UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGEBRAS INCLINADAS Y MODULOS DE INCLINACION

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

ERNESTO VALLEJO RUIZ

Becario del Instituto de Matemáticas

México, D. F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

" Y, cuando llegó, se quedó mirando el nuevo mundo, con sus intensas manchas de vegetación, sus centelleantes colinas, sus gigantescos árboles, su cielo de cambiantes matices, como si la luz solar se filtrara a través de distintas capas de cristal pastel.

Era un mundo fantástico.

Había mucho que hacer y mucho en que pensar. Su cerebro rebozaba de preguntas, ideas, ... "

Richard Matheson.

INDICE.

INTRODUCCION.

Este trabajo está basado en el artículo de D. Happel y C.M. Ringel intitulado **ALGEBRAS INCLINADAS.** (TILTED ALGEBRAS) y su objetivo primordial es que cualquier persona con conocimientos elementales en la Teoría de Representaciones de Algebras pueda introducirse en este tema en un tiempo relativamente corto.

Usaremos libremente los conocimientos generales de Teoría de Anillos y de Algebra Homológica, como referencias recomendamos [1] y [19], de este último especialmente § 6 y § 7.

Para provecho del lector, en el próximo capítulo daremos un resumen de los resultados en Teoría de Representación de Algebras usados en este trabajo, el lector interesado en estudiarlos puede ver: [3], la § 2 y la § 3 de [6] y [17]

Las álgebras inclinadas, y con ellas los módulos de inclinación son el resultado de años de trabajo y numerosas generalizaciones; tienen su origen en los funtores de reflexión y los funtores de Coxeter introducidos en [10], ahí Bernstein, Gel'fand y Ponomarev dan una demostración más conceptual del teorema de Gabriel que dice:

Si kC es la k-álgebra asociada a un carcaj C (sin relaciones), entonces kC tiene un número finito de clases de isomorfía de kC-módulos inescindibles finitamente generados si y sólo si C es un diagrama de Dynkin (la orientación no importa). En este caso hay una biyección entre las clases de isomorfía de kC-módulos inescindibles y las raíces positivas de C.

Con el objeto de tener un panorama más amplio de los orígenes de las álgebras inclinadas en la § 2 damos un resumen de [10]. En la § 1 definimos la k-álgebra kC asociada a un carcaj C y enunciamos sus propiedades básicas.

Un paso intermedio, de importancia, entre los funtores de reflexión y los módulos de inclinación fue dado en [2] por M. Auslander, M.I. Platzeck e I. Reiten. Ellos definen los funtores de Coxeter parciales sin usar gráficas y éstos resultan ser una generalización de los funtores de reflexión. En el capítulo 6 necesitamos a los funtores de Coxeter parciales, en la § 17 probamos los resultados que usamos, para esto observamos que los funtores de Coxeter parciales son un caso particular de la teoría de álgebras inclinadas.

El último antecedente de las álgebras inclinadas y de los módulos de inclinación lo encontramos en [12], ahí S. Brenner y M.C.R. Butler introducen los funtores de inclinación.

Posteriormente D. Happel y C.M. Ringel introducen, en [18], los módulos de inclinación. Dada una k-álgebra A de dimensión finita, un A-módulo T_A se llama **módulo de inclinación** si satisface las siguientes tres propiedades:

I1) La dimensión proyectiva de T_A es ≤ 1.

I2) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$

I3) Hay una sucesión exacta de la forma

$$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$$

donde T', T'' son sumas de copias de sumandos de T_A.

Si $B = \mathrm{End}(T_A)$, T es un B-A bimódulo y están definidos los siguientes funtores:

$$F = \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, -) : \mathrm{mod}\,A \to \mathrm{mod}\,B$$

$$G = - \otimes_B T_A : \mathrm{mod}\,B \to \mathrm{mod}\,A.$$

Entonces resulta que ${}_BT_A$, F y G satisfacen el teorema de Brenner-Butler [12], de hecho se tiene un teorema más fuerte (4.4).

Además si un bimódulo satisface las condiciones de inclinación dadas en [12], entonces es un módulo de inclinación.

En la § 10 vemos que la condición I3) se puede sustituir por una más intuitiva, a saber, que el número de sumandos inescindibles no isomorfos de T_A coincida con el número de clases de isomorfía de A-módulos simples. En la § 8 damos una generalización de la forma cuadrática definida en la § 2 para una gráfica. Otro resultado interesante es que A y B tienen el mismo número de clases de isomorfía de módulos simples (9.2)

En el capítulo 5 estudiamos con bastante detalle el concepto más importante de este trabajo, es decir, el de álgebra inclinada. En la situación de arriba B es una **álgebra inclinada** si A es hereditaria.

Algunas propiedades importantes de las álgebras inclinadas son que el carcaj de B no tiene ciclos dirigidos (11.5) y que la dimensión global de B es ≤ 2, (12.2).

En el capítulo 6 damos una condición suficiente para que una k-álgebra B de dimensión finita sea inclinada, es decir, si alguna componente del carcaj de Auslander-Reiten de B contiene una rebanada completa finita (§18) y todos los B-módulos proyectivos inescindibles entonces B es inclinada (19.1)

Una consecuencia de esto la damos en el capítulo 7, es decir, una álgebra de tipo de representación finito con un módulo inescindible sincero es una álgebra inclinada si y sólo si su carcaj de Auslander-Reiten no tiene ciclos dirigidos (20.7)

Otra consecuencia es que si B es una álgebra de tipo de representación finito y su carcaj de Auslander-Reiten no tiene ciclos dirigidos, entonces los módulos inescindibles están determinados por sus factores de composición (21.3)

Por último si B es una álgebra inclinada de tipo de representación finito y k es algebraicamente cerrado, entonces la forma cuadrática asociada a B es positiva definida en vectores positivos (21.7)

En el capítulo 8 estudiamos con detalle un ejemplo y observamos en él los resultados obtenidos.

Las álgebras inclinadas parecen ser de bastante interés pues Gabriel, Riedtman y otros han desarroyado técnicas de aplicaciones cubrientes con el fin de reducir la teoría de álgebras arbitrarias de tipo de representación finito a álgebras cuyo carcaj de Auslander-Reiten no tiene ciclos dirigidos, entonces, de hecho, a álgebras inclinadas.

La teoría de algebras inclinadas continúa desarroyándose, por ejemplo I. Assem ha estudiado las álgebras inclinadas iteradas y las álgebras inclinadas de tipo A_n. Assem y Happel las álgebras inclinadas generalizadas de tipo A_n.

Finalmente en [9], Bautista, Larrión y Salmerón probaron que si B es una k-álgebra de dimensión finita de tipo de representación finito, inescindible y básica, con un B-módulo inescindible sincero, entonces B es una álgebra inclinada si y sólo si B es simplemente conexa (o sea, si su carcaj de Auslander-Reiten tiene grupo fundamental trivial)

Para este resultado suponen también que k es algebraicamente cerrado.

CAPITULO O. NOTACION Y CONOCIMIENTOS GENERALES SOBRE TEORIA DE REPRESENTACIONES DE ALGEBRAS.

En este trabajo A denotará una k-álgebra de dimensión finita y k un campo arbitrario. Por mod A denotaremos a la categoría de A-módulos derechos finitamente generados. Más aún, A-módulo querrá decir A-módulo finitamente generado.

Si M es un A-módulo derecho y $B = \mathrm{End}_A(M)$, (el anillo de endomorfismos de A) entonces M tiene una estructura canónica de B-módulo izquierdo (si $f \in B$ y $m \in M$, $f \cdot m := f(m)$). Esta situación se presentará frecuentemente, por esta razón, usaremos la siguiente notación; M_A para indicar que M es un A-módulo derecho y ${}_BM$ para indicar que M es un B módulo izquierdo. B mod denotará la categoría de los B-módulos izquierdos finitamente generados.

Si M es un A-módulo denotaremos por $|M_A|$ su longitud, por d.p. M_A su dimensión proyectiva y por add(M_A) la subcategoría plena de mod A cuyos objetos son sumas directas de módulos isomorfos a sumandos directos de M.

A es en particular un anillo artiniano, entonces tenemos una biyección entre las clases de isomorfía de A-módulos proyectivos inescindibles y las clases de isomorfía de los A-módulos simples.

La siguiente notación lo usaremos consistentemente durante todo el trabajo. $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$, $\{P_a \mid a \in \bar{n}\}$ denotará un conjunto completo de representantes de A-módulos proyectivos inescindibles, $\{S_a \mid a \in \bar{n}\}$ denotará un conjunto completo de representantes de A-módulos simples tales que $P_a / \mathrm{rad}\, P_a = S_a$ y finalmente $\{I_a \mid a \in \bar{n}\}$ denotará un conjunto completo de representantes de A-módulos inyectivos inescindibles tales que $\mathrm{soc}\, I_a = S_a$ (Aquí $\mathrm{rad}\, P_a$ es el radical de P_a y $\mathrm{soc}\, I_a$ es el zócalo de I_a).

$D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$: mod $A \to A$ mod es una dualidad y $D\,\mathrm{Hom}_A(-, {}_AA_A)$: mod $A \to$ mod A define una equivalencia de categorías entre la subcategoría plena de mod A cuyos objetos son los A-módulos proyectivos y la subcategoría plena de mod A cuyos objetos son los A-módulos inyectivos. Más aún, tenemos que $D\,\mathrm{Hom}_A(P_a, A) \cong I_a$.

Si $f: M \to M'$ es un homomorfismo de Λ-módulos (diremos simplemente morfismo), entonces Nuc f denota el núcleo de f, Conuc f el conúcleo de f e Im f la imagen de f. Algunas veces no haremos distinción entre $M \cong M'$ y $M = M'$.

Sea M un Λ-módulo, entonces un Λ módulo X está generado por M si $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que X es cociente de M^m y X está cogenerado por M si $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que X es un submódulo de M^m.

$\mathbb{N}$ denotará los números enteros positivos, $\mathbb{Z}$ los números enteros y $\mathbb{Q}$ los números racionales.

A cada módulo M le asociamos un vector $\underline{\dim}\, M \in \mathbb{Z}^n$, donde $(\underline{\dim}\, M)_a$ es el número de factores de composición isomorfos a S_a en alguna serie de composición fija. Tenemos la siguiente relación.

$$(\underline{\dim}\, M)_a = |\mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, M)_{\mathrm{End}(P_a)}| = |_{\mathrm{End}(I_a)}\mathrm{Hom}(M, I_a)|$$

Un morfismo $f: M \to M'$ se llama irreducible si f no es mono escindible, f no es epi escindible y para toda factorización $f = f''f'$, f' es mono escindible o f'' es epi escindible. Todo morfismo irreducible es inyectivo o suprayectivo, pero no es isomorfismo.

Si M y M' son Λ-módulos inescindibles, entonces un morfismo $f: M \to M'$ es irreducible si y sólo si $f \in \mathrm{rad}(M, M')$ y $f \notin \mathrm{rad}^2(M, M')$.

Obsérvese que $\mathrm{rad}(M, M') = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M') \mid \forall\, g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M', M),\ gf \in \mathrm{rad}\ \mathrm{End}(M) \} = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M') \mid \forall\, g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M', M)\ \ fg \in \mathrm{rad}\ \mathrm{End}(M') \}$ y $\mathrm{rad}^2(M, M') = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M') \mid \exists\, M'' \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ f_1 \in \mathrm{rad}(M, M''),\ f_2 \in \mathrm{rad}(M'', M'),$ tales que $f = f_2 \circ f_1 \}$

Si M es inescindible, un morfismo $g: M' \to M$ se llama casi escindible derecho si g no es epi escindible y $\forall\, h: X \to M$ morfismo que no es epi escindible $\exists\, h': X \to M'$, tal que $h = gh'$. Si además M' tiene longitud mínima, g se llama morfismo casi escindible derecho minimal.

Para todo M existe un morfismo casi escindible derecho minimal $M' \to M$ y éste es único hasta isomorfismo.

Un morfismo $h: X \to M$ con $X \neq 0$ es irreducible si y sólo si existe $h': X' \to M$ tal que $(h, h'): X \oplus X' \to M$ es casi escindible derecho minimal.

En realidad, si $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i \to M$ es casi escindible derecho minimal,

y todos los X_i's son inescindibles, el número de X_i's isomorfos a una X fija es la dimensión de $\mathrm{rad}(X,M)/\mathrm{rad}^2(X,M)$ como $\mathrm{End}(X)/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(X)$-espacio vectorial derecho (ver [6]), o equivalentemente
$|\mathrm{rad}(X,M)/\mathrm{rad}^2(X,M)_{\mathrm{End}(X)}|$

Denotaremos a $\mathrm{rad}(X,M)/\mathrm{rad}^2(X,M)$ por $\mathrm{Irr}(X,M)$.

El núcleo de un morfismo casi escindible derecho minimal se denota por τM y se llama el trasladado de Auslander-Reiten de M. Hay dos posibilidades, o M es proyectivo y entonces el morfismo casi escindible derecho está dado por la inclusión $\mathrm{rad}\,M \to M$ y $\tau M = 0$, o M no es proyectivo y entonces τM es inescindible y obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to \tau M \to M' \to M \to 0$$

que se llama sucesión que casi se divide que termina en M.

Dualmente, para todo módulo inescindible M, hay también un único morfismo casi escindible izquierdo minimal $M \to M''$ y su conúcleo se denota por $\tau^{-1}M$. Si M es inyectivo el morfismo casi escindible izquierdo minimal que empieza en M es la proyección canónica $M \to M/\mathrm{soc}\,M$ y $\tau^{-1}M = 0$; si M no es inyectivo $\tau^{-1}M$ es inescindible y obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to M \to M'' \to \tau^{-1}M \to 0.$$

que se llama sucesión que casi se divide que empieza en M.

En particular para M inescindible y no inyectivo se tiene que $\tau\tau^{-1}M \cong M$ y para M inescindible y no proyectivo se tiene $\tau^{-1}\tau M \cong M$.

El módulo τM puede ser calculado explícitamente: escójase una resolución proyectiva $P' \xrightarrow{\pi} P \to M \to 0$ con P' minimal y aplíquese $\mathrm{Hom}_A(\ ,A_A)$. El conúcleo, $\mathrm{Conuc}\,\mathrm{Hom}_A(\pi, A_A)$ se llama el transpuesto de M y se denota por $\mathrm{Tr}\,M$. Entonces $\tau M = D\mathrm{Tr}\,M$.
Análogamente $\tau^{-1}M = \mathrm{Tr}\,DM$.

Para X, Y inescindibles tenemos los siguientes isomorfismos
$\mathrm{Ext}^1(X,Y) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}(\tau^{-1}Y, X) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}(Y, \tau X)$, donde $\underline{\mathrm{Hom}}(M,M')$ denota

el grupo cociente de $Hom(M,M')$ módulo el subgrupo de los morfismos que se factorizan a través de módulos proyectivos.

Algunas veces tenemos que $Ext^1(X,Y) \cong D\,Hom(\tau^{-1}Y,X) \cong D\,Hom(Y,\tau X)$, ver (...).

El carcaj de Auslander-Reiten de A, que denotaremos por Γ_A, tiene por vértices las clases de isomorfía de A-módulos inescindibles y hay una flecha (y sólo una) de M a M' si existe un morfismo irreducible $M \to M'$. De la existencia y propiedades de los morfismos casi escindibles minimales se sigue que Γ_A es localmente finito, en consecuencia, sus componentes conexas contienen a lo más un número numerable de vértices.

A se llama de tipo de representación finito si Γ_A es finito.

Si A es inescindible como k-álgebra y es de tipo de representación finito entonces Γ_A es conexo. Si A es inescindible como k-álgebra y no es de tipo de representación finito, entonces ninguna componente de Γ_A es finita.

Obsérvese además que si X, Y son vértices de Γ_A y X no es proyectivo hay una flecha $Y \to X$ si y sólo si hay una flecha $\tau X \to Y$. Análogamente si Y no es inyectivo hay una flecha $Y \to X$ si y sólo si hay una flecha $X \to \tau^{-1}Y$

Si X, Y son vértices de Γ_A, X se llamará predecesor de Y si hay un camino dirigido de X a Y en Γ_A. El siguiente lema será particularmente útil.

0.1. Lema.

Sean $X, Y \in \Gamma_A$ tales que Y tiene sólo un número finito de predecesores y $Hom_A(X,Y) \neq 0$, entonces hay un camino dirigido de X a Y.

Demostración.

Supongamos que no existen caminos dirigidos de X a Y, entonces construimos por inducción un camino

$$Y_m \xrightarrow{g_m} Y_{m-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_0 = Y$$

de morfismos irreducibles y funciones $f_m : X \to Y_m$ tales que $g_1 \cdots g_m f_m \neq 0$

Si $m=0$, es trivial pues por hipótesis $\exists f_0 \in Hom(X,Y)$, $f \neq 0$.

Si $m \geq 0$ y $g_1, \ldots, g_m, f_m$ están definidas, consideramos a

$(h_t): \oplus Z_t \to Y_m$ el morfismo casi escindible derecho minimal que termina en Y_m, donde $\forall t$ Z_t es inescindible. Como no hay caminos dirigidos de X a Y, f_m no es isomorfismo, $\therefore \exists (h'_t) . X \to \oplus Z_t$ tal que $f_m = \Sigma_t h_t h'_t$, pero $0 \neq g_1 \cdots g_m f_m = \Sigma_t g_1 \cdots g_m h_t h'_t$, $\therefore \exists t_0$ tal que $0 \neq g_1 \cdots g_m h_{t_0} h'_{t_0}$.

Sean $Y_{m+1} := Z_{t_0}$, $g_{m+1} := h_{t_0}$ que es irreducible y $f_{m+1} = h'_{t_0}$.

Hemos construido un camino en Γ_A de longitud infinita

$$\cdots \to Y_m \xrightarrow{g_m} Y_{m-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_0 = Y$$

tal que $\forall m \geq 1$, $g_1 \circ \cdots \circ g_m \neq 0$

Como Y tiene un número finito de predecesores, $\exists Z \in \Gamma_A$ tal que Z es un predecesor de Y y Z aparece un número infinito de veces en el camino construido.

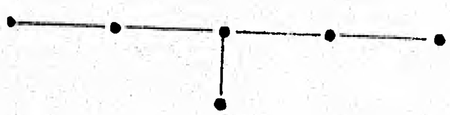
Pero como Z es inescindible, $\mathrm{rad}(Z, Z)$ es nilpotente, $\therefore \exists \ell \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{rad}^{\ell}(Z, Z) = 0$ y esto implica que $\exists r \in \mathbb{N}$ $g_1 \circ \cdots \circ g_r = 0$, contradicción. ∎

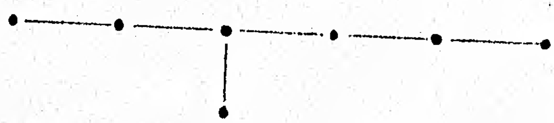
CAPITULO 1. FUNTORES DE COXETER.

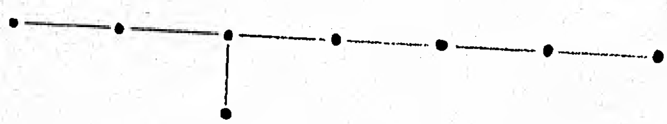
Un problema fundamental en la Teoría de Representación de Algebras es el de determinar todas las k-álgebras de dimensión finita de tipo de representación finito, es decir, todas las k-álgebras que tienen un número finito de módulos inescindibles finitamente generados (obsérvese que en este caso todo módulo inescindible es finitamente generado [5]). Este problema no está aún resuelto, pero se han dado algunos pasos hacia su solución. Por ejemplo si C es un carcaj (sin relaciones) y kC es la k-álgebra asociada a C hay un teorema de P. Gabriel [15] que dice que kC es de tipo de representación finito si y sólo si C es una de las siguientes gráficas (con cualquier orientación)

A_n  (n vértices, $n \geq 1$)

D_n  (n vértices, $n \geq 4$)

E_6 

E_7 

E_8 

Estas gráficas se llaman diagramas de Dynkin.

Además Gabriel probó que en este caso hay una biyección entre los módulos inescindibles de kC y las raíces positivas de C.

Bernstein, Gel'fand y Ponomarev [10], dieron una demostración mas conceptual de estos resultados, para ello introdujeron los funtores de reflexión y los funtores de Coxeter. De sucesivas generalizaciones de los funtores de Coxeter se obtienen los módulos de inclinación y las álgebras inclinadas. Lo importante de estos nuevos conceptos es que se han conservado total o parcialmente resultados que se tenían en la situación original, por ejemplo si C es un carcaj sin relaciones kC es hereditaria, mientras que una álgebra inclinada tiene dimensión global ≤ 2, (12.2).

Por otra parte la forma cuadrática asociada a kC es positiva definida si y sólo si C es un diagrama de Dynkin, o equivalentemente si kC es de tipo de representación finito. En (21.1) vemos que la forma cuadrática asociada a una álgebra inclinada de tipo de representación finito sobre un campo algebraicamente cerrado es positiva definida para vectores positivos.

También para kC donde C es un diagrama de Dynkin es conocido desde hace tiempo que los inescindibles están determinados por sus factores de composición, en (21.3) probamos lo mismo para álgebras inclinadas de tipo de representación finito que tienen un módulo inescindible sincero.

Con el fin de tener un panorama más amplio de los funtores de reflexión, en la § 2, damos un resumen de [10], para esto, dado un carcaj C construimos, en la § 1, las categorías de k-representaciones $Mod(C)$ y $mod(C)$ asociadas a C y la k-álgebra kC asociada a C. De hecho estos conceptos no son diferentes pues hay equivalencias de categorías entre $Mod(C)$ y kC-Mod y entre $mod(C)$ y kC-mod.

§ 1. Carcajes y sus representaciones.

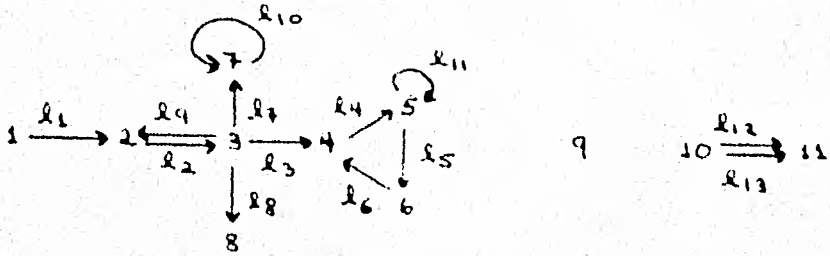
Un **carcaj** es una gráfica finita y orientada $C = (C_0, C_1, \alpha, \beta)$, donde C_0 es el conjunto de **vértices**, C_1 es el conjunto de **aristas**, α y β nos determinan una orientación de las aristas, es decir,

$\alpha: C_1 \to C_0$ es una función que a cada arista le asocia su principio y $\beta: C_1 \to C_0$ es una función que a cada arista le asocia su final.

Si $\ell \in C_1$ y $\alpha(\ell)=i$, $\beta(\ell)=j$, algunas veces denotaremos a ℓ por $i \xrightarrow{\ell} j$.

Un **camino dirigido** en C es una sucesión finita de vértices y flechas $\gamma = (j|\ell_n,\dots,\ell_1|i)$ que satisface las siguientes condiciones: 1) $i,j \in C_0$, 2) para $k \in \bar{n}$, $\ell_k \in C_1$ y 3) $\alpha(\ell_1)=i$, para $k \in \{2,\dots,n\}$ $\alpha(\ell_k)=\beta(\ell_{k-1})$ y $\beta(\ell_n)=j$. Si además $n=0$ γ debe satisfacer 4) $i=j$. n se llama la **longitud** de γ y escribimos $\ell(\gamma)=n$. Un **ciclo dirigido** en C es un camino $\gamma=(j|\ell_n,\dots,\ell_1|i)$ donde $i=j$ y $n \geq 1$. Un **lazo** es un ciclo dirigido de longitud 1.

Toda la información de un carcaj se puede almacenar en un dibujo, por ejemplo en



$C_0=\{1,\dots,11\}$, $C_1=\{\ell_1,\dots,\ell_{13}\}$, $\alpha(\ell_1)=1$ y $\beta(\ell_1)=2$, $\alpha(\ell_{10})=7$ y $\beta(\ell_{10})=7$, etc.

En este ejemplo $(7|\ell_7|3)$ es un camino de longitud 1, $(5|\ell_4,\ell_6,\ell_5,\ell_{11},\ell_{11},\ell_4,\ell_3,\ell_2|2)$ es un camino de longitud 8 y $(8|8)$ es un camino de longitud cero. $(4|\ell_6,\ell_5,\ell_4|4)$, $(5|\ell_4,\ell_6,\ell_5|5)$, $(5|\ell_{11}|5)$ son ejemplos de ciclos dirigidos, el último es además un lazo.

Sea k un campo, una **k-representación** de C (o simplemente una **representación**, cuando no haya ambigüedad) es una pareja $V=((V_i)_{i\in C_0},(f_\ell)_{\ell\in C_1})$ donde $\forall\, i\in C_0$, V_i es un k-espacio vectorial y $\forall\, i \xrightarrow{\ell} j \in C_1$, $f_\ell: V_i \to V_j$ es una transformación lineal. Un **morfismo de representaciones** entre $V=((V_i),(f_\ell))$ y $W=((W_i),(g_\ell))$ es una familia $\varphi=(\varphi_i)_{i\in C_0}$ donde $\forall i\in C_0$, $\varphi_i: V_i\to W_i$ es una transformación lineal y $\forall\ \xrightarrow{\ell}\ \in C_1$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\ell} & V_j \\ \varphi_i\downarrow & & \downarrow\varphi_j \\ W_i & \xrightarrow[g_\ell]{} & W_j \end{array}$$

Es muy fácil verificar que definiendo la composición de morfismos por "coordenadas", se obtiene una categoría cuyos objetos son las representaciones de C y cuyos morfismos son los morfismos de representaciones. Esta categoría la denotaremos por $\mathrm{Mod}(C)$ (por supuesto, ésta depende del campo). Por $\mathrm{mod}(C)$ entenderemos la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(C)$ cuyos objetos $V=((V_i),(f_\ell))$ satisfacen que $\forall i\in C_0$, V_i es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Los objetos más "simples" de $\mathrm{Mod}(C)$ son los $S_m=((S_{m,i}),(f_\ell))$ con $m\in C_0$ y donde $S_{m,i}=0$ para $i\neq m$, $S_{m,i}=k$ para $i=m$ y $\forall \ell\in C_1$, $f_\ell=0$.

A un carcaj C le asociamos, también, una k-álgebra kC, como sigue:

kC es el k-espacio vectorial libre con base en los caminos dirigidos de C, se define un producto en la base por,

$$(j'|\ell'_m,\dots,\ell'_1|i')\cdot(j|\ell_n,\dots,\ell_1|i)=\begin{cases}(j'|\ell'_m,\dots,\ell'_1,\ell_n,\dots,\ell_1|i) & \text{si } j=i'\\ 0 & \text{si } j\neq i'.\end{cases}$$

y se extiende bilinealmente. De esta manera kC resulta ser una k-álgebra.

Es claro que C no tiene ciclos dirigidos si y sólo si kC es de dimensión finita, en este caso kC es un anillo artiniano. También se sabe que C no tiene ciclos dirigidos si y sólo si kC es hereditaria [13].

Denotemos por kC Mod la categoría de kC-módulos izquierdos y por kC mod la subcategoría plena de kC Mod cuyos objetos son los kC-módulos finitamente generados. Entonces [13] hay un isomorfismo de categorías $F: kC \text{ Mod} \to \text{Mod}(C)$, que restringido a kC mod y a mod(C) sigue siendo isomorfismo de categorías. En consecuencia Mod(C) es una categoría abeliana y tiene sumas y productos arbitrarios. Además las sumas y productos de objetos en Mod(C) se definen por "coordenadas", lo mismo sucede con los núcleos, conúcleos e imágenes de morfismos de representaciones; como consecuencia tenemos que $\varphi = (\varphi_i)$ es monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si $\forall i \in C_0$ φ_i es inyectiva (suprayectiva).

F nos da una biyección entre $\{S_m | m \in C_0\}$ y el conjunto de clases de isomorfía de kC-módulos simples.

Es fácil ver que todo objeto en mod(C) es de longitud finita, usando que $F|: kC \text{ mod} \to \text{mod}(C)$ es un isomorfismo de categorías y el teorema de Krull-Schmidt se tiene que todo objeto en mod(C) se escribe de manera "esencialmente" única como suma de objetos inescindibles.

§ 2. Funtores de Coxeter.

Sea $C = (C_0, C_1, \alpha, \beta)$ un carcaj, $\forall i \in C_0$, denotamos por Γ^i al conjunto de aristas de C_1 que contienen a i y denotamos por $\sigma_i C = (C_0, C_1, \sigma_i\alpha, \sigma_i\beta)$ al carcaj que se obtiene de C invirtiendo las orientaciones de las aristas de Γ^i.

Un vértice $i \in C_0$ se llama **(-)-accesible** en C si $\forall \ell \in C_1$, $\beta(\ell) \neq i$ (o sea que, toda arista que contenga a i, empieza en i y no hay lazos en i). Análogamente un vértice $i \in C_0$ se llama **(+)-accesible** en C si $\forall \ell \in C_1$, $\alpha(\ell) \neq i$.

Supondremos además que la gráfica subyacente (C_0, C_1) es conexa.

Para cada vértice $j \in C_0$, $(+)$-accesible en C, definimos un funtor aditivo $F_j^+ : \mathrm{mod}(C) \to \mathrm{mod}(\sigma_j C)$, de la siguiente manera:

Si $V = ((V_i), (f_\ell))$ es una representación de C

$$(F_j^+ V)_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i \neq j \\ \mathrm{Nuc}\left((f_\ell) : \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} V_{\alpha(\ell)} \to V_j \right) & \text{si } i = j \end{cases}.$$

$$(F_j^+ V)_\ell = \begin{cases} f_\ell & \text{si } \ell \notin \Gamma j \\ \text{La composición } (F_j^+ V)_j \hookrightarrow \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} V_{\alpha(\ell)} \xrightarrow{\pi_{\alpha(\ell)}} V_{\alpha(\ell)} & \text{si } \ell \in \Gamma j. \end{cases}$$

Si $\varphi = (\varphi_i) : V \to W$ es un morfismo de representaciones

$$(F_j^+ \varphi)_i = \begin{cases} \varphi_i & \text{si } i \neq j \\ h & \text{si } i = j, \end{cases}$$ donde h es el único morfismo que

hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & (F_j^+ V)_j & \hookrightarrow & \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} V_{\alpha(\ell)} & \xrightarrow{(f_\ell)} & V_j \\ & \downarrow h & & \downarrow \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} \varphi_{\alpha(\ell)} & & \downarrow \varphi_j \\ 0 \to & (F_j^+ W)_j & \hookrightarrow & \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} W_{\alpha(\ell)} & \xrightarrow[(g_\ell)]{} & W_j \end{array}$$

Similarmente para cada vértice $j \in C_0$, $(-)$-accesible en C, definimos un funtor aditivo $F_j^- : \mathrm{mod}(C) \to \mathrm{mod}(\sigma_j C)$ como sigue:

$$(F_j^- V)_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i \neq j \\ \mathrm{Conuc}\left((f_\ell) : V_j \to \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} V_{\beta(\ell)} \right) & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$(F_j^- V)_\ell = \begin{cases} f_\ell & \text{si } \ell \notin \Gamma j \\ \text{La composición } V_{\beta(\ell)} \xrightarrow{\mu_{\beta(\ell)}} \bigoplus_{\ell \in \Gamma j} V_{\beta(\ell)} \twoheadrightarrow (F_j^- V)_j & \text{si } \ell \in \Gamma j. \end{cases}$$

$F_j^- \varphi$ se define de manera análoga a $F_j^+ \varphi$.

F_j^+ y F_j^- se llaman **funtores de reflexión**.

Si $j \in C_0$ es (+)- accesible en C y V es una representación inescindible, entonces $F_j^+ V = 0$ si y sólo si $V \cong S_j$. Y si $V \not\cong S_j$

$$\dim (F_j^+ V)_i = \begin{cases} \dim V_i & \text{si } i \neq j \\ -\dim V_j + \sum\limits_{\ell \in \Gamma j} \dim V_{\alpha(\ell)} & \end{cases}$$

Hay un resultado análogo para vértices (-)- accesibles.

Una sucesión de vértices, $i_1, \ldots, i_k$, en C_0 se llama **(+)- accesible con respecto a C** si i_1 es (+)- accesible en C y para $m \in \{2, \ldots, k\}$ i_m es (+)- accesible en $\sigma_{i_{m-1}} \circ \ldots \circ \sigma_{i_1} C$. Similarmente se definen las sucesiones **(-)- accesibles con respecto a C**.

Tenemos el siguiente resultado para sucesiones (+)- accesibles:

Si C es un carcaj, $i_1, \ldots, i_k$ una sucesión (+)- accesible con respecto a C, entonces

1) $\forall\, m \in \bar{k}$, $F_{i_1}^- \circ \ldots \circ F_{i_{m-1}}^- (S_m)$ es o el objeto cero, o una representación inescindible. (Aquí $S_m \in \operatorname{mod}(\sigma_{i_{m-1}} \circ \ldots \circ \sigma_{i_1} C)$).

2) Si $V \in \operatorname{mod}(C)$ es inescindible y $F_{i_k}^+ \circ \ldots \circ F_{i_1}^+ V = 0$, entonces $\exists\, m \in \bar{k}$ tal que $V \cong F_{i_1}^- \circ \ldots F_{i_{m-1}}^- (S_m)$.

Una aplicación de los funtores de reflexión es el siguiente teorema:

Sea $C = (C_0, C_1, \alpha, \beta)$ un carcaj cuya gráfica subyacente (C_0, C_1) no tiene ciclos y sea $C' = (C_0, C_1, \alpha', \beta')$ otro carcaj que difiere de C sólo por la orientación, entonces

1) Hay una sucesión de vértices $i_1, \ldots, i_k$, (+)- accesible con respecto a C tal que $\sigma_{i_k} \circ \ldots \circ \sigma_{i_1} C = C'$.

2) Sea $\mathcal{M}$ (respectivamente $\mathcal{M}'$) el conjunto de clases de isomorfía de objetos inescindibles en $\operatorname{mod}(C)$ (respectivamente $\operatorname{mod}(C')$) y sean $\tilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ el conjunto de clases de isomorfía de objetos de la forma $F_{i_1}^- \circ \ldots \circ F_{i_{m-1}}^- (S_m)$, con $m \in \bar{k}$ y $\tilde{\mathcal{M}}' \subseteq \mathcal{M}'$ el conjunto de clases de isomorfía de objetos de la forma $F_{i_k}^+ \circ \ldots \circ F_{i_{m+1}}^+ (S_m)$, con $m \in \bar{k}$, entonces el funtor $F_{i_k}^+ \circ \ldots \circ F_{i_1}^+$ da una biyección entre $\mathcal{M} - \tilde{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{M}' - \tilde{\mathcal{M}}'$.

Este teorema nos dice, en particular, que si kC es de tipo de representación finito, entonces KC' también lo es. Probaremos un resultado análogo para álgebras inclinadas en (14.2)

Una **numeración (+)-accesible** de C, es una ordenación, $i_1,\dots,i_n$, de los vértices de C que además es una sucesión (+)-accesible con respecto a C. La existencia de una numeración (+)-accesible en C es equivalente a la existencia de una ordenación, $i_1,\dots,i_n$, de los vértices de C, tal que para cada $\ell \in C_1$, subíndice $\alpha(\ell) >$ subíndice $\beta(\ell)$.

Si un carcaj C no tiene ciclos dirigidos, entonces C tiene una numeración (+)-accesible $i_1,\dots,i_n$, en este caso están definidos los siguientes funtores:

$\Phi^+ = F^+_{i_n} \circ \dots \circ F^+_{i_1} : \mathrm{mod}(C) \to \mathrm{mod}(C)$ y $\Phi^- = F^-_{i_1} \circ \dots \circ F^-_{i_n} : \mathrm{mod}(C) \to \mathrm{mod}(C)$. Φ^+ y Φ^- se llaman **funtores de Coxeter** y no dependen de la elección de la numeración (+)-accesible

Combinando resultados de [10] y [13] se obtiene el siguiente teorema:

Sean C un carcaj sin ciclos dirigidos e $i_1,\dots,i_n$ una numeración (+)-accesible de C.

Sean $P_1 = S_{i_1}$, $P_m = F^-_{i_1} \circ \dots \circ F^-_{i_{m-1}}(S_{i_m})$, $m \in \{2,\dots,n\}$

$I_n = S_{i_n}$, $I_m = F^+_{i_n} \circ \dots \circ F^+_{i_{m+1}}(S_{i_m})$, $m \in \{1,\dots,n-1\}$

entonces,

1) $\forall\, m \in \bar{n}$ P_m es proyectivo inescindible en $\mathrm{mod}(C)$ e I_m es inyectivo inescindible en $\mathrm{mod}(C)$.

2) Sea $V \in \mathrm{mod}(C)$ inescindible, entonces $\Phi^+(V) = 0$ si y sólo si $V \cong P_m$, para alguna $m \in \bar{n}$ y $\Phi^-(V) = 0$ si y sólo si $V \cong I_m$, para alguna $m \in \bar{n}$.

En este párrafo C denotará una gráfica finita $C = (C_0, C_1)$ sin lazos e $i_1,\dots,i_n$ una ordenación cualquiera de los vértices. Sea

$\mathcal{E}_C$ el $\mathbb{Q}$ espacio vectorial libre con base C_0 y sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canónica. En $\mathcal{E}_C$ hay definida una forma cuadrática que será de gran utilidad, está definida como sigue:

$$q: \mathcal{E}_C \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\bar{x}=(x_i)_{i\in C_0} \longmapsto \sum_{i\in C_0} x_i^2 - \sum_{\ell\in C_1} x_{\gamma_1(\ell)}\cdot x_{\gamma_2(\ell)}$$

aquí $\gamma_1(\ell)$, $\gamma_2(\ell)$ denotan los extremos de ℓ.

También tenemos para $j\in C_0$ una transformación lineal σ_j $\mathcal{E}_C\to\mathcal{E}_C$ definida por
$$(\sigma_j\bar{x})_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i\neq j \\ -x_j + \sum_{\ell\in\Gamma_j} x_{\gamma(\ell)} & \text{si } i=j \end{cases}$$

aquí $\gamma(\ell)$ denota el extremo de ℓ distinto de j, en este caso se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{mod}(C) & \overset{F_j^+}{\underset{F_j^-}{\rightleftarrows}} & \mathrm{mod}(\sigma_j C) \\ {\scriptstyle \dim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \dim} \\ \mathcal{E}_C & \overset{\sigma_j}{\underset{\sigma_j}{\rightleftarrows}} & \mathcal{E}_C \end{array}$$

donde $\dim(V) = (\dim V_i)_{i\in C_0}$.

$W = \{\sigma_{j_1}\circ\cdots\circ\sigma_{j_m} \mid m\geq 1,\ j_1,\dots,j_m\in C_0\}$ es un grupo, con la composición y se llama el **grupo de Weyl**. W preserva la forma cuadrática (es decir, $\forall\, w\in W$, $\bar{x}\in\mathcal{E}_C$, $q(w(\bar{x}))=q(\bar{x})$). Además si q es positiva definida W es finito.

Tenemos el siguiente resultado importante, q es positiva definida si y sólo si C es un diagrama de Dynkin.

Los siguientes conceptos juegan un papel muy importante.

$\bar{x}\in\mathcal{E}_C$ se llama **raíz** si existen $i\in\bar{n}$, $w\in W$ tales que $\bar{x}=w(e_i)$.

$c=\sigma_{i_n}\circ\cdots\circ\sigma_{i_1}\in W$ se llama **transformación de Coxeter** y depende de la ordenación de los vértices.

Finalmente con la ayuda de todos los conceptos introducidos, Bernstein, Gel'fand y Ponomarev dan una prueba de los resultodos de Gabriel, a saber, si C es un carcaj, entonces kC es de tipo de representación finito si y sólo si la gráfica subyacente de C es un diagrama de Dynkin, en este caso hay una biyección entre las raíces positivas en $\mathcal{E}_C$ y los objetos inescindibles en $\mathrm{mod}(C)$, la biyección está dada por $V \mapsto \dim V$.

CAPITULO 2. TEORIAS DE TORSION.

En este capítulo damos las definiciones y los resultados básicos sobre teorías de torsión, ellos nos serán de gran utilidad en lo que resta del trabajo. En particular (3.10) lo usaremos en el teorema de Brenner - Butler (4.4)

Como referencia para teorías de torsión citamos [20].

§3. Teorías de torsión.

3.1. Definiciones.

Sean $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ dos subcategorías plenas de mod A, entonces $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se llama una **teoría de torsión** si satisface las siguientes propiedades:

T1) $\forall\, X\in\mathcal{T},\ Y\in\mathcal{F}$ $\quad Hom_A(X,Y)=0$.

T2) Si $M\in \text{mod} A$ y $\forall\, X\in\mathcal{T}$ $\ Hom_A(X,M)=0$, entonces $M\in\mathcal{F}$.

T3) Si $M\in \text{mod} A$ y $\forall\, Y\in\mathcal{F}$ $\ Hom_A(M,Y)=0$, entonces $M\in\mathcal{T}$.

Si $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión los módulos en $\mathcal{T}$ se llaman módulos **de torsión** y los módulos en $\mathcal{F}$ se llaman módulos **libres de torsión**. Nótese que las condiciones T2) y T3) nos dicen que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{T}$ son máximos con la propiedad T1)

Una teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se llama **escindible** si $\forall M\in \text{mod} A$ $\exists\, X\in\mathcal{T},\ Y\in\mathcal{F}$, con $M=X\oplus Y$.

3.2. Lema.

$\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, extensiones y sumas directas finitas.

Demostración

$\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes por T1) y T2). Que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones se sigue de T1), T3) y de aplicar $Hom_A(-,Y)$ con $Y\in\mathcal{F}$. Finalmente $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas finitas pues $Hom_A(X,-)$ es aditivo. ■

Tenemos el lema dual.

3.3. Lema.

$\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, extensiones y productos finitos ■

3.4. Lema.

Si M_A es un A-módulo, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to tM \to M \to \ell M \to 0$$

tal que $tM \in \mathcal{T}$, $\ell M \in \mathcal{F}$. Además tM es el más grande submódulo de torsión de M y ℓM es el más "grande" cociente libre de torsión de M.

Demostración

Sea $tM := \sum_{L \subseteq M,\, L \in \mathcal{T}} L$, es claro que $tM \in \mathcal{T}$ y que es el más grande submódulo de torsión de M.

Sea $\ell M := M/tM$, entonces

$$0 \to tM \to M \to \ell M \to 0$$

es exacta en mod A.

Sean $X \in \mathcal{T}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(X, \ell M)$. Entonces $\exists\ L \in \mathrm{mod}\,A$ tal que $tM \subseteq L \subseteq M$ e $\mathrm{Im} f \cong L/tM$. Como $X \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes $L/tM \in \mathcal{T}$ y como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones, $L \in \mathcal{T}$. Pero tM es el más grande submódulo de torsión de M, $\therefore tM = L$, $\therefore f = 0$, entonces ℓM es libre de torsión.

Finalmente si $M \xrightarrow{e} M'$ es un epimorfismo, por la propiedad de los conúcleos y porque $\mathrm{Hom}(tM, M') = 0$ (suponemos además que M' es libre de torsión) obtenemos un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & tM \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ell M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nuc}\, e \arrow[r] & M \arrow[r, "e"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ h es epimorfismo y M' es un cociente de ℓM. ■

3.5. Observación.

Si $0 \to M' \xrightarrow{m} M \xrightarrow{e} M'' \to 0$ es exacta en mod A, $M' \in \mathcal{T}$ y $M'' \in \mathcal{F}$, entonces es isomorfa a $0 \to tM \to M \to \ell M \to 0$.

Demostración.

Por (3.4) $m(M') \subseteq tM$, entonces hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & tM \arrow[r] & M \arrow[r] & \ell M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde f es inyectiva. Por el lema de la serpiente $\mathrm{Nuc}\, g \cong \mathrm{Conuc}\, f$, pero por (3.2) y (3.3) $\mathrm{Nuc}\, g \in \mathcal{F}$ y $\mathrm{Conuc}\, f \in \mathcal{T}$, $\therefore$ f, g son isomorfismos. ∎

3.6. Corolario.

Si S_A es un A-módulo simple, entonces $S_A \in \mathcal{T}$ o $S_A \in \mathcal{F}$. ∎

3.7. Corolario.

Si $\forall\, X \in \mathcal{T}$, $Y \in \mathcal{F}$. $\mathrm{Ext}^1_A(Y, X) = 0$, entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinde. ∎

Tenemos el converso de (3.2)

3.8. Proposición.

Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría plena de mod A cerrada bajo cocientes, extensiones y sumas directas finitas, entonces $\exists\, \mathcal{F}$ subcategoría plena de mod A tal que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión.

Demostración.

Sea $\mathcal{F} := \{ Y \in \text{mod}\, A \mid \forall\, X \in \mathcal{T}\ \ \mathrm{Hom}_A(X, Y) = 0 \}$.

Sea $\mathcal{T}' := \{ X \in \text{mod}\, A \mid \forall\, Y \in \mathcal{F}\ \ \mathrm{Hom}_A(X, Y) = 0 \}$.

$(\mathcal{T}', \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, en efecto, T1) y T3) son inmediatos, T2) se sigue de que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Basta probar que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Sea $X' \in \mathcal{T}'$. Sean $C = \bigoplus_{N \subseteq X',\, N \in \mathcal{T}} N$ y $\varepsilon : C \to X'$ el morfismo inducido por las inclusiones. Como $\mathrm{Im}\, \varepsilon$ es finitamente generada, existen $N_1, \ldots, N_n$ submódulos de X' y en $\mathcal{T}$ tales que $\varepsilon(\bigoplus_{i=1}^{n} N_i) = \operatorname{Im}\varepsilon$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas finitas y bajo cocientes, $\therefore M := \operatorname{Im}\varepsilon \in \mathcal{T}$. Si probamos que $X'/M \in \mathcal{F}$, entonces $X'/M = 0$ y por tanto $X' = M \in \mathcal{T}$.

Sean $X \in \mathcal{T}$ y $f \in \operatorname{Hom}_A(X, X'/M)$. Sea $L \in \operatorname{mod} A$ tal que $M \subseteq L \subseteq X'$ e $\operatorname{Im} f = L/M$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes $L/M \cong \operatorname{Im} f \in \mathcal{T}$ y como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones, $\therefore L \in \mathcal{T}$, $\therefore M = L$, $\therefore f = 0$ ■

Tenemos la proposición dual, que es el converso de (3.5)

3.9. Proposición.

Sea $\mathcal{F}$ una subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cerrada bajo submódulos, extensiones y productos finitos, entonces $\exists\ \mathcal{T}$ subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ tal que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión. ■

3.10. Proposición.

Sea $T_A \in \operatorname{mod} A$ tal que $\operatorname{d.p.} T_A \leq 1$ y $\operatorname{Ext}^1_A(T,T) = 0$. Sea $\mathcal{T}(T_A)$ la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cuyos objetos están generados por T_A y sea $\mathcal{F}(T_A)$ la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cuyos objetos Y_A satisfacen $\operatorname{Hom}_A(T, Y) = 0$, entonces $(\mathcal{T}(T_A), \mathcal{F}(T_A))$ es una teoría de torsión.

Demostración.

Por (3.8) basta probar que $\mathcal{T}(T_A)$ es cerrada bajo extensiones.

Sea $0 \to X_1 \to X \to X_2 \to 0$ una sucesión exacta, con $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$, $\therefore \exists\ f_1 : T^m \to X_1$, $f_2 : T^n \to X_2$ epimorfismos.

Consideremos el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & T^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & T^n \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde el renglón de enmedio está inducido por f_2 y el renglón superior es una resolución proyectiva de T^n.

Como P_2 es proyectivo y f_1 es suprayectiva, $\therefore\ \exists\ g: P_2 \to T^m$ tal que $f_1 g = \alpha$.

Ahora consideremos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "1"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dd, bend left, "\beta"] & T^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^m \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "3"] & T^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X' \arrow[r] & T^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

aquí el renglón de enmedio está inducido por g

Como (1) es un cuadrado cocartesiano, $\therefore\ \exists!\ \delta: X'' \to X'$ tal que (2) conmuta y $\beta = \delta g'$. Otra vez usando que (1) es cocartesiano, tenemos que (3) conmuta.

Uniendo los diagramas anteriores adecuadamente, obtenemos el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^m \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & T^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & T^n \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$, $X'' \cong T^m \oplus T^n$. Pero por el lema del cinco γ, δ son suprayectivas, $\therefore\ X \in \mathcal{T}(T_A)$. ■

CAPITULO 3. EL TEOREMA DE BRENNER - BUTLER.

La última generalización de los funtores de reflexión anterior a los módulos de inclinación y a las álgebras inclinadas, fueron los funtores de inclinación introducidos por S. Brenner y M.C.R. Butler en [12].

Posteriormente D Happel y C.M. Ringel introducen los módulos de inclinación. Un A-módulo T_A es un módulo de inclinación si satisface las siguientes tres propiedades:

I1) $\mathrm{d.p.}\, T_A \leq 1$.

I2) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$.

I3) Hay una sucesión exacta de la forma

$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$, con $T', T'' \in \mathrm{add}(T_A)$.

Si $B = \mathrm{End}(T_A)$, ${}_BT_A$ es un B-A bimódulo y están definidos los siguientes funtores.

$F = \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, -) : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, B$ y $G = - \otimes_B T_A : \mathrm{mod}\, B \to \mathrm{mod}\, A$.

Entonces resulta que ${}_BT_A$ satisface las condiciones de inclinación definidas en [12] y que F, G es un par de funtores de inclinación.

Además Happel y Ringel prueban que el teorema de Brenner - Butler sigue valiendo en esta situación más general y, de hecho, prueban un resultado más fuerte, a saber, consideran los funtores

$F' = \mathrm{Ext}^1_A({}_BT_A, -) : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, B$ y $G' = \mathrm{Tor}^B_1(-, {}_BT_A) : \mathrm{mod}\, B \to \mathrm{mod}\, A$, la teoría de torsión $(\mathcal{T}(T_A), \mathcal{F}(T_A))$ generada por T_A (3.10) y las subcategorías plenas de mod B, $\mathcal{Y} = \mathrm{Im}\, F$, $\mathcal{X} = \mathrm{Im}\, F'$, entonces se tiene que $F| : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$, $G| : \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$ son equivalencias de categorías mutuamente inversas y similarmente para $F'| : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$, $G'| : \mathcal{X} \to \mathcal{F}$. Más aun ${}_BT$ es un módulo de inclinación y $A \cong \mathrm{End}({}_BT)^{op}$ canónicamente.

La § 4 está dedicada a dar una prueba completa de este teorema.

El hecho de que ${}_BT$ resulte ser un módulo de inclinación y de que

$A \cong \mathrm{End}({}_B T)^{op}$ hace patente cierta simetría entre los módulos de inclinación derechos y los módulos de inclinación izquierdos, esta simetría es estudiada en la § 5, una consecuencia es que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una teoría de torsión (5.3).

En la § 6 estudiamos la relación que hay entre los A-módulos inyectivos I_A y los A módulos proyectivos P_A tales que $\mathrm{soc}\, I_A = P_A / \mathrm{rad}\, P_A$, a saber, se tiene el llamado lema de conexión (6.1), que dice, $\tau^{-1} F(I_A) = F'(P_A)$, este lema será fundamental para conocer la estructura del carcaj de Auslander - Reiten de una álgebra inclinada (§ 13, § 15).

Además si $P_A \in \mathrm{add}(T_A)$ entonces $F(I_A)$ es un B-módulo inyectivo y todo B-módulo inyectivo es de esa forma (6.4). Si además $I_A \in \mathrm{add}(T_A)$, $F(I_A)$ es un B módulo proyectivo y todo B-módulo proyectivo e inyectivo en $\mathrm{Im}\, F$ es de esa forma (6.5)

§ 4. El teorema de Brenner - Butler.

4.1. Definiciones.

$T_A \in \mathrm{mod}\, A$ se llama un **módulo de inclinación** si satisface las siguientes condiciones:

I1) Hay una sucesión exacta $0 \to P_A'' \to P_A' \to T_A \to 0$ con $P', P'' \in \mathrm{add}(A_A)$. O sea que $\mathrm{d.p.}\, T_A \leq 1$.

I2) $\mathrm{Ext}_A^1(T, T) = 0$.

I3) Hay una sucesión exacta $0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$ con $T', T'' \in \mathrm{add}(T_A)$.

Dado un módulo de inclinación T_A con $B = \mathrm{End}(T_A)$ definimos los siguientes funtores:

$$F: \text{mod } A \to \text{mod } B \qquad M_A \mapsto \text{Hom}_A({}_BT_A, M_A)$$

$$F': \text{mod } A \to \text{mod } B \qquad M_A \mapsto \text{Ext}^1_A({}_BT_A, M_A)$$

$$G: \text{mod } B \to \text{mod } A \qquad N_B \mapsto N_B \otimes_B T_A$$

$$G': \text{mod } B \to \text{mod } A \qquad N_B \mapsto \text{Tor}_1^B(N_B, {}_BT_A)$$

las siguientes subcategorías plenas de mod A,

$$\mathcal{F} = \{ M_A \mid F(M_A) = 0 \}$$
$$\mathcal{T} = \{ M_A \mid F'(M_A) = 0 \}$$

y las siguientes subcategorías plenas de mod B,

$$\mathcal{X} = \{ N_B \mid G(N_B) = 0 \}$$
$$\mathcal{Y} = \{ N_B \mid G'(N_B) = 0 \}$$

4.2. Observación.

(G,F) es un par adjunto, es decir, hay un isomorfismo natural

$$\tau: \text{Hom}_A(G-,-) \to \text{Hom}_B(-,F-)$$

definido para $M_A \in \text{mod } A$ y $N_B \in \text{mod } B$ de la siguiente manera:

$$\tau_{NM}: \text{Hom}_A(G(N_B), M_A) \to \text{Hom}_B(N_B, F(M_A))$$
$$f \longmapsto (n \mapsto (t \mapsto f(n \otimes t)))$$

o, escrito de otra manera $\tau_{NM}(f)(n)(t) = f(n\otimes t)$. τ_{NM} es un isomorfismo de grupos abelianos.

También hay transformaciones naturales:

$$\eta: 1_{\text{mod } B} \to FG \quad \text{y} \quad \varepsilon: GF \to 1_{\text{mod } A}$$

definidas como sigue:

$$\eta_N: N_B \to FG(N_B), \quad n \mapsto (t \mapsto n\otimes t) \qquad \varepsilon_M: GF(M_A) \to M_A, \quad f\otimes t \mapsto f(t)$$

De las propiedades de los funtores adjuntos se tiene que $F(\varepsilon_M)$ es epi escindible.

4.3. Lema

$T_A \in \text{mod } A$, $B = \text{End}(T_A)$, entonces

1) $\text{add}(T_A) \underset{\text{Hom}_B(-,{}_BT_A)|}{\overset{\text{Hom}_A(-,{}_BT_A)|}{\rightleftarrows}} \text{add}({}_BB)$ son equivalencias de categorías mutuamente inversas.

2) Si $\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \text{End}({}_BT)^{op} \\ a & \longmapsto & (t \mapsto ta) \end{array}$ es isomorfismo, entonces

$$\text{add}(A_A) \underset{\text{Hom}_B(-,{}_BT_A)|}{\overset{\text{Hom}_A(-,{}_BT_A)|}{\rightleftarrows}} \text{add}({}_BT)$$ son también, equivalencias de categorías mutuamente inversas

Demostración

Probaremos 1) . 2) se prueba similarmente.

$\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T_A, {}_BT_A), {}_BT_A) = \text{Hom}_B({}_BB, {}_BT_A) \cong T_A$ canónicamente.

$\therefore\ \forall\ T'_A \in \text{add}(T_A)$ $\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T'_A, {}_BT_A), {}_BT_A) \cong T'_A$ y el isomorfismo es natural

Análogamente $\forall\ {}_BQ \in \text{add}({}_BB)$ $\text{Hom}_A(\text{Hom}_B({}_BQ, {}_BT_A), {}_BT_A) \cong {}_BQ$ y el isomorfismo es natural. ■

4.4. Teorema

Sea $T_A \in \text{mod } A$ un módulo de inclinación y $B = \text{End}(T_A)$, con la notación de (4.1) tenemos:

1) $\mathcal{T} = \mathcal{T}(T_A)$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T_A)$

2) $\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \text{End}({}_BT)^{op} \\ a & \longmapsto & (t \mapsto ta) \end{array}$ es un isomorfismo de k-álgebras

3) ${}_BT$ es un módulo de inclinación.

4) $G'F = 0 = GF'$ y $F'G = 0 = FG'$.

5) $F| : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ y $G| : \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$ son equivalencias de categorías mutuamente inversas

6) $F'| : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ y $G'| : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ son equivalencias de categorías, mutuamente inversas.

Demostración

(1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$

Demostración:

Por I3) hay una sucesión exacta

$$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0 \quad , \text{ con } T', T'' \in add(T_A)$$

Sea $M_A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$, aplicando $Hom_A(-, M_A)$ a la sucesión de arriba, obtenemos la sucesión exacta

$$Hom_A(T', M) \to Hom_A(A, M) \to Ext^1_A(T'', M)$$

Como $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$, por tanto $Hom_A(T', M) = 0 = Ext^1_A(T'', M)$, en consecuencia $M \cong Hom_A(A, M) = 0$. ∎

(2). $\mathcal{T}(T_A) \subseteq \mathcal{T}$

Demostración:

Sea $M_A \in \mathcal{T}(T_A)$, $\therefore \exists e : T_A^m \to M_A$ supraoyectiva, la sucesión exacta $0 \to Nuc\, e \to T_A^m \to M_A \to 0$, da lugar a la sucesión exacta $Ext^1_A(T, T^m) \to Ext^1_A(T, M) \to Ext^2_A(T, Nuc\, e)$.

Por I2) $Ext^1_A(T, T^m) = 0$ y por I1) $Ext^2_A(T, Nuc\, e) = 0$.

$\therefore F'(M_A) = 0$. ∎

(3) $F'G = 0$.

Demostración:

Sea $e : B^n \to N_B$ supraoyectiva $\therefore G(e)$ es supraoyectiva

Como $G(B^n) = B^n \otimes_B T_A \cong (B \otimes_B T_A)^n \cong T_A^n$, $\therefore G(N_B) \in \mathcal{T}(T_A)$

Por (2) $G(N_B) \in \mathcal{T}$ $\therefore F'G(N_B) = 0$ ∎

(4) $\forall M_A \in mod A$, $Conuc(\, GF(M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M\,) \in \mathcal{F}$. Si además $M_A \in \mathcal{T}$, ε_M es un isomorfismo.

Demostración:

Factoricemos ε_M a través de su imagen:

$$\begin{tikzcd} GF(M) \arrow[rr, "\varepsilon_M"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & & M \\ & M' \arrow[ur, "\varepsilon''"'] & \end{tikzcd}$$

Como $F(\varepsilon_M)$ es epi escindible (4.2), $\therefore$ $F(\varepsilon'')$ es suprayectiva

Sea $M'' = \operatorname{Conuc}(\varepsilon'') = \operatorname{Conuc}(\varepsilon_M)$.

Aplicando F a la sucesión exacta

$$0 \to M' \xrightarrow{\varepsilon''} M \longrightarrow M'' \to 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\xi = 0 \to F(M') \xrightarrow{F(\varepsilon'')} F(M) \to F(M'') \to F'(M') \to F'(M) \to F'(M'') \to 0$$

Por (3) $GF(M) \in \mathcal{T}(T_A)$, $\therefore$ $M' \in \mathcal{T}(T_A) \subseteq \mathcal{T}$

$\therefore$ $F'(M') = 0$, y como $F(\varepsilon'')$ es suprayectiva

$\therefore$ $F(M'') = 0$, $\therefore$ $\operatorname{Conuc}(\varepsilon_M) = M'' \in \mathcal{F}$.

Supongamos ahora que además $M \in \mathcal{T}$.

$\therefore$ $F'(M) = 0$, y por la exactitud de ξ, $M'' \in \mathcal{T}$.

Por (1) $M'' = 0$, $\therefore$ ε_M es suprayectiva, $\therefore$ $M \in \mathcal{T}(T_A)$.

$\therefore$ $\exists\, g : T^m \to M$ suprayectiva.

Sean $g = (g_j) : T^m \to M$, $\{f_1, \dots, f_n\}$ una base para $\operatorname{Hom}_A(T, M)$

y sea $f = (f_i) : T^n \to M$.

$\therefore$ $M = \operatorname{Im} g = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Im} g_j \subseteq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i = \operatorname{Im} f$, $\therefore$ f es suprayectiva

$\operatorname{Hom}_A(T, f)$ también es suprayectiva, pues para $g \in \operatorname{Hom}_A(T, M)$

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$, tales que $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ y $h : T \longrightarrow T^n$, $t \longmapsto (t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)$ es tal que $g = f \circ h = \operatorname{Hom}_A(T, f)(h)$.

Sea $N = \operatorname{Nuc} f$, la sucesión exacta $0 \to N \to T^n \to M \to 0$ da origen a la sucesión exacta $F(T^n) \xrightarrow{F(f)} F(M) \to F'(N) \to F'(T^n)$.

Por I2) $F'(T^n) = 0$, pero $F(f) = \operatorname{Hom}_A(T, f)$ es suprayectiva, $\therefore$ $F'(N) = 0$, $\therefore$ $N \in \mathcal{T}$. Aplicando el mismo razonamiento que a M, obtenemos $f_1: T^l \to N$ suproyectiva y tal que $F(f_1)$ también lo es. Como $0 \to N \to T^n \to M \to 0$ y $0 \to F(N) \to F(T^n) \to F(M) \to 0$ son exactas, soldando obtenemos las sucesiones exactas $T^l \to T^n \to M \to 0$ y $F(T^l) \to F(T^m) \to F(M) \to 0$.

G da origen a una nueva sucesión exacta y con ella formamos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} GF(T^l) & \to & GF(T^m) & \to & GF(M) & \to & 0 \\ \downarrow \varepsilon_{T^l} & & \downarrow \varepsilon_{T^m} & & \downarrow \varepsilon_M & & \\ T^l & \to & T^m & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

Pero $\varepsilon_T : B \otimes_B T_A \to T_A$ es el isomorfismo canónico, $\therefore$ ε_{T^l} y ε_{T^m} son también isomorfismos, $\therefore$ ε_M es isomorfismo ■

(5) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T_A)$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}(T_A)$.

Demostración:

La primera igualdad es por definición, la segunda igualdad fue probado en (2) y en (4) ▪

(6) $G'F = 0$

Demostración:

Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ una base de $Hom_A(T, M)$, $M_A \in modA$.

$f: (f_i): T^n \to M$ no es necesariamente suproyectiva, pero como en (4) $F(f)$ sí lo es. Sean $N = Nuc f$ y $M' = Im f$.

Como $F(f)$ es suproyectiva, la inclusión $M' \hookrightarrow M$ va bajo F a un isomorfismo y la sucesión exacta $0 \to N \to T^n \to M' \to 0$ va bajo F a la sucesión exacta $0 \to F(N) \to F(T^n) \to F(M') \to 0$.

Aplicando G y considerando ε, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccccccc} G'F(T^n) & \to & G'F(M') & \to & GF(N) & \to & GF(T^n) & \to & GF(M') & \to & 0 \\ & & & & \downarrow \varepsilon_N & & \downarrow \varepsilon_{T^n} & & \downarrow \varepsilon_{M'} & & \\ & & 0 & \to & N & \to & T^n & \to & M' & \to & 0 \end{array}$$

Como $F(T^n) \cong B^n$, $G'F(T^n) = 0$. Por el mismo razonamiento que en (4), $N \in \mathcal{T}$.

Por (4) $\varepsilon_N, \varepsilon_{T_n}, \varepsilon_{M'}$ son isomorfismos $\therefore$ $G'F(M) \cong G'F(M') = 0$ ∎

(∗) $\varphi : A \to \operatorname{End}({}_BT)^{op}$ es un isomorfismo de k-álgebras.
$a \mapsto (t \mapsto ta)$

Demostración:

Es fácil verificar que φ es homomorfismo, probaremos que φ es biyectiva.

Tenemos los siguientes isomorfismos naturales:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_B({}_BT_A, {}_BT) &\overset{①}{\cong} \operatorname{Hom}_B({}_BT_A, {}_BT_A \otimes_A A) \\
&\overset{②}{\cong} \operatorname{Hom}_B({}_BT_A, \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Hom}_k({}_BT_A \otimes_A A, k), k)) \\
\text{(adjunción)} &\overset{③}{\cong} \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Hom}_k({}_BT_A \otimes_A A, k) \otimes_B T_A, k) \\
\text{(adjunción)} &\overset{④}{\cong} \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Hom}_A({}_BT_A, \operatorname{Hom}_k({}_AA_k, k)) \otimes_B T_A, k) \\
&= DGFD({}_AA)
\end{aligned}
$$

Sea $\alpha : \operatorname{End}({}_BT) \to DGFD({}_AA)$ el isomorfismo anterior.

Como $D({}_AA)$ es inyectivo en mod A, $D({}_AA) \in \mathcal{I}$ y por (4) $\varepsilon := \varepsilon_{D({}_AA)}$ es isomorfismo, $\therefore$ $D(\varepsilon) : DD({}_AA) \to DGFD({}_AA)$ es isomorfismo. $D(\varepsilon)(g) = g \circ \varepsilon$

Sea $\sigma : {}_AA \to DD({}_AA)$ el isomorfismo canónico
$a \mapsto (f \mapsto f(a))$

Tenemos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & DGFD({}_AA) \\
A \arrow[ur, "D(\varepsilon)\circ\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & \operatorname{End}({}_BT) \arrow[uu, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

α y $D(\varepsilon)\circ\sigma$ son isomorfismos de A-módulos izquierdos, basta probar que el triángulo conmuta para ver que φ es biyectiva.

Sea $\rho : {}_BT \otimes_A A \to DD({}_BT \otimes_A A)$ el isomorfismo canónico

Sea $\varepsilon' : \operatorname{Hom}_A({}_BT_A, D({}_AA)) \to \operatorname{Hom}_k({}_BT \otimes_A A, k)$ el isomorfismo de adjunción
$f \longmapsto (t \otimes a \mapsto f(t)(a))$

Cálculo de α:

$$h \overset{(1)}{\longmapsto} \bar{h} : T \to T\otimes A \overset{(2)}{\longmapsto} p\circ\bar{h} = \bar{\bar{h}} : T \to DD(T\otimes A)$$
$$t \mapsto h(t)\otimes 1$$

$$\bar{\bar{h}} \overset{(3)}{\longmapsto} h' : D(T\otimes A)\otimes T \longrightarrow k \qquad \overset{(4)}{\longmapsto} h'' = h'\circ(\tau\otimes 1_T) : GFD({}_AA) \to k$$
$$\psi\otimes t \longmapsto \bar{\bar{h}}(t)(\psi)$$

El diagrama conmuta:

Sea $a \in A$, sea $h := \varphi(a)$

Sea $f\otimes b \in GFD({}_AA)$

$\therefore$ $D(t)\sigma(a)(f\otimes b) = \sigma(a)\circ\tau(f\otimes b) = \tau(a)(f(b)) = f(b)(a)$

y $\alpha\varphi(a)(f\otimes b) = \alpha(h)(f\otimes b) = h''(f\otimes b) = h'\circ(\tau\otimes 1_T)(f\otimes b) =$
$h'(\tau(f)\otimes b) = \bar{\bar{h}}(b)(\tau(f)) = p\circ\bar{h}(b)(\tau(f)) = p(h(b)\otimes 1)(\tau(f)) =$
$= \tau(f)(h(b)\otimes 1) = f(h(b))(1) = f(ba)(1) = f(b)\cdot a(1) = f(b)(a)$ ■

(8). $\forall\, N_B \in \mathcal{Y}$, η_N es isomorfismo.

Demostración:

Sea $0 \to L_B \to P_B \to N_B \to 0$ una sucesión exacta, con P_B proyectivo. Aplicando G a la sucesión anterior obtenemos la sucesión exacta $0 \to G'(N) \to G(L) \to G(P) \to G(N) \to 0$

Por (5) $G(L) \in \mathcal{X}$, aplicando F a la sucesión anterior, obtenemos la sucesión exacta $0 \to FG(L) \to FG(P) \to FG(N) \to F'G(L) = 0$.

Sea $0 \to L'_B \xrightarrow{m} P'_B \to L_B \to 0$ exacta, con P'_B proyectivo, la aplicación de G nos lleva a la sucesión exacta
$G(L') \xrightarrow{G(m)} G(P') \to G(L) \to 0$. Sea $N = \operatorname{Im} G(m)$. Como $G(L)$ está en $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T_A)$, $\therefore$ $N \in \mathcal{X}(T_A) = \mathcal{X}$.

La sucesión exacta $0 \to N \to G(P') \to G(L) \to 0$ va bajo F a la sucesión exacta $0 \to F(N) \to FG(P') \to FG(L) \to F'(N) = 0$. Así obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
FG(P') & \to & FG(P) & \to & FG(N) & \to & 0 \\
\uparrow \eta_{P'} & & \uparrow \eta_P & & \uparrow \eta_N & & \\
P' & \to & P & \to & N & \to & 0
\end{array}$$

$\eta_B : B_B \to \operatorname{Hom}_A({}_BT_A, B\otimes_B T_A)$ es el isomorfismo canónico
$B_B = \operatorname{Hom}_A({}_BT_A, T_A) \cong \operatorname{Hom}_A({}_BT_A, B\otimes_B T_A)$

Como P y P' son proyectivos, η_P y $\eta_{P'}$ son isomorfismos
∴ η_N es isomorfismo ■

(9) $GF' = 0$ y $\forall M_A \in \mathcal{T}$, $M_A \cong G'F'(M_A)$ y este isomorfismo es natural.

Demostración:

Sea $M_A \in \operatorname{mod} A$, y sea $0 \to M_A \to I_A \to C_A \to 0$ una sucesión exacta, con I_A inyectivo. Aplicando F obtenemos la sucesión exacta

$0 \to F(M) \to F(I) \to F(C) \to F'(M) \to F'(I) = 0$, que bajo G va a dar a la sucesión exacta superior del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} GF(I) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_I"'] & GF(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & GF'(M) \arrow[r] & 0 \\ I \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd}$$

Como I es inyectivo, $I \in \mathcal{T} = T(T_A)$ ∴ $C \in T(T_A) = \mathcal{T}$ y por (4) ε_I, ε_C son isomorfismos ∴ $GF'(M) = 0$.

Si además $M_A \in \mathcal{T}$, $F(M) = 0$ y la sucesión exacta $0 \to F(I) \to F(C) \to F'(M) \to 0$ va bajo G a la sucesión exacta

$0 \underset{(6)}{=} G'F(C) \to G'F'(M) \to GF(I) \to GF(C) \to 0$

El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G'F'(M) \arrow[r] & GF(I) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_I"] & GF(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

nos da la existencia de un isomorfismo $G'F'(M) \to M$ que hereda la naturalidad de ε ■

(10) d.p. $_BT \leq 1$

Demostración:

Por I3) hay una sucesión exacta $0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$ con $T', T'' \in \operatorname{add}(T_A)$. Aplicando a esta sucesión el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ y usando I2) se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T''_A, {}_BT_A) \to \mathrm{Hom}_A(T'_A, {}_BT_A) \to \mathrm{Hom}_A(A_A, {}_BT_A) \to 0$$

Por (1.3) $\mathrm{Hom}_A(T''_A, {}_BT_A)$, $\mathrm{Hom}_A(T'_A, {}_BT_A) \in \mathrm{add}({}_BB)$, además ${}_BT \cong \mathrm{Hom}_A(A_A, {}_BT_A)$, $\therefore$ d.p ${}_BT \leq 1$ ∎

(11) Hay una sucesión exacta $0 \to {}_BB \to {}_BX' \to {}_BX'' \to 0$ con $X', X'' \in \mathrm{add}({}_BT)$

Demostración:

Por I 1) hay una sucesión exacta $0 \to P''_A \to P'_A \to T_A \to 0$ con $P', P'' \in \mathrm{add}(A_A)$; aplicando otra vez $\mathrm{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ y usando I 2) obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T_A, {}_BT_A) \to \mathrm{Hom}_A(P'_A, {}_BT_A) \to \mathrm{Hom}_A(P''_A, {}_BT_A) \to 0$$

De (7) y (1.3) se sigue que $\mathrm{Hom}_A(P'_A, {}_BT_A)$, $\mathrm{Hom}_A(P''_A, {}_BT_A) \in \mathrm{add}({}_BT)$, además ${}_BB = \mathrm{Hom}_A(T_A, {}_BT_A)$. ∎

(12) $FG' = 0$ y $\forall N_B \in X$, $N_B \cong F'G'(N)$ y este isomorfismo es natural.

Demostración:

Sea $N_B \in \mathrm{mod}\, B$ y sea $0 \to K_B \to P_B \to N_B \to 0$ exacta con P_B proyectivo. Esta sucesión va bajo G a la sucesión exacta

$$0 = G'(P) \to G'(N) \to G(K) \to G(P) \to G(N) \to 0$$

Aplicando F obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FG'(N) \arrow[r] & FG(K) \arrow[r] & FG(P) \\
 & 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[u, "\eta_K"] & P \arrow[u, "\eta_P"]
\end{tikzcd}$$

Por (10) d.p ${}_BT \leq 1$, $\therefore$ $0 \to G'(K) \to G'(P) = 0$ es exacta

$\therefore$ $K, P \in Y$ y por (8) η_K, η_P son isomorfismos

$\therefore$ $FG'(N) = 0$.

Si además $N_B \in X$, $G(N) = 0$ y $0 \to G'(N) \to G(K) \to G(P) \to 0$ va bajo F a la sucesión exacta superior del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & FG(K) \arrow[r] & FG(P) \arrow[r] & F'G'(N) \arrow[r] & F'G(K) = 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[u, "\eta_K"] & P \arrow[r] \arrow[u, "\eta_P"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(3)

Como η_K, η_P son isomorfismos inducen un isomorfismo $N \to F'G'(N)$ que hereda la naturalidad de η ■

(13) $\operatorname{Ext}^1_B({}_BT, {}_BT) = 0$.

Demostración:

Bastará probar que $\operatorname{Ext}^1_B(D({}_BT)\ D({}_BT)) = 0$.

Sea $0 \to D({}_BT) \to N_B \to D({}_BT) \to 0$ exacta.

$D({}_BT) = \operatorname{Hom}_k({}_BT, k) \cong \operatorname{Hom}_k({}_BT_A \otimes_A A, k) \cong \operatorname{Hom}_A({}_BT, \operatorname{Hom}_k({}_AA, k))$
$= FD({}_AA)$ (El último isomorfismo es un isomorfismo de adjunción).

Por (6) $D({}_BT) \cong FD({}_AA) \in \mathcal{Y}$, aplicando G obtenemos la sucesión exacta $0 = G'(D({}_BT)) \to GD({}_BT) \to G(N_B) \to GD({}_BT) \to 0$; aplicando F y usando (3) llegamos a la sucesión exacta superior del diagrama conmutativo

$$\circledast \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & FG(D({}_BT)) \arrow[r] & FG(N_B) \arrow[r] & FG(D({}_BT)) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D({}_BT) \arrow[r] \arrow[u, "\eta_{D({}_BT)}"] & N_B \arrow[r] \arrow[u, "\eta_N"] & D({}_BT) \arrow[r] \arrow[u, "\eta_{D({}_BT)}"] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $GD({}_BT) \cong GF\ D({}_AA) \underset{\varepsilon_{D({}_AA)}}{\cong} D({}_AA)$, $\therefore$ $GD({}_BT)$ es inyectivo $\therefore$ $0 \to GD({}_BT) \to G(N_B) \to GD({}_BT) \to 0$ se escinde, $\therefore$ la sucesión superior de $\circledast$ se escinde. Es muy fácil verificar que $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo extensiones, $\therefore$ $N_B \in \mathcal{Y}$ y por (8) $\eta_{D({}_BT)}$, η_N son isomorfismos, $\therefore$ la sucesión inferior de $\circledast$ se escinde. ■

La demostración está terminada; 1) sigue de (5), 2) fue probado en (7), 3) en (10), (11) y (13), 4) lo fue en (3), (6), (9) y (12), finalmente 5) se sigue de (4) y (8) y 6) de (9) y (12) ■

Obsérvese que las pruebas de (2), (4) y (7) están tomadas de [12].

4.5. Observación.

Si T_A es un módulo de inclinación y P_A es proyectivo, hay una sucesión exacta $0 \to P_A \to T'_A \to T''_A \to 0$, con $T', T'' \in \operatorname{add}(T_A)$.

Demostración.

Sea $P_A \in \operatorname{add}(A_A)$, por (4.3) y (4.4) ${}_BN := \operatorname{Hom}_A(P_A, {}_BT_A) \in \operatorname{add}({}_BT)$

Como $\text{d.p.}\, {}_BT \leq 1$, hay una sucesión exacta

$0 \to {}_BQ' \to {}_BQ \to {}_BN \to 0$, con $Q', Q \in \operatorname{add}({}_BB)$.

Aplicando $\operatorname{Hom}_B(-, {}_BT_A)$ y usando que $N \in \operatorname{add}({}_BT)$ y $\operatorname{Ext}^1({}_BT, {}_BT) = 0$, obtenemos la sucesión exacta

$0 \to \operatorname{Hom}_B({}_BN, {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_B({}_BQ, {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_B({}_BQ', {}_BT_A) \to 0$, de (4.3) se sigue que esta es la sucesión exacta buscada. ∎

4.6. Observación.

Sean T_A un módulo de inclinación y $B = \operatorname{End}(T_A)$, entonces A es inescindible como k-álgebra si y sólo si B lo es.

Demostración.

Como T_A es un módulo de inclinación, $\varphi: A \to \operatorname{End}({}_BT)^{op}$, $a \mapsto (x \mapsto xa)$ es un isomorfismo de k-álgebras.

Para probar el resultado daremos una biyección entre los idempotentes centrales de A y los de B.

Sean $C_A := \{e \in A \mid e \text{ es idempotente central}\}$

$C_B := \{f \in B \mid f \text{ es idempotente central}\}$.

Sea $\bar{\varphi}: C_A \to C_B$, $e \mapsto \varphi_e$

Sean $x \in T$, $a \in A$, $\therefore \varphi_e(xa) = (xa)e = (xe)a = \varphi_e(x) \cdot a$

$\therefore \varphi_e \in \operatorname{End}(T_A) = B$. Además es claro que φ_e es idempotente

Por último si $\psi \in \operatorname{End}(T_A)$ y $x \in T$, $\psi \cdot \varphi_e(x) = \psi(x \cdot e) = \psi(x) \cdot e = \varphi_e\, \psi(x)$, $\therefore \varphi_e$ es central, $\therefore \bar{\varphi}$ está bien definida.

Como φ es inyectiva, $\bar{\varphi}$ es inyectiva.

Sea $\psi \in C_B \subseteq \mathrm{End}(T_A)$, como antes se prueba que $\psi \in \mathrm{End}({}_BT)$ y que es idempotente central, entonces como φ es suprayectiva $\bar{\varphi}$ también lo es. ∎

§ 5. Simetría del concepto de módulo de inclinación.

Nosotros pudimos haber comenzado por un módulo de inclinación izquierdo ${}_BT$, en lugar de uno derecho; sin embargo el resultado es completamente simétrico. Es decir si ${}_BT$ es un módulo de inclinación y $A = \mathrm{End}({}_BT)^{op}$, entonces se tiene que T_A es un módulo de inclinación y que $B \cong \mathrm{End}(T_A)$ canónicamente, más aún, con la notación de (4.4), $\mathcal{X} = D\mathcal{T}({}_BT)$ y $\mathcal{Y} = D\mathcal{F}({}_BT)$. Para esto necesitaremos el siguiente lema.

5.1. Lema

Si $\mathrm{d.p.}\ {}_BT \leq 1$, entonces

$$D({}_BN) \otimes {}_BT_A \cong D\,\mathrm{Hom}_B({}_BT_A, {}_BN) \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Tor}_1^B(D({}_BN), {}_BT_A) \cong D\,\mathrm{Ext}^1_B({}_BT_A, {}_BN)$$

y los isomorfismos son naturales en ${}_BN$.

Demostración.

Para ${}_BM$, ${}_BN$ tenemos la transformación natural

$$\begin{aligned} \gamma_{NM} : D({}_BN) \otimes_B {}_BM &\longrightarrow D\,\mathrm{Hom}_B(M, N) \\ \varphi \otimes m &\longmapsto (f \longmapsto \varphi \circ f(m)) \end{aligned}$$

γ_{NB} es el isomorfismo canónico

$$D({}_BN) \otimes_B B \cong D({}_BN) \cong D\,\mathrm{Hom}_B(B, N)$$

$\therefore\ \forall\, P \in \mathrm{add}({}_BB)$, γ_{NP} es isomorfismo.

Sea $0 \to {}_BP'' \to {}_BP' \to {}_BT \to 0$ una resolución proyectiva, aplicando $D\,Hom_B(-, {}_BN)$ y $D({}_BN)\otimes_B -$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to Tor_1^B(D({}_BN), {}_BT) & \to & D({}_BN)\otimes_B P'' & \to & D({}_BN)\otimes_B P' & \to & D({}_BN)\otimes_B T & \to 0 \\
\downarrow \gamma'_{NT} & & \downarrow \gamma_{NP''} & & \downarrow \gamma_{NP'} & & \downarrow \gamma_{NT} & \\
0 \to D\,Ext_B^1({}_BT, {}_BN) & \to & D\,Hom_B({}_BP'', {}_BN) & \to & D\,Hom_B({}_BP', {}_BN) & \to & D\,Hom_B({}_BT, {}_BN) & \to 0
\end{array}$$

Como $\gamma_{NP'}$, $\gamma_{NP''}$ son isomorfismos, γ_{NT} lo es y hay definido un isomorfismo natural γ'_{NT}. ∎

5.2. Corolario.

$D\mathcal{Y} = \mathcal{T}({}_BT)$ y $D\mathcal{X} = \mathcal{F}({}_BT)$

Demostración.

$\mathcal{T}({}_BT) = \{{}_BN \mid Ext_B^1({}_BT_A, {}_BN) = 0\} = \{{}_BN \mid D\,Ext_B^1({}_BT_A, {}_BN) = 0\} \overset{(5.1)}{=}$

$= \{{}_BN \mid Tor_1^B(D({}_BN), {}_BT_A) = 0\} = \{{}_BN \mid G'(D({}_BN)) = 0\} = \{D(N_B) \mid G'(N_B) = 0\} =$

$= D\mathcal{Y}$.

Similarmente $\mathcal{F}({}_BT) = D\mathcal{X}$. ∎

5.3. Corolario.

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una teoría de torsión. ∎

5.4. Corolario.

Las restricciones de los funtores

$$\text{mod } A \underset{D\,Hom_B({}_BT_A, -)}{\overset{D\,Hom_A({}_BT_A, -)}{\rightleftarrows}} B \text{ mod}$$

definen una dualidad entre $\mathcal{T}(T_A)$ y $\mathcal{T}({}_BT)$, y las restricciones de los funtores

$$\text{mod } A \underset{D\,Ext_B^1({}_BT_A, -)}{\overset{D\,Ext_A^1({}_BT_A, -)}{\rightleftarrows}} B \text{ mod}$$

definen una dualidad entre $\mathcal{F}(T_A)$ y $\mathcal{F}({}_BT)$.

Demostración.

Sean $M_A \in \mathcal{T}(T_A)$, ${}_BN \in \mathcal{Y}({}_BT)$, entonces

$$D\,\mathrm{Hom}_B({}_BT_A,\ D\,\mathrm{Hom}_A({}_BT_A, M_A)) \underset{(2.1)}{\cong} DD\,\mathrm{Hom}_A({}_BT_A, M_A) \otimes_B T_A \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, M_A) \otimes_B T_A = GF(M_A) \underset{(1.4)}{\cong} M_A \quad \text{y}$$

$$D\,\mathrm{Hom}_A({}_BT_A,\ D\,\mathrm{Hom}_B({}_BT_A, {}_BN)) \underset{(2.1)}{\cong} D\,\mathrm{Hom}_A({}_BT_A,\ D({}_BN) \otimes_B T_A) =$$

$DFGD({}_BN) \underset{(1.4)}{\cong} DD({}_BN) \cong {}_BN$. y los isomorfismos son naturales.

La segunda parte se demuestra similarmente ∎

§6. El lema de conexión.

La relación que hay entre los B-módulos de las formas $F(I)$ y $F'(P)$, donde I es un A-módulo inyectivo inescindible y P es un A-módulo proyectivo inescindible, serán muy útiles más adelante.

6.1. Lema de conexión.

Sea T_A un módulo de inclinación con $B = \mathrm{End}(T_A)$. Sean I_A un inyectivo y P_A un proyectivo tales que $\mathrm{soc}\, I_A \cong P_A/\mathrm{rad}\, P_A$, entonces

$\tau^{-1}\,\mathrm{Hom}_A({}_BT_A, I_A) = \mathrm{Ext}^1_A({}_BT_A, P_A)$

Demostración.

Por (1.5) hay una sucesión exacta $\xi:\ 0 \to P_A \to T'_A \xrightarrow{\pi} T''_A \to 0$, con $T', T'' \in \mathrm{add}(T_A)$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ obtenemos la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Hom}_A(T'', T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\pi,T)} \mathrm{Hom}_A(T', T) \to \mathrm{Hom}_A(P_A, {}_BT_A) \to 0$, ésta es una resolución proyectiva de $\mathrm{Hom}_A(P_A, {}_BT_A)$ con $\mathrm{Hom}_A(T'', T)$ minimal. Por (1.5) si $X_A \in \mathrm{add}(T_A)$,

$\mathrm{Hom}_A(-, {}_BT_A)| : \mathrm{Hom}_A(T_A, X_A) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X_A, {}_BT_A), \mathrm{Hom}_A(T_A, {}_BT_A))$

es una biyección, y usando que ${}_BB = \mathrm{Hom}_A(T_A, {}_BT_A)$ se tiene el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T_A, T'_A) \arrow[rrr, "\mathrm{Hom}_A(T,\pi)"] \arrow[ddd, "\mathrm{Hom}_A(-,{}_BT_A)|"', "\cong"] & & & \mathrm{Hom}_A(T_A, T''_A) \arrow[ddd, "\cong"', "\mathrm{Hom}_A(-,{}_BT_A)|"] \\
& f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \pi \circ f \arrow[d, mapsto] & \\
& \mathrm{Hom}_A(f,T) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_A(\pi\circ f, T) = \mathrm{Hom}_A(f,T)\circ\mathrm{Hom}_A(\pi,T) & \\
\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T'_A, {}_BT_A), {}_BB) \arrow[rrr, "\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(\pi,T),\, B)"'] & & & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T''_A, {}_BT_A), {}_BB)
\end{tikzcd}$$

Aplicando F a ξ se obtiene la sucesión exacta,

$$F(T') \xrightarrow{F(\pi)} F(T'') \to F'(P) \to F'(T') = 0$$

Por otra parte $\quad Tr\, Hom_A(P_A, {}_BT_A) = Conuc(Hom_B(Hom_A(T, T), B)) \cong$

$\cong Conuc\; F(\pi) \; = \; F'(P)$.

Además como $\quad P_A/rad\,P_A \cong soc\,I_A \quad$ hay un isomorfismo canónico

$Hom_A({}_BT_A, I_A) \cong Hom_A({}_BT_A, D\,Hom_A(P_A, A_A)) \cong Hom_k({}_BT_A \otimes_A Hom_A(P_A, A_A), k)$

$\cong \quad D\,Hom_A(P_A, {}_BT_A)$

$\therefore \quad \tau^{-1} F(I_A) = Tr\, D\, Hom_A({}_BT_A, I_A) \cong Tr\, Hom_A(P_A, {}_BT_A) \cong F'(P)$ ■

La siguiente reformulación del lema de conexión para B-módulos izquierdos resultará útil.

6.2. Observación.

Sea T_A un módulo de inclinación con $B = End(T_A)$

1) Si $\quad I_A$ es un inyectivo y P_A es un proyectivo tales que $soc\,I_A \cong P_A/rad\,P_A$, entonces $\quad \tau D F(I_A) \cong \quad DF'(P_A)$

2) Si $\; {}_BJ \;$ es un inyectivo y ${}_BQ$ es un proyectivo tales que $soc\,{}_BJ \cong {}_BQ/rad\,{}_BQ$, entonces $\quad \tau D\, Hom_B({}_BT_A, {}_BJ) \cong D\, Ext^1_B({}_BT_A, {}_BQ)$

Demostración.

1) se sigue de (3.1) y de que $\quad D\tau^{-1} = D\,Tr\,D = \tau D$

2) se debe a la simetría de los módulos de inclinación ■

6.3. Observación.

Sea T_A un módulo de inclinación con $\quad B = End(T_A)$. Sea $T'_A \in add(T_A)$, luego $\quad Q_B = F(T')$ es proyectivo. Sea $\quad J_B$ inyectivo con $soc\,J_B = Q_B/rad\,Q_B$, entonces $\quad \tau T'_A \cong Tor_1^B(J_B, {}_BT_A)$

Demostración.

$$Tor_1^B(J_B, {}_BT_A) \underset{(2.1)}{\cong} D\,Ext^1_B({}_BT_A, D(J_B)) \underset{(3.2)}{\cong} \tau D\, Hom_B({}_BT_A, D(Q_B)) \cong \tau T'_A$$

El último isomorfismo se obtiene así

$D\,Hom_B({}_BT_A, D(Q_B)) = D\,Hom_B({}_BT_A, Hom_k(Q_B, k)) \cong D\,Hom_k(Q_B \otimes_B T_A, k)$

$\cong Q_B \otimes_B T_A = G(Q_B) = GF(T') \underset{(1.4)}{\cong} T' \quad$ (ya que $T' \in \mathcal{T}(T_A)$) ■

6.4. Corolario.

Sea T_A un módulo de inclinación con $B = \mathrm{End}(T_A)$.

1) Sean I_A un inyectivo y P_A un proyectivo tales que $\mathrm{soc}\, I_A = P_A/\mathrm{rad}\, P_A$. Si $P_A \in \mathrm{add}(T_A)$ entonces $F(I_A)$ es inyectivo.

2) Todos los B-módulos inyectivos en $\mathcal{Y}$ son de esta forma.

Demostración.

Sea $P_A \in \mathrm{add}(T_A)$, $\therefore$ $\tau^{-1}F(I_A) \underset{(3.1)}{=} F'(P_A) = 0$, $\therefore$ $F(I_A)$ es inyectivo.

Conversamente sea $J_B \in \mathcal{Y}$ inyectivo; puesto que $F| : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ es una equivalencia de categorías y F es aditivo puedo suponer que $J_B = F(M_A)$ con $M_A \in \mathcal{T}$ y M_A inescindible.

Sea $M_A \xrightarrow{\mu} I'_A$ la envolvente inyectiva de M_A, $\therefore$ $F(\mu)$ es inyectivo y como $F(M_A)$ es inyectivo, $\therefore$ $F(\mu)$ es mono escindible, $\therefore$ $GF(\mu)$ es mono escindible. Como $M_A, I'_A \in \mathcal{T}$, $\mu \cong GF(\mu)$, $\therefore$ $M_A = I'_A$. Por tanto M es de la forma I_a. Sea P_a el proyectivo inescindible tal que $\mathrm{soc}\, I_a = P_a/\mathrm{rad}\, P_a$. Si $P_a \notin \mathrm{add}(T_A)$, $P_a \notin \mathcal{T}$, $\therefore$ $\tau^{-1}F(I_a) = F'(P_a) \neq 0$ contrario al hecho de que $F(I_a)$ es inyectivo. ■

6.5. Corolario.

Sea T_A un módulo de inclinación con $B = \mathrm{End}(T_A)$.

1) $P_a, I_a \in \mathrm{add}(T_A)$, entonces $F(I_{a_A})$ es proyectivo e inyectivo.

2) Conversamente todo módulo inescindible, inyectivo y proyectivo es de esta forma.

Demostración.

Por (6.4) $F(I_a)$ es inyectivo y como $I_a \in \mathrm{add}(T_A)$, $F(I_a)$ es proyectivo.

Sea N_B inescindible, inyectivo y proyectivo, $\therefore$ $N = F(T_i)$ con T_i un sumando inescindible de T_A, $\therefore$ $N_B \in \mathcal{Y}$. Como N_B es inyectivo, por (6.4) $N_B = F(I_a)$ con I_a tal que $P_a \in \mathrm{add}(T_A)$.

Como $T_i, I_a \in \mathcal{T}$ y $F| \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ es una equivalencia de categorías $\therefore$ $I_a \cong T_i \in \mathrm{add}(T_A)$. ■

6.6. Lema.

Si d.p. $T_A \leq 1$, entonces $D\,Ext^1_A(T_A, M_A) \cong Hom_A(M_A, \tau T_A)$

Demostración.

Sea $\xi : 0 \to P''_A \to P'_A \to T_A \to 0$ una resolución proyectiva minimal, aplicándole $Hom_A(-, A_A)$ obtenemos la sucesión exacta

$Hom(P'_A, A_A) \to Hom(P''_A, A_A) \to Ext^1(T_A, A_A) = Tr\,T_A \to 0$. Y dualizando obtenemos la sucesión exacta

$0 \to \tau T_A \to D\,Hom(P''_A, A_A) \to D\,Hom(P'_A, A_A)$. Aplicando a esta sucesión el funtor $D\,Hom_A(M_A, -)$, obtenemos la sucesión exacta superior del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} D\,Hom(M, D\,Hom(P', A)) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_{P'}"'] & D\,Hom(M, D\,Hom(P'', A)) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_{P''}"'] & D\,Hom(M, \tau T) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\nu"'] & 0 \\ Hom(P', M) \arrow[r] & Hom(P'', M) \arrow[r] & Ext^1(T, M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Donde el renglón inferior se obtuvo aplicando a ξ el funtor $Hom_A(-, M_A)$ y para Q_A proyectivo ν_Q es la composición de los siguientes isomorfismos naturales,

$$D\,Hom_A(M, D\,Hom_A(Q, A)) = D\,Hom_A(M, Hom_k(Hom_A(Q, A), k)) \cong$$
$$\cong D\,Hom_k(M_A \otimes_A Hom_A(Q, A), k) = DD(M_A \otimes Hom_A(Q, A)) \cong M_A \otimes Hom_A(Q, A)$$
$$\cong Hom_A(Q, M).$$ (En este último isomorfismo es donde se usa que Q_A es proyectivo).

Como $\nu_{P'}$, $\nu_{P''}$ son isomorfismos, $D\,Hom(M, \tau T) \cong Ext^1(T, M)$. ■

6.7. Corolario.

Si T_A es un módulo de inclinación, entonces $\mathcal{F}(T_A)$ es el conjunto de los Λ-módulos derechos cogenerados por τT_A.

Demostración.

$Hom_A(T_A, \tau T_A) \underset{(6.6)}{\cong} D\,Ext^1_A(T, T) = 0$, $\therefore$ $\tau T_A \in \mathcal{F}(T_A)$. Como $\mathcal{F}(T_A)$ es cerrado bajo submódulos y sumas finitas, todo módulo cogenerado por τT_A está en $\mathcal{F}(T_A)$

Conversamente, sea $H_A \in \mathcal{T}(T_A)$, $\therefore \exists N_B \in \mathcal{X}$ $H_A \cong \mathrm{Tor}_1^B(N_B, {}_BT_A) \underset{(2.1)}{\cong}$
$\cong D\,\mathrm{Ext}_B^1({}_BT_A, D(N_B))$. Sea $m: N_B \hookrightarrow I_B$ monomorfismo, con I_B inyectivo, $\therefore$ $D(I_B) \to D(N_B)$ es epimorfismo y como d.p. ${}_BT \leq 1$ el morfismo inducido $\mathrm{Ext}_B^1({}_BT_A, D(I_B)) \to \mathrm{Ext}_B^1({}_BT_A, D(N_B))$ es epimorfismo, dualizando obtenemos una inyección $H_A \cong D\,\mathrm{Ext}_B^1({}_BT_A, D(N_B)) \hookrightarrow D\,\mathrm{Ext}_B^1({}_BT_A, D(I_B))$

$\therefore$ H_A está cogenerado por $D\,\mathrm{Ext}_B^1({}_BT_A, {}_BB) \underset{(2.1)}{\cong} \mathrm{Tor}_1^B(D({}_BB), {}_BT_A) \underset{(3.3)}{\cong}$
$\cong \tau T_A$, ya que $B_B = F(T_A)$ y sea $D({}_BB) \cong {}^{B}B/_{\mathrm{rad}\,B_B}$ ■

6.8. Corolario.

$\mathcal{X}$ es la clase de los B-módulos derechos generados por $F'(A_A)$.

Demostración.

Por simetría se tiene que $\mathcal{T}({}_BT)$ es la clase de todos los B-módulos izquierdos cogenerados por $\tau\,{}_BT$, luego $\mathcal{X} \underset{(5.2)}{=} D\mathcal{T}({}_BT)$ es la clase de todos los B-módulos derechos generados por $D\tau\,{}_BT$.

En la demostración del lema de conexión (6.1) vimos que
$F'(A) \cong \mathrm{Tr}\,\mathrm{Hom}_A(A_A, {}_BT_A) \cong \mathrm{Tr}\,{}_BT \cong DDT_r\,{}_BT = D\tau\,{}_BT$ ■

6.9. Lema.

Sean T_A un módulo de inclinación y $B = \mathrm{End}(T_A)$, entonces $\forall L_A, N_A \in \mathcal{T}$,
$\mathrm{Ext}_A^1(N,L) \cong \mathrm{Ext}_B^1(F(N), F(L))$

Demostración.

Sea $\xi :: 0 \to L \to M \to N \to 0$ exacta en mod A.

$\therefore F(\xi) = 0 \to F(L) \to F(M) \to F(N) \to F'(L) = 0$ es exacta en mod B

$\therefore$ $F: \mathrm{Ext}_A^1(N,L) \to \mathrm{Ext}_B^1(F(N),F(L))$ está bien definida, más
$\qquad\xi \longmapsto F(\xi)$

aún, F es un homomorfismo de grupos (la demostración es una verificación rutinaria).

Análogamente $G: \mathrm{Ext}_B^1(F(N), F(L)) \to \mathrm{Ext}_A^1(GF(N), GF(L))$ es
$\qquad\eta \longmapsto G(\eta)$

un homomorfismo de grupos.

Como $L, N \in \mathcal{T}$ se tiene un isomorfismo canónico
$\mathrm{Ext}_A^1(GF(N), GF(L)) \overset{\sigma}{\cong} \mathrm{Ext}_A^1(N,L)$.

Finalmente $(\sigma G)\circ F = 1_{\mathrm{Ext}^1(N,L)}$ y $F\circ(\sigma G) = 1_{\mathrm{Ext}^1(F(N),F(L))}$. ■

CAPITULO 4. MODULOS DE INCLINACION.

La condición I3) en la definición de módulo de inclinación es poco intuitiva y difícil de probar. En la § 10 seguimos a Bongartz [11] y vemos que I3) se puede sustituir porque T_A tenga tantos sumandos inescindibles no isomorfos, como tantas clases de isomorfía de A-módulos simples. (Este resultado fue probado por Happel y Ringel en el caso en que A es hereditaria). Esta nueva condición es muy útil para construir ejemplos o para demostrar que un módulo es de inclinación.

Para llegar a estos resultados introducimos, en la § 7, el grupo de Grothendieck de A, que denotamos por $G_0(A)$, usando sucesiones exactas, y después probamos que es, de hecho, un grupo abeliano libre con tantos generadores como clases de isomorfía de A-módulos simples.

En la § 8 damos una generalización de la forma cuadrática, definida en el capítulo 1, para una gráfica, es decir, definimos una forma bilineal simétrica $\langle\ ,\ \rangle : G_0(A) \times G_0(A) \to \mathbb{Q}$ (en caso de que $\{\underline{\dim}\, P_a \mid a \in \tilde{n}\}$ sea linealmente independiente en $G_0(A)$) por $\langle \underline{\dim}\, P_a, \underline{\dim}\, P_b \rangle = \dim_k \operatorname{Hom}(P_a, P_b)$.

En (8.2) vemos que si A tiene dimensión global $d < \infty$, entonces $\langle \underline{\dim}\, X, \underline{\dim}\, Y \rangle = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim_k \operatorname{Ext}_A^i(X, Y)$, debido a esto, en analogía con la fórmula para obtener la característica de Euler de un complejo CW finito, $\langle\ ,\ \rangle$ se llama la característica de Euler de A.

En la § 9 vemos que si T_A es un módulo de inclinación y $B = \operatorname{End}(T_A)$, entonces A y B tienen el mismo número de clases de isomorfía de módulos simples, para esto observamos (9.2) que $f: G_0(A) \to G_0(B)$, $\underline{\dim}\, H \mapsto \underline{\dim}\, F(H) - \underline{\dim}\, F'(H)$ es un isomorfismo de grupos, de hecho, en caso de que la característica de Euler esté definida para A, equivalentemente para B, f es una isometría (9.4).

§ 7. El grupo de Grothendieck.

7.1. Definición.

Sea F el grupo abeliano libre sobre el conjunto de clases de isomorfía de A-módulos. Si $H \in \operatorname{mod} A$, denotamos por $[H]$ la clase de isomorfía de H. Sea R el subgrupo de F generado por

$\{ [L] + [N] - [H] \mid 0 \to L \to H \to N \to 0$ es exacta en $\operatorname{mod} A \}$.

$G_0(A) := F/R$ se llama el **grupo de Grothendieck** de A.

7.2. Teorema.

$G_0(A) \cong \mathbb{Z}^n$. (n es el número de clases de isomorfía de A-módulos simples)

Demostración.

Sea $\varphi: F \to \mathbb{Z}^n$ el único homomorfismo de grupos tal que $\forall H \in \operatorname{mod} A$, $\varphi([H]) = \underline{\dim}\, H$. φ es suprayectiva pues $\{ \varphi([S_a]) \mid a \in \bar{n} \}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{Z}^n$.

Si $0 \to L \to H \to N \to 0$ es exacta en $\operatorname{mod} A$, entonces $\varphi([L] + [N] - [H]) = \underline{\dim}\, L + \underline{\dim}\, N - \underline{\dim}\, H = 0$, $\therefore$ $R \subseteq \operatorname{Nuc} \varphi$.

$\therefore$ $\exists!$ $\bar{\varphi}$ homomorfismo de grupos tal que

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathbb{Z}^n \\ F/R \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Además $\bar{\varphi}$ es suprayectiva.

Obsérvese que en F/R, $\overline{[H \oplus N]} = \overline{[H]} + \overline{[N]}$ (aquí $\overline{[H]} := [H] + R$)

Supongamos que $\bar{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{\ell} \overline{[H_j]} - \sum_{j=1}^{m} \overline{[N_j]} \right) = 0$, sean $H = \bigoplus_{j=1}^{\ell} H_j$, $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$ $\therefore$ $\underline{\dim}\, H = \bar{\varphi}(\overline{[H]}) = \bar{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{\ell} \overline{[H_j]} \right) = \bar{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{m} \overline{[N_j]} \right) = \bar{\varphi}(\overline{[N]}) = \underline{\dim}\, N$, $\therefore$ $|H| = |N|$.

Sean $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_\lambda = 0$, $N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_\lambda = 0$ series de composición de M y N respectivamente

$\therefore$ $\forall i \in \{0,\dots,\lambda-1\}$, M_i/M_{i+1} y N_i/N_{i+1} son simples.

Como $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$

$\therefore$ $\overline{[M]} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} \overline{[M_i]} - \overline{[M_{i+1}]} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} \overline{[M_i/M_{i+1}]} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} \overline{[N_i/N_{i+1}]} =$

$= \sum_{i=0}^{\lambda-1} \overline{[N_i]} - \overline{[N_{i+1}]} = \overline{[N]}$.

$\therefore$ $\bar{\varphi}$ es inyectiva. ■

§ 8. La característica de Euler.

8.1. Definición.

Se dice que la **característica de Euler** está definida para A si $\{\underline{\dim} P_a \mid a \in \bar{n}\}$ es linealmente independiente en $G_0(A)$, en este caso definimos $\langle\ ,\ \rangle : G_0(A) \times G_0(A) \to \mathbb{Q}$ como sigue:

$$\langle \underline{\dim} P_a, \underline{\dim} P_b \rangle := \dim_k \operatorname{Hom}_A(P_a, P_b)$$

Como $\forall\, \ell \in \bar{n}$ $\{\underline{\dim} P_a \mid a \in \bar{n}\} \cup \{\underline{\dim} S_\ell\}$ es linealmente dependiente, $\therefore$ $\exists!\ q_1,\dots,q_n \in \mathbb{Q}$ tales que $\underline{\dim} S_\ell = \sum_{a=1}^{n} q_a \underline{\dim} P_a$, luego, $\langle\ ,\ \rangle$ se puede extender bilinealmente a todo $G_0(A) \times G_0(A)$.

$\langle\ ,\ \rangle$ se llama la **característica de Euler** de A.

8.2. Lema

Si A tiene dimensión global finita d, entonces la característica de Euler está definida para A y además se tiene para $X, Y \in \operatorname{mod} A$

$$\langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \rangle = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim_k \operatorname{Ext}_A^i(X,Y)$$

Demostración

Todo A-módulo M tiene una resolución proyectiva finita

$$0 \to P_m \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

dividiendo esta resolución en sucesiones exactas cortas, se prueba fácilmente que $\underline{\dim} M = \Sigma_{i=0}^{m} (-1)^i \underline{\dim} P_i$

Cada $P_i = \oplus_{j=1}^{l_i} P_{a_j}$, $\therefore \underline{\dim} M = \Sigma_{i=0}^{m} (-1)^i (\Sigma_{j=1}^{l_i} \underline{\dim} P_{a_j})$.

$\therefore \{\underline{\dim} P_a | a \in \tilde{n}\}$ genera a $G_0(A)$, pero el rango de $G_0(A)$ es n.

$\therefore \{\underline{\dim} P_a | a \in \tilde{n}\}$ es una base para $G_0(A)$ y la característica de Euler está definida para A.

Sea φ $G_0(A) \times G_0(A) \to \mathbb{Z}$

$$([\overline{X}], [\overline{Y}]) \mapsto \Sigma_{i=0}^{d} (-1)^i \dim_k \operatorname{Ext}_A^i (X, Y)$$

La definición de φ no depende de la elección de los representantes, pues si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es exacta en mod A y $Y \in$ mod A, entonces hay una sucesión exacta larga.

$$0 \to \operatorname{Ext}^0(L,Y) \to \operatorname{Ext}^0(M,Y) \to \cdots \to \operatorname{Ext}^d(M,Y) \to \operatorname{Ext}^d(N,Y) \to 0$$

$$\therefore \Sigma_{j=0}^{d} \operatorname{Ext}^j(M,Y) = \Sigma_{j=0}^{d} \operatorname{Ext}^j(L,Y) + \Sigma_{j=0}^{d} \operatorname{Ext}^j(N,Y)$$

$$\therefore \varphi([\overline{L}] + [\overline{N}] - [\overline{M}], [\overline{Y}]) = 0.$$

Similarmente en la otra variable

Y como $[\overline{X}] + [\overline{Y}] = [\overline{X \oplus Y}]$ y $\operatorname{Ext}^i(-,-)$ es aditivo en cada variable, entonces φ es bilineal.

Finalmente como $\langle \underline{\dim} P_a, \underline{\dim} P_b \rangle = \dim_k \operatorname{Hom}_A(P_a, P_b) = \varphi([\overline{P_a}], [\overline{P_b}])$ y $\{\underline{\dim} P_a | a \in \tilde{n}\}$ es una base de $G_0(A)$ y como $\langle , \rangle, \varphi$ son bilineales $\therefore \langle , \rangle = \varphi$. ■

8.3. Observación

Si la dimensión global de A es finita, $\langle , \rangle$ puede ser definida con codominio $\mathbb{Z}$.

8.4. Ejemplo.

Sea A una k-álgebra local, tal que $P = A_A$ tiene longitud n. Sea S el único A-módulo simple. Puesto que $\underline{\dim} P$ es linealmente independiente en $G_0(A)$, la característica de Euler está definida, además $\underline{\dim} P = n \, \underline{\dim} S$, $\therefore \langle \underline{\dim} S, \underline{\dim} S \rangle = \frac{1}{n^2} \langle \underline{\dim} P, \underline{\dim} P \rangle =$

$= \frac{1}{n^2} \dim_k \operatorname{End}(A_A) = \frac{1}{n}$

(8.3) nos da otra demostración de que la dimensión global de A es infinita, para $n > 1$.

Nótese que los resultados de § 7 y § 8 valen para A anillo artiniano.

§ 9. Isometría de grupos de Grothendieck.

En esta sección T_A será un módulo de inclinación y $B = \mathrm{End}(T_A)$. Además usaremos libremente la notación definida en el teorema de Brenner - Butler.

9.1. Lema.

$X_A \in \mathrm{mod}\, A$, d.p. $X_A = d < \infty$, entonces

$$d_X : G_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[\overline{M}] \longmapsto \Sigma_{i=0}^{d} (-1)^i \mid \mathrm{Ext}^i_A(X,M)_{\mathrm{End}(X)} \mid$$ es un

homomorfismo de grupos.

Demostración.

La definición no depende del representante, pues si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta en mod A, aplicándole $\mathrm{Hom}_A({}_{\mathrm{End}_A(X)}X_A, -)$ obtenemos una sucesión exacta larga de $\mathrm{End}_A(X)$-módulos.

$0 \to \mathrm{Ext}^0(X,L) \to \mathrm{Ext}^0(X,M) \to \cdots \to \mathrm{Ext}^d(X,M) \to \mathrm{Ext}^d(X,N) \to 0.$

$\therefore\ d_X([\overline{L}] + [\overline{N}] - [\overline{M}]) = 0$

y como en (8.2) se prueba que d_X es un homomorfismo de grupos. ∎

9.2. Proposición.

$f: G_0(A) \to G_0(B)$ es un isomorfismo de grupos.
$\underline{\dim}\, M \mapsto \underline{\dim}\, F(M) - \underline{\dim}\, F'(M)$

Demostración.

Como en (9.1) se prueba que f es un homomorfismo de grupos.

Sea S un B-módulo simple; como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una teoría de torsión, $\therefore$ $S \in \mathcal{X}$ o $S \in \mathcal{Y}$.

Si $S \in \mathcal{X}$, $\exists M \in \mathcal{T}$ tal que $F'(M) \cong S$, además $F(M) = 0$.

$\therefore$ $f(-\underline{\dim} M) = -f(\underline{\dim} M) = -\underline{\dim} F(M) + \underline{\dim} F'(M) = \underline{\dim} S$

Si $S \in \mathcal{Y}$, $\exists M \in \mathcal{T}$ tal que $F(M) \cong S$ y como antes $f(\underline{\dim} M) = \underline{\dim} S$.

$\therefore$ f es suprayectiva, $\therefore$ rango $G_0(A) \geq$ rango $G_0(B)$.

Por la simetría de los módulos de inclinación se prueba de manera análoga que rango $G_0(B) \geq$ rango $G_0(A)$. ■

9.3. Corolario.

El número de clases de isomorfía de A-módulos simples coincide con el número de clases de isomorfía de B módulos simples. ■

9.4. Proposición.

La característica de Euler está definida para A si y sólo si lo está para B. En este caso f es una isometría.

Demostración.

Sea $\{T_i \mid i \in \bar{m}\}$ un conjunto completo de representantes de sumandos inescindibles de T_A, m es precisamente el número de clases de isomorfía de B-módulos simples, $\therefore$ (9.3) $m = n$.

Supongamos que $\{\underline{\dim} P_a \mid a \in \bar{n}\}$ es una base de $G_0(A) \otimes \mathbb{Q}$, como $\forall a \in \bar{n}$ hay una sucesión exacta

$0 \to P_a \to T' \to T'' \to 0$, con $T', T'' \in \operatorname{add}(T_A)$

$\therefore$ $\{\underline{\dim} T_i \mid i \in \bar{n}\}$ es otra base de $G_0(A) \otimes \mathbb{Q}$.

Por (9.2) $\{\underline{\dim} F(T_i) \mid i \in \bar{n}\} = \{f(\underline{\dim} T_i) \mid i \in \bar{n}\}$ es una base de $G_0(B) \otimes \mathbb{Q}$.

Como $\{\underline{\dim} F(T_i) \mid i \in \bar{n}\}$ es un conjunto completo de representantes de B-módulos proyectivos inescindibles, la característica de Euler está definida para B.

La otra implicación se debe a la simetría de los módulos de inclinación.

Por último veremos que en el caso en que la característica de Euler está definida, f es una isometría.

Como f es lineal bastará probarlo para una base, la que escogemos es $\{\underline{\dim}\, T_i \mid i \in \tilde{n}\}$.

Como $\forall i \in \tilde{n}$, $\mathrm{d.p}\, T_i \leq 1$, $\{\underline{\dim}\, T_i \mid i \in \tilde{n}\}$ está contenido en el subgrupo de $G_0(A)$ generado por $\{\underline{\dim}\, P_a \mid a \in \tilde{n}\}$. Con una demostración muy parecida a la de (8.2) se ve que $\langle \underline{\dim}\, T_i, \underline{\dim}\, T_j \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}_A(T_i, T_j)$, puesto que $\mathrm{Ext}^1_A(T_i, T_j) = 0$.

Como $\forall i \in \tilde{n}$, $F(T_i)$ es proyectivo, $\therefore$ $\langle \underline{\dim}\, F(T_i), \underline{\dim}\, F(T_j) \rangle =$
$= \dim_k \mathrm{Hom}_B(F(T_i), F(T_j))$.

Finalmente como $F| : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es una equivalencia de categorías,
$\therefore$ $\langle f(\underline{\dim}\, T_i), f(\underline{\dim}\, T_j) \rangle = \langle \underline{\dim}\, F(T_i), \underline{\dim}\, F(T_j) \rangle =$
$= \dim_k \mathrm{Hom}_B(F(T_i), F(T_j)) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(T_i, T_j) = \langle \underline{\dim}\, T_i, \underline{\dim}\, T_j \rangle$. ∎

§ 10. Una caracterización de los módulos de inclinación.

10.1. Lema.

Sea $T_A \in \mathrm{mod}\, A$ tal que $\mathrm{d\,p}\, T_A \leq 1$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$, entonces $\exists\, X_A \in \mathrm{mod}\, A$, tal que $T \oplus X$ es un módulo de inclinación.

Demostración.

Si $\mathrm{Ext}^1_A(T, A) = 0$, $X_A := A_A$.

Si $\mathrm{Ext}^1_A(T, A) \neq 0$, consideramos $\{E_1, \dots, E_m\}$ una k-base de $\mathrm{Ext}^1_A(T, A)$

Supongamos que $E_i = \quad 0 \to A \to X_i \to T \to 0$.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] & \bigoplus_{i=1}^m X_i \arrow[r] \arrow[d] & T^m \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & X \arrow[r] & T^m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\nabla(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i$.

Aplicando el funtor $Hom_A(T_A,-)$ se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to Hom(T,A) \to Hom(T,X) \to Hom(T,T^m) \xrightarrow{\partial} Ext^1(T,A) \to Ext^1(T,X) \to 0.$$

Afirmamos que ∂ es suprayectiva.

$\forall j \in \bar{m}$, consideramos el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \to & X_j & \to & T & \to & 0 \\
 & & \downarrow l_j & & \downarrow m_j & & \downarrow i_j & & \\
0 & \to & A^m & \to & \oplus_{i=1}^m X_i & \to & T^m & \to & 0 \\
 & & \downarrow \nabla & & \downarrow & & \parallel & & \\
0 & \to & A & \to & X & \to & T^m & \to & 0
\end{array}$$

Como $\nabla l_j = 1_A$, $\therefore$ $\partial(i_j) = E_j$, y como $\{E_1,..,E_m\}$ es una base de $Ext^1_A(T,A)$, $\therefore$ ∂ es suprayectiva, $\therefore$ $Ext^1_A(T,X)=0$.

También tenemos las sucesiones exactas

$0 = Ext^1(T^m,T) \to Ext^1(X,T) \to Ext^1(A,T) = 0$ y

$0 = Ext^1(T^m,X) \to Ext^1(X,X) \to Ext^1(A,X) = 0$.

$\therefore$ $Ext^1(T\oplus X, T\oplus X) = 0$.

Además $0 \to A \to X \to T^m \to 0$ es exacta con $X, T^m \in add(T\oplus X)$ y como $d.p\, T^m \le 1$, $d.p\, A \le 1$, $\therefore$ $d.p\, X \le 1$, $\therefore$ $d.p\, T\oplus X \le 1$.

$\therefore$ $T\oplus X$ es un módulo de inclinación ∎

10.2. Teorema.

$T_A = \oplus_{i=1}^r T_i^{m_i}$, T_i inescindible, $m_i>0$, $i\neq j \Rightarrow T_i \not\cong T_j$, entonces T_A es un módulo de inclinación si y sólo si $d.p.T_A \le 1$, $Ext^1_A(T,T)=0$ y $r=n$.

Demostración.

$\Rightarrow$ Por (9.3) n = número de clases de isomorfía de B-módulos simples $= |\{F(T_i) \mid i\in \bar{r}\}| = r$.

$\Leftarrow$ Por (10.1) $\exists X \in mod A$, tal que $T\oplus X$ es un módulo de inclinación y $\xi: 0 \to A \to X \to T^m \to 0$ es exacta.

Aplicando $\Rightarrow$ a $T\oplus X$, se tiene que el número de sumandos inescindibles no isomorfos de $T\oplus X$ es n, pero por hipótesis $n=r$.

$\therefore$ $X \in add(T_A)$ y ξ satisface I3). ∎

CAPITULO 5. ALGEBRAS INCLINADAS.

A lo largo de este capítulo A será hereditaria. Supondremos las propiedades básicas de anillos hereditarios, ver [19], páginas 73-77. En la § 11 estudiaremos algunas de las propiedades de las k álgebras hereditarias, en particular tenemos (11.5), que si T_A es un A-módulo tal que $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$, entonces el carcaj de B no tiene ciclos dirigidos

En la § 12 introducimos el concepto más importante de este trabajo, el de álgebra inclinada, una k-álgebra de dimensión finita B, se llama inclinada si existe una k-álgebra de dimensión finita hereditaria A y un módulo de inclinación T_A tal que $\mathrm{End}(T_A) \cong B$. En particular toda k-álgebra hereditaria es inclinada pues A_A es un A-módulo de inclinación. El hecho de que las álgebras inclinadas se obtengan de álgebras hereditarias se refleja en la dimensión global, en (12.2) probamos que la dimensión global de una álgebra inclinada es ≤ 2.

Si $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es la teoría de torsión, en mod A, generada por T_A, la correspondiente teoría de torsión $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ en mod B tiene la siguiente propiedad (12.3), los inescindibles en $\mathcal{X}$ tienen dimensión proyectiva 1 o 2; y los inescindibles en $\mathcal{Y}$ tienen dimensión proyectiva cero o uno. Una consecuencia de esta distribución de los inescindibles es que $D({}_BT)$ es un módulo de inclinación (12.5)

En (12.4) indicamos una manera de construir álgebras inclinadas de dimensión global 2, basta escoger un módulo de inclinación T_A que tenga por sumandos a todos los proyectivos simples, pero que al mismo tiempo haya un proyectivo inescindible que no sea sumando de T_A. En el capítulo 8 damos otro ejemplo de una álgebra inclinada con dimensión global 2.

En la § 13 estudiamos la forma de los morfismos casi escindibles izquierdos minimales que empiezan en A-módulos de la forma $F(I_a)$, de hecho probamos (13.3) que son de la forma
$F(I_a) \to F(I_a/\mathrm{soc}\, I_a) \oplus F'(\mathrm{rad}\, P_a)$

Una consecuencia de esto la damos en (13.4), es decir, en el caso en que $F(I_a)$ no es inyectivo, la sucesión que casi se divide que empieza en $F(I_a)$ es de la forma

$$0 \to F(I_a) \to F(I_a/\mathrm{soc}\, I_a) \oplus F'(\mathrm{rad}\, P_a) \to F'(P_a) \to 0$$

estas sucesiones se llaman sucesiones de conexión y juegan un papel muy importante en la § 15 y en la § 16.

Otro resultado de extrema utilidad es que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde (14.1), esto junto con el teorema de Brenner-Butler implica el siguiente corolario (14.2). Si A es de tipo de representación finito, entonces B también lo es. En el siguiente capítulo (17.10) veremos que esto es falso si A no es hereditaria.

Nos interesa conocer la forma del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra inclinada, para esto estudiamos las sucesiones que casi se dividen en mod B. En (15.1) probamos que si

$$\eta: \quad 0 \to N'_B \to N_B \to N''_B \to 0$$

es una sucesión que casi se divide en mod B, entonces pasa una de las siguientes tres cosas: 1) $N', N, N'' \in \mathcal{Y}$, 2) $N', N, N'' \in \mathcal{X}$, 3) η es una sucesión de conexión.

También observamos que la componente $\mathcal{C}$ del carcaj de Auslander-Reiten de B que contiene a $\{F(I_a) \mid a \in \tilde{n}\}$ tiene la siguiente propiedad, si $M \in \mathcal{C}$, $\exists!\ z \in \mathbb{Z}, a \in \tilde{n}$ tales que $M \cong \tau^z F(I_a)$. Este es precisamente uno de los axiomas de rebanada completa, concepto que será muy útil en el siguiente capítulo, de hecho, veremos que $\{F(I_a) \mid a \in \tilde{n}\}$ es una rebanada completa en su componente.

Auslander y Smalø prueban en [4] un resultado, en una situación muy general, sobre la existencia de sucesiones que casi se dividen relativas, Happel y Ringel lo usan para probar (15.1), sin embargo, preferimos la demostración, de (15.1), dada en [11], pues para ella es suficiente la teoría desarroyada en este trabajo.

Una vez demostrado (15.1), se puede probar que, efectivamente, $\mathcal{I}$ tiene sucesiones que casi se dividen relativas (16.5), para esto observamos antes (16.4) que $F|: \mathcal{I} \to \mathcal{Y}$ da una biyección entre las sucesiones que casi se dividen relativas en $\mathcal{I}$ y las sucesiones que casi se dividen en $\mathcal{Y}$ (La demostración de (16.5) se debe al autor de este trabajo)

§ 11. Algebras hereditarias.

11.1. Construcción

Construimos un carcaj Γ como sigue, $\Gamma_0 := \{1, \ldots, n\}$ y $\forall\, a, b \in \Gamma_0$ hay una flecha $a \to b$ en Γ si y sólo si $P_a \mid \operatorname{rad} P_b$.

Es claro que Γ no tiene ciclos dirigidos y que a es una fuente si y sólo si P_a es simple (a es una fuente si ninguna flecha termina en a).

En realidad Γ es un subcarcaj pleno del carcaj de Auslander-Reiten de A, cuyos vértices son los correspondientes a los A-módulos proyectivos inescindibles.

11.2. Observación

Si A es inescindible como k-álgebra, entonces Γ es conexo.

Demostración.

Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ una partición de $\{P_a \mid a \in \bar{n}\}$ y sean $P_a \in \mathcal{P}$, $P_b \in \mathcal{Q}$. Como A es inescindible, entonces $\operatorname{Hom}(P_a, P_b) \neq 0$ o $\operatorname{Hom}(P_b, P_a) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$Hom(P_a, P_b) \neq 0$.

Como A es hereditoria P_a tiene un número finito de predecesores en Γ_A (el carcaj de Auslander - Reiten de A) . Por (0.1) hay un camino de irreducibles $P_a \to \cdots \to P_b$ en Γ_A , pero los predecesores de proyectivos son proyectivos , luego el camino construido está en Γ ∎

11.3. Lema

Como A es hereditoria , $\forall\, b \in \bar{n}$ $\exists\, d_{1b}, \ldots, d_{nb}$ tales que $\operatorname{rad} P_b = \oplus_{a\in\bar{n}} P_a^{d_{ab}}$ y $\forall\, a \in \bar{n}$ $\exists\, d'_{a1}, \ldots, d'_{an}$ tales que $I_a / \operatorname{soc} I_a = \oplus_{b\in\bar{n}} I_b^{d'_{ab}}$.

$\forall\, a \in \bar{n}$ definimos $f_a = \dim_k End(P_a) = \dim_k End(I_a)$, entonces $f_a d_{ab} = d'_{ab} f_b$.

Demostración

(1) Sea L una k-álgebra local de dimensión finita , S el único L-módulo simple, $M \in mod\, L$, entonces $\dim_k M = \dim_k S \cdot |M_L|$.

Demostración:

Sea $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_\ell = 0$ una serie de composición de M_L

$\therefore \dim_k M = \sum_{i=0}^{\ell-1} \dim_k M_i - \dim_k M_{i+1} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \dim_k M_i/M_{i+1}$

$= \ell \cdot \dim_k S$. ∎

Se tiene el resultado análogo para módulos izquierdos

(2) $End_A(P_a)$ es simple .

Demostración:

Sea $f : P_a \to P_a$ un morfismo no nulo , $\therefore f$ es inyectiva , y por el lema de Fitting f es isomorfismo . ∎

(3) $f_a d_{ab} = d'_{ab} f_b$.

Demostración:

$f_a \cdot d_{ab} = \dim_k \operatorname{End}(P_a) \cdot |\operatorname{Irr}(P_a,P_b)_{\operatorname{End}(P_a)}| = \dim_k \operatorname{Irr}(P_a,P_b) =$

$= |{}_{\operatorname{End}(P_a)}\operatorname{Irr}(P_a,P_b)| \quad \dim_k \operatorname{End}(P_b) = d'_{ab} \cdot f_b$. ■

11.4. Lema.

Sean T_1, T_2 A-módulos inescindibles con $\operatorname{Ext}^1_A(T_1,T_2)=0$, entonces $\forall\ \varphi: T_2 \to T_1 \neq 0$, φ es inyectiva o φ es supryectiva. En particular si $T_1 = T_2$, $\operatorname{End}_A(T_1)$ es un anillo con división.

Demostración

Sea $\varphi\ T_2 \to T_1$ un morfismo no nulo.

Sea $U = \operatorname{Im}\varphi$ y sean $\varepsilon: T_2 \twoheadrightarrow U$, $\mu: U \rightarrowtail T_1$ tales que $\varphi = \mu\varepsilon$

Como A es hereditaria $\operatorname{Ext}^1(T_1/U, T_2) \to \operatorname{Ext}^1(T_1/U, U)$ es supryectiva, por tanto hay un diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & T_2 & \xrightarrow{\mu'} & V & \to & T_1/U & \to & 0 \\
 & & \varepsilon \downarrow & & \varepsilon' \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & U & \xrightarrow[\mu]{} & T_1 & \to & T_1/U & \to & 0
\end{array}$$

Afirmamos que la sucesión $0 \to T_2 \xrightarrow{\binom{\varepsilon}{-\mu'}} U \oplus V \xrightarrow{(\mu,\varepsilon')} T_1 \to 0$ es exacta, en efecto $(\mu,\varepsilon')\binom{\varepsilon}{-\mu'} = 0$, y si $(u,v) \in U \oplus V$ tal que $\mu(u) + \varepsilon'(v) = 0$, $\therefore\ \varepsilon'(v) \in \operatorname{Im}\mu$, $\therefore\ v \in \operatorname{Im}\mu'$,

$\therefore\ \exists\ t \in T_2$ tal que $\mu'(t) = v$, $\therefore\ \mu(\varepsilon(t)) = \varepsilon'\mu'(t) = \varepsilon'(v) = \mu(-u)$

$\therefore\ \varepsilon(t) = -u$, $\therefore\ \binom{\varepsilon}{-\mu'}(-t) = (\varepsilon(-t), \mu'(t)) = (u,v)$

Como $\operatorname{Ext}^1(T_1,T_2)=0$ la sucesión se escinde, y por el teorema de Krull-Schmidt $U \cong T_2$ o $U \cong T_1$, $\therefore\ \varphi$ es mono o φ es epi. ■

11.5. Corolario

Sea T_A un A-módulo tal que $\operatorname{Ext}^1_A(T,T)=0$ y sea $B = \operatorname{End}(T_A)$, entonces el carcaj de B no tiene ciclos dirigidos.

Demostración.

Supongamos que hay un ciclo dirigido en el carcaj de B.

Como $add(T_A) \underset{-\otimes_B T_A}{\overset{Hom_A({}_BT_A,-)}{\rightleftarrows}} add(B_B)$ son equivalencias de categorías mutuamente inversas, obtenemos un ciclo dirigido

$$T_1 \xrightarrow{f_1} T_2 \to \cdots \to T_n \xrightarrow{f_n} T_1$$

con $T_i \in add(T_A)$, T_i inescindible, f_i no nulo y no invertible.

En virtud de (11.4) los f_i's son inyectivas o suproyectivas.

Si todos los f_i's son inyectivas, por el lema de Fitting $f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ es isomorfismo, $\therefore$ $Hom_A({}_BT_A, f)$ es isomorfismo, contradicción. Análogamente no todas las f_i's son suproyectivas.

Resta el caso en que $\exists\, i$ tal que f_i es inyectiva y $\exists\, j$ tal que f_j es suproyectiva, luego, podemos suponer que $\exists\, \ell$ f_ℓ es suproyectiva y $f_{\ell+1}$ es inyectiva, $\therefore$ $f_{\ell+1} f_\ell \neq 0$ y no es ni inyectiva, ni suproyectiva, contradicción. ∎

11.6. Lema.

Sea T_A un módulo de inclinación y $\{T_i \mid i \in \bar{n}\}$ un conjunto completo de sumandos inescindibles de T, entonces $\forall\, M_A \in mod A$ hay una sucesión exacta $0 \to T_A' \to M_A' \to M_A \to 0$ con $T' \in add(T_A)$ y M' cogenerado por T_A.

Demostración.

(1) $\forall\, M \in mod A$, $M_A \neq 0$, $Ext_A^1(M,T) = 0 \Rightarrow Hom_A(M,T) \neq 0$

Demostración:

Sea $d_M : G_0(A) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo dado en (9.1), como A es hereditaria $d_M([\overline{X}]) = |Hom_A(M,X)_{End(M)}| - |Ext_A^1(M,X)_{End(M)}|$

Como en (9.4) $\{\underline{dim}\, T_i \mid i \in \bar{n}\}$ es una base de $G_0(A) \otimes \mathbb{Q}$

$\therefore$ $\exists\, i \in \bar{n}$ $d_M(\underline{dim}\, T_i) \neq 0$ (ya que si I_A es la envolvente inyectiva de M, $d_M([\overline{I}]) \neq 0$).

Como $Ext^1_A(M,T_1)=0$, $\therefore$ $Hom_A(M,T)\neq 0$ ■

(2) $\forall$ $M\in$ mod A, $Ext^1_A(M,T)=0 \Rightarrow M$ está cogenerado por T.

Demostración:

Sea $M' := \bigcap_{f\in Hom(M,T)} Nuc\, f$, sea $\{f_1,\dots,f_r\}$ base de $Hom_A(M,T)$, (por (1) $Hom_A(M,T)\neq 0$), $\therefore$ $M' = \bigcap_{i=1}^{r} Nuc\, f_i$

Sea $f=(f_i): M \to T^r$, $Nuc\, f = M'$, $\therefore$ $\exists$ $\mu: M/M' \to T^r$ inyectiva.

Aplicando $Ext^1_A(-,T)$ y usando que A es hereditaria obtenemos un epimorfismo $0 = Ext^1_A(T^r,T) \to Ext^1_A(M/M',T) \to 0$,

$\therefore$ $Ext^1_A(M/M',T)=0$.

Entonces la sucesión exacta $0\to M' \to M \to M/M' \to 0$, da lugar a la sucesión exacta

$0 \to Hom(M/M',T) \xrightarrow{\alpha} Hom(M,T) \to Hom(M',T) \to 0$

Como todo morfismo $M\to T$ se factoriza a través de M/M', α es supreyectiva, $\therefore$ $Hom(M',T)=0$.

Por otra parte la inclusión $0\to M' \to M$ da origen a un epimorfismo $0 = Ext^1(M,T) \to Ext^1(M',T) \to 0$, $\therefore$ $Ext^1(M',T)=0$.

Por (1) $M'=0$, $\therefore$ $\mu: M \to T^r$ es inyectiva. ■

(3) Existencia de la sucesión buscada.

Demostración.

Sea $M\in$ mod A, por (2) podemos suponer que $Ext^1_A(M,T)\neq 0$.

Sea $\{E_1,\dots,E_n\}$ una base de $Ext^1_A(M,T)$ y supongamos que $E_i = 0\to T \to M_i \to M \to 0$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^m \arrow[r] \arrow[d, equal] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^m \arrow[r] \arrow[d, "\pi_j"'] & \oplus_{i=1}^m M_i \arrow[r] \arrow[d, "p_j"'] & M^m \arrow[r] \arrow[d, "q_j"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] & M_j \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde π_j, p_j, q_j son las j-ésimas proyecciones y $\Delta(a)=(a, \ ,a)$

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ obtenemos la sucesión exacta

$\mathrm{Hom}(T^m,T) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(M,T) \to \mathrm{Ext}^1(M',T) \to \mathrm{Ext}^1(T^m,T)=0$

Como $g_j \Delta = 1_M$, $\therefore$ $\partial(\pi_j) = E_j$, $\therefore$ ∂ es suproyectiva, $\therefore$ $\mathrm{Ext}^1(M',T)=0$ y por (2) M' está ugenerado por T. ■

11.7. Observación.

(11.6) es válido si en vez de pedir que T_A sea un módulo de inclinación, pedimos $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$ (ver (4.3) y (4.4) de [16])

§ 12. Algebras inclinadas.

12.1. Definición.

Sea B una k-álgebra de dimensión finita, entonces B se llama **algebra inclinada** si $\exists\, T_A \in \mathrm{mod}\,A$, tal que T_A es un módulo de inclinación y $B \cong \mathrm{End}(T_A)$ (Obsérvese que estamos suponiendo que A es hereditaria)

En lo que resta de la sección supondremos que T_A es un módulo de inclinación y que $B = \mathrm{End}(T_A)$ y usaremos la notación introducida en (4.1).

12.2. Teorema.

La dimensión global de B es ≤ 2.

Demostración

(1) $\forall\, N_B \in \mathcal{Y}$ d.p. $N_B \leq 1$.

Demostración:

Como $N_B \in \mathcal{Y}$, $\therefore \exists\, M_A \in \mathcal{T}$ tal que $F(M_A) = N_B$

Sea $\{f_1, \dots, f_r\}$ una base de $F(M_A)$, sea $f = (f_i): T^r \to M$

Como en (4) de (4.4) se prueba que f y $F(f)$ son suproyectivas

Sea $K := \mathrm{Nuc}\, f$, $\xi:\ 0 \to K \to T^r \xrightarrow{f} M \to 0$ induce una sucesión exacta $F(T^r) \xrightarrow{F(f)} F(M) \to F'(K) \to F'(T^r)=0$.

Como $F(f)$ es suproyectiva, $\therefore$ $F'(K)=0$

ξ también induce las sucesiones exactas

$0 = \mathrm{Ext}^1(T^r, T) \to \mathrm{Ext}^1(K,T) \to \mathrm{Ext}^2(M,T) = 0$ y

$0 = \mathrm{Ext}^1(T^r, K) \to \mathrm{Ext}^1(K,K) \to \mathrm{Ext}^2(M,K) = 0.$

$\therefore \mathrm{Ext}^1_A(T\oplus K, T\oplus K) = 0.$

Como A es hereditaria $T\oplus K$ es un módulo de inclinación, entonces por (10.2) $K \in \mathrm{add}(T_A)$

$\therefore \quad 0 \to F(K) \to F(T^r) \to F(M) \to 0$ es una resolución proyectiva de N_B ■

(2) $\forall\, N_B \in X$, d.p. $N_B \leq 2$.

Demostración:

Como $N_B \in X$, $\therefore \exists\, M_A \in \mathcal{F}$, tal que $F'(M_A) = N_B$.

Por (11.6) hay una sucesión exacta

$0 \to T^m \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{h} M \to 0$, donde M'_A está cogenerado por T_A.

Sean $\{f_1, \dots, f_r\}$ una base de $\mathrm{Hom}_A(M',T)$ y $f = (f_i): M' \to T^r$

Como M'_A está cogenerado por T_A y A es hereditaria, $\therefore \mathrm{Ext}^1_A(M',T) = 0$

y de la demostración de (11.6) punto (2) se sigue que f es inyectiva.

Sea $C = \mathrm{coker}\, f$, $\eta: 0 \to M' \xrightarrow{f} T^r \to C \to 0$ induce una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_A(T^r,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,T)} \mathrm{Hom}_A(M',T) \to \mathrm{Ext}^1_A(C,T) \to \mathrm{Ext}^1_A(T^r,T) = 0$$

Por la definición de f, $\mathrm{Hom}(f,T)$ es suprayectiva

$\therefore \mathrm{Ext}^1_A(C,T) = 0.$

El epimorfismo $T^r \to C \to 0$ induce sucesiones exactas

$0 = \mathrm{Ext}^1(T,T^r) \to \mathrm{Ext}^1(T,C) \to 0$ y $0 = \mathrm{Ext}^1(C,T^r) \to \mathrm{Ext}^1(C,C) \to 0$

$\therefore \mathrm{Ext}^1(T\oplus C, T\oplus C) = 0$, $\therefore$ (10.2) $C \in \mathrm{add}(T_A)$.

Aplicando F a η obtenemos la sucesión exacta

$\xi: \quad 0 \to F(M') \to F(T^r) \to F(C) \to F'(M') \to 0.$

Como $T^r, C \in \mathrm{add}(T_A)$, $F(T^r), F(C)$ son B-módulos proyectivos

Como $M_A \in \mathcal{F}$, $\mathrm{Hom}_A(T,M) = 0$, $\therefore \forall\, p: T \to M'$, $\mathrm{Im}\, p \subseteq \mathrm{Nuc}\, h$

$\therefore \mathrm{Hom}(T,g): \mathrm{Hom}(T,T^m) \to \mathrm{Hom}(T,M')$ es isomorfismo

$\therefore$ $F(M') \cong F(T^m)$ que es un B-módulo proyectivo.

Finalmente $0 = F'(T^m) \to F'(M') \xrightarrow{F'(h)} F'(M) \to 0$ es exacta

$\therefore$ $N_B = F'(M_A) \cong F'(M')$ y ξ es una resolución proyectiva de N_B. ■

(3) d.g. $B \leq 2$.

Demostración:

Sea $N_B \in \operatorname{mod} B$, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una teoría de torsión, hay una sucesión exacta $0 \to tN_B \to N_B \to \ell N_B \to 0$, con $tN_B \in \mathcal{X}$ y $\ell N_B \in \mathcal{Y}$

Como d.p. $tN_B \leq 2$ y d.p. $\ell N_B \leq 1$, $\therefore$ d.p. $N_B \leq 2$. ■

12.3. Observación.

Todos los B-módulos inescindibles de $\mathcal{Y}$ tienen dimensión proyectiva cero o uno, y como todos los B módulos proyectivos están en $\mathcal{Y}$, entonces todos los B módulos inescindibles de $\mathcal{X}$ tienen dimensión proyectiva uno o dos.

Ahora uno se pregunta si en realidad hay módulos en $\mathcal{X}$ de dimensión proyectiva 2. La respuesta la da el siguiente lema.

12.4. Lema

Supongamos que todos los proyectivos simples están en $\operatorname{add}(T_A)$, y sea P_A un proyectivo inescindible que no esté en $\operatorname{add}(T_A)$, entonces d.p $F'(P_A) = 2$.

Demostración.

Sea $0 \to P_A \xrightarrow{f} T_A' \xrightarrow{g} T_A'' \to 0$ exacta, con $T', T'' \in \operatorname{add}(T_A)$, esta sucesión induce una sucesión exacta

$$\xi = \quad 0 \to F(P_A) \xrightarrow{F(f)} F(T_A') \xrightarrow{F(g)} F(T_A'') \xrightarrow{\partial} F'(P_A) \to 0.$$

Sea $0 \to tP \xrightarrow{m} P \to \ell P \to 0$ la sucesión exacta con $tP \in \mathcal{T}$ y $\ell P \in \mathcal{F}$, como $F(\ell P) = 0$, $\therefore$ $F(m)$ es isomorfismo

Como A es hereditaria tP es proyectivo y como tP está generado por T_A, $tP \in \operatorname{add}(T_A)$, $\therefore$ $F(P) \cong F(tP)$ es un B módulo proyectivo

$\therefore$ ξ es una resolución proyectiva de $F'(P_A)$

Supongamos que d.p. $F'(P_A) \leq 1$ y que

$0 \to Q'_B \to Q_B \xrightarrow{\partial} F'(P_A) \to 0$ es una resolución proyectiva minimal

$\therefore \exists R_B \in \text{mod } B$ tal que $F(T'') \cong Q \oplus R$ y $R \subseteq \text{Nuc } \partial$. De hecho $\text{Nuc } \partial \cong Q' \oplus R$ que es proyectivo, $\therefore F(g)^{|}: F(T') \to \text{Nuc } \partial$ es epi escindible, $\therefore F(f)$ es mono escindible, $\therefore F(fm)$ es mono escindible, $\therefore GF(fm)$ es mono escindible.

Como $fm: tP \to T' \in \mathcal{T}$, $\therefore fm \cong GF(fm)$, $\therefore fm$ es mono escindible, $\therefore m$ es mono escindible, pero m es mono propio y P es inescindible, $\therefore tP = 0$

Por hipótesis todos los simples proyectivos están en $\text{add}(T_A) \subseteq \mathcal{T}$, como $\text{soc } P_A$ es semisimple, $\therefore \text{soc } P_A \subseteq tP_A = 0$, contradicción. ■

12.3. Corolario.

$D({}_BT)$ es un módulo de inclinación.

Demostración.

Por (5.2) $\mathcal{Y} = D\,\mathcal{T}({}_BT)$, $\therefore D({}_BT) \in \mathcal{Y}$, $\therefore$ d.p.$D({}_BT) \leq 1$.

Como $\text{Ext}^1_B(D({}_BT), D({}_BT)) = 0$ y $D({}_BT)$ tiene n sumandos inesucindibles no isomorfos, por (10.2) $D({}_BT)$ es un módulo de inclinación ■

§ 13. Sucesiones de conexión.

En esta sección T_A denotará un módulo de inclinación, B su anillo de endomorfismos y usaremos la notación de (4.1)

13.1. Lema.

Si $P_a \notin \text{add}(T_A)$, entonces $\text{End}_A(P_a) \cong \text{End}_B(F'(P_a))$

Demostración

Sea ρ: $0 \to tP_a \to P_a \to \ell P_a \to 0$ la sucesión exacta canónica

ρ induce las sucesiones exactas

$0 \to \text{Hom}(P_a, tP_a) \to \text{Hom}(P_a, P_a) \to \text{Hom}(P_a, \ell P_a) \to 0$ y

$0 \to \text{Hom}(\ell P_a, \ell P_a) \to \text{Hom}(P_a, \ell P_a) \to \text{Hom}(tP_a, \ell P_a) = 0$

Como $tP_a \subset P_a$ ($\subset$ denota contención estricta) y A es hereditaria

$\therefore \operatorname{Hom}(P_a, tP_a) = 0$, $\therefore \operatorname{End}(P_a) \cong \operatorname{Hom}(P_a, \ell P_a) \cong \operatorname{End}(\ell P_a)$.

Además $F'(P_a) \cong F'(\ell P_a)$ y como $F'|: \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ es una equivalencia de categorías , $\therefore \operatorname{End}_B(F'(P_a)) \cong \operatorname{End}_B(F'(\ell P_a)) \cong \operatorname{End}_A(\ell P_a)$. ■

13.2. Lema.

$F(\operatorname{rad} P_a) \cong \operatorname{rad} F(P_a)$

Demostración.

Sea $i: \operatorname{rad} P_a \hookrightarrow P_a$ la inclusión.

Sea $\varphi: \operatorname{Hom}_A(T, \operatorname{rad} P_a) \to \operatorname{rad} \operatorname{Hom}_A(T, P_a)$

$$f \longmapsto if$$

Para ver que φ está bien definida tomemos $g \in \operatorname{Hom}_A(P_a, T)$, si $ifg: P_a \to P_a \neq 0$. ifg es isomorfismo , $\therefore$ i es suprayectiva, contradicción.

$\therefore ifg = 0 \in \operatorname{rad} \operatorname{End}(P_a)$, $\therefore$ $if \in \operatorname{rad} \operatorname{Hom}_A(T, P_a)$

φ es inyectiva pues es la restricción de $F(i)$

Finalmente si $h \in \operatorname{rad} \operatorname{Hom}_A(T, P_a)$, h no es epiescindible

$\therefore$ $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{rad} P_a$, $\therefore$ $\varphi(h|^{\operatorname{rad} P_a}) = ih|^{\operatorname{rad} P_a} = h$ ■

13.3. Proposición.

El morfismo casi escindible izquierdo que comienza en $F(I_a)$ es de la forma $F(I_a) \to F(I_a/\operatorname{soc} I_a) \oplus F'(\operatorname{rad} P_a)$.

Demostración.

Sean $\sigma: 0 \to S_a \to I_a \to I_a/S_a \to 0$ y $\rho: 0 \to \operatorname{rad} P_a \to P_a \to S_a \to 0$ las sucesiones canónicas.

(1) Si $P_a \notin \operatorname{add}(T_A)$, entonces existen

$0 \to F(I_a) \to E_a \to F'(P_a) \to 0$ sucesión exacta que no se escinde y

$0 \to F'(\operatorname{rad} P_a) \to E_a \to F(I_a/\operatorname{soc} I_a) \to 0$ sucesión exacta

Demostración:

1er caso: $S_a \in \mathcal{T}$.

Como $F'(S_a) = 0$, σ induce una sucesión exacta

$0 \to F(S_a) \xrightarrow{\beta} F(I_a) \to F(I_a/S_a) \to 0$

Como P_a no es sumando de T, todo morfismo $T \to P_a$, se factoriza a través de rad P_a, $\therefore$ $F(\mathrm{rad}\,P_a \hookrightarrow P_a)$ es isomorfismo.

Entonces de ρ se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to F(S_a) \xrightarrow{\alpha} F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to F'(P_a) \to 0$$

Formando el producto colibrado de α y β, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F(S_a) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & F'(\mathrm{rad}\,P_a) \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & F'(P_a) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(I_a) \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[d] & E_a \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d] & F'(P_a) \arrow[r] & 0 \\
 & F(I_a/S_a) \arrow[r, equal] \arrow[d] & F(I_a/S_a) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Hemos encontrado las sucesiones buscadas. Por último si la sucesión que empieza en $F(I_a)$ se escindiera, tendríamos $\beta' : F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to F(I_a) \oplus F'(P_a)$, pero $F'(\mathrm{rad}\,P_a) \in \mathcal{X}$ es de torsión y $F(I_a) \in \mathcal{Y}$ es libre de torsión, $\therefore$ $\mathrm{Im}\,\beta' \subseteq F'(P_a)$.

$\therefore$ $\pi\beta'\alpha$ sería inyectiva, pero $\pi\beta'\alpha = \pi\alpha'\beta = 0$ y $F(S_a) \neq 0$, contradicción. ■

2º caso: $S_a \in \mathcal{F}$.

Como $F(S_a)=0$, ρ induce una sucesión exacta

$0 \to F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to F'(P_a) \xrightarrow{\gamma} F'(S_a) \to 0$, y como $F(S_a)=0=F'(I_a)$

σ induce una sucesión exacta

$0 \to F(I_a) \to F(I_a/S_a) \xrightarrow{\delta} F'(S_a) \to 0$

Formando el producto colibrado de γ y δ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & F'(\mathrm{rad}\, P_a) \arrow[r, equal] \arrow[d] & F'(\mathrm{rad}\, P_a) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F(I_a) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & E_a \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\gamma'"'] & F'(P_a) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(I_a) \arrow[r] & F(I_a/S_a) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d] & F'(S_a) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Otra vez, si la sucesión que termina en $F'(P_a)$ se escindiera, razonando como en el 1er caso, tendríamos que $\gamma'\mu$ es suprayectiva, y por tanto $0 = \varepsilon\delta'\mu = \delta\gamma'\mu$ sería suprayectiva, pero $F'(S_a) \neq 0$, contradicción. ■

(2) $P_a \notin \mathrm{add}(T_A)$, entonces toda sucesión exacta que no se escinde $0 \to F(I_a) \to * \to F'(P_a) \to 0$, es una sucesión que casi se divide.

Demostración:

Por (13.1) $\mathrm{End}_B(F'(P_a)) \cong \mathrm{End}_A(P_a)$ que es un anillo con división.

Por el lema de conexión $\tau^{-1} F(I_a) \cong F'(P_a)$, ∴ hay una sucesión que casi se divide $\xi = 0 \to F(I_a) \xrightarrow{m} D_a \to F'(P_a) \to 0$.

Sea η: $0 \to F(I_a) \xrightarrow{\mu} C_a \to F'(P_a) \to 0$ una sucesión exacta que no se escinda.

Como m es casi escindible izquierda minimal y μ no se escinde obtenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(I_a) \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & D_a \arrow[r] \arrow[d] & F'(P_a) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(I_a) \arrow[r, "\mu"'] & C_a \arrow[r] & F'(P_a) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\therefore\ \eta f = \xi \neq 0$, $\therefore\ f \neq 0$, $\therefore\ f$ es isomorfismo

$\therefore\ \eta$ casi se divide. ■

(3) Si $P_a \in \mathrm{add}(T_A)$, $F(I_a)$ es inyectivo y hay una sucesión exacta de la forma $0 \to F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to E_a \to F(I_a/S_a) \to 0$, donde $E_a = F(I_a)/\mathrm{soc}\,F(I_a)$

Demostración:

Como $P_a \in \mathrm{add}(T_A)$, $F(P_a) \in \mathrm{add}(B_B)$, $\therefore R_B = F(P_a)/\mathrm{rad}\,F(P_a)$ es un B-módulo simple. Por (13.2) $F(P_a)/F(\mathrm{rad}\,P_a) \cong R_B$

p induce una sucesión exacta

$0 \to F(\mathrm{rad}\,P_a) \to F(P_a) \to F(S_a) \to F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to F'(P_a) = 0$, y ésta induce la sucesión exacta $0 \to R \xrightarrow{\alpha} F(S_a) \to F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to 0$

Como $P_a \in \mathcal{T}$, $\therefore S_a \in \mathcal{T}$, $\therefore \mathcal{T}$ induce la sucesión exacta

$0 \to F(S_a) \xrightarrow{\beta} F(I_a) \to F(I_a/S_a) \to 0$.

Como $P_a \in \mathrm{add}(T_A)$, por (5.4) $F(I_a)$ es inyectivo inescindible.

$\therefore \mathrm{soc}\,F(I_a)$ es simple, pero $\beta\alpha : R \to F(I_a)$ es inyectiva y R es simple.

$\therefore \beta\alpha(R) = \mathrm{soc}\,F(I_a)$

Aplicando el lema de la serpiente a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "\beta\alpha"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(S_a) \arrow[r, "\beta"'] & F(I_a) \arrow[r] & F(I_a)/\beta\, F(S_a) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obtenemos la sucesión exacta

$0 \to F(S_a)/\alpha(R) \to F(I_a)/\beta\alpha(R) \to F(I_a)/\beta\cdot F(S_a) \to 0$

donde $F(S_a)/\alpha(R) \cong F'(\mathrm{rad}\,P_a)$, $F(I_a)/\beta\alpha(R) = F(I_a)/\mathrm{soc}\,F(I_a)$ y $F(I_a)/\beta\cdot F(S_a) \cong F(I_a/S_a)$. ■

(4) La sucesión exacta $0 \to F'(\mathrm{rad}\,P_a) \to E_a \to F(I_a/S_a) \to 0$, obtenida en (1) o en (3), se escinde

Demostración:

El carcaj de A construido en (11.1) no tiene ciclos dirigidos.

$\therefore \forall\, b \in \tilde{n}\ \exists\, a \in \tilde{n}$ tal que a es una fuente y hay un camino dirigido $a = a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_n = b$, en el carcaj de A

La demostración se hará por inducción sobre la longitud de los caminos que empiezan en una fuente.

Si a es una fuente, $\operatorname{rad} P_a = 0$ y no hay nada que probar.

Sea $b \in \tilde{n}$ y supongamos que si $a \in \tilde{n}$ con una flecha $a \to b$, entonces la sucesión correspondiente a a se escinde.

Se desea probar que E_b tiene un sumando isomorfo a $F'(\operatorname{rad} P_b)$.

Con la notación de (11.3) tenemos que $F'(\operatorname{rad} P_b) = \oplus_{a \in \tilde{n}} F'(P_a)^{d_{ab}}$ y por el teorema de Krull-Schmidt basta probar que si $F'(P_a) \neq 0$, entonces $F'(P_a)^{d_{ab}}$ es sumando de E_b.

Supongamos que $F'(P_a) \neq 0$ y que $d_{ab} \neq 0$, $\therefore$ hay una flecha $a \to b$, por hipótesis de inducción $E_a \cong F'(\operatorname{rad} P_a) \oplus F(I_a/S_a)$

Como $F'(P_a) \neq 0$, $\therefore$ $P_a \notin \mathcal{T}$, $\therefore$ $P_a \notin \operatorname{add}(T_A)$, entonces por (2) y (3) la sucesión $0 \to F(I_a) \to E_a \to F'(P_a) \to 0$ casi se divide.

Otra vez con la notación de (11.3) tenemos $F(I_a/\operatorname{soc} I_a) = \oplus_{b \in \tilde{n}} F(I_b)^{d'_{ab}}$

$$\therefore \quad E_a \cong F'(\operatorname{rad} P_a) \oplus F(I_a/S_a) = (\oplus_{a \in \tilde{n}} F'(P_a)^{d_{ab}}) \oplus (\oplus_{b \in \tilde{n}} F(I_b)^{d'_{ab}})$$

Como $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Im} F' = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$ y $E_a \to F'(P_a)$ es irreducible

$\therefore$ $\dim_{\operatorname{End}(F(I_b))} \operatorname{Irr}(F(I_b), F'(P_a)) = d'_{ab}$ (aquí usamos que $\operatorname{End}(F(I_b)) \cong \operatorname{End}(I_b) \cong \operatorname{End}(P_b)$ que es anillo con división).

$$\dim_k \operatorname{Irr}(F(I_b), F'(P_a)) = \dim_k \operatorname{End}(F(I_b)) \cdot |\operatorname{Irr}(F(I_b), F'(P_a))_{\operatorname{End}(F(I_b))}|$$

$$= f_b\, d'_{ab} \underset{(11.3)}{=} f_a d_{ab} .$$ Pero también

$$\dim_k \operatorname{Irr}(F(I_b), F'(P_a)) = \dim_k \operatorname{End}(F'(P_a)) \,|_{\operatorname{End}(F'(P_a))} \operatorname{Irr}(F(I_b), F'(P_a))|$$

Por (13.1) $\operatorname{End}_B(F'(P_a)) \cong \operatorname{End}_A(P_a)$ que es anillo con división

$\therefore$ $\dim_k \operatorname{End}(F'(P_a)) = \dim_k \operatorname{End}(P_a) = f_a$ y $\dim_{\operatorname{End}(F'(P_a))} \operatorname{Irr}(F(I_b), F'(P_a)) = d_{ab}$,

$\therefore$ $F'(P_a)^{d_{ab}}$ es sumando de E_b

Hemos probado que E_b tiene un sumando isomorfo a $F'(\operatorname{rad} P_b)$

En la sucesión $0 \to F'(\operatorname{rad} P_b) \to E_b \to F(I_a/S_a) \to 0$ $F'(\operatorname{rad} P_b)$ es de torsión y $F(I_a/S_a)$ es libre de torsión, $\therefore$ $tE_b \cong F'(\operatorname{rad} P_b)$ y la sucesión se escinde ■

Esto termina la prueba ■

13.4. Corolario, definición.

Hay dos posibilidades:

Si $P_a \in \mathrm{add}(T_A)$, $F(I_a)$ es inyectivo (6.4) y el morfismo casi escindible izquierdo minimal que empieza en $F(I_a)$ es

$$F(I_a) \to F(I_a)/\mathrm{soc}\, F(I_a) = F(I_a/s_a) \oplus F'(\mathrm{rad}\, P_a)$$

Si $P_a \notin \mathrm{add}(T_A)$, $F(I_a)$ no es inyectivo (6.4) y la sucesión que casi se divide que empieza en $F(I_a)$ es de la forma

$$0 \to F(I_a) \to F(I_a/s_a) \oplus F'(\mathrm{rad}\, P_a) \to F'(P_a) \to 0.$$

éstas sucesiones se llaman **sucesiones de conexión** y jugarán un papel muy importante más adelante. ∎

§ 14. Escisión de la teoría de torsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Continuaremos con las hipótesis y la notación empleada en la § 13.

14.1. Teorema.

Todo B-módulo inescindible está en $\mathcal{X}$ o en $\mathcal{Y}$, es decir, la teoría de torsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde.

Demostración.

(1) Si $F'(P_a) \to X_B$ es irreducible, entonces $X \in \mathcal{X}$.

Demostración:

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que X_B es inescindible ya que un irreducible compuesto con un epi escindible es irreducible y $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas finitas.

Como $F'(P_a) \in \mathcal{X}$, $X \notin \mathcal{Y}$, ∴ X no es proyectivo, ∴ $\tau X \neq 0$ y hay un morfismo irreducible $\tau X \to F'(P_a)$.

Puesto que $F'(P_a) \neq 0$, $P_a \notin \mathrm{add}(T_A)$; por (13.4) hay una sucesión de conexión que termina en $F'(P_a)$ y por la forma de la sucesión de conexión, hay dos posibilidades. 1) $\exists\, b \in \tilde{n}$ tal que $\tau X = F(I_b)$ con I_b sumando de $I_a/\mathrm{soc}\, I_a$, 2) $\exists\, c \in \tilde{n}$ tal que

$\tau X = F'(P_c)$ con P_c sumando de $\operatorname{rad} P_a$.

En el primer caso, $X = \tau^{-1}\tau X = \tau^{-1} F(I_b) \underset{(6.1)}{=} F'(P_b) \in \mathcal{X}$

En el segundo caso, consideramos el carcaj Γ de A, definido en (11.1) y hacemos la demostración por inducción sobre la longitud de los caminos de Γ que empiezan en una fuente.

Si a es una fuente, $\operatorname{rad}(P_a) = 0$ y el segundo caso no se da.

Si a no es una fuente y $\tau X = F'(P_c)$, consideramos la sucesión que casi se divide $0 \to F'(P_c) \to X' \to X \to 0$

Como $P_c \mid \operatorname{rad} P_a$, c es un predecesor de a en Γ y por hipótesis de inducción $X' \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo cocientes, $\therefore X \in \mathcal{X}$. ■

(2) $\forall\, a \in \tilde{n}$ $\tau^{-1} F'(P_a) \in \mathcal{X}$.

Demostración:

Si $\tau^{-1} F'(P_a) \neq 0$, consideramos la sucesión que casi se divide

$0 \to F'(P_a) \to X \to \tau^{-1} F'(P_a) \to 0$

Por (1) $X \in \mathcal{X}$, pero $\mathcal{X}$ es cerrada bajo cocientes ■

(3) $\forall\, Y \in \mathcal{Y}$, $\operatorname{Ext}^1_B(Y, F'(P_a)) = 0$.

Demostración:

$D\operatorname{Ext}^1_B(Y, F'(P_a)) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_B(\tau^{-1}F'(P_a), Y) \underset{(2)}{=} 0$. ■

(4) $\forall\, X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$. $\operatorname{Ext}^1(Y, X) = 0$.

Demostración:

Como $X \in \mathcal{X}$, $\exists\, M_A \in \operatorname{mod} A$ tal que $X = F'(M)$.

Sea $P_A \to M_A \to 0$ la cubierta proyectiva de M_A. Como $\operatorname{d.p.} T_A \leq 1$, la sucesión inducida $F'(P) \to F'(M) = X \to 0$ es exacta. Por (12.3) $\operatorname{d.p.} Y_B \leq 1$, $\therefore \operatorname{Ext}^1_B(Y, F'(P)) \to \operatorname{Ext}^1_B(Y, X)$ es suprayectiva, pero por (3) $\operatorname{Ext}^1_B(Y, F'(P)) = 0$. ■

(4) implica que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde ■

14.2. Corolario.

Si Λ es de tipo de representación finito, entonces también B lo es.

Demostración.

Se sigue de (4.4) y (14.1). ■

14.3. Observación.

Si A no es hereditaria el corolario anterior es falso, (17.10).

§ 15. El carcaj de Auslander-Reiten de una álgebra inclinada.

Continuamos con las hipótesis y la notación de la § 13. Denotaremos por Γ_A el carcaj de Auslander-Reiten de A y por Γ_B el de B.

15.1. Teorema.

Si $\eta := 0 \to N'_B \to N_B \to N''_B \to 0$ es una sucesión que casi se divide en mod B, entonces pasa uno de los siguientes tres casos: 1) $N', N, N'' \in \mathcal{X}$, 2) $N', N, N'' \in \mathcal{Y}$ o 3) η es una sucesión de conexión.

Demostración.

Por (14.1) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde, $\therefore N', N'' \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$.

Como $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ son cerradas bajo extensiones los casos $N', N'' \in \mathcal{X}$, $N', N'' \in \mathcal{Y}$ nos llevan a 1) y 2) respectivamente. El caso en que $N' \in \mathcal{X}$, $N'' \in \mathcal{Y}$ es imposible pues η no se divide y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde. Finalmente $N' \in \mathcal{Y}$, $N'' \in \mathcal{X}$ nos lleva a 3), en efecto, $\exists M_A \in \mathcal{T}$ tal que M_A es inescindible y $F(M_A) = N'$

Sea $0 \to M_A \to I_A$ la envolvente inyectiva de M_A, $\therefore$ $\operatorname{Ext}^1_B(F(I/M), N') \cong D\underline{\operatorname{Hom}}_B(\tau^{-1}N', F(I/M)) = 0$, pues $\tau^{-1}N' \cong N'' \in \mathcal{X}$ y $F(I/M) \in \mathcal{Y}$.

Como $F(M) = N'$, $\therefore$ $\operatorname{Ext}^1_A(I/M, M) \underset{(6.9)}{\cong} \operatorname{Ext}^1_B(F(I/M), F(M)) = 0$

$\therefore I = M$, $\therefore \exists\, a \in \bar{n}$ $I = I_a$ y de (13.4) se sigue que η es una sucesión de conexión. ■

15.2. Observación.

Si A es inescindible como K álgebra, por (11.2) $\{P_a \mid a \in \tilde{n}\}$ es una subgráfica conexa de Γ_A. Como A es hereditaria hay un irreducible $P_a \to P_b$ si y sólo si hay un irreducible $I_a \to I_b$. Por tanto $\{I_a \mid a \in \tilde{n}\}$ es una subgráfica conexa de Γ_A y como $\forall a \in \tilde{n}$ $F(I_a) \neq 0$, de la forma de las sucesiones de conexión, se sigue que $\{F(I_a) \mid a \in \tilde{n}\}$ es una subgráfica conexa de Γ_B.

15.3. Lema.

Sea $\mathcal{C}$ la componente de Γ_B que contiene a $\{F(I_a) \mid a \in \tilde{n}\}$, entonces $\forall M \in \mathcal{C}$ $\exists!$ $z \in \mathbb{Z}$, $a \in \tilde{n}$ tales que $M \cong \tau^{z} F(I_a)$.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}' := \{\tau^{z} F(I_a) \mid z \in \mathbb{Z}, a \in \tilde{n}\}$, veremos primero que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

Sean N_B inescindible y $m \geq 0$.

(1) Si $N_B \to \tau^{m} F(I_a)$ es irreducible, entonces $N_B \in \mathcal{C}'$

Demostración:

Como $F(I_a) \in \mathcal{Y}$, de (15.1) se sigue que $\tau^{m} F(I_a) \in \mathcal{Y}$ y como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde, $\therefore$ $N_B \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Pero $\operatorname{Hom}_B(N, \tau^{m} F(I_a)) \neq 0$ $\therefore$ $N_B \in \mathcal{Y}$.

Si N_B es inyectivo, por (6.4) $\exists\, b \in \tilde{n}$, $N_B \cong F(I_b) \in \mathcal{C}'$.

Si N_B no es inyectivo, hay un irreducible $\tau^{m} F(I_a) \to \tau^{-1} N_B$, en este caso procedemos por inducción sobre m.

Si $m = 0$, por (13.3) $\exists\, b \in \tilde{n}$ tal que $\tau^{-1} N_B \cong F(I_b)$ o $\exists\, c \in \tilde{n}$ tal que $\tau^{-1} N_B \cong F'(P_c) \underset{(6.1)}{\cong} \tau^{-1} F(I_c)$, en cualquier caso $\tau^{-1} N_B \in \mathcal{C}'$, $\therefore$ $N_B \in \mathcal{C}'$.

Si $m > 0$, hay un irreducible $\tau^{-1} N_B \to \tau^{m-1} F(I_a)$ y por hipótesis de inducción $\tau^{-1} N_B \in \mathcal{C}'$, $\therefore$ $N_B \in \mathcal{C}'$. ■

(2) Si $\tau^{-m} F(I_a) \to N_B$ es irreducible, entonces $N_B \in \mathcal{C}'$

Demostración:

La haremos por inducción sobre m.

Si $m=0$ se procede como en (1)

Si $m>0$, por el lema de conexión, $\tau^{-m}F(I_a) \cong \tau^{-m+1}F'(P_a) \in X$ (esto último por (15.1)), $\therefore N_B \notin \mathcal{Y}$, $\therefore N_B$ no es proyectivo, entonces hay un irreducible $\tau N_B \to \tau^{-m}F(I_a)$ y por tanto hay un irreducible $\tau^{-m+1}F(I_a) \to \tau N_B$, por hipótesis de inducción $\tau N_B \in \mathcal{C}'$, $\therefore N_B \in \mathcal{C}'$. ■

(3) Si $N_B \to \tau^{-m}F(I_a)$ es irreducible y $m \geq 1$ entonces $N_B \in \mathcal{C}'$

Demostración:

En este caso hay un irreducible $\tau^{-m+1}F(I_a) \to N_B$ y se reduce a (2). ■

(4) Si $\tau^{m}F(I_a) \to N_B$ es irreducible y $m \geq 1$, entonces $N_B \in \mathcal{C}'$

Demostración:

Se reduce a (1) ■

(1) a (4) implican que $\mathcal{C}'=\mathcal{C}$. Falta ver la unicidad, para esto basta probar que $\tau^{-m}F(I_a) \cong F(I_b)$ implica que $m=0$ e $I_a=I_b$.

Si $m=0$, $F(I_a)=F(I_b)$, pero $F|: \mathcal{I} \to \mathcal{Y}$ es una equivalencia de categorías $\therefore I_a=I_b$, y si $m>0$, por (15.1) $\tau^{-m}F(I_a)$ está en X, pero $F(I_b)$ está en $\mathcal{Y}$, $\therefore \operatorname{Hom}_B(\tau^{-m}F(I_a), F(I_b))=0$, contradicción. ■

§ 16. Sucesiones que casi se dividen relativas.

Continuaremos con las hipótesis y la notación empleada en la § 13.

16.1. Definiciones.

Sea $\mathcal{Z}$ una subcategoría plena de mod A cerrada bajo extensiones. Un morfismo $g\ M' \to M$ en $\mathcal{Z}$ se llama **casi escindible derecho relativo** a $\mathcal{Z}$ si g no es epi escindible y $\forall h: X \to M \in \mathcal{Z}$, si h no es epi escindible $\exists h': X \to M'$, tal que $gh'=h$. Análogamente un morfismo $f\ M \to M'' \in \mathcal{Z}$ se llama **casi escindible izquierdo relativo** a $\mathcal{Z}$ si f no es mono escindible y $\forall h\ M \to X \in \mathcal{Z}$, si h no es mono escindible, entonces $\exists h': M'' \to X$, tal que $h'f = h$.

Una sucesión exacta $\eta: 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ en $\mathcal{Z}$, tal que M_1 y M_3 son inescindibles, f es casi escindible izquierdo relativo y g es casi escindible derecho relativo se llama **sucesión que casi se divide relativa** a $\mathcal{Z}$. Cuando no dé lugar a confusión la llamaremos sucesión que casi se divide relativa.

Para las propiedades elementales de las sucesiones que casi se dividen relativas, citamos [17]

Finalmente diremos que $\mathcal{Z}$ **tiene sucesiones que casi se dividen relativas** si:

1) $\forall Z \in \mathcal{Z}$, Z inescindible, hay un morfismo $Z' \to Z \in \mathcal{Z}$ casi escindible derecho relativo y un morfismo $Z \to Z'' \in \mathcal{Z}$ casi escindible izquierdo relativo

2) $\forall M_1 \in \mathcal{Z}$, M_1 inescindible, si $\exists M \in \mathcal{Z}$ tal que $\mathrm{Ext}^1(M, M_1) \neq 0$, entonces hay una sucesión que casi se divide relativa, de la forma, η.

3) $\forall M_3 \in \mathcal{Z}$, M_3 inescindible, si $\exists M \in \mathcal{Z}$ tal que $\mathrm{Ext}^1(M_3, M) \neq 0$, entonces hay una sucesión que casi se divide relativa, de la forma η

16.2. Lema

Si $0 \to M'_A \to M_A \xrightarrow{\pi} M''_A \to 0$ es una sucesión que casi se divide relativa a $\mathcal{T}$, entonces $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$, es una sucesión que casi se divide en mod B

Demostración.

Sea $N_B \in \mathrm{mod}\, B$ inescindible y $\varphi: N \to F(M'') \neq 0$, $\therefore N$ es libre de torsión, pues (X, Y) se escinde

Luego podemos suponer que $\exists L_A \in \mathcal{T}$, $\alpha: L_A \to M''_A$ tales que $N = F(L)$ y $\varphi = F(\alpha)$. Si α es isomorfismo, φ es isomorfismo y no hay nada que probar, si α no es isomorfismo,

$\exists\, \alpha' : L_A \to M_A$ tal que $\pi\alpha' = \alpha$, $\therefore$ $F(\pi)F(\alpha') = F(\alpha)\cdot\varphi$. ■

16.3. Lema.

Si $0 \to N'_B \to N_B \to N''_B \to 0$ es una sucesión que casi se divide en mod B, y está en $\mathcal{Y}$, entonces $0 \to G(N') \to G(N) \to G(N'') \to 0$ es una sucesión que casi se divide relativa a $\mathcal{T}$.

Demostración.

La demostración es una calca de lo anterior. Si $M_A \in \mathcal{T}$ es inescindible y $\varphi : G(N') \to M \neq 0$, como $M \in \mathcal{T}$, podemos suponer que $\exists\, L_B \in \mathcal{Y}$, $\alpha : N' \to L$ tales que $M_A = G(L_B)$ y $\varphi = G(\alpha)$, y se termina como arriba. ■

16.4. Corolario.

$F|\mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ da una biyección entre las sucesiones que casi se dividen relativas a $\mathcal{T}$ y las sucesiones que casi se dividen en mod B que están en $\mathcal{Y}$

Demostración.

Se sigue de (16.2), (16.3) y de que $GF|\mathcal{T} \cong 1_{\mathcal{T}}$. ■

16.5. Teorema.

$\mathcal{T}$ tiene sucesiones que casi se dividen relativas.

Demostración.

Sea $M_A \in \mathcal{T}$ inescindible y supongamos que $\exists\, M''_A \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_A(M'', M) \neq 0$. Por (6.9) $\mathrm{Ext}^1_B(F(M''), F(M)) \neq 0$. $\therefore$ $F(M)$ no es inyectivo en mod B, entonces existe una sucesión que casi se divide

$\delta = 0 \to F(M) \to X \to \tau^{-1}F(M) \to 0$ en mod B

Como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde, $\tau^{-1}F(M) \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$.

Si $\tau^{-1}F(M) \in \mathcal{X}$, δ es una sucesión de conexión (15.1) $\therefore$ $\exists\, a \in \tilde{n}$ $F(M) \cong F(I_a)$, $\therefore$ $M \cong GF(M) \cong GF(I_a) \cong I_a$, contradicción, $\therefore$ $\tau^{-1}F(M) \in \mathcal{Y}$, $\therefore$ δ está en $\mathcal{Y}$ y por (16.3) hay una sucesión que casi se divide relativa que empieza en M.

Sea $M_A \in \mathcal{T}$, inescindible y supongamos que $\exists\, M'_A \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_A(M, M') \neq 0$. Como antes vemos que hay una sucesión que casi se divide, δ, en mod B que termina en $F(M_A)$.

Por (15.1) δ está en $\mathcal{Y}$ y por (16.3) hay una sucesión que casi se divide relativa que termina en M.

Finalmente veremos que existen morfismos casi escindibles relativos.

Sea $M_A \in \mathcal{T}$ inescindible.

Si $\exists\, M''_A \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_A(M'', M) \neq 0$ probamos en el primer párrafo que hay un morfismo casi escindible izquierdo relativo que empieza en M.

Si $\forall\, M''_A \in \mathcal{T}$ $\mathrm{Ext}^1_A(M'', M) = 0$, afirmamos que M es inyectivo. Si M no fuera inyectivo, por (6.4) $F(M)$ no sería inyectivo, entonces existiría una sucesión que casi se divide

δ: $0 \to F(M) \to X \to Y \to 0$ en mod B. Si $Y \in \mathcal{Y}$, δ está en $\mathcal{Y}$ y por (16.3) hay una sucesión que casi se divide relativa que empieza en M, contrario a nuestra hipótesis. Si $Y \in \mathcal{X}$, por (15.1) δ es una sucesión de conexión y como en el primer párrafo probamos que M es inyectivo, contradicción.

Por tanto M es inyectivo en mod A y el morfismo canónico casi escindible izquierdo relativo $M \to M/\mathrm{soc}\, M$ está en $\mathcal{T}$.

Por último si $\exists\, M'_A \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_A(M, M') \neq 0$, probamos en el segundo párrafo que hay un morfismo casi escindible derecho relativo que termina en M.

Si $\forall\, M'_A \in \mathcal{T}$. $\mathrm{Ext}^1_A(M, M') = 0$, entonces $M \in \mathrm{add}(T_A)$, en efecto, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0$, $\mathrm{Ext}^1_A(M, T) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$, la última igualdad porque $M \in \mathcal{T}$, $\therefore$ $\mathrm{Ext}^1_A(T \oplus M, T \oplus M) = 0$.

Como A es hereditaria y T es un módulo de inclinación, $\therefore$ $T \oplus M$ es un módulo de inclinación, entonces por (10.2) M es un sumando de T, $\therefore$ $F(M)$ es proyectivo.

Como $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo submódulos, $(\operatorname{rad} F(M) \overset{\mu}{\hookrightarrow} F(M)) \in \mathcal{Y}$ y es casi escindible derecho, $\therefore$ $G(\operatorname{rad} F(M)) \xrightarrow{G(\mu)} GF(M) \overset{\varepsilon_M}{\cong} M$ es un morfismo en $\mathcal{I}$ y no es epi escindible (ε_M fue definido en (4.21))

Sea $f: X_A \to M_A \in \mathcal{I}$ tal que no es epi escindible, $\therefore$ $F(f)$ no es epi escindible, $\therefore$ $\exists$ $g: F(X) \to \operatorname{rad} F(M)$ tal que $\mu g = F(f)$, $\therefore$ $G(\mu)G(g) = GF(f)$, $\therefore$ $\varepsilon_M G(\mu) G(g) = \varepsilon_M GF(f) = f \varepsilon_X$, $\therefore$ $\varepsilon_M G(\mu) G(g) \varepsilon_X^{-1} = f$, $\therefore$ $\varepsilon_M G(\mu)$ es un morfismo casi escindible derecho relativo que termina en M. ●

CAPITULO 6. UNA CONDICION SUFICIENTE PARA QUE UNA k- ALGEBRA DE DIMENSION FINITA SEA INCLINADA.

Un paso intermedio, de importancia, entre los funtores de reflexión y los módulos de inclinación fue dado en [2] por Auslander, Platzeck y Reiten. Su idea consiste en definir algo análogo a los funtores de reflexión, pero, sin usar gráficos. Para ello consideran un A-módulo proyectivo simple no inyectivo P_b, $P' = \oplus_{a \neq b} P_a$, $T_A = \tau^{-1} P_b \oplus P'$, $B = \mathrm{End}(T_A)$ y $J_B = \mathrm{Ext}^1_A({}_BT_A, P_{b\,A})$. Definen, también, la subcategoría plena, mod'A, de mod A cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a P_b y la subcategoría plena, mod'B, de mod B cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a J y consideran los funtores

$F = \mathrm{Hom}({}_BT_A, -) : \mathrm{mod}\,A \to \mathrm{mod}\,B$ y

$G = \ - \otimes_B T_A : \mathrm{mod}\,B \to \mathrm{mod}\,A$

Observan, entre otras cosas, que $F| : \mathrm{mod}'A \to \mathrm{mod}\,B$ es fiel y pleno, que J es un B-módulo simple y que si además A es hereditaria, entonces J es inyectivo, $F| \ \mathrm{mod}'A \to \mathrm{mod}'B$ es una equivalencia de categorías y B es hereditaria. En este caso (A hereditaria), F es un funtor de Coxetor parcial izquierdo (es decir, F satisface: 1) $F(P_b) = 0$, 2) $F| \ \mathrm{mod}'A \to \mathrm{mod}'B$ es una equivalencia de categorías) y G es un funtor de Coxetor parcial derecho (es decir, G satisface: 1) $G(J) = 0$, 2) $G| : \mathrm{mod}'B \to \mathrm{mod}'A$ es una equivalencia de categorías).

Todos estos resultados los utilizaremos en la § 19. En la § 17 damos demostraciones de ellos con ayuda de la teoría de módulos de inclinación desarroyada. En (17.1) probamos que A es un módulo de inclinación (para A no necesariamente hereditaria), entonces se hace patente que la teoría de módulos de inclinación generaliza a la de los funtores de Coxeter parciales.

Despues vemos (17.3) que si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es la teoría de torsión en mod A generada por T_A y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ la teoría de torsión correspondiente en mod B, entonces $\mathcal{T} = \text{mod}' A$, $\mathcal{F} = \text{add}(P_0)$, $\mathcal{X} = \text{add}(S)$, $\mathcal{Y} = \text{mod}' B$. Después de esta observación los resultados arriba mencionados se siguen facilmente de la teoría de módulos de inclinación desarroyada.

En la § 18 introducimos los conceptos de rebanada y rebanada completa, a saber, si B es una k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{C}$ es una componente del carcaj de Auslander-Reiten de B, una rebanada $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}$ es un conjunto de módulos inescindibles en $\mathcal{C}$ que satisfacen:

R1) Si X es un predecesor de $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ contiene precisamente un módulo de la órbita $\{\tau^i X \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

R2) Si $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$ es una cadena de morfismos distintos de cero entre módulos inescindibles y $X_0, X_r \in \mathcal{U}$, entonces $\forall i \in \bar{r}$ $X_i \in \mathcal{U}$.

R3) No existen ciclos dirigidos de morfismos irreducibles $U_0 \to U_1 \to \cdots \to U_r \to U_0$ con todas los U_i's en $\mathcal{U}$.

Una rebanada completa $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}$ satisface R2) y R3) y además una condición más fuerte que R1), es decir,

RC1) Si X está en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{U}$ contiene precisamente un módulo de la órbita $\{\tau^i X \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Si $\mathcal{U}$ es una rebanada finita, $U = \bigoplus_{U_\alpha \in \mathcal{U}} U_\alpha$ se llama módulo rebanada

En (18.4) damos un ejemplo fundamental de rebanada completa. Si A es hereditaria e inescindible, T_A es un módulo de inclinación y $B = \text{End}(T_A)$, entonces $\{F(I_a) \mid a \in \hat{n}\}$ es una rebanada completa en su componente. Por último observamos (18.6) que las rebanadas completas son conexas como subgráficas del carcaj de Auslander-Reiten.

En la § 19 nos dedicamos a probar el principal resultado de este capitulo, es decir, damos una condición suficiente para que una k-álgebra de dimensión finita B sea inclinada.

Teorema (19.1).

Sea $\mathcal{C}$ una componente del carcaj de Auslander-Reiten de B, que contenga a todos los proyectivos inescindibles y a una rebanada completa finita $\mathcal{U}$, con módulo rebanada U, entonces U_B es un módulo de inclinación y $\mathrm{End}(U_B)$ es hereditaria. Por tanto B es una álgebra inclinada.

La demostración es hecha por etapas, en (19.3) vemos que si $\mathcal{U}$ es una rebanada finita con módulo rebanada U_B, entonces $\mathrm{Ext}'^1_B(U,U)=0$, si además U_B es de inclinación (19.4), $\mathrm{End}(U_B)$ es hereditaria. En (19.5) vemos que si $\mathcal{U}$ es una rebanada con un número finito de predecesores y U_B es su módulo rebanada, entonces d.p. $U_B \leq 1$ y si Q_B es un B-módulo proyectivo que es un predecesor de $\mathcal{U}$, entonces hay una sucesión exacta de la forma $0 \to Q_B \to U'_B \to U''_B \to 0$ con $U', U'' \in \mathrm{add}(U_B)$.

A continuación mencionamos dos consecuencias de (19.1), una de ellas (19.7) dice que bajo las hipótesis de (19.1) el A-módulo ${}_AUe$ es inescindible, donde e es un idempotente primitivo de B y $A = \mathrm{End}(U_B)$.

Finalmente vemos (19.8) que, para una k álgebra de dimensión finita, de tipo de representación finito e inescindible es equivalente que sea inclinada a que su carcaj de Auslander-Reiten contenga una rebanada completa.

§ 17. Funtores de Coxeter parciales.

Sea A hereditaria y supongamos que A tiene un proyectivo simple no inyectivo P_b, y sean $P' = \bigoplus_{a \neq b} P_a$, $T_A = \tau^{-1} P_b \oplus P'$, $B = \mathrm{End}(T_A)$. Usaremos la notación introducida en (4.1).

Sea $J_B = F'(P_b) = \mathrm{Ext}'_A({}_BT_A, P_{b\,A})$ y sean $\mathrm{mod}'A$ la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,A$ cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a P_b y $\mathrm{mod}'B$ la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,B$ cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a J_B.

Finalmente sea $A = \oplus_{a \in \mathfrak{A}} P_a^{m_a}$ una descomposición de A.

17.1. Lema.

T_A es un módulo de inclinación (A no necesariamente hereditaria).

Demostración.

Sea $0 \to P_b \to Q \to \tau^{-1} P_b \to 0$ la sucesión que casi se divide que empieza en P_b. Q es proyectivo, de lo contrario consideramos un sumando inescindible no proyectivo Q_i de Q, la existencia del morfismo irreducible $P_b \to Q_i$, implicaría la existencia de un morfismo irreducible $\tau Q_i \to P_b$, esto es imposible porque P_b es proyectivo simple. Por tanto la anterior es una resolución proyectiva minimal de $\tau^{-1} P_b$, $\therefore$ d.p. $\tau^{-1} P_b = 1$, entonces d.p. $T_A = 1$.

Como T_A tiene exactamente n sumandos inescindibles no isomorfos, basta probar, por (10.2) que $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Más aún $\mathrm{Ext}_A^1(-,T)$ es aditivo y P' es proyectivo, luego todo se reduce a probar que $\mathrm{Ext}_A^1(\tau^{-1} P_b, T) = 0$.

Supongamos que hay una sucesión exacta

$0 \to T \to X \to \tau^{-1} P_b \to 0$, que no se divide.

Como $0 \to P_b \to Q \to \tau^{-1} P_b \to 0$ casi se divide, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \tau^{-1} P_b \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_b \arrow[r] & Q \arrow[r] & \tau^{-1} P_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como P_b no es sumando de T, f no es suprayectiva y como P_b es simple, $\therefore$ $f = 0$, esto implica que la sucesión inferior se escinde, contradicción. ∎

17.2. Lema.

$\mathrm{End}_A(\tau^{-1} P_b)$ es un anillo con división.

Demostración.

Por (17.1) $\mathrm{Ext}_A^1(\tau^{-1} P_b, \tau^{-1} P_b) = 0$. Como A es hereditaria el resultado se sigue de (11.4). ∎

17.3. Lema.

$\mathcal{T} = \text{mod}' A$, $\mathcal{F} = \text{add}(P_b)$, $\mathcal{X} = \text{add}(J)$, $\mathcal{Y} = \text{mod}' B$.

Demostración.

(1) $\mathcal{F} = \text{add}(P_b)$

Demostración:

$\supseteq$. Como P_b no es sumando de T y es proyectivo simple $\therefore \text{Hom}_A(T, P_b) = 0$, $\therefore P_b \in \mathcal{F}$.

Como P_b es simple, $\text{add}(P_b) = \{P_b^n \mid n \geq 0\}$, $\therefore \text{add}(P_b) \subseteq \mathcal{F}$.

$\subseteq$. Sea $M_A \in \mathcal{F}$ y sea $p: A^m \to M$ un epimorfismo, por tanto $(\oplus_{a \neq b} P_a^{m_a})^m \hookrightarrow A^m \xrightarrow{p} M$ es cero, $\therefore P_b^{m m_b} \hookrightarrow A^m \to M$ es suprayectiva y como P_b es simple, $\exists\, l$, tal que $M \cong P_b^l \in \text{add}(P_b)$. ■

(2) $\mathcal{T} = \text{mod}' A$.

Demostración:

$\subseteq$. Sea $M_A \in \mathcal{T}$, $\therefore$ M está generado por T, como P_b no está generado por T, P_b no puede ser isomorfo a un sumando de M.

$\supseteq$. Sea $M_A \in \text{mod}' A$ y sea $0 \to tM \to M \to \ell M \to 0$ la sucesión exacta donde $tM \in \mathcal{T}$, $\ell M \in \mathcal{F}$. Si $\ell M \neq 0$, por (1), $\exists\, m > 0$, tal que $\ell M \cong P_b^m$, y como P_b es proyectivo, M tendría un sumando directo isomorfo a P_b, contradicción, $\therefore \ell M = 0$, $\therefore M \cong tM \in \mathcal{T}$. ■

(3) $\mathcal{X} = \text{add}(J)$.

Demostración:

$\mathcal{X} = F'(\mathcal{F}) = F'(\text{add}(P_b)) = \text{add}(F'(P_b)) = \text{add}(J_B)$. ■

(4) $\mathcal{Y} = \text{mod}' B$.

Demostración:

Como $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo submódulos y $J \notin \mathcal{Y}$, $\therefore \mathcal{Y} \subseteq \text{mod}' B$.

Como $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo sumas finitas y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se escinde, $\therefore \text{mod}' B \subseteq \mathcal{Y}$. ■

17.4. Corolario.

$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinde. ■

17.5. Corolario.

F: mod' $A \to$ mod' B es una equivalencia de categorías. ∎

17.6. Corolario.

F: mod $A \to$ mod B es un funtor de coxeter parcial izquierdo.

G mod $B \to$ mod A es un funtor de coxeter parcial derecho. ∎

17.7. Lema.

J_B es un B-módulo simple. (A no necesariamente hereditaria)

Demostración.

Afirmamos que $\mathcal{X}$ tiene un B-módulo simple, ya que si todos los B-módulos simples estuvieran en $\mathcal{Y}$, probaríamos que $\mathcal{Y}$ = mod B, lo cual es imposible porque $J_B \notin \mathcal{Y}$.

En efecto, supongamos que todos los B-módulos simples están en $\mathcal{Y}$, sea $N_B \in$ mod B, por inducción sobre la longitud de N probaremos que $N \in \mathcal{Y}$.

Sea $N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_\ell = 0$ una serie de composición de N.

Si $\ell = 1$, N es simple y $N \in \mathcal{Y}$

Si $\ell > 1$, por hipótesis de inducción $N_1 \in \mathcal{Y}$

Como $0 \to N_1 \to N \to N/N_1 \to 0$ es exacta, $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo extensiones y $N_1, N/N_1 \in \mathcal{Y}$ $\therefore$ $N \in \mathcal{Y}$.

En resumen, hemos probado que $\mathcal{X}$ tiene un B-módulo simple, como J es el único B-módulo inescindible que está en $\mathcal{X}$, (17.3) $\therefore$ J es simple. ∎

Obsérvese que en las partes (1) y (3) de la demostración de (17.3) no usamos que A fuera hereditaria.

17.8. Lema.

J_B es inyectivo.

Demostración

En mod B hay n clases de isomorfía de módulos inyectivos inescindibles (9.3). Por (6.4) $\mathcal{Y}$ tiene tantas clases de isomorfía de B-módulos inyectivos inescindibles, como clases de isomorfía de A-módulos proyectivos inescindibles hay en $\mathcal{X}$, es decir $n-1$.

Como $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ se escinde el inyectivo inescindible restante está en $\mathcal{X}$. Pero J_B es el único inescindible en $\mathcal{X}$, $\therefore$ J_B es inyectivo. ■

Obsérvese que, en este caso, la teoría de módulos de inclinación desarrollada y el lenguaje de las teorías de torsión nos permitieron dar demostraciones particularmente simples de (17.7) y (17.8).

17.9. Lema.

B es hereditaria

Demostración.

Sea $0 \to P_b \to Q \to \tau^{-1} P_b \to 0$ la sucesión que casi se divide que empieza en P_b. Como ya observamos en (17.1), Q es proyectivo. Además P_b no es sumando de Q, $\therefore$ $Q \in \mathcal{X}$.

Aplicando F tenemos la sucesión exacta

$$0 = F(P_b) \to F(Q) \to F(\tau^{-1} P_b) \to F'(P_b) \to F'(Q) = 0.$$

ésta es una resolución proyectiva minimal de $J = F'(P_b)$,

$\therefore$ d.p. $J_B = 1$. $\therefore$ $\forall\, N_B \in \mathcal{X}$, d.p. $N_B = 1$.

Por (17.3) $\forall\, N_B \in \mathcal{Y}$ d.p. $N_B \leq 1$, entonces como $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ se escinde B es hereditaria. ■

17.10. Ejemplo.

A continuación daremos un ejemplo de una k-álgebra de dimensión finita A y un módulo de inclinación T_A, para los cuales no se aplica la teoría de funtores de Coxeter, por consiguiente, la teoría de módulos de inclinación es más general.

Además veremos que d.g. $A = 2$ y que $B = \mathrm{End}(T_A)$ no es de tipo de representación finito, luego, (14.2) es falso si A no es hereditaria.

Sea A la k-álgebra asociada al carcaj

$$\begin{tikzcd}
& & 5 \arrow[dll, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\alpha_3"] \arrow[drr, "\alpha_4"] & & \\
2 \arrow[drr, "\beta_2"'] & & 3 \arrow[d, "\beta_3"] & & 4 \arrow[dll, "\beta_4"] \\
& & 1 & &
\end{tikzcd}$$

con todas las relaciones de conmutatividad. $\dim_k A = 12$.

Los A-módulos proyectivos inescindibles son:

$P_1 \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$, $P_2 \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$, $P_3 \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$, $P_4 \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$, $P_5 \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$.

Para calcular la dimensión global de A, basta calcular la dimensión proyectiva de los A-módulos simples.

$S_1 = P_1$, $\therefore$ d.p. $S_1 = 0$.

Las sucesiones siguientes son resoluciones proyectivas minimales

$0 \to P_1 \to P_2 \to S_2 \to 0$

$0 \to P_1 \to P_3 \to S_3 \to 0$

$0 \to P_1 \to P_4 \to S_4 \to 0$

$\therefore$ d.p. $S_2 =$ d.p. $S_3 =$ d.p. $S_4 = 1$.

Finalmente $0 \to \mathrm{rad}\, P_5 \to P_5 \to S_5 \to 0$ y $0 \to S_1 \oplus S_1 \to P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \to \mathrm{rad}\, P_5 \to 0$ dan origen a la resolución proyectiva minimal

$0 \to P_1 \oplus P_1 \to P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \to P_5 \to S_5 \to 0$

$\therefore$ d.p. $S_5 = 2$.

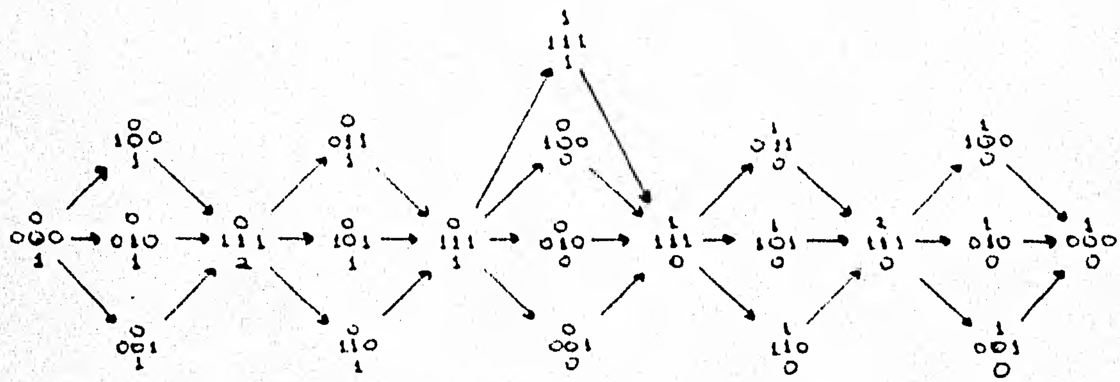
Entonces d.g. $A = 2$.

P_1 es un módulo proyectivo simple no inyectivo, $\therefore T_1 := \tau^{-1} P_1 \neq 0$. Sea $T_i := P_i$, $2 \le i \le 5$.

Por (17.1) $T_A = \oplus_{i=1}^{5} T_i$ es un módulo de inclinación, sin embargo $F = \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, -)$ no es un funtor de Coxeter pues $F| : \mathrm{mod}'A \to \mathrm{mod}'B$ no es una equivalencia de categorías ya que

A es de tipo de representación finito y por tanto mod'A tiene un número finito de módulos inescindibles no isomorfos, en cambio, según veremos, B no es de tipo de representación finito y por tanto mod'B tiene un número infinito de módulos inescindibles no isomorfos.

Para ver que A es de tipo de representación finito basta calcular su carcaj de Auslander - Reiten, lo que hacemos a continuación.



$\{Q_i = F(T_i) \mid 1 \le i \le 5\}$ es un conjunto completo de representantes de B-módulos proyectivos inescindibles ($B = \mathrm{End}(T_A)$)

$B/\mathrm{rad}\,B \cong \oplus_{i=1}^{5} F(T_i)/\mathrm{rad}\,F(T_i) \cong \oplus_{i=1}^{5} \mathrm{End}(T_i) \cong k^5$, $\therefore$ B es la álgebra asociada a algún carcaj, éste lo calculamos de la siguiente manera.

Como $F| : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ es una equivalencia de categorías (4.4),

$\therefore$ $(\underline{\dim}\, Q_i)_j = |\mathrm{Hom}_B(Q_j, Q_i)_{\mathrm{End}(Q_j)}| = |\mathrm{Hom}_B(F(T_j), F(T_i))_{\mathrm{End}(F(T_j))}| =$
$= |\mathrm{Hom}_A(T_j, T_i)_{\mathrm{End}(T_j)}| = \dim_k \mathrm{Hom}_A(T_j, T_i)$.

Antes de aplicar la fórmula observemos que $T_1 = \tau^{-1} P_1$ es la representación:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ k \arrow[dr, "{\binom{1}{0}}"'] & k \arrow[d, "{\binom{0}{1}}"] & k \arrow[dl, "{\binom{-1}{-1}}"] \\ & k^2 & \end{tikzcd}$$

De la fórmula anterior obtenemos que

$$\underline{\dim}\ Q_1 = (1,1,1,1,0)$$
$$\underline{\dim}\ Q_2 = (0,1,0,0,0)$$
$$\underline{\dim}\ Q_3 = (0,0,1,0,0)$$
$$\underline{\dim}\ Q_4 = (0,0,0,1,0)$$
$$\underline{\dim}\ Q_5 = (0,0,0,0,2)$$

Escogiendo bases $\{\alpha, \beta\}$ para $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}P_1, P_5)$ y $\{\gamma_i\}$ para $\mathrm{Hom}_A(P_{i+1}, P_5)$, $1 \leq i \leq 3$ observamos que $\gamma_1\beta = 0$, $\gamma_2\alpha = 0$ y $\gamma_3(\alpha-\beta) = 0$. Entonces el carcaj buscado es.

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{5}{\bullet} \arrow[d, bend right, "\alpha"'] \arrow[d, bend left, "\beta"] & \\
 & \underset{1}{\bullet} \arrow[dl, "\gamma_2"'] \arrow[d, "\gamma_3"] \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
\underset{2}{\bullet} & \underset{3}{\bullet} & \underset{4}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

con las relaciones arriba mencionadas

Ahora es muy fácil ver que B no es de tipo de representación finito, pues para $n \in \mathbb{N}$ la representación

$$\begin{tikzcd}
 & k^n \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] & \\
 & k^{n+1} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$

$g(x_1, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_n)$

es inescindible.

Este ejemplo fue estudiado por Brenner y Butler en [12].

§ 18. Rebanadas y rebanadas completas.

18.1. Definiciones.

Sean B una R-álgebra de dimensión finita y Γ_B su carcaj de Auslander-Reiten. Si $\mathcal{U}$ es un conjunto de B-módulos inescindibles y X es un B-módulo inescindible, entonces X se llama **predecesor** de $\mathcal{U}$, si existe una cadena de morfismos irreducibles entre módulos inescindibles

$$X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{r-1} \to X_r$$

con $X_r \in \mathcal{U}$. (Obsérvese que no estamos haciendo ninguna distinción entre un módulo y su clase de isomorfía). Si además $X \notin \mathcal{U}$, X se llama **predecesor propio** de $\mathcal{U}$. Si $V \in \mathcal{U}$, V se llama **pozo** para $\mathcal{U}$ si para cada irreducible $V \to X$ con X inescindible, se tiene que $X \notin \mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{C}$ una componente de Γ_B, una **rebanada** $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}$ es un conjunto de módulos inescindibles en $\mathcal{C}$ que satisface las siguientes condiciones:

R1) Si X es un predecesor de $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ contiene precisamente un módulo de la órbita $\{\tau^i X \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

R2) Si $X_0 \to \cdots \to X_r$ es una cadena de morfismos distintos de cero entre módulos inescindibles y $X_0, X_r \in \mathcal{U}$, entonces $\forall i \in \overline{r}$, $X_i \in \mathcal{U}$.

R3) No existen ciclos dirigidos de morfismos irreducibles $U_0 \to U_1 \to \cdots \to U_r \to U_0$ con todos los U_i's en $\mathcal{U}$.

Un concepto más restrictivo, pero también muy útil es el siguiente, una **rebanada completa** $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}$ es un conjunto de módulos inescindibles en $\mathcal{C}$ que satisface las siguientes condiciones:

RC1) Si $X \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{U}$ contiene precisamente un módulo de la órbita $\{\tau^i X \mid i \in \mathbb{Z}\}$

RC2) = R2)

RC3) = R3)

Como todo predecesor de $\mathcal{U}$ está en $\mathcal{C}$, toda rebanada completa es una rebanada.

Si $\mathcal{U}$ es una rebanada finita, entonces $V := \bigoplus_{V_a \in \mathcal{U}} V_a$ se llama **módulo rebanada** correspondiente a $\mathcal{U}$.

18.2. Lema.

Sea $\mathcal{U}$ una rebanada, entonces X es un predecesor de $\mathcal{U}$ si y sólo si $\exists\, t \in \mathbb{N}$, $V \in \mathcal{U}$, tales que $X = \tau^t V$.

Demostración

$\Leftarrow$ Trivial.

$\Rightarrow$ Supongamos que hay una cadena de morfismos irreducibles entre módulos inescindibles $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$, con $X_r \in \mathcal{U}$.

Por R1) $\exists!\, z \in \mathbb{Z}$ $\tau^z X \in \mathcal{U}$. Sea $V := \tau^z X$, $\therefore X = \tau^{-z} V$.

Si $z \geq 0$ hay una cadena de morfismos irreducibles

$$V \to \cdots \to \tau^{-t} V = X \to \cdots \to X_r$$

por R2) $X \in \mathcal{U}$ y como $X, \tau^z X \in \mathcal{U}$, por R1) $z = 0$. ∎

Ahora daremos un procedimiento para construir rebanadas a partir de una dada. Más aún este procedimiento nos sugiere como construir rebanadas que no sean completas.

18.3. Lema

Sean $\mathcal{U}$ una rebanada y V un pozo para $\mathcal{U}$, definimos

$$\tilde{\mathcal{U}} := \begin{cases} \mathcal{U} - \{V\} & \text{si } V \text{ es proyectivo} \\ (\mathcal{U} - \{V\}) \cup \{\tau V\} & \text{si } V \text{ no es proyectivo} \end{cases}$$, entonces $\tilde{\mathcal{U}}$ es una rebanada

Demostración

(1) Si $f : V \to X$ es un morfismo no nulo y no es isomorfismo, entonces $X \notin \mathcal{U}$.

Demostración:

Sea $g = (g_i) : V \to \oplus Z_i$ un morfismo casi escindible izquierdo minimal $\therefore \exists\, (f_i) : \oplus Z_i \to X$, tal que $f = \sum f_i g_i$, como $f \neq 0$, $\exists i$ $f_i g_i \neq 0$.

Tenemos la cadena $V \xrightarrow{g_i} Z_i \xrightarrow{f_i} X$ con g_i irreducible y Z_i inescindible. Si $X \in \mathcal{U}$, como $g_i \neq 0$ y $f_i \neq 0$, por R1) $Z_i \in \mathcal{U}$, esto contradice que V es un pozo para $\mathcal{U}$. ∎

(2) Si $Y \to U$ es un morfismo irreducible con Y inescindible, entonces $Y \in \mathcal{U}$.

Demostración:

Como Y es un predecesor de $\mathcal{U}$, por (18.2), $\exists\, t \in \mathbb{N}$, $V \in \mathcal{U}$, tales que $Y \cong \tau^{t} V$.

Si $t > 0$, entonces hay un irreducible $U \to \tau^{t-1} V$, luego hay una cadena de morfismos irreducibles

$$U \to \tau^{t-1} V \to \cdots \to V$$

Por R2) $\tau^{t-1} V \in \mathcal{U}$, esto contradice que U es un pozo para $\mathcal{U}$,

$\therefore\ t = 0$. ∎

(3) Si U es proyectivo, $\tilde{\mathcal{U}}$ es una rebanada.

Demostración:

R1) Sea X un predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$, $\therefore$ X es un predecesor de $\mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es una rebanada, $\underset{(18.2)}{\therefore}$ $\exists\, t \in \mathbb{N}$ $\tau^{-t} X \in \mathcal{U}$

Si $\tau^{-t} X = U$, como U es proyectivo, $\therefore t = 0$, $\therefore$ $U = X$ es un predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$, esto contradice que U es un pozo para $\mathcal{U}$.

$\therefore$ $\tau^{-t} X \in \tilde{\mathcal{U}}$.

R2) Sea $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$ una cadena de morfismos distintos de cero entre módulos inescindibles tal que $X_0, X_r \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Como $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$, que es una rebanada, $\therefore \forall i \in \mathcal{F}$, $X_i \in \mathcal{U}$

Si existiera i tal que $X_i = U$ y $X_{i+1} \in \tilde{\mathcal{U}}$, habría un morfismo distinto de cero $X_i \to X_{i+1}$, esto contradice (1), $\therefore \forall i \in \mathcal{F}$ $X_i \in \tilde{\mathcal{U}}$.

R3) Es trivial pues $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$. ∎

(4) Si U no es proyectivo, entonces $\tilde{\mathcal{U}}$ es una rebanada.

Demostración:

R1) Sea X un predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$, $\therefore$ X es un predecesor de $\mathcal{U}$.

$\therefore$ $\{\tau^{z} X \mid z \in \mathbb{Z}\} \cap \mathcal{U}$ tiene un elemento, $\therefore$ $\{\tau^{z} X \mid z \in \mathbb{Z}\} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ tiene un elemento

R2) Sea $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \to \cdots \xrightarrow{f_r} X_r$ una cadena de morfismos distintos de cero entre módulos inescindibles tal que $X_0, X_r \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Sin pérdida de generalidad ninguna f_i es isomorfismo.

Si $x_0, x_r \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$, entonces $\forall i \in \mathcal{F}$ $x_i \in \mathcal{U}$ y por (1) ninguna x_i es τv,
$\therefore$ $\forall i \in \mathcal{F}$ $x_i \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Consideremos la sucesión que casi se divide

$$0 \to \tau v \xrightarrow{(g_j)} \oplus v_j \to v \to 0$$

Por (2) $\forall j$. $v_j \in \mathcal{U}$ y como $v_j \neq \tau v$, $\therefore \forall_j$ $v_j \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$

Si $x_0 = \tau v$, como f_1 no es isomorfismo, $\exists (h_j): \oplus v_j \to x_1$, tal que $f_1 = \Sigma_j\ h_j g_j$ y como $f_1 \neq 0$, $\therefore \exists_j$ tal que $h_j \neq 0$.

Si $x_r = \tau v$, entonces $(g_j) f_r \neq 0$, $\therefore \exists k$ tal que $g_k f_r \neq 0$

Tenemos la siguiente cadena

$$v_j \xrightarrow{h_j} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \to \cdots \to x_{r-1} \xrightarrow{g_k f_r} v_k$$

Como $v_j, v_k \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$, por el primer caso, $\forall i \in \mathcal{F}$ $x_i \in \tilde{\mathcal{U}}$.

R3) Supongamos que hay un ciclo orientado
$v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_r \to v_0$, de morfismos irreducibles entre inescindibles con todos los v_i's en $\tilde{\mathcal{U}}$.

Si $\exists i$ tal que $v_i \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$, como $\mathcal{U}$ es rebanada el ciclo estaría en $\mathcal{U}$, lo cual no es posible, $\therefore \forall i$ $v_i = \tau v$ que tampoco es posible. ■

Esto termina la demostración ■

18.4. Proposición.

Sean A una k-álgebra inescindible y hereditaria y T_A un módulo de inclinación con $B = \mathrm{End}(T_A)$, entonces $\{F(I_a) \mid a \in \bar{n}\}$ es una rebanada completa en su componente.

Demostración.

RC1) Fue probada en (15.5)

RC2) Afirmamos que si $f: F(I_a) \to X$ es distinto de cero, X es inescindible y X no es de la forma $F(I_b)$, entonces $X \in \mathcal{X}$.

Haremos la demostración por inducción en la longitud de I_a ($|I_a|$), antes observemos que como f no es isomorfismo, la podemos factorizar a través del morfismo casi escindible izquierdo minimal que empieza en $F(I_a)$, es decir, hay un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} F(I_a) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F(I_a/S_a) \oplus F'(\mathrm{rad}\, P_a) \arrow[dl, "f'"] \\ x & \end{tikzcd}$$

Además, como $f \neq 0$, $\exists\, b \in \tilde{n}$ tal que I_b es sumando de I_a/S_a y $f'|_{F(I_b)} \neq 0$, o $\exists\, c \in \tilde{n}$ tal que P_c es sumando de $\mathrm{rad}\, P_a$ y $f'|_{F'(P_c)} \neq 0$.

Si $|I_a| = 1$, $I_a = S_a$ y entonces estamos en el segundo caso. Como $F'(P_c) \in \mathcal{X}$ y $f'|_{F'(P_c)} \neq 0$, $\therefore x \in \mathcal{X}$.

Si $|I_a| > 1$. En el primer caso $|I_b| < 1$, entonces por hipótesis de inducción $x \in \mathcal{X}$. En el segundo caso hacemos lo mismo que para $|I_a| = 1$.

RC2) es una consecuencia de la siguiente observación.

Si $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_r$ es una cadena de morfismos no nulos entre B-módulos inescindibles y $\exists\, a \in \tilde{n}$ tal que $x_0 = F(I_a)$, entonces todas las x_i's son de la forma $F(I_\bullet)$ o alguna $x_i \in \mathcal{X}$, en el segundo caso para $j \geq i$, $x_j \in \mathcal{X}$ ya que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una teoría de torsión.

RC3) De (15.2) y (11.1) se sigue que $\{I_a \mid a \in \tilde{n}\}$ es una subgráfica conexa de Γ_A, sin ciclos dirigidos. Y por (12.3) $\{F(I_a)\ a \in \tilde{n}\}$ es una subgráfica conexa de Γ_B, sin ciclos dirigidos. ■

18.5. Corolario.

$\{I_a \mid a \in \tilde{n}\}$ es una rebanada completa en Γ_A.

Demostración.

Poner $T_A := \Lambda_A$ en (18.4). ■

La rebanada completa construida en (18.4) es conexa, de hecho, el resultado vale en general, de acuerdo al siguiente lema.

18.6. Lema.

Sean B una k-álgebra de dimensión finita, Γ_B su carcaj de Auslander-Reiten y $\mathcal{C}$ una componente de Γ_B. Si $\mathcal{U}$ es una rebanada completa en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{U}$ es conexa.

Demostración.

Sean $X, Y \in \mathcal{U}$, Como $\mathcal{C}$ es una componente conexa y $X, Y \in \mathcal{C}$, entonces hay una cadena de morfismos irreducibles entre módulos inescindibles en $\mathcal{C}$,

$$X = X_0 \overset{f_1}{—} X_1 \overset{f_2}{—} \dots \overset{f_r}{—} X_r = Y$$

Los morfismos irreducibles pueden ir en cualquier dirección.

Probaremos por inducción sobre r, que hay una cadena de morfismos irreducibles entre módulos inescindibles en $\mathcal{U}$ que une a X con Y.

Si $r=1$, es trivial. Si $r>1$ consideramos los siguientes casos.

1er caso: La cadena de morfismos irreducibles es de la forma,

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_r} X_r$$

Por RC2) todos los X_i's están en $\mathcal{U}$.

2o caso: $\exists\ 0<i<r$ tal que la cadena de morfismos irreducibles es de la forma

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \to \dots \xrightarrow{f_i} X_i \xleftarrow{f_{i+1}} X_{i+1} — \dots \overset{f_r}{—} X_r$$

Por RC1) $\exists !\ t \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^t X_i \in \mathcal{U}$

Si $t \leq 0$ hay una cadena de morfismos irreducibles de la forma

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \to \dots \xrightarrow{f_i} X_i \to \dots \to \tau^t X_i$$

Por RC2) esta cadena está en $\mathcal{U}$, en particular X_i y aplicando la hipótesis de inducción a $X_i — \dots — X_r$ obtenemos el resultado.

Si $t>0$, $\tau X_i \neq 0$. Como $X_{i-1} \xrightarrow{f_i} X_i$, $X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i$ son irreducibles, existen $\tau X_i \xrightarrow{g_i} X_{i-1}$, $\tau X_i \xrightarrow{g_{i+1}} X_{i+1}$ morfismos irreducibles y obtenemos la siguiente cadena de irreducibles,

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \to \dots \to X_{i-1} \xleftarrow{g_i} \tau X_i \xrightarrow{g_{i+1}} X_{i+1} — \dots \overset{f_r}{—} X_r$$

Por inducción sobre i veremos que X_0 y X_r están conectados en $\mathcal{U}$ (i es el número máximo de flechas consecutivas, empezando en X_0, que apuntan en la misma dirección)

Si $i=1$, tenemos la cadena de morfismos irreducibles,

$$x_0 \leftarrow \tau x_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \tau^t x_1$$

Por R(2) $\tau x_1 \in \mathcal{U}$ y por la hipótesis de inducción para r

$$\tau x_1 \xrightarrow{g_2} x_2 — \cdots — x_r$$

es una cadena en $\mathcal{U}$, pegándole $x_0 \xleftarrow{g_1} \tau x_1$ tenemos el resultado.

Si $1 < i < r$, tenemos la cadena de irreducibles

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \to \cdots \to x_{i-1} \xleftarrow{g_i} \tau x_i \xrightarrow{g_{i+1}} x_{i+1} — \cdots — x_r$$

que por hipótesis de inducción sobre i está en $\mathcal{U}$.

3er caso: f_1 es de la forma $x_0 \xleftarrow{f_1} x_1$.

Por R(1) $\exists!\ z \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^z x_1 \in \mathcal{U}$

Si $z \geq 0$ hay una cadena de morfismos irreducibles,

$$\tau^z x_1 \to \cdots \to x_1 \xrightarrow{f_1} x_0$$

Por R(2) $x_1 \in \mathcal{U}$ y por hipótesis de inducción sobre r se sigue el resultado.

Si $z < 0$, $\tau^{-1} x_1 \neq 0$, entonces hay un irreducible $x_0 \xrightarrow{g_1} \tau^{-1} x_1$, así, tenemos la siguiente cadena de morfismos irreducibles

$$x_0 \xrightarrow{g_1} \tau^{-1} x_1 \xleftarrow{g_1} x_0 \xleftarrow{f_1} x_1 — \cdots — x_r$$

Hemos reducido el problema al segundo caso, que ya está probado. ∎

§ 19. Una condición suficiente para que una k-álgebra de dimensión finita sea inclinada.

El principal resultado de esta sección es el siguiente teorema

19.1. Teorema.

Sean B una k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{G}$ una componente de Γ_B (el carcaj de Auslander-Reiten de B). Si $\mathcal{G}$ contiene a todos los B-módulos proyectivos inescindibles y a una rebanada completa finita $\mathcal{U}$, con módulo rebanada U, entonces U_B es un módulo de Inclinación y $\mathrm{End}(U_B)$ es hereditaria. Por lo tanto, B es una álgebra inclinada.

La demostración de este teorema requiere de varios resultados preliminares que veremos a continuación.

19.2. Lema.

Supongamos que A es hereditaria, sean T_A un módulo de inclinación y $B = \mathrm{End}(T_A)$. Sean P_a un proyectivo simple que no esté en $\mathrm{add}(T_A)$, $I' = \oplus_{b \neq a} I_b$, entonces el B-módulo $F(I') \oplus F'(P_a)$ es un módulo de inclinación.

Demostración.

Haremos uso de toda la maquinaria introducida en la § 17.

Sean $P' = \oplus_{b \neq a} P_b$, $T' = \tau^{-1} P_a \oplus P'$ y $\sigma A = \mathrm{End}(T'_A)$. Obsérvese que $P_a \notin \mathrm{add}(T_A)$ implica que P_a no es inyectivo.

Sea $\sigma := \mathrm{Hom}_A({}_{\sigma A}T'_A, -) : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, \sigma A$ la reflexión con respecto a P_a.

Por (17.1) T'_A es un módulo de inclinación.

$J_{\sigma A} = \mathrm{Ext}^1_A({}_{\sigma A}T'_A, P_a)$ es simple e inyectivo por (17.7) y (17.8)

Sean mod'A la subcategoría plena de mod A cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a P_a y mod'σA la subcategoría plena de mod σA cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a J.

Por (17.5) $\sigma| : \mathrm{mod}'A \to \mathrm{mod}'\sigma A$ es una equivalencia de categorías.

Como $P_a \notin \mathrm{add}(T_A)$, $\therefore$ $T_A \in \mathrm{mod}'A$, en consecuencia $B = \mathrm{End}(T_A) \cong \mathrm{End}(\sigma(T)_{\sigma A})$.

Sea $\tilde{F} = \mathrm{Hom}_{\sigma A}({}_B\sigma(T)_{\sigma A}, -) : \mathrm{mod}\, \sigma A \to \mathrm{mod}\, B$.

Sean $\mathrm{In}\, \mathcal{T}(T_A) := \{[M_A] \mid M_A$ es inescindible y $M_A \in \mathcal{T}(T_A)\}$.

$\mathrm{In}\, \mathcal{T}(\sigma(T)_{\sigma A}) := \{[M_{\sigma A}] \mid M_{\sigma A}$ es inescindible y $M_{\sigma A} \in \mathcal{T}(\sigma(T)_{\sigma A})\}$

(aquí [ ] denota clase de isomorfía).

. Afirmamos que $\sigma| : \mathrm{In}\, \mathcal{T}(T_A) \to \mathrm{In}\, \mathcal{T}(\sigma(T)_{\sigma A}) - \{[J_{\sigma A}]\}$ es una biyección. Primeramente si $[M_A] \in \mathrm{In}\, \mathcal{T}(T_A)$, entonces $\mathrm{Ext}^1_{\sigma A}(\sigma(T), \sigma(M)) \underset{(6.9)}{\cong} \mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$, $\therefore$ $[\sigma M] \in \mathrm{In}\, \mathcal{T}(\sigma(T)_{\sigma A})$. Además $J \notin \mathrm{Im}\,\sigma$,

$\therefore$ $\mathrm{Im}\,\sigma| \subseteq \mathrm{In}\,\mathcal{T}(\sigma(T)_{\sigma A}) - \{[J_{\sigma A}]\}$, $\therefore$ $\sigma|$ está bien definida.

Además $\mathcal{T}(T_A) \subseteq \mathrm{mod}'A$, $\therefore$ $\sigma|$ es inyectiva.

Finalmente si $[M_{\sigma A}] \in \mathrm{In}\,\mathcal{T}(\sigma(T)_{\sigma A}) - \{[J_{\sigma A}]\}$, $\exists\, \ell \in \mathbb{N}$, tal que $\sigma(T)^{\ell} \to M$ es suprayectiva.

Sea $\rho := -\otimes_{\sigma A} T'_A : \mathrm{mod}\,\sigma A \to \mathrm{mod}\,A$ el adjunto de σ.

$\rho(\sigma(T)^{\ell}) \to \rho(M)$ es suprayectiva y como $\rho(\sigma(T)^{\ell}) \cong T^{\ell}$.

$\therefore$ $\rho(M) \in \mathcal{T}(T_A)$ y como $M \in \mathrm{mod}'\sigma A$, $\therefore$ $\sigma\rho(M) \cong M$,

$\therefore$ $\sigma|$ es suprayectiva.

Por (17.9) σA es hereditaria, en particular d.p. $\sigma(T)_{\sigma A} \leq 1$, además $\mathrm{Ext}^1_{\sigma A}(\sigma(T), \sigma(T)) \cong \mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$, por último el número de sumandos inescindibles no isomorfos de $\sigma(T)_{\sigma A}$ es igual al número de sumandos inescindibles no isomorfos de T_A, que es igual al número de clases de isomorfía de A-módulos simples, que a su vez, es igual al número de clases de isomorfía de σA-módulos simples, esto último por (9.3)

Del párrafo anterior y de (10.2) se desprende que $\sigma(T)_{\sigma A}$ es un módulo de inclinación.

Ahora obsérvese que para $M_A \in \mathrm{mod}\,A$.

$$\begin{aligned} \varphi_M : F(M) = \mathrm{Hom}_A({}_BT, M) &\to \mathrm{Hom}_{\sigma A}(\sigma(T), \sigma(M)) = \tilde{F}\sigma(M) \\ g &\longmapsto \sigma(g) \end{aligned}$$

, es un homomorfismo de B-módulos, ya que, σ es un funtor aditivo y $B = \mathrm{End}(T_A) \cong \mathrm{End}(\sigma(T)_{\sigma A})$.

Además es muy fácil verificar que $\varphi: F \to \tilde{F}\sigma$ es natural.

Por último $\exists\, M_1 \in \mathrm{mod}'A$, $M_2 \in \mathrm{add}(P_a)$, tales que $M = M_1 \oplus M_2$, entonces φ es la cadena de isomorfismos $F(M) \cong F(M_1) \oplus F(M_2)$ $\cong F(M_1) = \mathrm{Hom}_A({}_BT, M_1) \cong \mathrm{Hom}_{\sigma A}({}_B\sigma(T), \sigma(M_1)) = \tilde{F}\sigma(M_1) \cong$ $\tilde{F}\sigma(M_1) \oplus \tilde{F}\sigma(M_2) \cong \tilde{F}\sigma(M)$. (Aquí usamos que $F(P_a) = 0$, $\sigma|\ \mathrm{mod}'A \to \mathrm{mod}'\sigma A$ es equivalencia de categorías y que $\sigma(P_a) = 0$).

Hemos probado que $\varphi: F \to \tilde{F}\sigma$ es un isomorfismo natural.

Por el lema de conexión aplicado al módulo de inclinación ${}_{\sigma A}T'_A$ se tiene que $\tau^{-1}\sigma(I_a) = \sigma'(P_a) = J$, en particular $\sigma(I_a)$ no es inyectivo en mod σA.

También, afirmamos que $F'(P_a) \cong \tilde{F}(J)$, en efecto, por el lema de conexión aplicado a ${}_BT_A$, sabemos que $F'(P_a) \cong \tau^{-1}F(I_a) \cong \tau^{-1}\tilde{F}\sigma(I_a)$, en particular $\tilde{F}\sigma(I_a)$ no es inyectivo. Entonces hay una sucesión que casi se divide en mod B que empieza en $\tilde{F}\sigma(I_a)$, como $\sigma(I_a)$ no es inyectivo, la sucesión no es de conexión, entonces por (15.1) la sucesión está en $\operatorname{Im}\tilde{F}$.

La sucesión que casi se divide $0 \to \sigma(I_a) \to X \to J \to 0$ está en $\mathcal{I}(\sigma(T)_{\sigma A})$, pues sus extremos están. (obsérvese que J es inyectivo)

Por (16.2) la sucesión $0 \to \tilde{F}\sigma(I_a) \to \tilde{F}X \to \tilde{F}J \to 0$, casi se divide, $\therefore$ $F'(P_a) \cong \tau^{-1}\tilde{F}\sigma(I_a) \cong \tilde{F}J$.

Por otra parte $\{\sigma(I_b) \mid b \neq a\} \cup \{J\}$ es un conjunto de representantes de σA-módulos inyectivos inescindibles

$\therefore$ $\sigma(I')\oplus J = (\oplus_{b\neq a}\sigma(I_b))\oplus J$ es el cogenerador inyectivo minimal de mod σA y como σA es básica, $\therefore$ $\sigma(I')\oplus J = D({}_{\sigma A}\sigma A)$,

$\therefore$ $\tilde{F}(\sigma(I')\oplus J) = \operatorname{Hom}_{\sigma A}({}_BT_{\sigma A}, D({}_{\sigma A}\sigma A)) =$

$= \operatorname{Hom}_{\sigma A}({}_BT_{\sigma A}, \operatorname{Hom}_k({}_{\sigma A}\sigma A, k)) \cong \operatorname{Hom}_k({}_BT_{\sigma A}\otimes_{\sigma A}\sigma A, k) \cong$

$\cong \operatorname{Hom}_k({}_BT, k) = D({}_BT)$ que es un módulo de inclinación por (12.5)

Además $\tilde{F}(\sigma(I')\oplus J) = \tilde{F}\sigma(I')\oplus\tilde{F}J \cong F(I')\oplus F'(P_a)$. ∎

19.3. Lema.

Si $\mathcal{U}$ es una rebanada finita con módulo rebanado U, entonces $\operatorname{Ext}^1(U,U)=0$.

Demostración.

Sean $U_a, U_b \in \mathcal{U}$. obsérvese que $D\operatorname{Ext}^1(U_a,U_b) = \underline{\operatorname{Hom}}(U_b,\tau U_a)$

Si $f: U_b \to \tau U_a \neq 0$, entonces hay una cadena de morfismos distintos de cero entre inescindibles $U_b \to \tau U_a \to \bullet \to U_a$.

Por R2) $\tau U_a \in \mathcal{U}$ pero esto contradice a R1).

$\therefore$ $\operatorname{Hom}(U_b,\tau U_a) = 0$. ∎

19.4. Lema.

Sea $\mathcal{U}$ una rebanada finita con módulo rebanada U_B, si U_B es un módulo de inclinación, entonces $End(U_B)$ es hereditaria. Nótese que sólo usaremos R2).

Demostración.

Sea $A = End(U_B)$, sea $\{U_a | a \in \hat{n}\}$ el conjunto de sumandos de U_B, entonces los A-módulos proyectivos inescindibles son de la forma $P_a = Hom_B({}_AU_B, U_{a\,B})$.

Para ver que A es hereditaria bastará probar que todo submódulo inescindible de un proyectivo inescindible es proyectivo.

Sea Y_A un submódulo inescindible de P_a. Como $P_a \in \mathcal{Y}(U_B)$ y $\mathcal{Y}(U_B)$ es cerrado bajo submódulos, $\therefore$ $Y_A \in \mathcal{Y}(U_B) = \operatorname{Im} Hom_B({}_AU_B, -)$,

$\therefore$ $\exists N_B \in \mathcal{T}(U_B)$ inescindible, tal que $Y_A = Hom_B({}_AU_B, N_B)$ y $\exists f: N_B \to U_{a\,B} \neq 0$ tal que la inclusión $Y_A \hookrightarrow P_{a\,A}$ es igual a $Hom_B({}_AU_B, f)$.

Como $N_B \in \mathcal{T}(U_B)$, $\therefore$ $\exists U_{b\,B} \xrightarrow{g} N_B \neq 0$, luego tenemos la cadena $U_b \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} U_a$ con $f \neq 0$ y $g \neq 0$, entonces por R2) $N \in \mathcal{U}$,

$\therefore$ Y es proyectivo. ∎

19.5. Lema.

Sean $\mathcal{U}$ una rebanada con un número finito de predecesores y U_B el módulo rebanada correspondiente, entonces 1) $d.p.\, U_B \leq 1$, 2) si Q_B es un módulo proyectivo que es predecesor de $\mathcal{U}$, hay una sucesión exacta $0 \to Q_B \to U'_B \to U''_B \to 0$, con $U', U'' \in add(U_B)$.

Demostración.

Probaremos las dos afirmaciones por inducción sobre p, el número de predecesores.

Si $p = 1$, $\mathcal{U}$ contiene un único módulo U_a. Como U_a no tiene predecesores, U_a es proyectivo simple y no hay nada que probar.

Supongamos el resultado para rebanadas con $p-1$ predecesores, y sea $\mathcal{U}$ una rebanada con p predecesores.

Por R3), $\exists U_a \in \mathcal{U}$ tal que U_a es un pozo para $\mathcal{U}$.

Sea $\tilde{\mathcal{U}} = \begin{cases} \mathcal{U} - \{V_a\} & \text{si } V_a \text{ es proyectivo} \\ (\mathcal{U} - \{V_a\}) \cup \{\tau V_a\} & \text{si } V_a \text{ no es proyectivo.} \end{cases}$

Por (18.3) $\tilde{\mathcal{U}}$ es una rebanada; afirmamos que $\tilde{\mathcal{U}}$ tiene p-1 predecesores.

Primeramente observemos que V_a no es predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$, en efecto, no puede haber cadenas de morfismos irreducibles entre inescindibles de la forma $V_a \to X_1 \to \cdots \to X_r$ con $X_r \in \mathcal{U}$ pues V_a es pozo para $\mathcal{U}$ y R2) vale; tampoco puede haber cadenas de morfismos irreducibles entre inescindibles de la forma $V_a \to \cdots \to \tau V_a$, pues pegando a esta cadena una de la forma $\tau V_a \to \cdot \to V_a$ contradiríamos a R2) y R3).

En segundo lugar observemos que todo predecesor de $\mathcal{U} - \{V_a\}$, lo es de $\tilde{\mathcal{U}}$. Además, todo predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$ lo es de $\mathcal{U}$. Por último, por (18.3)(2) todo predecesor propio de V_a, lo es de $\tilde{\mathcal{U}}$.

De las observaciones anteriores se sigue nuestra afirmación.

Sea $\tilde{U}$ el módulo rebanada para $\tilde{\mathcal{U}}$.

1er caso: V_a es proyectivo.

Por hipótesis de inducción, d.p. $\tilde{U}_B \leq 1$. Como $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$, $\therefore U = \tilde{U} \oplus V_a$ y como V_a es proyectivo d.p. $U_B \leq 1$.

Sea Q_B un proyectivo que es predecesor de $\mathcal{U}$, hay dos posibilidades, o $Q = V_a$ y en este caso consideramos la sucesión exacta $0 \to V_a \xrightarrow{1} V_a \to 0 \to 0$, o Q es un predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$, entonces por hipótesis de inducción hay una sucesión exacta

$0 \to Q_B \to U'_B \to U''_B \to 0$, con $U', U'' \in \operatorname{add}(\tilde{U}_B) \subseteq \operatorname{add}(U_B)$.

2o caso: V_a no es proyectivo.

Consideremos $\operatorname{Anul}(\tilde{U}_B)$ el anulador de $\tilde{U}_B$ y sea $\bar{B} = B/\operatorname{Anul}(\tilde{U})$.

Sean $Q_1, \ldots, Q_m$ los B-módulos proyectivos que son predecesores de $\tilde{\mathcal{U}}$ (en este caso coinciden con los proyectivos que son predecesores de $\mathcal{U}$). y sea $Q_B = \oplus_{i=1}^{m} Q_i$.

Por hipótesis de inducción, $\forall i \in \bar{m}$ hay una sucesión exacta $0 \to Q_i \to \tilde{U}' \to \tilde{U}'' \to 0$ con $\tilde{U}', \tilde{U}'' \in \operatorname{add}(\tilde{U}_B)$, en consecuencia,

Q_B está cogenerado por $\tilde{U}_B$, $\therefore$ Anul$(Q_B) \supseteq$ Anul$(\tilde{U}_B^1)$ = Anul$(\tilde{U}_B)$, por tanto Q_B tiene una estructura natural de $\bar{B}$-módulo.

Ahora obsérvese que si X es un predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$ y Q' es un proyectivo inescindible tal que $\mathrm{Hom}_B(Q', X) \neq 0$, entonces Q' es un predecesor de $\tilde{\mathcal{U}}$. (se sigue del lema (c.1))

Por lo tanto todos los predecesores de $\tilde{\mathcal{U}}$ están generados por Q_B y entonces tienen estructura de $\bar{B}$-módulos.

Más aún $Q_1, \ldots, Q_m$ es un conjunto completo de representantes de $\bar{B}$-módulos inescindibles. Para ver esto consideremos la siguiente descomposición de B, $B = (\oplus_{i=1}^m Q_i^{n_i}) \oplus Q'$, donde ninguna Q_i es sumando de Q', de una observación anterior sabemos que $\mathrm{Hom}_B(Q', \tilde{U}_B) = 0$, $\therefore Q' \subseteq$ Anul$(\tilde{U}_B)$, de hecho se tiene la igualdad, para esto consideramos una descomposición del 1, $1 = e_1 + e_2$, con $e_1 \in \oplus_{i=1}^m Q_i^{n_i}$, $e_2 \in Q'$. Sea $q \in$ Anul$(\tilde{U}_B) \subseteq$ Anul$(\oplus_{i=1}^m Q_i^{n_i})$, $\therefore q = 1 \cdot q = e_1 \cdot q + e_2 \cdot q = e_2 \cdot q \in Q'$.

Hemos probado que la descomposición de $\bar{B}$ en proyectivos inescindibles es $\bar{B} = \oplus_{i=1}^m Q_i^{n_i}$, que era lo que se afirmaba.

Ahora consideremos la sucesión que casi se divide

$$\eta : \quad 0 \to \tau U_a \to U' \xrightarrow{\pi} U_a \to 0$$

Como U_a es un pozo para $\mathcal{U}$, por (18.3 (2)) , $U' \in \mathrm{add}(\tilde{U})$, $\therefore U'$ tiene estructura de B módulo, y luego también U_a. Entonces η la podemos pensar como una sucesión exacta en mod $\bar{B}$, es una verificación rutinaria ver que η casi se divide en mod $\bar{B}$

Denotaremos por $\tau_{\bar{B}}$ y $\tau_{\bar{B}}^{-1}$ la translación de Auslander-Reiten en mod $\bar{B}$, entonces se tiene $\tau_{\bar{B}}^{-1} \tau U_a = U_a$

Ahora probaremos que $\tilde{U}_{\bar{B}}$ es un módulo de inclinación.

I1) Por hipótesis de inducción d.p. $\tilde{U}_B \leq 1$ y puesto que $\tilde{U}_B$ está generado por Q_B , $\therefore$ d.p. $\tilde{U}_{\bar{B}} \leq 1$

I2) Por (19.3) $\mathrm{Ext}_B^1(\tilde{U}_B, \tilde{U}_B) = 0$, entonces también $\mathrm{Ext}_{\bar{B}}^1(\tilde{U}_{\bar{B}}, \tilde{U}_{\bar{B}}) = 0$.

I3) También tenemos las sucesiones exactas en mod B

$0 \to Q_i \to \tilde{U}' \to \tilde{U}'' \to 0$ con $\tilde{U}', \tilde{U}'' \in \mathrm{add}(\tilde{U}_B)$, que son exactas, además, en mod $\bar{B}$.

$\tilde{\mathcal{U}}$ visto como conjunto de $\bar{B}$ - módulos satisface R2), entonces por (19.4) $\bar{A} = End(\tilde{U}_{\bar{B}})$ es hereditaria.

$Pa_{\bar{A}} := Hom_{\bar{B}}({}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}, \tau Ua_{\bar{B}})$ es un proyectivo inescindible, de hecho, es simple porque τUa_B es una fuente para $\tilde{\mathcal{U}}$, [si no lo fuera, habría un morfismo irreducible $V \to \tau Ua$ con $V \in \tilde{\mathcal{U}}$ y tendríamos una cadena $V \to \tau Ua \to X \to Va$ con $V, Ua \in \mathcal{U}$ esto contradice a R2) y R1)], en efecto, $\forall\ U' \in \tilde{\mathcal{U}} - \{\tau Ua\}$ $Hom_B(U'_B, \tau Ua) = 0$

$\therefore\ Pa_{\bar{A}} \cong Hom_{\bar{B}}({}_{\bar{A}}\tau Ua_{\bar{B}}, \tau Ua_{\bar{B}})$

Por otra parte $Hom_{\bar{B}}({}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}, -)| : \Pi(\tilde{U}_{\bar{B}}) \to \mathcal{Y}(\tilde{U}_{\bar{B}})$ es una equivalencia de categorías, $\therefore$ $End_{\bar{B}}(\tau Ua_{\bar{B}}) \cong End_{\bar{A}}(Pa_{\bar{A}})$ que es un anillo con división pues $\bar{A}$ es hereditaria.

$\therefore$ Pa es simple.

El inyectivo $Ia_{\bar{A}}$ tal que $soc\ Ia = Pa / rad Pa$ se obtiene como sigue.

$Ia = D Hom_{\bar{A}}(Pa_{\bar{A}}, \bar{A}_{\bar{A}}) = D Hom_{\bar{A}}(Hom_{\bar{B}}({}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}, \tau Ua_{\bar{B}}), Hom_{\bar{B}}({}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}, {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}))$

$\cong D Hom_{\bar{B}}(\tau Ua_{\bar{B}}, {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}})$.

Deseamos aplicar (19.2).

Como $\bar{A}$ es hereditaria ${}_{\bar{B}}T_{\bar{A}} = D({}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}})$ es un módulo de inclinación

Sean $F := Hom_{\bar{A}}({}_{\bar{B}}T_{\bar{A}}, -) : mod\ \bar{A} \to mod\ \bar{B}$.

$F' := Ext^1_{\bar{A}}({}_{\bar{B}}T_{\bar{A}}, -) : mod\ \bar{A} \to mod\ \bar{B}$

$\therefore\ F(Ia_{\bar{A}}) = Hom_{\bar{A}}({}_{\bar{B}}T_{\bar{A}}, Ia_{\bar{A}}) = Hom_{\bar{A}}(D({}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}), D Hom_{\bar{B}}(\tau Ua_{\bar{B}}, {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}))$

$\cong Hom_{\bar{A}}(Hom_{\bar{B}}(\tau Ua_{\bar{B}}, {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}), {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}) \cong \tau Ua_{\bar{B}}$.

(El último isomorfismo es porque $\tau Ua_{\bar{B}}$ es un sumando de $\tilde{U}_{\bar{B}}$ y $End(\tilde{U}_{\bar{B}}) = \bar{A}$, es decir, el morfismo natural

$\sigma_X : X_{\bar{B}} \to Hom_{\bar{A}}(Hom_{\bar{B}}(X_{\bar{B}}, {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}}), {}_{\bar{A}}\tilde{U}_{\bar{B}})$ es isomorfismo pa-

$x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$

ra $X_{\bar{B}} = U_{\bar{B}}$ y en consecuencia para $X_{\bar{B}} \in add(\tilde{U}_{\bar{B}})$).

Por el lema de conexión $F'(Pa_{\bar{A}}) \cong \tau^{-1}_{\bar{B}} F(Ia_{\bar{A}}) \cong \tau^{-1}_{\bar{B}} \tau Ua_{\bar{B}} =$

$= Ua_{\bar{B}}$, en particular $Pa_{\bar{A}} \notin add(T_{\bar{A}})$ pues $F'(Pa_{\bar{A}}) \neq 0$.

Sea $I'_{\bar{\Lambda}}$ la suma de los $\bar{\Lambda}$-módulos inyectivos inescindibles distintos de $I_{a\,\bar{\Lambda}}$, $\therefore F(I'\oplus I_a) = F\,D(_{\bar{\Lambda}}\bar{\Lambda}) \cong D(_{B}T_{\Lambda}\otimes_{\bar{\Lambda}}\bar{\Lambda}) \cong D(_{B}T) = \check{U}_{\bar{B}}$
(Aquí usamos que $\bar{\Lambda}$ es básica y el penúltimo isomorfismo es por adjunción)

Si $U = \oplus_{b\in\bar{\Lambda}} U_b$, como $F(I_a) \cong \tau U_a$, por el teorema de Krull-Schmidt, $F(I') = \oplus_{b\neq a} U_b$, $\therefore F(I')\oplus F(P_a) \cong (\oplus_{b\neq a} U_b)\oplus U_a = U_{\bar{B}}$ entonces por (19.2) $U_{\bar{B}}$ es un módulo de inclinación.

$\therefore$ $\forall\, i\in\bar{n}$ hay una sucesión exacta $0\to Q_i \to U' \to U'' \to 0$ con $U', U'' \in \operatorname{add}(U_{\bar{B}})$, por supuesto, estas sucesiones son exactas en mod B, esto prueba la segunda afirmación.

Además d.p. $U_{\bar{B}} \leq 1$, entonces hay una sucesión exacta

$$0 \to Q''_{\bar{B}} \to Q'_{\bar{B}} \to U_{\bar{B}} \to 0$$

con $Q', Q'' \in \operatorname{add}(\bar{B}_{\bar{B}}) = \operatorname{add}(Q_{\bar{B}})$, pero Q es también B-módulo proyectivo, $\therefore$ Q', Q'' son proyectivos en mod B, $\therefore$ d.p. $U_B \leq 1$. ∎

El último resultado que necesitamos para probar (19.1) es:

19.6. Lema.

Sea $\mathcal{U}$ una rebanada completa finita en una componente $\mathcal{C}$ de Γ_B y supongamos que $\mathcal{C}$ contiene todos los proyectivos inescindibles, entonces $\mathcal{U}$ tiene un número finito de predecesores.

Demostración.

Recordemos que si X es un predecesor de $\mathcal{U}$, $\exists!\, t\in\mathbb{N}$, $U_a\in\mathcal{U}$ tales que $X = \tau^t U_a$, como t es única escribiremos $X = \tau^{t(X)} U_a$

(1) Sean X, Y B-módulos inescindibles y $X\to Y$ un morfismo irreducible. Si X es un predecesor propio de $\mathcal{U}$, entonces Y es un predecesor de $\mathcal{U}$ y $t(X) \geq t(Y)$.

Demostración:

Sean $U_a \in \mathcal{U}$, $t(x) \in \mathbb{N}$, tales que $X = \tau^{t(x)} U_a$. Como $X \notin \mathcal{U}$, $t(x) > 0$,
$\therefore$ X no es inyectivo y hay una cadena de morfismos irreducibles
$Y \to \tau^{t(x)-1} U_a \to \cdots \to U_a$, $\therefore$ Y es predecesor de $\mathcal{U}$, y por (18.2) $\exists\, U_b \in \mathcal{U}$, $t(Y) \in \mathbb{N}$, tales que $Y = \tau^{t(Y)} U_b$.

Supongamos $t(x) < t(Y)$, entonces tenemos la siguiente cadena de irreducibles:

$$Y = \tau^{t(Y)} U_b \to \tau^{t(x)-1} U_a \to \tau^{t(Y)-1} U_b \to \cdots \to \tau^{t(x)-t(x)} U_a = U_a \to$$
$$\to \tau^{t(Y)-t(x)} U_b \to \cdots \to U_b .$$

Entonces por R(2) $\tau^{t(Y)-t(x)} U_b \in \mathcal{U}$, pero esto contradice a R(1). ■

(2) Si X y Y son predecesores de $\mathcal{U}$ y $\mathrm{Hom}(X,Y) \neq 0$, entonces $t(x) \geq t(Y)$.
Demostración:
Supongamos $t(x) < t(Y)$.
Si $X \notin \mathcal{U}$, consideramos $(g_i'): X \to \oplus_i X_i'$ un morfismo casi escindible izquierdo minimal. Sea $f \in \mathrm{Hom}(X,Y) - \{0\}$, como $t(x) < t(Y)$ f no es isomorfismo, $\therefore$ $\exists\, (f_i'): \oplus_i X_i' \to Y$, tal que $f = \sum_i f_i' g_i'$, $\therefore$ $\exists i$ tal que $f_i' g_i' \neq 0$. Por inducción continuamos construyendo una cadena de morfismos irreducibles $X = X_0 \xrightarrow{g_1} X_1 \to \cdots \xrightarrow{g_m} X_m$ y un morfismo $f_m: X_m \to Y$ tales que $f_m g_m \circ \cdots \circ g_1 \neq 0$, siempre y cuando para $0 \leq i \leq m-1$, $X_i \notin \mathcal{U}$.

Obsérvese que por (1) $\forall i \in \{0,\dots,m\}$ X_i es predecesor de $\mathcal{U}$ y $t(x) \geq t(x_i)$, en particular $t(x_m) < t(Y)$, $\therefore$ f_m no es isomorfismo. El paso inductivo se hace igual que el pie de inducción.

Como $\mathcal{U}$ es finito y $t(x_i)$ está acotada por $t(x)$, entonces hay un módulo Z que aparece un número infinito de veces en la cadena construida, esto contradice que $\mathrm{rad}(Z,Z)$ es nilpotente (0.1).

$\therefore$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $X_m \in \mathcal{U}$.

Pero $\mathrm{Hom}(X_m, Y) \neq 0$ y Y es un predecesor de $\mathcal{U}$, entonces por R(2) $Y \in \mathcal{U}$, $\therefore$ $0 \leq t(x) < t(Y) = 0$, contradicción. ■

(3) $\mathcal{U}$ tiene un número finito de predecesores.
Demostración:

Sea Q un proyectivo inescindible, $\therefore Q \in \mathcal{G}$, y por R(1) $\exists\, z \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^z Q \in \mathcal{U}$, como Q es proyectivo $z \leq 0$, $\therefore Q$ es un predecesor de $\mathcal{U}$.

Ahora sea X un predecesor de $\mathcal{U}$ y sea Q proyectivo inescindible tal que $\operatorname{Hom}(Q, X) \neq 0$, por (2) $t(X) \leq t(Q)$, entonces $\{t(X) \mid X \text{ es predecesor de } \mathcal{U}\}$ está acotado por $\max\{t(Q) \mid Q \text{ es proyectivo inescindible}\}$. Como $\mathcal{U}$ es finito, sólo hay un número finito de predecesores. ■

Demostración de (19.1)

Por (19.6) $\mathcal{U}$ tiene un número finito de predecesores, por (19.5) $\operatorname{dp.} U_B \leq 1$ y hay una sucesión exacta $0 \to B_B \to U'_B \to U''_B \to 0$ con $U', U'' \in \operatorname{add}(U_B)$ y por (19.3) $\operatorname{Ext}^1_B(U, U) = 0$

$\therefore U_B$ es un módulo de inclinación

Finalmente por (19.4) $\operatorname{End}(U_B)$ es hereditaria ■

A continuación damos una consecuencia importante de (19.1)

19.7. Proposición

Bajo las hipótesis de (19.1), sea e un idempotente primitivo de B y sea $A = \operatorname{End}(U_B)$, entonces el A-módulo ${}_AUe$ es inescindible

Demostración.

Por (19.1) U_B es un módulo de inclinación y por el teorema de Brenner-Butler $B \cong \operatorname{End}({}_AU)$, entonces e es un idempotente primitivo de $\operatorname{End}({}_AU)$, $\therefore {}_AUe$ es un sumando inescindible de ${}_AU$. ■

19. 8. Corolario.

Sea B una k-álgebra de dimensión finita inescindible y de tipo de representación finito, entonces B es una álgebra inclinada si y sólo si Γ_B tiene una rebanada completa.

Demostración.

$\Rightarrow$) Como B es una álgebra inclinada, $\exists\, A$ una k-álgebra hereditaria y T_A un módulo de inclinación tales que $B = End(T_A)$.

Como B es inescindible, A también lo es, entonces por (18.4) Γ_B tiene una rebanada completa.

$\Leftarrow$ Como B es inescindible y de tipo de representación finito, Γ_B es conexo, entonces por (19.1) se sigue el resultado. ∎

CAPITULO 7. COMPONENTES SIN CICLOS ORIENTADOS.

A lo largo de este capítulo B denotará una k-álgebra de dimensión finita y Γ_B su carcaj de Auslander-Reiten.

En la § 20 introducimos las componentes preproyectivas, una componente $\mathcal{C}$ de Γ_B se llama preproyectiva si satisface las siguientes dos condiciones:

CP1) $\mathcal{C}$ no tiene ciclos dirigidos

CP2) Todo B-módulo M en $\mathcal{C}$ es de la forma $\tau^{-t}P$ con $t \in \mathbb{N}$ y P proyectivo inescindible.

En (20.2) enunciamos una propiedad básica de las componentes preproyectivas, a saber, todo módulo en $\mathcal{C}$ tiene un número finito de predecesores. Esto es muy útil, pues recordamos que en (6.1) probamos que si X, Y son inescindibles, Y tiene un número finito de predecesores y $\mathrm{Hom}(X,Y) \neq 0$, entonces hay un camino de irreducibles entre inescindibles de X a Y.

Finalmente en (20.6) damos una condición suficiente para que B sea inclinada

Teorema. (20.6)

Sea $\mathcal{C}$ una componente preproyectiva de B que contenga un módulo inescindible sincero N_B, entonces todos los B-módulos proyectivos inescindibles están en $\mathcal{C}$ y también hay una rebanada completa en $\mathcal{C}$. En consecuencia B es una álgebra inclinada, mas aun, hay una álgebra hereditaria A, un módulo de inclinación T_A y un inyectivo simple I_A, tales que $B = \mathrm{End}(T_A)$ y $N_B = \mathrm{Hom}({}_BT_A, I_A)$.

En la § 21 damos dos aplicaciones de la teoría de álgebras inclinadas que ya mencionamos en el capítulo 1.

En (21.3) vemos que si B es de tipo de representación finito y Γ_B no tiene ciclos dirigidos, entonces los módulos inescindibles quedan determinados por sus factores de composición. Esto es una generalización del resultado análogo para las álgebras hereditarias de tipo de representación finito. Este resultado también se conocía para álgebras ℓ-hereditarias [7]. Otros resultados relacionados se pueden ver en [14] y en [8]

En (21.4) probamos que si B es de tipo de representación finito y Γ_B

no tiene ciclos dirigidos, entonces todo módulo sincero inescindible, es fiel.

Finalmente en (21.7) vemos que si B es una álgebra inclinada y k es algebraicamente cerrado, la forma cuadrática asociada a B es positiva definida para vectores positivos en $K_0(B)$, esto, otra vez generaliza el resultado que se tenía para k-álgebras hereditarias de, tipo de representación finito.

§ 20. Componentes preproyectivas.

En esta sección por camino entenderemos camino dirigido.

20.1. Definición.

Una componente $\mathcal{C}$ de Γ_B se llama **preproyectiva** si

CP1) $\mathcal{C}$ no tiene ciclos dirigidos

CP2) $\forall M \in \mathcal{C}$ $\exists$ P proyectivo inescindible, $t \in \mathbb{N}$ tales que $M \cong \tau^{-t}P$.

20.2. Lema.

Si $\mathcal{C}$ es una componente preproyectiva y $Y \in \mathcal{C}$, entonces Y tiene sólo un número finito de predecesores.

Demostración.

Sea $Y_m \to Y_{m-1} \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$ es un camino en $\mathcal{C}$,

$\forall i \in \{0, \ldots, m\}$ $\exists$ P_i proyectivo inescindible, $t_i \in \mathbb{N}$ tales que $Y_i = \tau^{-t_i}P_i$

Obsérvese que si $i > j$ y $P_i = P_j$ entonces $t_i < t_j$ (en caso contrario tendríamos un ciclo dirigido

$$\tau^{-t_i}P_i = Y_i \to \cdots \to Y_j = \tau^{-t_j}P_j \to \cdots \to \tau^{-t_i}P_i$$

esto no es posible por CP1).

Entonces todo camino de la forma

$$\cdots \to Y_m \to Y_{m-1} \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$$

termina después de un número finito de pasos, la demostración es una consecuencia de que Γ_A es una gráfica localmente finita y del siguiente resultado de teoría de gráficas.

20.3. Lema.

Sea G una gráfica dirigida localmente finita y Y un vértice de G con la propiedad de que todo camino que termina en Y es de longitud finita, entonces Y tiene un número finito de predecesores.

Demostración.

Supongamos que Y tiene un número infinito de predecesores, entonces por inducción construimos un camino,

$$Y_n \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$$

tal que Y_n tiene un número infinito de predecesores

El pie de inducción se tiene por nuestra suposición, luego, supongamos construido $Y_n \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$ tal que Y_n tiene un número infinito de predecesores.

Como G es localmente finita, $\exists\, Y_{n+1} \in G$ tal que $Y_{n+1} \to Y_n$ y Y_{n+1} tiene un número infinito de predecesores.

Hemos construido por inducción un camino de longitud infinita

$$\cdots \to Y_n \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$$

que termina en Y, contradicción. ■

20.4. Proposición.

Sea $\mathcal{C}$ una componente de Γ_B con una rebanada completa $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{C}$ no tiene ciclos dirigidos.

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene un ciclo dirigido

$$x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_m \to x_0$$

(Recordemos que los morfismos son irreducibles y los módulos son inescindibles)

Por R(1) $\forall i \in \{0,\dots,m\}$ $\exists!\, z_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^{z_i} x_i \in \mathcal{U}$, consideramos tres casos

1er caso: $\forall i$ $z_i \geq 0$

Sea $z := \min\{z_i \mid 0 \leq i \leq m\}$, entonces $\forall i$, $\tau^{z} x_i \neq 0$. Aplicando τ^{z} al ciclo dirigido obtenemos otro ciclo dirigido uno de cuyos módulos está en $\mathcal{U}$, por R(2) el ciclo está en $\mathcal{U}$, esto contradice a R(3)

2o caso: $\forall i$ $z_i \leq 0$

Sea $z := \max\{z_i \mid 0 \leq i \leq m\}$, aplicando τ^{z} al ciclo dirigido obtenemos, de manera análoga una contradicción.

3er caso: $\exists\, i,j$ tales que $z_i \geq 0$, $z_j \leq 0$.

Usando sucesiones que así se dividen obtenemos cadenas de morfismos irreducibles de la siguiente forma

$\tau^{z_i} x_i \to \cdots \to x_i$ y $x_j \to \cdots \to \tau^{z_j} x_j$

combinándolas con el ciclo dirigido obtenemos

$\tau^{z_i} x_i \to \cdots \to x_i \to \cdots \to x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_m \to x_0 \to \cdots \to x_j \to \cdots \to \tau^{z_j} x_j$

Como $\tau^{z_i} x_i, \tau^{z_j} x_j \in \mathcal{U}$, por R(2) el ciclo dirigido está en $\mathcal{U}$, esto contradice R(3) ■

20.5. Definición.

Un camino $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_m$ en Γ_B se llama **seccional** si $\forall i \in \{1,\ldots,m-1\}$, $x_{i-1} \neq \tau x_{i+1}$.

20.6. Teorema.

Sea $\mathcal{G}$ una componente preproyectiva de Γ_B que contenga un módulo inescindible sincero N_B, entonces todos los B módulos proyectivos inescindibles están en $\mathcal{G}$ y también, $\mathcal{G}$ tiene una rebanada completa. Por lo tanto B es una álgebra inclinada. Más aún, hay una álgebra hereditaria A, un módulo de inclinación T_A y un módulo inyectivo simple I_A tales que $B = \mathrm{End}(T_A)$ y $N_B = \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, T_A)$

Demostración.

Recuérdese que N_B es sincero si $\forall\, Q_B$ proyectivo inescindible $\mathrm{Hom}_B(Q,N) \neq 0$, equivalentemente $\forall\, I_B$ inyectivo inescindible $\mathrm{Hom}_B(N,I) \neq 0$ o equivalentemente $\underline{\dim}\, N_B \in G_0(B)$ tiene todas sus coordenadas distintas de cero

(1) Sea Q_B un B módulo proyectivo inescindible, como N_B es sincero, $\therefore \mathrm{Hom}_B(Q,N) \neq 0$

Como $\mathcal{G}$ es una componente preproyectiva y $N_B \in \mathcal{G}$ entonces N_B tiene un número finito de predecesores y por 19.1 Q es predecesor de N. Como $\mathcal{G}$ es una componente, $Q \in \mathcal{G}$

(2) Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de módulos $V \in \mathcal{G}$ que satisfacen las siguientes propiedades.

a) Hay un camino de U_B a N_B

b) Todo camino de U_B a N_B es seccional

Afirmamos que $\mathcal{U}$ es una rebanada completa

R(1) Primero consideramos un B-módulo proyectivo inescindible Q, por (i) hay un camino de Q a N. Sea $t = \max\{s \mid$ hay un camino de $\tau^{-s}Q$ a $N\}$, t existe pues N tiene un número finito de predecesores.

En seguida probamos que todo camino de $\tau^{-t}Q$ a N es seccional.

Supongamos que hay un camino de la forma

$\tau^{-t}Q : X_0 \to \cdots \to X_i \to X_{i+1} \to \tau^{-1}X_i \to \cdots \to X_m = N$, entonces

$\forall j \in \{0,\dots,i\}$ X_j no es inyectivo [Si $\exists j$ tal que X_j es inyectivo, como N_B es sincero $\operatorname{Hom}_B(N, X_j) \neq 0$, pero $X_j \in \mathcal{C}$, ∴ X_j tiene un número finito de predecesores y por (a.1) hay un camino de N a X_j, además hay un camino de longitud mayor que uno de X_j a N, esto contradice (P1)].

∴ $\forall j \in \bar{m}$ la existencia del morfismo irreducible $X_{j-1} \to X_j$ implica la existencia del morfismo irreducible $\tau^{-1}X_{j-1} \to \tau^{-1}X_j$. Combinando éstos, con el camino de $\tau^{-1}X_i$ a N, obtenemos el camino

$$\tau^{-(t+1)}Q : \tau^{-1}X_0 \to \cdots \to \tau^{-1}X_i \to \cdots \to X_m = N$$

esto contradice la maximalidad de t.

Hemos probado que todo camino de $\tau^{-t}Q$ a N es seccional, ∴ $\tau^{-t}Q \in \mathcal{U}$. De hecho $\tau^{-t}Q$ es el único elemento de la órbita de Q que está en $\mathcal{U}$, ya que si $0 \le t' < t$ hay un camino que no es seccional de $\tau^{-t'}Q$ a N y si $t < t'$ no hay caminos de $\tau^{t'}Q$ a N.

R(1) se sigue de (P2) (La unicidad es clara, si $Y = \tau^{z} Q$ con $z \in \mathbb{Z}$ y Q proyectivo inescindible, y $\tau^{r} Y, \tau^{s} Y \in \mathcal{U}$ entonces $\tau^{r+z}Q, \tau^{s+z}Q \in \mathcal{U}$, ∴ $r+z = s+z$, ∴ $r = s$)

R(2) Sea $X_0 \xrightarrow{g_1} X_1 \to \cdots \xrightarrow{g_m} X_m$ una cadena de morfismos no nulos entre módulos inescindibles tal que $X_0, X_m \in \mathcal{U}$

Como $X_m \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$ y $\forall i \in \bar{m}$ $\operatorname{Hom}(X_{i-1}, X_i) \neq 0$ se prueba inductivamente que $X_i \in \mathcal{C}$ y que hay un camino de X_{i-1} a X_i

Eliminando los isomorfismos y sustituyendo los g_i's no invertibles por cadenas de morfismos irreducibles de X_{i-1} a X_i obtenemos un camino de X_0 a X_m que contiene a todos las X_i's.

Entonces sin pérdida de generalidad supondremos que los g_i's son ya irreducibles. Deseamos ver que las X_i's están en $\mathcal{U}$.

Como $X_m \in \mathcal{U}$ hay un camino de X_m a N, combinándolo con el camino de X_i a X_m vemos que X_i satisface la condición a).

Si hubiera un camino de X_i a N que no es seccional lo combinamos con el camino de X_0 a X_i, entonces habría un camino que no es seccional de X_0 a N, contradicción. Por tanto X_i satisface la condición b)
$\therefore X_i \in \mathcal{U}$

R(3) se sigue de que en G no hay ciclos dirigidos.

Hemos probado que $\mathcal{U}$ es una rebanada completa finita.

Sea U_B el módulo rebanada y $A = End(U_B)$, entonces por (19.1) U_B es un módulo de inclinación y A es hereditaria.

Sea ${}_BT_A := D({}_AU_B)$, entonces T_A es un módulo de inclinación y $End(T_A) = B$ (este razonamiento ya lo usamos en la demostración de (19.5))

Por construcción de U_B, N_B es sumando de U_B, $\therefore Hom_B({}_AU_B, N_B)$ es un A-módulo proyectivo inescindible.

Además $Hom_B({}_AU_B, -) : \mathcal{T}(U_B) \to \mathcal{Y}(U_B)$ es equivalencia de categorías, $\therefore End(N_B) \cong End_A(Hom_B({}_AU, N))$, este último es un anillo con división pues A es hereditaria.

Y puesto que para cada sumando inescindible V_B de U_B distinto de N, $Hom(N, V) = 0$, entonces $Hom_B(N, {}_AU)$ es un A-módulo simple que además es proyectivo.

$\therefore I_A := D\,Hom_B(N, {}_AU)$ es un A-módulo derecho inyectivo simple.

Finalmente $Hom_A({}_BT_A, I_A) = Hom_A(D({}_AU_B), D\,Hom_B(N_B, {}_AU_B)) \cong$
$\cong Hom_A(Hom_B(N, {}_AU), {}_AU_B) \cong N_B$. El último isomorfismo se debe a que N_B es un sumando directo de U y a que $A = End(U_B)$. ∎

20.7. Observación.

Usando idempotentes de A se puede reformular la última afirmación.

Bajo las hipótesis de (20.6) hay una álgebra hereditaria A, un módulo de inclinación T_A y un idempotente primitivo e de A tales que $B = End(T_A)$ y $N_B = D({}_BTe)$

Demostración.

Sea P_A el proyectivo inescindible tal que $P/\operatorname{rad} P = \operatorname{soc} I_A = I_A$ y sea e un idempotente primitivo de A tal que $P_A \cong eA$.

Entonces $Hom_A({}_BT_A, I_A) \cong Hom_A({}_BT_A, D\,Hom_A(P_A, A)) \cong$

$\cong Hom_k({}_BT_A \otimes_A Hom_A(P_A, A), k) = D({}_BT_A \otimes_A Hom_A(P_A, A)) \overset{\sigma}{\cong} D\,Hom_A(P_A, {}_BT_A) =$

$= D\,Hom_A(eA, {}_BT_A) \cong D({}_BTe)$.

Obsérvese que σ es isomorfismo debido a que P es proyectivo. ■

20.8. Corolario.

Supongamos que B es de tipo de representación finito y que existe un módulo inescindible sincero N_B. Entonces B es una álgebra inclinada si y sólo si Γ_B no tiene ciclos dirigidos. También en este caso hay una álgebra hereditaria A, un módulo de inclinación T_A y un módulo inyectivo simple I_A tales que $B = End(T_A)$ y $N_B = Hom_A({}_BT_A, I_A)$

Demostración.

Como B es de tipo de representación finito y N es sincero entonces todos los proyectivos inescindibles están en una componente de Γ_B y por tanto Γ_B es conexo.

Como B es de tipo de representación finito, ∴ B es inescindible

$\Rightarrow$ Si B es inclinada por (19.4) Γ_B tiene una rebanada completa y por (20.4) Γ_B no tiene ciclos dirigidos.

$\Leftarrow$ Si Γ_B no tiene ciclos dirigidos, entonces Γ_B es una componente preproyectiva [Sea M inescindible, como B es de tipo de representación finito $\{\tau^t M \mid t \geq 0\}$ es finito, entonces $\exists\, t \in \mathbb{N}$, Q proyectivo inescindible tales que $M \cong \tau^{-t} Q$ o M es τ-periódico (es decir, $\exists\, n > 0$ $M \cong \tau^n M$), como Γ_B no tiene ciclos dirigidos, M no es τ-periódico]

Por (20.6) B es una álgebra inclinada y hay un inyectivo simple con las propiedades deseadas ■

§ 21. Algunas aplicaciones.

21.1. Observación.

Antes de proceder a dar los resultados necesitamos un lema técnico, es decir, dado un módulo inescindible N_B buscamos una álgebra cociente $\overline{B}$, tal que N sea $\overline{B}$ módulo y $N_{\overline{B}}$ sea sincero, más aún, buscamos la álgebra cociente "más grande" con estas propiedades.

El sentido de "más grande se aclarará cuando la construyamos y veamos sus aplicaciones

21.2. Construcción.

(1) Sea N_B un B módulo inescindible y sea $B = \oplus_{i=1}^{\ell} P_i$ una descomposición de B en proyectivos inescindibles tal que $\exists\, m \in \overline{1,\ell}$ con $Hom(P_i, N) \neq 0$ para $i \leq m$ y $Hom(P_i, N) = 0$ para $i > m$.

Sean $P = \oplus_{i=1}^{m} P_i$, $Q = \oplus_{i=m+1}^{n} P_i$

Como $\varphi: B \to End(B_B)$, $b \mapsto (x \mapsto bx)$ y $\psi: End(B_B) \to \begin{pmatrix} End(P_B) & Hom_B(Q,P) \\ Hom_B(P,Q) & End(Q_B) \end{pmatrix}$, $f \longmapsto \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$

son isomorfismos de k-álgebras podemos identificar a B con el anillo de matrices.

Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de $End(P_B)$ generado por $\{ f \in End(P_B) \mid f$ se factoriza a través de $Q \}$

Sea $I := \begin{pmatrix} \mathfrak{a} & Hom_B(Q,P) \\ Hom_B(P,Q) & End_B(Q) \end{pmatrix}$, es muy fácil verificar que I es un ideal bilateral. Sea $\overline{B} := B/I$.

(2) Ahora veremos que N tiene estructura canónica de $\overline{B}$-módulo, basta ver que $I \subseteq Anul(N_B)$

Sean $f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \in I$, $x \in N$ y $1 = e_1 + e_2$ donde $e_1 \in P$, $e_2 \in Q$ y e_1, e_2 son idempotentes ortogonales. Sea $f_{11} = g_2 g_1$ una factorización a través de Q

$n \cdot f = n \cdot f(1) = n \cdot (f_{11}(e_1) + f_{21}(e_1) + f_{12}(e_2) + f_{22}(e_2)) = n(f_{11}(e_1) + f_{12}(e_2))$ ya que $f_{21}(e_1), f_{22}(e_2) \in Q$ y $Q \subseteq Anul(N_B)$ pues $Hom_B(Q,N) = 0$

Además $n \cdot f_{12}(e_2) = n\, f_{12}(e_2)e_2 = 0$, y como $e_1 \in \mathrm{Anul}(Q_A)$,

$\therefore n \cdot f_{11}(e_1) = n\, g_2 g_1(e_1) = n \cdot g_2(g_1(e_1)\cdot e_1) = 0$, $\therefore n \cdot f = 0$, $\therefore I \subseteq \mathrm{Anul}(N_B)$.

(3) Si $M_{\bar B} \in \mathrm{mod}\, \bar B$, M tiene estructura de B-módulo con la siguiente multiplicación: $m \cdot b := m \cdot \bar b$.

Denotamos al B-módulo M por M_B, entonces es inmediato que

$F: \mathrm{mod}\,\bar B \to \mathrm{mod}\, B$ es un funtor fiel y pleno, en particular
$M_{\bar B} \mapsto M_B$

manda inescindibles en inescindibles.

(4) Ahora determinamos un conjunto completo de idempotentes, primitivos ortogonales para $\bar B$.

Sea e_i la composición $B \xrightarrow{\pi_i} P_i \xrightarrow{\mu_i} B$ para $i \in \bar{\ell}$, entonces $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales para B.

Sea $\bar e_i$ la imagen canónica de $e_i \in \bar B$, $\therefore \bar e_i$ es idempotente en $\bar B$.

Sea $i \in \bar{\ell}$, si $i > m$, entonces $\bar e_i = 0$ pues $Q \subseteq I$ y si $i \leq m$, entonces $Ne_i \cong \mathrm{Hom}_B(e_i B, N) = \mathrm{Hom}_B(P_i, N) \neq 0$, $\therefore e_i \notin \mathrm{Anul}(N_B)$, $\therefore e_i \notin I$, $\therefore \bar e_i \neq 0$.

Por último $\forall i \in \bar m$ $q_i : e_i B \to \bar e_i \bar B$ es un homomorfismo supreyectivo
$e_i x \mapsto \bar e_i \bar x$

de B-módulos. Como $e_i B$ es proyectivo inescindible, $\therefore \bar e_i \bar B$ es un B-módulo inescindible, por (3) $\bar e_i \bar B$ es inescindible como $\bar B$-módulo
$\therefore \bar e_i$ es primitivo.

Entonces es claro que $\{\bar e_1, \dots, \bar e_m\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales para $\bar B$.

(5) N_B es sincero.

Sea $i \in \bar m$, como $\mathrm{Nuc}\, q_i \subseteq I \subseteq \mathrm{Anul}(N_B)$, entonces $\forall f: e_i B_B \to N_B$ $\exists!\, h: \bar e_i \bar B_B \to N_B$ tal que $f = h q_i$, y como $\mathrm{Hom}_B(e_i B_B, N_B) \neq 0$
$\therefore \mathrm{Hom}_{\bar B}(\bar e_i \bar B, N) \underset{(3)}{\cong} \mathrm{Hom}_B(\bar e_i \bar B, N) \neq 0$.

(6) Si B es de tipo de representación finito y Γ_B no tiene ciclos dirigidos, entonces $\bar B$ también es de tipo de representación finito y $\Gamma_{\bar B}$ no tiene ciclos dirigidos.

Para la primera afirmación obsérvese que $F(N_{\bar{B}}) \cong F(N'_{\bar{B}})$ implica $N_{\bar{B}} \cong N'_{\bar{B}}$, entonces el número de clases de isomorfía de $\bar{B}$-módulos inescindibles es menor o igual que el número de clases de isomorfía de B-módulos inescindibles.

Para la segunda afirmación supongamos que en $\Gamma_{\bar{B}}$ hay un ciclo dirigido $x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \to \cdots \to x_m \xrightarrow{f_m} x_0$, entonces

$F(x_0) \xrightarrow{F(f_0)} F(x_1) \to \cdots \to F(x_m) \xrightarrow{F(f_m)} F(x_0)$ es una cadena de morfismos no nulos entre inescindibles y como F es fiel y pleno ninguna $F(f_i)$ es isomorfismo.

Como B es de tipo de representación finito por (2.1) obtenemos un ciclo dirigido en Γ_B, contradicción. ■

21.3. Teorema.

Supongamos que B es de tipo de representación finito y que Γ_B no tiene ciclos dirigidos. Sean N_B, N'_B módulos inescindibles tales que $\underline{\dim}\, N_B = \underline{\dim}\, N'_B$, entonces $N_B \cong N'_B$.

Demostración.

Por la construcción anterior puedo suponer, sin pérdida de generalidad, que N_B es sincero.

Por (20.8) B es una álgebra inclinada y hay una álgebra hereditaria A, un módulo de inclinación T_A y un módulo inyectivo simple I_A tales que $B = \mathrm{End}(T_A)$ y $N_B = \mathrm{Hom}_{B}({}_BT_A, I_A)$.

Como I_A es inyectivo, $I_A \in \mathcal{T}$, $\therefore N_B \in \mathcal{Y}$ (aquí estamos usando la notación introducida en (4.1))

Por (9.2) hay un isomorfismo de grupos $f: G_0(A) \to G_0(B)$ definido por $f(\underline{\dim}\, H_A) = \underline{\dim}\, \mathrm{Hom}_A(T,H) - \underline{\dim}\, \mathrm{Ext}^1_A(T,H)$

Además $N'_B \in \mathcal{Y}$ [En caso contrario, $N' \in \mathcal{X}$, $\therefore \exists\, H_A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_A(T,H) = N'$. Como $f(\underline{\dim}\, I_A) = \underline{\dim}\, N_B$ y $f(\underline{\dim}\, H_A) = -\underline{\dim}\, N'_B$ $\therefore \underline{\dim}\, I_A = f^{-1}(\underline{\dim}\, N_B) = f^{-1}(\underline{\dim}\, N'_B) = -\underline{\dim}\, H_A$, contradicción].

$\therefore \exists\, H_A \in \mathcal{T}$ tal que $N' = \mathrm{Hom}_A(T,H)$, $\therefore \underline{\dim}\, H_A = f^{-1}(\underline{\dim}\, N'_B) = f^{-1}(\underline{\dim}\, N_B) = \underline{\dim}\, I_A$, como I_A es simple, $\therefore H_A \cong I_A$, $\therefore N_B \cong N'_B$. ■

21.4. Teorema.

Supongamos que B es de tipo de representación finito y que Γ_B no tiene ciclos dirigidos y sea N_B inescindible, entonces

1) Sean e_1, e_2 dos idempotentes primitivos de B y $b \in B$, entonces la función $\cdot e_1 b e_2 : Ne_1 \to Ne_2$ es inyectiva, supreyectiva o cero.
$x e_1 \mapsto x e_1 b e_2$

2) Si N_B es sincero, entonces N_B es fiel.

Demostración.

1) Por (21.2) puedo suponer sin pérdida de generalidad que N_B es sincero.

Por (20.1) hay un módulo de inclinación U_B tal que $A = End(U_B)$ es hereditaria y A tiene un idempotente e tal que $N_B = eU_B$

Por (11.4) el morfismo de A-modulos $\cdot e_1 b e_2 : Ue_1 \to Ue_2$ es inyectivo, supreyectivo o cero (también usamos (19.7)).

$\therefore$ $\cdot e_1 b e_2 : Ne_1 = eUe_1 \to eUe_2 = Ne_2$ es inyectivo, supreyectivo o cero.

2) Si ahora, desde el principio $N_B = eU_B$ es sincero, entonces para $i=1,2$ $eUe_i = Ne_i \neq 0$

y puesto que $B = End(_A U)$, si $e_1 b e_2 \neq 0$ entonces la multiplicación $\cdot e_1 b e_2 : Ue_1 \to Ue_2$ es distinta de cero.

$\therefore$ $\cdot e_1 b e_2 : Ne_1 \to Ne_2$ es distinta de cero, esto implica que N es fiel. (si no lo fuera $Anul(N_B) \neq 0$, $\therefore \exists\, b \in B - \{0\}$ tal que $Nb = 0$ y existen e_1, e_2 idempotentes primitivos de B tales que $e_1 b e_2 \neq 0$, pero como $Nb = 0$ $\cdot e_1 b e_2 = 0$, contradicción) ■

21.5. Observación.

Si B es una álgebra inclinada, d.g. $B \leq 2$, entonces en $G_0(B)$ está definida la característica de Euler por

$$\langle \underline{dim}\, X, \underline{dim}\, Y \rangle = dim_k Hom(X,Y) - dim_k Ext^1(X,Y) + dim_k Ext^2(X,Y)$$

y la forma cuadrática $q(\underline{dim}\, X) = \langle \underline{dim}\, X, \underline{dim}\, X \rangle$

También necesitamos el siguiente lema tomado de [18]

21.6. Lema.

Sea A una k-álgebra arbitraria y sea

$$0 \to U \xrightarrow{\mu} V \xrightarrow{\varepsilon} W \to 0$$

una sucesión exacta en mod A que no se escinde, entonces

$\dim_k \mathrm{End}_A(V) < \dim_k \mathrm{End}_A(U \oplus W)$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supondremos que μ es la inclusión.

Sean $H_0 := \{\alpha \in \mathrm{End}(V) \mid \alpha(V) \subseteq U$ y $\alpha(U) = 0\}$

$H_1 := \{\alpha \in \mathrm{End}(V) \mid \alpha(U) \subseteq U\}$

$$\begin{aligned} \sigma: \mathrm{Hom}_A(W, U) &\to H_0 \\ \beta &\mapsto \mu\beta\varepsilon \end{aligned}$$ es una transformación lineal.

Como μ es monomorfismo y ε es epimorfismo, $\therefore$ σ es inyectiva.

También es suprayectiva, en efecto, si $\alpha \in H_0$. $\exists!\ \beta: W \to U$ tal que $\alpha|^U = \beta\varepsilon$, $\therefore$ $\alpha = \mu\alpha|^U = \mu\beta\varepsilon = \sigma(\beta)$.

$\therefore$ σ es isomorfismo

$$\begin{aligned} f: \mathrm{End}(V) &\to \mathrm{Hom}(U, W) \\ \alpha &\mapsto \varepsilon\alpha\mu \end{aligned}$$ es transformación lineal y $\mathrm{Nuc} f = H_1$

$(\alpha \in H_1 \iff \alpha(U) \subseteq U \iff \varepsilon\alpha\mu = 0 \iff f(\alpha) = 0)$

$\therefore$ $\exists!\ \varphi: \mathrm{End}(V)/H_1 \to \mathrm{Hom}(U, W)$ transformación lineal inyectiva tal que $\varphi(\alpha + H_1) = \varepsilon\alpha\mu$.

Ahora si $\alpha \in H_1$, $\exists!\ \alpha_U \in \mathrm{End}(U)$, $\alpha_W \in \mathrm{End}(W)$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha_U"'] & V \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_W"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\mu"'] & V \arrow[r, "\varepsilon"'] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta en mod A

$\therefore$ $$\begin{aligned} g: H_1 &\to \mathrm{End}(U) \times \mathrm{End}(W) \\ \alpha &\mapsto (\alpha_U, \alpha_W) \end{aligned}$$ es una transformación lineal y

$\mathrm{Nuc}\, g = H_0$ $(\alpha \in H_0 \iff \alpha(U) = 0$ y $\alpha(V) \subseteq U \iff \alpha_U = 0$ y $\alpha_W = 0)$.

$\therefore$ $\exists!\ \psi: H_1/H_0 \to \mathrm{End}(U) \times \mathrm{End}(W)$ transformación lineal inyectiva tal que $\psi(\alpha + H_0) = (\alpha_U, \alpha_W)$

Si ψ fuera suprayectiva, $\exists\, x \in H_1$ tal que $\psi(\alpha + H_0) = (1,0)$, $\therefore g(\alpha) = (1,0)$, entonces α define una retracción para μ, contradicción $\therefore \psi$ no es suprayectiva.

De $\mathcal{J}, \varphi$ y ψ se obtienen respectivamente

(1) $\dim H_0 = \dim \mathrm{Hom}(W, U)$

(2) $\dim \mathrm{End}(V) - \dim H_1 \leq \dim \mathrm{Hom}(U, W)$

(3) $\dim H_1 - \dim H_0 < \dim \mathrm{End}(U) + \dim \mathrm{End}(W)$

Sumando (1), (2) y (3) obtenemos la desigualdad deseada. ∎

21.7. Teorema.

Sea B una k-álgebra inclinada de tipo de representación finito y supongamos que k es algebraicamente cerrado. Sea $x \in G_0(B)$ positivo. Entonces (1) $q(x) \geq 1$ y (2) $\exists\, X$ inescindible tal que $\underline{\dim}\, X = x$ si y sólo si $q(x) = 1$.

Demostración.

Como B es de tipo de representación finito puedo suponer sin pérdida de generalidad que B es inescindible como k-álgebra.

Como B es inclinada, por (18.4) Γ_B tiene una rebanada completa y por (20.4), Γ_B no tiene ciclos dirigidos.

Sea X inescindible, como B es de tipo de representación finito y Γ_B no tiene ciclos dirigidos, entonces $\mathrm{End}_B(X)$ es un anillo con división y como k es algebraicamente cerrado, $\mathrm{End}_B(X) = k$.

También $\mathrm{Ext}^1_B(X,X) = 0$ y $\mathrm{Ext}^2_B(X,X) = 0$. Para la segunda afirmación consideremos una sucesión exacta $0 \to N \to P \to X \to 0$ con P proyectivo. Si la sucesión se escinde X es proyectivo y la afirmación es trivial, en caso contrario $\mathrm{Ext}^1_B(X,N) \neq 0$ $\therefore \mathrm{Ext}^1_B(N,X) = 0$. Aplicando la sucesión larga de homología obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1(N,X) \to \mathrm{Ext}^2(X,X) \to \mathrm{Ext}^2(P,X) = 0$$

(2) $\Rightarrow$ $\underline{\dim}\, X = \dim_k \mathrm{End}(X) = 1$

(1) Como $x \in G_0(B)$ es positivo $\therefore \exists\, X \in \mathrm{mod}\, B$ tal que $\underline{\dim}\, X = x$ y $\dim_k \mathrm{End}(X) = \min\{\dim_k \mathrm{End}(Y) \mid Y \in \mathrm{mod}\, B \text{ y } \underline{\dim}\, Y = x\}$

Si $\mathrm{Ext}^1_B(X,X) \neq 0$ hay una descomposición $X' \oplus X''$ de X con $\mathrm{Ext}^1_B(X',X'') \neq 0$, $\therefore$ hay una sucesión exacta

$$0 \to X'' \to Y \to X' \to 0$$

que no se divide, $\underline{\dim}\, Y = \underline{\dim}\, X' + \underline{\dim}\, X'' = x$.

Pero por (21.6) $\dim_k \mathrm{End}(Y) < \dim_k \mathrm{End}(X' \oplus X'') = \dim \mathrm{End}(X)$, contrario a la elección de X, $\therefore$ $\mathrm{Ext}^1(X,X) = 0$

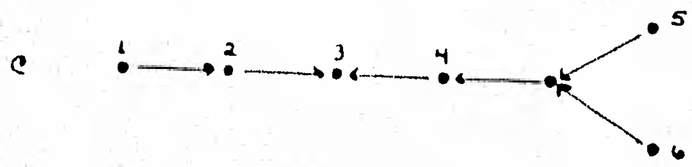
Como $\dim_k \mathrm{End}(X) \geq 1$ y $\dim_k \mathrm{Ext}^2(X,X) \geq 0$, $\therefore$ $q(x) = q(\underline{\dim}\, X) \geq 1$.

(2) $\Leftarrow$ Si $q(x) = 1$, $\therefore$ $\mathrm{End}_B(X) = k$ y X es inescindible. ∎

CAPITULO 8. UN EJEMPLO.

§22. Un ejemplo.

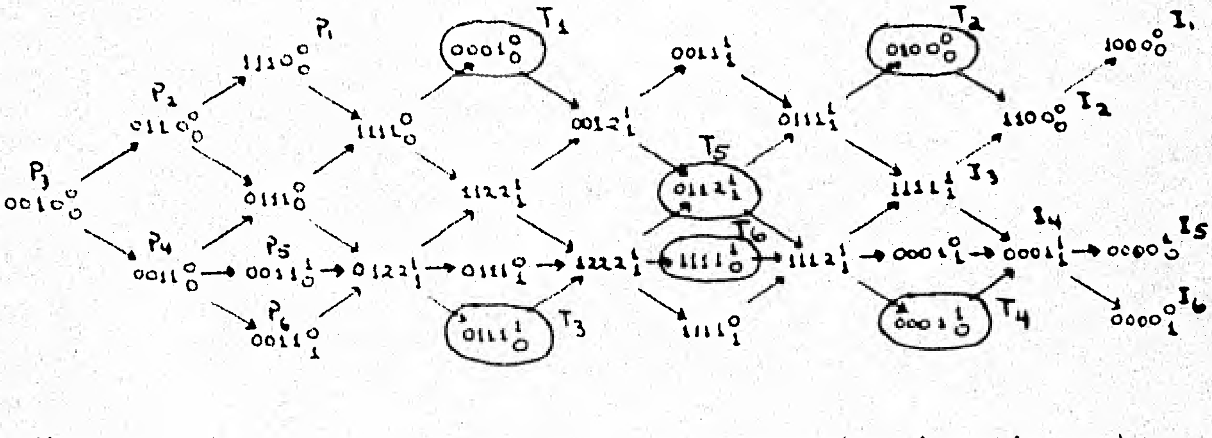
Sea A la k-álgebra asociada al carcaj



Como C es un carcaj sin relaciones y A no tiene ciclos dirigidos, entonces A es hereditaria y como C es conexo entonces A es inescindible, (ver [13]).

Como la componente de Γ_A (el carcaj de Auslander - Reiter de A) que contiene a los proyectivos inescindibles es finita y como A es inescindible entonces A es de tipo de representación finito y Γ_A es conexo.

A continuación describimos Γ_A.



Una vez calculado, observamos que Γ_A no tiene ciclos dirigidos, entonces por (21.3) los inescindibles están determinados por sus factores de composición.

Sea $T = \oplus_{i=1}^{6} T_i$ afirmamos que T_A es un módulo de inclinación. Como A es hereditaria, $d.p\, T_A \leq 1$, además T tiene tantos sumandos inescindibles no isomorfos, como clases de isomorfía de A-módulos simples. Entonces por (10.2) basta ver que $\operatorname{Ext}^1_A(T,T)=0$.

Para esto observemos que si $X, Y \in \Gamma_A$ y $\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \neq 0$, entonces hay un camino de longitud ≥ 1 de Y a X. (esta observación ya la usamos en (21.7)).

Como $\forall i \in \bar{6}$, no hay caminos de T_i a T_1, $\therefore$ $\mathrm{Ext}^1(T_1,T_i)=0$, similarmente $\forall i \in \bar{6}$ $\mathrm{Ext}^1(T_3,T_i)=0$.

Como A es hereditaria entonces $D\mathrm{Ext}^1(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}Y, X)$ y $D\mathrm{Ext}^1(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_A(Y, \tau X)$ (ver (6.6)). Además por (0.1) si X, Y son inescindibles y no hay caminos de X a Y en Γ_A entonces $\mathrm{Hom}(X,Y)=0$.

Con estas observaciones tenemos que:

$\forall i \in \bar{6}$, $i \neq 1$ $\mathrm{Ext}^1(T_2,T_i) = D\,\mathrm{Hom}(\tau^{-1}T_i, T_2) = 0$.

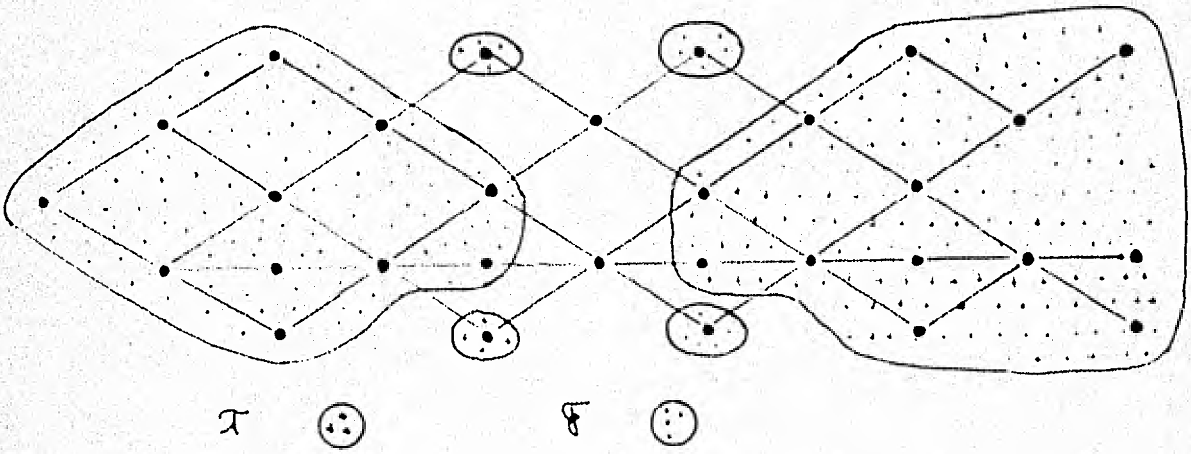
$\forall i \in \bar{6}$, $i \neq 3$ $\mathrm{Ext}^1(T_4,T_i) = D\,\mathrm{Hom}(\tau^{-1}T_i, T_4) = 0$.

$\forall i \in \bar{6}$ $\mathrm{Ext}^1(T_5,T_i) = D\,\mathrm{Hom}(\tau^{-1}T_i, T_5) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1(T_6,T_i) = D\,\mathrm{Hom}(\tau^{-1}T_i, T_6) = 0$

En los casos restantes verificamos directamente que $\mathrm{Ext}^1(T_2,T_1) = D\mathrm{Hom}(T_1, \tau T_2) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1(T_4,T_3) = D\mathrm{Hom}(\tau^{-1}T_3, T_4) = 0$.

$\therefore$ $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$, $\therefore$ T_A es un módulo de inclinación.

La teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ generada por T está descrita en el siguiente diagrama



Obsérvese que en este caso $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ no se escinde.

Es muy fácil verificar que $\forall i \in \bar{6}$ $\mathrm{End}_A(T_i) = k$, entonces razonando como en (17.10) vemos que $B = \mathrm{End}(T_A)$ es la k-álgebra asociada a algún carcaj, posiblemente, con relaciones

Para calcularlo observemos que

$(\underline{\dim}\, F(T_j))_i = |\, Hom_B(F(T_i), F(T_j))_{End(F(T_i))}\,| = |\, Hom_A(T_i,T_j)_{End(T_i)}\,| =$

$= \dim_k Hom_A(T_i,T_j)$.

De aquí es fácil ver que

$\underline{\dim}\, F(T_1) = (1,0,0,0,0,0)$

$\underline{\dim}\, F(T_2) = (0,1,1,0,1,0)$

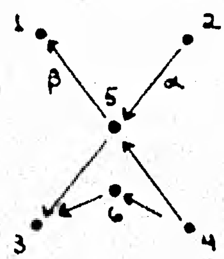
$\underline{\dim}\, F(T_3) = (0,0,1,0,0,0)$

$\underline{\dim}\, F(T_4) = (1,0,1,1,1,1)$

$\underline{\dim}\, F(T_5) = (1,0,1,0,1,0)$

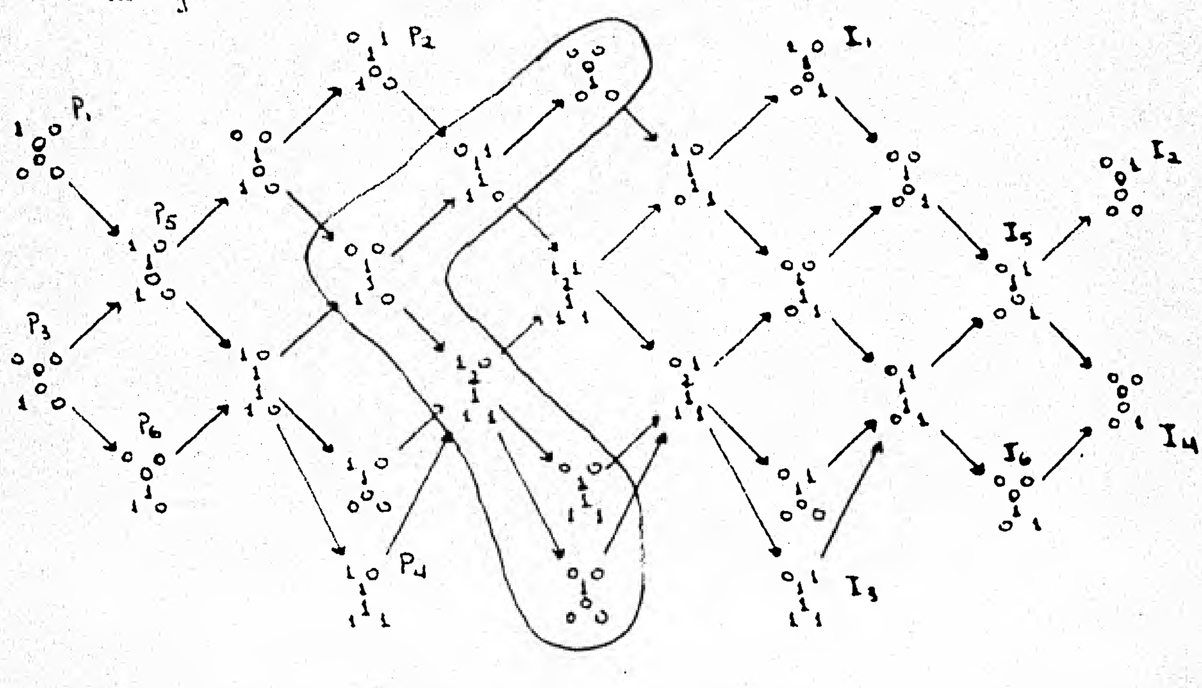
$\underline{\dim}\, F(T_6) = (0,0,1,0,0,1)$

Por lo tanto B es la k-álgebra asociada al carcaj,



Con todas las relaciones de conmutatividad y la relación $\beta\alpha = 0$.

El carcaj de Auslander Reiten de B es:

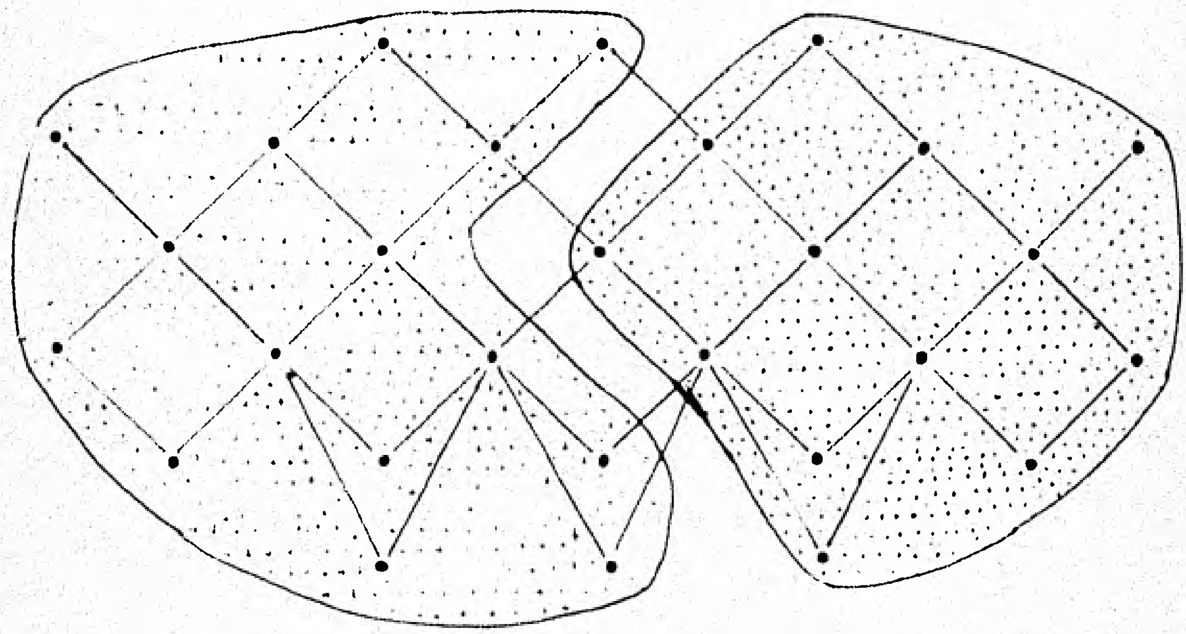


Como $I_1, \dots, I_6 \in \mathcal{T}$, podemos calcular $\underline{\dim}\, F(I_a)$ por el mismo procedimiento que calculamos $\underline{\dim}\, F(T_i)$, así tenemos.

$\underline{\dim}\, F(I_1) = (0,0,0,0,0,1)$
$\underline{\dim}\, F(I_2) = (0,1,1,0,1,1)$
$\underline{\dim}\, F(I_3) = (0,0,1,0,1,1)$
$\underline{\dim}\, F(I_4) = (1,0,1,1,2,1)$
$\underline{\dim}\, F(I_5) = (0,0,1,1,1,1)$
$\underline{\dim}\, F(I_6) = (0,0,0,0,1,0)$

Por (18.4) $\{F(I_a) \mid a \in \bar{6}\}$ es una rebanada completa en Γ_B y está dibujada en el diagrama anterior

La teoría de torsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ está indicada en el siguiente diagrama



$\mathcal{X}$ ⊙ $\qquad\qquad$ $\mathcal{Y}$ ⊙

$\mathcal{Y}$ tiene el mismo número de inescindibles que $\mathcal{T}$, o sea 15, y $\mathcal{X}$ tiene el mismo número de inescindibles que $\mathcal{F}$, o sea 13. Cosa que ya sabíamos de (4.4) pues $F| : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$, $F'| : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ son equivalencias de categorías

Obsérvese que las sucesiones que casi se dividen que están en $\mathcal{T}$ van a dar a sucesiones que casi se dividen que están en $\mathcal{Y}$, ver (16.4). También las sucesiones que casi se dividen que están en $\mathcal{F}$ van a dar a sucesiones que casi se dividen que están en $\mathcal{X}$, lo que sugiere un resultado análogo a (16.4) para $\mathcal{X}$ y $\mathcal{F}$.

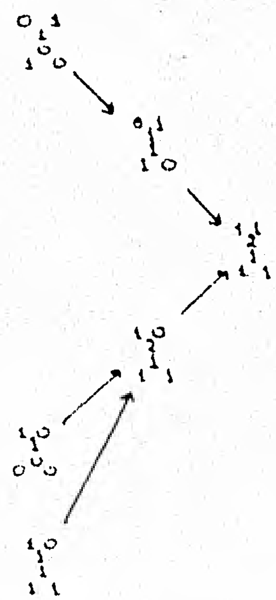
Además conocida $\mathcal{Y}$, podemos determinar todas las sucesiones que casi se dividen relativas en $\mathcal{T}$.

Como el carcaj asociado a B tiene relaciones, entonces B no es hereditaria. Como B es inclinada por (12.2) d.g. B ≤ 2. Entonces d.g. B $= 2$

Ahora, si sólo conociéramos a B, examinando Γ_B podemos usar los resultados expuestos para ver que B es inclinada.

Por ejemplo, podemos usar (19.1) ya que Γ_B es una componente que contiene a todos los proyectivos inescindibles y a una rebanada completa.

También podemos usar (20.8) ya que B es de tipo de representación finito, Γ_B no tiene ciclos dirigidos y hay un módulo inescindible sincero $N = \begin{smallmatrix}1&2&1\\&1&\\1&&1\end{smallmatrix}$ (por (21.3) los módulos inescindibles están determinados por sus factores de composición). En este caso la rebanada completa construida en (20.6) es



y el módulo rebanada es un módulo de inclinación.

Finalmente por (21.4) N es fiel

BIBLIOGRAFIA.

[1] Anderson, F.W. y Fuller, K.R.: Rings and categories of modules, GTM 13, Springer-Verlag, 1974.

[2] Auslander, M., Platzeck, M.I. y Reiten, I.: Coxeter functors without diagrams, Trans. Amer. Math. Soc. 250, (1979), 1-46.

[3] Auslander, M. y Reiten, I.: Representation theory of artin algebras III, Comm. Algebra 3, (1975), 239-294.

[4] Auslander, M. y Smalø, S.O.: Almost split sequences in subcategories, Mathematics No. 4/80, Trondheim. (Preimpresión)

[5] Auslander, M. y Smalø, S.O.: Categorical methods in representation theory of artin rings, Notas 8/75, Dpto. Mat., Universidad de Trondheim, Noruega.

[6] Bautista, R.: Irreducible morphisms and the radical of a category, Comunicación interna 3, Dpto. Mat., Fac. Ciencias, U.N.A.M.

[7] Bautista, R.: Sections in Auslander-Reiten quivers, Lecture Notes in Math. 832, Representation Theory II.

[8] Bautista, R. y Martinez, R.: Representations of partially ordered sets and 1-Gorenstein Artin Algebras. Proceedings of the 1978 Antwerp Conference, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.

[9] Bautista, R., Larrión, F. y Salmerón, L.: On simply connected algebras, (preimpresión)

[10] Bernstein, I.N., Gel'fand, I.M. y Ponomarev, V.A.: Coxeter functors and Gabriel's theorem, Upsekhi Mat. Nauk. 28, (1973), 19-33.

[11] Bongartz, K.: Tilted algebras, ICRA III, Puebla, 1980.

[12] Brenner, S. y Butler, M.C.R.: Generalizations of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev reflection functors, ICRA II, Ottawa, 1979.

[13] Cibils, C., Larrión, F. y Salmerón, L.: Métodos diagramáticos en teoría de representaciones, monografía, Instituto de Matemáticas, UNAM.

[14] Drozd, Y.A.: Coxeter transformations and representations of partially ordered sets, Funct. Analyz 8, No. 3, 1974.

[15] Gabriel, P.: Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Math. 6, (1972), 71-103.

[16] Happel, D. y Ringel, C.M.: Tilted algebras, ICRA III, Puebla, 1980.

[17] Ringel, C.M.: Introduction to the representation theory of finite dimensional algebras, pre-impresión.

[18] Ringel, C.M.: The rational invariants of the tame quiver, Inv. Math. 58 (1980), 217-239.

[19] Rotman, J.J.: Notes on homological algebras, Van Nostrand Reinhold, 1970.

[20] Stenström, B.: Rings and modules of quotients, Lecture Notes in Math., 237, Springer-Verlag, 1971.