamente utilizando el algoritmo descrito en 3.9.

Al aplicar el algoritmo a las representaciones A y B obteníamos tras un cierto número de pasos otras representaciones $\bar{A}$ y $\bar{B}$ que eran de la forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} B & \bar{C} \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \qquad \bar{B} = \left[\begin{array}{c|c} B' & \bar{C}' \\ \hline 0 & C' \end{array}\right]$$

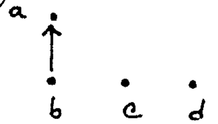
y que seguían siendo similares. Entonces existían matrices Q y P tales que $Q\bar{A}P = \bar{B}$ y donde Q y P eran de la forma:

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \qquad P = \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right]$$

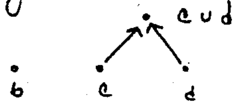
Se probó que $P_{21} = 0$ y $Q_{21} = 0$. Y se afirmó que era posible probar que

P_{10}, P_{22}, y Q_{12} se subdividen en bloques de manera que las operaciones corresponden a las inducidas por la relación de orden en S(a). Esto es lo que haremos en detalle en el siguiente ejemplo:

3.14. EJEMPLO: Retomemos el conjunto y la representación del ejemplo 3.10. Entonces teníamos que S era el conjunto:



y S(a) el conjunto:



Además A es la siguiente representación de S

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|cc|c:cc:cc|c:cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccc}
\quad a \quad\quad & \quad b \quad\quad & \quad\quad c \quad\quad\quad & \quad d \quad
\end{array}
\end{array}$$

Es decir, A es de la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & \bar{C} \\ \hline 0 & C \end{array}\right].$$

Además $\bar{C}$ es de la forma:

$$\bar{C} = [\bar{C}_1 \mid \bar{C}_2]$$

con $\bar{C}_1 = [L_1 \mid 0 \mid L_2]$ y $\bar{C}_2 = [0 \mid 0]$

También C es de la forma:

$$C = [C_1 \mid C_2]$$

con $C_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ y $C_2 = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$

Sean Q, P matrices tales que $QAP = A'$ donde A' es de la misma forma que A.

Entonces $A' = \left[\begin{array}{c|c} B' & \bar{C}' \\ \hline 0 & C' \end{array}\right]$ y en particular se tiene que $C_1' = C_1$ y $C_2' = C_2$.

Escribamos Q y P de la siguiente manera:

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \qquad P = \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right]$$

Recordemos que P corresponde a hacer operaciones en columnas.

Como b, c y d no se comparan entre sí tenemos que $P_{21} = 0$ y $P_{12} = 0$

Entonces si hacemos el producto QAP se tiene:

$$QAP = \begin{bmatrix} Q_{11} B P_{11} & Q_{11} \bar{C} P_{22} + Q_{12} C P_{22} \\ Q_{21} B P_{11} & Q_{21} \bar{C} P_{22} + Q_{22} C P_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} B' & \bar{C}' \\ \hline 0 & C' \end{array}\right] = A'$$

Entonces como P_{11} es invertible y B es de rango 3 tenemos que $Q_{21} = 0$

Luego QAP queda así:

$$QAP = \begin{bmatrix} Q_{11} B P_{11} & Q_{11} \bar{C} P_{22} + Q_{12} C P_{22} \\ 0 & Q_{22} C P_{22} \end{bmatrix}$$

En particular tenemos que C y C' son similares.

Ahora bien, como c y d no se comparan entonces P_{22} es de la forma:

$$P_{22} = \left[\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right]$$

Sean $Q_{22} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

Entonces haciendo el producto $Q_{22} C_1 X$ tenemos:

$$Q_{22} C_1 X = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11} X_{11} & q_{11} X_{12} \\ q_{21} X_{11} & q_{21} X_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C_1$$

es decir, $q_{11} X_{11} = I$, $q_{21} = 0$ y $X_{12} = 0$

y si hacemos el producto $Q_{22} C_2 Y = C_2$ donde C_2 es de la forma:

$$C_2 = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11} R Y_{11} + q_{12} Y_{21} & q_{11} R Y_{12} + q_{12} Y_{22} \\ q_{22} Y_{21} & q_{22} Y_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

O sea, $q_{22} Y_{22} = I$, $Y_{21} = 0$, y $q_{11} R y_{11} = R$. De esta última relación obsérvese que Y_{11} es una matriz de uno por uno. Es decir Y_{11} es un escalar. entonces sea $Y_{11} = a$.

Por lo tanto:

$$q_{11} R = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces $d_{21} = 0 = d_{31}$. Luego:

$$q_{11} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Ahora, sea $X_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

entonces:

$$q_{11} X_{11} = \begin{bmatrix} 1 & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + D_{12} b_{21} & b_{12} + D_{12} b_{22} \\ D_{22} b_{21} & D_{22} b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

de donde se ve que D_{22} es inverti-ble. Entonces $b_{21} = 0$. y X_{11} queda de la forma:

$$X_{11} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que X es de la for-ma:

$$X = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{X_{21}} & X_{22} \end{array}\right]$$

y Y de la forma:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}$$

Recordemos que Q_{11} es hacer operaciones en los renglones de la franja superior. entonces puedo suponer que $Q_{11} = I$.

Luego:

$$\bar{C} P_{22} = [C_1 \mid C_2] \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = [C_1 X \quad C_2 Y] =$$

$$= [C_1 X \quad 0]$$

donde $C_1 X = [L_1 \mid 0 \mid L_2] \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} =$

$$= \left[[L_1 \mid 0] X_{11} + L_2 X_{21}, \quad L_2 X_{22} \right]$$

$$= [L_1 \mid 0] \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = [L_1 \mid L_1 b_{12}]$$

Aquí L_1 es una matriz de 3×1, 0 es de 3×2 y L_2 es de 3×2.

y X_{11} es de 3×3, X_{21} es de 2×3 y X_{22} es de 2×2.

Falta analizar $\bar{C} P_{22}$ y $Q_{12} C P_{22}$.

Tenemos:

$$\bar{C} P_{22} = [\bar{C}_1 \; \bar{C}_2] \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = [\bar{C}_1 X \;,\; \bar{C}_2 Y] =$$

$$= [\bar{C}_1 X, 0]$$

y $\bar{C}_1 X = [L_1 \;,\; L_1 \bar{b}_{12} + [0, L_2] b_{22}]$.

Ahora bien, si analizamos $Q_{12} C P_{22}$ tenemos:

$$Q_{12} C P_{22} = Q_{12} Q^{-1}_{22} Q_{22} C P_{22} = Q_{12} Q^{-1}_{22} C$$

ya que $Q_{22} C P_{22} = C$

Sea $Q'_{12} = Q_{12} Q^{-1}_{22}$

Entonces:

$$Q'_{12} [C_1 \; C_2] + \bar{C} P_{22} = [\bar{C}_1 , \bar{C}_2]$$

donde $\bar{C}_2 = 0$

Luego se tiene

$$[Q'_{12} C_1 \;,\; Q'_{12} C_2] + [\bar{C}_1 X , 0] = [\bar{C}_1' , 0]$$

de donde

$$Q'_{12} C_2 = 0$$

Por lo tanto

$$0 = Q'_{12} C_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{34} & s_{35} \end{bmatrix}$$

Entonces Q'_{12} es de la forma:

$$Q'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y con esto terminamos de probar en este ejemplo que las matrices P_{12}, P_{22} y Q_{12} se subdividen en bloques de manera que las operaciones corresponden a las inducidas por la relación de orden en $S(a)$. #

En el siguiente capítulo estudiaremos la interpretación que hace P. Gabriel del algoritmo de Roiter-Nazarova.

IV LA INTERPRETACION DE GABRIEL.

En este capítulo estudiaremos la interpretación que hace P. Gabriel [Ga] del algoritmo de Roiter-Nazarova. Entonces si S es un conjunto parcialmente ordenado y $S(m)$ su derivado con respecto a m, tendremos que decir cómo se construye un $S(m)$-espacio partiendo de un S-espacio.

Se probará también el lema de reducción utilizando técnicas de S-espacios.

Recordemos que si S es un conjunto parcialmente ordenado, un S-espacio es un espacio vectorial V de dimensión finita con una familia $(V(s))_{s \in S}$ de subespacios tales que $V(s) \subseteq V(t)$ si $s \leq t$. Y un morfismo $f: V \longrightarrow W$ de S-espacios es una transformación lineal tal que para toda $s \in S$, se tiene $f(V(s)) \subseteq W(s)$. (DEFINICION 2.2).

También en el capítulo II se probó que la categoría $\mathcal{S}(S)$ no es una categoría abeliana.

Si el conjunto S tiene ancho menor

o igual que tres y $m \in S$ maximal habíamos definido en el capítulo III (DEFINICION 3.8) los siguientes conjuntos:

$$\widehat{m} := \{ s \in S \mid s \leq m \} \qquad T := S \setminus \widehat{m}$$

$$\tilde{T} := \left\{ \begin{array}{l} \text{supremos formales de pares de} \\ \text{elementos de } T \end{array} \right\}$$

y $$S(m) := \tilde{T} \cup \{ \widehat{m} \setminus m \}$$

Ahora construiremos un funtor de la categoría de los S-espacios en la categoría de los S(m)-espacios.

4.1 DEFINICION: Sea S un conjunto parcialmente ordenado y $m \in S$ maximal. Si V es un S-espacio podemos construir el siguiente S(m)-espacio.

Sea V(m) el subespacio de V que corresponde a m. Entonces V(m) será el espacio total en S(m) y si $s \in S(m)$ se tiene que:

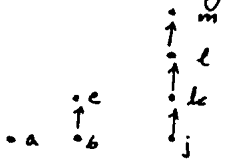
$$V(m)(s) = \begin{cases} V(s) \cap V(m) & \text{si } s \in T \\ V(s) & \text{si } s \in \widehat{m} \\ (V(x) + V(y)) \cap V(m) & \text{si } s = x \cup y \end{cases}$$

Entonces se tiene un funtor

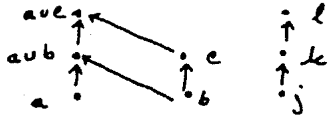
$$F : S\text{-espacios} \longrightarrow S(m)\text{-espacios}$$
$$V \longmapsto V(m)$$

Ejemplo:

Si S es el conjunto



entonces el conjunto $S(m)$ es:



El espacio total es $V(m)$.

$$V(m)(l) = V(l) \qquad V(m)(a) = V(a) \cap V(m)$$
$$V(m)(k) = V(k) \qquad V(m)(b) = V(b) \cap V(m)$$
$$V(m)(j) = V(j) \qquad V(m)(c) = V(c) \cap V(m)$$

$$V(m)(a \cup b) = (V(a) + V(b)) \cap V(m)$$
$$V(m)(a \cup c) = (V(a) + V(c)) \cap V(m)$$

4.2 DEFINICION: Se dice que un S-espacio V es "m-pleno" si se tiene que $W(m) \neq 0$ para cada sumando directo no cero $W \oplus V$.

Es decir, los sumandos inescindibles de V son diferentes de cero en m.

En el capítulo III (lema 3.10) enunciamos el lema de reducción y dimos un esquema de la prueba original de Roiter utilizando matrices.

En este capítulo daremos una prueba del lema de reducción usando S-espacios.

4.3: LEMA DE REDUCCION: El functor $V \longmapsto V(m)$ induce una biyección entre los S-espacios inescindibles m-plenos y los S(m)-espacios inescindibles #

La demostración del lema de reducción se basa en el concepto de envolvente inyectiva, así que antes de dar la prueba procederemos a construir la envolvente inyectiva de un S-espacio. Esta construcción se hará de manera similar a la que se hace para módulos.

4.4 DEFINICION: Si S es un conjunto parcialmente ordenado decimos que un morfismo de S-espacios $f: V \longrightarrow W$ es "propio" si $f(V(s)) = W(s) \cap f(V)$ para toda $s \in S$.

Ahora definiremos un S-espacio que será útil para dar algunas equivalencias de morfismos propios.

Sea S un conjunto parcialmente ordenado y k un campo. Sea $S_0 = S \cup \{0\}$ donde 0 es un elemento mínimo adicional. Sea $a \in S_0$. Definimos el S-espacio k_a de la siguiente manera:

$$k_a(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq a \\ k & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Obsérvese que si $(V/V(a))^*$ es el espacio vectorial dual de $V/V(a)$ entonces $Hom(V, k_a) \cong (V/V(a))^*$ ya que si $f \in Hom(V, k_a)$ se tiene:

$$\begin{tikzcd}
V(a) \arrow[d, phantom, "\cap"] & & k_a(a)=0 \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & k_a = k \\
& V/V(a) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Y si $a=0$ entonces $V(a)=0$, $k_a(s)=k$ para toda $s \in S$ y por lo tanto $Hom(V, k_0) \cong V^*$

4.5 PROPOSICION: Sea $f: V \longrightarrow W$ un morfismo de S-espacios. Sea $S_0 = S \cup \{0\}$ donde 0 es un elemento mínimo adicional de S y $V(0)=0$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es mono propio

ii) El mapeo inducido $V/V(a) \longrightarrow W/W(a)$ es inyectivo para toda $a \in S_0$

iii) El mapeo inducido $\mathrm{Hom}(W, k_a) \to \mathrm{Hom}(V, k_a)$ es supreyectivo para toda $a \in S_0$.

DEMOSTRACION:

Obsérvese que $\ker(V/V(a) \longrightarrow W/W(a)) = f^{-1}(W(a)/V(a))$

"i⇒ii" Como f es mono sí y solo sí f es inyectiva podemos ver a f como inclusión $f(V) \cong V \subset \overline{W}$. Entonces $f^{-1}(W(a)) = V \cap W(a)$ y por la definición de mono propio $V \cap W(a) = V(a)$. Por lo tanto $\ker(V/V(a) \longrightarrow W/W(a)) = V(a)/W(a) = 0$

"ii⇒i" Tomemos $a=0$

Por hipótesis el mapeo $V = V/V(0) \longrightarrow W/W(0) = W$ es inyectivo, por lo tanto f es inyectivo. Además f es propio ya que $\ker(V/V(a) \longrightarrow W/W(a)) = 0$ y $\ker(V/V(a) \longrightarrow W/W(a)) = V \cap W(a)/V(a)$ luego $V \cap W(a) = V(a)$

"ii⇔iii" Sea $a \in S_0$. Se tiene que $V/V(a) \longrightarrow W/W(a)$ es inyectivo sí y solo sí $(V/V(a))^* \longleftarrow (W/W(a))^*$ es

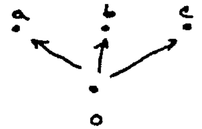
sobre. Pero $(V/V(a))^* = \mathrm{Hom}(V, k_a)$ y
$(W/W(a))^* = \mathrm{Hom}(W, k_a)$ #

4.6 DEFINICION: Si V es un S-espacio y $a \in S_0 = S \cup \{0\}$ entonces $V(a^+) = \bigcap_{b>a} V(b)$

Ejemplo:
Sea S el conjunto que tiene tres puntos no comparables.

$$S = \dot{a} \quad \dot{b} \quad \dot{c}$$

entonces $S_0 =$



Sea k un campo. V será el S-espacio $k^2 = ke + kf$ donde e, f es la base natural con la siguiente familia de subespacios.

$$V(a) = ke \quad , \quad V(b) = k(e+f) \quad V(c) = kf$$

por lo tanto

$V(0^+) = ke \cap k(e+f) \cap kf = 0$

$V(a^+) =$ intersección de la familia vacía de subespacios $= k^2 =$
$= V(b^+) = V(c^+)$

4.7 DEFINICION: Como $V(a^+) = \bigcap_{b>a} V(b) \supset V(a)$ podemos definir $V_a := V(a^+)/V(a)$.

Ejemplo:
Sea S el conjunto linealmente ordenado
$$n \leftarrow n-1 \leftarrow n-2 \leftarrow \cdots \leftarrow 1$$
Se tiene
$$V \supset V(n) \supset V(n-1) \supset \cdots \supset V(1) \supset V(0) = 0$$
Entonces
$$V_n = V/V(n) \quad , \; V_{n-1} = V(n)/V(n-1), \cdots, V_0 = V(1)$$
Este ejemplo es importante porque es similar a las series de composición.

4.8 PROPOSICION: $f: V \longrightarrow W$ morfismo de S-espacios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es mono propio

ii) El mapeo inducido $V_a \longrightarrow W_a$ es injectivo para toda $a \in S_0$.

DEMOSTRACION:

"$i \Rightarrow ii$" Como f es mono podemos ver a f como inclusión $f(V) \cong V \subset W$

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V(a) \arrow[r] \arrow[d] & V(a^+) \arrow[r] \arrow[d] & V(a^+)/V(a) = V_a \arrow[d, "f_a"] \\ W(a) \arrow[r] & W(a^+) \arrow[r] & W(a^+)/W(a) = W_a \end{tikzcd}$$

Entonces f_a es injectiva sí y solo sí $W(a) \cap V(a^+) = V(a)$

pero
$$W(a)\cap V(a^+) = W(a)\cap\Big(\bigcap_{b>a} V(b)\Big) = \bigcap_{b>a} W(a)\cap V(b)$$

Como f es mono propio tenemos $V(b)=W(b)\cap V$ y por tanto:
$$\bigcap_{b>a} W(a)\cap V(b) = \bigcap_{b>a} W(a)\cap W(b)\cap V =$$
$$= W(a)\cap V = V(a)$$
entonces f_a es inyectiva para toda $a\in S_0$.

"ii ⇒ i" Se probará por inducción descendente sobre a que $V/V(a)\longrightarrow W/W(a)$ es inyectiva.

Si a es maximal se tiene que $V(a^+)=V$. Por lo tanto:
$$V/V(a) = V(a^+)/V(a) = V_a \longrightarrow W_a$$
que es inyectiva por hipótesis.

Si a no es maximal suponemos que $V/V(b)\longrightarrow W/W(b)$ es inyectiva para toda $b>a$.

Se tiene el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus_{b>a} V/V(b) \arrow[r] & \bigoplus_{b>a} W/W(b) \\
& V/V(a) \arrow[u] \arrow[r] & W/W(a) \arrow[u] \\
V_a = V(a^+)/V(a) = & \bigcap_{b>a} V(b)/V(a) \arrow[u] \arrow[r] & W_a \arrow[u] \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

pero $\bigoplus_{b>a} V/V(b) \longrightarrow \bigoplus_{b>a} W/W(b)$ es inyectiva

y también $V_a \longrightarrow W_a$ es inyectiva.
por lo tanto se tiene que $V/V(a) \longrightarrow W/W(a)$.
es inyectiva #

Utilizando el concepto de morfismo propio procederemos a probar que la categoría de los S-espacios tiene envolventes inyectivas. Para esto daremos la siguiente definición:

4.9 DEFINICION: Se dice que un S-espacio I es inyectivo si para todo mono propio $f: V \longrightarrow W$ y para todo morfismo $g: V \longrightarrow I$ existe un morfismo $h: W \longrightarrow I$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & W \arrow[d, dashed, "h"] \\ & I \end{tikzcd}$$

Obsérvese que I es inyectivo si para todo mono propio $f: V \longrightarrow W$ se tiene que $Hom(W, I) \longrightarrow Hom(V, I)$ es sobre.

Ejemplo:

El espacio k_a es inyectivo ya

que $f : V \longrightarrow W$ es un mono propio sí y sólo sí $(W/W(a))^* \longrightarrow (V/V(a))^*$ es sobre pero $(W/W(a))^* = \mathrm{Hom}(W, k_a)$ y $(V/V(a))^* = \mathrm{Hom}(V, k_a)$

4.10 PROPOSICION: Para cada S-espacio V, existe un S-espacio inyectivo I y un morfismo $f : V \longrightarrow I$ que es mono propio.

DEMOSTRACION:

Sea V un S-espacio y $a \in S_0$. Habíamos definido $V_a = V(a^+)/V(a)$. Podemos ver a V_a como S-espacio de la siguiente manera:

$$V_a(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq a \\ V_a & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sea d la dimensión de V_a entonces se tiene $V_a = k_a^d = \underbrace{k_a \oplus \cdots \oplus k_a}_{d \text{ veces}}$

Pero k_a es inyectivo, por lo tanto V_a es inyectivo. Definimos $I = \bigoplus_{a \in S_0} V_a$

Sea $f : V \longrightarrow \bigoplus_{a \in S_0} V_a$ donde $f = (f_a)$ y cada f_a es una extensión lineal arbitraria de la proyección canónica:

$$\begin{tikzcd} V(s) \subset V \arrow[r, "f_a"] & V_a = V(a^+)/V(a) \supset V_a(s) \\ \cup & \\ V(a^+) \arrow[uur, "\text{proyección canónica}"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, es suficiente demostrar que $V_b \longrightarrow I_b$ es inyectivo para toda $b \in S_0$ para que $f = (f_a)$ sea mono propio.

Pero $I_b = \left(\bigoplus_{a \in S_0} V_a\right)_b = \bigoplus_{a \in S_0} (V_a)_b$

ya que $V_a(b_1^+) = \bigcap_{c > b_1} V_a(c) \supset V_a(b_1) = V_a$

y

$$V_a(b_1^+)/V_a(b_1) = V_a/V_a = 0$$

También

$$V_a(b_2^+) = \bigcap_{c > b_2} V_a(c) \subset V_a(a) = 0$$

y

$$V_a(b_2^+)/V_a(b_2) = 0/0 = 0$$

además:

$$V_a(a^+) = \bigcap_{c > a} V_a(c) = V_a \quad \text{y} \quad V_a(a) = 0$$

de donde $V_a(a^+)/V_a(a) = V_a$

Por lo tanto $I_b = \bigoplus_{a \in S_0} (V_a)_b$, como

$(V_a)_b = 0$ si $a \neq b$ se tiene

$$I_b = \bigoplus_{a \in S_0} (V_a)_b = (V_b)_b = V_b$$

Entonces el mapeo inducido

$V_b \longrightarrow I_b = V_b$ es la identidad y por lo tanto f es mono propio //

Construiremos la envolvente inyectiva en un ejemplo concreto:

Sea S el conjunto con tres puntos no comparables

$$S = \quad \overset{\bullet}{a} \qquad \overset{\bullet}{b} \qquad \overset{\bullet}{c}$$

Sea $V = k^2 = ke \oplus kf$ donde e, f es la base canónica

Sean $V(a) = ke \qquad V(b) = k(e+f)$

$V(c) = kf$

En este ejemplo S_0 es el conjunto

$$S_0 = \begin{tikzcd} a & b & c \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Construiremos V_0, V_a, V_b, V_c.

$$V_0 = V(0^+)/V(0) = V(a) \cap V(b) \cap V(c)/0 =$$
$$= 0/0 = 0$$

$$V_a = V(a^+)/V(a) = k^2/ke = k\bar{f}$$

$$V_b = V(b^+)/V(b) = k^2/k(e+f) = k\bar{e}$$

aquí $\bar{e} + \bar{f} = 0$

$$V_c = V(c^+)/V(c) = k^2/kf = k\bar{e}$$

Entonces $I = k^3$

y

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f_a \text{ extensión}"] & V(a^+)/V(a) \\ V(a^+) \arrow[u, phantom, "\cup\!|"] \arrow[ur, "\text{proyección canónica}"'] & \end{tikzcd}$$

de donde $f = (f_a, f_b, f_a)$ es el siguiente morfismo:

$$f: V = k^2 \longrightarrow I = k^3$$
$$(xe + yf) \longmapsto (y\bar{f}, (x-y)\bar{e}, x\bar{e})$$

es decir $f(x,y) = (y, x-y, x)$

Probaremos que esta f es mono propio.

Teníamos que $I = k^3 = ku \oplus kv \oplus kw$ donde u, v, w son base canónica y $ku = V_a$, $kv = V_b$, $kw = V_c$.

Luego:

$$I(a) = 0 \oplus kv \oplus kw$$
$$I(b) = ku \oplus kw$$
$$I(c) = ku \oplus kv.$$

Como $V = ke + kf$ y $I = ku \oplus kv \oplus kw$ entonces

$$f: V \longrightarrow I$$
$$(xe + yf) \longmapsto yu + (x-y)v + xw$$

por tanto:

$$V \cap I(a) = f^{-1}(I(a)) = \{xe + yf \in V \mid y = 0\} = ke$$
$$V \cap I(b) = f^{-1}(I(b)) = \{xe + yf \in V \mid x - y = 0\} = k(e+f).$$

$$V \cap I(c) = f^{-1}(I(c)) = \{xe + yf \in V \mid x = 0\} =$$
$$= \Bbbk f$$

de donde f es mono.

Ahora daremos la definición de monomorfismo esencial, definiremos la envolvente inyectiva y probaremos que ésta es única hasta isomorfismo.

4.11 DEFINICION: Un morfismo de S-espacios $f: V \longrightarrow W$ es "mono esencial" si f es mono propio y satisface que si $g: W \longrightarrow X$ es morfismo de S-espacios tal que $g \circ f$ es mono propio entonces se tiene que g es mono propio.

4.12 LEMA: Sea $f: V \longrightarrow W$ un morfismo de S-espacios que induce biyecciones $V_a \xrightarrow[f]{\cong} W_a$ para cada $a \in S_0$. Entonces f es mono esencial.

DEMOSTRACION:

Sea $g: W \longrightarrow X$ y supongamos que $g \circ f$ es mono propio.

Se tiene que $g \circ f$ es mono propio sí y solo sí $g_a \circ f_a$ es inyectiva. Entonces los mapeos inducidos $W_a \to X_a$

son inyectivas sí y sólo sí g es mono propio #.

Obsérvese que para todo S-espacio V la inmersión construída $f: V \longrightarrow I$ donde I es inyectivo es un mono esencial.

4.13 DEFINICION: Si V es un S-espacio, una "envolvente inyectiva" de V es un mono esencial $f: V \longrightarrow I$ donde I es un S-espacio inyectivo.

4.14. PROPOSICION: Si $f: V \longrightarrow I$ y $g: V \longrightarrow J$ son envolventes inyectivas de V entonces existe un isomorfismo $u: I \longrightarrow J$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & I \arrow[d, dashed] \\ & J \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACION:

Como J es inyectivo, existe $u: I \longrightarrow J$ tal que $uf = g$. Como f es mono esencial y g es mono propio se tiene que u es mono propio.

Si
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_I"'] & J \\ I & \end{tikzcd}$$
y como u es mono propio, existe $r: J \to I$ tal que $ru = 1_I$

Entonces $J = u(I) \oplus r^{-1}(0)$

Probaremos que $r^{-1}(0) = 0$

Como $g: V \to J$, g es de la forma (g_1, g_2). Entonces $V \xrightarrow{g=(g_1,g_2)} u(I) \oplus r^{-1}(0)$

$$v \longmapsto (g_1(v), 0) = \\ = uf(v) = \\ = g(v)$$

Por tanto
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & u(I) \oplus r^{-1}(0) = J \arrow[d] \\ & u(I) \cong I \end{tikzcd}$$

Como g es mono esencial y f es mono propio se tiene $u(I) \oplus r^{-1}(0) \longrightarrow u(I)$ es mono propio y por tanto inyectivo, de donde $r^{-1}(0) = 0$ $\#$

En general si $f: V \to I$ es la envolvente inyectiva de V y $g: V \to J$ solo es un mono propio, se concluye que J = envolvente inyectiva $\oplus$ sumando directo. Esto es porque como $f: V \to I$ es la envolvente inyectiva entonces existe $u: I \to J$ tal que $uf=g$. Además como f es mono esencial y g es mono propio se sigue que u es mono propio.

Si
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_I"'] & J \\ I & \end{tikzcd}$$
entonces existe $r: J \to I$ tal que $ru = 1_I$.

De donde $J = u(I) \oplus r^{-1}(0)$. Pero en este caso $r^{-1}(0)$ no es necesariamente cero y la conclusión en este caso es que J = envolvente inyectiva $u(I) \oplus$ sumando directo.

La siguiente observación cuya demostración es trivial nos da un criterio útil para saber cuando un espacio inyectivo J es la envolvente inyectiva de un espacio V.

4.15 OBSERVACION: $V \subset J$ donde J es inyectivo y la inclusión es mono propio entonces J es la envolvente inyectiva de V si y sólo si no existen descomposiciones $J = J_1 \oplus J_2$ tales que $V \subset J_1$ y $J_2 \neq 0$.

Por último tenemos el siguiente

corolario:

4.16 COROLARIO: Todo S- espacio inyectivo V es isomorfo a una suma $\bigoplus_{a\in S_0} k_a^{d(a)}$.

DEMOSTRACION:

Sea V un S- espacio inyectivo. Entonces $V \longrightarrow \bigoplus_{a\in S_0} V_a$ es la envolvente inyectiva de V.

además $V_a \cong k_a^{\dim V_a}$. Si V es inyectivo se tiene que $V \cong \bigoplus_{a\in S_0} V_a$ #.

Hemos probado que la categoría de S-espacios tiene envolventes inyectivas.

Esto se necesita para demostrar el lema de reducción que analiza que pasa con los conjuntos de ancho tres.

En el capítulo III probamos que los conjuntos de ancho mayor o igual que cuatro son de tipo no acotado (lema 3.7) y también probamos que los conjuntos de ancho menor o igual que dos son de tipo finito (lema 3.6) ahora daremos una demostración de este lema utilizando las técnicas de Gabriel.

4.17 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado tal que existe $c \in S$ mínimo y V es una representación inescindible de S tal que $V(c) \neq 0$ entonces V tiene dimensión uno.

DEMOSTRACION:

Sea $c \in S$ mínimo y V una representación inescindible de S.

Como c es mínimo entonces $c < x$ para toda $x \in S$. Luego $V = V(c) \oplus V'$

Si $x \in S$ entonces $V(x) = V \cap V(x) =$

$= (V(c) \oplus V') \cap V(x) = V(c) \cap V(x) \oplus V' \cap V(x)$

Es decir $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ donde

$V_1(x) = V(c)$ y $V_2(x) = V' \cap V(x)$

Como V es inescindible se tiene que $V_1(x) = 0$ ó $V_2(x) = 0$. Pero $V_1(x) = V(c) \neq 0$. Entonces $V_2(x) = 0$.

Por lo tanto $V(x) = V(c)$ y entonces V tiene dimensión uno #.

4.18 COROLARIO: Las representaciones inescindibles diferentes de cero de los conjuntos de ancho uno son de dimensión uno. #

4.19 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho dos enton cuyo todo S-espacio inescindible tiene dimensión uno.

DEMOSTRACION:

Se hará por inducción sobre el número de puntos.

Si S es el conjunto que tiene dos puntos no comparables:

$$S = \quad \underset{a}{\cdot} \quad \overset{\cdot}{b}$$

entonces el S-espacio es:

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \cup & & \cup \\ V(a) & & V(b) \end{array}$$

Sean $u_1, \ldots, u_p$ base de $V(a) \cap V(b)$

$u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ base de $V(a)$

$u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_r$ base de $V(b)$

$u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r$ base de $V(a) + V(b)$

$u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r, x_1, \ldots x_s$ base de V

Por lo tanto:

$$V = ku_1 \oplus \ldots \oplus ku_p \oplus kv_1 \oplus \ldots \oplus kw_1 \oplus \ldots \oplus kx_1 \oplus \ldots \oplus kx_s$$

$$V(a) = ku_1 \oplus \ldots \oplus ku_p \oplus kv_1 \oplus \ldots \oplus kv_q$$

$$V(b) = ku_1 \oplus \ldots \oplus ku_p \qquad\qquad \oplus kw_1 \oplus \ldots \oplus kw_r$$

Sean $V_1 = ku_1, \ldots, V_p = ku_p$, $V_{p+1} = kv_1, \ldots,$

$V_{p+q+1} = kw_1, \ldots, V_{p+q+r+1} = kx_1, \ldots.$

Luego V_i es S-espacio de dimensión uno para toda $i = 1, \ldots, p+q+r+s$.

Sea $V' = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$ $\qquad V''' = V_{p+q+1} \oplus \dots \oplus V_{p+q+r}$

$V'' = V_{p+1} \oplus \dots \oplus V_{p+q}$ $\qquad V^{IV} = V_{p+q+r+1} \oplus \dots \oplus V_{p+q+r+s}$

Entonces $V = V' \oplus V'' \oplus V''' \oplus V^{IV}$

Por lo tanto los S-espacios inescindibles son:

$V_1, \dots, V_p$
$$\begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$V_{p+1}, \dots, V_{p+q}$
$$\begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$V_{p+q+1}, \dots, V_{p+q+r}$
$$\begin{tikzcd} & k & \\ 0 \arrow[ur] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$V_{p+q+r+1}, \dots, V_{p+q+r+s}$
$$\begin{tikzcd} & k & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Entonces los S-espacios inescindibles son de dimensión uno.

Supongamos que S tiene n puntos y que existen $a, b \in S$ mínimos.

Sea V una representación inescindible de S.

S.P.G. Existe $c \in S$ tal que $c > b$.

Olvidemos a c.

Como en el caso anterior $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ donde $\dim V_i = 1$ para toda $i = 1, \ldots, k$.

Definimos
$$V^- = \bigoplus_{V_i(b)=0} V_i \quad \text{y} \quad V^+ = \bigoplus_{V_i(b)\neq 0} V_i$$

Entonces $V = V^- \oplus V^+$

Además $V^+ = V^+(b)$

Por lo tanto $V^+ = V^+(b) \leq V(b) < V(c)$

pero $V(c) = V \cap V(c) = (V^- \oplus V^+) \cap V(c) =$
$= (V^- \cap V(c)) \oplus (V^+ \cap V(c)) = (V^- \cap V(c)) \oplus V^+$

Definimos $V_1(c) = V^- \cap V(c)$ y $V_2(c) = V^+$

Como V es inescindible y $V^+(b) \neq 0$ entonces $V^- = 0$

Por lo tanto $V(b) = V(c) = V$

Luego $V = V^+$ y entonces $\dim V = 1$

#

Si S es un conjunto de ancho menor o igual que dos hemos probado que todas sus representaciones inescindibles tienen dimensión uno. O sea, si V es un S-espacio, la dimensión de V es uno y entonces para algunos puntos $s \in S$ tenemos que $V(s) = 0$ y para las demás $s \in S$ tenemos $V(s) = V$.

Luego podemos definir el conjunto $T = \{s \in S \mid V(s) = 0\}$.

Observemos que si $V(s)=0$ y $s'\leq s$ se tiene que $V(s')=0$

Esto nos sirve como motivación para dar la siguiente definición:

4.20 DEFINICION: Una "sección" de un conjunto parcialmente ordenado S es un subconjunto $T\subset S$ tal que si $s\in T$ y $s'\leq s$ entonces $s'\in T$

En el párrafo anterior a la definición, asignamos una sección T a cada inescindible V de S. También es posible asociar a cada sección T un inescindible k_T simplemente tomando $k_T = k$ y definiendo:

$$k_T(s) = \begin{cases} 0 & s\in T \\ k & s\notin T \end{cases}$$

Esto es, existe una biyección entre las clases de isomorfía de las inescindibles de S y las secciones de S.

Ejemplo:

Si S es el conjunto $S = \quad \underset{a}{\bullet} \qquad \begin{matrix} \bullet\, c \\ \uparrow \\ \underset{b}{\bullet} \end{matrix}$

Las secciones de S son:

$\emptyset$; $\{a\}$ que denotaremos $\{a\} = a$; $\{b\} = b$; $\{b,c\}$ que está determinada por c, por lo que escribimos $\{c,b\} = c$; $\{a,b\} = a \cup b$; $\{a,b,c\} = a \cup c$.

Las inclusiones entre las secciones son:

$$\tilde{S} \qquad \begin{tikzcd}
a \cup c & \\
a \cup b \arrow[u] & c \arrow[ul] \\
a \arrow[u] & b \arrow[ul] \arrow[u] \\
& \emptyset \arrow[ul] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Se tiene que si $\tilde{S}$ es el conjunto de secciones de $S \setminus \{\emptyset\}$ entonces $\tilde{S}$ está parcialmente ordenado por las inclusiones.

4.21 DEFINICION: Si S es un conjunto parcialmente ordenado y V es un S-espacio construimos el $\tilde{S}$-espacio $\tilde{V}$ de la siguiente manera:

El espacio total $\tilde{V} = V$ y $\tilde{V}(a) = V(a)$ si $a \in S$, y $\tilde{V}(a \cup b) = V(a) + V(b)$ si $b, a \in S$. Esto define un funtor de la categoría de los S-espacios en la categoría de $\tilde{S}$-espacios.

4.22 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho menor o igual que dos entonces el funtor $V \longmapsto \tilde{V}$ es una equivalencia de la categoría de los S-espacios en la categoría de los $\tilde{S}$-espacios inyectivos.

DEMOSTRACION:

Sea V un S-espacio entonces V es suma de S-espacios inescindibles de dimensión uno.

Pero S tiene ancho menor o igual que dos entonces los S-espacios de dimensión uno son de la forma k_T

además, si $\tilde{V}$ es un $\tilde{S}$-espacio inyectivo también se tiene que $\tilde{V}$ es suma de $\tilde{S}$-espacios inyectivos de dimensión uno que están en correspondencia con $(\tilde{S})_0$ que es igual a $\tilde{S}$ más un elemento minimal. Luego los $\tilde{S}$ espacios inyectivos de dimensión uno son de la forma $\tilde{k}_T$.

Es claro que el funtor $V \longmapsto \tilde{V}$ manda inescindibles en inescindibles y morfismos entre inescindibles en morfismos entre inescindibles. Por lo tanto el funtor manda sumas de inescindibles en sumas de inescindibles $\#$

Ahora probaremos que el funtor $V \mapsto V(m)$ restringido a los S-espacios m-plenos es de representación fiel (DEFINICION 2.6).

Usaremos las siguientes observaciones:

Sea V un S-espacio m-pleno. Entonces $V|T$ es T-espacio. Recordemos que el ancho de T es menor o igual que dos.

Definimos el $\tilde{T}$-espacio $\widetilde{V|T}$ de la siguiente manera:

El espacio total es V y se tiene que:

$$\widetilde{V|T}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } x \in T \\ V(y) + V(z) & \text{si } x = y \cup z \end{cases}$$

En lugar de $\widetilde{V|T}$ escribiremos $\tilde{V}$.

Por lema 4.22 se tiene que $\tilde{V}$ es $\tilde{T}$-espacio inyectivo. Nótese que $V(m) \subset V$ donde $V(m)$ es $S(m)$-espacio y $\tilde{T} \subset S(m)$, luego $V(m)|\tilde{T} \subset \tilde{V}$ como $\tilde{T}$-espacio.

Aquí también escribiremos $V(m)$ en lugar de $V(m)|\tilde{T}$.

Lo que se afirma es que $\tilde{V}$ es la envolvente inyectiva de $V(m)$ como $\tilde{T}$-espacio.

En efecto, la inclusión es mono propio, por lo tanto $V(m)$ es subespacio propio de $\tilde{V}$ como $\tilde{T}$-espacio.

además para toda $x \in \tilde{T}$, $V(m)(x) = V(m) \cap \tilde{V}(x)$ es decir, $V(m) \hookrightarrow \tilde{V}$ es mono propio en un $\tilde{T}$-espacio inyectivo.

Como V es m-pleno, no existen V_1, V_2 S-espacios tales que $V = V_1 \oplus V_2$ y $V(m) \subset V_1(m)$ y $V_2 \neq 0$.

Y esto pasa si y sólo si no existen W_1, W_2 $\tilde{T}$-espacios tales que $\tilde{V} = W_1 \oplus W_2$ y $V(m) \subset W_1$.

Lo cual prueba que $\tilde{V}$ es el $\tilde{T}$-espacio inyectivo mas chico que contiene a $V(m)$ propiamente. Es decir $\tilde{V}$ es la envolvente inyectiva de $V(m)$ como $\tilde{T}$-espacio.

4.23 TEOREMA: El funtor $V \longmapsto V(m)$ restringido a los S-espacios m-plenos es de representación fiel.

DEMOSTRACION

"i)" Probaremos que el funtor es pleno. Sean V, W S-espacios m-plenos. Sea $f: V(m) \longrightarrow W(m)$ morfismo de $S(m)$-espacios. Se quiere encontrar un morfismo $g: V \longrightarrow W$ de S-espacios tal que $g(m) = f$.

Sea $\tilde{V}$ la envolvente inyectiva de $V(m) \mid \tilde{T}$ y $\tilde{W}$ la envolvente inyectiva de $W(m)|\tilde{T}$. Entonces se tiene el siguiente cuadro:

$$\begin{tikzcd} V(m)|\tilde{T} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \tilde{V} \arrow[d, "g"] \\ W(m)|\tilde{T} \arrow[r] & \tilde{W} \end{tikzcd}$$

donde g es un morfismo entre las envolventes inyectivas que extiende a f.
Aquí g es morfismo de $\tilde{T}$- espacios por lo tanto si $x \in \tilde{T}$ se tiene que $g: \tilde{V}(x) \longrightarrow \tilde{W}(x)$. Y queremos que si $y \in S$, $\tilde{V}(y) \xrightarrow{g} \tilde{W}(y)$

Esto es cierto si $y \in T$

ahora si $y \in \hat{m}$ se tiene:

$$\begin{array}{ccc} V(y) & \subset & V(m) \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ W(y) & \subset & W(m) \end{array}$$

donde $g|$ es igual a f en $V(m)$ (f es morfismo de $S(m)$ - espacios).

(ii) Que el funtor refleja isos se prueba como sigue:

Sea $f: V \longrightarrow W$ un morfismo de S-espacios m- plenos. Supongamos $f(m): V(m) \longrightarrow W(m)$ es isomorfismo. Queremos que f sea isomorfismo, o sea que para toda $s \in S$, $f(s): V(s) \longrightarrow W(s)$ sea isomorfismo.

1er Caso: $s \in \tilde{T}$. Por las observaciones anteriores se tiene que si $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ son las envolventes inyectivas de $V(m)$ y de $W(m)$ como $\tilde{T}$-espacios, entonces $V = \tilde{V}$ y $W = \tilde{W}$.

Por lo tanto se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V(m) & \longrightarrow & V = \tilde{V} \\ {\scriptstyle f(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W(m) & \longrightarrow & W = \tilde{W} \end{array}$$

Aquí f es la extensión de $f(m)$ a las envolventes inyectivas o sea f es un isomorfismo de $\tilde{T}$-espacios. Luego f es biyectiva y por tanto $f(s): V(s) \longrightarrow W(s)$ es iso para toda $s \in \tilde{T}$.

2º Caso: $s \notin \tilde{T}$. Entonces $s \leq m$ y tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V(s) & \subset & V(m) \\ \cong\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(m)} \\ W(s) & \subset & W(m) \end{array}$$

donde $f(m)$ es iso de $S(m)$-espacios.

Luego f es iso de S-espacios m-ple

nos.

"iii)" y por último se prueba que el funtor es denso.

Sea U un $S(m)$-espacio. Se quiere un S-espacio V' m-pleno tal que $V'(m) = U$.

Sea I la envolvente inyectiva de $U|\tilde{T}$. Por lema 4.22 existe V T-espacio tal que $I = \tilde{V}$. Como $\tilde{V}$ es la envolvente inyectiva de $U|\tilde{T}$ se tiene que la inclusión $U|\tilde{T} \hookrightarrow \tilde{V}$ es un mono propio, por lo tanto para toda $s \in \tilde{T}$, $U(s) = \tilde{V}(s) \cap U$.

Definimos el S-espacio V' de la siguiente manera:

El espacio total es U y además

$$V'(s) = \begin{cases} U & s = m \\ U(s) & s < m \\ V(s) & s \in T \end{cases}$$

Se afirma que $V'(m) = U$.

Aquí el espacio total $V'(m) = U$

Consideremos los siguientes casos:

Primero, si $s < m$ se sigue que $V'(m)(s) = V'(s) = U(s)$

Segundo, si $s \in T$ tenemos que $V'(m)(s) = V'(s) \cap V'(m) = V(s) \cap U =$
$= \tilde{V}(s) \cap U = U(s)$.

Tercero, si $x, y \in T$ y $s = x \cup y$ entonces
$V'(m)(s) = (V'(x) + V'(y)) \cap V(m) =$
$= (V(x) + V(y)) \cap V(m) = \tilde{V}(x \cup y) \cap U =$
$= U(x \cup y)$.

y recordando la definición del funtor $V \longmapsto V(m)$ se tiene que $V'(m) = U$

#

Con este teorema queda demostrado el lema de reducción ya que como el funtor $V \longmapsto V(m)$ es de representación fiel entonces induce una biyección entre los S- espacios inescindibles m-plenos y los $S(m)$- espacios inescindibles. Esto es, un conjunto S y su derivado $S(m)$ tienen del mismo tipo de representación.

4.24 COROLARIO: $\nu(s)$ denotará el número de clases de isomorfía de S-espacios inescindibles. Entonces del lema de reducción se deduce que:

$$\nu(s) = \nu(S(m)) + \operatorname{card} \tilde{T} + 1$$

DEMOSTRACION:

Esta fórmula se deduce fácilmente del lema de reducción ya que si W es un S- espacio inescindible tal que $W(m) = 0$ se tiene que para toda $x \notin T$, $W(x) \neq 0$. Entonces W se puede ver como T-espacio extendido por 0 para toda $x \in A$. Luego se tienen tantas clases de isomorfía de tales W inescindibles como T-espacios inescindibles. Pero el número de T-espacios inescindibles es igual al número de puntos en $(\tilde{T})_0 = \operatorname{card} \tilde{T} + 1$.

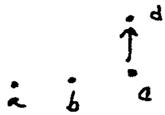
Es decir $\nu(S) = \nu(S(m)) + \operatorname{card} \tilde{T} + 1$

#

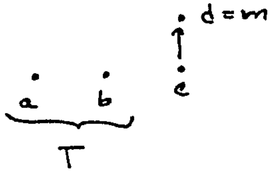
Nótese que $\nu(S) > \nu(S(m))$ y por lo tanto $S(m)$ es más simple.

Para terminar este capítulo veamos un par de ejemplos de aplicaciones del lema de reducción.

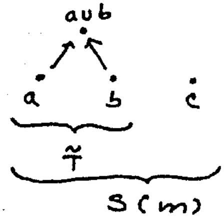
Ejemplo 1: Sea S el conjunto



Afirmamos que hay solo un número finito de clases de isomorfía de S-espacios inescindibles. Como antes $\nu(S)$ denotará el número de clases de isomorfía de S-espacios inescindibles. Entonces

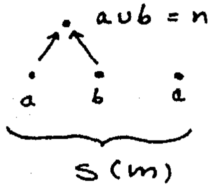


Derivando con respecto a m.



$$\nu(S) = \nu(S(m)) + \operatorname{card} \tilde{T} + 1$$
$$= \nu(S(m)) + 4$$

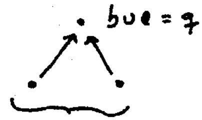
Ahora



$$\nu(S(m)) = \nu(S(m)(n)) + 2$$

$$p = \underbrace{a \quad b \quad c}_{S(m)(n)}$$

$$\nu(S(m)(n)) = \nu\, S(m)(n)(p) + 4$$



$S(m)(n)(p)$

$$\underbrace{r = \dot{b} \qquad \dot{c}}_{S(m)(n)(p)(q) := S(m,n,p,q)} \qquad \nu(S(m,n,p)) = \nu(S(m,n,p,q))+1$$

$$\underbrace{s = \dot{c}}_{S(m,n,p,q,r)} \qquad \nu(S(m,n,p,q)) = \nu(S(m,n,p,q,r))+2$$

$$\underset{S(m,n,p,q,r,s)}{\phi} \qquad \nu(S(m,n,p,q,r)) = \underbrace{\nu(S(m,n,p,q,r,s)}_{1}+1$$

O sea $\qquad \nu(S) = 4+2+4+1+2+1+1 = 15$

Vamos a describir las inescindibles

Sabemos que las inescindibles de dimensión uno son de la forma k_T donde S es de ancho tres y T son las secciones de S.

Las secciones de S son: ϕ, $a=\{a\}$, b, c, $d=\{d,c\}$, $a\cup b$, $a\cup c$, $a\cup d$, $b\cup c$, $b\cup d$, $a\cup b\cup c$, $a\cup b\cup d$.

Estas son doce y corresponden a las inescindibles de dimensión uno.

Ahora hay que aumentar las inescindibles de dimensión dos que son las siguientes:

Si $V = k^2 = ke \oplus kf$ se tiene

$$V(a) = ke \;,\quad V(b) = kf \;,\quad V(c) = 0 \;,\quad V(d) = \Delta$$

o

$$V(a) = ke \;,\quad V(b) = kf \;,\quad V(c) = V(d) = \Delta$$

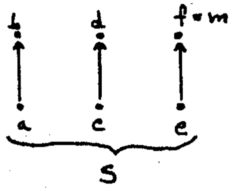
o bien

$$V(a) = ke \;,\quad V(b) = kf \;,\quad V(c) = \Delta \;,\quad V(d) = k^2$$

O sea, hay tres inescindibles de dimensión dos. y por lo tanto tenemos 15 inescindibles en total.

Luego S es de tipo de representación finito.

Ejemplo 2: Sea S el conjunto



Entonces T es:

$$\begin{tikzcd} b & d \\ a \arrow[u] & c \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Luego

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & b\cup d & & & \\ & b\cup c \arrow[ur] & & a\cup d \arrow[ul] & & \\ b \arrow[ur] & & a\cup c \arrow[ul] \arrow[ur] & & d \arrow[ul] & \\ & a \arrow[ul] \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \arrow[ur] & & e \end{tikzcd}$$

$\tilde{T}$

$S(m)$

Por tanto $\nu(S) = \nu(S(m)) + 9$

Pero el ancho de $S(m)$ es cuatro ya que los elementos b, $a\cup c$, d, e no se comparan.

Se afirma que hay infinitas representaciones inescindibles:

Sea $V = ke + kf$

Entonces

$V(b) = ke \qquad V(a\cup c) = kf$

$V(d) = k(e+f) \qquad V(e) = k(e+\lambda f)$ donde $\lambda \in k$.

Además $V(a) = V(c) = 0$

$V(b\cup c) = V(a\cup d) = V(b\cup d) = ke + kf$

Como $\lambda \in k$ tenemos infinitas posibilidades y por tanto

$$\gamma(S) = \infty + 9 = \infty$$

Es decir S es de tipo de representación infinita.

En el siguiente capítulo analizaremos los conjuntos de ancho tres.

V. ANALISIS DE LOS CONJUNTOS DE ANCHO TRES.

Hasta ahora hemos probado que los conjuntos de ancho menor o igual que dos son de tipo finito y que los conjuntos de ancho mayor o igual que cuatro son de tipo no acotado. En este capítulo probaremos que todo conjunto de ancho tres se puede llevar a un conjunto de ancho dos, o de ancho cuatro derivándolo un número finito de veces [N-R].

Con el análisis de los conjuntos de ancho tres terminaremos la prueba de la segunda conjetura de Brauer-Thrall para conjuntos parcialmente ordenados.

5.1 DEFINICION: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho tres decimos que S se "expande" si al ir derivando S se llega a un conjunto que contiene a un subconjunto que en un número finito de pasos se puede llevar a un conjunto de ancho mayor que tres.

5.2 DEFINICION: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho tres decimos que S se "contrae" si algún derivado de S es vacío.

Como los conjuntos de ancho dos se pueden desaparecer derivándolos; en la definición anterior únicamente pediremos que al derivar el conjunto S se llegue a un conjunto de ancho dos.

Los conjuntos se pueden derivar respecto a diferentes puntos. Entonces podría darse el caso de que un conjunto se contrajera y se expandiera a la vez. Pero por el lema de reducción esto no es posible.

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema.

6.3 TEOREMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho tres entonces S se contrae o se expande #

La prueba de este teorema se hará suponiendo que existen conjuntos parcialmente ordenados de ancho tres que ni se contraen ni se expanden. Entre estos conjuntos debe existir uno de cardinal menor. Entonces tenemos la siguiente definición.

5.4 DEFINICION: Un conjunto parcialmente ordenado S de ancho tres se dice que es "crítico" si S no se expande ni se contrae y todos los conjuntos de cardinal menor se expanden o se contraen.

Lo que se quiere demostrar entonces es que los conjuntos críticos no existen.

5.5 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho tres entonces:

i) S es de tipo infinito si S se expande.

ii) S es de tipo finito si y sólo si S se contrae.

DEMOSTRACION:

"i)" Trivial

"ii)" "$\Rightarrow$" Supongamos que S es de tipo finito. Entonces tiene un número finito de representaciones inescindibles. Por el corolario 4.24 al ir derivando S vamos perdiendo inescindibles hasta llegar a algún derivado de S con cero inescindibles. Este derivado es el vacío y por lo tanto S se contrae.

"$\Leftarrow$" Trivial.

#

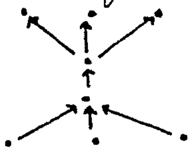
De este lema también se deduce que un conjunto no se puede contraer y expander al mismo tiempo.

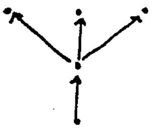
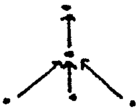
5.6 DEFINICION: Sea S un conjunto parcialmente ordenado que es unión de dos subconjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ y sea $\mathcal{V} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Decimos que S se "escinde" si $\mathcal{V}$ es un conjunto de ancho uno y para toda $b \in \mathcal{B} - \mathcal{V}$ y $c \in \mathcal{C} - \mathcal{V}$ se tiene que $c < b$.

En este caso escribimos $S = \mathcal{B} + \mathcal{C} - \mathcal{V}$

Ejemplo:

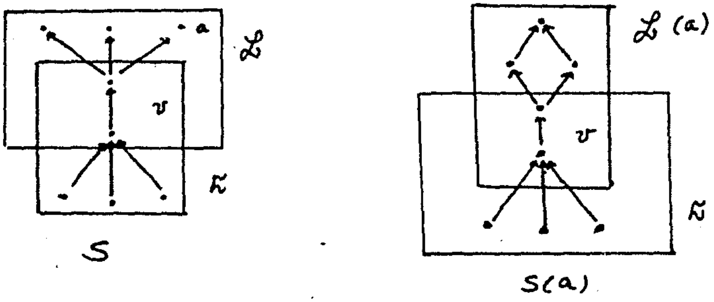
S es el conjunto



$\mathcal{B}$ =  y $\mathcal{C}$ = 

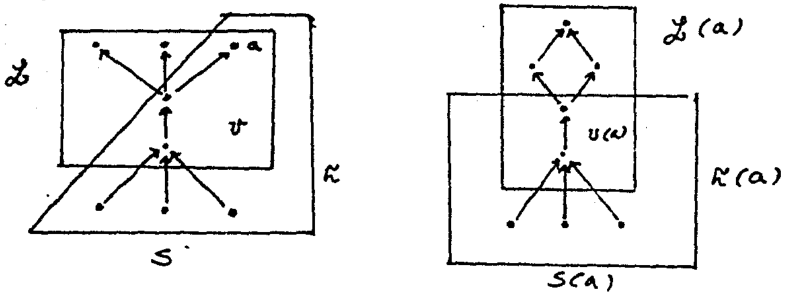
luego S se escinde.

Veamos en el ejemplo anterior qué pasa con los puntos nuevos al definir el conjunto S.



Es decir $S(a) = (\mathcal{L} + \tilde{N} - v)(a) = \mathcal{L}(a) + \tilde{N} - v$.

Y escribiendo el conjunto S de la siguiente manera:



En este caso se obtiene que $S(a) =$
$= (\mathcal{L} + \tilde{N} - v)(a) = \mathcal{L}(a) + \tilde{N}(a) - v(a)$

5.7 AFIRMACION. Si $S = \mathcal{L} + \mathcal{R} - \mathcal{U}$ es un conjunto escindible y $b \in S$ maximal se tiene que:

i) Si $b \in \mathcal{L} - \mathcal{U}$ entonces $(\mathcal{L} + \mathcal{R} - \mathcal{U})(b) = \mathcal{L}(b) + \mathcal{R} - \mathcal{U}$

ii) Si $b \in \mathcal{U}$ entonces $(\mathcal{L} + \mathcal{R} - \mathcal{U})(b) = \mathcal{L}(b) + \mathcal{R}(b) - \mathcal{U}(b)$

DEMOSTRACION:

"i)" Supongamos que $b \in \mathcal{L} - \mathcal{U}$

De la definición de conjunto derivado se obtiene que si $a = x \cup y$ con $x, y \in S$ entonces $a \notin \mathcal{R}$ ya que $b > c$ para toda $c \in \mathcal{R}$. Luego $a \notin \mathcal{U}$. Entonces $a \in \mathcal{L}(b)$

Si $b \neq a \in S$ entonces $a \in \mathcal{L}(b) + \mathcal{R} - \mathcal{U}$

Además $\mathcal{L}(b) \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{U}$

"ii)" Supongamos que $b \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{U}(b) = \mathcal{U} - \{b\}$. Como $b \in \mathcal{R}$ y $b > c$ para toda $c \in \mathcal{R}$ entonces $\mathcal{R}(b) = \mathcal{R} - \{b\}$

y si $a = x \cup y$ con $x, y \in S$ entonces $a \in \mathcal{L}(b)$

Además $\mathcal{L}(b) \cap \mathcal{R}(b) = (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) - \{b\} =$

$= \mathcal{U} - \{b\} = \mathcal{U}(b)$.

y en los dos incisos anteriores es claro que se tiene un morfismo de orden biyectivo. #

Con esta afirmación hemos probado que las derivaciones de un conjunto escindible son a su vez escindibles y que las "componentes" $\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{U}}$ de las derivadas son derivaciones de $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{U}$.

5.8 LEMA: Si $S = \mathcal{L} + \mathcal{K} - \mathcal{U}$ es un conjunto escindible entonces S se contrae si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{K}$ se contraen.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{K}$ se contraen. Por lo tanto algún derivado de $\mathcal{L}$ es vacío. Por la afirmación 5.7 si tomamos la correspondiente derivación de S, ésta debe coincidir con alguna derivación de $\mathcal{K}$. Por el lema de reducción sabemos que un conjunto y su derivado son del mismo tipo de representación. Entonces S y $\mathcal{K}$ son del mismo tipo de representación.

Como $\mathcal{K}$ se contrae se tiene por el lema 5.5 que $\mathcal{K}$ es de tipo finito. Luego S es de tipo finito y de nuevo por lema 5.5, S se contrae. #

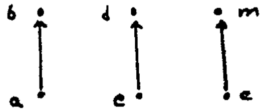
5.9 DEFINICION: Un conjunto parcialmente ordenado S de ancho tres se llama "primitivo" y se denota (r,s,t) si S está formado por los elementos $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t$ con el orden $a_i < a_j$, $b_i < b_j$, $c_i < c_j$ si $j < i$ y éstas son las únicas relaciones de orden.

Es decir, S está formado por tres cadenas

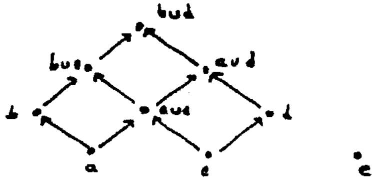
6.10 LEMA: Los conjuntos (2,2,2), (1,3,3) y (1,2,5) se expanden.

DEMOSTRACION:

"i)" Sea S el conjunto

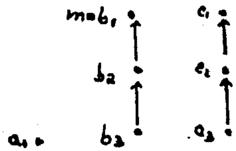


entonces S(m) es

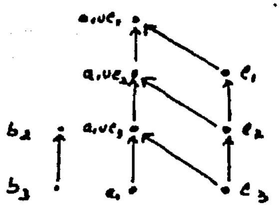


Aquí el subconjunto {b, ave, d, e} tiene ancho 4.

"ii)" Si S es

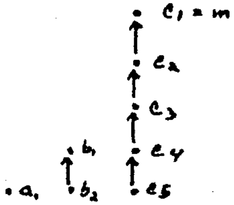


entonces S(m) es:

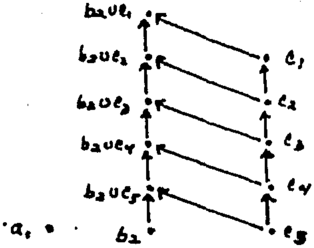


Como el subconjunto $\{b_2, b_3, a_1, a_1 \cup e_3, e_1, e_2\}$ es isomorfo a $(2,2,2)$ que se expande entonces S se expande.

"iii r" Si S es



luego $S(m)$ es:



Como el subconjunto $\{a_1, b_2 \cup e_4, b_2 \cup e_5, b_2, e_1, e_2, e_3\}$ es isomorfo a $(1,3,3)$ que se expande.

entonces S se expande #

La siguiente afirmación no se necesita pero es muy divertida.

5.11 AFIRMACION: Los conjuntos $(1,1,t)$ para toda $t \in \mathbb{N}$ y los conjuntos $(1,2,t)$ para $t \leq 4$ son de tipo finito.

DEMOSTRACION:

Utilizaré el lema de reducción para probar que estos conjuntos se pueden derivar a conjuntos de ancho menor o igual que dos. Por comodidad omitiré los nombres de los puntos y de los conjuntos. Encerraré en un circulito el punto con respecto al cual se está derivando.

"i)" $(1,2,1)$

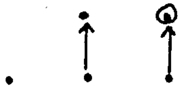
1) 

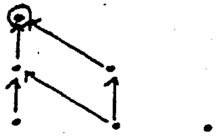
2) 

3) 

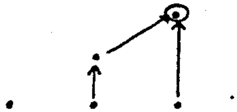
4)  que tiene ancho dos

"ii)" (1,2,2)

1) 

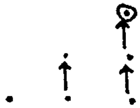
2) 

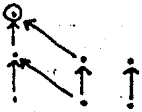
3) 

4) 

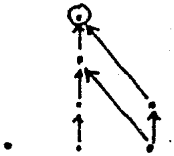
5)  que es de tipo (1,2,1)

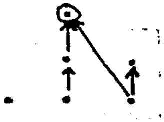
"iii)" (1,2,3)

1) 

2) 

3) 

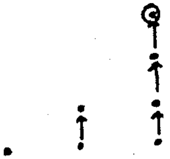
4) 

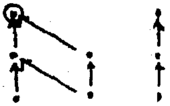
5 

6) 

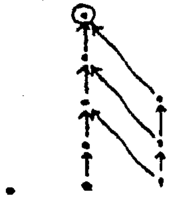
7)  que es de tipo (1,2,2)

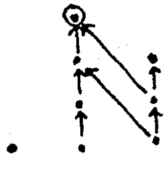
"iv)" (1,2,4)

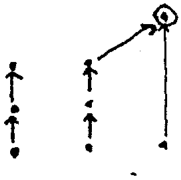
1) 

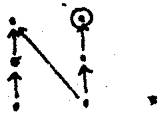
2) 

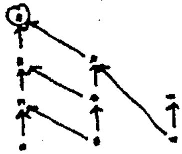
3) 

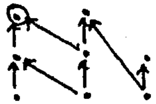
4) 

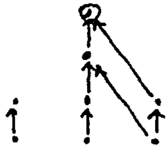
5) 

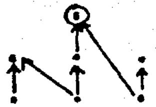
6) 

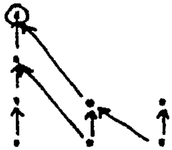
7) 

8) 

9) 

10) 

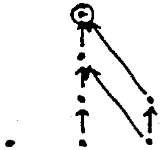
11) 

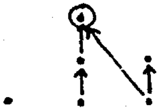
12) 

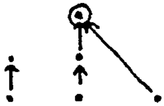
13) 

14) 

15) 

16) 

17) 

18) 

19) 

que es de tipo (2,2,1)

"$\Leftarrow$" Demostraremos que $(1,1,t)$ es de tipo finito para toda $t \in \mathbb{N}$

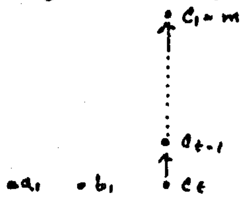
Inducción.

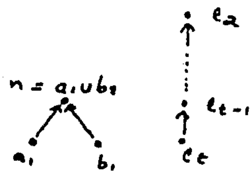
Si $t = 1$

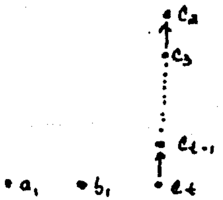
1) 

2)  que tiene ancho dos.

Supongamos que $(1,1,t-1)$ es de tipo finito.

$S =$ 

$S(m) =$ 

$S(m)(n) =$ 

que es de tipo $(1,1,t-1)$ #

5.12 LEMA: Si S es un conjunto crítico entonces S tiene tres elementos maximales

DEMOSTRACION:

Supongamos que S sólo tiene un punto $x \in S$ maximal. Por lo tanto $S(x) = S - \{x\}$ y el ancho de $S(x)$ es tres. Como el número de puntos en $S(x)$ es igual al número de puntos en S menos uno entonces $S(x)$ se contrae o se expande. Luego S no es crítico y esto es una contradicción.

Entonces S tiene al menos dos puntos a y b maximales.

Definimos los siguientes conjuntos:

$S^a = \{ j \in S \mid j$ no es comparable con $a \}$

$S^b = \{ k \in S \mid k$ no es comparable con $b \}$

Se afirma que S^a tiene ancho uno o bien S^b ~~tiene~~ tiene ancho uno.

Supongamos que S^a y S^b tienen ambos ancho mayor que uno. Luego existen $x, y \in S^a$ no comparables entre sí y existen $u, v \in S^b$ no comparables. Como x, y, u, v no son maximales se tiene que $x < b$, $y < b$ y $u < a$, $v < a$. Además x, y, u, v no son comparables entre sí ya que si $x < u$ se tendría que $x < a$ porque $u < a$, lo cual contradice que $x \in S^a$. Similarmente se prueba que los otros puntos no se comparan.

Como x, y, u, v no se comparan entre sí se tiene que S tiene ancho mayor o igual que cuatro. Lo cual también es una contradicción.

Entonces S^a tiene ancho uno o bien S^b tiene ancho uno.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que S^a tiene ancho uno. Entonces $S(a) = S - \{a\}$. Luego $S(a)$ tiene un punto menos que S. Entonces $S(a)$ se expande o se contrae. Y esto contradice que S es crítico.

Por lo tanto S tiene tres maximales

#

5.13: LEMA (DILWORTH) [Ai]: Todo conjunto parcialmente ordenado finito S de ancho n se puede representar como unión ajena de n cadenas.

DEMOSTRACION:

Sea $U(S)$ el conjunto de todos los subconjuntos de S formados por elementos no comparables en S.

La demostración se hará por inducción sobre el número de puntos en S.

Si S tiene un punto, el lema es obvio.

Supongamos que el lema es cierto para todos los conjuntos parcialmente ordenados Q con menos puntos que S.

1er Caso: Existe un conjunto $u \in \mathcal{U}(S)$ de ancho n que no tiene a todos los maximales ni a todos los minimales de S.

Definimos S^+ y S^- como sigue:

$S^+ = \{ p \in S \mid p \geq x$ para alguna $x \in u \}$

$S^- = \{ p \in S \mid p \leq x$ para alguna $x \in u \}$

Las hipótesis en u implican que $S^+ \neq S$, $S^- \neq S$, $S = S^+ \cup S^-$ y $u = S^+ \cap S^-$

Por hipótesis de inducción se tiene que existen $C_1', \ldots, C_n'$ cadenas tales que $S^+ = \dot{\cup}\, C_i'$ y existen $C_1'', \ldots, C_n''$ cadenas tales que $S^- = \dot{\cup}\, C_i''$

Entonces $S = \dot{\cup}\, C_i$ donde $C_i = C_i' \cup C_i''$

2° Caso: Los conjuntos en $\mathcal{U}(S)$ con n puntos contienen a todos los maximales o a todos los minimales.

Sea $A \in \mathcal{U}(S)$ que contiene a todos los maximales y $B \in \mathcal{U}(S)$ que contiene a todos los minimales.

Uno tiene ancho n y el otro tal vez no.

Sean $a \in A$ y $b \in B$ tales que $b \leq a$.
Por hipótesis de inducción existen $C_1, \ldots, C_{n-1}$ cadenas tales que $S - \{a, b\}$ es la unión $\dot{\cup} C_i$

Definimos $C_n = \{a, b\}$

Entonces $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} C_i$

//

Este lema nos permite escribir a los conjuntos críticos S como uniones de tres cadenas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Denotemos a los elementos de estas cadenas por $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t$ respectivamente donde $a_i < a_j$, $b_i < b_j$ y $c_i < c_j$ para $i > j$. Es claro que aquí sí puede haber otras relaciones. Además denotaremos a los elementos maximales de S que son tres, por a, b, c.

5.14 DEFINICION: En un conjunto parcialmente ordenado S la colección de puntos que son menores o iguales que su único maximal se llama "vértice de S" y se denota $V(S)$.

La definición anterior es importante porque al derivar un conjunto S, los puntos nuevos son los supremos formales de los puntos del vértice de S.

Obsérvese que como los conjuntos críticos tienen tres maximales, su vértice es un conjunto primitivo.

Ahora estamos listos para probar el teorema 5.3. Para esto analizaremos el vértice de los conjuntos críticos.

5.15 LEMA: Si S es un conjunto que no se expande entonces su vértice es de uno de los siguientes tipos:

1) $V(S) = (1,1,k)$ $k \in \mathbb{N}$

2) $V(S) = (1,2,2)$

3) $V(S) = (1,2,3)$

4) $V(S) = (1,2,4)$.

DEMOSTRACION:

Por el lema 5.10 si el vértice de S no fuera de uno de estos tipos, tendríamos que S se expandería #

Analizaremos cada uno de estos cuatro casos. Los cálculos siguientes facilitan este análisis.

Supongamos que $S = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es de ancho tres. Sean a_2, b_2, c_2 elementos de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ respectivamente donde alguno de estos puntos puede no existir.

Si todos existen, al menos uno de los puntos a_2, b_2, c_2 tiene que ser menor que al menos uno de los puntos a_1, b_1, c_1 porque si no es así, S contendrá al subconjunto $(2,2,2)$ que se expande. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que b_2 no existe o que $b_2 < a_1$.

Entonces $S(a_1) = (S - \{a_1\}) \cup \{(b_1 \cup c_i) \mid i = 1, \ldots, t\}$
Como $b_1 \cup c_1 \in S(a_1)$ es maximal y se compara con todos los puntos de $S(a_1)$ excepto quizá con algunos puntos del conjunto original S. Luego se tiene que $S(a_1)(b_1 \cup c_1) = S(a_1) - \{(b_1 \cup c_1)\} =$
$= (S - \{a_1\}) \cup \{(b_1 \cup c_i) \mid i = 2, \ldots, t\}$

Denotaremos a $S(a_1)(b_1 \cup c_1)$ por $\overline{S(a_1)}$

Ahora establecemos estas conclusiones como lema.

5.16 LEMA: Si S es un conjunto parcialmente ordenado de ancho tres donde b_2 no existe ó $b_2 < a_1$ entonces S se contrae (expande) si y sólo si

$\overline{S(a_1)}$ se contrae (expande) #

5.17 LEMA: Si S es un conjunto crítico entonces $V(S) \neq (1,1,p)$ para toda $p \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $V(S) = (1,1,p)$. Sea $V(S) = \{a_1, \ldots, a_p, b_1, c_1\}$

1er Caso: b_2 no existe o $b_2 < a_1$

Por lema 5.16 tenemos que $\overline{S(a_1)} = S - \{a_1\}$ Como S no se contrae ni se expande se tiene que $\overline{S(a_1)}$ tampoco pero $\overline{S(a_1)}$ tiene un punto menos que S, lo que contradice que S sea crítico.

2a Caso: c_2 no existe o $c_2 < a_1$

Este caso es idéntico al anterior sólo cambiando la notación.

3a Caso: b_2, c_2 existen y ninguno de ellos es menor que a_1.

Como $b_2 \notin V(S)$ entonces $b_2 < c_1$. Similarmente $c_2 < b_1$.

Definimos $X = \{c_1, b_1, a_1, \ldots, a_r\}$

$Y = \{b_2, \ldots, b_s, c_2, \ldots, c_t, a_1, \ldots, a_r\}$

Luego $X \cap Y = V = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Es decir $S = X + Y - V$ es escindible. Por el lema 5.8 se tiene que S se contrae ya que X, Y se contraen y esto es una contradicción al hecho de que S es crítico #

5.18 LEMA: Si S es crítico entonces $V(S) \neq (1,2,2)$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $V(S) = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2\}$
Si b_2 existe se tiene que $b_2 < a_1$ ó $b_2 < c_1$ ya que $b_2 \notin V(S)$.

Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que b_2 no existe ó que $b_2 < a_1$ (si $b_2 < c_1$ cambiamos la notación)

Luego $\overline{S(a_1)} = \{a_2, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s, b_1, \ldots, b_t, b_1 \cup c_2\}$
Por lo tanto $\overline{S(a_1)}$ tiene tantos puntos como S, pero $V(\overline{S(a_1)}) = \{a_2, b_1, b_1 \cup c_2, c_1\}$ que es de la forma $(1,1,2)$.

Por el lema 5.17 se tiene que $\overline{S(a_1)}$ no es crítico. Luego $\overline{S(a_1)}$ se contrae y por lema 5.16 también S se contrae. y esto es una contradicción a la criticalidad de S #

5.19 LEMA: Si S es crítico entonces $V(S) \neq (1,2,3)$

DEMOSTRACION:

Supongamos que $V(S) = (1,2,3)$
Siempre podemos escoger la notación de tal manera que $b_2 < a_1$.

Analizaremos cuatro casos:

1er Caso: $V(S) = \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, c_2\}$ y

b_2 no existe o bien $b_2 < a_1$, $b_2 < b_1$ y b_2 es menor que al menos un punto mas del conjunto S. Denotemos a este punto por d.

En este caso $\overline{S(a_1)} = (S - \{a_1\}) \cup \{(b_1 \cup c_2)\}$

Además $b_2 \notin V(\overline{S(a_1)})$ ya que $b_2 < d$ y $d \neq a_1, b_1$

Luego $V(\overline{S(a_1)}) = \{a_2, a_3, b_1 \cup c_2, b_1, c_1\} =$
$= (1, 2, 2)$

Como S es critico entonces por el lema 5.16 tenemos que $\overline{S(a_1)}$ ni se contrae ni se expande. Como $\overline{S(a_1)}$ tiene el mismo número de puntos que S entonces $\overline{S(a_1)}$ también es crítico, lo cual contradice el lema 5.18

2° Caso: $V(S) = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3\}$ y b_2 no existe o bien $b_2 < a_1$, $b_2 < b_1$ y b_2 es menor que al menos un punto mas del conjunto S que denotaremos d.

En este caso:

$\overline{S(a_1)} = \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, b_1 \cup c_2, b_1 \cup c_3\}$

Entonces $\overline{S(a_1)}$ tiene un punto mas que S.

Veamos que podemos quitar el punto $b_1 \cup c_2$.

En efecto, los puntos de $\overline{S(a_1)}$ que no están relacionados con $b_1 \cup c_2$ son c_1 y algunos $a_2, \ldots, a_l$ con $l \leq r$. Sin embargo para $i > 2$ se tiene que $a_i < b_1$ ó $a_i < c_1$ porque $a_i \notin V(S)$.

Entonces $\bar{S} = \bar{S}(a_1)(b_1 \cup c_2) = (\overline{S(a_1)} - \{b_1 \cup c_2\}) \cup \{c_1 \cup a_2\}$
$= \{b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, a_2, \ldots, a_r, b_1 \cup c_3, c_1 \cup a_2\}$

Como $b_1, b_1 \cup c_3 \in V(\bar{S})$ y $c_i < c_1 \cup a_2$ para toda $i \in \{1, \ldots, t\}$ y $a_i < c_1 \cup a_2$ para toda $i \in \{2, \ldots, r\}$ entonces el conjunto de puntos que no son comparables con $a_2 \cup c_1$ es de ancho uno.

Luego $\bar{S}(a_2 \cup c_1) = \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, b_1 \cup c_3\}$

Como $b_2 < d$ y $d \neq a_1, b_1$ se tiene que $b_2 \notin V(\bar{S}(a_2 \cup c_1))$

Luego $V(\bar{S}(a_2 \cup c_1)) = \{a_2, b_1 \cup c_3, b_1, c_2, c_3\}$
$= (1, 2, 2)$

Como $\bar{S}(a_2 \cup c_1)$ tiene tantos puntos como S entonces por el lema de reducción y por el lema 5.16 tenemos que $\bar{S}(a_2 \cup c_1)$ es crítico, lo que contradice el lema 5.18.

3° Caso: $V(S) = \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, c_2\}$ y b_2 existe y es menor únicamente que a_1, b_1

Definimos $Y = \{a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2\} \subset S$

Como $b_2 < a_1$, $b_2 < b_1$ únicamente y además los otros puntos de Y no pueden ser menores que b_2 porque están en $V(S)$, entonces b_2 sólo se compara con b_1 y por lo tanto Y es un conjunto primitivo de tipo $(2,2,2)$ contenido en $\bar{S}$. Por el lema 56/10 tenemos que Y se expande y por tanto S no es crítico.

4° Caso: $V(S) = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3\}$ y b_2 existe y es menor que a_1, b_1 únicamente.

En este caso:

$\overline{S(a_1)} = \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, b_1 \cup c_2, b_1 \cup c_3\}$

Similarmente al 2° caso tenemos

$\bar{S} = \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, a_2 \cup c_1, b_1 \cup c_3\}$

Luego

$\bar{S}(a_2 \cup c_1) = \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t; b_1 \cup c_3\}$

y $V(\bar{S}(a_2 \cup c_1)) = \{a_2, c_1, c_2, b_1, b_2, b_1 \cup c_3\} =$
$= (1,2,3)$

Además el número de puntos en $\bar{S}(a_2 \cup c_1)$ es igual al número de puntos en S y $V(\bar{S}(a_2 \cup c_1)) = V(S)$

Observemos que si a_3 existe, entonces hay al menos tres puntos en $\bar{S}(a_2 \cup c_1)$ mayores que a_3.

En efecto, $a_3 < a_2$. Como $a_3 \notin V(S)$ entonces $a_3 < b_1$ ó $a_3 < c_1$. Si $a_3 < b_1$ se tiene que $a_3 < b_1 \cup c_3$

Si $a_3 \nless b_1$ entonces $a_3 < c_1$. Supongamos que $a_3 \nless c_2$. Entonces $(2,2,2) = \{a_2, a_3, b_1, b_2, c_2, c_3\} \subset S$ lo que contradice el lema 5.10. Luego $a_3 < c_2$.

Si cambiamos de manera adecuada el nombre a los puntos de $\bar{S}(a_2 \cup c_1)$ obtendremos el primero o segundo caso de este lema.

En particular podemos definir $\bar{b}_1 = a_2$, $\bar{b}_2 = a_3$; y si $a_3 < b_1$ definimos $\bar{a}_1 = b_1 \cup c_3$, $\bar{a}_2 = b_1$, $\bar{a}_3 = b_2$, $\bar{c}_1 = c_1$, $\bar{c}_2 = c_2$.
o bien, si $a_3 < a_2$ definimos $\bar{a}_1 = c_1$, $\bar{a}_2 = c_2$, $\bar{c}_1 = b_1 \cup c_3$, $\bar{c}_2 = b_1$, $\bar{c}_3 = b_2$.

Utilizando los argumentos de estos casos obtenemos que $\bar{S}(a_2 \cup c_1)$ no es crítico y por tanto S no es crítico.

#

El último caso se analiza en el siguiente lema.

5.20 LEMA: Si S es crítico entonces $V(S) \neq (1,2,4)$

DEMOSTRACION:

Escogiendo la notación de tal manera que si b_2 existe se tenga que $b_2 < a_1$ obtenemos dos casos.

1er Caso: $V(S) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, c_1, c_2\}$.
Tenemos:
$\overline{S(a_1)} = \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, b_1 \cup c_2\}$
Afirmamos que $V(\overline{S(a_1)}) = \{a_2, a_3, a_4, b_1, c_1, b_1 \cup c_2\}$
En efecto, los puntos a_i con $i > 4$ no están en $V(\overline{S(a_1)})$ porque de otra manera habrían estado en $V(S)$.
Los puntos c_i con $i \geq 2$ tampoco están en $V(\overline{S(a_1)})$ porque son menores que dos puntos maximales, a saber c_1 y $c_2 \cup b_1$. Y si el punto b_2 estuviera en $V(\overline{S(a_1)})$ entonces el conjunto $\{a_2, a_3, a_4, b_1 \cup c_2, b_1, b_2, a_1\} = (1,3,3)$ estaría contenido en $\overline{S(a_1)}$. Pero esto es una contradicción al lema 5.10.
Entonces $V(\overline{S(a_1)}) = \{a_2, a_3, a_4, b_1, c_1, b_1 \cup c_2\}$ que es del tipo $(1,2,3)$. Y esto es una contradicción al lema 5.19.
2° Caso: $V(S) = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3, c_4\}$
Podemos suponer que b_2 existe y $b_2 \not< c_1$. Si no es así, cambiando la notación estamos en el caso 1.
Se afirma que $b_2 < a_2$. Esto es ya que si $b_2 \not< a_2$ entonces el conjunto $R = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4\} \subset S$ y $b_2 < a_1$ es la única relación no

trivial. Entonces el conjunto $R(a_1)$ es
$\{a_2, b_1, b_2, b_1 \cup c_1, b_1 \cup c_2, b_1 \cup c_3, b_1 \cup c_4, c_1, c_2, c_3, c_4\}$
Como $\{a_2, b_1 \cup c_4, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\} = (1,3,3)$
está contenido en $R(a_1)$, entonces R
se expande y por lo tanto S se
expande. Esto contradice la criticalidad de S. Luego $b_2 < a_2$.

También afirmamos que a_3 existe
y $a_3 \not< b_1$.

Si a_3 no existe definimos:
$X = \{a_1, a_2, b_1, c_1, \ldots, c_t\}$,
$Y = \{S - X\} \cup \{c_1, \ldots, c_t\}$.
Entonces $X \cap Y = V = \{c_1, \ldots, c_t\}$.
Por lo tanto S se escinde ya que
$S = X + Y - V$. Y esto es una contradicción al lema 5.8.

Si a_3 existe y $a_3 < b_1$ también podemos definir
$X = \{a_1, a_2, b_1, c_1, \ldots, c_t\}$
$Y = \{S - X\} \cup \{c_1, \ldots, c_t\}$
Luego $X \cap Y = V = \{c_1, \ldots, c_t\}$. Entonces
S sería escindible ya que $S = X + Y - V$.
Esto contradice el lema 5.8.

Entonces a_3 existe y $a_3 \not< b_1$.
Como a_3 no está en $V(S)$ se tiene
que $a_3 < c_1$. Entonces:
$S(c_1) = \{c_2, \ldots c_t, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, a_1 \cup b_1, a_2 \cup b_1\}$

Como el conjunto de puntos no comparables con $a_1 \cup b_1$ es de ancho uno, se tiene que

$S(c_1)(a_1 \cup b_1) = S(c_1) - \{a_1 \cup b_1\} = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_2, \ldots, c_t, a_2 \cup b_1\}$

Luego $V(S(c_1)(a_1 \cup b_1)) = \{a_1, a_2 \cup b_1, b_1, c_2, c_3, c_4\} = (1, 2, 3)$

Como S no se expande ni se contrae sabemos por el lema de reducción que $S(c_1)(a_1 \cup b_1)$ tampoco se expande ni se contrae. Además $S(c_1)(a_1 \cup b_1)$ tiene el mismo número de puntos que S.

Es decir, $S(c_1)(a_1 \cup b_1)$ es crítico, lo que contradice el lema 5.19

$\#$

Con esta serie de lemas demostramos que los conjuntos críticos no existen. Es decir terminamos la prueba del teorema 5.3 ya que si no existen los conjuntos críticos entonces todo conjunto de ancho tres se expande o se contrae.

Y terminamos también la demostración de la segunda conjetura de Brauer - Thrall porque entonces los conceptos de tipo infinito y tipo estrictamente no acotado coinciden.

BIBLIOGRAFIA.

[Ai] M. Aigner: Combinatorial Theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 234. Springer Verlag. 1979.

[Ba] R. Bautista. Multiplicative basis and second Brauer-Thrall conjecture. Preprint.

[Ba-L] R. Bautista - F. Larrión: a note on partially ordered sets. Manuscrito.

[Ba-M] R. Bautista - R. Martinez: Representations of partially ordered sets and 1-Gorenstein artin algebras. In Ring theory, proceedings of the 1978 antwerp conference. Marcel Dekker, Inc (1979), 385-433.

[Br] R. Brauer: On the indecomposable representations of algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), abstract 334, p. 684.

[Bu] H. Brummund: Über Gruppenringe mit einem Koeffizientenkörper der Charakteristik p. Dissertation Münster 1939.

[C-L-S] C. Cibils - F. Larrión - L. Salmerón: Métodos diagramáticos en teoría de representaciones. Monografías del Inst. de Mat. UNAM. 11 (1982).

[Ga_1] P. Gabriel: Représentations indécomposables des ensembles ordonnés. (d'après Nazarova et Roiter). Séminaire Dubreil (algèbre) N° 13 (1972-73) 301-304.

[Ga_2] P. Gabriel. Partially ordered sets. Comunicación Privada.

[Ja] J. P. Jans: On the indecomposable representations of algebras. Annals Math. 66 (1957) 418-429.

[Kl_1]: M.M. Kleiner: Partially ordered sets of finite type. Zap. Naučn. Sem. LOMI 28 (1972), 32-41. Traducción al inglés: J. Soviet

Math. 23 (1975). 607-615.

[Kl2] M.M. Kleiner: On exact representations of partially ordered sets of finite representation type. Zap. Naučn. Sem. LOMI 28 (1972), 42-60 Traducción al inglés: J. Soviet Math 23 (1975) 616-628.

[Kö] G. Köthe: Verallgemeinerte abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorring. Math. Z. 39 (1934)

[Na] T. Nakayama: Note on uniserial and generalized uniserial rings. Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 285-289.

[N-R1] L.A Nazarova - A.V Roiter: Representations of partially ordered sets. Zap. Naučn. Sem. LOMI 28 (1972), 5-31. Traducción al inglés: J. Soviet Math 23 (1975), 585-606

[N-R2] L.A. Nazarova - A.V. Roiter: Matrix questions and the Brauer-Thrall conjectures on algebras with an infinite number of indecomposable representations. Proc. of Symp. in P. Math. XXI (1971), 111-115.

[N-R3] L.A. Nazarova - A.V Roiter: Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture. Preprint. Inst. Math. Acad. Sci., Kiev. 1973. Traducción al alemán: Mitt. Math. Sem. Giessen 115 (1975).

[Ri] C.M. Ringel: Report on the Brauer-Thrall conjectures: Roiter's theorem and the theorem of Nazarova and Roiter. (On algorithms for solving vectorspace problems I). In Representation theory I, proceedings, Ottawa, Carleton University, 1979, Lecture notes in Math. 831. Springer Verlag.

[Tr1] R.M. Thrall: On adhir algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) Abstract 22, p. 49.

[Tr2] R.M. Thrall: On a Galois connection between algebras of linear transfox mations and lattices of subspaces of a vectorspace. Can. J. Math. 4 (1952), 227–239.

[Yo] Yoshii, T: On algebras of bounded representation type. Osaka Math. J. 8 (1956), 51–105.

ANOTHER CAMEL ! 1939. F. SCHANG COLLECTION, NEW YORK