29 No 17

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA FORMULA DE POISSON EN LA FUNCION ZETA DE HECKE-IWASAWA-TATE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

FERNANDO ALBERTO ONGAY LARIOS

MEXICO, D. F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

INTRODUCCION

Hecke demostró que la función Zeta de Dedekind de cualquier campo de números algebráicos tiene una continuación analítica a todo el plano complejo satisfaciendo una ecuación funcional. El generalizó esta función a una suma de ideales integrales de un cierto tipo de cracteres. Hecke empleo para esto un complicado formulario de funciones theta. Tate generalizó la definición de Hecke a una integral sobre el grupo de Ideles de un campo de números algebraicos y demostró su continuación analítica y la ecuación funcional empleando para ello la Fórmula de Poisson para grupos localmente compactos. Por su parte, Iwasawa llegó al mismo resultado, pero lo presento poco despues que Tate.

El presente trabajo está entonces organizado de la siguiente manera: Una primera parte en la que se estudian los elementos básicos del Análisis Armónico relacionados con el grupo dual y la transformada de Fourier, se demuestran algunos teoremas fundamentales, entre ellos la fórmula de Poisson, necesarios para demostrar la ecuación funcional y la continuación analitica de la función Zeta. En la segunda parte presentamos, de una manera sintetizada, los elementos de la la teoría de números algebráicos para formular la función Zeta y demostramos su ecuación funcional y su continuación analítica.

Dada la cantidad de elementos que intervienen en el teorema en cuestión, hemos tenido que suponer conocidos los siguientes: La teoría de Algebras de Banach Conmutativas, en particular lo referente a la transformada de Gelfand; este material se encuentra en [6], [9] y [10]. La teoría de integración sobre espacios y grupos localmente compactos, en particular la existencia de la medida de Haar, el teorema de Foubini y la integración sobre el grupo cociente; de esto damos un resumen, principalmente para fijar notación, en el capitulo I, para referencia véase [2] y [8]. De análisis y topología quiza lo más relevante sea la noción de convergencia uniforme sobre compactos y los teoremas de Stone-Weierstrass y Arzela-Ascoli; para esto véase [1]. De la teoría de números algebraicos bastara tener familiaridad con la teoría de valuaciones, Adeles e Ideles; las referencias para esto son [7] y, sobre todo, [13]. Respecto a la notacion, los simbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, y $\mathbb{U}$ representan el anillo de los enteros, el campo de los números racionales, el campo de los reales, el campo de los complejos y el grupo de los complejos de modulo igual a uno respectivamente; si K es un anillo (en este trabajo todos los anillos son con unitario), $K^{\times}$ denota el grupo multiplicativo de los elementos invertibles de K; $\mathbb{R}_{+}^{\times}$ denota el grupo multiplicativo de reales mayores que cero.

Quiero agradecer la dirección, el apoyo y el estimulo del Dr. Félix Recillas Juárez para la elaboración de este trabajo.

F.O.L.

PRIMERA PARTE

ANALISIS ARMONICO

CAPITULO I

INTEGRACION

En este trabajo todos los espacios topológicos considerados serán Hausdorff y localmente compactos, así mismo, los grupos serán siempre conmutativos. Sea X un espacio Topológico y $f:X\to\mathbb{C}$ una función con valores complejos definida en X, definimos el soporte de f, denotado por sop(f), como

$$\mathrm{sop}(f)=\overline{\{x\in X \mid f(x)\neq 0\}}=\overline{\{x\in X \mid |f(x)|>0\}}$$

Se dice que una función $f:X\to\mathbb{C}$ es nula en el infinito, o se anula en el infinito, si para toda $a>0$ se tiene que

$$K=\{x\in X \mid |f(x)|\geq a\}$$

es un conjunto compacto.

Denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ a el conjunto de funciones continuas con valores complejos definidas en X junto con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, i.e. la topología que tiene como sub-básicos a los conjuntos de la forma

$$U(f_0,K,\varepsilon)=\{f\in\mathcal{C}(X) \mid \sup_{x\in K}|f(x)-f_0(x)|<\varepsilon\}$$

donde $f_0\in\mathcal{C}(X)$, $K\subset X$ es compacto y $\varepsilon>0$.

Definiremos ahora los siguientes subespacios de $\mathcal{C}(X)$:

$$\mathcal{C}^{\infty}(X)=\{f\in\mathcal{C}(X) \mid f \text{ es acotada}\}$$

en este caso, la topología como subespacio coincide con la dada por la norma del supremo: $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$

$$\mathcal{C}_0(X)=\{f\in\mathcal{C}(X) \mid f \text{ se anula al infinito}\}$$

$$\mathcal{K}(X)=\left\{ f\in\mathcal{C}(X) \,\middle|\, f \text{ tiene soporte compacto}\right\}$$

si $K\subset X$ es compacto

$$\mathcal{K}_K(X)=\left\{ f\in\mathcal{C}(X) \,\middle|\, \operatorname{sop}(f)\subset K\right\}$$

Se tienen las siguientes inclusiones

$$\mathcal{K}_K(X)\subset \mathcal{K}(X)\subset \mathcal{C}_0(X)\subset \mathcal{C}^\infty(X)\subset \mathcal{C}(X).$$

Una medida μ sobre X es una forma lineal sobre $\mathcal{K}(X)$ donde las restricciones de μ a cada $\mathcal{K}_K(X)$ es continua, es decir, μ es una forma lineal y continua en $\mathcal{K}_K(X)$ con la topología de $\mathcal{C}(X)$, el valor de una medida μ en f se denoterá

$$\mu(f)=\int_X f(x)\,d\mu(x)$$

Una medida es positiva si, para toda $f\geqslant 0$, $\mu(f)\geqslant 0$; toda medida μ se puede escribir como

$$\mu=\mu_1+i\mu_2-(\mu_3+i\mu_4)$$

donde μ_i es positiva para i=1,2,3,4.

Definimos la medida de Dirac en $x\in X$ como

$$\delta_x(f)=f(x) \qquad f\in\mathcal{K}(X)$$

Una medida es acotada si es continua en toda $\mathcal{K}(X)$, en este caso, dado que $\mathcal{K}(X)$ es denso en $\mathcal{C}_0(X)$, una medida acotada se extiende, por continuidad, a todo $\mathcal{C}_0(X)$. Al conjunto de todas las medidas acotadas, conjunto dual de $\mathcal{C}_0(X)$, lo denotaremos por $M^1(X)$, y lo dotaremos de la siguiente norma: $\|\mu\| = \sup\limits_{\|f\|\geqslant 1}|\mu(f)|$

Sea U un abierto de X, definimos la restricción μ_U de una medida μ_U a U escribiendo, para toda $f\in\mathcal{K}(X)$, $\mu_U(f)=\mu(f')$ donde $f'=f$ en U y $f'=0$ en X-U; al complemento de la unión de todos los abiertos U tales que $\mu_U=0$ se llamará el soporte de μ, $M^c(X)$ denota el conjunto de todas las medidas de soporte compacto.

Sea μ una medida sobre X y $f:X\to E$ una aplicación continua de soporte compacto definida en X y con valores en un espacio de Banach E, definimos la integral vectorial de Bochner-Bourbaki $\mu(f)$ o

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)$$

al elemento de E caracterizado por el hecho de que $\mu(f)$ está en el subespacio cerrado de E generado por la imagen de f y, para toda $\varphi\in E'$,

$$\langle\varphi,\mu(f)\rangle=\mu\langle\varphi,f(x)\rangle$$

Dada una medida μ y un espacio de Banach E definimos el espacio

$$\mathcal{L}^p_E(X,\mu)=\left\{f:X\to E\;\middle|\;\int|f|^p\,d\mu<\infty\right\}$$

con la norma

$$\|f\|_p=\int|f|^p\,d\mu \qquad 1\le p<\infty$$

Definimos en $\mathcal{L}^p_E(X,\mu)$ una relación de equivalencia identificando a la funciones que son iguales casi donde quiera (c.d.), al espacio cociente lo denotaremos por $L^p_E(X,\mu)$.

Si $E=\mathbb{C}$ entonces $\mathcal{L}^p_E(X,\mu)=\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $L^p_E(X,\mu)=L^p(X,\mu)$.

Sea μ una medida positiva sobre X y φ una función compleja μ-integrable sobre todo compacto K, entonces la aplicación, para toda $f\in\mathcal{K}(X)$,

$$f\longrightarrow(f\varphi)$$

es una medida, denotada $\varphi\mu$, y se dice que esa medida admite la función de densidad φ a partir de μ. Si φ es μ-integrable, $\varphi\mu$ es acotada; si μ es acotada o φ continua, y $\varphi\mu$ es acotada entonces φ es μ-integrable.

Sean X y Y dos espacios topológicos, $u:X\to Y$ continua y $\mu\in M(X)$, para toda $f\in \mathcal{K}(Y)$ definimos

$$\nu(f)=\mu(f\cdot u)=\int f(u(x))d\mu(x)$$

entonces $\nu\in M(Y)$; a ν se le llama la imagen de μ por u y se denota $\nu=u(\mu)$.

Sean μ y ν dos medidas sobre dos espacios topológicos X y Y respectivamente, la medida $\mu\otimes\nu$ sobre $X\times Y$ que satisface, para $f\in\mathcal{K}(X)$ y $g\in\mathcal{K}(Y)$,

$$(\mu\otimes\nu)(f\otimes g)=\mu(f)\nu(g)$$

existe y es única, donde $f\otimes g(x,y)=f(x)g(y)$. Denotaremos, para $h\in\mathcal{K}(X\ Y)$,

$$(\mu\otimes\nu)(h)=\iint_{X\times Y} h(x,y)d\mu(x)\,d\nu(y)$$

Si μ y ν son positivas y h una función compleja sobre $X\times Y$ es $\mu\otimes\nu$-integrable, entonces la función $y\longrightarrow\int h(x,y)d\mu(x)$ es ν-integrable y

$$\iint h(x,y)d\mu(x)\,d\nu(y)=\int_X\left[\int_Y h(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y)$$

este es el Teorema de Lebesgue-Foubini.

Si G es un grupo topológico (localmente compacto) siempre existe una medida λ que es invariante por la izquierda, es decir, denotando $f_s'(t)=f(st)$

$$\lambda(f_s)=\lambda(f)$$

a tal medida se le llama la medida de Haar izquierda y d t se denotará por dt simplemente. La medida de Haar es única salvo por un factor constante. La medida de Haar es acotada si y solo si G es compacto. Como todos los grupos que consideraremos serán conmutativos a la medida de Haar izquierda la llamaremos simplemente medida de Haar.

La medida de Haar de un producto de grupos es el producto de las medidas de Haar de cada factor. Si H es un subgrupo abierto de G, la medida de Haar de H es la restricción de la medida de Haar de G a H. Si por el contrario, H es un subgrupo cerrado de G y denotamos $K={}^{G}/_{H}$, se pueden escoger las medidas de Haar dg, dh y dk de G,H y K respectivamente de tal suerte que, si $f\in\mathcal{K}(G)$,

$$\int_G f(g)\,dg = \int_K \left[\int_H f(g_k h)\,dh\right] dk \qquad (1)$$

donde g_k denota un elemento cualquiera de la clase de k K, o tambien

$$\int_G f(g)\,dg = \int_K \left[\int_k f(g)\,d\mu_k g\right] dk$$

donde μ_k denota la medida sobre la clase k que resulta de trasladar la medida dh a la clase k.

CAPITULO II

ALGEBRAS DE GRUPOS.

Sea G un grupo abeliano finito, $F(G)=\{f:G\to\mathbb{C}\}$ el conjunto de todas las funciones de G en $\mathbb{C}$; se sabe que $F(G)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas de la manera usual. $F(G)$ deviene en un Algebra Compleja Conmutativa con el siguiente producto (producto convolución)

$$f,g\in F(G)\ ;\qquad (f*g)(s)=\sum_{tu=s} f(t)\,g(u)=\sum_{t} f(t)\,g(t^{-1}s)$$

Si para toda $s\in G$ denotamos por δ_s la función que vale 1 en s y 0 en otro caso, entonces, para toda $f\in F(G)$, se tiene

$$\delta_s * f = f_{s^{-1}}$$

en particular la funcion δ_e actua como el elemento unitario del algebra $F(G)$ con el producto convolución.

La aplicación

$$\begin{aligned}\delta: G &\to F(G)\\ s &\longmapsto \delta_s\end{aligned}$$

es un morfismo de G en el grupo de elementos invertibles de $F(G)$. Como para toda $f\in F(G)$

$$f=\sum_{s} f(s)\,\delta_s$$

se sigue que la imagen de G bajo δ genera a $F(G)$.

Sea ahora $\mathcal{A}$ un algebra unitaria y $U:G\to\mathcal{A}$ un morfismo de G en los elementos invertibles de $\mathcal{A}$, entonces U se prolonga, de manera única, a un morfismo del algebra $F(G)$ en $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\bar{U}: F(G) &\longrightarrow \mathcal{A}\\ f &\longmapsto U(f)=\sum_{s} f(s)\,U(s)\end{aligned}$$

tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(G) \arrow[r, "U"] & \mathcal{A} \\ G \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos dos grupos abelianos finitos G y H y $u:G\to H$ un morfismo, el morfismo composición $U = u\cdot\delta$

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{\delta} F(H)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{U}$$

se extiende de maneras única a un morfismo (que seguiremos denotando por u) de las algebras $F(G)\xrightarrow{u} F(H)$ de la siguiente forma:

Como $u(\delta_s) = \sum_t \delta_s(t)\, U(t) = U(s) = \delta_{u(s)}$

entonces, para $f \in F(G)$

$$u(f) = u(\sum_s f(s)\,\delta_s) = \sum_s f(s)\,\delta_{u(s)}$$

es decir

$$(u(f)) = \sum_{s\in u^{-1}(t)} f(s)$$

Denotaremos por $\mathcal{F}(G)$ al espacio de las funciones complejas sobre G dotadas con la adición y la multiplicación ordinarias, $\mathcal{F}(G)$ es, entonces, un Algebra Compleja Unitaria.

Sea $u:G\to H$ un morfismo de grupos, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H) &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \\ f &\longmapsto f\circ u \end{aligned}$$

es un morfismo de algebras.

Sea ahora G un grupo localmente compacto y conmutativo (GLCC), intentaremos generalizar las observaciones anteriores, pero, en este caso, deberemos restringirnos al espacio de medidas acotadas $M^1(G)$.

Definimos un producto convolución en el espacio $M^1(G)$ como sigue:

Sean μ y $\nu \in M(G)$ y $f \in \mathcal{K}(G)$, consideremos la función

$$\lambda(f) = \int_G \int_G f(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t)$$

entonces

$$|\lambda(f)| \leq \|f\| \|\mu\| \|\nu\|$$

de donde

$$\frac{|\lambda(f)|}{\|f\|} \leq \|\mu\| \|\nu\| \qquad \text{si } f \neq 0$$

por lo tanto λ es una medida acotada y $\|\lambda\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$, definimos entonces $\lambda = \mu * \nu$ como el producto convolución de μ y ν, es decir

$$(\mu * \nu)(f) = \int_G \int_G f(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t)$$

y

$$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$$

Podemos ahora enunciar la siguiente

PROPOSICION 2.1 $(M^1(G), *)$ es un Algebra de Banach Conmutativa (ABC). Además $M^1(G)$ es unitaria con elemento unitario δ_e (Medida de Dirac en e).

Demostración.- Que $M^1(G)$ es un ABC es claro por lo anterior, por otro lado

$$(\mu * \delta_e)(f) = \int_G \int_G f(st)\, d\mu(s)\, d\delta_e(t) = \int_G f(s)\, d\mu(s) = \mu(f)$$ //

Si G es finito, se puede identificar a $M^1(G)$ con $F(G)$ como sigue, para toda $f: G \to \mathbb{C}$ (claramente continua y de soporte compacto) y $\mu \in F(G)$ definimos

$$\mu(f) = \sum_{s \in G} f(s)\mu(s)$$

y si $\mu, \nu \in F(G)$

$$(\mu * \nu)(f) = \sum_{s,t} f(st)\mu(s)\nu(t) =$$

$$= \sum_{u \in G} f(u) \sum_{ts=u} \mu(s)\, \nu(t) =$$

$$= \sum_{u \in G} f(u)(\mu * \nu)(u)$$

De manera que $F(G) \cong M(G)$ como álgebras si G es finito.

Sea $\mathcal{A}$ un ABC unitario, se desea ahora, si se tiene un morfismo $U: G \to \mathcal{U}(\mathcal{A})$, los elementos invertibles de $\mathcal{A}$, extender a un morfismo de $M^1(G)$ en $\mathcal{A}$. No siempre es posible, pero para nuestros fines es suficiente en el caso dado por la siguiente

PROPOSICION 2.2 Sea E un espacio de Banach, U un morfismo de G en los automorfismos continuos de E ($\mathcal{L}(E)$):

$$U: G \to \mathcal{L}(E)$$

tal que para toda $s \in G$, $U(s)$ sea un automorfismo isométrico de E y para toda $\xi \in E$ la aplicación

$$s \longmapsto U(s)\cdot\xi$$

es continua. Entonces, para $\xi \in E$ y $\mu \in M^1(G)$, esa aplicación es μ-integrable (vectorialmente). Si escribimos

$$\overline{U}(\mu)\cdot\xi = \int U(s)\cdot\xi\, d\mu(s)$$

entonces $\overline{U}(\mu) \in \mathcal{L}(E)$ y $\|\overline{U}(\mu)\| \le \|\mu\|$ y, por lo tanto, $\overline{U}$ es un morfismo de álgebras que extiende al morfismo dado.

Observación: Si el álgebra $\mathcal{A}$ se puede realizar como un álgebra de operadores en un espacio de Banach, el teorema tiene entonces aplicación; por otro lado, Gelfand y Neumark demostraron que toda C^*-álgebra es isométrica e isomorfa a un álgebra de operadores acotados en un espacio de Hilbert. [4]

Demostración de la Proposición 2.2

Para que $U(s)\xi$ sea μ-integrable será suficiente ver que lo sea $\|U(s)\xi\|$,(ver [2]), en efecto

$$\int \|U(s)\xi\| \, d\mu(s) = \int \|\xi\| \, d\mu(s) = \|\xi\| \, \|\mu\| < \infty$$

Además

$$\|\overline{U}(\mu)\xi\| = \left\| \int U(s)\xi \, d\mu(s) \right\| \leq \|\mu\| \, \|\xi\|$$

por lo tanto $\overline{U}(\mu) \in \mathcal{L}(E)$ y $\|\overline{U}(\mu)\| \leq \|\mu\|$

Calculemos

$$\overline{U}(\delta_s)\xi = \int U(t)\xi \, d\delta_s(t) = U(s)\xi$$

por lo que $\overline{U}$ prolonga a U.

Resta ver que $\overline{U}$ es un morfismo de álgebras. Sea ψ una forma lineal y continua sobre E, entonces se tiene:

$$\langle \psi, \overline{U}(\mu * \nu)\xi \rangle = \langle \psi, \int U(s)\xi \, d(\mu * \nu)(s) \rangle$$

$$= \int \langle \psi, U(s)\xi \rangle \, d(\mu * \nu)(s)$$

$$= \iint \langle \psi, U(st)\xi \rangle \, d\mu(s) \, d\nu(t)$$

$$= \iint \langle \psi, U(s)U(t)\xi \rangle \, d\mu(s) \, d\nu(t)$$

$$= \int \left[\int \langle \psi, U(s)U(t)\xi \rangle \, d\mu(s) \right] d\nu(t)$$

$$= \int \langle \psi, \overline{U}(\mu) U(t)\xi \rangle \, d\nu(t)$$

$$= \int \langle {}^t\overline{U}(\mu)\psi , U(t)\xi \rangle \, d\nu(t)$$

$$= \langle {}^t\overline{U}(\mu)\psi , \overline{U}(\nu)\xi \rangle = \langle \psi, \overline{U}(\mu)\overline{U}(\nu)$$

por lo tanto

$$\tilde{U}(\mu * \nu)\xi = \tilde{U}(\mu)\tilde{U}(\nu)\xi$$

Sean G y H dos GLCC y $u: G \to H$ un morfismo continuo y $\mu \in M^1(G)$, si $(u(\mu))(f) = \mu(f \circ u)$, entonces $u(\mu) \in M^1(H)$, por lo tanto u se extiende, de esta manera, a un morfismo de álgebras

$$u: M^1(G) \to M^1(H)$$

ya que

$$(u(\mu * \nu))(f) = \iint (f \circ u)(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t)$$

$$= \iint f(u(s)u(t))\, d\mu(s)\, d\nu(t)$$

$$= (u(\mu) * u(\nu))(f)$$

es decir, $u(\mu * \nu) = u(\mu) * u(\nu)$.

Para toda $\mu \in M^1(G)$ definimos la involución μ^* como

$$\mu^*(f) = \int f(s)\, d\mu^*(s) = \int \overline{f(s^{-1})}\, d\mu(s) \qquad \text{con } f \in \mathcal{K}(G).$$

Las propiedades de la involución son:

$$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$$

$$(k\mu)^* = \overline{k}\mu^* \qquad k \in C$$

$$(\mu * \nu)^* = \mu^* * \nu^*$$

$$\mu^{**} = \mu$$

$$\delta_e^* = \delta_e \qquad y$$

$$\|\mu^*\| = \|\mu\|$$

con estas propiedades $M^1(G)$ se dice que es un Algebra de Banach Involutiva.

Si a toda función $\psi \in L^1(G)$ la identificamos con la medida acotada

$$f \longmapsto \int f(s)\psi(s)\, ds$$

entonces $L^1(G)$ se identifica con un subespacio cerrado de $M^1(G)$, pero $L^1(G)$ es más que un subespacio cerrado de $M^1(G)$, es un ideal cerrado de $M^1(G)$. En efecto, sea $\varphi \in L^1(G)$ y $\mu \in M^1(G)$

$$(\mu * \varphi)(f) = \int_G \int_G f(st)\,\varphi(t)\,d\mu(s)\,dt$$

$$= \int_G \int_G f(t)\,\varphi(s^{-1}t)\,d\mu(s)\,dt$$

$$= \int_G f(t) \left[\int_G \varphi(s^{-1}t)\,d\mu(s) \right] dt$$

por lo tanto la función de densidad de $\mu * \varphi$ es $\int \varphi(s^{-1}t)\,d\mu(s)$ que, por el teorema de Lebesgue-Foubini, está definida c.d. y es integrable. Todo esto lo enunciamos en la siguiente

PROPOSICION 2.3 $L^1(G)$ es un ideal cerrado de $M^1(G)$, $\mu * \varphi$ es la medida con función de densidad en $L^1(G)$

$$\int \varphi(s^{-1}t)\,d\mu(s)$$

En particular, si f y g son integrables, entonces

$$(f*g)(t) = \int f(s^{-1}t)\,g(s)\,ds$$

//

Si G es discreto, entonces $L^1(G) = M^1(G)$, en efecto, sea $\mu \in M^1(G)$, entonces $\mu(G) < \infty$ pero

$$\mu(G) = \sum_{s \in G} \mu(s) = \int_G \mu(s)\,ds$$

por lo tanto $\mu \in L^1(G)$.

Si G no es discreto, entonces:

a) $L^1(G)$ no tiene elemento unitario (cf. proposición 2.5).

b) no existe un morfismo de G en $L^1(G)$.

La siguiente proposición es consecuencia de la proposición 2.2 aplicada al caso particular de las medidas con función de densidad en $L^1(G)$.

PROPOSICION 2.4 Sea E un espacio de Banach, $U:G \to \mathcal{L}(E)$ tal que para toda s, $U(s)$ es un automorfismo isométrico y la aplicación $s \to U(s)\xi$ es continua para toda $\xi \in E$. Entonces, para toda $\xi \in E$ y $f \in L^1(G)$, $s \to f(s)U(s)\xi$ es integrable y

$$U(f)\xi = \int_G f(s)U(s)\xi\, ds$$

$U(f)$ es lineal, continua y de norma menor o igual a $\|\xi\|$ y es un morfismo de álgebras de $L^1(G)$ en $\mathcal{L}(E)$. //

Restringiendo la involución a $L^1(G)$ tenemos

$$(f(s)ds)^*(g) = \overline{\int_G \overline{g(s^{-1})}f(s)ds} = \int_G g(s)\,\overline{f(s^{-1})}ds$$

por lo que la involución de una medida con función de densidad en $L^1(G)$ admite, también, una función de densidad $L^1(G)$, a saber $\overline{f(s^{-1})}$, por lo que resulta natural definir, para toda $f \in L^1(G)$

$$f^*(s) = \overline{f(s^{-1})}$$

con lo que $L^1(G)$ deviene en un álgebra involutiva.

LEMA 2.1 Sea $1 \leq p < \infty$ y para toda $s \in G$ definamos $U(s)f = f_s$, entonces, para toda $f \in L^p(G)$, la aplicación $s \to U(s)f$ es continua.

Demostración Calculemos, para $s_0 \in G$ y $f \in \mathcal{K}(G)$

$$\|U(s)f - U(s_0)f\|_p^p = \int |f_s(t) - f_{s_0}(t)|^p dt$$

$$\leq \varepsilon^p \int_K dt$$

donde K es un compacto de G tal que $sop(f_s) \cup sop(f_{s_0}) \subset K$; por lo tanto la aplicación es continua en $\mathcal{K}(G)$ y, como $\mathcal{K}(G)$ es denso en $L^p(G)$, la aplicación es continua en todo $L^p(G)$ //

Sea ahora $\mu \in M^1(G)$, por la proposición 2.2 es posible extender la $U(s)$ del lema anterior a $M^1(G)$, haciendo $E = L^p(G)$, con lo que se tiene que

$$U(\mu) f = \int f_s \, d\mu(s) \in L^p(G).$$

Definimos, haciendo una leve modificación a $U(\mu) f$, la convolución de una medida acotada μ y una función $f \in L^p(G)$, con $1 \leq p < \infty$, como:

$$(\mu * f) = \int f_{s^{-1}} d\mu(s)$$

de donde $\mu * f \in L^p(G)$.

La convolución goza de las siguientes propiedades:

(i) La aplicación es bilineal y bicontinua, ademas

$$\|\mu * f\| \leq \|\mu\| \|f\|_p$$

(ii) $(\mu * \nu) * f = \mu * (\nu * f)$

Estas dos propiedades son consecuencia de la proposición 2.2.

(iii) $\mu * f$ es límite, en sentido de $L^p(G)$, de combinaciones lineales de traslaciones de f, de acuerdo a las propiedades de la integral de Bochner-Bourbaki.

(iv) $(\mu * f)(s) = \int f(t^{-1} s) \, d\mu(t)$, de donde, si $f \in L^1(G)$, se recupera la definición anterior. La demostración de esto no es sencilla vease [11].

Si $g \in L^1(G)$, entonces, para $f \in L^p(G)$,

$$(g * f)(s) = \int f(t^{-1} s) g(t) \, dt \qquad \text{y}$$

$$\|g * f\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p$$

<u>LEMA 2.2</u> Si $f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, $f * g$ es continua y acotada.

<u>Demostración</u>

$$(f*g)(s) = \int f(t)\, g(t^{-1}s)\, dt =$$

$$= \int f(t)\, \overline{g^*(s^{-1}t)}\, dt =$$

$$= \int f(t)\, \overline{g^*_{s^{-1}}(t)}\, dt = (f \mid g^*_{s^{-1}})$$

donde $(f \mid g)$ es el producto interior en $L^2(G)$. Como g^* depende continuamente de s por el lema 2.1 y el producto interior es lineal y continuo, se sigue la afirmación #

<u>PROPOSICION 2.5</u> El Algebra $L^1(G)$ admite elemento unitario si y solo si G es discreto.

<u>Demostración</u> Si G es discreto, se vió que entonces $L^1(G) = M^1(G)$, por lo tanto $L^1(G)$ admite elemento unitario, a saber, δ_e.

Supongamos que $L^1(G)$ admite elemento unitario φ y G no discreto, existe entonces una vecindad abierta U de $e \in G$ tal que

$$\int_U |\varphi(s)|\, ds < 1/2$$

Sea V una vecindad simétrica de e tal que $V^2 \subset U$ y χ_V la función característica de V, entonces, para $s \in V$,

$$1 = \chi_V(s) = (\chi_V * \varphi)(s) = \int \chi_V(t)\, \varphi(t^{-1}s)\, dt =$$

$$= \int_V \varphi(t^{-1}s)\, dt =$$

$$= \int_{V^{-1}} \varphi(ts^{-1})\, dt =$$

$$= \int_{sV} \varphi(t)\,dt$$

$$\leq \int_{U} \|\varphi(t)\|\,dt < 1/2$$

que es una contradicción. //

PROPOSICION 2.6 Sea $r \in G$ y para toda U vecindad de r sea φ_U una función no negativa, integrable, nula fuera de U y con la propiedad de que

$$\int \varphi_U(s)\,ds = 1$$

entonces, para toda $f \in L^p(G)$ con $1 \leq p < \infty$,

$$\varphi_U * f \longrightarrow f_{r^{-1}} \text{ en } L^p(G)$$

siguiendo el filtro de vecindades en r.

Demostración Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $1 < p < \infty$ o $q = \infty$ si $p = 1$, entonces $L^q(G) = (L^p(G))^*$. Se demostrará que, dado $\varepsilon > 0$, para toda $g \in L^q(G)$ tal que $\|g\| \leq 1$ existe U_0 vecindad de r tal que, si $U \subset U_0$, entonces

$$|\langle \varphi_U * f - f_{r^{-1}}, g\rangle| < \varepsilon$$

por lo que, forzosamente, $\varphi_U * f - f_{r^{-1}} \to 0$ en $L^p(G)$ según el filtro de vecindades en r. Así pues

$$|\langle \varphi_U * f - f_{r^{-1}}, g\rangle| = |\langle \varphi_U * f, g\rangle - \langle f_{r^{-1}}, g\rangle|$$

$$= |\langle \int \varphi_U(s)\, f_{s^{-1}}(t)\,ds\ ,\ g\rangle - \langle f_{r^{-1}}, g\rangle|$$

$$= \left|\int \varphi_U(s)\left[\langle f_{s^{-1}}, g\rangle - \langle f_{r^{-1}}, g\rangle\right] ds\right|$$

$$= \left| \int \varphi_U(s) \langle f_{s^{-1}} - f_{r^{-1}}, g \rangle ds \right|$$

$$\leq \int |\varphi_U(s)| |\langle f_{s^{-1}} - f_{r^{-1}}, g \rangle| ds$$

$$\sup_{s \in U} |\langle f_{s^{-1}} - f_{r^{-1}}, g \rangle| \int \varphi_U(s) ds$$

$$= \sup_{s \in U} |\langle f_{s^{-1}} - f_{r^{-1}}, g \rangle|$$

$$\leq \sup_{s \in U} \|f_{s^{-1}} - f_{r^{-1}}\|_p \|g\|_q$$

$$\leq \sup_{s \in U} \|f_{s^{-1}} - f_{r^{-1}}\|_p < \varepsilon$$

de acuerdo con el lema 2.1. //

<u>COROLARIO 2.1</u> Para $r = e$, las φ_U forman una unidad aproximada de $L^1(G)$, es decir, para toda $f \in L^1(G)$, $\|\varphi_U * f - f\| \to 0$. //

De manera que, aún cuando en general $L^1(G)$ no tiene elmento unitario, si tiene unidades aproximadas.

<u>COROLARIO 2.2</u> Sea $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^1(G)$ tal que $f * g = 0$ para toda $g \in L^p(G)$, entonces $f = 0$.

<u>Demostración</u> Sea $r = e$ y $\varphi_U \in \mathcal{K}(G)$, entonces $f * \varphi_U$ es nula y $f * \varphi_U \to f$ en $L^1(G)$, por el corolario 2.1, de donde $f = 0$ //

<u>PROPOSICION 2.7</u> Los ideales cerrados de $L^1(G)$ son exactamente los subespacios vectoriales cerrados invariantes bajo traslaciones.

<u>Demostración</u> Si $I \subset L^1(G)$ es un ideal cerrado y si $f \in I$ y $r \in G$, entonces $\varphi_U * f \in I$ con las φ_U como en la proposición anterior, esto implica que $\varphi_U * f \to f_{r^{-1}} \in I$ por ser I cerrado.

Recíprocamente, si I es un subespacio vectorial cerrado invariante bajo traslaciónes, y si $f \in I$ y $g \in L^1(G)$, entonces $f * g$ es límite de traslaciones de f (propiedad (iii) de la convolución), por lo tanto $f*g \in I$.

PROPOSICION 2.8 El álgebra $L^1(G)$ es sin radical, donde el radical de un álgebra es la intersección de todos los ideales regulares máximos, es decir, ideales I tales que $L^1(G)/_I$ es unitario y máximos con esa propiedad.

Demostración Para toda $f \in L^1(G)$ definimos la siguiente aplicación

$$U(f): L^2(G) \to L^2(G)$$
$$g \longmapsto U(f)g = f*g$$

$U(f)$ es lineal y como $\|U(f)g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$, $U(f)$ es continua, por lo tanto,

$$U: L^1(G) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$$

es un morfismo de álgebras y, además, involutivas:

$$(U(f^*)g_1|g_2) = \int [U(f^*)g_1(s)] \overline{g_2(s)}\, ds$$

$$= \int f^* * g_1(s) \overline{g_2(s)}\, ds$$

$$= \iint \overline{f(s^{-1}t)}\, g_1(t)\, dt\, \overline{g_2(s)}\, ds$$

$$= \int g_1(t) \int \overline{f(s^{-1}t)\, g_2(s)}\, ds\, dt$$

$$= \int g_1(t)\, \overline{f*g_2(t)}\, dt$$

$$= (g_1|U(f)g_2)$$

por lo tanto, $U(f^*) = [U(f)]^*$ (donde $[U(f)]^*$ es el transpuesto de $U(f)$).

Si f es tal que $U(f)=0$, entonces $f*g = 0$ para toda $g \in L^2(G)$ y, por el corolario 2.2, $f = 0$, de donde U es monomorfismo.

Sea $f_0 \in Rad(L^1(G))$, entonces $f_0^* * f \in Rad(L^1(G))$ por ser este un ideal. Además, toda forma lineal positiva se anula en el radical (ver [9]). Sea $g \in L^2(G)$, entonces $f \to (U(f)g|g)$ es una forma lineal positiva ya que

$$(U(f^*f)g|g) = \|U(f)g\|^2 \geq 0$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 = (U(f_0^*f)g|g) &= (U(f_0^*)U(f_0)g|g) = \\ &= (U(f_0)g|U(f_0)g) = \\ &= \|U(f)g\|^2 \end{aligned}$$

es decir, $U(f_0)g = 0$ para toda $g \in L^2(G)$, por lo tanto $U(f_0) = 0$ y esto implica, por ser U monomorfismo, que $f_0 = 0$. //

Definimos una función continua de tipo positivo (FCTP) como una función continua f tal que, para toda familia finita $s_1,\ldots s_n$ de elementos en G y para toda colección $c_1,\ldots,c_n$ de números complejos, se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c}_j f(s_i s_j^{-1}) \geq 0$$

Las siguientes son propiedades de las funciones FCTP:

a) $f(e) \geq 0$, tomese $n=1$, $s_1=e$ y $c_1=1$ en la definición.

b) $f(s^{-1}) = \overline{f(s)}$, en la desigualdad se $n=2$, $s_1=e$, $s_2=s$ cualquiera, $c_1=1$ y $c_2=\lambda$ un número complejo arbitrario, entonces

$$f(e) + f(s)\overline{\lambda} + f(s^{-1})\lambda + f(e)|\lambda|^2 \geq 0 \qquad \ldots(+)$$

como $f(e) \in \mathbb{R}$, $f(s^{-1})\lambda + f(s)\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, se $\lambda=1$ primero y luego $\lambda = i$, entonces

$$f(s) + f(s^{-1}),\ i[f(s^{-1}) - f(s)] \in \mathbb{R}$$

y esto ocurre si y solo si $f(s^{-1}) = \overline{f(s)}$.

c) $|f(s)| \leq f(e)$, si $f(e) = 0$, tómese $\lambda = -f(s)$, si $f(e) > 0$ tómese $\lambda = -\frac{f(s)}{f(e)}$ y sustituyase λ en (+).

De esto se sigue que si f es FCTP, entonces f es acotada y

$$\|f\|_\infty = f(e)$$

<u>LEMA 2.3</u> Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, entonces $f^* * f$ es FCTP.

<u>Demostración</u> $f^* * f$ es continua de acuerdo con el lema 2.2, sean $s_1, \dots, s_n \in G$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j (f^* * f)(s_i s_j^{-1}) = \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \int \overline{f(t^{-1})}\, f(t^{-1} s_i s_j^{-1})\, dt$$

$$= \int \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \overline{f(ts_j)}\, f(ts_i)\, dt$$

$$= \int \Big|\sum_i c_i f(ts_i)\Big|\, dt \geq 0$$

//

Denotaremos por:

$P^+(G)$ al conjunto de FCTP,

$P(G)$ al espacio generado po $P^+(G)$,

$P^1(G) = L^1(G) \cap P(G)$ y esto implica que $P^1(G) \subset L^p(G)$ para toda p,

$P^1(G)$ es un álgebra de convolución ya que

$$4f*g = (f+g^*)*(f+g^*)^* - (f-g^*)*(f-g^*)^* + i(f+ig^*)*(f+ig^*)^* - i(f-ig^*)*(f-ig^*)^*$$

y cada término del segundo miembro es FCTP.

<u>LEMA 2.4</u> $P^1(G)$ es denso en $L^p(G)$ para $1 \leq p < \infty$.

<u>Demostración</u> En efecto, sean $f, g \in \mathcal{K}(G)$, entonces $f*g \in P^1(G)$ ya que $f^*, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ y, por tanto, $(f^*)^* * g \in P^+(G)$ (lema 2.3). Por otro lado, según la proposición 2.6, las funciones de la forma $f*g$ son densas en $\mathcal{K}(G)$.

//

CAPITULO III

CARACTERES Y GRUPO DUAL

Sea $\mathbb{T} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$ el grupo de los complejos de modulo uno junto con la multiplicación. $\mathbb{T}$ con la topología de subespacio deviene en un grupo topológico localmente compacto (más aún en un grupo compacto).

Definición: Sea G un GLCC, un caracter de G es un morfismo continuo $\chi : G \to \mathbb{T}$, que denotaremos indistintamente por $\chi(t)$ o $\langle \chi, t \rangle$. Al conjunto $\hat{G}$ de todos los caracteres se le topologiza con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos (cf cap. I), al conjunto $\hat{G}$ junto con la operación del producto definida puntualmente, $\chi\xi(t) = \chi(t)\xi(t)$, y esta topología se le llama el grupo dual de G.

Los principales ejemplos son:

1) $G = \mathbb{R}$. Si $\chi \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces $\langle \chi, x \rangle = e^{iax}$ con $a \in \mathbb{R}$; recíprocamente, si $a \in \mathbb{R}$, e^{iax} es un caracter de $\mathbb{R}$, por lo tanto $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.

2) $G = \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, el toro. $\chi \in \hat{\mathbb{T}}^1$ si y solo si $\langle \chi, x \rangle = e^{inx}$ con $n \in \mathbb{Z}$, de manera que $\hat{\mathbb{T}}^1 \cong \mathbb{Z}$.

3) $G = \mathbb{Z}$. Si $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}$, entonces $\chi(n) = e^{ina}$ donde $\bar{a} \in \mathbb{T}$ y un representante $\bar{a} \in \mathbb{T}^1$ determina uno y solo un caracter de $\mathbb{Z}$, es decir $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}^1$.

Si $G_1, G_2, \ldots, G_n$ son GLCC entonces $\widehat{\prod G_i} \cong \prod \hat{G}_i$.

El siguiente resultado relaciona la estructura del grupo dual con las Algebras de Banach. Para toda $\chi \in \hat{G}$ y toda $f \in L^1(G)$ se define el siguiente número:

$$h_\chi(f) = \int_G \overline{\langle \chi, s \rangle}\, f(s)\, ds$$

<u>TEOREMA 3.1</u> Para todo caracter χ de G, h_χ es un caracter de $L^1(G)$ (en el sentido de Álgebras de Banach), y la aplicación

$$\chi \longrightarrow h_\chi$$

es un homeomorfismo de $\widehat{G}$ sobre $\widehat{L^1(G)}$ (Espectro de $L^1(G)$).

<u>Demostración</u> Hay que demostrar varias cosas:

A) h_χ es un caracter de $L^1(G)$.

En efecto, sean $f, g \in L^1(G)$, claramente h_χ es lineal, ahora

$$h_\chi(f*g) = \int \overline{\langle \chi, s\rangle} (f*g)(s)\,ds$$

$$= \iint f(t^{-1}s)\overline{\langle \chi, s\rangle}\, g(t)\,dt\,ds$$

$$= \int\int f(s)\overline{\langle \chi, ts\rangle}\, g(t)\,dt\,ds$$

$$= \int\int f(s)\overline{\langle \chi, s\rangle}\, g(t)\overline{\langle \chi, t\rangle}\,dt\,ds$$

$$= \int f(s)\overline{\langle \chi, s\rangle}\,ds \int g(t)\overline{\langle \chi, t\rangle}\,dt$$

$$= h_\chi(f) h_\chi(g)$$

B) La aplicación es inyectiva.

Sean χ y ξ caracteres de G tales que, para toda $f \in L^1(G)$, $h_\chi(f) = h_\chi(f)$, entonces

$$\int \overline{\langle \chi, s\rangle} f(s)\,ds = \int \overline{\langle \xi, s\rangle} f(s)\,ds$$

para toda $f \in L^1(G)$, lo cual implica que

$$\int \overline{\langle \chi, s\rangle} - \overline{\langle \xi, s\rangle}\; f(s)\,ds = 0$$

es decir

$$\overline{\langle \chi, s\rangle} = \overline{\langle \xi, s\rangle} \qquad \text{c.d.}$$

como χ y ξ son continuas, entonces $\overline{\langle \chi, s\rangle} = \overline{\langle \xi, s\rangle}$ y, por lo tanto, $\chi = \xi$.

C) La aplicación es sobre.

Sea $\alpha \in \widehat{L^1(G)}$, entonces existe $f \in L^1(G)$ tal que $\alpha(f) \neq 0$. Definamos, para toda $r \in G$,

$$\chi(r) = \frac{\alpha(f_r)}{\alpha(f)}$$

es claro que $\chi(e) = 1$. De la propiedad $f_r * f_s = f_{rs} * f$ se sigue

$$\chi(rs) = \frac{\alpha(f_{rs})}{\alpha(f)} = \frac{\alpha(f_{rs})\alpha(f)}{\alpha(f)\alpha(f)}$$

$$\frac{\alpha(f_{rs} * f)}{\alpha(f)\alpha(f)} = \frac{\alpha(f_r * f_s)}{\alpha(f)\alpha(f)}$$

$$= \frac{\alpha(f_r)\alpha(f_s)}{\alpha(f)\alpha(f)} = \chi(r)\chi(s)$$

Sea $r \in G$ y tomemos ahora las funciones φ_U como en la proposición 2.6, entonces, como $\|\alpha\| \leq 1$, se tiene que

$$|\alpha(\varphi_U)| \leq \|\varphi_U\| = 1$$

ahora bien

$$\alpha(\varphi_U)\alpha(f) = \alpha(\varphi_U * f) \longrightarrow \alpha(f_{r^{-1}})$$

por continuidad de α, de donde

$$\alpha(\varphi_U) \longrightarrow \chi(r^{-1})$$

y, para toda $r \in G$,

$$|\chi(r^{-1})| \leq 1$$

como

$$1 = \chi(e) = \chi(r^{-1}r) = \chi(r^{-1})\chi(r)$$

y

$$|\chi(r)| \leq 1$$

esto implica que

$$|\chi(r)| = |\chi(r^{-1})| = 1$$

por el lema 2.1, χ es continua, por tanto $\chi \in \hat{G}$.

Calculemos ahora h_χ, para toda $g \in L^1(G)$

$$\alpha(g) = \frac{\alpha(g*f)}{\alpha(f)} = \frac{1}{\alpha(f)}\alpha\left(\int g(t^{-1}s)\, f(t)\, dt\right)$$

como $\alpha \in \widehat{L^1(G)}$, existe una función $\varphi \in L^\infty(G)$ tal que

$$\alpha(f) = \int \varphi(s)\, f(s)\, ds$$

por tanto

$$\alpha(g) = \frac{1}{\alpha(f)} \int \varphi(s) \int g(t^{-1}s)\, f(t)\, dt\, ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha(f)} \int\int \varphi(s)\, g(t^{-1})\, f(s^{-1}t)\, dt\, ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha(f)} \int g(t^{-1}) \int \varphi(s)\, f(s^{-1}t)\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha(f)} \int g(t^{-1})\, \alpha(f_t)\, dt =$$

$$= \int g(t^{-1})\, \frac{\alpha(f_t)}{\alpha(f)}\, dt =$$

$$= \int g(t^{-1}) \langle \chi, t\rangle\, dt = \int g(t)\, \overline{\langle \chi, t\rangle}\, dt$$

donde se ha usado que $\langle \chi, t^{-1}\rangle = \overline{\langle \chi, t\rangle}$.

Por lo tanto

$$h_\chi(g) = \alpha(g)$$

D) La biyección es continua.

Sea $\chi \in \widehat{G}$ y supongamos que $\chi \to \chi_0$ uniformemente sobre todo compacto, sea $\varepsilon > 0$ y $f \in L^1(G)$ y sea K un compacto en G tal que

$$\int_{G-K} |f(s)|\,ds < \varepsilon$$

entonces

$$|h_\chi(f) - h_{\chi_0}(f)| = \left|\int_G [\langle \chi, s\rangle - \langle \chi_0, s\rangle] f(s)\,ds\right|$$

$$\leq \left|\int_K |\langle \chi, s\rangle - \langle \chi_0, s\rangle| |f(s)|\,ds\right| +$$

$$+ \int_{G-K} |\langle \chi, s\rangle - \langle \chi_0, s\rangle| |f(s)|\,ds$$

$$\leq \sup_{s \in K} |\langle \chi, s\rangle - \langle \chi_0, s\rangle| \, \|f\|_1 + 2\varepsilon$$

por lo tanto, si $\chi \to \chi_0$ uniformemente sobre compactos, $h_\chi(f) \to h_{\chi_0}(f)$ para toda $f \in L^1(G)$.

E) La aplicación es bicontinua.

En efecto, sea $\alpha \in \widehat{L^1(G)}$ y sea f tal que $\alpha(f) \neq 0$; como $\langle \alpha, f\rangle$ es continua en α, existe una vecindad U de α tal que, si $\alpha' \in U$, entonces $\alpha'(f) \neq 0$, por tanto χ', el asociado a α', es de la forma

$$\chi'(r) = \frac{\alpha'(f_r)}{\alpha'(f)}$$

y esto para todo $\alpha' \in U$.

Como la aplicación $s \to f_s$ es continua, entonces

$$H = \left\{ f_r \;\middle|\; r \in K,\ K \subset G \text{ compacto} \right\}$$

es un compacto y como los caracteres de $L^1(G)$ son equicontinuos, entonces, por el Teorema de Ascoli, $\alpha'(f_r)$ converge uniformemente a $\alpha(f_r)$ en H, es decir, dado $\varepsilon>0$

$$\sup_{f_r\in H} |\alpha'(f_r) - \alpha(f_r)| < \varepsilon$$

o, dicho de otro modo

$$\sup_{r\in K} |\alpha'(f_r) - \alpha(f_r)|$$

sea V vecindad compacta de α y M tal que $|\alpha'(f)|<M$ para $\alpha'\in V$ y $\varepsilon' 0$ tal que $|\alpha'(f)\alpha(f)|\geq\varepsilon'$, entonces

$$\sup_{r\in K} |\chi'(r) - \chi(r)| = \sup_{r\in K} \left|\frac{\alpha'(f_r)}{\alpha'(f)} - \frac{\alpha(f_r)}{\alpha(f)}\right|$$

$$\sup \left|\frac{\alpha(f)\alpha'(f_r) - \alpha'(f)\alpha(f_r)}{\alpha'(f)\alpha(f)}\right| < \frac{M\varepsilon}{\varepsilon'}$$

por lo tanto, que $\alpha'\to\alpha$ en $\widehat{L^1(G)}$ implica que $\chi'\to\chi$ uniformemente sobre compactos, es decir $\chi'\to\chi$ en $\hat{G}$, lo cual implica que la aplicación es bicontinua.

Todo esto demuestra, pues, que $\hat{G} \cong \widehat{L^1(G)}$. //

<u>COROLARIO 3.1</u> $\hat{G}$ es localmente compacto y $\hat{G}$ es compacto si y solo si G es discreto.

<u>Demostración</u> Se sabe que $\widehat{L^1(G)}$ es localmente compacto y el espectro de un álgebra es compacto si y solo si el álgebra es unitaria, por la proposición 2.5, $L^1(G)$ es unitaria si y solo si G es discreto. //

<u>COROLARIO 3.2</u> Todo caracter de $L^1(G)$ es Hermitiano.

<u>Demostración</u>

$$h_\chi(f^*) = \int \overline{\langle\chi,s\rangle}\, \overline{f(s)}\, ds =$$

$$= \int \overline{\langle\chi,s\rangle f(s)}\, ds =$$

$$= \overline{\int \overline{\langle \chi , s \rangle} f(s)\, ds}$$

$$= \overline{h_\chi(f)}$$

//

COROLARIO 3.3 Para todo $s \in G$ con $s \neq e$, existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\langle \chi , s \rangle \neq 1$.

Demostración Sea $f \in L^1(G)$ tal que $f \neq f_s$, entonces existe $\alpha \in \widehat{L^1(G)}$ tal que $\alpha(f) \neq \alpha(f_s)$, esto debido a que el álgebra $L^1(G)$ es sin radical y, en ese caso la transformada de Gelfand es inyectiva, es decir, existe $\alpha \in \widehat{L^1(G)}$ tal que $\hat{f}(\alpha) = \alpha(f) \neq \alpha(f_s) = \hat{f}_s(\alpha)$. Así pues, si $f \in \operatorname{Ker}\alpha$ entonces, por la proposición 2.7, $f_s \in \operatorname{Ker}\alpha$ y entonces $\alpha(f) = \alpha(f_s) = 0$, contradiciendo la elección de f, de donde $f \notin \operatorname{Ker}\alpha$ y $\chi(s) = \dfrac{\alpha(f_s)}{\alpha(f)} \neq 1$. //

COROLARIO 3.4 El conjunto de las combinaciones lineales de caracteres es denso en $\mathcal{C}(G)$, según la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Demostración Sea A tal conjunto, $K \subset G$ compacto. Por el corolario 3.3 A_K separa puntos de K, además contiene a las constantes, por tanto, el teorema de Stone-Weierstrass implica que $A|_K$ es denso en $\mathcal{C}(K)$. Como K fue arbitrario, esto implica la afirmación. //

PROPOSICION 3.1 Para todo $\chi \in \hat{G}$, la aplicación

$$\mu \longrightarrow \overline{\hat{\mu}(\chi)} = \int \overline{\langle \chi , s \rangle}\, d\mu(s)$$

es un caracter de $M^1(G)$.

Demostración De manera análoga a la primera parte de la demostración del teorema 3.1. //

Definimos, para todo $s \in G$, la aplicación

$$u: G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$$
$$s \longrightarrow u(s) = u_s : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{T}$$
$$u_s(\chi) = \langle \chi, s \rangle = \chi(s)$$

Demostraremos que efectivamente u_s es un caracter de $\hat{G}$, es decir:

i) $u_s(\chi\xi) = (\chi\xi)(s) = \chi(s)\,\xi(s) = u_s(\chi)\,u_s(\xi)$

ii) Supongamos que $\chi \to \xi$, i.e. $\chi(s) \to \xi(s)$ uniformemente sobre compactos, entonces sea K un compacto de G y $\varepsilon > 0$. Sea $\bar{K}$ un compacto de $\hat{G}$ tal que $\xi \in \bar{K} \subset U(K, \varepsilon, \xi)$ lo cual es posible por ser $\hat{G}$ localmente compacto. Si $\chi \to \xi$ entonces se puede suponer que $\chi \in \bar{K}$ y, por tanto,

$$|\langle \xi, s \rangle - \langle \chi, s \rangle| \leq \sup_{t \in K} |\langle \xi, t \rangle - \langle \chi, t \rangle| < \varepsilon$$

lo cual implica

$$|u_s(\xi) - u_s(\chi)| < \varepsilon$$

y esto vale para toda $\chi \in \bar{K}$, por lo tanto,

$$\sup_{\chi \in \bar{K}} |u_s(\xi) - u_s(\chi)| < \varepsilon$$

por lo tanto, si $\chi \to \xi$, $u_s(\chi) \longrightarrow u_s(\xi)$. De manera que u_s es un caracter de $\hat{G}$.

Afirmamos que la aplicación es inyectiva y continua. Supongamos que $u_s = u_t$, entonces $u_s(\chi) = u_t(\chi)$ para toda $\chi \in \hat{G}$, es decir, $\chi(s) = \chi(t)$ para toda $\chi \in G$; sea χ tal que, si $st^{-1} \neq e$, entonces $\chi(st^{-1}) \neq 1$ (cf. corolario 3.3), pero entonces $\chi(s) \neq \chi(t)$, como estamos suponiendo lo contrario, entonces, necesariamente, $st^{-1} = e$, es decir, $s = t$, por lo que la aplicación es inyectiva.

Para ver que la aplicación es continua sea $s_0 \in G$ y U una vecindad de u_{s_0} en $\hat{\hat{G}}$, entonces existe un compacto K en $\hat{G}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$U(K, \varepsilon, u_{s_0}) \subset U$$

Como $K_s = \{\varphi(s) \mid \varphi \in K\} = u_s(K)$ es compacto, el teorema de Ascoli asegura que la familia

$$\{\chi\}_{\chi \in K}$$

es equicontinua, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de s_0 tal que $s \in V$ implica que

$$\sup_{\chi \in K} | \langle \chi, s \rangle - \langle \chi, s_0 \rangle | < \varepsilon$$

entonces, $s \in V$ implica

$$\sup_{\chi \in K} | u_s(\chi) - u_{s_0}(\chi) | < \varepsilon$$

por lo tanto $u_s \in U(K, \varepsilon, u_{s_0}) \subset U$, lo cual implica que u es continua en s_0 y, por la arbitrariedad de s_0, u es continua en todo G.

A este morfismo se le llama el morfismo canónico de G en $\hat{\hat{G}}$ y el teorema de dualidad de Pontriagin (3.4) demostrará que este morfismo es un isomorfismo de G sobre $\hat{\hat{G}}$.

Vamos ahora a definir la transformada de Fourier para las medidas acotadas y las funciones integrables, pero antes recordaremos el concepto de transformada de Gelfand para las álgebras de Banach conmutativas. Si $\mathcal{A}$ es un ABC y $\hat{\mathcal{A}}$ el espectro de $\mathcal{A}$, se define la siguiente función

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{C}_0(\hat{\mathcal{A}}) \\ a &\longmapsto \mathcal{J}(a) = \hat{a} : \hat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad \chi \longmapsto \hat{a}(\chi) = \langle \chi, a \rangle \end{aligned}$$

a $\hat{a}$ se conoce como la transformada de Gelfand de a y se demuestra que $\hat{a} \in \mathcal{C}_0(\hat{\mathcal{A}})$

Estamos en condición de definir la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : M^1(G) &\longrightarrow \mathcal{C}_b(\hat{G}) \\ \mu &\longmapsto \mathcal{F}\mu : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}\mu$ se llama la TRANSFORMADA DE FOURIER de μ y se define como

$$\mathcal{F}\mu(\chi)=\int\overline{\langle\chi,s\rangle}\,d\mu(s)$$

Se define tambien la COTRANSFORMADA DE FOURIER de como

$$\overline{\mathcal{F}}\mu(\chi)=\int\langle\chi,s\rangle\,d\mu(s)$$

para $\mu\in M^1(G)$ y $\chi\in\hat{G}$.

La transformada y la cotransformada de Fourier gozan de las siguientes propiedades:

i) Como $\hat{G}\cong M^1(G)\subset M(G)$, la transformada de Fourier de una medida acotada es la restricción de su transformada de Gelfand a $\hat{G}$, identificando éste último con $M^1(G)$.

ii) $\overline{\mathcal{F}}\mu(\chi)=\mathcal{F}\mu(\chi^{-1})$, en efecto

$$\mathcal{F}\mu(\chi^{-1})=\int\overline{\langle\chi^{-1},s\rangle}\,d\mu(s)$$

$$=\int\langle\chi,s\rangle\,d\mu(s)\;=\overline{\mathcal{F}}\mu(\chi)$$

debido a que $\overline{\langle\chi,s\rangle}=\langle\chi^{-1},s\rangle$.

iii) $\mathcal{F}\mu$ y $\overline{\mathcal{F}}\mu$ son con continuas y, además,

$$|\mathcal{F}\mu(\chi)|\leq\int|\langle\chi,s\rangle|\,d\mu(s)\;=\|\mu\|$$

por lo que $\|\mathcal{F}\mu\|_\infty\leq\|\mu\|$ y lo mismo para $\overline{\mathcal{F}}\mu$.

iv) $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son morfismos involutivos del álgebra $M^1(G)$ en $\mathcal{C}^\infty(\hat{G})$, en efecto

$$\mathcal{F}\mu^*(\chi)=\int\overline{\langle\chi,s\rangle}\,d\mu^*(s)\;=$$

$$= \overline{\int \overline{\overline{\langle \chi, s\rangle}}\, d\mu(s)}$$

$$= \overline{\int \overline{\langle \chi, s\rangle}\, d\mu(s)} = \overline{\mathcal{F}\mu(\chi)}$$

Analogamente se comprueba para $\overline{\mathcal{F}}$.

v) $\mathcal{F}\delta_s = \widehat{s^{-1}}$ la transformada de Gelfand de s^{-1} identificando a G en M(G), en efecto

$$\mathcal{F}\delta_s(\chi) = \int \overline{\langle \chi, t\rangle}\, d\delta_s(t) = \overline{\langle \chi, s\rangle} = \langle \chi, s^{-1}\rangle = \widehat{s^{-1}}(\chi)$$

vi) $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ transforman traslación en multiplicación por un caracter y viceversa, es decir

$$\mathcal{F}\mu_t(\chi) = \int \overline{\langle \chi, s\rangle}\, d\mu_t(s) =$$

$$\int \overline{\langle \chi, ts\rangle}\, d\mu(s) =$$

$$= \int \overline{\langle \chi, t\rangle}\, \overline{\langle \chi, s\rangle}\, d\mu(s)$$

$$\mathcal{F}\mu_t(\chi) = \overline{\langle \chi, t\rangle}\, \mathcal{F}\mu(\chi)$$

$$\mathcal{F}(\chi\mu)(\xi) = \int \overline{\langle \xi, s\rangle}\, d\chi\mu(s) =$$

$$= \int \overline{\langle \xi, s\rangle}\langle \chi, s\rangle\, d\mu(s) =$$

$$= \int \overline{\langle \xi, s\rangle \langle \chi^{-1}, s\rangle}\, d\mu(s) =$$

$$= \int \overline{\langle \xi\chi^{-1}, s\rangle}\, d\mu(s) = (\mathcal{F}\mu)_{\chi^{-1}}(\xi)$$

$$\mathcal{F}(\chi\mu)(\xi) = (\mathcal{F}\mu)_{\chi}(\xi)$$

vii) Si μ es positiva, $\mathcal{F}\mu$ y $\overline{\mathcal{F}}\mu$ son de tipo positivo, por ejemplo, para $\mathcal{F}\mu$, sean $\chi_1,\dots,\chi_n \in \widehat{G}$ y $c_1,\dots,c_n \in \mathbf{C}$, entonces

$$\sum_{i,j} c_i\bar{c}_j\mathcal{F}\mu(\chi_i\chi_j^{-1}) = \sum_{i,j} c_i\bar{c}_j\int\overline{\langle\chi_i,s\rangle}\langle\chi_j,s\rangle\, d\mu(s)$$

$$=\int\sum_{i,j} c_i\bar{c}_j\overline{\langle\chi_i,s\rangle}\langle\chi_j,s\rangle\, d\mu(s) =$$

$$=\int\Big|\sum_i c_i\overline{\langle\chi_i,s\rangle}\Big|\, d\mu(s) \geq 0$$

por lo tanto, $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ mapean las medidas positivas en las funciones continuas de tipo positivo:

$$\mathcal{F},\overline{\mathcal{F}}:\ M_+^1(G) \longrightarrow P(\widehat{G})$$

Restringimos ahora la transformada de Fourier a las medidas acotadas con función de densidad en $L^1(G)$ y lo establecemos como una:

<u>DEFINICION</u> Sea $f \in L^1(G)$, para toda $\chi \in G$ definimos

$$\mathcal{F}(f)(\chi) = \int\overline{\langle\chi,s\rangle}\, f(s)\, ds$$

como la transformada de Fourier de f y

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\chi) = \int\langle\chi,s\rangle f(s)\, ds$$

como la cotransformada de Fourier de f.

Las siguientes propiedades se satisfacen:

i) $\mathcal{F}f$ es la transformada de Gelfand si se identifica $\hat{G}$ con $\widehat{L^1(G)}$.

ii) Si escribimos $\check{f}(s) = f(s^{-1})$, entonces

$$\overline{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}\check{f} = (\mathcal{F}f)^{\vee}$$

en efecto,

$$\overline{\mathcal{F}}f(\chi) = \int \langle \chi, s\rangle f(s)ds =$$

$$= \int \langle \chi, s^{-1}\rangle f(s^{-1})ds$$

$$= \int \overline{\langle \chi, s\rangle}\, f(s^{-1})\, ds = \mathcal{F}\check{f}(\chi)$$

$$(\mathcal{F}f)^{\vee}(\chi) = \mathcal{F}f(\chi^{-1}) = \int \overline{\langle \chi^{-1}, s\rangle} f\, s\, ds =$$

$$= \int \langle \chi, s\rangle f(s)\, ds = \overline{\mathcal{F}}f$$

iii) Con la notación $f^{*n} = f * f * \ldots * f$ n veces, se tiene

$$\|\mathcal{F}f\|_{\infty} = \|\overline{\mathcal{F}}f\|_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \|f^{*n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1$$

lo cual es una de las propiedades de la transformada de Gelfand.

iv) $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son morfismos involutivos de $L^1(G)$ en $\mathcal{C}_o(\hat{G})$.

v) $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ transforman traslación en multiplicación por un caracter y viceversa, como en la propiedad (iv) anterior.

vi) Si f es positiva, entonces $\mathcal{F}f$ y $\overline{\mathcal{F}}f$ son continuas de tipo positivo ya que, en este caso, la medida acotada fds es positiva.

viii) La imagen de $L^1(G)$ por $\mathcal{F}$ (o $\overline{\mathcal{F}}$) es una subálgebra autoadjunta y densa de $\mathcal{C}_o(\hat{G})$ que denotaremos por $A(\hat{G})$, en efecto, sea $h \in A(\hat{G})$ y $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F} f = h$, entonces

$$\overline{h(\chi)} = \overline{\mathcal{F} f(\chi)} = \overline{\int \langle \chi, s\rangle f(s)\, ds} =$$

$$= \int \langle \chi, s\rangle\, \overline{f(s)}\, ds =$$

$$= \overline{\mathcal{F}}\, \overline{f}(\chi) = \mathcal{F}(\check{\overline{f}})(\chi)$$

como $\check{\overline{f}} = f^*$, entonces $\mathcal{F}(f^*) = \overline{h}$, por lo tanto $\overline{h} \in A(\hat{G})$, es decir, $A(\hat{G})$ es autoadjunta. Ahora sean χ y $\xi \in G$ tales que $\chi \neq \xi$, entonces existe $f \in L^1(G)$ tal que

$$\int \overline{\langle \chi, s\rangle} f(s)\, ds \neq \int \overline{\langle \xi, s\rangle} f(s)\, ds$$

entonces $\mathcal{F} f(\chi) \neq \mathcal{F} f(\xi)$, es decir, $A(\hat{G})$ separa puntos de $\hat{G}$ y, por el teorema de Stone-Weierstrass, $A(\hat{G})$ es denso en $\mathcal{C}_0(G)$.

TEOREMA 3.2 (de Bochner) Sea $\mu \in M^1(\hat{G})$, h la función sobre G definida por

$$h(s) = \int_{\hat{G}} \overline{\langle \chi, s\rangle}\, d\mu(\chi)$$

entonces, la aplicación $\mu \mapsto h$ es una biyección de $M^1(\hat{G})$ sobre P(G), h es de tipo positivo si y solo si μ es positivo y, en ese caso,

$$\| h\|_\infty = \|\mu\|$$

Además, para toda $f \in L^1(G)$,

$$\int_G h(s) f(s)\, ds = \int_{\hat{G}} \mathcal{F} f(\chi)\, d\mu(\chi)$$

<u>**Demostración**</u> Para demostrar este teorema haremos uso del **teorema de Bochner-Raikov** par álgebras de Banach ([6],[7]).

Consideremos

$$\mathcal{F}^1 : M^1(\hat{G}) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{\hat{G}})$$

la transformada de Fourier en $\hat{G}$, si identificamos a $\hat{G}$ como un subconjunto de $\hat{\hat{G}}$, entonces se tiene que

$$h(s) = \mathcal{F}^1\mu(s)$$

por lo tanto $h \in \mathcal{C}(\hat{\hat{G}})$, si μ es positiva, por la propiedad (vii) de la transformada de medidas, h es FCTP. Como toda medida se puede escribir como $\mu = \mu^+ - \mu^-$ donde $\mu^+, \mu^- \in M_+^1(G)$, esto implica que $h \in P(G)$.

Si μ es positiva, entonces

$$\|h\|_\infty = h(e) = \int \langle \chi, e\rangle \, d\mu(\chi) = \int d\mu(\chi) = \|\mu\|$$

por otro lado, denotemos por α a la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : M^1(\hat{G}) &\longrightarrow P(G) \\ \mu &\longmapsto \alpha(\mu) = h \end{aligned}$$

por α' a la restricción de α a $M_+^1(G)$ y, por último, con β a la aplicación

$$\begin{aligned} \beta : P^+(G) &\longrightarrow (L^1(G))'_+ \\ h &\longmapsto \beta(h) = \lambda : L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \qquad\qquad\qquad f \longmapsto \lambda(f) = \int h(s) f(s)\, ds \end{aligned}$$

donde $(L^1(G))'_+$ denota las formas lineales positivas sobre $L^1(G)$, como

$$\beta(h)(f * f^*) = \int h(s) f * f^*(s)\, ds \geq 0$$

para toda $f \in L^1(G)$ (ver [3]), entonces $\beta(h)$ es inyectiva y positiva para toda $h \in P^+(G)$. Calculemos, para $\mu \in M_+^1(G)$,

$$\begin{aligned}\int f(s)h(s)\,ds &= \int f(s)\left[\int \overline{\langle \chi, s\rangle}\, d\mu(\chi)\right] ds \\ &= \iint f(s)\,\overline{\langle \chi, s\rangle}\, d\mu(\chi)\, ds \\ &= \iint \overline{\langle \chi, s\rangle} f(s)\,ds\, d\mu(\chi) \\ &= \int \mathcal{F} f(\chi)\, d\mu(\chi)\end{aligned}$$

por linealidad, la fórmula vale para toda $\mu \in M^1(G)$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_+^1(G) & \xrightarrow{\alpha'} & P^+(G) \\ & & \downarrow \beta \\ & & (L^1(G))_+^! \end{array}$$

por el teorema de Bochner-Raikov, existe

$$\gamma : M_+^1(G) \longrightarrow (L^1(G))_+^!$$

biyectiva tal que

$$\gamma(\mu) = \int \hat{f}(\chi)\, d\mu(\chi) = \int \mathcal{F} f(\chi)\, d\mu(\chi)$$

donde $\hat{f}$ es la transformada de Gelfand de $\hat{f}$ en G según el isomorfismo entre $\widehat{L^1(G)}$ y $\hat{G}$. Por lo tanto $\gamma = \beta\alpha'$ y hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_+^1(G) & \xrightarrow{\alpha'} & P^+(G) \\ & \searrow^{\gamma} & \downarrow \beta \\ & & (L^1(G))_+^! \end{array}$$

como γ y β son biyectivas, entonces α' es inyectiva y, por tanto, biyectiva #

COROLARIO 3.5 La asociación de $P^+(G)$ en $(L^1(G))^1_+$ tal que a cada $f \in P^+(G)$ le hace corresponder

$$f \longmapsto \int f(s)h(s)\,ds$$

define una biyección.

Demostración Esta correspondencia es la β de la demostración del teorema. #

COROLARIO 3.6 Toda función continua de tipo positivo es uniformemente continua.

Demostración Sea $h \in P^+(G)$ y $\varepsilon > 0$, sea $\mu \in M^1_+(\hat{G})$ asociado a h según el teorema 3.2 y sea K un compacto de $\hat{G}$ tal que $\mu(\hat{G}-K) \leq \varepsilon$, como $u: G \hookrightarrow \hat{\hat{G}}$ es continua, para

$$U(K,\varepsilon,ue) = \left\{ s \in \hat{\hat{G}} \mid \sup_{\chi \in K} |\langle s,\chi\rangle - \langle ue,\chi\rangle| < \varepsilon \right\}$$

existe V vecindad abierta de e en G tal que $uV \subset U(K,\varepsilon,ue)$, por lo tanto, $s \in V$ implica $|\langle\chi,s\rangle - 1| < \varepsilon$ para toda $\chi \in K$, entonces, para todas $s,t \in G$ tal que $st^{-1} \in V$,

$$|h(s) - h(t)| = \left| \int_{\hat{G}} (\overline{\langle\chi,s\rangle} - \overline{\langle\chi,t\rangle})\, d\mu(\chi) \right|$$

$$\leq \int_K |\langle\chi,s\rangle - \langle\chi,t\rangle|\, d\mu(\chi)$$

$$+ \int_{\hat{G}-K} |\langle\chi,s\rangle - \overline{\langle\chi,t\rangle}|\, d\mu(\chi)$$

$$\leq \int_K |\langle\chi,st^{-1}\rangle - 1|\, d\mu(\chi) + 2\varepsilon < \varepsilon\|\mu\| + 2\varepsilon$$

por lo tanto h es uniformemente continua #

COROLARIO 3.7 El producto de dos funciones FCPP es FCPP.

Demostración Sean h_1 y $h_2 \in P^+(G)$ y $\mu_1, \mu_2 \in M_+^1(\hat{G})$ sus medidas asociadas por el teorema 3.2, entonces

$$h_1(s)\, h_2(s) = \iint \overline{\langle \chi , s\rangle}\, \overline{\langle \xi , s\rangle}\, d\mu_2(\chi)\, d\mu_1(\xi)$$

$$= \iint \overline{\langle \chi\xi , s\rangle}\, d\mu_2(\chi)\, d\mu_1(\xi)$$

$$= \int \overline{\langle \chi , s\rangle}\, d\, \mu_1 * \mu_2(\chi)$$

como $\mu_1 * \mu_2 \in M_+^1(\hat{G})$, el teorema 3.2 implica que $h_1 h_2 \in P^+(G)$. //

Antes de demostrar los siguientes teoremas, demostraremos unos lemas.

LEMA 3.1 $\mathcal{F}$ mapea $P^1(G)$ en $L^1(\hat{G})$ y se puede escoger la medida de Haar de $\hat{G}$ de suerte que, si $h \in P^1(G)$, se obtiene

$$h(s) = \int \langle \chi , s\rangle\, \mathcal{F} h(\chi)\, d\chi$$

Demostración Consideremos $I = L^1(G) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$, afirmamos que I es un ideal de $L^1(G)$, en efecto, sea $f \in I$ y $g \in L^1(G)$ como $g * f \in L^1(G)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, entonces para toda $s_0 \in G$ existe una vecindad V de s_0 tal que

$$|g*f(s) - g*f(s_0)| = \left| \int g(t)\, f(t^{-1}s)\, dt - \int g(t)\, f(t^{-1}s_0)\, dt \right|$$

$$\leq \int |g(t)|\, |f(t^{-1}s) - f(t^{-1}s_0)|\, dt$$

$$\leq \|g\|_1\, \varepsilon$$

si $s \in V$ debido a que la función $s \to f_s$ es continua.

Por lo tanto $g*f \in \mathcal{C}(G)$ y como

$$\|g*f\|_0 \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty$$

entonces $g*f \in \mathcal{C}_0^\infty(G) \cap L^1(G)$, con esto la afirmación queda demostrada.

Como $P^1(G) \subset \mathcal{C}_0^\infty(G)$ entonces $P^1(G) = P(G) \cap L^1(G) \subset \mathcal{C}_0^\infty(G) \cap L^1(G)$ por lo tanto $P^1(G) \subset I$, como $P^1(G)$ es denso en $L^1(G)$, entonces I es denso en $L^1(G)$.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \psi(f) = f(e) \end{aligned}$$

como $\psi(f*f^*) = f*f^*(e) = \int f(t) f^*(t^{-1}e)\, dt = \int f(t)\overline{f(t)}\, dt = \int |f(t)|^2 dt \geq 0$

entonces ψ es una forma lineal positiva sobre I. Según el teorema de Bochner, para toda $f \in P^1(G)$, existe una única medida acotada sobre $\widehat{G}$, denotada por μ_f, tal que

$$f(s) = \int \langle \chi, s \rangle d\mu_f(\chi) \qquad (')$$

si $f \in P^1(G)$ y $g \in L^1(G)$, entonces $f*g \in I$ y

$$\begin{aligned} \psi(f*g) = f*g(e) &= \int f(t^{-1}) g(t)\, dt \\ &= \int f(t) g(t^{-1})\, dt \\ &= \int\int \langle \chi, t \rangle d\mu_f(\chi)\, g(t^{-1})\, dt \\ &= \int\int \langle \chi, t \rangle g(t^{-1})\, d\mu_f(\chi)\, dt \\ &= \int \mathcal{F} g(\chi)\, d\mu_f(\chi) = \mu_f(\mathcal{F}g) \end{aligned}$$

denotemos $\mathcal{F}g$ por $\widehat{g}$, por lo tanto, si $f' \in P^1(G)$,

$$\mu_f(\hat{g}\hat{f}') = \psi(f * (g * f')) = \psi(f' * (g * f)) = \mu_{f'}(\hat{g}\hat{f})$$

como $K(\hat{G})$ $\overline{A(\hat{G})}$, por continuidad, para toda $\varphi \in K(\hat{G})$,

$$\mu_f(\varphi\hat{f}') = \mu_{f'}(\varphi\hat{f}) \qquad ('')$$

con $f, f' \in P^1(G)$.

Sea $\varphi \in K(\hat{G})$, sea $\chi \in$ sopφ y sea $u \in K(G)$ tal que $\hat{u}(\chi) \neq 0$, por ser $K(G)$ denso en $L^1(G)$ y existir $f \in L^1(G)$ tal que $\hat{f}(\chi) \neq 0$, esto último es siempre posible. Entonces $\widehat{u * u^*}$ es no negativo y estrictamente positivo en χ, en efecto, sea $\zeta \in \hat{G}$,

$$\widehat{u * u^*}(\zeta) = \int \overline{\langle \zeta, s \rangle}\, u * u^*(s)\, ds$$

$$= \iint \overline{\langle \zeta, s \rangle}\, u(t)\, u^*(t^{-1}s)\, dt\, ds$$

$$= \iint \overline{\langle \zeta, s \rangle}\, u(t)\, \overline{u(ts^{-1})}\, dt\, ds$$

$$= \int u(t) \int \overline{\langle \zeta, s \rangle}\, \overline{u(ts^{-1})}\, ds\, dt$$

$$= \int u(t) \int \langle \zeta, t^{-1}s^{-1} \rangle\, u(s^{-1})\, ds\, dt$$

$$= \int u(t)\, \overline{\langle \zeta, t \rangle}\, dt\, \overline{\int \langle \zeta, s \rangle\, u(s^{-1})\, ds}$$

$$= \int \overline{\langle \zeta, t \rangle}\, u(t)\, dt\, \overline{\int \overline{\langle \zeta, s \rangle}\, u(s)\, ds}$$

$$= |\hat{u}(\zeta)|^2 \geq 0$$

como $\widehat{u * u^*}$ es continua, entonces existe una vecindad abierta V_u de χ tal que $\widehat{u * u^*}(\zeta) > 0$ para toda $\zeta \in V_u$. Como esto fue para toda $\chi \in$ sopφ, entonces

$$\text{sop}\varphi \subset \bigcup_u V_u$$

y como sopφ es compacto, existen $u_1,\dots,u_N \in K(G)$ tal que

$$\operatorname{sop}\varphi \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{u_i}$$

por lo tanto, si $g=\sum u_i * u_i^*$, entonces $\hat{g}>0$ en sopφ, y, además,

$$g \in P'(G) = P(G) \cap L'(G)$$

de acuerdo con el lema 1.3.

Se afirma que el numero $\nu(\varphi)=\mu_g\left(\frac{\varphi}{\hat{g}}\right)$ es independiente de g, en efecto, sea $g' \in P'(G)$ tal que $\hat{g'}>0$ en sopφ, por (")

$$\mu_g(\varphi\hat{g'}) = \mu_{g'}(\varphi\hat{g})$$

para toda $\varphi \in K(G)$, por lo tanto

$$\mu_g\left(\frac{\varphi}{\hat{g}\hat{g'}}\hat{g'}\right) = \mu_{g'}\left(\frac{\varphi}{\hat{g}\hat{g'}}\hat{g}\right)$$

lo cual implica que

$$\mu_g\left(\frac{\varphi}{\hat{g}}\right) = \mu_{g'}\left(\frac{\varphi}{\hat{g'}}\right)$$

ν es una medida positiva no nula ya que, como g es una FCTP (cf. lema 1.3), μ_g es positva y no nula.

Sea $h \in P'(G)$, por (")

$$\nu(\hat{h}\varphi) = \mu_g\left(\varphi\frac{\hat{h}}{\hat{g}}\right) = \mu_h\left(\varphi\frac{\hat{g}}{\hat{g}}\right) = \mu_h(\varphi)$$

por lo tanto $\mu_h = \hat{h}\nu$ y, como μ_h es acotada y $\hat{h}$ continua, $\hat{h}$ es ν-integrable. Por (')

$$h(s) = \int \langle \chi, s\rangle d\mu_h(\chi)$$

$$= \int \langle \chi, s\rangle \hat{h}(\chi)\, d\nu(\chi)$$

Afirmación: ν es una medida de Haar. Bastará con probar que ν es invariante bajo traslaciones, sea $\chi_0 \in G$, $\varphi \in K(\hat{G})$ y $g \in L^1(G)$ de tal manera que $\hat{g} > 0$ sobre sop$\varphi \cup$ sopφ_{χ_0}. Por la propiedad (vi) de la transformada de Fourier sabemos que

$$\widehat{\chi_0^{-1} g} = \hat{g}_{\chi_0}$$

entonces

$$\mu_{\chi_0^{-1} g}(f) = \mu_g(f_{\chi_0^{-1}})$$

de donde

$$\nu(\varphi_{\chi_0}) = \mu_{\chi_0^{-1} g}\left(\frac{\varphi_{\chi_0}}{\widehat{\chi_0^{-1} g}}\right)$$

$$= \mu_{\chi_0^{-1} g}\left(\frac{\varphi_{\chi_0}}{\hat{g}_{\chi_0}}\right)$$

$$= \mu_{\chi_0^{-1} g}\left(\left(\frac{\varphi}{\hat{g}}\right)_{\chi_0}\right)$$

$$= \mu_g\left(\frac{\varphi}{\hat{g}}\right) = \nu(\varphi)$$

por lo tanto $\nu(\chi_0\varphi) = \nu(\varphi)$, es decir, ν es invariante bajo traslaciones. Esto implica que ν es una medida de Haar y $\hat{h} \in L^1(\hat{G})$.

#

<u>LEMA 3.2</u> Sea $\nu = d\chi$ tomada como en el lema anterior. Si suponemos que $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, entonces $\mathcal{F}f \in L^2(\hat{G})$ y $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

<u>Demostración</u> De acuerdo al lema 2.3, $g = f * f^* \in P^1(G)$ para toda $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, por lo tanto

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F}(f * f^*) = \mathcal{F}f\, \overline{\mathcal{F}f} = |\mathcal{F}f|^2$$

por el lema 3.1 $\mathcal{F}g \in L^1(\hat{G})$, luego $\mathcal{F}f \in L^2(G)$. Además

$$\|f\|_2^2 = \int f(s) f^*(s^{-1}) ds$$

$$= \int f(s) f^*(s^{-1}) ds = f * f^*(e)$$

pero

$$f * f^*(e) = g(e) = \int \mathcal{F} g(\chi) d\chi$$

de acuerdo al lema 3.1 y

$$\int \mathcal{F} g(\chi) d\chi = \int |\mathcal{F} f|^2 d\chi = \|\mathcal{F} f\|_2^2$$ #

<u>LEMA 3.3</u> sean $U,V \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$, $W = U * V \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$, u,v,w las restricciones a G de $\mathcal{F}U$, $\mathcal{F}V$ y $\mathcal{F}W$ respectivamente, entonces se cumple que $u,v \in L^2(G)$, $w = uv \in L^1(G) \cap L^2(G)$ y $\mathcal{F}w = W$.

<u>Demostración</u> Como $U,V,W \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$, el lema 3.2 implica que $u,v,w \in L^2(\hat{\hat{G}})$. Además $w = uv$.

Por otro lado

$$\int |w| dx = \int |uv| dx = \langle |u|, |v| \rangle < \infty$$

de donde $w \in L^1(G)$, por tanto, $w \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Hacemos el siguiente cálculo

$$\int \langle \chi, s \rangle W(\chi) d\chi = \int \langle \chi, s^{-1} \rangle W(\chi) d\chi$$

$$= \check{\mathcal{F}} W \big|_G (s) = \check{w}(s)$$

ahora bien, $\mathcal{F} w \in L^2(\hat{G})$ por el lema 3.2 y

$$\int \overline{\langle \chi, s \rangle} \mathcal{F} w(\chi) d\chi = \int \langle \chi, s \rangle \mathcal{F} \check{w}(\chi) d\chi = \check{w}(s)$$

por el lema 3.1. Por lo tanto la medida $W d\chi = \mathcal{F} w d\chi$ y esto implica que $W = \mathcal{F} w$ debido a que ambos provienen de w según la correspondencia dada en el teorema de Bochner. #

Pasaremos ahora a demostrar los teoremas fundamentales de la teoría.

TEOREMA 3.3 Para toda $F \subset \hat{G}$ cerrado y toda $\chi_0 \notin F$, existe $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F}f|_F = 0$ y $\mathcal{F}f(\chi_0) \neq 0$.

Demostración Sea V una vecindad compacta simetrica de $e \in \hat{G}$ tal que $V^2\chi_0 \subset \hat{G}/F$. Sean $\chi_{V\chi_0}$ y χ_V las funciones caracteristicas de $V\chi_0$ y V respectivamente. Afirmamos que $\chi_{V\chi_0} * \chi_V \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$, en efecto

$$\chi_{V\chi_0} * \chi_V(\chi) = \int_{\hat{G}} \chi_{V\chi_0}(\xi^{-1}\chi)\chi_V(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_V \chi_{V\chi_0}(\xi^{-1}\chi)\, d\xi$$

$$= \int_V \chi_{(V\chi_0)^{-1}}(\xi\chi^{-1})\, d\xi$$

$$= \int_V \chi_{\chi\chi_0^{-1}V}(\xi)\, d\xi \quad = \text{med}(V \cap \chi\chi_0^{-1}V)$$

por lo tanto $\chi_{V\chi_0} * \chi_V \in L^p(\hat{G})$ con $1 \leq p \leq \infty$, en particular $\chi_{V\chi_0} * \chi_V \in L^1(\hat{G})$ y $\chi_{V\chi_0} * \chi_V \in L^2(\hat{G})$. Además, si $\chi \in F$, $\chi \notin V^2\chi_0$, entonces $\chi\chi_0^{-1} \notin V^2$ es decir, $\chi\chi_0^{-1}V \cap V = \emptyset$, por lo tanto, $\chi_{V\chi_0} * \chi_V(\chi) = 0$. Por el lema 3.3 existe $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F}f = \chi_{V\chi_0} * \chi_V$. #

TEOREMA 3.4 (de Pontriagin) $G \cong \hat{\hat{G}}$.

Demostración Sabemos que la inyección $u: G \hookrightarrow \hat{\hat{G}}$ es continua. Sea V una vecindad de e en G y V' una vecindad simetrica de e también en G de tal suerte que $V'^2 \subset V$. Sea $f \in \mathcal{K}(G)$, $f \neq 0$ y tal que $sop(f) \subset V'$. Sea $g = f * f^*$. Entonces $g \in P^1(G)$, $sop(g) \subset V$ porque $sop(g) \subset sop(f)sop(f)^{-1} \subset V'^2 \subset V$ y, además,

$$g(e) = f * f^*(e) = \int f(s) f^*(s^{-1})\, ds = \int |f(s)|^2\, ds > 0$$

Por el lema 2.1 $\mathcal{F}g \in L(\hat{G})$. Sea K un compacto de $\hat{G}$ tal que

$$\int_{G-K} |\mathcal{F}g(\chi)|\, d\chi \leq g(e)/8$$

sea $\varepsilon = \frac{g(e)}{4} \int_K |\mathcal{F}g|\, d\chi$ y $W = U(K,\varepsilon,u(e))$, es decir

$$W = \left\{ t \in \hat{\hat{G}} \,\middle|\, |\langle\chi,t\rangle - 1| \leq \varepsilon,\ \chi \in K \right\}$$

entonces, para $u(s) \in W$

$$|g(s) - g(e)| = \left| \int \langle\chi,s\rangle \mathcal{F}g(\chi)\, d\chi - \int \mathcal{F}g(\chi)\, d\chi \right|$$

$$\leq \int_K |\langle\chi,s\rangle - 1| |\mathcal{F}g(\chi)|\, d\chi + 2\int_{\hat{G}-K} |\mathcal{F}g(\chi)|\, d\chi$$

$$\leq \frac{g(e)}{4} + \frac{g(e)}{4} = \frac{g(e)}{2}$$

por lo tanto, $|g(s) - g(e)| \leq g(e)/2$ lo cual implica que $g(s) \neq 0$, o sea que $s \in \mathrm{sop}(g)$, es decir, $s \in V$ y, entonces, $W \cap u(G) \subset u(V)$, por lo tanto $u(V)$ es vecindad de $u(e)$ y esto implica que u es un homeomorfismo sobre su imagen. Como G es localmente compacto, entonces $\mathrm{Im}(u)$ es cerrado en $\hat{\hat{G}}$.

Si $\mathrm{Im}(u) \neq \hat{\hat{G}}$, entonces existe $t \in \hat{\hat{G}} - \mathrm{Im}(u)$ y, por el teorema 3.3, existe $f \in L^1(\hat{G})$ tal que $\mathcal{F}f|_G = 0$ pero $\mathcal{F}f(t) \neq 0$, luego

$$\mathcal{F}f|_G(s) = h(s) = \int_{\hat{G}} \overline{\langle\chi,s\rangle} f(\chi)\, d\chi = 0$$

de acuerdo con el teorema de Bochner, pero esto implica que $f = 0$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}f = 0$ contradiciendo lo supuesto, por lo tanto, $\mathrm{Im}(u) = G$, es decir, $G \cong \hat{\hat{G}}$. #

<u>TEOREMA 3.5</u> La transformación de Fourier $\mathcal{F}$ es un isomorfismo

algebráico de $M^1(G)$ sobre $P^1(\hat{G})$, $\mathcal{F}\mu$ es de tipo positivo si y solo si μ es positiva y, en ese caso, $\|\mathcal{F}\mu\|_\infty = \|\mu\|$.

Demostración Por el teorema de Bochner $M^1(\hat{\hat{G}}) \cong P^1(\hat{G})$, pero $M^1(\hat{\hat{G}}) \cong M^1(G)$ por el teorema de Pontriagin. #

TEOREMA 3.6 (Teorema de la inversión de Fourier) **La transformada de Fourier induce un isomorfismo algebraico de $P^1(G)$ sobre $P^1(\hat{G})$ que transforma convolución en multiplicación y viceversa. Se puede escoger la medida de Haar de $\hat{G}$ de manera que, para toda $f \in P^1(G)$,**

$$f(s) = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(s) = \int_{\hat{G}} \langle \chi, s\rangle \mathcal{F}f(\chi)\, d\chi$$

Demostración El lema 3.1 muestra la igualdad. Si $g \in P^1(\hat{G})$, entonces $\bar{\mathcal{F}}g \in P^1(G)$ y $g = \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}g$, por lo tanto $g \in \mathcal{F}(P^1(G))$, es decir, $P^1(\hat{G}) = \mathcal{F}(P^1(G))$. #

Cuando se escogen las medidas de Haar en G y $\hat{G}$ de manera que se satisfagan la igualdad del teorema, se dice que están **armonizadas.**

TEOREMA 3.7 (de Plancharel) Supongamos que las medidas de Haar de G y $\hat{G}$ **están** armonizadas. **Entonces la restricción de $\mathcal{F}$ a $L^1(G) \cap L^2(G)$ mapea isométricamente $L^1(G) \cap L^2(G)$ en $L^2(\hat{G})$ por las normas $\|\cdot\|_2$ y se prolonga isometria de $L^2(G)$ sobre $L^2(\hat{G})$ (Transformada de Fourier-Plancharel).**

Demostración La primera parte es el lema 3.2. Además

$$\mathcal{F}(P^1(G)) = P^1(\hat{G})$$

y

$$\overline{P^1(\hat{G})} = L^2(\hat{G})$$

#

Si $H \subset G$ es un subgrupo cerrado de G, definimos

$$H^{\perp} = \left\{ \chi \in \hat{G} \;\middle|\; H \subset \ker \chi \right\} = \left\{ \chi \in \hat{G} \;\middle|\; \text{para toda } h \in H,\ \langle \chi, h \rangle = 1 \right\}$$

demostraremos que $H^{\perp}$ es un subgrupo cerrado de $\hat{G}$ y lo llamaremos el subgrupo ortogonal o asociado por dualidad de H.

Sean $\chi, \xi \in H^{\perp}$ y sea $h \in H$, entonces

$$\langle \chi \xi^{-1}, h \rangle = \langle \chi, h \rangle \langle \xi, h^{-1} \rangle = 1$$

por lo tanto $\chi \xi^{-1} \in H$. Como el caracter $\chi = 1 \in H^{\perp}$, $H^{\perp}$ es subgrupo de $\hat{G}$. Como

$$H^{\perp} = \bigcap_{h \in H} h^{-1}(1)$$

pensando en el isomorfismo de G en $\hat{\hat{G}}$ y, por lo tanto a $H \subset \hat{\hat{G}}$, se tiene que $H^{\perp}$ es cerrado.

Afirmamos que $H^{\perp} \cong \widehat{\left(G/H\right)}$, en efecto, sea la aplicación

$$\varphi : H^{\perp} \longrightarrow \widehat{\left(G/H\right)}$$
$$\chi \longmapsto \varphi(\chi)(\bar{g}) = \chi(g)$$

para toda $\bar{g} \in G/H$. Sean $h', h \in H$ tales que $h'h^{-1} \in H$, entonces $\bar{h} = \bar{h'}$ y $\chi(h') = \varphi(\chi)(\bar{h}) = \chi(h)$, pero $\chi(h')(\chi(h))^{-1} = \chi(h'h^{-1}) = 1$, por lo tanto $\chi(h') = \chi(h)$ y esto implica que φ está bien definida.

Supongamos que $\varphi(\chi) = \varphi(\chi')$, es decir, para toda $g \in G$

$$\varphi(\chi)(\bar{g}) = \varphi(\chi')(\bar{g})$$

entonces $$\chi(g) = \chi'(g)$$

por lo tanto $\chi = \chi'$.

Sea $\bar{\chi} \in \widehat{\left(G/H\right)}$ y sea $\chi(g) = \bar{\chi}(\bar{g})$ para toda $g \in G$, sea $h \in H$, entonces $\chi(h) = \bar{\chi}(\bar{h}) = 1$, por lo tanto $H \subset \ker \chi$, es decir, $\chi \in H^{\perp}$. La aplicación es por tanto biyectiva, además

$$\varphi(\chi\chi')(\bar{s}) = \chi\chi'(s) = \chi(s)\chi'(s) = \varphi(\chi)\varphi(\chi')(\bar{s})$$

por lo tanto φ es un isomorfismo de grupos.

Sea $\bar{K}$ un compacto de $G/_H$ y $\wp : G \longrightarrow G/_H$ la proyección canónica, $\wp^{-1}(\bar{K})$ es compacto y

$$\varphi(U(\wp^{-1}(K), \varepsilon, \chi)) = U(\bar{K}, \varepsilon, \varphi(\chi))$$

lo cual implica que φ es continua, más aún, si K es un compacto de G

$$\varphi(U(K, \varepsilon, \chi)) = U(\wp(K), \varepsilon, \varphi(\chi))$$

es decir, φ es bicontinua y todo esto muestra que φ es un isomorfismo entre $H^{\perp}$ y $\widehat{\left(G/_H\right)}$.

Si $H \subset K \subset G$ y K es un subgrupo cerrado de G, entonces

$$K^{\perp} \subset H^{\perp}$$

como

$$H^{\perp\perp} = \left\{ s \in G \mid \text{para toda } h' \in H^{\perp}, \langle h', s \rangle = 1 \right\}$$

entonces $H \subset H^{\perp\perp}$ y por lo anterior, $H^{\perp} \subset H^{\perp\perp\perp}$, pero si $s \in H^{\perp\perp}$, entonces, para toda $h' \in H^{\perp}$, $\langle h', s \rangle = 1$, por lo tanto $h' \in H^{\perp\perp\perp}$ lo cual implica que $H^{\perp} \subset H^{\perp\perp\perp}$, luego $H^{\perp} = H^{\perp\perp\perp}$ y, entonces, $H^{\perp\perp} \subset H$, por lo tanto $H = H^{\perp\perp}$ y

$$H \cong \widehat{\left(\hat{G}/_{H^{\perp}}\right)}$$

De esto último se deducen las siguientes propiedades:

a) H es abierto si y solo si $H^{\perp}$ es compacto,

b) H es compacto si y solo si $H^{\perp}$ es abierto,

c) H es discreto si y solo si $\hat{G}/_{H^{\perp}}$ es compacto y

d) $G/_H$ es compacto si y solo si $H^{\perp}$ es discreto.

Diremos que una función $f \in L^1(G)$ es admisible si $\mathcal{F}f|_{H^{\perp}}$ es integrable, la función $h \longrightarrow f(sh)$ es integrable sobre H y

$$\int_H f(g_k h)\,dh \in P^1(G/H)$$

donde $g_k \in kH$.

Tomando las medidas de Haar de G, H, y G/H de tal suerte que se cumpla la fórmula (1) del capitulo I, tomando la medida de Haar de $H^\perp$ armonizada con la de G/H y tomando f admisible, de la fórmula de la inversión de Fourier, obtenemos la fórmula de sumación de Poisson

$$\int_H f(h)\,dh = \int_{H^\perp} \mathcal{F} f(\chi)\,d\chi$$

En efecto, integrando sobre las clases laterales de H la función f obtenemos una función definida sobre G/H, escribiendo dh la medida de Haar sobre H, dk la medida sobre G/H y $d\chi$ la medida sobre $H^\perp$ armonizada con dk, tomando en cuenta que $H^\perp \simeq \widehat{(G/H)}$ del teorema de la inversión de Fourier obtenemos

$$F(g_k) = \int_H f(g_k h)\,dh = \int_{H^\perp} \mathcal{F} F(\chi)\,d\chi$$

$$= \int_{H^\perp} \int_{G/H} \overline{\langle \chi, g_k h\rangle} \int_H f(g_k h)\,dh\,dk\,d\chi$$

como χ es trivial en H

$$\int_H f(g_k h\,dh) = \int_{H^\perp} \int_{G/H} \langle \chi, g_k\rangle \int_H f(g_k h)\,dh\,dk\,d\chi$$

$$= \int_{H^{\perp}} \int_{G/H} \int_{H} \overline{\langle \chi , g_k h \rangle} \; f(g_k h)\, dh \; dk \; d\chi$$

$$= \int_{H^{\perp}} \int_{G} \overline{\langle \chi , g \rangle} f(g)\, dg \; d\chi$$

por la fórmula (1) del capitulo I, por lo tanto

$$\int_{H} f(h)\, dh = \int_{H^{\perp}} \mathcal{F} f(\chi)\, d\chi$$

En particular, si H es un subgrupo discreto de G y $G/_H$ es compacto (Por ej. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$), en ese caso, $H^{\perp}$ es discreto también, es fácil ver que las medidas de Haar armonizadas son, sobre $H^{\perp}$ la que a cada elemento de él le asigna un peso igual a 1, y sobre $G/_H$ la medida que le asigne a este grupo una masa total de 1. En este caso, pues, la formula de Poisson se transforma en

$$\sum_{h\in H} f(h) = \sum_{\chi\in H} \mathcal{F} f(\chi)$$

donde admisible quiere decir, en este caso, que ambas series convergen. Todo esto lo enunciamos como un

<u>TEOREMA 3.8</u> (Fórmula de Poisson). Sea G un GLCC, H un subgrupo cerrado de G, tomense las medidas de Haar sobre G, H, $G/_H$ de manera que se cumpla (1) del capitulo I y la medida de Haar sobre $H^{\perp}$ armonizada con la de $G/_H$; sea f una función admisible en G, entonces

$$\int_{H} f(h)\, dh = \int_{H^{\perp}} \mathcal{F} \; f(\chi)\, d\chi$$

#

SEGUNDA PARTE

FUNCION ZETA

CAPITULO IV

ECUACION FUNCIONAL DE LA FUNCION ZETA DE HECKE-IWASAWA-TATE

§1.-NOTACION, DEFINICIONES y RESULTADOS PREELIMINARES.

El proposito del presente capitulo es demostrar la ecuación funcional de la función zeta para A-campos usando el metodo que dió Tate en su trabajo. Sin embargo, como se pretende mostrar solamente como interviene la herramienta de análisis armónico que se ha desarrollado hasta ahora en este importante teorema de la teoría de números algebraicos, todos los resultados preeliminares acerca de esta teoría se darán sin demostración indicando únicamente en que parte del libro de André Weil, BASIC NUMBER THEORY, se encuentran dichos resultados.

En primer lugar, definiremos los siguientes conceptos:

MODULO DE UN CAMPO LOCALMENTE COMPACTO. Sea G un grupo localmente compacto (conmutativo o no) y α una medida de Haar (izquierda) en G. Si $\lambda: G \to G$ es un automorfismo de G sobre G, λ transforma la medida de Haar α en otra medida de Haar $\lambda(\alpha)$(medida imagen cf. cap. I), como la medida de Haar es única salvo por un factor constante, $\lambda(\alpha) = c\alpha$; a este número c se le llama el modulo del automorfismo λ y se denota $\mathrm{mod}_G(\lambda) = c$. Si K es un campo localmente compacto y $a \in K^\times$, entonces $\lambda(x) = ax$, con $x \in K$, es un automorfismo del grupo aditivo de K, al modulo de este automorfismo se le llama el modulo de a en K, $\mathrm{mod}_K(a)$, y se define $\mathrm{mod}_K(0) = 0$. Se demuestra que el modulo es una función continua (Proposición 1, Cap.I). Como ejemplos de modulos tenemos los siguientes: si $K = \mathbb{R}$, $\mathrm{mod}_K(a) = |a|$; si $K = \mathbb{C}$, $\mathrm{mod}_K(a) = |a|^2$; si p es un primo y $K = Q_p$, el campo de los números p-ádicos, $\mathrm{mod}_K(a) = |a|_p$ la valuación p-ádica.

CAMPO LOCAL.- Es un campo localmente compacto conmutativo no discreto.

P-CAMPO.- Campo localmente compacto no discreto tal que $\mathrm{mod}_K(p)$ es menor que uno con p un primo.

R-CAMPO.- Campo localmente compacto no discreto que es un algebra sobre R.

A-CAMPO.- Extensión finita de Q o extensión finitamente generada de un campo finito F_p de grado de trasendancia 1 sobre F_p.

Haremos la siguiente convención, $R = Q_\infty$ y $\mathrm{mod}_R(x) = |x| = |x|_\infty$

En el teorema 5.Cap. I se clasifica a los campos localmente compactos no discretos como sigue:

a) K es de caracteristica $p > 1$ y, en ese caso

$$\mathrm{mod}_K(m) = 0 \quad \text{para } m \equiv 0 \pmod{p}$$

y

$$\mathrm{mod}_K(m) = 1 \quad \text{para m primo con p.}$$

b) K es un álgebra de división de dimensión finita δ sobre un campo Q_v, con $1 \leq v \leq \infty$, y, entonces,

$$\mathrm{mod}_K(m) = |m|_v^\delta$$

Si K es un p-campo definimos:

$$\mathcal{O} = \{ x \in K \mid \mathrm{mod}_K(x) \leq 1 \}$$

$$\mathcal{O}^\times = \{ x \in K \mid \mathrm{mod}_K(x) = 1 \}$$

$$\mathcal{P} = \{ x \in K \quad \mathrm{mod}_K(x) < 1 \}$$

en el teorema 6.Cap. I se demuestra que $\mathcal{O}$ es el único subanillo máximal abierto y compacto de K, $\mathcal{O}^{\times}$ el grupo de elementos invertibles de $\mathcal{O}$ y φ el único ideal (bilateral) máximo de $\mathcal{O}$; así mismo se demuestra que existe $\pi \in \varphi$ tal que $\varphi = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$. Además, $\mathcal{O}/\varphi$ es un campo finito de caracteristica p, si q es el número de elementos de tal campo, $\mathrm{mod}_K(\pi) = q^{-1}$. Cualquier elemento $\pi \in K^{\times}$ tal que $\varphi = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ se llamará elemento primo de K y a q el modulo de K. Escribiremos $\varphi^{n} = \pi^{n}\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi^{n}$ los cuales forman un sistema fundamental de vecindades en O.

En el teorema 8.CapI se demuestra que todo p-campo de caracteristica p es isomorfo a un campo de series formales de potencias en una indeterminada con coeficientes en un campo finito $\mathbf{F}_q$: $\mathbf{F}_q(T)$.

El teorema 3.Cap. II y su corolario muestran que si K es un campo local, entonces $K \cong \hat{K}$.

Sea k un A-campo, K un campo local y $\lambda: k \to K$ una inmersión isomorfica de k en K. Si $\lambda(k)$ es un subcampo denso de K, (λ, K) se llama una completación de k. Dos completaciónes (λ, K) y (λ', K') de k son equivalentes si existe un isomorfismo $\rho: K \cong K$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\lambda'"'] & K \arrow[d, "\rho"] \\ & K \end{tikzcd}$$

por un lugar de k se entenderá una clase de equivalencia de completaciones de k. Si $K \cong \mathbb{R}$ o $K \cong \mathbb{C}$, el lugar se llamará infinito y finito en cualquier otro caso. El corolario del teorema 1.Cap III afirma que un A-campo tiene a lo más un numero finito de lugares infinitos, al menos uno si es de caracteristica 0 y ninguno en otro caso. Para cada lugar v de k denotaremos (λ_v, k_v) una completación representante de v, tenemos entonces que $\overline{\lambda_v(k)} = k_v$

y denotaremos $|x|_v = \mathrm{mod}_k(x)$ para toda $x \in k_v$, el teorema 3.Cap III demuestra que si $x \in k$, $|x|_v \leq 1$ para casi todo lugar v (se ha identificado k con un subcampo de k_v via λ_v).

§2.- PRODUCTO DIRECTO RESTRINGIDO. ADELES E IDELES.

Sea $\{v\}$ un conjunto de índices y, para cada v, sea G_v un GLCC, supongamos que para toda v, excepto un número finito, existe un subgrupo H_v de G_v que es abierto y compacto. Denotaremos por P_∞ al conjunto finito de índices v para los cuales no está definido el subgrupo H_v, sea ahora $P \supset P_\infty$ un conjunto finito de índices y escribamos

$$G(P) = \prod_{v \in P} G_v \times \prod_{v \notin P} H_v$$

este grupo, dotado de la topología del producto, es, por ser casi todos los factores compactos y el resto de ellos localmente compactos, localmente compacto.

El PRODUCTO DIRECTO RESTRINGIDO de los grupos $\{G_v\}$ con respecto a los subgrupos $\{H_v\}$ se define como

$$G = \bigcup_{P \supset P_\infty} G(P)$$

dotado de la siguiente topología: tomemos como sistema fundamental de vecindades de $e = (e_v)$ a el sistema fundamental de vecindades de e en $G(P_\infty)$, o sea, tal sistema está formado por conjuntos de la forma

$$U = \prod_v U_v$$

donde U_v es vecindad de e_v para toda v y, para casi toda v, $U_v = H_v$. Con esta topología G resulta ser localmente compacto y se le dota tambien de estructura de grupo de la manera obvia.

Así pues, para todo conjunto finito de índices P tal que $P_\infty \subset P$, $G(P)$ es un subgrupo abierto de G y G está contenido en el grupo $\prod_v G_v$.

Sea ahora k un A-campo y para cada lugar v de k, como habíamos acordado, escribamos por k_v la completación de k en v, para cada lugar finito, sea $\mathcal{O}_v$ el subanillo compacto maximal y $\mathfrak{P}_v$ el ideal maximal; sea P_∞ el conjunto de todos los lugares infinitos de k. Denotamos por k_A al producto directo restringido de $\{k_v\}$ con respecto a los subgrupos $\{\mathcal{O}_v\}$ y lo dotamos de la siguiente estructura de anillo, sean x, $y \in k_A$ y P un conjunto finito de lugares que contenga a P_∞ tal que x, $y \in k_A(P)$, escribamos $x = (x_v)$, $y = (y_v)$ y definimos xy de la manera natural, es decir, $xy = (x_v y_v)$. Al anillo k_A se le llama el ANILLO DE ADELES del A-campo k.

Sea $\xi \in k$ y definimos $\varphi(\xi) = (x_v)$ tal que $x_v = \xi$ para todo lugar v de k, el teorema 3.Cap I demuestra que $\varphi(\xi) \in k_A$, de esta manera tenemos una inyección, llamada inyección conónica, de k en k_A y por medio de ella se identifica k con un subgrupo de k_A. El teorema 2.Cap. IV muestra que k es discreto en k_A y k_A/k es compacto.

El grupo multiplicativo $k_A^\times$ de elementos invertibles de k_A, junto con la topología que hace de la aplicación $x \longrightarrow (x, x^{-1})$ un homeomorfismo de $k_A^\times$ sobre su imagen en $k_A^\times \times k_A^\times$ se llama el GRUPO DE IDELES de k.

Para toda $z \in k_A^\times$ definimos $|z|_A = \prod_v |z_v|_v$ donde $z = (z_v)$, el corolario de la proposición 2.Cap IV hace ver que $|z_v|_v = 1$ para casi todo lugar v de k, con lo que $|z|_A$ tiene sentido. El mismo corolario muestra que $k_A^\times$ es el producto directo restringido de

$\{k_v^*\}$ con respecto a $\{\mathcal{O}_v^*\}$.

El corolario 1 del teorema 1.Cap VII demuestra que $\widehat{k_A} \cong k_A$ y esto, junto con el teorema 3.Cap IV, muestra tambien que, como subgrupo de k_A, $k^\perp \cong k$.

Por comodidad haremos un cambio de notación, si G es un GLCC y $f \in L^1(G)$, denotaremos $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Si $f \in L^1(k_A)$, $\hat{f} = \prod \hat{f}_v$ donde f_v es la función inducida por f sobre k_v y si ds_v es una medida de Haar para k_v tal que $ds_v(\mathcal{O}_v) = 1$ para casi toda v, entonces $\prod ds_v = ds$ es una medida de Haar para k_A(teorema 1.Cap VII). si K es un campo local y α una medida de Haar en K, el lema 5.Cap VII dice que

$$d\mu(x) = \mathrm{mod}_K(x)^{-1} d\alpha(x)$$

define una medida de Haar μ en K^*; además, si K es un p-campo, q su modulo y $\mathcal{O}$ su subanillo maximal compacto, entonces

$$\mu(\mathcal{O}^*) = (1 - q^{-1})\alpha(\mathcal{O})$$

Analogamente, si k es un A-campo y μ_v es una medida de Haar en k_v^* tal que, para casi toda v, $\mu(\mathcal{O}_v^*) = 1$, $\mu = \prod \mu_v$ es una medida de Haar para el grupo de ideles k_A^* de k.

A continuación demostraremos un teorema que viene a ser una interpretación de la fórmula de Poisson para Adeles y es, de hecho, la forma en que se va a usar despues esta fórmula. Siguiendo la terminología de Tate, lo enunciaremos como

<u>TEOREMA 4.1</u> (Teorema de Riemann-Roch para Adeles) Sea $f \in L^1(k_A)$ y continua, sea $z \in k_A^*$ un idele de k un A-campo, entonces, si f(ax) es admisible en k_A, con $a \in k_A$ y $x \in k$, se tiene

$$\sum_k f(z\alpha) = \frac{1}{|z|_A} \sum_k \hat{f}\left(\frac{\alpha}{z}\right)$$

<u>Demostración</u> Para todo lugar v de k y $h \in L^1(k_v)$, si $z_v \neq 0$, debido a que el automorfismo $s \longrightarrow z_v s$ transforma la medida ds_v en $|z_v|_v ds_v$ (cf. §1) se tiene

$$\int h(z_v s)ds_v = \frac{1}{|z_v|}\int h(s)\,ds_v$$

Si definimos $g(x) = f(zx)$, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= \int_{k_A} \overline{\langle x, s\rangle}\, g(s)\,ds \\ &= \int_{k_A} \overline{\langle x, s\rangle}\, f(zs)\,ds \\ &= \frac{1}{|z|_A}\int_{k_A} \overline{\langle x, \frac{s}{z}\rangle}\, f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{|z|_A}\hat{f}\left(\frac{s}{z}\right)\end{aligned}$$

por la fórmula de Poisson (teorema 3.8)

$$\sum_{\alpha\in k} g(\alpha) = \sum_{k} \hat{g}(\alpha)$$

por lo tanto

$$\sum_{\alpha\in k} f(z\alpha) = \frac{1}{|z|_A}\sum_{\alpha\in k} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{z}\right)$$

//

§3.- CUASICARACTERES Y FUNCION ZETA.

Decimos que un grupo localmente compacto conmutativo G es cuasicompacto si $G = G_1 \times N$ con G_1 compacto y $N \cong \mathbb{R}$ o $N \cong \mathbb{Z}$, un cuasicaracter de G es una representación $\omega : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, es decir, una función continua y multiplicativa de G en $\mathbb{C}^\times$. Un cuasicaracter de G es principal si $\omega|_{G_1} = 1$. Definimos

$$\Omega(G) = \text{Conjunto de cuasicaracteres de } G$$

$$\Omega_1(G) = \text{Conjunto de cuasicaracteres principales de} G$$

$\Omega(G)$ forma un grupo con la operación puntual y $\Omega_1(G)$ es un subgrupo de $\Omega(G)$.

PROPOSICION 4.1 Sea G un grupo cuasicompacto. Entonces G tiene una representación no trivial $\omega_1 : G \to R_+^*$ cuyo kernel es G_1; toda representación $\omega : G \to R_+^*$ puede ser escrita en una y solo una manera como

$$\omega = \omega_\sigma = (\omega_1)^\sigma$$

con $\sigma \in R$.

Demostración Sea $\omega : G \to R_+^*$ una representación de G, como G_1 es compacto, entonces $\omega(G_1)$ debe ser un subgrupo compacto de R_+^* y el único posible es $\{1\}$, por lo tanto $\omega(G_1) = \{1\}$. Considerando $G = G_1 \times N$, escribimos cualquier $x \in G$ como $x = (g,n)$ con $g \in G_1$ y $n \in N$, tenemos entonces lo siguiente:

$$\omega(x) = \omega(g,n) = \varphi(n)$$

donde $\varphi : N \to R_+^*$ satisface

$$\varphi(n+m) = \omega(g, n+m) = \omega(g,n)\omega(g,m) = \varphi(n)\varphi(m)$$

luego la aplicación $n \mapsto \log\varphi(n)$ cumple

$$n + m \longmapsto \log\varphi(n) + \log\varphi(m)$$

por lo que esta aplicación debe ser de la forma

$$\log\varphi(n) = an$$

con $a \in R$, es decir, existe $a \in R$ tal que

$$\varphi(n) = e^{an}$$

de donde, si $a \neq 0$, ψ es no trivial y, por lo tanto, ω es no trivial.

Sea $a_1 \neq 0$ un número real no nulo y sea $\omega_1(g,n) = e^{a_1 n}$ la representación definida por él cuyo kernel es, obviamente, G_1. Si ω es otra representación, entonces

$$\omega(g,n) = e^{an}$$

con $a \in R$, luago

$$\omega(g,n) = (e^{a_1 n})^{\frac{a}{a_1}} = (\omega_1(g,n))^{a/a_1}$$

escribiendo $\sigma = a/a_1$ es claro que ω se escribe, de manera única, como

$$\omega = \omega_1^{\sigma}$$

#

COROLARIO 4.1 Sean $G = G_1 \times N$ y ω_1 como en la proposición 4.1. Entonces el subgrupo $\Omega_1(G)$ es isomorfo a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^{\times}$ dependiendo si $N \cong \mathbb{R}$ o $N \cong \mathbb{Z}$. Todo cuasicaracter principal es de la forma

$$g \longmapsto \omega_s(g) = (\omega_1(g))^s$$

con $s \in \mathbb{C}$; $s \longmapsto \omega_s$ es un morfismo de $\mathbb{C}$ sobre $\Omega_1(G)$ cuyo kernel es $\{0\}$ si $N \cong \mathbb{R}$ o de la forma $ai\mathbb{Z}$ si $N \cong \mathbb{Z}$.

Demostración Si $\omega \in \Omega_1(G)$, por la proposición 4.1

$$|\omega(g)| = (\omega_1(g))^{\sigma} = \omega_\sigma(g)$$

con $\sigma \in R$, por lo tanto, $\omega' = \omega_\sigma^{-1}\omega$ es un caracter de G, ya que $|\omega'| = 1$. Como $\omega \in \Omega_1(G)$ entonces ω' es trivial en G, de donde, si $(g,n) \in G$,

$$\omega'(g,n) = \psi(n)$$

donde $\psi \in \hat{N}$, es decir, ψ es un caracter de N, por lo que

$$\psi(n) = e^{2\pi i \tau n}$$

con $\tau \in R$. Si $N \cong R$, entonces τ está univocamente determinado; si

$N \cong Z$, entonces $\tau \in x + Z$ para alguna $x \in \mathbb{R}$. En ambos casos

$$\begin{aligned} \omega(g,n) &= \omega^{1}(g,n)\,\omega_{\sigma}(g,n) \\ &= e^{2\pi i\tau n}\, e^{\sigma a_1 n} \\ &= e^{a_1(2\pi i\tau/a_1 + \sigma)n} \\ &= \omega_1(g,n)^{s} = \omega_s(g,n) \end{aligned}$$

donde $s = \sigma + i\,2\pi\tau/a_1$. Si $N \cong R$, $s \longmapsto \omega_s$ es claramente un isomorfismo. Si $N \cong Z$ consideremos entonces lo siguiente: si escribimos

$$\omega_s(g,n) = u_s^{n}$$

donde $u_s = e^{a_1 s}$, tenemos que

$$(u_s u_t)^{n} = u_s^{n} u_t^{n} = \omega_s(g,n)\,\omega_t(g,n)$$

de donde la aplicación $u \longmapsto \omega$ es un morfismo de $\mathbb{C}^{*}$ sobre $\Omega_1(G)$.

Consideremos ahora la aplicación $s \longmapsto u_s$, se cumple que

$$s + t \longmapsto u_{s+t} = e^{a_1 s}\, e^{a_1 t} = u_s u_t$$

y es, por tanto, un morfismo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}^{*}$ cuyo kernel es

$$u_s = 1 \iff e^{a_1 s} = 1 \iff a_1 s = k2\pi i \iff s = i\,\frac{2\pi}{a_1}k$$

es decir, $u_s = 1 \iff s \in i\alpha Z$ con $\alpha = 2\pi/a_1$, por lo tanto, el kernel de la aplicación $s \longmapsto \omega_s$ es $i\alpha Z$ #

<u>COROLARIO 4.2</u> $\Omega(G) = \Omega_1(G) \times G'$ donde $G' \cong \hat{G}_1$

<u>Demostración</u> Por la demostración anterior se puede ver que todo cuasicaracter $\omega \in \Omega(G)$ se puede escribir, de manera única, como

$$\omega = \omega_\sigma\, \gamma$$

con $\sigma \in R$ y γ un caracter de G. Si escribimos $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ donde γ_1 es trivial en G_1 y ψ_2 trivial en N, entonces

$$\omega = (\omega_s \psi_1)\, \psi_2$$

claramente $\omega_s \psi_1 \in \Omega_1(G)$ y ψ_2 se puede pensar como un caracter de G_2.

#

Definimos en $\Omega_1(G)$ una estructura compleja via el morfismo $s \longmapsto \omega_s$ y trasladamos esa estructura a todo $\Omega(G)$ en virtud del corolario 4.2

Por el teorema 6.Cap IV, si k es un A-campo, el grupo

$$G_k = k_A^{\times}/k^{\times}$$

es un grupo cuasicompacto, llamado el grupo de clases de ideles de k. Los cuasicaracteres de G_k se pueden pensar como representaciones de $k_A^{\times}$ en $\mathbb{C}$ triviales en $k^{\times}$. La aplicación $z \longmapsto |z|_A$ define una representación no trivial de k_A en $R_+^{\times}$ trivial en $k^{\times}$, por lo tanto determina una representación no trivial de G_k en $R_+^{\times}$ que denotaremos con ω_1 (teorema 5.Cap IV).

Si k es de caracteristica 0, el corolario 2 del teorema 5 Cap. IV demuestra que G_k es el producto directo de un subgrupo compacto G_k^1 y un grupo N isomorfo a $R_+^{\times}$ y, en este caso, ω_1 se puede pensar como la proyección de $G_k^1 \times N$ en el factor N. Por otro lado, si k es de caracteristica $p > 1$ en el capitulo VI se ve que los valores de $|z|_A$ son de la forma q^n con $n \in Z$ si F_q es el campo de constantes de k; sea Q el mínimo valor mayor que 1 de entre los valores de $|z|_A$, entonces G_k es el producto directo de G_k^1 y un grupo N isomorfo a $\{Q^n\}_{n \in Z}$ y tambien en este caso ω_1 se puede pensar como la proyección de $G_k^1 \times N$ en el factor N.

Definiremos ahora las funciones estandar en los adeles de un A-campo. Primero, si E es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un p-campo K, $f:E \to \mathbb{C}$ es estandar si f es localmente constante y de soporte compacto; si E es un espacio vectorial de dimensión finita sobre R, $f:E \to \mathbb{C}$ es estandar si

$$f(t) = p(t)e^{-q(t)}$$

donde p es un polinomio en E y q una forma cuadrática real positva definida; finalmente, si k es un A-campo $f:k_A \to \mathbb{C}$ es estandar si

$$f(x) = \prod_v f_v(x_v)$$

donde f_v es una función estandar en k_v y, para casi toda v, la función caracteristica de $\mathcal{O}_v$.

Estamos ahora en condiciones de definir la función Zeta de Hecke-Iwasawa-Tate para A-campos.

<u>DEFINICION</u> Sea k un A-campo, f una función estandar en k_A y $\omega \in \Omega(G_k)$. Si $|\omega| = \omega_\sigma$ con $\sigma > 1$, entonces definimos la función Zeta como

$$\zeta(f,\omega) = \int_{k_A'} f(z)\,\omega(z)\,d\mu(z)$$

El proposito en lo que sigue es demostrar que esta función tiene una extensión analítica a una función meromorfa en todo el dominio de cuasicaracteres de G_k con dos polos simples, uno en ω_0 y otro en ω_1. Pero antes demostraremos que la integral de la definición converge para los cuasicaracteres ω tales que si $|\omega| = \omega_\sigma$, $\sigma > 1$. En efecto, para cada lugar finito v de k, sea $\psi_v = |f_v|$ y para cada lugar infinito w de k escogamos una función estandar ψ_w en k_w tal que $\psi_w \geq |f_w|$, entonces la función estandar $\psi = \prod \psi_v$ mayoriza a $|f|$ y, por lo tanto,

$$|\zeta(f,\omega)| \leq \zeta(\omega_\sigma, \psi)$$

llamaremos

$$I(P) = \int_{k_A(P)^\times} f\,\omega\, d\mu$$

$$J(P) = \int_{k_A(P)^\times} \psi\, \omega_0\, d\mu$$

donde P tiene el significado usual, también denotemos

$$I_v = \int_{k_v^\times} f_v\, \omega_v\, d\mu_v$$

$$J_v = \int_{k_v^\times} \psi_v\, |\omega_v|\, d\mu_v$$

y, para cada lugar finito v,

$$I'_v = \int_{\mathcal{O}_v} f_v\, \omega_v\, d\mu_v$$

$$J'_v = \int_{\mathcal{O}_v} \psi_v\, |\omega_v|\, d\mu_v$$

donde $\mu = \prod \mu_v$ es la medida de Haar en $k_A^\times$.

Para casi todo lugar v de k, f_v es la función característica de $\mathcal{O}_v$, $\mu_v(\mathcal{O}_v^\times) = 1$ y, por el corolario de la proposición 2 Cap. IV y el lema 2.Cap VII, ω_v es trivial en $\mathcal{O}_v^\times$. Sea entonces P_0 un conjunto finito de lugares, que contenga a P_∞, y todo lo anterior sea válido para $v \notin P_0$, entonces, para esos lugares v, $I'_v = J'_v = 1$, por lo tanto, si $P \supset P_0$, tenemos

$$I(P) = \int_{k_\Lambda(P)^\times} f(z)\,\omega(z)\,d\mu$$

$$= \int_{\prod_{v\in P} k_v^\times \times \prod_{v\notin P} \mathcal{O}_v^\times} \prod f_v \prod \omega_v \prod d\mu_v$$

$$= \int_{\prod_{v\in P} k_v^\times} \prod f_v \,\omega_v \prod d\mu_v = \prod_{v\in P} I_v$$

analogamente, $J(P) = \prod_{v\in P} J_v$

Para toda v sea α_v una medida de Haar en k_v tal que

$$d\mu_v(x) = m_v |x_v|_v^{-1} d\alpha_v(x)$$

con $m_v \in R_+^\times$ (cf. lema 5.Cap VII), esto implica que

$$J_v = m_v \int_{k_v^\times} \psi_v |x_v|_v^{-1} d\alpha_v$$

Si $v \notin P$, entonces

$$\psi_v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{O}_v^\times \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{O}_v^\times \end{cases}$$

y $|x_v|_v = 1$, entonces

$$J_v = m_v \int \psi_v(x)|x|_v^{\sigma-1} d\alpha_v = m_v \alpha_v(\mathcal{O}_v^\times) < \infty$$

si $v \in P$, entonces ψ_v es de soporte compacto y localmente constante o, si $v \in P_\infty$, es de la forma $p(t)e^{-q(t)}$, en cualquier caso, si $\sigma \geq 1$ J_v es convergente para $v \in P$, por lo tanto $\prod_P J_v$ es convergente.

Si $v \notin P$, una de las implicaciones del corolario 2 teorema Cap IV es que

$$k_v^{\times} \cap \mathcal{O} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_v^n \mathcal{O}_v^{\times}$$

y que esta unión es disjunta, por lo tanto

$$J_v = \int_{k_v^{\times}} \psi_v(x) \, |x|_v^{\sigma} \, d\mu_v$$

$$= \int_{k_v^{\times} \cap \mathcal{O}} |x|^{\sigma} \, d\mu_v$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi_v^n \mathcal{O}_v} |x|^{\sigma} \, d\mu_v$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{O}_v} |\pi_v^n x|^{\sigma} \, d\mu_v$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{O}_v} q_v^{-n\sigma} \, d\mu_v$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_v^{-n\sigma} \mu_v(\mathcal{O}_v^{\times}) = (1 - q_v^{-\sigma})^{-1}$$

porque $\mu_v(\mathcal{O}_v^{\times}) = 1$, la proposición 1.Cap VII muestra que $\prod_{v \in P} J_v$ es convergente, por lo tanto $\zeta(\psi, \omega) = \prod J_v$ es convergente y esto implica que $\zeta(f, \omega)$ es convergente.

Antes de demostrar el teorema principal de este capitulo, demostraremos el siguiente

LEMA 4.1 Sea $N = R_+^{\times}$ o $N = \{Q^n\}_{n \in Z}$ y sea F_1 una función medible definida en N tal que $0 \leq F_1 \leq 1$ y supongamos que existe un intervalo compacto $[t_0, t_1] \subset R_+^{\times}$ tal que $F_1(n) = 1$ si $n \in N$ y $n < t_0$ y $F_1(n) = 0$ si $n > t_1$. Entonces la integral

$$\lambda(s) = \int_N n^s \, F_1(n) \, d\nu(n)$$

donde $d\nu(n) = n^{-1}dn$ si $N = R_+^\times$ o $\nu(1) = 1$ en el otro caso, es absolutamente convergente para $Re(s) > 0$. La función $\lambda(s)$ se puede continuar analíticamente en todo el plano complejo como una función meromorfa. Si escribimos

$$\lambda_0(s) = s^{-1} \qquad \text{si } N = R_+^\times$$

o

$$\lambda_0(s) = \frac{1 + Q^{-s}}{2(1 - Q^{-s})} \qquad \text{si } N = \{Q^n\}_{n \in Z}$$

entonces la función $\lambda - \lambda_0$ es una función entera de s. Si $F_1(n) + F_1(n^{-1}) = 1$ para toda $n \in N$, entonces $\lambda(s) + \lambda(-s) = 0$.

Demostración Sea F_1 la función

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < 1 \\ 1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Si $N = R_+^\times$

$$\lambda(s) = \int n^s f_1(n)\, d\nu(n) = \int_0^1 n^s \frac{dn}{n} = \int_0^1 n^{s-1} dn = s^{-1}$$

si $Re(s) > 0$. Si $N = \{Q^n\}$

$$\lambda(s) = \int n^s f_1(n)\, d\nu(n) = \sum_{n \in Z} Q^{ns} f_1(Q^n)$$

$$= \sum_{-\infty}^{-1} Q^{ns} + 1/2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Q^{-ns} + 1/2 = \frac{1 + Q^{-s}}{2(1 - Q^{-s})}$$

si $Re(s) > 0$, por lo tanto $\lambda(s) = \lambda_0(s)$ para f_1.

Sea ahora F_1 arbitrario satisfaciendo las hipotesis,

$$\lambda(s) - \lambda_0(s) = \int n^s \left[F_1(n) - f_1(n)\right] d\nu(n)$$

como $\operatorname{sop}(F_1 - f_1) \subset [1, t_1]$ es compacto en N y $F_1 - f_1$ es acotado, $\lambda(s) - \lambda_0(s)$ es absolutamente convergente en todo el plano y uniformemente convergente en todo subconjunto compacto del plano por lo tanto $\lambda(s) - \lambda_0(s)$ es una función entera.

Supongamos que $F_1(n) + F_1(n^{-1}) = 1$, como f_1 lo cumple, sea

$$F_2(n) = F_1(n) - f_1(n)$$

entonces

$$\begin{aligned} F_2(n^{-1}) &= F_1(n^{-1}) - f_1(n^{-1}) \\ &= 1 - F_1(n) - 1 + f_1(n) \\ &= -(F_1(n) - f_1(n)) \\ &= - F_2(n) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda(s) - \lambda_0(s) &= \int (n^{-1})^s [F_1(n^{-1}) - f_1(n^{-1})] \, d\nu(n) \\ &= \int n^{-s} F_2(n^{-1}) d\nu(n) \\ &= \int n^{-s} F_2(n) d\nu(n) \\ &= -\lambda(-s) + \lambda_0(-s) \end{aligned}$$

es decir, $\lambda(s) - \lambda_0(s) = -\lambda(-s) + \lambda_0(-s)$, pero $\lambda_0(-s) = -s^{-1} = -\lambda_0(s)$ si $N = R_+^\times$ o

$$\lambda_0(-s) = \frac{1 + Q^s}{2(1 - Q^s)} = - \frac{1 + Q^{-s}}{2(1 - Q^{-s})} = - \lambda_0(s)$$

en el otro caso, de manera que se tiene que $\lambda(s) = -\lambda(-s)$.

Así pues, $\lambda(s) = f(s) + \lambda_0(s)$ donde f es analítica en todo el plano y tenemos que

$$\lim_{s \to 0} sf(s) = \lim_{s \to 0} s(\lambda(s) - \lambda_0(s)) = 0$$

como $\lim_{s \to 0} s\lambda_0(s) = 1$ si $N = R_+^\times$, entonces, en ese caso

$$\mathrm{Res}(\lambda,0) = 1$$

si $N = \{Q^n\}_{n\in Z}$, entonces

$$\lim_{s\to 0} s\,\lambda(s) = \mathrm{Res}(\lambda_0,0) = \frac{1+Q^0}{2\log Q\cdot Q^0} = (\log Q)^{-1}$$

por lo tanto

$$\mathrm{Res}(\lambda,0) = (\log Q)^{-1}$$ #

Con esto tenemos los elementos suficientes para demostrar el teorema fundamental sobre la función Zeta que es el siguiente

TEOREMA 4.2 Sea k un A-campo, f una función estandar en k_A, $\omega\in\Omega(G_k)$ con la propiedad de uqe, si $|\omega|=\omega_\sigma$, entonces $\sigma>1$. Entonces la función Zeta $\zeta(f,\omega)$ se puede continuar analíticamente a una función meromorfa en todo el dominio de cuasicaracteres $\Omega(G_k)$ satisfaciendo la siguiente ecuación funcional

$$\zeta(f,\omega) = \zeta(\hat{f},\omega_1\omega^{-1})$$

Además. $\zeta(f,\omega)$ tiene solamente polos simples en ω_0 y ω_1 con residuos

$$\mathrm{Res}(\zeta,\omega_0) = -\rho f(0)$$

$$\mathrm{Res}(\zeta,\omega_1) = \rho\hat{f}(0)$$

donde $\rho = 1$ si $N = R^\times_+$ y $\rho = (\log Q)^{-1}$ si $N = \{Q^n\}_{n\ Z}$.

Demostración Tomense dos funciones $F_0, F_1 : R^\times_+ \to R$ continuas tales que

i) $F_0, F_1 \geqslant 0$, $F_0 + F_1 = 1$

ii) existan $t_0,\ t_1\in R^\times_+$ tales que $F_0(t) = 0$, $0<t<t_0$, y $F_1(t) = 0$ si $t>t_1$.

Sea $B>1$, entonces, para toda $\sigma\in R$ con $\sigma\leq B$ y $t>0$ tenemos

$$F_0(t) \leq 1 \leq \left(\frac{t}{t_0}\right)^{B-\sigma}$$

si $t \geq t_o$ y

$$F_o(t) = 0 \leq \left(\frac{t}{t_o}\right)^{B-\sigma}$$

si $t < t_o$, por lo tanto, para toda $t > 0$

$$F_o(t) \leq \left(\frac{t}{t_o}\right)^{B-\sigma}$$

luego

$$t^{\sigma} F_o(t) \leq t_o^{\sigma-B} t^{B}$$

Escribamos, para $i = 0,1$,

$$Z_i(f,\omega) = \int_{k_A^{\times}} f(z)\,\omega(z) F_i(|z|_A)\, d\mu(z)$$

lo cual es convergente para ω tal que, si $|\omega| = \omega_\sigma$, $\sigma > 1$. Si $\sigma \leq B$ entonces

$$|Z_o(f,\omega)| \leq \int |f(z)|\,|\omega(z)|\, F_o(|z|_A)\, d\mu(z)$$

$$= \int |f(z)|\,|z|_A^{\sigma} F_o(|z|_A)\, d\mu(z)$$

$$\leq t_o^{\sigma-B} \int |f(z)|\,|z|_A^{B}\, d\mu(z)$$

ya que $\omega_\sigma(z) = |z|_A$, como $B > 1$, $Z_o(f,\omega)$ converge absolutamente, por lo tanto $Z(f,\omega_s\omega)$ es absolutamente convergente para toda $s \in \mathbb{C}$ y uniformemente convergente sobre cualquier compacto de $\mathbb{C}$. Como $\omega_s\omega$ determina toda la estructura compleja de $\Omega(G_k)$, Z_o es holomorfa en $\Omega(G_k)$.

Como se vió, $\omega(z)$ y $|z|_A$ son funciones triviales en $k^{\times}$ pensando a este como un subgrupo discreto, por lo tanto, podemos aplicar la fórmula (1) del Capitulo I a los grupos G_k, $k_A^{\times}$ y $k^{\times}$ y obtenemos

$$Z_i(f,\omega) = \int_{k_A^{\times}} f(z)\,\omega(z)\, F_i(|z|_A)\, d\mu(z)$$

$$= \int_{k_A^{*}} f(z)\,\omega(z)\,F_i\left(|z|_A\right) d\mu(z)$$

$$= \int_{G_k} \left[\sum_{\xi \in k^{x}} f(z\xi) \right] \omega(z)\,F_i(|z|_A)\; d\mu(z + k^{x})$$

Por el teorema 4.1

$$\sum_{\xi \in k^{x}} f(z\xi) = |z|_A^{-1} \left[\sum_{\xi \in k^{x}} \hat{f}(z^{-1}\xi) + \hat{f}(0) \right] - f(0)$$

luego

$$Z_{\ast}(f,\omega) = \int_{G_k} |z|_A^{-1} \left[\sum_{\xi \in k^{x}} \hat{f}(z^{-1}\xi) + \hat{f}(0) - |z|_A f(0) \right] \omega(z) F_1(|z|_A)\, d\mu(\dot{z})$$

donde $\dot{z} = z + k^{x}$

Sea

$$Z_{\ast}^{!}(f,\omega) = \int_{k_A^{x}} \hat{f}(z^{-1})\,\omega(z)^{-1} |z|_A^{-1}\; F_1(|z|_A^{-1})\, d\mu(z)$$

por el mismo argumento que para $Z_{\ast}$, reemplazando f por $\hat{f}$, ω por $\omega^{-1}\omega_1$ y F_0 por $F_1(t^{-1})$, $Z_{\ast}^{!}(f,\omega)$ es holomorfa en todo $\Omega(G_k)$, por lo tanto, por el teorema 4.1 y sustituyendo ξz por $(\xi z)^{-1}$ con $\xi \in k^{x}$, tenemos

$$Z_{0}^{!}(f,\omega) = \int_{G_k} \left[\sum_{\xi \in k^{x}} \hat{f}(\xi^{-1} z^{-1}) \right] |z|_A^{-1} \omega(z) F_1(|z|_A)\; d\mu(\dot{z})$$

como $\xi \to \xi^{-1}$ es una biyección de k^{x} sobre k^{x},

$$Z_{\ast}^{!}(f,\omega) = \int_{G_k} \left[\sum_{\xi \in k} \hat{f}(\xi z^{-1}) \right] |z|_A^{-1} \omega(z) F_1(|z|_A)\, d\mu(\dot{z})$$

por lo tanto

$$Z_1 - Z_0' = \int_{G_k} |z|_A^{-1}(\hat{f}(0) - f(0)|z|_A)\,\omega(z)\,F_1(|z|_A)\,d\mu(z)$$

es absolutamente convergente para $|\omega| = \omega_\sigma$ con $\sigma > 1$.

Escribamos $\omega = \omega_s \psi$ donde ψ es un caracter de G_k tirvial en N (cf. corolario 4.2), entonces

$$Z_1 - Z_0' = \int_{G_k^1}\int_N \left[\hat{f}(0) - f(0)\omega_1(z)\right] \omega_1(z)^{-1}\omega_s(z)\,\psi(z)\,F_1(\omega_1)\,d\mu_1 \times d\nu(n)$$

como ω_1 se puede pensar como la proyección de $G_k^1 \times N$ en el factor N,

$$Z_1 - Z_0' = \int_{G_k}\psi\,d\mu_1 \int_N \left(\hat{f}(0) - f(0)\,n\right) n^{-1}n^s F_1(n)\,d\nu(n)$$

pero es fácil comprobar (ver)

$$\int_{G_k^1}\psi\,d\mu_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi = 1 \\ 0 & \text{si } \psi \neq 1 \end{cases}$$

entonces, por el lema 4.1,

$$Z_1 - Z_0' = \delta_\omega\left[\hat{f}(0)\lambda(s-1) - f(0)\lambda(s)\right]$$

donde

$$\delta_\omega = \int_{G_k}\psi\,d\mu_1$$

Por lo tanto, $Z_1(f,\omega)$ se puede extender analíticamente a una función meromorfa con polos en s = 0 y s = 1 (ω_0 y ω_1), como

$$\zeta(f,\omega) = Z_0(f,\omega) + Z_1(f,\omega)$$

la función $\zeta(f,\omega)$ se puede continuar analíticamente a una función meromorfa en $\Omega(G_k)$ con polos simples en ω_0 y ω_1, y, además,

$$\mathrm{Res}(\zeta, \omega_0) = -\rho f(0)$$
$$\mathrm{Res}(\zeta, \omega_1) = \rho \hat{f}(0)$$

donde ρ tiene el significado ya explicado.

Finalmente, supongamos F_1 como una función continua para $t \geq 0$ tal que

i) $0 \leq F_1(t) \leq 1 \qquad t \geq 1$

ii) $F_1(1) = {}^1/_2$

iii) $F_1(t) = 0$ para $t \geq t_1$ para alguna $t_1 \in R_+^*$.

Sea $F_1(t) = 1 - F_1(t^{-1})$ para $0 < t < 1$, tenemos que, para toda $t \in N, F_1(t) = 1 - F_1(t^{-1})$. Definamos

$$F_0(t) = 1 - F_1(t^{-1}) \quad y \quad t_0 = t_1^{-1}$$

entonces

$$Z_0^!(f,\omega) = \int_{k_A^\times} \hat{f}(z)\,|z|_A\,\omega(z)^{-1}\,F_1(|z|_A^{-1})\,d\mu(z)$$

$$Z_0(\hat{f},\omega_1\omega^{-1}) = \int_{k_A^\times} \hat{f}(z)\,|z|_A\,\omega(z)^{-1}\,F_0(|z|_A)\,d\mu(z)$$

$$= \int_{k_A^\times} \hat{f}(z)\,|z|_A\,\omega(z)^{-1}\,(1 - F_1(|z|_A))\,d\mu(z)$$

$$= \int_{k_A^\times} \hat{f}(z)\,|z|_A\,\omega(z)\;F_1(|z|_A^{-1})\,d\mu(z) = Z_0^!(f,\omega)$$

por lo tanto

$$\zeta(f,\omega) = Z_0(f,\omega) + Z_1(f,\omega)$$
$$= Z_0(f,\omega) + Z_0^!(f,\omega) + \delta_\omega\left[\hat{f}(0)\lambda(s-1) - f(0)\lambda(s)\right]$$

$$= Z_o(f,\omega) + Z_o(f,\omega_1\omega') + \delta_\omega[\hat{f}(0)\lambda(s-1) - f(0)\lambda(s)]$$

reemplazando f por $\hat{f}$ y ω por $\omega_1\omega'$

$$\zeta(f,\omega_1\omega') = Z_o(\hat{f},\omega_1\omega') + Z_o(\hat{\hat{f}},\omega) + \delta_\omega[\hat{\hat{f}}(0)\lambda(s-1) - \hat{f}(0)\lambda(s)]$$

por el teorema 3.6

$$f(x) = \int \langle x,\xi\rangle \hat{f}(\xi)\,d\xi = \int \overline{\langle -x,\xi\rangle}\, \hat{f}(\xi)\,d\xi = \hat{\hat{f}}(-x)$$

como ω es trivial en k^*, $\omega(-1) = 1$, por lo tanto $\omega(-x) = \omega(x)$, luego

$$Z_o(\hat{\hat{f}},\omega) = Z_o(f,\omega)$$

y, entonces

$$\zeta(f,\omega_1\omega') = Z_o(f,\omega) + Z_o(\hat{f},\omega_1\omega') + \delta_\omega[f(0)\lambda(s-1) - \hat{f}(0)\lambda(s)]$$

pero $-\lambda(s-1) = \lambda(1-s)$ y $-\lambda(s) = \lambda(-s)$, entonces

$$\delta_\omega[f(0)\lambda(s-1) - \hat{f}(0)\lambda(s)] = \delta_\omega[\hat{f}(0)\lambda(-s) - f(0)\lambda(1-s)]$$

haciendo la sustitución $u = 1 - s$

$$\delta_\omega[f(0)\lambda(s-1) - \hat{f}(0)\lambda(s)] = \delta_\omega[\hat{f}(0)\lambda(u-1) - f(0)\lambda(u)]$$

y esto implica

$$\zeta(f,\omega) = \zeta(\hat{f},\omega_1\omega')$$

//

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki. Topologie Generale. Chap III. Act. Sci. et Ind 1143. Herman, Paris (1960).

[2] N. Bourbaki. Intégration. Chaps. III-VII. Act. Sci. et Ind. 1175 y 1306. Herman, Paris (1963).

[3] J. Dixmier. Les C -algebres et leurs représentations. Gauthier-Villars, Paris (1969).

[4] I. Gelfand and M. Naimark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. Mat. Sbornik 12 (1943), pp. 197-213. MR 5, 147.

[5] A. Guichardet. Algebres de Banach conmutatives. Seminaire Poitiers (1963).

[6] A. Guichardet. Analyse harmonique conmutative. Doumod, Paris (1968).

[7] S. Lang. Algebraic number theory. Addison-Wesley Pub. Co. (1973).

[8] L. H. Loomis. An introduction to abstract harmonic analysis.
Van Nostrand, New Jersey (1953).

[9] R. Marentes. Teorema de Norbert Wiener para grupos localmente compactos.
Tesis Profesional, UNAM(1977).

[10] M. Naimark. Normed rings. Tr. from the russian by Lec. F. Boron.
Groningan Noordhoff (1959).

[11] E. Rodriguez Carrington. Representaciones de grupos localmente compactos.
Tesis Profesional, UNAM (1978).

[12] J. Tate. Fourier analysis in number fields and Hecke's Zeta functions.
Ph. D. Thesis, Princeton (1950).

[13] A. Weil. Basic number theory.
Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlín (1973).