UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

BASES DE EPI-REFLEXIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FEDERICO FRANCISCO URQUIJO IBARROLA

BECARIO DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS

CD. UNIVERSITARIA, D.F. 1982.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Introducción

Los conocimientos mínimos necesarios para poder seguir este trabajo son, además de los conocimientos básicos de Topología de Conjuntos y de Teoría de Categorías, las caracterizaciones de los objetos de una subcategoría epi-reflexiva (bi-reflexiva) de Top mediante el concepto de fuente. Los resultados que considero no son manejados instantaneamente y que utilizo en las demostraciones los enlisto en "prerequisitos". En esta sección aparece también la definición de A-cerradura junto con una buena cantidad de sus propiedades y algunos resultados que en base a ella se derivan, ya que, si bien se ha tratado en algunos artículos, no creo que sea lo suficientemente conocida para ser manejada por algunos posibles lectores.

El trabajo está basado en el artículo de E. Giuli, "Bases of Topological epi-reflections". Consta de dos partes, en la parte 1 se define subcategoría débilmente inicial como aquella que es "generada" por una colección de espacios topológicos a la que se llama sistema de cogeneradores de la subcategoría, se demuestra que este concepto es equivalente a ser epi-reflexiva en Top. Después se dan concretos sistema de cogeneradores para las subcategorías T_0, T_1, Tych. Considerando que una propiedad topológica define una subcategoría plena y repleta de Top e inversamente, se trata el problema de determinar si hay propiedades topológicas cerradas bajo la formación de productos y hereditarias entre algunas dos propiedades importantes.

En la parte 2, mediante el concepto de sistema de cogeneradores, se construyen subcategorías de una subcategoría epi-reflexiva de Top, que bajo ciertas hipótesis resultan ser epi-reflectivas en la subcategoría dada. Como ejemplos se dá la subcategoría de Tych cuyos objetos son los espacios compactos y Hausdorff, y la correspondiente reflexión es la compactación de Stone-Čech.

Convenciones

— Las Subcategorías de Top que se consideran en este trabajo son plenas y repletas.

— Se denota por:

$|X|$ o Card (X) al número cardinal de X.

I_2 al espacio indiscreto con dos puntos.

D_2 al espacio discreto con dos puntos.

S al espacio de Sierpinski, $\{S_1\}$ al abierto singular; $\{S_2\}$ al cerrado singular.

I al intervalo $[0,1]$ con la topología usual.

C_λ al espacio de cardinalidad λ con la topología cofinita.

— Si $\underline{A}$ es una subcategoría de Top,

$R(\underline{A})$ es la cerradura epi-reflexiva de $\underline{A}$.

$I(\underline{A})$ es la cerradura bi-reflexiva de $\underline{A}$.

$\underline{A}(\lambda)$ es la clase de los $\underline{A}$-objetos de cardinalidad menor o igual a λ.

— Finalmente, se cometen bastantes abusos de escritura por las razones de siempre.

Prerequisitos

1. Si X es un conjunto infinito y $X \xrightarrow{f} Y$ es una función tal que $f^{-1}(y)$ es finito $\forall\, y \in Y$, entonces $|X| = |f(X)|$.

2. Si $X \in T_1$ y $|X| \leq \lambda$, con λ infinito, entonces dado U abierto de X, existe $f_U : X \longrightarrow C_\lambda$ continua tal que $U = f_U^{-1}(V)$ para algún V abierto de C_λ.

3. Si $X \xrightarrow{f} Y$ es un monomorfismo con X un espacio cofinito y $Y \in T_1$, entonces f es inmersión.

4. Si λ es infinito y $X \in T_1$ + $\lambda \geq |X|$ entonces toda función continua $C_\lambda \xrightarrow{f} X$ es constante.

5. Si λ es infinito, toda función continua de C_λ en un espacio T_2 es constante.

6. Resultado encontrado por Herrlich [2]

Dado $X \in T_1$ existe $Y \in T_3$ tal que $|Y| > 1$ y si $Y \xrightarrow{f} X$ es continua entonces f es constante.

7. Un espacio T_2 es conectable por trayectorias si y sólo si es arco-conectable.

8. Si S es un subespacio de X entonces S es un retracto de X.

9. Si Y es un subespacio de X y $Y \xrightarrow{g} S$ es continua, entonces existe una función continua $X \xrightarrow{f} S$ tal que $f|_Y = g$.

10. En cualquier categoría que tenga productos, el producto de una familia de monomorfismos regulares es un monomorfismo regular.

11. Si $\underline{A}$ tiene productos y $\underline{B}$ es una subcategoría

epirreflexiva de $\underline{A}$, entonces:

a) $\underline{B}$ está cerrada bajo la formación de productos.

b) $\underline{B}$ está cerrada bajo la formación de $\underline{A}$-subobjetos extremados.

12. Sea X un espacio topológico arbitrario:

a) la T_0-reflexión de X es $X \xrightarrow{r_0} X/\sim_0$ donde, $\sim_0$ es la relación en X dada por $x \sim_0 x'$ sii $\overline{\{x\}} = \overline{\{x'\}}$, y r_0 es la proyección canónica.

b) todo abierto de X es $\sim_0$-saturado.

c) las clases de $\sim_0$-equivalencia son los subespacios indiscretos máximos de X.

d) $X \xrightarrow{r_0} X/\sim_0$ es una fuente inicial.

e) $X/\sim_0$ está inmerso en X

13. Para cualquier espacio topológico X,

$$I(X) \cap T_0 = R(X) \cap T_0 = R(r_0 X)$$

14. Si $\underline{A}$ es epi-reflectiva y está contenida en T_0, entonces $I(\underline{A}) = \{ X \in Top \mid r_0 X \in \underline{A} \}$.

Definiciones

a) Sea $\underline{A}$ una subcategoría de Top, si $X \in Top$ y $B \subset X$, la $\underline{A}$-cerradura de B en X, es $[B]^X_{\underline{A}} = \{ x \in X \mid f, g : X \longrightarrow A \in \underline{A}$ continuas y $f|B = g|B$ implica $f(x) = g(x) \}$

b) B es $\underline{A}$-denso en X si $[B]^X_{\underline{A}} = X$

c) B es $\underline{A}$-cerrado en X si $[B]^X_{\underline{A}} = B$

15. a) $B \subset [B]^X_{\underline{A}}$

b) $B \subset B' \subset X \implies [B]^X_{\underline{A}} \subset [B']^X_{\underline{A}}$

c) $f : X \longrightarrow Y$ continua $\implies f[B]^X_{\underline{A}} \subset [f(B)]^Y_{\underline{A}}$

d) si $\underline{A} \subset \underline{A}'$ entonces $[B]^{X}_{\underline{A}'} \subset [B]^{X}_{\underline{A}}$

e) $[B]^{X}_{\underline{A}}$ es $\underline{A}$-cerrado en X, i.e. $\left[[B]^{X}_{\underline{A}}\right]^{X}_{\underline{A}} = [B]^{X}_{\underline{A}}$

f) Si $B \subset X \subset Y$, entonces

$$[B]^{X}_{\underline{A}} \subset [B]^{Y}_{\underline{A}}$$

g) $$\left[[B]^{[B]^{X}_{\underline{A}}}_{\underline{A}}\right]^{X}_{\underline{A}} = [B]^{X}_{\underline{A}}$$

h) Si B es un retracto de $X \in \underline{A}$, entonces

$$[B]^{X}_{\underline{A}} = B.$$

16. a) Si $\underline{A}$ contiene a un espacio indiscrito de cardinalidad mayor que 1, entonces, todo subconjunto de cualquier espacio X, es $\underline{A}$ cerrado en X.

b) todo subconjunto de cualquier espacio $X \in T_1$ es T_1-cerrado en X.

c) para todo subconjunto B de $X \in T_2$,

$$[B]^{X}_{T_2} = \overline{B}.$$

d) para todo subconjunto B de $X \in Tych$,

$$[B]^{X}_{Tych} = \overline{B}$$

17. Sea $\underline{A}$ una subcategoría de Top, si $X \xrightarrow{f} Y$ es un $\underline{A}$-morfismo, entonces son equivalentes:

a) f es un $\underline{A}$-epimorfismo

b) $f(X)$ es $\underline{A}$-denso en X.

__Definición__ Sean $X, Y \in Top$, entonces

$k^X_Y : X \longrightarrow Y^{Top(X,Y)}$ es tal que si $f \in Top(X,Y)$,

$p_f \cdot k^X_Y = f$.

De su definición se sigue que k^X_Y es una función continua.

18. Sean $X, Y, Z \in Top$ y $X \xrightarrow{f} Z$, $Z \xrightarrow{g} Y^J$, funciones continuas, entonces existe una función continua $f^g : Y^{Top(X,Y)} \longrightarrow Y^J$ que hace conmutativo el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k_Y^X"] \arrow[d, "f"'] & Y^{Top(X,Y)} \arrow[d, "f^g"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y^J
\end{tikzcd}$$

19. Sea $\underline{A}$ una subcategoría epi-reflectiva de Top, entonces:

a) todo $\underline{A}$-monomorfismo extremado de Top es una inmersión.

b) $\forall\, X \in \underline{A}$ y $B \subset X$, se tiene que

$$i : [B]^X_{\underline{A}} \hookrightarrow X$$ es un $\underline{A}$-monomorfismo regular.

c) Si $\underline{X} \xrightarrow{f} Y$ es un $\underline{A}$-morfismo, son equivalentes:

c.1) f es un $\underline{A}$-monomorfismo regular.

c.2) f es una inmersión y $f(\underline{X})$ es $\underline{A}$-cerrado en Y.

1. Cogeneradores de subcategorías epi-reflexivas de Top.

1.1 Definiciones.

a) Una subcategoría $\underline{A}$ no contenida en T_o se llama débilmente inicial si para cada número cardinal $\lambda > 1$, existe $Y_\lambda \in Top$ / $\underline{A}(\lambda) = I(Y_\lambda)(\lambda)$.

b) Una subcategoría $\underline{A}$ contenida en T_o se llama débilmente inicial si para cada número cardinal $\lambda > 1$, existe $Y_\lambda \in Top$ / $\underline{A}(\lambda) = (I(Y_\lambda) \cap T_o)(\lambda)$.

c) Una clase de espacios topológicos (Y_λ) que para una subcategoría $\underline{A}$ satisface las propiedades mencionadas en (a) o en (b) se llama sistema de cogeneradores de $\underline{A}$; a Y_λ se le llama cogenerador de $\underline{A}$.

d) Una subcategoría débilmente inicial se llama simplemente cogenerada si existe un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$ que consta de un sólo elemento; en tal caso, a dicho espacio se le llama Cogenerador Simple de $\underline{A}$.

1.2 Ejemplo. Para una subcategoría epi-reflectiva $\underline{A}$ de Top, la clase (Y_λ) es un Sistema de Cogeneradores, donde Y_λ es el producto topológico de los objetos de $\underline{A}(\lambda)$ cuyos conjuntos subyacentes son los subconjuntos no vacíos de un conjunto fijo de cardinalidad λ.

1er caso, $A \not\subset T_0$

Como $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de productos $Y_\lambda \in \underline{A}$, ahora como $\underline{A} \not\subset T_0$, $\underline{A}$ es bi-reflectiva $\therefore I(Y_\lambda) \subset \underline{A}$; en especial $I(Y_\lambda)(\lambda) \subset \underline{A}(\lambda)$.

Por otro lado se tiene que todo $X \in \underline{A}(\lambda)$ es isomorfo a un factor de Y_λ, $\therefore$ existe una inmersión de X en Y_λ, $\therefore$ $X \in R(Y_\lambda) \subset I(Y_\lambda)$, $\therefore$ $\underline{A}(\lambda) \subset I(Y_\lambda)$, $\therefore$ $\underline{A}(\lambda) \subset I(Y_\lambda)(\lambda)$.

Por lo tanto (Y_λ) es un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$.

<u>2º Caso</u>, $\underline{A} \subset T_0$

Como $Y_\lambda \in \underline{A}$, $R(Y_\lambda) \subset \underline{A}$, $\therefore R(Y_\lambda) \cap T_0 \subset \underline{A}$, por 13, $I(Y_\lambda) \cap T_0 \subset \underline{A}$; en especial se tiene que $(I(Y_\lambda) \cap T_0)(\Lambda) \subset \underline{A}(\Lambda)$.

Por otro lado se tiene que todo $X \in \underline{A}(\Lambda)$ es isomorfo a un factor de Y_λ, $\therefore$ existe una inmersión de X en Y_λ, $\therefore X \in R(Y_\lambda) \subset I(Y_\lambda)$ $\therefore A(\Lambda) \subset I(Y_\lambda)$, como $\underline{A} \subset T_0$, $\underline{A}(\Lambda) \subset I(Y_\lambda) \cap T_0$, $\therefore \underline{A}(\Lambda) \subset (I(Y_\lambda) \cap T_0)(\Lambda)$

Por lo tanto (Y_λ) es un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$.

<u>1.3 Teorema</u>. Una subcategoría $\underline{A}$ de Top es epi-reflectiva si y sólo si $\underline{A}$ es débilmente inicial.

Dem.: $\Rightarrow$) Se sigue de 1.2

$\Leftarrow$) Sea (Y_λ) un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$. Supóngase que $(f_i : X \to A_i)_I$ es una mono-fuente inicial con codominio en $\underline{A}$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que I es un conjunto, considérese un número cardinal $\lambda > 1$ y $\lambda \geq |X|, |A_i|$ $\forall i \in I$ $\therefore$

$$A_i \in A(\lambda) = \begin{cases} I(Y_\lambda)(\lambda) & \text{si } A \not\subset T_0 \\ (I(Y_\lambda) \cap T_0)(\lambda) & \text{si } A \subset T_0 \end{cases}$$

$\therefore$ $X \in I(Y_\lambda)(\lambda)$ en el primer caso y $X \in (I(Y_\lambda) \cap T_0)(\lambda)$ en el segundo caso, $\therefore$ $X \in \underline{A}$, $\therefore$ $\underline{A}$ es epi-reflexiva.

1.4 Definición. Una clase de espacios topológicos (Y_λ) se llama sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$ si para cada número cardinal $\lambda > 1$, $A(\lambda) = R(Y_\lambda)(\lambda)$

a cualquier Y_λ se le llama un cogenerador regular de $\underline{A}$.

1.5 Ejemplo El sistema que se describió en 1.2 es regular.

Si (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$ (sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$) y $(Y_\lambda) \subset \underline{B}$, se dirá que Y_λ es un sistema de $\underline{B}$-cogeneradores de $\underline{A}$. (Sistema regular de $\underline{B}$-cogeneradores de $\underline{A}$).

1.6 Proposición. Sea $\underline{A}$ una subcategoría contenida en T_0, entonces:

a) (Y_λ) es un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$ si y sólo si $(r_0 Y_\lambda)$ es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$.

b) (Y_λ) es un sistema de T_0-cogeneradores de $\underline{A}$ si y sólo si (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$.

Dem.: a) es consecuencia de 1.3.

b) Si (Y_λ) es un sistema de T_0-cogeneradores por (a) y la afirmación " $X \in T_0$ sii $X = r_0 X$ " se sigue que (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de T_0; si (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores y si para algún λ, $Y_\lambda \notin T_0$ entonces, $I_2 \in R(Y_\lambda)$ $\therefore$ $\underline{A} \not\subset T_0$ lo que es falso. Entonces $\forall\, \lambda > 1$, $Y_\lambda \in T_0$ $\therefore$ $Y_\lambda = r_0 Y_\lambda$, por (a) (Y_λ) es un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$.

<u>1.7 Proposición</u>. Sea $\underline{A}$ una subcategoría contenida en T_1, entonces:

a) (Y_λ) es un sistema de T_1-cogeneradores de $\underline{A}$ si y sólo si (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$.

b) Si (Y_λ) es un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$ entonces $r_0 Y_\lambda \in T_1$

<u>Dem.</u>: a) Si (Y_λ) es un Sistema de T_1-Cogeneradores de $\underline{A}$, se tiene por 1.6 b que (Y_λ) es un Sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$; si (Y_λ) es un Sistema regular de Cogeneradores de $\underline{A}$, se tiene que los subespacios con dos puntos de Y_λ son T_1, ∴ $Y_\lambda \in T_1$, y por 1.6 b), (Y_λ) es un sistema de cogeneradores de T_1, ∴ (Y_λ) es un Sistema de T_1-Cogeneradores de T_1.

b) Consecuencia de 1.6 a y 1.7 a.

<u>1.8 Definiciones</u>.

a) Un Sistema de Cogeneradores (Y_λ) de una Subcategoría $\underline{A}$ no simplemente cogenerada, se llama <u>base de $\underline{A}$</u>, si para cualquier Sistema de Cogeneradores (Y'_λ) de $\underline{A}$, Y_λ está inmerso en Y'_λ.

b) Un Cogenerador Simple Y de una Subcategoría $\underline{A}$, se llama <u>base de $\underline{A}$</u>, si para cualquier Cogenerador simple Y' de $\underline{A}$, Y está inmerso en Y'.

<u>1.9 Observación</u>. Toda base de una subcategoría $\underline{A}$ contenida en T_0 es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$.

En efecto, supóngase que (Y_λ) es una base de $\underline{A}$, entonces $(Y_0 Y_\lambda)$ es un sistema de cogeneradores de $\underline{A}$, $\therefore$ Y_λ está inmerso en $Y_0 Y_\lambda$, $\therefore$ $Y_\lambda \in T_0$, por 1.6 b, (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$.

<u>1.10 Teorema</u>.

a) S es una base de T_0.

b) Un espacio topológico X es un cogenerador simple de T_0 si y sólo si S está inmerso en X.

c) (Y_λ) es un sistema de T_0-cogeneradores de T_0 sii (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de T_0.

d) $I(T_0) = Top$.

Dem.: a) Sea $X \in Top$, supóngase que $(U_i)_I$ es la familia de abiertos de X, considérese para cada $i \in I$ la función $f_i : X \to S$ tal que

$$f_i(x) = \begin{cases} s_1 & \text{si } x \in U_i \\ s_2 & \text{si } x \notin U_i \end{cases}$$

es claro que la fuente $(f_i)_I$ es una fuente inicial, $\therefore X \in I(S)$, $\therefore Top = I(S)$

$\therefore T_0 = I(S) \cap T_0$, $\therefore S$ es un cogenerador simple de T_0.

Ahora supóngase que X es un cogenerador simple de T_0, como $S \in T_0 = I(X) \cap T_0 \overset{13}{=} R(r_0 X)$, existe una monofuente inicial $(f_i : S \to r_0 X)_I$

$\therefore \exists\, i \in I$, $|f_i(S)| = 2$, como $f_i(S)$ no es discreto (ya que S no lo es), ni indiscreto

(ya que $f_i(S) \subset r_0 X \subset T_0$), $f_i(S)$ es Sierpinski, $\therefore$ f_i es una inmersión, por 12e) se concluye que S está inmerso en X. Por lo anterior, S es una base de T_0.

b) Si X es un cogenerador simple de T_0, por (a), S está inmerso en X; si S está inmerso en X, $S \in I(X)$, $\therefore I(S) \subset I(X)$ en (a) se demostró que $I(S) = Top$, $\therefore$ $I(X) = Top$, $\therefore I(X) \cap T_0 = T_0$, $\therefore X$ es un cogenerador simple de T_0.

c) es un caso particular de 1.6 b)

d) por 14.

1.11 Teorema

a) T_1 no está simplemente cogenerada.

b) (Y_λ) es una base de T_1, donde para λ finito $Y_\lambda =)_2$

y para cada λ infinito, $Y_\lambda = C_\lambda$.

c) (Y'_λ) es un sistema de cogeneradores de T_1 sii Y_λ está inmerso en Y'_λ y $r_0 Y'_\lambda \in T_1$.

d) (Y'_λ) es un sistema de T_1-cogeneradores de T_1 sii (Y'_λ) es un sistema regular de cogeneradores de T_1.

e) $I(T_1)$ consiste de los espacios cuyos subespacios con dos puntos son discretos o indiscretos.

Dem.: a) Supóngase que X es un cogenerador simple de T_1. Considérese un número cardinal λ, infinito y mayor que la cardinalidad de X, entonces $C_\lambda \in T_1 = I(X) \cap T_0 \overset{13}{=} R(r_0 X)$, $\therefore$ existe una monofuente inicial $(f_i : C_\lambda \longrightarrow r_0 X)_I$ $\therefore \exists\, i \in I \ni f_i$ no es constante, además por 1.7 b) $r_0 X \in T_1$, $\therefore \forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un subconjunto finito por 1, $\lambda = |f_i(C_\lambda)|$, $\therefore \Lambda \leq |\gamma_0(X)|$ y como γ_0 es suprayectiva, $\Lambda \leq |X|$, lo que es una contradicción. Se concluye que T_1 no está simplemente cogenerada.

b) Como $D_2 \in T_1$, $R(D_2) \subset T_1$.
Ahora, como la familia de las funciones de un espacio discreto X en D_2 es una monofuente inicial, $X \in R(D_2)$, $\therefore$ para Λ finito $T_1(\Lambda) \subset R(D_2)$.
Por lo tanto para Λ finito, $T_1(\Lambda) = R(D_2)(\Lambda)$.
Ahora sea $X \in T_1(\Lambda)$, con Λ infinito, por 2, existe una fuente inicial $(f_i : X \longrightarrow C_\lambda)_I$, como el dominio de esta fuente inicial es T_0, es una monofuente, $\therefore X \in R(C_\lambda)$, $\therefore T_1(\Lambda) \subset R(C_\lambda)$.
Por otro lado, $C_\lambda \in T_1$, $\therefore R(C_\lambda) \subset T_1$
Se concluye entonces, que para Λ infinito,

$$T_1(\Lambda) = R(C_\lambda)(\Lambda).$$

Por lo anterior (Y_λ) es un Sistema regular de cogeneradores de T_1, por 1.6 b), (Y_λ) es un Sistema de Cogeneradores de T_1.

Ahora, supóngase que (Y'_λ) es un Sistema de Cogeneradores de T_1.

De $D_2 \in T_1(\Lambda) = I(Y'_\lambda) \cap T_0 \overset{13}{=} R(r_0 Y'_\lambda)(\Lambda)$, se sigue que existe una fuente inicial $(f_i : D_2 \to r_0 Y'_\lambda)_I$, $\therefore \exists\, i \in I \mid |f_i(D_2)| = 2$, como por 1.7 b), $r_0 Y'_\lambda \in T_1$, $f_i(D_2) \cong D_2$, $\therefore$ f_i es inmersión, por 12e), D_2 está inmerso en Y'_λ.

Supóngase ahora que Λ es infinito, de $C_\Lambda = T_1(\Lambda) = (I(Y'_\lambda) \cap T_0)(\Lambda) \overset{13}{=} R(r_0 Y'_\lambda)(\Lambda)$ se sigue que existe una monofuente inicial, $(f_i : C_\Lambda \to r_0 Y'_\lambda)_I$ $\therefore \exists\, i \in I \mid f_i$ no es constante, y por 1.7 b) $r_0 Y_\lambda \in T_1$, $\therefore$ $f_i^{-1}(y)$ es finito $\forall\, y \in Y$, entonces por 1 el subespacio Z de C_λ, cuyo conjunto subyacente es un conjunto que resulta de elegir un punto de $f_i^{-1}(y)$ para cada $y \in f_i(C_\lambda)$ es isomorfo a C_λ. Como por 3, $Z \xrightarrow{f_i} r_0 Y'_\lambda$ es una inmersión, se concluye que C_λ está inmerso en $r_0 Y'_\lambda$, por 1.2 l) se sigue que C_λ está inmerso en Y'_λ.

Por lo anterior se concluye que (Y_λ) es una base de T_1.

c) Si (Y'_λ) es un sistema de cogeneradores de T_1, por (b) Y_λ está inmerso en Y'_λ, y por 1.7 b) $r_0 Y'_\lambda \in T_1$; supóngase que (Y'_λ) es tal que Y_λ está inmerso en Y'_λ y que $r_0 Y'_\lambda \in T_1$. Se tiene por la primera hipótesis y 1.2 l) que Y_λ está inmerso en $r_0 Y'_\lambda$, $\therefore$ $Y_\lambda \in R(r_0 Y'_\lambda)$, $\therefore$ $R(Y_\lambda) \subset R(r_0 Y'_\lambda)$, en la demostración de (b) se vió que $R(\mathcal{Y}_\lambda)(\lambda) = T_1(\lambda)$, $\therefore T_1(\lambda) \subset R(r_0 \mathcal{Y}'_\lambda)(\lambda)$.

Por la segunda hipótesis $R(r_0 \mathcal{Y}'_\lambda) \subset T_1$, en especial se tiene, $R(r_0 \mathcal{Y}'_\lambda)(\lambda) \subset T_1(\lambda)$,

$\therefore R(r_0 \mathcal{Y}'_\lambda)(\lambda) = T_1(\lambda)$. Por 13, $\mathcal{Y}'_\lambda$ es un sistema de cogeneradores de T_1.

d) caso particular de 1.7 b).

e) Sean $X \in I(T_1)$ y $x, y \in X$ diferentes. Supóngase que $\{x, y\}$ no es indiscreto, como las $\sim_0$- clases de equivalencia - ver 12 - son indiscretas, se tiene que $x \not\sim_0 y$, es decir $r_0(x) \neq r_0(y)$, entonces por ser $r_0 X \in T_1$, el subespacio $\{r_0(x), r_0(y)\}$ de $r_0 X$ es discreto, $\therefore \{x, y\}$ es discreto. Por lo tanto, todo subespacio con dos puntos de X, o es indiscreto o es discreto.

Ahora sea X tal que todo subespacio con dos puntos o es discreto o es indiscreto. Considérense $\alpha, \beta \in r_0 X$ diferentes, sean $x, y \in X$ y $x \in r_0^{-1}\alpha$, $y \in r_0^{-1}\beta$, $\therefore$ $x \not\sim_0 y$, $\therefore$ el subespacio $\{x, y\}$ no es indiscreto, entonces por hipótesis, $\{x, y\}$ es discreto, $\therefore$ $\exists\, U \in N^{\circ}_x$, $V \in N^{\circ}_y$ y $x \notin V$, $y \notin U$. Ahora todo abierto de X es r_0-saturado -ver 12-, $\therefore$

$r_0(U) \in N^{\circ}_{\alpha}$, $r_0(V) \in N^{\circ}_{\beta}$ y $\alpha \notin r_0(V)$, $\beta \notin r_0(U)$, $\therefore$ $r_0(X) \in T_1$, $\therefore$ $X \in I(T_1)$.

<u>1.12 Proposición</u> No existen propiedades topológicas que sean cerradas bajo la formación de productos topológicos y hereditarias entre T_0 y T_1.

<u>Dem.</u>: Lo que afirma esta proposición es que no existe una subcategoría epi-reflexiva entre T_0 y T_1.

Se conoce una demostración elemental de este hecho, Sin embargo el autor del artículo que sirvió de base a este trabajo lo hace usando algunas de los resultados anteriores.

Sea $\underline{A}$ epi-reflexiva y $T_1 \subset \underline{A} \subset T_0$. Considérese un Sistema regular de cogeneradores (Y_λ) de $\underline{A}$ (por ejemplo el dado en 1.5). Pueden Suceder dos casos: $Y_\lambda \in T_1 \ \forall \lambda > 1$ o $\exists \lambda_0 > 1$ y $Y_{\lambda_0} \notin T_1$.

<u>1er caso</u>, Se tiene, $R(Y_\lambda) \subset T_1$, $\therefore \underline{A}(\lambda) \subset T_1$, como lo anterior es para cualquier número cardinal, Se tiene que $\underline{A} \subset T_1$, $\therefore \underline{A} = T_1$.

<u>2° caso</u>, por 1.6 b), $Y_{\lambda_0} \in T_0$, entonces $Y_{\lambda_0} \in T_0 - T_1$ $\therefore S \subset Y_{\lambda_0}$, $\therefore S \in R(Y_{\lambda_0})$, $\therefore S \in R(Y_{\lambda_0})(\lambda_0) = \underline{A}(\lambda_0)$, $\therefore R(S) \subset \underline{A}$. Pero $R(S) \overset{13}{=} I(S) \cap T_0 = T_0$, $\therefore \underline{A} = T_0$.

<u>1.13 Corolario</u> Las siguientes propiedades topológicas no están

Cerradas bajo la formación de productos:

$\mathcal{J}_0$: $X \in \mathcal{J}_0$ sii dados $x \in X$ y K subespacio compacto de X tales que $x \notin K$, existe un abierto que contiene a x y no a K o contiene a K y no a x.

T_F : $X \in T_F$ sii dados $x \in X$ y F subespacio finito de X tales que $x \notin F$, existe un abierto que contiene a x y no a F o contiene a F y no a x.

T_D : $X \in T_D$ sii todo punto de X es la intersección de un abierto y un cerrado.

C : $X \in C$ sii todo punto de X es abierto o es cerrado.

<u>Dem.</u>: Se tienen las dos siguientes afirmaciones:

i) $\mathcal{J}_0, T_F, T_D, C$, son hereditarias

ii) $T_1 \subsetneq \mathcal{J}_0, T_F, T_D, C \subsetneq T_0$

Ahora bien, si cualquiera de las subcategorías $\mathcal{J}_0, T_F, T_D, C$, fuera cerrada bajo la formación de productos, por i) dicha subcategoría satisfacería una condición suficiente para ser epi-reflexiva, pero ésto es imposible por (ii) y 1.12. Por lo que se concluye que J_0, T_F, T_D, C no están cerradas bajo la formación de productos.

Demostraré sólo (ii) ya que (i) es inmediata.

Sean, $X \in T_1$, K subespacio compacto de X y $x \in X$ y $x \notin K$. Se tiene que $\{x\}$ es cerrado $\therefore$ $X - \{x\}$ es un abierto que contiene a K y no a x, $\therefore$ $X \in J_0$, $\therefore T_1 \subset J_0$.

Ahora, $S \in J_0$ y $S \notin T_1$, $\therefore T_1 \subsetneq J_0$.

Es claro que $T_F \subset T_0$. Considérese el espacio topológico con conjunto subyacente $\{a, b, c\}$ y con topología $\{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a\}, \phi\}$, este espacio es T_0 pero no T_F, $\therefore T_F \subsetneq T_0$.

Como $J_0 \subset T_F$, se concluye que $T_1 \subsetneq J_0, T_F \subsetneq T_0$.

Claramente $T_1 \subset C$ y como $S \in C$ pero $S \notin T_1$, se tiene $T_1 \subsetneq C$.

Sean $X \in T_D$ y $x, x' \in X$ diferentes, $\therefore$ existen $U_x, U_{x'}$ abiertos y $F_x, F_{x'}$ cerrados tales que $\{x\} = U_x \cap F_x$, $\{x'\} = U_{x'} \cap F_{x'}$. Si $x' \in U_x$, entonces $x' \notin F_x$ $\therefore$ $x' \in X - F_x$, $\therefore$ existe un abierto que contiene sólo a uno de los puntos x, x', $\therefore$ $X \in T_0$, $\therefore$ $T_D \subset T_0$.

Ahora considérese el espacio topológico (X, τ_{x_0}) donde X es un conjunto infinito, $x_0 \in X$ y

$\tau_{x_0} = \{U \subset X \mid x_0 \in U$ y $X - U$ es finito, o $U = \phi\}$

Sean $x, x' \in X$ diferentes, si $x \neq x_0$, entonces $x \notin X - \{x\} \in \mathcal{N}^{\circ}_{x'}$, si $x = x_0$, entonces $x' \notin X - \{x'\} \in \mathcal{N}^{\circ}_{x}$ $\therefore$ existe un abierto que contiene sólo a uno de los puntos x, x', $\therefore$ $(X, \tau_{x_0}) \in T_0$. Ahora, como x_0 no es la intersec ción de un abierto con un cerrado, - el único cerrado que contiene a x_0 es X y $\{x_0\}$ no es abierto - $(X, ?_{x_0}) \notin T_D$, $\therefore T_D \subsetneq T_0$.

Es claro que $C \subset T_D$, $\therefore T_1 \subsetneq C$, $T_D \subsetneq T_0$.

<u>1.14 Proposición</u>. La propiedad D (cualquier abierto no vacío es denso) no es hereditaria.

<u>Dem.</u>: Demostraré que D está cerrada bajo la formación de productos; si D fuera hereditaria, D sería epi-reflexiva, como $S \in D$ y $T_0 = R(S)$, se tendría $T_0 \subset D$, pero ésto es imposible pues $D_2 \notin D$.

Sea $(X_i)_I$ un conjunto de espacios D, sea U un abierto no vacío de $\prod_I X_i$, considérese $x \in U$, entonces existe un elemento de la base canónica $U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_1, \ldots, i_n} X_i$, que contiene a x y está contenido en U, entonces:

$$\prod_I X_i = \overline{U}_{i_1} \times \dots \times \overline{U}_{i_n} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} X_i =$$

$$\overline{U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} X_i} \subset \overline{U} \subset \prod_I X_i$$

$$\therefore \ \overline{U} = \prod_I X_i, \quad \therefore \ U \text{ es denso.}$$

Se concluye que $\prod_I X_i \in D$.

<u>1.15 Proposición</u> Existen propiedades topológicas cerradas bajo la formación de productos y hereditarias entre T_1 y T_2.

<u>Dem.</u>: Para cada espacio topológico T_1 que no sea T_2 se dará una subcategoría epi-reflectiva que esté entre T_1 y T_2.

Sea $X \in T_1 - T_2$, considérese la subcategoría epi-reflectiva $R(X \cup T_2)$.

$T_2 \subsetneq X \cup T_2 \subset R(X \cup T_2)$. Ahora, $X \cup T_2 \subset T_1$, $\therefore R(X \cup T_2) \subset T_1$. Sea $\Lambda > |X|$, por 4 y 5 los elementos de cualquier fuente de dominio C_1 y codominio en $\{X\} \cup T_2$ son constantes $\therefore$ no existe una monofuente de dominio C_1 y codominio en $X \cup T_2$, $\therefore C_1 \notin R(X \cup T_2)$, $\therefore R(X \cup T_2) \subsetneq T_1$

Se concluye que $T_2 \subsetneq R(X \cup T_2) \subsetneq T_1$.

<u>1.16 Proposición</u> Si $\underline{A}$ es una subcategoría epi-reflexiva y, $T_3 \subset \underline{A} \subset T_1$, entonces $\underline{A}$ no está simplemente cogenerada.

<u>Dem.</u>: Si X fuera un cogenerador simple de $\underline{A}$, se tendría entonces, $T_3 \subset R(Y_0 X) \subset T_1$, pero ésto es imposible, pues 6 garantiza la existencia de un espacio T_3 que no está en $R(Y_0 X)$.

Un caso particular del anterior resultado es que $T_2, T_{2 1/2}, T_3$ no están simplemente cogeneradas, es más, para estas subcategorías no se conocen concretos sistemas de cogeneradores (salvo, claro está, los correspondientes descritos en 1.2, si es que éstos se consideran "concretos").

<u>1.17 Teorema.</u>

a) I es una base de Tych.

b) Un espacio topológico X es un cogenerador simple de Tych sii I está inmerso en X y $X \in CR$.

c) $\mathbb{R}$ es una base de Tych.

d) (Y_λ) es un sistema de T_1-cogeneradores de Tych sii (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de Tych.

e) $I(\text{Tych}) = CR$.

<u>Dem.</u>: a) del resultado clásico de Topología General "$X \in$ Tych sii X es homeomorfo a un subespacio de un cubo", se sigue que I es un cogenerador

simple de Tych. Supóngase que X es un cogenerador simple de Tych, como $I \in Tych = R(r_0 X)$, existe una monofuente inicial $(f_i : I \to r_0 X)_J$, $\therefore \exists$ $i \in J \ni |f_i(I)| > 1$. Como I es conectable por trayectorias, $f_i(I)$ también lo es, y como $r_0 X \in Tych$, $f_i(I)$ es en especial T_2, entonces por 7, $f_i(I)$ es arco-conectable, $\therefore$ I está inmerso en $f_i(I)$, $\therefore$ I está inmerso en $r_0 X$, por 12e) I está inmerso en X. Por lo tanto I es una base de Tych.

b) Si X es un cogenerador simple de Tych, por (a) I está inmerso en X. Sean $F \subset X$ cerrado y $x \in X - F$, como todo cerrado en X es r_0-saturado (véase 12), $r_0(F)$ es cerrado y $x \notin r_0(F)$, y como $r_0(X)$ está inmerso en X, $r_0 X \in Tych$, se tiene que existe una función continua $r_0 X \xrightarrow{f} I \ni f(r_0 F) = 0$

y $f(x)=1$ $\therefore$ $f\circ r_0 : X \longrightarrow I$ es una función continua tal que $f r_0(F)=0$ y $f r_0(x)=1$, $\therefore$ $X \in CR$.

Por lo tanto todo cogenerador simple de Tych tiene inmerso a I y es completamente regular.

Si X tiene inmerso a I y $X \in CR$, se tiene con la primera hipótesis que existe una fuente inicial de I en $r_0 X$, como el dominio de dicha fuente inicial es T_0, resulta ser mono fuente, $\therefore$ $I \in R(r_0 X)$, $\therefore$ $Tych = R(I) \subset R(r_0 X)$.

Ahora con la segunda hipótesis y 1(2), $r_0 X \in CR$, $\therefore$ $r_0 X \in Tych$, $\therefore$ $R(r_0 X) \subset Tych$.

Se concluye que $R(r_0 X) = Tych$, $\therefore$ X es un cogenerador simple de Tych.

Por lo tanto un espacio que tiene inmerso a I y es completamente regular es un cogenerador simple de

c) Como I está inmerso en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es completamente regular, se sigue por (b) $\mathbb{R}$ es un cogenerador simple de Tych. Ahora, como $\mathbb{R}$ está inmerso en I, se concluye — por ser I base de Tych — que $\mathbb{R}$ está inmerso en cualquier cogenerador simple de Tych. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es una base de Tych.

d) es caso particular de 1.7 a)

e) en (b) se demostraron separadamente las dos implicaciones opuestas, " $X \in$ Tych sii $X \in C\mathbb{R}$". Esta afirmación junto con 14 demuestran este inciso.

Los incisos (a) y (c) del anterior teorema permiten enunciar la siguiente:

<u>1.18 Observación</u>. Si $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y}'$ son dos bases de una subcategoría, no necesariamente $\mathcal{Y}$ es isomorfo a $\mathcal{Y}'$.

<u>1.19 Lema</u>. Si $R(\mathbb{X}) = \underline{A}$ y $(B_i)_I$ es un conjunto de espacios topológicos entonces $R(\mathbb{X} \times \prod_I B_i) = R(\underline{A} \cup (B_i)_I)$.

<u>Dem.</u>: Como $\mathbb{X} \cup (B_i)_I \subset R(\underline{A} \cup (B_i)_I)$ se tiene que $\mathbb{X} \times \prod_I B_i \in R(\underline{A} \cup (B_i)_I)$, $\therefore$ $R(\mathbb{X} \times \prod_I B_i) \subset R(\underline{A} \cup (B_i)_I)$. Ahora sea $Y \in R(\underline{A} \cup (B_i)_I)$, $\therefore$ $\exists$ una monofuente inicial $(Y \xrightarrow{f_i} C_j)_J$ con $C_j \in \underline{A} \cup (B_i)_I$ $\forall j \in J$.

Ahora, para cada $j \in J$ existe una monofuente inicial de dominio C_j y codominio $\mathbb{X} \times \prod_I B_i$ - si j es tal que $C_j \in \underline{A}$, por hipótesis, existe una monofuente inicial de C_j en $\mathbb{X}$, compóngase ésta con una inmersión de X en $X \times \prod_I B_i$, esta composición es una monofuente inicial; Si j es tal que $C_j = B_i$ para alguna $i \in I$, considérese una inmersión de B_i en $X \times \prod_I B_i$ - entonces la composición de la primera fuente con la colección descrita es una monofuente inicial de dominio Y y codominio $X \times \prod_I B_i$, $\therefore Y \in R(X \times \prod_I B_i)$

$\therefore R(\underline{A} \cup (B_i)_I) \subset R(X \times \prod_I B_i)$.

Se concluye que $R(\underline{A} \cup (B_i)_I) = R(X \times \prod_I B_i)$.

<u>1.20 Proposición</u>. Existen propiedades topológicas entre Tych y T_3 que son hereditarios y están cerradas bajo la formación de productos.

<u>Dem.</u>: Para cada espacio topológico T_3 que no sea Tych se dará una subcategoría epi-reflectiva que esté entre T_3 y Tych.

Sea $X \in T_3 - Tych$, considérese la subcategoría epi-reflexiva $R(X \cup Tych)$.

$Tych \subsetneq X \cup Tych \subset R(X \cup Tych)$.

Ahora, $X \cup Tych \subset T_3$, $\therefore R(X \cup Tych) \subset T_3$. Por 6 existe $Y \in T_3$ y $Y \notin R(X \times I)$, por 1.19, $Y \notin R(X \cup Tych)$, $\therefore R(X \cup Tych) \subsetneq T_3$.

Por lo tanto, $Tych \subsetneq R(X \cup Tych) \subsetneq T_3$.

2. Subcategorías $\underline{A}$-regulares.

<u>2.1 Definición</u>. Sea $\underline{A}$ una subcategoría de Top, un $\underline{A}$-morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ se llama <u>$\underline{A}$-cerrado</u> si la imagen de cualquier subconjunto $\underline{A}$-cerrado en X es $\underline{A}$-cerrado en Y.

<u>2.2 Proposición</u> La composición de morfismos $\underline{A}$-cerrados es $\underline{A}$-cerrado.

Dem.: inmediata.

2.3. Proposición. Sea $\underline{A}$ una subcategoría epi-reflexiva de Top. Son equivalentes:

a) los $\underline{A}$-monomorfismos regulares son las inmersiones $\underline{A}$-cerradas y éstos son los $\underline{A}$-monomorfismos extremados.

b) la composición de $\underline{A}$-monomorfismos regulares ($\underline{A}$-monomorfismos extremados) es un $\underline{A}$-monomorfismo regular ($\underline{A}$-monomorfismo extremado).

c) la restricción de un $\underline{A}$-monomorfismo regular ($\underline{A}$-monomorfismo extremado) a un subespacio $\underline{A}$-cerrado del dominio es un $\underline{A}$-monomorfismo regular ($\underline{A}$ monomorfismo extremado)

d) $[B]_{\underline{A}}^{[B]_{\underline{A}}^{X}} = [B]_{\underline{A}}^{X}$, $\forall X \in \underline{A}$ y $\forall B \subset X$

Dem.: a) $\Rightarrow$ b) por 2.2

b) $\Rightarrow$ c) Sean $f: X \to Y$ un $\underline{A}$-monomorfismo regular ($\underline{A}$-monomorfismo extremado) y $U \subset X$, $[U]_{\underline{A}}^{X} = U$.

Se tiene por 1.9 b) que $i: U \hookrightarrow X$ es un $\underline{A}$-monomorfismo regular ($\therefore$ monomorfismo extremado), por (b), se tiene que $f \circ i = f|_U$ es un $\underline{A}$-monomorfismo regular ($\underline{A}$-monomorfismo extremado).

c) $\Rightarrow$ d) Sean $X \in \underline{A}$ y $B \subset X$, por 19b)

$[B]_{\underline{A}}^{X} \hookrightarrow X$ es un $\underline{A}$-monomorfismo regular, por (c)

$[B]_{\underline{A}}^{[B]_{\underline{A}}^{X}} \hookrightarrow X$ es un $\underline{A}$-monomorfismo regular

por 19c), $\left[[B]_{\underline{A}}^{[B]_{\underline{A}}^{X}}\right]_{\underline{A}}^{X} = [B]_{\underline{A}}^{[B]_{\underline{A}}^{X}}$, pero 15g)

afirma que la parte izquierda de la anterior igualdad es $[B]_{\underline{A}}^{X}$, $\therefore [B]_{\underline{A}}^{X} = [B]_{\underline{A}}^{[B]_{\underline{A}}^{X}}$.

d) $\Rightarrow$ a) Sean $f : X \to Y$ un $\underline{A}$-monomorfismo regular y $U \subset X$, $U = [U]_{\underline{A}}^{X}$.

Se tiene en especial que f es un $\underline{A}$-monomorfismo extremado, por 19a), f es una inmersión, además por 19c), $[f(X)]_{\underline{A}}^{Y} = f(X)$, entonces $X \xrightarrow{f} [f X]$ es un isomorfismo, $\therefore$ el triángulo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f|_U^{[fU]}"] \arrow[dr, hook] & {[fU]} \arrow[d, "\left(f|^{[fX]}\right)^{-1}|_{[fU]}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Conmuta. Pero como por 19b), la inclusión de U en X es $\underline{A}$-monomorfismo regular, es en especial un $\underline{A}$-monomorfismo extremado y, por (d) y 17, $f|_U^{[fU]}$ es un $\underline{A}$-epimorfismo, $\therefore$ $f|_U^{[fU]}$ es un $\underline{A}$ isomorfismo, en particular es una función suprayectiva, $\therefore$ $fU = [fU]$. Por lo tanto f es una inmersión $\underline{A}$-cerrada.

Sea $f: X \to Y$ una inmersión $\underline{A}$-cerrada, como X es $\underline{A}$-cerrado en X, $[fX]_{\underline{A}}^{Y} = f(X)$, por 19c), f es un $\underline{A}$-monomorfismo regular.

Entonces, queda demostrado que los $\underline{A}$-monomorfismos regulares son las inmersiones $\underline{A}$-cerradas.

Ahora, se demostrará que los $\underline{A}$-monomorfismos extremados satisfacen 19c.2).

Sea $X \xrightarrow{f} Y$ un A-monomorfismo extremado, por (d), $X \xrightarrow{f} [fX]$ es un $\underline{A}$-epimorfismo, entonces como el triángulo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ {[fX]^{Y}_{\underline{A}}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

conmuta, $f|^{[fX]}$ es un $\underline{A}$-isomorfo, $\therefore$ $f(X) = [fX]^{Y}_{\underline{A}}$. Finalmente, por 19a), f es una inmersión.

<u>2.4 Proposición.</u> Si (Y_λ) es un sistema regular de cogeneradores de $\underline{A}$, entonces para todo $X \in Top$ y $B \subset X$, se tiene $[B]^{X}_{(Y_\lambda)} \subset [B]^{X}_{\underline{A}}$.

<u>Dem.</u>: Sean, $X \in Top$, $B \subset X$ y $x \in X - [B]^{X}_{\underline{A}}$, $\therefore$ existen $A \in \underline{A}$ y $f, g : X \longrightarrow A$ continuas $\ni$ $f|B = g|B$ y $f(x) \neq g(x)$. Como $A \in \underline{A}(|A|) = R(Y_{|A|})(|A|)$,

Existe una monofuente inicial $(f_i : A \to Y_{|A|})_I$,

$\therefore \exists\, i \in I$ ∋ $f_i(f(x)) \neq f_i(g(x))$, pero

$f_i f,\ f_i g : X \to Y_{|A|}$ son continuas y $f_i f|B = f_i g|B$, $\therefore x \notin [B]^X_{(Y_\lambda)}$. $\therefore [B]^X_{(Y_\lambda)} \subset [B]^X_{\underline{A}}$.

<u>2.5. Corolario</u> Si (Y_λ) es un sistema regular de $\underline{A}$-cogeneradores de $\underline{A}$, entonces para todo $X \in Top$ y $B \subset X$,

$$[B]^X_{(Y_\lambda)} = [B]^X_{\underline{A}}.$$

<u>Dem.</u>: una contención la garantiza 2.4 y la opuesta 1.5 d).

<u>2.6 Ejemplos</u>. Las siguientes subcategorías satisfacen el inciso (d) de la proposición 2.3.

a) Cualquier subcategoría $\underline{A}$ epi-reflectiva, y el operador $\underline{A}$-cerradura restringido a $Ob(\underline{A})$ es la identidad. Por ejemplo T_1, cualquier bi-reflectiva.

b) T_0

c) T_2

d) Tych

<u>Justificaciones</u>, a) inmediato.

b) Sean, X un espacio topológico y $B \subset X$, por 15f)

$$[B]_S^X \supset [B]_S^{[B]_S^X}.$$

Ahora sean, $x \in [B]_S^X$ y $f, g : [B]_S^X \longrightarrow S$

continuas tales que $f|B = g|B$, por 9, existen

$f', g' : X \longrightarrow S$ continuas $\ni$ $f'|[B]_S^X = f$ y

$g'|[B]_S^X = g$, entonces como $x \in [B]_S^X$, $f'(x) = g'(x)$

$\therefore f(x) = g(x)$, $\therefore$ $x \in [B]_S^{[B]_S^X}$, $\therefore$ $[B]_S^X \subset [B]_S^{[B]_S^X}$

Por lo tanto, $[B]_S^X = [B]_S^{[B]_S^X}$. Por 2.5

$$[B]_{T_0}^X = [B]_{T_0}^{[B]_{T_0}^X}.$$

c) y d) por los incisos c) y d) de 16.

En los prerequisitos se definió para cada pareja de espacios topológicos X, Y, una función continua $k_Y^X : X \longrightarrow Y^{Top(X,Y)}$, en 17 se vió que para cada pareja de funciones continuas, $X \xrightarrow{f} Z$, $Z \xrightarrow{g} Y^J$, existe una función continua $f^g : Y^{TOP(X,Y)} \longrightarrow Y^J$ que hace conmutativo el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k_Y^X"] \arrow[d, "f"'] & Y^{TOP(X,Y)} \arrow[d, "f^g"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y^J \end{tikzcd}$$

Por las propiedades de la $\underline{A}$-Cerradura (b y c de 15) se tiene la siguiente:

<u>2.7 Proposición</u> Para cualquier subcategoría $\underline{A}$ de Top,

$$f^g[k_Y X]_{\underline{A}}^{Y^{TOP(X,Y)}} \subset [g(Z)]_{\underline{A}}^{Y^J}.$$

<u>2.8 Proposición</u>. Si $X \in R(Y)$ entonces $X \xrightarrow{k_Y^X} Y^{Top(X,Y)}$ es una inmersión.

Dem.: Si $X \in R(Y)$, existe una inmersión $j: X \to Y^J$.

Considérese el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k_Y^X"] \arrow[d, "j"'] & Y^{TOP(X,Y)} \arrow[d, "j'"] \\ Y^J \arrow[r, "1_{Y^J}"'] & Y^J \end{tikzcd}$$

Se tiene entonces que j se factoriza a través de k_Y^X como primer factor, por lo tanto, k_Y^X es inmersión.

2.9 Definición. Sea $\underline{A}$ una subcategoría epi-reflexiva de Top. Un sistema regular de $\underline{A}$-cogeneradores (Y_λ) de $\underline{A}$, se llama $\underline{A}$-regular si $\forall\, X \in \underline{A}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq |X|$ existe un isomorfismo $[k_{Y_{\lambda_1}} X] \xrightarrow{j} [k_{Y_{\lambda_2}} X]$

que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & {[k_{Y_{\lambda_1}} X]} \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[ur, "k_{Y_{\lambda_1}}"] \arrow[r, "k_{Y_{\lambda_2}}"'] & {[k_{Y_{\lambda_2}} X]} \end{tikzcd}$$

2.10 Ejemplos

a) todo Cogenerador simple de $\underline{A}$ es $\underline{A}$-regular.

b) Si el operador $\underline{A}$-Cerradura restringido a los objetos de $\underline{A}$ es la identidad entonces todo Sistema regular de $\underline{A}$-cogeneradores de $\underline{A}$ es $\underline{A}$-regular.

Justificaciones, a) inmediato.

b) Sea $X \in \underline{A}$, como $Y_\lambda \in \underline{A}$, $Y_\lambda^{Top(X, Y_\lambda)} \in \underline{A}$, entonces por hipótesis $[k_{Y_\lambda} X]_{\underline{A}}^{Y_\lambda^{Top(X,Y_\lambda)}} = k_{Y_\lambda} X$. Además si $\lambda \geq X$, por 2.8, $k_{Y_\lambda} : X \longrightarrow Y_\lambda^{Top(X, Y_\lambda)}$ es inmersión, $\therefore$ $\forall\, \lambda \geq |X|$, $X \xrightarrow{k_{Y_\lambda}} [k_{Y_\lambda} X]$ es isomorfismo, $\therefore$, si $\lambda_1, \lambda_2 \geq |X|$, el siguiente diagrama conmutativo es de isomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k_{Y_{\lambda_1}}"] \arrow[dr, "k_{Y_{\lambda_2}}"'] & {[k_{Y_{\lambda_1}} X]} \arrow[d, "k_{Y_{\lambda_2}} \circ k_{Y_{\lambda_1}}^{-1}"] \\
& {[k_{Y_{\lambda_2}} X]}
\end{tikzcd}$$

2.11 Definición Sea (Y_λ) un sistema $\underline{A}$-regular. La subcategoría plena y repleta de Top, $C_{(Y_\lambda)}$, cuyos objetos Z, son los $\underline{A}$-subobjetos regulares de alguna potencia de $Y_{|Z|}$, se llama subcategoría $\underline{A}$-regular.

2.12 Observación Si $\underline{A}$ es una subcategoría epi-reflexiva tal que el operador $\underline{A}$-cerradura restringido a los objetos de $\underline{A}$ es la identidad, entonces la única subcategoría $\underline{A}$-regular es $\underline{A}$.

En efecto, 2.10b garantiza que para una tal subcategoría $\underline{A}$, existen sistemas $\underline{A}$-regulares. Sean, (Y_λ) un sistema $\underline{A}$-regular y $A \in \underline{A}$, $\therefore$ existe una inmersión $A \xrightarrow{f} Y^I_{|A|}$, por hipótesis sobre $\underline{A}$ $[f(A)]_{\underline{A}}^{Y^I_{|A|}} = f(A)$, por 1.9c), f es un $\underline{A}$-monomorfismo regular, $\therefore$ $A \in C_{(Y_\lambda)}$, $\therefore$ $\underline{A} \subset C_{(Y_\lambda)}$, $\therefore$ $\underline{A} = C_{(Y_\lambda)}$.

2.13 Proposición. Si $\underline{A}$ es una subcategoría epi-reflexiva de Top que satisface el inciso (d) de la proposición 2.3, entonces son equivalentes:

a) $Z \in \mathcal{C}_{(\mathcal{Y}_\lambda)}$

b) Z es un $\underline{A}$-subobjeto regular de alguna potencia de $\mathcal{Y}_\lambda$ para un $\lambda \geq |Z|$.

c) $Z \xrightarrow{k_{\mathcal{Y}_\lambda}} [k_{\mathcal{Y}_\lambda} Z]$ es un isomorfismo $\forall \lambda \geq |Z|$

d) Z es un $\underline{A}$-subobjeto regular de $\mathcal{Y}_\lambda^{\mathrm{Top}(Z,\mathcal{Y}_\lambda)}$, $\forall \lambda \geq |Z|$

<u>Dem.</u>: a) $\Rightarrow$ b) inmediato.

b) $\Rightarrow$ c) Sea $Z \xrightarrow{f} \mathcal{Y}_{\lambda_0}^I$ con $\lambda_0 \geq |Z|$ el $\underline{A}$-monomorfismo regular garantizado por (b).

Considérese el cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{k_{\mathcal{Y}_{\lambda_0}}} & \mathcal{Y}_{\lambda_0}^{\mathrm{Top}(Z,\mathcal{Y}_{\lambda_0})} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \mathcal{Y}_{\lambda_0}^I & \xrightarrow[1]{} & \mathcal{Y}_{\lambda_0}^I \end{array}$$

$\therefore$ Se tiene el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "k_{y_{\lambda_0}}"] \arrow[dr, "f"'] & {[k_{y_{\lambda_0}} Z]} \arrow[d, "f'"] \\ & Y_{\lambda_0}^{I} \end{tikzcd}$$

Como se supuso que $\forall\, X \in \underline{A}$ y $\forall\, B \subset X$,

$[B]^{X}_{\underline{A}} = [B]^{[B]^{X}_{\underline{A}}}_{\underline{A}}$, $Z \xrightarrow{k_{y_{\lambda_0}}} [k_{y_{\lambda_0}} Z]$ es un

$\underline{A}$-epimorfismo, por ser f un $\underline{A}$-monomorfismo extremado, $Z \xrightarrow{k_{y_{\lambda_0}}} [k_{y_{\lambda_0}} Z]$ es isomorfismo.

Como $\lambda_0 \geq |Z|$, por ser (Y_λ) $\underline{A}$-regular, se sigue que

$Z \xrightarrow{k_{y_\lambda}} [k_{y_\lambda} Z]$ es isomorfismo $\forall\, \lambda \geq |Z|$.

c) $\Rightarrow$ d) Sea $\lambda \geq |Z|$, por (c), $Z \xrightarrow{k_{y_\lambda}} [k_{y_\lambda} Z]$ es isomorfismo, $\therefore$ $k_{y_\lambda} Z = [k_{y_\lambda} Z]$, por 19c),

$Z \xrightarrow{k_{y_\lambda}} Y_\lambda^{Top(Z, Y_\lambda)}$ es $\underline{A}$-monomorfismo regular.

d) $\Rightarrow$ a) inmediato.

<u>2.14 Lema</u>. Sea $\underline{A}$ como en 2.13, para todo $X \in \underline{A}$, $[k_{Y_{|X|}} X] \in C_{(Y_\lambda)}$.

<u>Dem</u>.: Sea $\lambda_0 = \text{Card}\,[k_{Y_{|X|}} X]$. Se tiene que $\lambda_0 \geq |X|$, ya que por 2.8, $k_{Y_{|X|}}$ es inmersión. Por 1.9 b), $[k_{Y_{\lambda_0}} X]$ es un $\underline{A}$-Subojeto regular de $Y_{\lambda_0}^{Top(X,Y_{\lambda_0})}$, como (Y_λ) es un sistema $\underline{A}$-regular y $\lambda_0 \geq |X|$, $[k_{Y_{|X|}} X]$ y $[k_{Y_{\lambda_0}} X]$ son isomorfos, $\therefore [k_{Y_{|X|}} X]$ es un $\underline{A}$-Subojeto regular de $Y_{\lambda_0}^{Top(X,Y_{\lambda_0})}$, $\therefore$

$[k_{Y_{\lambda_{|X|}}} X] \in C_{(Y_\lambda)}$.

<u>2.15 Teorema</u>. Sea $\underline{A}$ una subcategoría epi-reflectiva de Top que satisface cualquiera de los incisos de la proposición 2.3, entonces toda subcategoría $\underline{A}$-regular es epi-reflectiva en $\underline{A}$.

<u>Dem.</u>: Sea (Y_λ) un sistema $\underline{A}$-regular, considérese $X \in \underline{A}$, se afirma que $X \xrightarrow{k_{Y_{|X|}}} \left[k_{Y_{|X|}} X\right]_{\underline{A}}^{Y_{|X|}^{Top(X, Y_{|X|})}}$

es un $\underline{A}$-epimorfismo que es una $C_{(Y_\lambda)}$-reflexión de X.

En efecto, como $\underline{A}$-satisface 2.3 d), $X \xrightarrow{k_{Y_{|X|}}} \left[k_{Y_{|X|}} X\right]$ es un $\underline{A}$-epimorfismo por 17. Por 2.14, $\left[k_{Y_{|X|}} X\right] \in C_{(Y_\lambda)}$.

Supóngase que $X \xrightarrow{f} Z$ es una función continua con $Z \in C_{(Y_\lambda)}$, pueden suceder dos casos:

<u>Caso 1</u>, $|Z| \leq |X|$

Considérese el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k^X_{Y_{|X|}}"] \arrow[d, "f"'] & Y_{|X|}^{Top(X, Y_{|X|})} \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "k^Z_{Y_{|X|}}"'] & Y_{|X|}^{Top(Z, Y_{|X|})}
\end{tikzcd}$$

por 2.7, se tiene que el siguiente cuadrado está bien construido y es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k^{X}_{Y_{|X|}}"] \arrow[d, "f"'] & \left[k^{X}_{Y_{|X|}} X\right] \arrow[d, "f^{k^{Z}_{Y_{|X|}}}"] \\ Z \arrow[r, "k^{Z}_{Y_{|X|}}"] & \left[k^{Z}_{Y_{|X|}} Z\right] \end{tikzcd}$$

ahora por 2.13 c), $Z \xrightarrow{k^{Z}_{Y_{|X|}}} \left[k^{Z}_{Y_{|X|}} Z\right]$ es isomorfismo $\therefore$ $f = \left(k^{Z}_{Y_{|X|}}\right)^{-1} \circ f^{k^{Z}_{Y_{|X|}}} \circ k^{X}_{Y_{|X|}}$

Caso 2, $|Z| > |X|$

Considérese el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k^{X}_{Y_{|Z|}}"] \arrow[d, "f"'] & Y_{|Z|}^{TOP(X,\, Y_{|Z|})} \arrow[d, "f^{k^{Z}_{Y_{|Z|}}}"] \\ Z \arrow[r, "k^{Z}_{Y_{|Z|}}"'] & Y_{|Z|}^{Top(Z,\, Y_{|Z|})} \end{tikzcd}$$

por 2.7 se tiene que el siguiente cuadrado está bien construido y es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k^{X}_{Y_{|Z|}}"] \arrow[d, "f"'] & {[k^{X}_{Y_{|Z|}} X]} \arrow[d, "f^{k^{Z}_{Y_{|Z|}}}"] \\
Z \arrow[r, "k^{Z}_{Y_{|Z|}}"'] & {[k_{Y_{|Z|}} Z]}
\end{tikzcd}$$

por ser (Y_λ) $\underline{A}$-regular, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k^{X}_{Y_{|X|}}"] \arrow[dr, "k^{X}_{Y_{|Z|}}"'] & {[k^{X}_{Y_{|X|}} X]} \arrow[d, "j"] \\
 & {[k^{X}_{Y_{|Z|}} X]}
\end{tikzcd}$$

por lo tanto se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & {[k^{X}_{Y_{|X|}} X]} \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[ur, "k^{X}_{Y_{|X|}}"] \arrow[r, "k^{X}_{Y_{|Z|}}"] \arrow[d] & {[k^{X}_{Y_{|Z|}} X]} \arrow[d, "f^{k^{Z}_{Y_{|Z|}}}"] \\
Z \arrow[r, "k^{Z}_{Y_{|Z|}}"] & {[k^{Z}_{Y_{|Z|}} Z]}
\end{tikzcd}$$

Ahora por 2.13c), $Z \xrightarrow{k^Z_{y_{1Z1}}} [k^Z_{y_{1Z1}} Z]$ es isomorfismo, $\therefore f = \left(k^Z_{y_{1Z1}}\right)^{-1} \circ f^{k^Z_{y_{1Z1}}} \circ j \circ k^X_{y_{1X1}}$.

Ha quedado demostrado que cualquier función continua de dominio $X \in \underline{A}$ y codominio en $C_{(y_1)}$ puede factorizarse a través de $X \xrightarrow{k^X_{y_{1X1}}} [k^X_{y_{1X1}} X]$ como primer factor. Ahora, la unicidad del segundo factor se sigue porque $X \xrightarrow{k^X_{y_{1X1}}} [k^X_{y_{1X1}} X]$ es un $\underline{A}$-epimorfismo.

Por todo lo anterior, se concluye que $C_{(y_1)}$ es una subcategoría epi-reflectiva en $\underline{A}$.

<u>2.16 Corolario</u> Sea $\underline{A}$ como en el teorema 2.15, entonces toda subcategoría $\underline{A}$-regular está cerrada bajo la formación de productos y subespacios $\underline{A}$-cerrados.

<u>Dem.</u>: por 11 y 19b.

<u>2.17 Definiciones</u> a) una base (Y_λ) de una subcategoría $\underline{A}$ no simplemente cogenerada, se llama <u>base $\underline{A}$-cerrada</u>, si satisface:

i) (Y_λ) es $\underline{A}$-regular

ii) Si (Y'_λ) es $\underline{A}$-regular, entonces existe una inmersión $Y_\lambda \xrightarrow{f} Y'_\lambda$ y $f(Y_\lambda)$ es $\underline{A}$ cerrado en Y'_λ.

b) un cogenerador simple Y, base de una subcategoría $\underline{A}$, se llama <u>base $\underline{A}$-cerrada</u>, si satisface:

i) Y es $\underline{A}$-regular

ii) Si (Y'_λ) es $\underline{A}$-regular y consta de un sólo elemento entonces existe una inmersión $Y \xrightarrow{f} Y'_\lambda$ y $f(Y)$ es $\underline{A}$-cerrado en Y'_λ, o equivalentemente, si Y' es un cogenerador regular simple de $\underline{A}$ entonces existe una inmersión $Y \xrightarrow{f} Y'$ tal que $f(Y)$ es $\underline{A}$-cerrado en Y'.

<u>2.18 Ejemplos</u> a) S es una base T_0-cerrada

b) I es base Tych-cerrada.

c) $\mathbb{R}$ no es una base Tych-cerrada.

Justificaciones. a) por ser S un cogenerador regular simple de T_0, es T_0-regular. Ahora sea X un cogenerador regular simple de T_0, se tiene entonces que S está inmerso en X, por 8, S es un retracto de X, por 15 h), S es T_0-cerrado en X.

b) por ser I un cogenerador regular simple de Tych, es Tych-regular. Ahora sea X un cogenerador regular simple de Tych, se tiene entonces que $\exists$ una inmersión $I \xrightarrow{f} X$, ahora como $X \in$ Tych y $f(I)$ es compacto en X, $f(I)$ es cerrado en X, entonces por 16 d), $f(I)$ es Tych-cerrado en X.

c) Sea $\mathbb{R} \xrightarrow{f} I$ una inmersión, si $[f(\mathbb{R})]^{I}_{Tych} = f(\mathbb{R})$, por 16 d), $f(\mathbb{R})$ es cerrado,

$\therefore f(\mathbb{R})$ es compacto, $\therefore \mathbb{R}$ es compacto, que es falso, $\therefore [f(\mathbb{R})]^{I}_{Tych} \neq f(\mathbb{R})$, $\therefore \mathbb{R}$ no es base Tych-cerrada.

<u>2.19 Proposición</u> Si $\underline{A}$ es como en el teorema 2.15 y (Y_λ) es una base $\underline{A}$-cerrada entonces $C_{(Y_\lambda)} \subset C_{(Y'_i)}$, donde (Y'_i) es un sistema $\underline{A}$-regular que en el caso de que $\underline{A}$ esté simplemente cogenerada, consta de un sólo elemento.

<u>Dem.</u>: Sean (Y_λ) una base $\underline{A}$-cerrada y (Y'_i) un sistema $\underline{A}$-regular que en el caso de que $\underline{A}$ esté simplemente cogenerada, consta de un sólo elemento. Considérese $Z \in C(Y_\lambda)$, $\therefore$ existe un monomorfismo regular $Z \xrightarrow{f} Y^{J}_{|Z|}$. Por ser (Y_λ) una base $\underline{A}$-cerrada, $Y_{|Z|}$ es un $\underline{A}$ subobjeto regular de $Y'_{|Z|}$, por 10, $Y^{J}_{|Z|}$ es un $\underline{A}$ subobjeto regular

de $\mathcal{Y}'^{J}_{|Z|}$, $\therefore Z \in C_{(\mathcal{Y}'_\lambda)}$, $\therefore C_{(\mathcal{Y}_\lambda)} \subset C_{(\mathcal{Y}'_\lambda)}$.

<u>2.20 Corolario</u> Si $\underline{A}$ es como en 2.19 y $(\mathcal{Y}_\lambda)$, $(\mathcal{Y}'_\lambda)$ son dos bases $\underline{A}$-cerradas entonces $C_{(\mathcal{Y}_\lambda)} = C_{(\mathcal{Y}'_\lambda)}$.

<u>2.21 Observaciones</u> a) C_I es la subcategoría que tiene por objetos a los espacios Hausdorff que son compactos. La C_I - reflexión de un espacio Tychonoff es su compactación de Stone-Čech.

b) $C_{\mathbb{R}}$ es la subcategoría que tiene por objetos a los espacios realcompactos. La $C_{\mathbb{R}}$ - reflexión de un espacio Tychonoff es su realcompactación.

<u>Justificaciones</u>. a) Se sabe que un espacio es compacto y Hausdorff sii es isomorfo a un subespacio cerrado de una potencia de I, por 16d) y 19c), sii está en C_I. Ahora, se sigue de la definición que $X \xrightarrow{k_I} [k_I X]^{I}_{Tych} = \overline{k_I X}$ es la compactación de Stone-Čech de $X \in Tych$.

b) Se sabe que un espacio es real compacto sii es isomorfo a un subespacio cerrado de una potencia de $\mathbb{R}$, por 16d) y 19c), sii está en $C_{\mathbb{R}}$. Ahora, se sigue de la definición que $X \xrightarrow{k_{\mathbb{R}}} [k_{\mathbb{R}}X]^{\mathbb{R}}_{Tych} = \overline{k_{\mathbb{R}}X}$ es la real compactación de Hewitt de $X \in Tych$.

Bibliografía

[1] E. Giuli — Bases of topological epi-reflections. Topolog. and its Applications 11 (1980) 265-273

[2] H. Herrlich — Wann sind alle stetigen Abbildungen in Y konstant? Math. Zeitschr. 90 (1965) 152-154

[3] H. Herrlich, G. Strecker — Category Theory (1973) Allyn and Bacon.

[4] S. Willard — General Topology (1970) Addison-Wesley.