UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

LAS FUNDAMENTACIONES DE HILBERT Y BIRKHOFF PARA LA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Tesis que para optar por el título de

Matemático presenta

GRACIELA NOVELO BERRON

México, 1982

I N D I C E   G E N E R A L

PRESENTACION

El presente trabajo tiene por objeto poner al alcance de los interesados en la geometría una versión completa y en español* de la obra de David Hilbert Fundamentos de la geometría. El tema de esta obra es la discusión de la fundamentación de la geometría. Por su claridad, rigor y elegancia es un modelo para la exposición de un desarrollo matemático; su enfoque excluye, sin embargo, la posibilidad de su utilización en la enseñanza elemental de la materia.

Con este último propósito, George Birkhoff elabora su trabajo Un conjunto de postulados para la geometría plana basados en la regla y el transportador cuya traducción también se incluye.

Para ayudar a situar al lector en el estudio de ambos trabajos se ha elaborado una breve introducción que ofrece un contexto histórico y una descripción de cada uno de ellos.

Espero que este material sea de utilidad para los cursos de geometría que se imparten en la facultad.

* Existen dos versiones españolas: una de F. Cebrián del Instituto Jorge Juan de Matemáticas. C.S.I.C., Madrid, 1952, que fue imposible conseguir dado que la edición está agotada; la otra: trad. J. D. García Bacca, Elementos de geometría, UNAM, México, 1944; sólo contiene parcialmente los capítulos I, II, III y VII, también agotada.

Quiero agradecer a Juan José Rivaud la disposición, orientación y estímulo que me proporcionó para este trabajo; a Guadalupe Lucio, a Silvestre Cárdenas y a Joaquín Díez-Canedo sus valiosas opiniones; y a Rodolfo San Agustín la idea de la traducción del trabajo de Hilbert.

I N T R O D U C C I O N

La geometría aparece relacionada con la construcción, la agricultura, la navegación y otras actividades fundamentales del hombre, y se desarrolla junto con las primeras civilizaciones. Esta vinculación a las necesidades humanas es la causa de que en la antigüedad clásica se concediera gran importancia al estudio de esta rama del conocimiento, que para entonces había adquirido ya el <u>status</u> de ciencia; esto a su vez tuvo por resultado una ampliación y profundización de su contenido. Los matemáticos griegos produjeron las primeras teorías geométricas propiamente dichas y, con ellas, las condiciones para una síntesis global de la geometría.

En el siglo III a. C., Euclides recopiló en <u>Los Elementos</u> todo el conocimiento que hasta entonces se tenía sobre esta ciencia. La obra de Euclides no es una simple recopilación, es un desarrollo sistemático de la geometría de su tiempo a partir de un reducido conjunto de principios. Estos están contenidos en las definiciones, las nociones comunes y los postulados. En las primeras se definen los objetos de la geometría: punto, recta, ángulo, superficie, círculo, triángulo, cuadrado, paralelas, etc.; en las nociones comunes se establecen algunas reglas generales de operación: "Cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí", "Si a cosas iguales se añaden otras iguales, los totales son iguales", "El todo es mayor que la parte", "Dos rectas no circundan región" (1), etc.; y en los postulados es donde se formulan las relaciones geométricas fundamentales: "Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera", "Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada", "Para cada centro y radio describir su círculo" (2), el postulado de las paralelas, etc.

Los principios tienen un carácter de hipótesis, en el sentido de ser afirmaciones de las cuales se parte, y su validez se apoya en la experiencia: son considerados como verdades evidentes; esta confirmación intuitiva se extiende a las proposiciones, que mediante una deducción rigurosa se demuestran a partir de éstos. Lo que es importante para Euclides es que las proposiciones sean consecuencia lógica de los principios y las proposiciones establecidas anteriormente. Por ello, algunos hechos que son intuitivamente obvios, tanto como los principios, aparecen como proposiciones y se demuestran. Tal es el caso de: "En un punto dado construir una recta igual a otra recta dada", "Dadas dos rectas desiguales restar de la mayor una recta igual a la menor", "Dividir en dos una recta delimitada dada" (3), etc.

En Los Elementos tenemos entonces el primer sistema axiomático para la geometría, y lo que es más relevante, la primera teoría matemática en un sentido muy cercano al moderno: la forma en que se establece la vinculación entre las distintas proposiciones, es decir, su estructura lógica, es también original y la idea de demostración subyacente es enteramente actual. Su diferencia con una teoría matemática moderna consiste en su índole descriptiva; su apoyo en la realidad circundante, casi podríamos decir que en la práctica geométrica. En Los Elementos estaba contenida la descripción del espacio físico, siendo éste el que garantizaba la veracidad de la teoría. Es esta razón la que marco su permanencia durante tantos siglos.

Dentro de estos principios en los que se basan Los Elementos hay uno que está situado de manera muy especial: el quinto postulado o postulado de las paralelas: "Si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán en la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos" (4). Euclides ordena de tal manera las proposiciones que su uso no es necesario hasta la proposición 28 del libro I, el inverso de este postulado aparece como proposición y además, este postulado, a diferencia de los otros, trasciende la experiencia geométrica directa. Estas razones hicieron que desde poco tiempo después de Euclides, los geómetras consideraran que este postulado debía ser consecuencia lógica de los otros y se dieran a la tarea de tratar de demostrarlo.

Las tentativas infructuosas de demostrarlo fueron numerosas, desde Tolomeo en el siglo II d. C., hasta A. M. Legendre en el siglo XIX; no obstante, estas investigaciones produjeron resultados colaterales cuya importancia no fue percibida entonces pero que más tarde conducirían aunque indirectamente al esclarecimiento de la naturaleza del quinto postulado y de la geometría misma.

Los trabajos de Gauss, Lobatchevski y Bolyai aclaran por primera vez todos estos resultados acerca del postulado de las paralelas. En términos muy simples, lo que ellos hacen es sustituir el quinto postulado, en la versión que dice: "Por un punto exterior a una recta sólo es posible trazar una paralela a ella" (5), por la otra posibilidad alternativa: es posible trazar más de una (6). Conservando el resto de los postulados, desarrollan los resultados de este nuevo conjunto de postulados y construyen así una nueva geometría en la que se satisfacen todos los postulados excepto el quinto. Este hecho aparentemente trivial entraña, sin embargo, un cambio de enfoque radical: el abandono de la representación de lo real como única fuente de significación para las teorías matemáticas. En efecto, no sólo la geometría así construída carecía por el momento de interpretación, sino que los propios resultados eran de una naturaleza que no parecía corresponder a la experiencia directa, en forma mucho más drástica que el mismo quinto postulado.

Esta circunstancia hizo que la difusión de esta geometría, llamada por Gauss <u>no euclidiana</u>, fuera relativamente lenta. Tanto más, cuanto que el reconocidísimo filósofo Immanuel Kant había caracterizado los postulados euclidianos como nociones <u>a priori</u>, consagrando así a la geometría euclidiana como la única representación posible del espacio, como <u>la verdadera</u> geometría.

El significado de la geometría no euclidiana se fue aclarando conforme progresaban las investigaciones de sus resultados. Así como la geometría euclidiana contaba con el modelo del plano cartesiano, Beltrami, en 1868, encontró que las relaciones de la nueva geometría se verificaban en la superficie de revolución generada por una tractriz: la seudoesfera. Posteriormente H. Poincaré, F. Klein y A. Cayley, entre otros, encontraron nuevos modelos. Con esto quedó establecida la coherencia lógica de la geometría no euclidiana.

Esto tuvo repercusiones para la geometría euclidiana: la independencia del postulado de las paralelas quedó definitivamente probada y con ello la necesidad de incluirlo dentro del sistema como postulado, quedando de manifiesto la profundidad del pensamiento de Euclides. Por otro lado, la existencia de otras geometrías puso en entredicho la exclusividad de la geometría euclidiana como representación del espacio, de hecho, comenzó a modificarse la propia concepción del espacio. Además, puesto que sus postulados dejaron de ser verdades evidentes al comprobarse la posibilidad lógica de sustituirlos, incluso por postulados contrarios, su validez en tanto que representación se vió también cuestionada; los postulados pasaban a ser entonces supuestos más o menos arbitrarios por lo que se hizo necesaria una revisión de sus fundamentos al margen de la intuición.

A partir de esto se plantearon dos líneas de investigación. Por un lado, reelaborar la geometría euclidiana sobre bases más modernas, englobándola en el estudio de las geometrías. Este punto de vista tiene su antecedente en los trabajos de B. Riemann (1854) y en el Programa de Erlangen (1872) de F. Klein, que forman la base de la codificación de las geometrías, y en él se inscriben los estudios de M. Pieri de 1899. Por otro lado, respetando toda la teoría revisar cuidadosamente sus principios con el propósito de darles una consistencia lógica como sustituto de la intuición. Dentro de esta corriente se enmarcan los trabajos de M. Pasch (1882) y G. Peano (1899), pero la obra más importante es la de D. Hilbert Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la geometría) publicada en 1899. Esta se convierte en el ejemplo a seguir de la axiomática moderna.

Lo que alguna vez Hilbert dijo, refiriéndose a la geometría: "En lugar de puntos, líneas y planos, debe ser siempre posible hablar de tarros de cerveza, sillas y mesas" (7), contiene en germen lo que más tarde fue su concepción de una teoría matemática. Esta abstracción del contenido concreto de una teoría y su estudio como una estructura de relaciones entre términos no definidos conformó toda una escuela en torno a Hilbert, que después recibió el nombre de Formalista.

Los Fundamentos de la geometría es el primer trabajo de Hilbert en esta dirección. Se trata de "... un nuevo intento de establecer, para la geometría, un conjunto de axiomas completo y tan simple como sea posible, y deducir de éste los teoremas geométricos más importantes, de tal manera que el significado de los distintos grupos de axiomas, así como la importancia de las conclusiones que pueden extraerse de cada uno de los axiomas considerado individualmente, aparezcan con claridad"(8).

Resulta extraño que en esta introducción Hilbert no mencione la cuestión de la consistencia del conjunto de axiomas: que no se pueda deducir a partir de ellos dos teoremas contradictorios, siendo ésta el requisito lógico principal de una teoría y una de sus preocupaciones fundamentales. Al hablar de aclarar el significado de los distintos grupos de axiomas se refiere a la investigación de la independencia mutua de estos grupos, es decir, al hecho de que unos no pueden deducirse de los otros. Por último, la propiedad de ser completo significa que todos los resultados de la geometría pueden derivarse de los axiomas.

El trabajo no es un tratado en donde se exponen todos los resultados de la geometría porque no estudia el sistema en tanto que descripción. Hilbert sólo analiza aquellos teoremas o aspectos de la geometría que revelan características importantes de la estructura del sistema axiomático. Quizás lo más importante es la forma en que son tratadas las tres cuestiones anteriores, y cómo son discutidos la importancia de los teoremas fundamentales de la geometría y los criterios para las construcciones con regla y compás.

El método de Hilbert para explorar las consecuencias de los distintos grupos de axiomas consiste en construir un modelo numérico (en el sentido del conjunto de afirmaciones concretas que resulta de la interpretación de los términos no definidos, relaciones entre números en este caso), tal que, al interpretar los axiomas de la geometría en términos de este modelo, se cumplan exclusivamente ciertos axiomas, mientras que el axioma bajo estudio resulte ser falso. Alternativamente, se modifica la definición de los elementos de la geometría de forma que el conjunto de relaciones geométricas que resulta satisfaga también ciertos grupos predeterminados de axiomas y el grupo en cuestión no se cumpla. De esta manera, al mismo tiempo que se establece la independencia de los distintos grupos de axiomas, se caracteriza en términos de grupos particulares de axiomas distintas geometrías y se exhibe de forma clara las relaciones entre éstas.

Así, Hilbert convierte en método las ideas que Riemann y Beltrami, entre otros, utilizaron en la demostración de la independencia del quinto postulado euclidiano, y lo aplica sistemáticamente a todos sus axiomas para la geometría euclidiana. El resultado de esto es *Fundamentos de la geometría*.

1. En el primer capítulo presenta los axiomas. Los clasifica en cinco grupos de naturaleza diferente y en un orden natural de jerarquía: incidencia, orden, congruencia, paralelas y continuidad. Cada uno de estos grupos, dice, expresa hechos básicos para nuestra intuición. Los axiomas contienen tres términos primitivos o no definidos: "punto", "recta" y "plano"; y tres relaciones: "es-

tá", "entre" y "congruente". El significado matemático de estos términos y relaciones es establecido por los propios axiomas.

Las propiedades de las relaciones y los términos no definidos formulados en los axiomas están entonces sugeridas por elementos y relaciones concretas; pero son los axiomas los que, de hecho, las definen. Con esto, además de que se evita el problema de la verdad de la teoría como representación, se abre la posibilidad de que la teoría caracterice una multiplicidad de sistemas distintos.

A continuación de cada grupo de axiomas demuestra los teoremas inmediatos y formula algunas definiciones. De los tres primeros grupos de axiomas y en particular del teorema del ángulo exterior deduce la existencia de una recta paralela a otra recta dada. El cuarto grupo de axiomas contiene sólo el axioma de las paralelas. Hilbert emplea una formulación que sólo afirma la unicidad de la paralela a una recta dada por un punto exterior. Justifica la introducción de este axioma porque "simplifica la fundamentación de la geometría y facilita su desarrollo" (9), es decir, su inclusión es una exigencia de la teoría, no se trata de un hecho _a priori_. El grupo V de axiomas es de particular importancia pues en él se define la naturaleza de la recta. Hilbert opta por caracterizar la continuidad de la recta mediante dos axiomas: el de Arquímedes y un axioma de completez que postula la imposibilidad de extender el conjunto de puntos de una recta, sin alterar la valides de los axiomas anteriores. A partir del axioma de completes puede establecerse la existencia de una cortadura de Dedekind y el teorema de Bolzano-Weiestrass, quedando así identificada la geometría que cumple los axiomas I-V con la geometría cartesiana; pero este axioma requiere a su vez del axioma arquimediano como condición necesaria. Por otro lado, la separación de la continuidad en dos axiomas le permite prescindir del axioma de completes para el resto de las investigaciones.

En el primer capítulo quedan entonces asentadas las proposiciones básicas de la geometría elemental y en los restantes se dedica propiamente a examinar la estructura del sistema aximático.

2. Comienza el capítulo segundo demostrando la consistencia de los axiomas. No se trata de la demostración de consistencia que requeriría la definición de esta característica de una teoría. En efecto, la demostración de la imposibilidad de derivar, a partir de un conjunto de axiomas, dos teoremas contradictorios es prácticamente imposible para cualquier sistema suficientemente complejo, pues la cantidad de teoremas derivables es considerable y es difícil determinar cuándo se ha terminado. El criterio que Hilbert utiliza, y que de hecho se utiliza en la práctica, es el siguiente: si en algún modelo, al interpretar los términos no definidos en los axiomas, obtenemos un conjunto de afirmaciones verdaderas, la teoría es consistente.

Para la demostración, parte de considerar un campo de números algebraicos Ω y caracteriza los elementos del capítulo I (los puntos, rectas y planos) como relaciones entre números de Ω que en Ω satisfacen todos los axiomas excepto el de completez, con lo cual muestra de paso la independencia de este axioma. La geometría que resulta de considerar al campo de los números reales en lugar de Ω es la geometría cartesiana que según prueba, satisface el axioma V, 2. Con ello establece que la geometría cartesiana cumple todos los axiomas. Pero ésta no es sino un conjunto de relaciones entre los números reales, con lo cual el problema de la consistencia se traslada a éstos, es decir, "Toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-V debería por consiguiente, ser detectable en la aritmética de los números reales" (10).

Al final del capítulo I, se menciona la posibilidad de demostrar la identidad entre la geometría que satisface los cinco grupos de axiomas y la geometría cartesiana; por otro lado, la demostración de que la geometría cartesiana satisface el axioma V, 2, la señala como la única geometría que cumple todos los axiomas. Con esto, la completez es reemplazada por la categoricidad: un sistema de axiomas es categórico si todos los modelos para éste son isomorfos.

Una vez así resueltos los problemas de la consistencia y la completez, Hilbert procede a investigar la independencia de los distintos grupos de axiomas. Los grupos I, II, III, 1-4 definen las relaciones y los elementos primitivos de la geometría y en este sentido, su independencia es considerada evidente. En primer término se ocupa del axioma IV, en reconocimiento a su importancia histórica. Para demostrar su independencia construye como modelo una geometría del espacio con elementos de la geometría cartesiana cuya interpretación dentro del modelo satisface todos los axiomas excepto el de las paralelas. Como anteriormente probó la existencia de la geometría cartesiana, la existencia de esta nueva geometría no euclidiana queda establecida y con ella la independencia del axioma IV.

Demuestra después los dos teoremas de Legendre que se cumplen independientemente del axioma de las paralelas. Estos son, precisamente, los resultados más cercanos a la "demostración" del V postulado euclidiano, y constituyen los cimientos del desarrollo de las geometrías no euclidianas.

Para demostrar la independencia del axioma III, 5 de congruencia se vale de una geometría cartesiana del espacio en donde redefine la distancia y obtiene así una geometría en la cual se cumplen todos los axiomas excepto el III, 5. Para el plano sugiere un modelo que conserva las características de la geometría cartesiana excepto la de la longitud de un segmento, que redefine como la longitud de su proyección sobre un plano que forma un ángulo agudo con el plano en cuestión.

El modelo que exhibe la independencia del axioma de Arquímedes es un campo de funciones algebraicas $\Omega(t)$ isomorfo al campo Ω que usó para la consistencia. Considerando los valores de $\Omega(t)$ para t suficientemente grande, define un campo de "números". Introduce un orden entre estos números y construye con ellos una geometría como lo hizo con el campo Ω. En esta geometría el axioma V, 1 no se cumple y recibe el nombre de geometría no arquimediana.

3. El capítulo III principia con una sección en la que se define un conjunto de axiomas para los números complejos, al cual posteriormente se hace referencia continua. El tema de este capítulo es el desarrollo de la teoría de la proporción en el plano sobre la base del teorema de Pascal. Para la demostración de este teorema, Hilbert utiliza los grupos de axiomas I, 1-3, II-IV en los cuales queda fundada, por lo tanto, la teoría de la proporción en el plano. Por medio del teorema de Pascal define una aritmética de segmentos con todas las propiedades de la aritmética de los racionales positivos, y con la ayuda de ésta demuestra los teoremas de semejanza. Introduce después los segmentos negativos y define un sistema coordenado a partir del cual se puede desarrollar toda la geometría con los métodos de la geometría analítica. A continuación discute, incorporando el axioma arquimediano, la posibilidad de asignar un número real a cada punto de una recta en el espacio. Finaliza con el problema inverso: asignar a cada real un punto sobre la recta, para lo cual se requiere el axioma de completez o bien, la ex-

tensión del conjunto de puntos con elementos irracionales. Esta geometría extendida resulta ser, naturalmente, la geometría cartesiana en la cual se cumple el axioma de completez.

4. El capítulo IV está dedicado a la teoría del área plana. Esta la desarrolla de dos maneras: utilizando el axioma de Arquímedes y las nociones de equicomplementabilidad y equidescomponibilidad, o sin este axioma y desarrollando el concepto de área signada como una medida. Redondea la teoría del área estableciendo la equivalencia entre área y equicomplementabilidad. Finaliza el capítulo comentando los problemas para establecer una teoría del volumen en el espacio, que resume en el problema: "...encontrar dos tetraedros con áreas iguales en la base y alturas iguales que no pudieran ser descompuestos de ninguna forma en tetraedros congruentes y los cuales, mediante la unión de tetraedros congruentes, no pudieran ser expandidos a poliedros que pudieran a su vez ser descompuestos en tetraedros congruentes" (11).

5. En el capítulo V examina la relación entre el teorema de Desargues y los axiomas de incidencia del espacio, a través del estudio del problema de cuáles son las condiciones para que una geometría plana pueda ser inmersa en una geometría del espacio. Como la mayor parte de las investigaciones las lleva a cabo sin uti-

lizar los axiomas de congruencia, comienza por reformular el axioma de las paralelas, que en su forma original postulaba sólo la unicidad de las paralelas quedando la existencia garantizada por un teorema derivado de los axiomas de congruencia. El axioma modificado IV* pide entonces ambos requisitos.

En una primera parte muestra que el teorema de Desargues es una condición necesaria del problema. Observa que la forma usual de demostrar este teorema emplea sólo los grupos de axiomas I, II, IV*, por lo cual si una geometría plana ha de poderse considerar como parte de una geometría del espacio en la cual se cumplan estos mismos grupos, es necesario que el teorema de Desargues se cumpla. Demuestra a continuación que es posible sustituir los axiomas de incidencia del espacio por los de congruencia, es decir, el teorema de Desargues es también consecuencia de los axiomas I, 1-3, II-IV. Para esto último se vale de construir una geometría del espacio en la que se cumplen los grupos I, 1-3, II-IV, y recupera la geometría plana haciendo cero una coordenada. Enseguida demuestra que entre los axiomas de congruencia es el III, 5 el necesario para el teorema de Desargues. Con este fin construye una geometría en la que se cumplen los axiomas I, 1-3, II, III, 1-4, IV*, partiendo de la geometría cartesiana y redefiniendo las rectas y la medida angular. Esta geometría plana no desarguiana no puede ser inmersa en una geometría del espacio.

En una segunda parte, prueba que junto con los axiomas I, 1-3, II, IV*, la validez del teorema de Desargues en una geometría plana es una condición suficiente para que pueda considerarse como parte de una geometría del espacio en la cual se cumplen los axiomas I, II, IV* (teorema 56). La demostración es constructiva: introduce primero, por medio del teorema de Desargues, una aritmética de segmentos en la geometría plana anterior, que no depende de los axiomas de congruencia. La suma y el producto de segmentos definidos cumplen las reglas de operación de un campo, excepto la conmutatividad del producto. Sobre la base de esta aritmética construye la representación analítica de una recta. Define después un orden entre los segmentos y llama al conjunto de números resultante un conjunto de números desarguiano D. A partir de este conjunto construye una geometría del espacio en la cual se satisfacen los axiomas de incidencia, orden y paralelas modificado. Considerando en esta geometría del espacio los puntos cuya tercera coordenada es nula, se obtiene una geometría plana en la cual el conjunto de números D forma los elementos de una aritmética de segmentos en que no se cumplen los axiomas de congruencia y en la cual se satisface el teorema de Desargues. Y concluye así su demostración.

6. El capítulo VI lo dedica en una primera parte a investigar la relación del teorema de Pascal con los axiomas de incidencia del espacio. En este caso, la posibilidad de reemplazar los axiomas de congruencia por los

de incidencia del espacio en la demostración del teorema de Pascal, depende esencialmente de la inclusión del axioma de Arquímedes.

Como nuevamente va a prescindir de los axiomas de congruencia, modifica el axioma arquimediano V, 1, sustituyendo el concepto de congruencia implícito en el axioma por el de igualdad en el sentido de la aritmética de segmentos que define en el capítulo V. Después demuestra que si a las propiedades de esta aritmética añadimos el axioma arquimediano entonces la conmutatividad de la multiplicación es una consecuencia necesaria de las restantes reglas de operación, mientras que si no se incluye este axioma, no lo es. La primera demostración la efectúa directamente; para la segunda construye un conjunto desarguiano de números $\Omega(s, t)$, que depende de dos parámetros racionales s y t, de la forma $S = \sum_{j=0}^{m} s^{m+j} T_j$, donde $T_j = \sum_{i=0}^{m} r_i t^{n+i}$ n, m enteros racionales. En él define la multiplicación mediante la ecuación ts = 2 st, válida para los parámetros s y t, e introduce un orden.

El teorema de Pascal resulta ser la interpretación geométrica de la ley conmutativa de la multiplicación en la aritmética de segmentos con el axioma de Arquímedes. Puesto que en el conjunto $\Omega(s, t)$ no se cumple la ley conmutativa, el teorema de Pascal tampoco se cumple y obtiene así una geometría no pascaliana. Con esto queda establecido que el teorema de Pascal puede demostrarse sustituyendo los axiomas de congruencia por los de incidencia del espacio si y sólo si se incluye el axioma de continuidad V, 1[4].

En la segunda parte de este capítulo establece un método para la demostración de teoremas de punto puro de intersección sobre la base del teorema de Pascal. Un teorema de punto puro de intersección es "... un teorema que contiene una afirmación acerca del lugar geométrico común de puntos y rectas y del paralelismo de rectas sin el uso de otras relaciones tales como la congruencia y la perpendicularidad" (12).

Demuestra primero que el teorema de Desargues se puede probar a partir del teorema de Pascal sin el uso de los axiomas III y V; considera después una geometría plana en la que se cumplen los grupos I, 1-3, II, IV* y el teorema de Pascal; identifica las operaciones de la aritmética de segmentos en esta geometría con combinaciones de configuraciones pascalianas. Como los teoremas de punto puro de intersección quedan expresados en términos de relaciones aritméticas, es posible entonces transformarlos en combinaciones de configuraciones pascalianas, con lo cual se tiene un método geométrico de resolución de estos problemas.

7. En el capítulo VII Hilbert concluye los <u>Fundamentos de la geometría</u> con un examen de las construcciones geométricas posibles sobre la base de los grupos de axiomas I-IV. Primero plantea cinco problemas básicos, en el sentido de que todo problema de construcción que suponga sólo los axiomas I-IV puede reducirse a ellos, y demuestra directamente su construcción con regla y escala.

Después formula un criterio analítico que permite determinar si una construcción geométrica puede resolverse con el uso exclusivo de la regla y la escala. Por último, establece en un teorema cuáles condiciones de la solución analítica de un problema de construcción con regla y compás, hacen posible su construcción con regla y escala. Con estas condiciones se puede reducir el problema de la extracción de raíces cuadradas en general (operación que puede hacerse sólo con el compás), a la extracción de raíces cuadradas de la suma de dos cuadrados (que puede hacerse a partir del teorema de Pitágoras, para lo cual bastan la regla y la escala). Menciona a los polígonos regulares que se pueden construir con regla y compás como un ejemplo de la aplicación de este criterio.

El capítulo VII termina con un comentario de carácter general. En éste, Hilbert se refiere al método de investigación que sigue en los Fundamentos de la geometría. Menciona dos cuestiones: la regla fundamental consistente en "...discutir todos los problemas de forma que, al mismo tiempo, se encuentre si pueden ser resueltos de una manera específica con ciertos medios limitados." (13), regla ésta que asocia con la "pureza" en los métodos de demostración; y la importancia de concluir una investigación con la demostración rigurosa de un teorema o la solución completa de un problema, o bien, con el señalamiento de las causas que hacen inevitable el fracaso.

Esta primera incursión de Hilbert en el tema de los fundamentos de las matemáticas contiene ya un esbozo de su concepción filosófica que a lo largo de su vida desarrollaría ininterrumpidamente. Es importante notar su conciencia respecto a la metodología y a la forma particular de desarrollo de las ideas matemáticas. Estas dos características se resumen en la importancia que adquieren para él algunos problemas específicos de las matemáticas. En su intervención en el Segundo Congreso de Matemáticos, realizado en París un año después de la publicación de Fundamentos de la geometría, plantea los que consideraba serían los problemas cuya solución ocuparía la actividad matemática del siglo que empezaba. Entre sus hoy famosos veintitrés Problemas Matemáticos se encuentran tres relacionados directamente con los Fundamentos de la geometría: El segundo: una demostración de consistencia para los axiomas de la aritmética; como se vió en el resumen del capítulo II, la consistencia definitiva de los axiomas de la geometría requiere de la solución de este problema. El tercero (véase p. 14). Y el cuarto: construir y describir sistemáticamente la geometría que resulta al eliminar los axiomas que comprenden el concepto de ángulo y sustituirlos por la desigualdad del triángulo.

Estos tres problemas han sido resueltos, es decir, su solución ha sido encontrada o ha sido demostrada la inexistencia de una solución.

Resulta difícil comparar el trabajo de Hilbert con el de Birkhoff, Un conjunto de postulados para la geometría plana basados en la regla y el transportador (14), porque están motivados por propósitos distintos. En los *Fundamentos*, como ya hemos visto, Hilbert lleva a cabo un análisis detallado de la estructura de la teoría que interrelaciona los hechos matemáticos que constituyen la geometría euclidiana. Birkhoff, por su parte, sólo se ocupa de adecuar el tratamiento formal de la geometría euclidiana a los fines didácticos que justifican su inclusión como materia del *curriculum* preuniversitario: servir de introducción al razonamiento matemático y desarrollar la intuición geométrica. Sin embargo, por el hecho de ser ambos trabajos, entre otras cosas, conjuntos de axiomas para la geometría euclidiana, caben algunos comentarios.

A pesar de estar interesado en el aspecto formal de la geometría euclidiana, y no en el representativo o descriptivo, Hilbert formula sus axiomas con este último criterio: "expresan hechos básicos para nuestra intuición" (geométrica) (15) dice, y conserva, en este sentido, el espíritu euclidiano. En su investigación, no obstante, recurre al álgebra sistemáticamente para esclarecer cuestiones difíciles de tratar con la ayuda exclusiva de argumentos geométricos. Su propósito no es únicamente poner al descubierto las relaciones estructurales entre los grupos de axiomas, sino también salvar ciertas dificultades lógicas inherentes a los métodos exclusivamente geométricos; dificultades que hacen de *Los Elementos* una obra poco accesible, a pesar de que su contenido es matemáticamente simple.

Birkhoff, en su artículo conjunto con R. Beatley "A New Approach to Elementary Geometry" (16), considera estas dificultades lógicas de la exposición euclidiana como verdaderos obstáculos a su función didáctica. Además de la confusión que origina la arbitrariedad en la elección de lo intuitivamente obvio, en el sentido de que otras cosas igualmente obvias tengan que demostrarse, la formación escolar de los alumnos es mucho más sólida en el área del álgebra que en la de la lógica. Esto último hace innecesario y artificial el prescindir de los números en el desarrollo de la geometría euclidiana.

En el mismo artículo, Birkhoff y Beatley discuten otra posibilidad de axiomatización elaborada por Riemann, que cimienta toda la construcción en los números; parte, pues, de la geometría analítica, con los conceptos de distancia y lugar geométrico (como conjunto de parejas), como conceptos primarios, y de allí desarrolla la geometría euclidiana. La desventaja de esta otra alternativa es la de no recurrir en absoluto a la intuición y la complicación de algunos desarrollos algebraicos que pueden estar por encima del nivel de un estudiante preuniversitario. Pero desde un punto de vista lógico es más conveniente. Primero porque los objetos geométricos comparten el modo de existencia de los números, y nuestras conclusiones son tan consistentes como lo son las reglas para calcular con números. En segundo lugar porque se introducen, al mismo tiempo, las ideas de la geometría analítica.

El trabajo de Birkhoff incorpora estas consideraciones y en él se formula un conjunto mixto de axiomas, en el sentido de incluir conceptos geométricos puros y conceptos numéricos. Conserva, sin embargo, los términos no definidos y la arbitrariedad en la elección de los postulados por considerar ambas características como definitorias de una teoría matemática.

Globalmente, en su trabajo Birkhoff se limita a mostrar que el modelo que resulta de sus axiomas coincide con la geometría cartesiana, es decir, demuestra que su conjunto de postulados es categórico.

Según se desprende del título, en este trabajo los elementos y relaciones no definidos así como los postulados, están sugeridos por los hechos geométricos incorporados en la regla graduada y el transportador. El desarrollo de este sistema se limita al plano. Los elementos no definidos son "punto" y "recta"; y las relaciones "distancia entre dos puntos" y "ángulo formado por tres puntos".

El primer postulado afirma la posibilidad de poner en correspondencia biunívoca los puntos de una recta con los números reales, de tal manera que la distancia entre dos puntos A y B es igual al valor absoluto de la diferencia de los reales correspondientes. Este postulado no es en modo alguno evidente, de hecho, contiene implícitamente los axiomas de orden y congruencia de la recta y los de continuidad de Hilbert; y presupone obviamente la existencia de la recta de los números reales, de la cual obtiene las propiedades que de otro modo habría que postular explícitamente.

El segundo postulado equivale a los dos primeros axiomas de incidencia de Hilbert.

En el tercer postulado se establece la medida angular mediante una correspondencia biunívoca entre las semirrectas que pasan por cualquier punto O y los números reales a(mod 2π). Este postulado comparte claramente las características del primero.

El cuarto y último postulado es uno de los teoremas de semejanza. En el artículo antes citado, Birkhoff explica la razón de incluir este postulado en lugar del postulado de las paralelas: "... en nuestras demostraciones hacemos referencia principalmente a la semejanza, y con menos frecuencia a aquellos aspectos del paralelismo que no están comprendidos en la semejanza" (17). De esta forma evita la utilización del postulado de las paralelas, que como más de dos mil años de historia lo atestiguan, tiene ciertas complicaciones.

Después de formular los postulados, se ocupa de probar que son suficientes para caracterizar el plano euclidiano. Para esto demuestra una serie de teoremas que le permite definir un sistema coordenado y desarrollar a partir de este los conceptos elementales de la geometría cartesiana: la ecuación de la recta y la formula para la distancia entre dos puntos.

El artículo finaliza con la demostración de la equivalencia entre la definición de ángulo conteni en el postulado III y el ángulo euclidiano.

N O T A S

(1) Euclides. Elementos de Geometría. Trad. J. D. García Bacca. UNAM, México, 1944. (Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana). p. 13.

(2) Ibidem. p. 12.

(3) Ibidem. pp. 15, 17, 33.

(4) Ibidem. p. 11.

(5) Playfair (1748-1819).

(6) La otra posibilidad alternativa: no es posible trazar ninguna, ya Legendre había demostrado estar en contradicción con los otros postulados de la geometría.

(7) Reid, C. Hilbert. Springer-Verlag, Berlín, 1970. p. 57.

(8) Hilbert, D. Foundations of Geometry. Segunda edición. Trad. Leo Unger de la décima edición alemana. Open Court, La Salle, Illinois; 1971. p. 2.

(9) Ibidem. p. 25.

(10) Ibidem. p. 32.

(11) Ibidem. p. 70.

(12) Ibidem. p. 97.

(13) Ibidem. p. 106.

(14) Birkhoff, G. "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protactor". Annals of Mathematics. Vol. 33, 1932; pp. 329-345.

(15) Hilbert, D. Op. Cit. p. 2.

(16) Birkhoff, G. y Beatley, R. "A New Approach to Elementary". Fifth Yearbook of Nat. Council of Teachers of Math. Harvard University Press, Cambridge Mass., 1930; pp. 86-95.

(17) Ibidem. p. 88.

B I B L I O G R A F I A

Behnke, et al, Fundamentals of Mathematics. Trad. S. H. Gould. The Mit Press, Cambridge Mass., 1974, 3 Vols.

Birkhoff, G. "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protactor". Annals of Mathematics. Vol. 33, 1932; pp. 329-345.

Birkhoff, G. y Beatley, R. "A New Approach to Elementary Geometry". Fifth Yearbook of Nat. Council of Teachers of Math. Harvard University Press, Cambridge Mass., 1930; pp. 86-95.

Boltiânskiî. Hilbert's Third Problem. Wiley & Sons, Washington, D.C. 1978.

Bonola, R. Non-Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc., New York, 1955.

Britannica, Encyclopaedia. "Euclidean Geometry" y "Non-Euclidean Geometry". Macropaedia, Vol. 7 London, 1976, pp. 1099-1120.

Courant, R. y Robbins, H. ¿Qué es la matemática?. Trad. L. Bravo G. Aguilar, Madrid, 1971.

Euclides. Elementos de Geometría. Trad. J. D. García Bacca. UNAM, México, 1944. (Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana).

——————— The Elements. Trad. Sir Thomas L. Heath. Dover Publications, Inc., New York, 1956, 3 Vols.

Eves, H. Estudio de las geometrías. Trad. S. Bilmovicz. UTEHA, México, 1969, 2 tomos.

Hilbert, D. Foundations of Geometry. Segunda edición. Trad. Leo Unger de la décima edición alemana. Open Court, La Salle, Illinois; 1971, pp. 2-107.

——— "Mathematical Problems". Bulletin American Mathematical Society, 1902; pp. 437-479.

Klein, F. Geometry. Tercera edición. Dover Publications, Inc., New York, 1939.

Kramer, E. The Nature and Growth of Modern Mathematics. Fawcet Publications, Greenwich, Connecticut; 1974, 2 Vols.

Pogorelov. Hilbert's Fourth Problem. Winton & Wiley, Washington, D.C.; 1979.

Reid, C. Hilbert. Springer-Verlag, Berlín, 1970.

Struik, D. A Concise History of Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1948.

Verriest, G. Introduction a la Geométrie non Euclidienne par le méthode élémentaire. Gauthier-Villar, París, 1951.

DAVID HILBERT

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA *

* La traducción se tomó de Hilbert, David, Foundations of Geometry. Segunda edición. Trad. Leo Unger de la décima edición alemana. Open Court, La Salle, Illinois; 1971, pp. 2-107.

Así, todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas.*

Kant, I. Crítica de la Razón Pura, "Doctrina Trascendental de los elementos".

INTRODUCCION

La geometría, al igual que la aritmética, requiere sólo de unos cuantos principios simples para su desarrollo lógico. Estos principios son llamados los axiomas de la geometría. El establecimiento de los axiomas de la geometría y la investigación de sus relaciones, es un problema que ha sido tratado en muchas obras excelentes de la literatura matemática desde los tiempos de Euclides. Este problema es equivalente al análisis lógico de nuestra percepción del espacio.

La presente investigación es un nuevo intento de establecer, para la geometría, un conjunto de axiomas completo y tan simple como sea posible, y deducir de éste los teoremas geométricos más importantes, de tal manera que el significado de los distintos grupos de axiomas, así como la importancia de las conclusiones que pueden extraerse de cada uno de los axiomas considerado individualmente, aparezcan con claridad.

* La traducción se tomó de Kant, I. Crítica de la Razón Pura. Trad. Pedro Ribas. Ediciones Alfaguara S.A. Madrid, 1978. p.566 (N. del T.).

C A P I T U L O   I

LOS CINCO GRUPOS DE AXIOMAS

1. Los elementos de la geometría y los cinco grupos de axiomas

DEFINICION. Consideremos tres conjuntos distintos de objetos. Llamemos puntos a los objetos del primer conjunto y denotémoslos por A, B, C,...; a los objetos del segundo conjunto los llamaremos rectas y a ellos corresponde la notación a, b, c,...; llamaremos planos a los objetos del tercer conjunto y los denotaremos por α, β, γ,... . Los puntos son también llamados elementos de la geometría de la recta; los puntos y las rectas elementos de la geometría plana; y los puntos, las rectas y los planos elementos de la geometría del espacio o elementos del espacio.

Se considera que entre los puntos, rectas y planos existen ciertas relaciones y estas relaciones se denotan con palabras como "está", "entre", "congruente". La descripción precisa y matemáticamente completa de estas relaciones se deduce de los axiomas de la geometría.

Los axiomas de la geometría pueden dividirse en cinco grupos. Cada uno de estos grupos expresa hechos relacionados, básicos según nuestra intuición. Estos grupos de axiomas serán llamados como sigue:

I,	1-8	Axiomas de Incidencia,
II,	1-4	Axiomas de Orden,
III,	1-5	Axiomas de Congruencia,
IV,		Axioma de las Paralelas,
V,	1-2	Axiomas de Continuidad.

2. Grupo I de axiomas: axiomas de incidencia

Los axiomas de este grupo establecen una relación de incidencia entre los objetos previamente definidos (puntos, rectas y planos), y afirman lo siguiente:

I, 1. Para todo par de puntos A y B existe una recta a que los contiene.

I, 2. Para todo par de puntos A y B existe a lo más una recta que los contiene.

Aquí y en lo sucesivo dos, tres,... puntos, rectas o planos serán entendidos como puntos, rectas o planos distintos.

Además de "contiene" se emplearán también otras expresiones tales como "a pasa por A y por B, a une A y B o une A con B, A está en a, A es un punto de a, existe un punto A en a", etc. Si A está en la recta a y también en otra recta b, las expresiones empleadas serán "las rectas a y b se intersectan en A, tienen el punto A en común", etc.

I, 3. Existen al menos dos puntos en una recta. Existen al menos tres puntos que no están en una recta.

I, 4. Para cualesquiera tres puntos A, B, C que no estén en la misma recta, existe un plano α que los contiene. Para todo plano existe un punto contenido en él.

Se emplearán también las expresiones "A está en α; A es un punto de α", etc.

I, 5. Para cualesquiera tres puntos A, B, C que no están en una y la misma recta existe un único plano α que los contiene.

I, 6. Si dos puntos A, B de una recta a están en un plano α, entonces todo punto de a está en el plano α.

En este caso se dice que la recta a está en el plano α, etc.

I, 7. Si dos planos α, β tienen un punto A en común, entonces tienen al menos un punto más, B, en común.

I, 8. Existen al menos cuatro puntos que no están en un plano.

El axioma I, 7 expresa el hecho de que el espacio no tiene más de tres dimensiones, mientras que el axioma I, 8 expresa el hecho de que el espacio no tiene menos de tres dimensiones.

Los axiomas I, 1-3 pueden ser llamados los axiomas del plano del grupo I, para distinguirlos de los axiomas (4-8) del espacio del grupo I.

De los teoremas que resultan de los axiomas I, 1-8 sólo mencionaremos los dos siguientes:

TEOREMA 1. Dos rectas en un plano tienen un punto en común o no tienen ninguno. Dos planos no tienen ningún punto en común, o tienen una recta y ningún otro punto en común. Un plano y una recta no contenida en él tienen un punto en común o no tienen ninguno.

TEOREMA 2. Siempre existe uno y sólo un plano que contiene una recta y un punto que no está en ella, o bien dos rectas distintas con un punto en común.

3. Grupo II de axiomas: axiomas de orden[1]

Los axiomas de este grupo definen el concepto de "entre", y por medio de este concepto se hace posible el ordenamiento de los puntos en una recta, en un plano y en el espacio.

DEFINICION. Los puntos de una recta están en una cierta relación, para cuya descripción se usará específicamente la palabra "entre".

II, 1. Si un punto B está entre un punto A y un punto C entonces los puntos A, B, C

son tres puntos distintos de una recta, y B también está entre C y A.

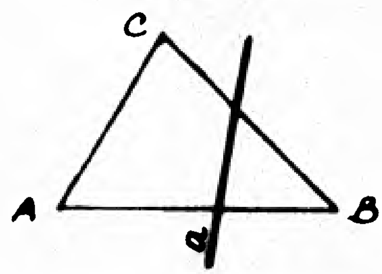
II, 2. Para dos puntos A y C, siempre existe al menos un punto B en la recta AC tal que C está entre A y B.

III, 3. De entre cualesquiera tres puntos en una recta, no existe más que un punto que está entre los otros dos.

Además de estos axiomas de orden de la recta, es necesario un axioma de orden del plano.

DEFINICION. Consideremos dos puntos A y B en la recta a. El conjunto de los dos puntos A y B es llamado un segmento, y será denotado por AB o por BA. Los puntos entre A y B son llamados puntos del segmento AB, o bien se dice que están dentro del segmento AB. Los puntos A, B son llamados extremos del segmento AB. De los demás puntos de la recta a se dice que están fuera del segmento AB.

II, 4. Sean A, B, C tres puntos que no están en una recta, y sea a una recta en el plano ABC que no contiene a ninguno de los puntos A, B, C. Si la recta a pasa por un punto del segmento AB, también pasa por un punto del segmento AC, o del segmento BC.

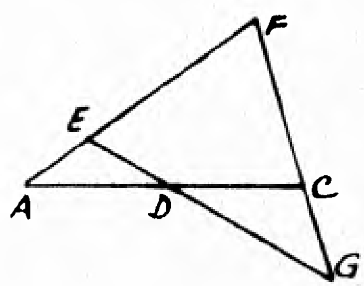


Expresado intuitivamente: si una recta entra al interior de un triángulo también sale de él. El hecho de que los segmentos, AC y BC no son ambos intersectados por la recta a puede demostrarse.

4. Consecuencias de los axiomas de orden e incidencia

Los siguientes teoremas son consecuencia de los axiomas I y II:

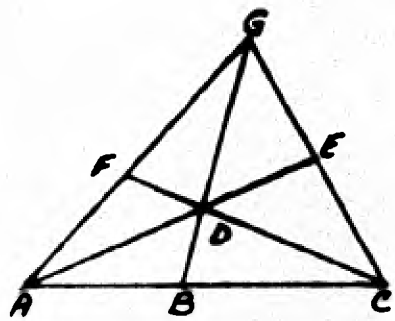
TEOREMA 3. Para dos puntos A y C siempre existe en la recta AC al menos un punto D que está entre A y C.



DEMOSTRACION. Por el axioma I, 3 existe un punto E fuera de la recta AC, y por el axioma II, 2 existe, en AE, un F tal que E es un punto del segmento AF. Por este mismo axioma, y por el axioma II, 3, existe en FC un punto G, que no está en el segmento FC. Por el axioma II, 4 la recta EG debe entonces intersectar el segmento AC en un punto D.

TEOREMA 4. De cualesquiera tres puntos A, B, C en una recta siempre hay uno que está entre los otros dos.

DEMOSTRACION.[2] Supongamos que A no está entre B y C ni C está entre A y B. Unamos un punto D, que no esté en la recta AC, con B y escojamos, por el axioma II, 2, un punto G en la recta que los une tal que D esté entre B y G. Por una aplicación del axioma II, 4 al triángulo BCG y a la recta AD, se obtiene que las rectas AD y CG se intersectan en un punto E que está entre C y G. De la misma manera, las rectas CD y AG se intersectan en un punto F que está entre A y G.



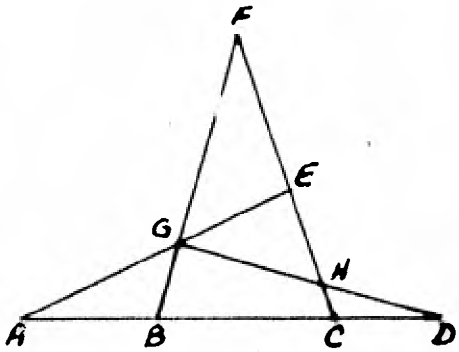
Si se aplica ahora el axioma II, 4 al triángulo AEG y a la recta CF, resulta evidente que D está entre A y E, y por una aplicación del mismo axioma al triángulo AEC y a la recta BG, nos damos cuenta de que B está entre A y C.

TEOREMA 5. Dados cuatro puntos cualesquiera en una recta, siempre es posible identificarlos con las letras A, B, C, D de tal manera que el punto B esté entre A y C, y también entre A y D, y además que el punto C esté entre A y D, y también entre B y D.[3]

DEMOSTRACION. Sean A, B, C, D cuatro puntos en una recta g. Se demostrará lo siguiente:

1. Si B está en el segmento AC y C está en el segmento BD, entonces los puntos B y C también están el segmento AD. Por los axiomas I, 3 y II, 2 escogemos un punto E que no esté en g, y un punto F tal que E esté entre C y F. De la aplicación repetida de los axiomas II, 3 y II, 4 obtenemos que los segmentos AE y BF se intersectan en un punto G, y además que la recta CF intersecta al segmento GD en un punto H. Ya que H está entonces en el

segmento GD y como sin embargo, por el axioma II, 3, E no está en el segmento AG, la recta EH, por el axioma II, 4 intersecta al segmento AD, i.e., C está en el segmento AD. De la misma manera se muestra que B está en este segmento.



2. Si B está en el segmento AC y C está en el segmento AD, entonces C y B también están en los segmentos BD y AD respectivamente.

Escojamos un punto G que no esté en g, y otro punto F tal que G esté en el segmento BF. Por los axiomas I, 2 y II, 3, la recta CF no intersecta al segmento AB ni al segmento BF y por lo tanto, por el axioma II, 4 nuevamente, no intersecta al segmento AG. Pero ya que C está en el segmento AD, la recta CF intersecta entonces al segmento GD en un punto H. Ahora, por el axioma II, 3 y II, 4 de nuevo la recta FH intersecta al segmento BD. Por consiguiente, C está en el segmento BD. El resto de nuestra afirmación 2 se obtiene de 1.

Ahora consideremos cuatro puntos dados cualesquiera en una recta. Tomemos tres de los puntos, llamemos Q a aquel que por el teorema 4 y el axioma II, 3 está entre los otros dos, y llamemos a los otros dos P y R. Finalmente, llamemos S al último de los puntos. Utilizando otra vez el axioma II, 3 y el teorema 4 existen las siguientes cinco posibilidades distintas para la posición de S:

R está entre P y S,

o P está entre R y S,

o S está entre P y R a la vez que Q está entre P y S,

o S está entre P y Q,

o P está entre Q y S.

Las primeras cuatro posibilidades satisfacen las hipótesis de 2 y la última satisface las de 1. El teorema 5 queda así demostrado.

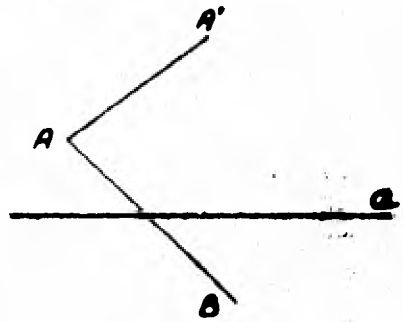
TEOREMA 6. (Generalización del teorema 5). Dado cualquier número finito de puntos en una recta, siempre es posible identificarlos con las letras A, B, C, D, E,..., K de tal manera que el punto B esté entre A y C, D, E,..., K; el punto C esté entre A, B y D, E,..., K; D esté entre A, B, C y E,..., K; etc. Además de este orden de identi-

ficación sólo el orden inverso tiene la misma propiedad.

TEOREMA 7. Entre dos puntos cualesquiera de una recta existe un número infinito de puntos.

TEOREMA 8. Toda recta a en un plano α separa los puntos que no están en la recta a en dos regiones con la siguiente propiedad: Todo punto A de una región determina, junto con cualquier punto B de la otra región, un segmento AB en el cual está un punto de la recta a, y cualquier par de puntos A y A' de una y la misma región, determina un segmento AA' que no contiene ningún punto de a.

DEFINICION. Se dice que los puntos A, A' están en el plano α, en uno y el mismo lado de la recta a; y los puntos A, B están en el plano α, en lados diferentes de la recta a.



DEFINICION. Sean A, A', O, B cuatro puntos de la recta a, dispuestos de forma que O esté entre A y B pero no entre A y A'. Se dice entonces que los puntos A y A' están en la recta a, en uno y el mismo lado del punto O; y los puntos A, B están en la recta a, en lados diferentes del punto O. La totalidad de los puntos

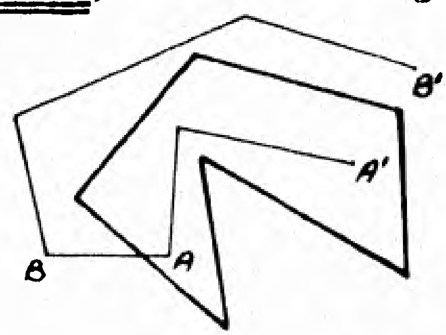
de la recta a que están en uno y el mismo lado de O es llamada un rayo que parte de O. Luego, todo punto de una recta divide a ésta en dos rayos.

DEFINICION. Un conjunto de segmentos AB, BC, CD,..., KL es llamado un segmento poligonal que conecta los puntos A y L. El segmento poligonal será también denotado abreviadamente: ABCD...KL. Si los puntos dentro de los segmentos AB, BC, CD,..., KL así como los puntos A, B, C, D,..., K, L están en un plano, y el punto A coincide con el punto L, entonces al segmento poligonal se le llama polígono y se denota como el polígono ABCD...L. A los segmentos AB, BC, CD,..., KA se les llama también lados del polígono. Los puntos A, B, C, D,..., K son los vértices del polígono. Los polígonos de 3, 4,..., n vértices son llamados triángulos, cuadriláteros,..., n-ágonos.

DEFINICION. Si los vértices de un polígono son todos distintos, ninguno de ellos está en uno de los lados y ningún par de lados no adyacentes tiene un punto en común, entonces el polígono es llamado simple.

Con la ayuda del teorema 8 pueden obtenerse los siguientes teoremas:

TEOREMA 9. Un polígono en un plano α separa los puntos del plano α que no están en el segmento poligonal del polígono en dos regiones, el interior y el exterior, con la siguiente propiedad: Si A es un punto del interior (un punto interior), y B es uno del exterior (un punto exterior) entonces todo segmento poligonal que está en α y une A con B tiene al menos un punto en común con el polígono. Por otro lado, si A, A' son dos puntos del interior y B, B' son dos puntos del exterior, entonces existen segmentos poligonales en α que unen A con A' y otros que unen B con B', ninguno de los cuales tiene algún punto en común con el polígono. Identificando adecuadamente las dos regiones, existen rectas en α, que están enteramente en el exterior del polígono.



Sin embargo, no hay rectas que estén enteramente en el interior del polígono.

TEOREMA 10. Todo plano α separa los demás puntos del espacio en dos regiones con la siguiente propiedad: Todo punto A de una región determina con cualquier punto B de la otra región un segmento AB en el cual está un punto de α, mientras que dos puntos A y A' de una y la misma región siempre determinan un segmento AA' que no contiene puntos de α.

DEFINICION. En la notación del teorema 10 se dice que los puntos A, A' están en el espacio, en uno y el mismo lado del plano α; y que los puntos A, B están en diferentes lados del plano α.

El teorema 10 expresa los hechos más imoortantes acerca del ordenamiento de los elementos del espacio. Estos hechos son entonces consecuencias de los axiomas considerados hasta ahora, y por lo tanto no es necesario un nuevo axioma para el espacio en el grupo II.

5. Grupo III de axiomas: axiomas de congruencia

Los axiomas de este grupo definen el concepto de congruencia y con éste, también el de desplazamiento.

DEFINICION. Los segmentos guardan entre sí cierta relación, para cuya descripción serán usadas las palabras "congruente" o "igual".

III, 1. Si A, B son dos puntos en una recta a, y A' es un punto en la misma o en otra recta a', entonces siempre es posible encontrar un punto B', en un lado dado de la recta a' que pasa por A', tal que el segmento AB sea congruente o igual al segmento A'B'. En símbolos

$$AB \equiv A'B'.$$

Este axioma establece la posibilidad de construir segmentos. Su unicidad será demostrada más adelante.

Un segmento fue definido simplemente como un conjunto de dos puntos A, B y denotado por AB o BA. En la definición no fue especificado el orden de los puntos. Por lo tanto las fórmulas:

$$AB \equiv A'B', \qquad AB \equiv B'A',$$
$$BA \equiv A'B', \qquad BA \equiv B'A'$$

tienen el mismo significado.

III, 2. Si un segmento A'B' y un segmento A"B" son congruentes al mismo segmento AB, entonces el segmento A'B' es también congruente al segmento A"B"; brevemente, si dos segmentos son congruentes a un tercero, son congruentes entre sí.

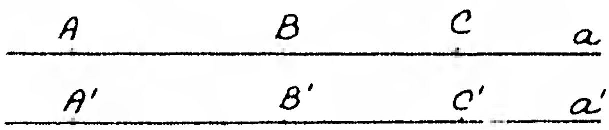
Ya que la congruencia o igualdad es introducida en la geometría sólo por estos axiomas, no es de ninguna manera obvio que todo segmento sea congruente a sí mismo. Sin embargo, este hecho se deduce de los dos primeros axiomas de congruencia si el segmento AB es construído en un rayo de forma que sea congruente, digamos, a A'B', y el axioma III, 2 es aplicado a las congruencias $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$.

Sobre esta base, la simetría y la transitividad de la congruencia de segmentos pueden establecerse por una aplicación del axioma III, 2; i.e., la validez de los siguientes teoremas:

Si	$AB \equiv A'B'$,
entonces	$A'B' \equiv AB$;
Si	$AB \equiv A'B'$
y	$A'B' \equiv A''B''$,
entonces	$AB \equiv A''B''$.

Debido a la simetría de la congruencia de segmentos, podríamos usar la expresión: "Dos segmentos son congruentes entre sí".

III, 3. Sean AB y BC dos segmentos en la recta a que excepto por B no tienen ningún punto en común. En la misma o en otra recta a' sean A'B' y B'C' dos segmentos que excepto por B'



tampoco tienen ningún punto en común. En ese caso,

si $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$

entonces $AC \equiv A'C'$.

Este axioma expresa el requerimiento de la aditividad de los segmentos.

La construcción de ángulos se trata exactamente de la misma forma que la construcción de segmentos. Además de la posibilidad de construir ángulos, es absolutamente necesario requerir también la unicidad axiomáticamente. Sin embargo, la transitividad y la aditividad pueden ser demostradas.

DEFINICION. Sea α un plano y h, k dos rayos distintos cualesquiera, que parten de O en α y están en rectas distintas. Al par de rayos h, k se le llama un ángulo y es denotado por $\sphericalangle(h, k)$ o por $\sphericalangle(k, h)$.

Los rayos h, k son llamados lados del ángulo y el punto O es llamado vértice del ángulo.

Los ángulos degenerados y obtusos quedan excluídos en esta definición.

Supongamos que el rayo h está en la recta $\overline{h}$ y el rayo k en la recta $\overline{k}$. Los rayos k y h, junto con el punto O, dividen los puntos del plano en dos regiones. Todos los puntos que están en el mismo lado de $\overline{k}$ en el que está h, y que también están en el mismo lado de $\overline{h}$ en el que está k, decimos que están en el interior del $\sphericalangle(h, k)$. Todos los demás puntos decimos que están en el exterior de, o fuera de, este ángulo.

Es fácil ver que, por los axiomas I y II, ambas regiones contienen puntos; y que un segmento que conecta dos puntos dentro del ángulo está totalmente en el interior. Los siguientes hechos son igualmente fáciles de demostrar: Si un punto H está en h y un punto K está en k, entonces el segmento HK está totalmente en el interior. Un rayo que parte de O está, o totalmente dentro, o totalmente fuera del ángulo. Un rayo que está en el interior intersecta al segmento HK. Si A es un punto de una región y B es un punto de la otra región, entonces todo segmento poligonal que conecta A y B, o pasa por O, o tiene al menos un punto en común con h o con k. Sin embargo, si A y A' son puntos de la misma región, entonces siempre existe un segmento poligonal que conecta A con A' y no pasa por O ni por ningún punto de los rayos h, k.

DEFINICION. Los ángulos guardan entre sí cierta relación para cuya descripción serán usadas las palabras "congruente" o "igual".

III, 4. **Sean $\measuredangle(h, k)$ un ángulo en un plano α, a' una recta en el plano α' y supongamos dado uno de los lados de a' en α'. Sea h' un rayo en la recta a' que parte del punto O'. Entonces existe en el plano α' uno y sólo un rayo k' tal que el ángulo $\measuredangle(h, k)$ es congruente o igual al ángulo $\measuredangle(h', k')$, y a la vez todos los puntos interiores del ángulo $\measuredangle(h', k')$ están en el mismo lado dado de a'.**

Simbólicamente

$$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k').$$

Todo ángulo es congruente a sí mismo, i.e.,

$$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h, k)$$

es siempre válido.

Se dice también, brevemente, que todo ángulo en un plano dado puede ser construído en un lado dado de un rayo dado de una manera únicamente determinada.

En la definición de un ángulo, prestaremos tan poca atención a su orientación como lo hemos hecho con el sentido de un segmento. En consecuencia, las notaciones $\measuredangle(h, k)$ y $\measuredangle(k, h)$ tendrán el mismo significado.

DEFINICION. Un ángulo con un vértice B en uno de cuyos lados está un punto A y en el otro lado está un punto C, será también denotado por $\measuredangle$ ABC, o brevemente, por $\measuredangle$B. Los ángulos también serán denotados por letras griegas minúsculas.

III, 5. <u>Si para dos triángulos</u>[4] ABC <u>y</u> A'B'C' <u>las congruencias</u>

$AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ <u>y</u> $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$

<u>se cumplen, entonces la congruencia</u>

$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$$

<u>también se cumple.</u>

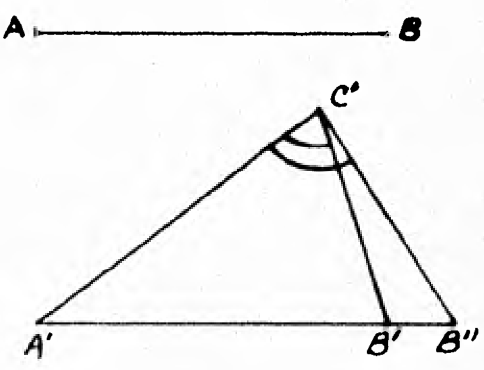
El concepto de triángulo está definido en la p. H-9. Bajo la hipótesis del axioma resulta, por un cambio de notación, que <u>las congruencias</u>

$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C' \quad y \quad \measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$$

se satisfacen.

Los axiomas III, 1-3 son postulados acerca de la congruencia de los segmentos. Serán por lo tanto llamados los axiomas de la <u>recta</u> del grupo III. El axioma III, 4 contiene postulados acerca de la congruencia de los ángulos. El axioma III, 5 relaciona los conceptos de congruencia de segmentos con los de la congruencia de ángulos. Los axiomas III, 4 y III, 5 contienen postulados acerca de los elementos de la geometría plana y pueden por consiguiente ser llamados los axiomas del <u>plano</u> del grupo III.

La <u>unicidad de la construcción de un segmento</u> se deduce de la unicidad de la construcción de un ángulo, con la ayuda del axioma III, 5:



Supongamos que el segmento AB está construído de dos maneras en un rayo que parte de A' a B' y a B". Escogiendo un punto C' que no esté en la recta A'B', se obtienen las congruencias

$A'B' \equiv A'B''$, $A'C' \equiv A'C'$,

$\measuredangle B'A'C' \equiv \measuredangle B''A'C'$

y por lo tanto, por el axioma III, 5

$$\measuredangle A'C'B' \equiv \measuredangle A'C'B''$$

en contradicción a la unicidad de la construcción de un ángulo postulada en el axioma III, 4.

6. Consecuencias de los axiomas de congruencia

DEFINICION. Dos ángulos que tienen un vértice y un lado en común y cuyos lados restantes forman una recta son llamados ángulos suplementarios. Dos ángulos con un vértice común cuyos lados forman dos rectas son llamados ángulos verticales. Un ángulo que es congruente a uno de sus ángulos suplementarios es llamado un ángulo recto.

Demostraremos ahora los siguientes teoremas:

TEOREMA 11. En un triángulo, los ángulos opuestos a dos lados congruentes son congruentes; brevemente: los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

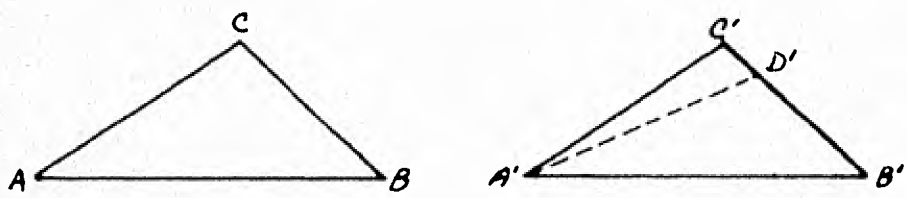
Este teorema se deduce del axioma III, 5 y de la última parte del axioma III, 4.

DEFINICION. Se dice que un triángulo ABC es congruente a un triángulo A'B'C' si se satisfacen las siguientes congruencias:

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BC \equiv B'C'$$
$$\measuredangle A \equiv \measuredangle A', \qquad \measuredangle B \equiv \measuredangle B', \qquad \measuredangle C \equiv \measuredangle C'.$$

TEOREMA 12. (Primer teorema de congruencia de triángulos). Un triángulo ABC es congruente a un triángulo A'B'C' siempre que se cumplan las siguientes congruencias:

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \measuredangle A \equiv \measuredangle A'$$



DEMOSTRACION. Por el axioma III, 5 las congruencias

$$\measuredangle B \equiv \measuredangle B' \quad \text{y} \quad \measuredangle C \equiv \measuredangle C'$$

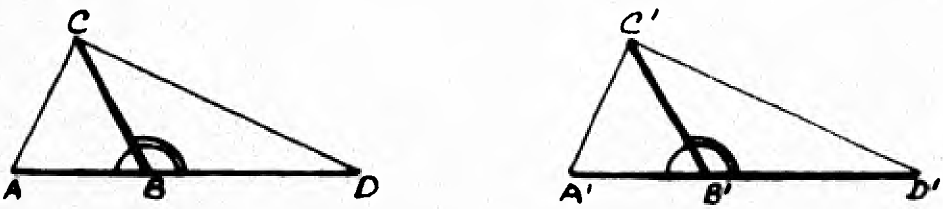
se satisfacen y por lo tanto sólo es necesario demostrar la validez de la congruencia $BC \equiv B'C'$. Si suponemos lo contrario: que BC no es congruente a B'C', y se determimina un punto D' en B'C' de forma que [illegible] $\equiv$ [illegible], entonces el axioma III, 5 aplicado a ambos triángulos ABC y A'B'D' nos indicará que $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'D'$. Si así fuera, $\measuredangle BAC$ sería congruente a $\measuredangle B'A'D'$ y también a $\measuredangle B'A'C'$. Esto es imposible ya que, por el axioma III, 4 todo ángulo puede ser construído en un lado dado de un rayo dado en una <u>única</u> forma. Ha sido por lo tanto demostrado que el triángulo ABC es congruente al triángulo A'B'C'.

Es igualmente fácil demostrar el siguiente:

<u>TEOREMA 13</u>. (<u>Segundo teorema de congruencia de triángulos</u>). Un triángulo ABC es congruente a otro triángulo A'B'C' siempre que se cumplan las siguiente congruencias:

$$AB \equiv A'B', \quad \measuredangle A \equiv \measuredangle A', \quad \measuredangle B \equiv \measuredangle B'.$$

<u>TEOREMA 14</u>. Si un ángulo $\measuredangle ABC$ es congruente a otro ángulo $\measuredangle A'B'C'$, entonces el ángulo suplementario del primero, $\measuredangle CBD$, es congruente al ángulo suplementario $\measuredangle C'B'D'$ del segundo.



<u>DEMOSTRACION</u>. Escogemos los puntos A', C', D' en los lados que pasan por B' de tal manera que

$$AB \equiv A'B', \qquad CB \equiv C'B', \qquad DB \equiv D'B'.$$

Se sigue entonces del teorema 12 que el triángulo ABC es congruente al triángulo A'B'C', <u>i.e.</u>, las congruencias

$$AC \equiv A'C' \quad \text{y} \quad \measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$$

se cumplen.

Como además, por el axioma III, 3 el segmento AD es congruente al segmento A'D', resultaría, de nuevo por el teorema 12, que el triángulo CAD es congruente al triángulo C'A'D', <u>i.e.</u>, las congruencias

$$CD \equiv C'D' \quad \text{y} \quad \measuredangle ADC \equiv \measuredangle A'D'C'$$

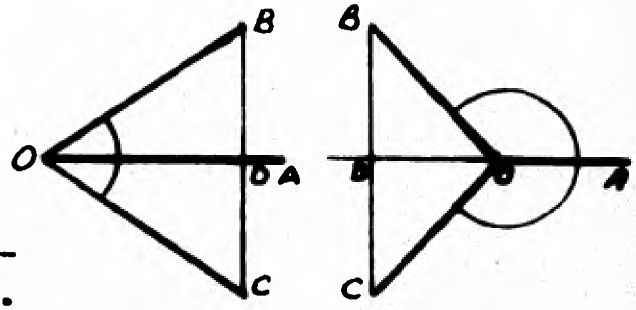
se cumplen y por lo tanto, considerando los triángulos BCD y B'C'D' tenemos, por el axioma III, 5 que

$$\measuredangle CBD \equiv \measuredangle C'B'D'$$

Un corolario inmediato del teorema 14 es el teorema de congruencia para ángulos verticales.

La existencia de los ángulos rectos también es consecuencia de este teorema (véase p. H-15):

Si los ángulos construidos en ambos lados de un rayo OA que parte de O, y los dos lados no comunes de los ángulos, se hacen iguales, OB $\equiv$ OC, entonces el segmento BC intersecta la recta OA en un punto D. Si D coincide con O entonces $\measuredangle$COA y $\measuredangle$BOA son ángulos suplementarios iguales y por consiguiente, son ángulos rectos. Si D está en el rayo OA entonces, por construcción $\measuredangle$DOB $\equiv$ $\measuredangle$DOC.



Si D está en el otro rayo entonces la congruencia se desprende del teorema 14. Por el axioma III, 2, todo segmento es congruente a sí mismo: OD $\equiv$ OD. Luego, por el axioma III, 5 concluimos que $\measuredangle$ODB $\equiv$ $\measuredangle$ODC.

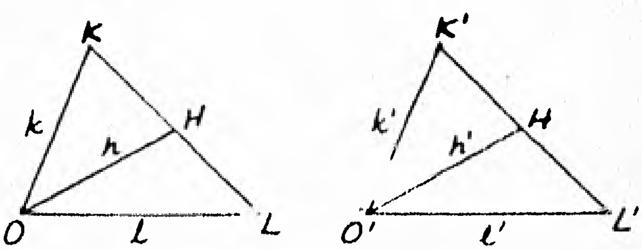
TEOREMA 15. Sean h, k, l y h', k', l' rayos que parten de O y O' en los planos α y α', respectivamente. Supongamos que h, k y h', k' están ambos en el mismo lado, o en lados diferentes de l y l', respectivamente. Si las congruencias

$$\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l') \quad \text{y} \quad \measuredangle(k, l) \equiv \measuredangle(k', l')$$

se satisfacen, entonces también se cumple la congruencia

$$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k').$$

La demostración se hará para el caso en el que h y k están en el mismo lado de l y también, por la hipótesis, h' y k' están en el mismo lado de l'. El segundo caso será reducido al primero por una aplicación del teorema 14. De una consecuencia de la definición en p. H-12



es que, o h está en $\measuredangle(k, l)$ o k está en $\measuredangle(h, l)$. Asignamos ahora las letras de forma que h esté en $\measuredangle(k, l)$. Escogemos puntos K, K', L, L' en los lados k, k', l, l' tales que $OK \equiv O'K'$ y $OL \equiv O'L'$. Por un teorema enunciado en la p. H-13, h intersecta al segmento KL en un punto H.

Determinamos H' en h' de manera que $OH \equiv O'H'$. Por el teorema 12, las congruencias

$$\measuredangle OLH \equiv \measuredangle O'L'H', \qquad \measuredangle OLK \equiv \measuredangle O'L'K'$$
$$LH \equiv L'H', \qquad LK \equiv L'K'$$

y también

$$\measuredangle OKL \equiv \measuredangle O'K'L'$$

se obtienen en los triángulos OLH y O'L'H' ó OLK y O'L'K'.

Ya que por el axioma III, 4, todo ángulo puede ser construído en un lado dado, de un rayo dado en el plano, en forma única y como por hipótesis h' y k' están en el mismo lado de l', las dos primeras congruencias de ángulos mencionadas muestran que H' está en L'K'.

De aquí, las dos congruencias de segmentos muestran fácilmente, por el axioma III, 3, y por la unicidad de la construcción del segmento, que $HK \equiv H'K'$. La aserción se deduce ahora, por el axioma III, 5, de las congruencias: $OK \equiv O'K'$, $HK \equiv H'K'$ y $\measuredangle OKL \equiv \measuredangle O'K'L'$.

El siguiente resultado se obtiene de manera similar:

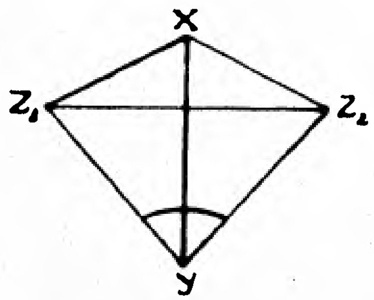
<u>TEOREMA 16</u>. Sea el ángulo $\measuredangle(h, k)$ en el plano α, congruente con el ángulo $\measuredangle(h', k')$ en el plano α', y sea l un rayo en el plano α que parte del vértice del ángulo $\measuredangle(h, k)$ y que está en el interior de este ángulo. Entonces siempre existe uno y sólo un rayo l' en el plano α' que parte del vértice de $\measuredangle(h', k')$ y que está en el interior de este ángulo de tal manera que

$$\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l') \text{ y } \measuredangle(k, l) \equiv \measuredangle(k', l').$$

Con el objeto de obtener el tercer teorema de congruencia y la propiedad de simetría de la congruencia de ángulos, se deduce el siguiente teorema a partir del teorema 15:

<u>TEOREMA 17</u>. Si dos puntos Z_1 y Z_2 son colocados en distintos lados de un segmento XY, y si las congruencias $XZ_1 \equiv XZ_2$ y $YZ_1 \equiv YZ_2$ se cumplen, entonces el ángulo $\measuredangle XYZ_1$ es congruente al ángulo $\measuredangle XYZ_2$.

<u>**DEMOSTRACION**</u>. Por el teorema 11 $\measuredangle XZ_1Z_2 \equiv \measuredangle XZ_2Z_1$ y $\measuredangle YZ_1Z_2 \equiv \measuredangle YZ_2Z_1$. De aquí, la congruencia $\measuredangle XZ_1Y \equiv \measuredangle XZ_2Y$ se cumple por el teorema 15. Los casos especiales cuando



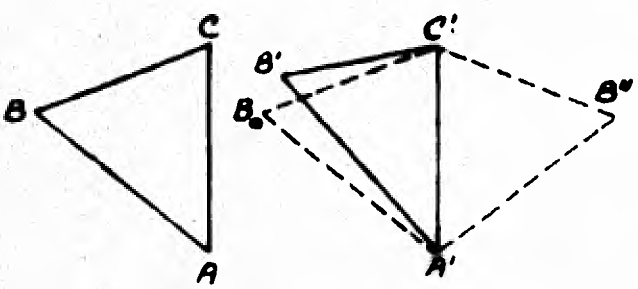
X o Y están en Z_1Z_2 pueden ser resueltos en una forma aún más simple. De la última congruencia y de las congruencias supuestas:

$$XZ_1 \equiv XZ_2 \quad \text{y} \quad YZ_1 \quad YZ_2,$$

el teorema $\measuredangle XYZ_1 \equiv \measuredangle XYZ_2$ se obtiene del axioma III, 5.

<u>**TEOREMA 18**</u>. **(<u>Tercer teorema de congruencia de triángulos</u>). Si en dos triángulos ABC y A'B'C', cada par de lados correspondientes es congruente entonces los triángulos son congruentes.**

<u>**DEMOSTRACION**</u>. **En virtud de la simetría de la congruencia de segmentos probada en la p. H-11, es suficiente demostrar que el triángulo ABC es congruente al triángulo A'B'C'. Construímos el $\measuredangle BAC$ en A' en ambos lados del rayo A'C'. Escogemos el punto B_0 en el lado que está en el mismo lado de A'C' que B', de forma que $A'B_0 \equiv AB$. En el otro lado escogemos B" de tal manera que**



$A'B'' \equiv AB$. Por el teorema 12, $BC \equiv B_0C'$ y $BC \equiv B''C'$. Estas congruencias, junto con las hipótesis, nos dan por resultado, por el axioma III, 2 las congruencias

$$A'B'' \equiv A'B_0, \qquad B''C' \equiv B_0C',$$

y correspondientemente:

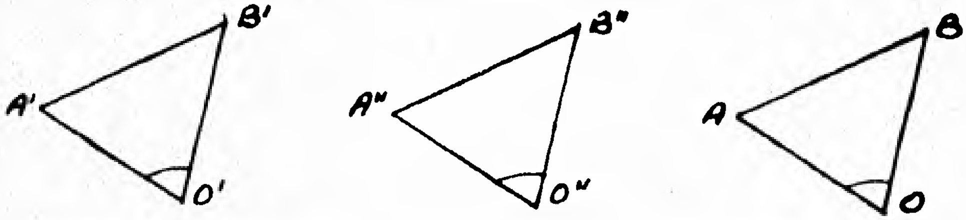
$$A'B'' \equiv A'B', \qquad B''C' \equiv B'C'.$$

Los triángulos $A'B''C'$ y $A'B_0C'$, así como los triángulos $A'B''C'$ y $A'B'C'$ satisfacen las hipótesis del teorema 17, i.e., el ángulo $\sphericalangle B''A'C'$ es congruente al $\sphericalangle B_0A'C'$, así como también al ángulo $\sphericalangle B'A'C'$. Pero como por el axioma III, 4, todo ángulo puede ser construído en un lado dado, de un rayo dado en un plano, de una <u>sola</u> manera, el rayo $A'B_0$ coincide con el rayo $A'B'$, i.e., el ángulo que es congruente a $\sphericalangle BAC$, construído en el lado dado de $A'C'$, es el ángulo $\sphericalangle B'A'C'$. La afirmación se desprende finalmente, por el teorema 12, de la congruencia
$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ y de las congruencias de segmentos supuestas.

TEOREMA 19. Si dos ángulos $\sphericalangle(h', k')$ y $\sphericalangle(h'', k'')$ son congruentes a un tercero $\sphericalangle(h, k)$, entonces el ángulo $\sphericalangle(h', k')$ es también congruente al ángulo $\sphericalangle(h'', k'')$.[5]

Este teorema, que corresponde al axioma III, 2, puede también formularse de la siguiente manera: Si dos ángulos son congruentes a un tercero, son congruentes entre sí.

DEMOSTRACION. Sean O', O'' y O los vértices de los tres ángulos dados. En un lado de cada ángulo escogemos los tres puntos A', A'' y A de tal manera que $O'A' \equiv OA$ y $O''A'' \equiv OA$. Análogamente, en los otros lados escogemos los puntos B', B'' y B tales que $O'B' \equiv OB$ y $O''B'' \equiv OB$.



Estas congruencias, junto con la suposición

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h, k) \quad \text{y} \quad \sphericalangle(h'', k'') \equiv \sphericalangle(h, k),$$

dan por resultado, por el teorema 12, las congruencias

$$A'B' \equiv AB \qquad \text{y} \qquad A''B'' \equiv AB.$$

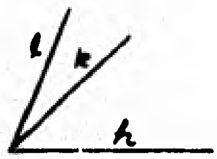
Por el axioma III, 2, los triángulos $A'B'O'$ y $A''B''O''$ coinciden en sus tres lados y por consiguiente, por el teorema 18

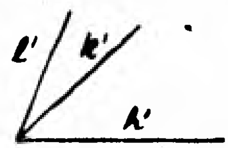
$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'').$$

La propiedad de simetría de la congruencia de ángulos se deduce del teorema 19, de la misma manera que se hace para los segmentos con el axioma III, 2, i.e., si $\sphericalangle\alpha \equiv \sphericalangle\beta$ entonces $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son congruentes entre sí. En particular, los teoremas 12-14 pueden así ser expresados en forma simétrica.

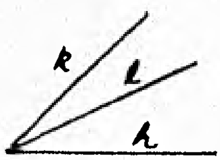
La comparación cuantitativa de ángulos puede establecerse ahora.

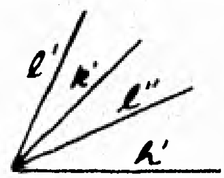
TEOREMA 20. Sean dos ángulos cualesquiera dados $\sphericalangle(h, k)$ y $\sphericalangle(h', l')$. Si la construcción de $\sphericalangle(h, k)$ en h' en el lado l' nos da un rayo interior k', entonces la construcción de $\sphericalangle(h', l')$ en h en el lado de k nos da un rayo exterior l y recíprocamente.





DEMOSTRACION. Supongamos que l está en el interior de $\sphericalangle(h, k)$. Ya que $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$, por el teorema 16 existe para el rayo interior l un rayo l" en el interior de $\sphericalangle(h', k')$ para el cual se cumple la congruencia $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l'')$. Por hipótesis y en virtud de la simetría de la congruencia de los ángulos $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l')$, donde l y l' son necesariamente distintos. Esto contradice la unicidad de la construcción de un ángulo III, 4. El inverso es probado de manera similar.





Si la construcción de $\sphericalangle(h, k)$, descrita en el teorema 20, nos da un rayo interior k' en $\sphericalangle(h', l')$ se dice que $\sphericalangle(h, k)$ es menor que $\sphericalangle(h', l')$; y se usa la notación $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', l')$. Si nos da un rayo exterior se dice que $\sphericalangle(h, k)$ es mayor que $\sphericalangle(h', l')$; y escribimos $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(h', l')$.

Debemos notar que para dos ángulos α y β, uno y sólo uno de los tres casos puede ocurrir:

$$\alpha < \beta \text{ y } \beta > \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \alpha > \beta \text{ y } \beta < \alpha.$$

La comparación cuantitativa de ángulos es transitiva, i.e., para cada uno de los tres supuestos

1. $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$; 2. $\alpha > \beta$, $\beta \equiv \gamma$; 3. $\alpha \equiv \beta$, $\beta > \gamma$

se sigue

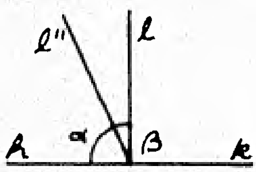
$$\alpha > \gamma$$

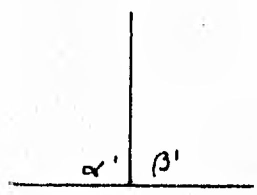
La comparación cuantitativa de segmentos con sus propiedades correspondientes se obtiene inmediatamente de los axiomas II y III, 1-3 así como la unicidad de la construcción de un segmento (véase p. H-14).

Sobre la base de la comparación de ángulos, es posible obtener una demostración para el sencillo teorema siguiente que, subjetivamente hablando, Euclides incluyó injustificadamente entre los axiomas:

TEOREMA 21. Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.

DEMOSTRACION. Por definición, un ángulo recto es aquel que es congruente con su ángulo complementario. Sean los ángulos α ó $\measuredangle(h, l)$ y β ó $\measuredangle(k, l)$ ángulos suplementarios, y sean α' y β' también suplementarios. Sea $\alpha \equiv \beta$ y $\alpha' \equiv \beta'$. Supongamos que α' no es congruente con α, contrario esto a la hipótesis del teorema 21. Entonces la construcción del ángulo α' en h, en el lado en el que está l, nos da por resultado un rayo l" que es distinto de l. l" está entonces o en el interior de α o en el interior de β.





Si l" está en el interior de α entonces

$$\measuredangle(h, l") < \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \beta < \measuredangle(k, l").$$

Por la transitividad de la comparación cuantitativa de ángulos esto implica que $\measuredangle(h, l") < \measuredangle(k, l")$. Por otro lado, por hipótesis, y por el teorema 14

$$\measuredangle(h, l") \equiv \alpha', \quad \alpha' \equiv \beta', \quad \beta' \equiv \measuredangle(k, l"),$$

y por lo tanto resulta que

$$\measuredangle(h, l'') \equiv \measuredangle(k, l'')$$

lo cual contradice la relación $\measuredangle(h, l'') < \measuredangle(k, l'')$. Si l" está en el interior de β, se obtiene una contradicción completamente análoga y el teorema 21 queda así demostrado.

DEFINICION. Un ángulo obtuso es aquel que es mayor que su ángulo suplementario. Un ángulo agudo es aquel que es menor que su ángulo suplementario.

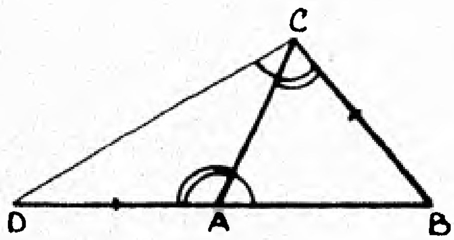
Un teorema fundamental que ya para Euclides jugaba un papel principal, y del cual se obtienen una serie de resultados importantes es el teorema del ángulo exterior.

DEFINICION. Los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle CAB$ del triángulo ABC son llamados ángulos interiores del triángulo. Sus ángulos suplementarios son llamados ángulos exteriores del triángulo.

TEOREMA 22. (Teorema del ángulo exterior). El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente a él.

DEMOSTRACION. Sea $\measuredangle CAD$ un ángulo exterior del triángulo ABC. Escojamos D tal que $AD \equiv CB$.

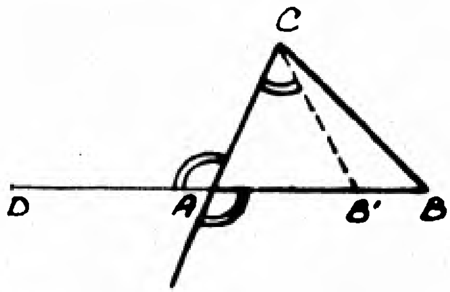
Demostraremos que $\measuredangle CAD \not\equiv \measuredangle ACB$: Si se cumple que $\measuredangle CAD \equiv \measuredangle ACB$, entonces se cumplirá $\measuredangle ACD \equiv \measuredangle CAB$ por la congruencia $AC \equiv CA$ y por el axioma III, 5. Se concluirá entonces de los teoremas 14 y 19, que $\measuredangle ACD$ es congruente al ángulo suplementario de $\measuredangle ACB$.



Por el axioma III, 4, D resultaría estar en el segmento CB, contradiciendo el axioma I, 2. Debe entonces ocurrir que

$$\measuredangle CAD \not\equiv \measuredangle ACB.$$

Es también imposible que $\measuredangle CAD < \measuredangle ACB$ ya que en tal caso la construcción del ángulo exterior $\measuredangle CAD$ sobre CA en C, en el lado donde está B, nos daría un lado que está en el interior del ángulo ∢ACB, y por consiguiente intersectaría al segmento AB en el punto B'. El ángulo exterior ∢CAD sería entonces congruente al ángulo ∢ACB' en el triángulo AB'C. Sin embargo esto es imposible como se demostró arriba. La única posibilidad que nos queda es entonces ∢CAD > ∢ACB.



Exactamente de la misma forma obtenemos el hecho de que el ángulo vertical del ángulo ∢CAD es mayor que el ángulo ∢ABC, y la congruencia de ángulos verticales y la transitividad de la comparación cuantitativa de la magnitud de los ángulos implican que

$$\sphericalangle CAD > \sphericalangle ABC.$$

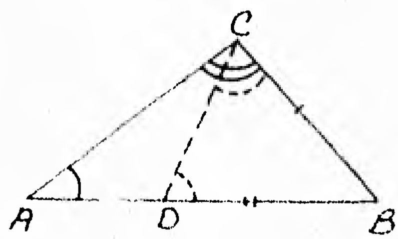
La afirmación está por lo tanto completamente demostrada.

Los corolarios importantes de este teorema son los siguientes teoremas:

<u>TEOREMA 23</u>. En todo triángulo, al mayor ángulo se opone el mayor lado.

<u>DEMOSTRACION</u>. En el triángulo dado construyamos el menor de dos lados que tienen extremos comunes en el lado mayor. La afirmación se deduce entonces de los teoremas 11 y 12, en virtud de la transitividad de la comparación cuantitativa de la magnitud de los ángulos.

<u>TEOREMA 24</u>. Un triángulo con dos ángulos iguales es isósceles.



Este recíproco del teorema 11 es una consecuencia inmediata del teorema 23.

Además, del teorema 22 se obtiene, de una manera simple, una extensión del segundo teorema de congruencia de triángulos:

TEOREMA 25. Dos triángulos ABC y A'B'C' son congruentes si se cumplen las siguientes congruencias

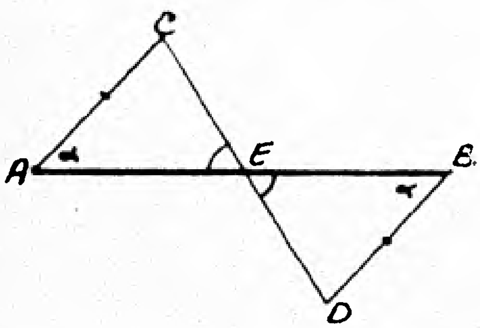
$$AB \equiv A'B' \qquad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \qquad y \qquad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

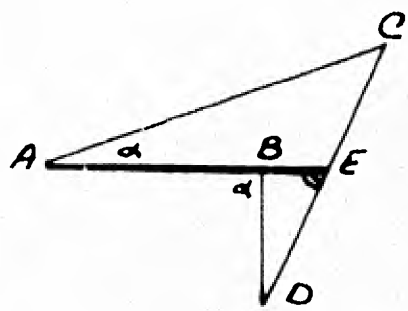
TEOREMA 26. Todo segmento puede ser bisectado.

DEMOSTRACION. En diferentes lados del segmento dado AB construyamos el mismo ángulo α en los extremos y tracemos segmentos iguales en el lado de los ángulos de forma que $AC \equiv BD$. Ya que C y D están en diferentes lados de AB, el segmento CD intersecta a AB en un punto E.

La suposición de que E coincide con A o con B es una contradicción inmediata del teorema 22. Supongamos entonces que B está entre A y E. Por el teorema 22 tendremos entonces que

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle BED > \sphericalangle BAC,$$





lo que contradice la construcción. La suposición de que A está entre B y E nos lleva a la misma contradicción.

Por el teorema 4, E está entonces en el segmento AB. Luego $\sphericalangle AEC$ y $\sphericalangle BED$, como ángulos verticales, son congruentes. De aquí, el teorema 25 es aplicable a los triángulos AEC y BED y nos da

$$AE \equiv EB.$$

Una consecuencia inmediata de los teoremas 11 y 26 es el hecho de que todo ángulo puede ser bisectado.

El concepto de congruencia puede ser extendido a cualquier figura.

DEFINICION. Si A, B, C, D,..., K, L y A', B', C', D',..., K', L' son dos sucesiones de puntos en a y a' respectivamente, tales que las parejas de segmentos

AB y A'B', AC y A'C', BC y B'C',..., KL y K'L' son congruentes, se dice que las dos sucesiones de puntos son congruentes. A y A', B y B',..., L y L' son llamados los puntos correspondientes de las <u>sucesiones congruentes de puntos</u>.

<u>TEOREMA 27</u>. Si la primera de dos sucesiones de puntos congruentes A, B,..., K, L y A', B',..., K', L' está ordenada de tal manera que B está entre A y C, D, ..., K, L; C está entre A, B y D,..., K, L, etc.; entonces los puntos A', B',..., K', L' están ordenados de la misma manera, <u>i.e.</u>, B' está entre A' y C', D', ..., K', L'; C' está entre A', B' y D',..., K', L', etc.

<u>DEFINICION</u>. A un número finito de puntos se le llama <u>figura</u>. Si todos los puntos de una figura están en un plano, se llama <u>figura plana</u>.
Se dice que dos figuras son <u>congruentes</u> si sus puntos pueden ser ordenados por pares, de manera que los segmentos y los ángulos que quedan así ordenados sean todos congruentes.

Como es evidente de los teoremas 14 y 27, las figuras congruentes tienen las siguientes propiedades:
Si tres puntos de una figura son colineales entonces los puntos correspondientes en cualquier figura congruente también son colineales. El orden de los puntos en planos correspondientes, respecto a rectas correspondientes, es el mismo en figuras congruentes. Lo mismo se cumple para sucesiones de puntos correspondientes en rectas correspondientes.

El teorema de congruencia más general para el plano y el espacio es formulado a continuación:

<u>TEOREMA 28</u>. Si (A, B, C,..., L) y (A', B', C',..., L') son figuras planas congruentes, y P denota un punto en el plano de la primera figura, entonces es posible encontrar un punto P' en el plano de la segunda figura tal que (A, B, C,..., L, P) y (A', B', C',..., L', P') son de nuevo figuras congruentes. Si la figura (A, B, C,..., L) contiene al menos tres puntos no colineales

entonces la construcción de P' es posible de una sola manera.

TEOREMA 29. Si (A, B, C,..., L) y (A', B', C',..., L') son figuras congruentes, y P es cualquier punto, entonces siempre es posible encontrar un punto P' tal que las figuras (A, B, C,..., L, P) y (A', B', C',..., L', P') son congruentes. Si la figura (A, B, C,..., L) contiene al menos puntos no coplanares entonces la construcción de P' es posible de una sola manera.

Teniendo presentes los grupos de axiomas I y II, el teorema 29 expresa este importante resultado: Todas las propiedades de congruencia del espacio, y por lo tanto las propiedades de desplazamiento en el espacio, son consecuencia de los cinco axiomas de congruencia de la recta y del plano formulados arriba.

7. Grupo IV de axiomas: axioma de las paralelas

Sean α un plano cualquiera, a una recta cualquiera en α, y A un punto en α que no está en a. Si trazamos una recta c en α, que pase por A e intersecte a a; y otra recta b en α, que pase por A de forma que la recta c intersecte a las rectas a, b en los mismos ángulos, entonces se deduce fácilmente del teorema del ángulo exterior, teorema 22, que las rectas a, b no tienen ningún punto en común, i.e., en un plano α siempre es posible trazar una recta, por un punto A fuera de la recta a, y que no intersecta a a.

DEFINICION. Se dice que dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se intersectan.

El axioma de las paralelas puede ahora enunciarse como sigue:

IV. (Axioma de Euclides). Sea a cualquier recta y A un punto fuera de ella. Entonces existe a lo más una recta en el plano, determinado por a y A, que pasa por A y no intersecta a a.

A partir de lo expuesto anteriormente, y en base al axioma de las paralelas, puede verse que existe exactamente una paralela a una recta, que pasa por un punto fuera de ella.

El axioma de las paralelas IV es equivalente a la siguiente condición:

Si dos rectas a, b en un plano no intersectan a una tercera recta c en el mismo plano, entonces las rectas no se intersectan.

De hecho, si a, b tuvieran un punto A en común, estas dos rectas pasarían por A en el mismo plano sin intersectar a c. Esta situación contradiría el axioma de las paralelas IV. Recíprocamente, el axioma de las paralelas también se obtiene fácilmente a partir de esta condición.

El axioma de las paralelas es un axioma del plano.

La introducción del axioma de las paralelas simplifica la fundamentación de la geometría y facilita su desarrollo en un grado considerable.

Aunando a los axiomas de congruencia, el axioma de las paralelas, obtenemos el conocido hecho siguiente:

TEOREMA 30. Si dos paralelas son intersectadas por una tercera recta, entonces los ángulos correspondientes y los ángulos alternos son congruentes, y recíprocamente, la congruencia de los ángulos correspondientes o de los ángulos alternos, implica que las rectas son paralelas.

TEOREMA 31. La suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.[⊕]

DEFINICION. Si M es cualquier punto en un plano α, a la colección de todos los puntos A en α para los cuales los segmentos MA son congruentes se le llama círculo. M es llamado el centro del círculo.

En base a esta definición, los teoremas conocidos acerca del círculo se obtienen fácilmente con la ayuda de los grupos de axiomas III-IV; en particular, la posibilidad de construir un círculo por cualesquier tres puntos no colineales, así como el teorema de congruencia de ángulos inscritos sobre la misma cuerda y el teorema de los ángulos en un cuadrilátero inscrito.

8. Grupo V de axiomas: axiomas de continuidad

V, 1. (Axioma de la medida o axioma de Arquímedes). Si AB y CD son dos segmentos cualesquiera, entonces existe un número n tal que n segmentos CD, construídos contiguamente a partir de A, sobre el rayo de A que pasa por B, sobrepasarán el punto B.

V, 2. (Axioma de completez de la recta). Una extensión de un conjunto de puntos en una recta con sus relaciones de orden y congruencia, que preservara las relaciones existentes entre los elementos originales, así como las propiedades fundamentales de orden y congruencia de la recta que resultan de los axiomas I-III y V, 1, es imposible.

Por propiedades fundamentales, se entienden las propiedades de orden formuladas en los axiomas II, 1-3 y en el teorema 5, así como también las propiedades de congruencia formuladas en los axiomas III, 1-3, junto con la unicidad de la construcción de un segmento. Se entiende además que al extender el conjunto de puntos, las relaciones de orden y congruencia se preservan en la región extendida de puntos.

Debe notarse que el axioma I, 3 se preserva en toda extensión eo ipso, y que la validez del teorema 3 en tales extensiones es una consecuencia de la permanencia del axioma de Arquímedes V, 1.

El axioma de completez depende esencialmente del hecho de que contiene el axioma de Arquímedes entre los axiomas cuya validez requiere. De hecho, puede demostrarse que a un conjunto de puntos en una recta, que satisface los axiomas enumerados previamente y los teoremas de orden y congruencia, es siempre posible añadir otros puntos tales que estos axiomas sean también válidos en el conjunto extendido resultante; i.e., un axioma de completez que requiere sólo la validez de estos axiomas pero no el de Arquímedes, o uno equivalente a él, conduciría a una contradicción.

Ambos axiomas de continuidad son axiomas de la recta.

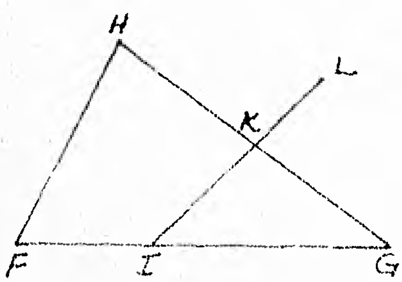
El siguiente hecho se obtiene esencialmente del axioma de completez de la recta.

TEOREMA 32. (Teorema de completez)[9] Los elementos (i.e., los puntos, las rectas y los planos) de la geometría forman un sistema que no puede ser extendido por puntos, rectas y planos, debido a la permanencia de los axiomas de incidencia, orden, congruencia y Arquímedes, es decir, sólo por la permanencia de todos los axiomas.[10]

DEMOSTRACION. Sean los elementos originales aquellos que existen antes de la extensión, y aquellos que se forman por la extensión los nuevos elementos. La suposición de nuevos elementos nos lleva inmediatamente a la suposición de un nuevo punto N.

Por el axioma I, 8, existen cuatro puntos originales no coplanares A, B, C, D. Las letras pueden ser escogidas de tal manera que A, B, N no sean colineales. Los dos planos diferentes ABN y ACD, por el axioma I, 7, tienen además de A, otro punto en común E. E no está en la recta AB porque de lo contrario B estaría en el plano ACD. Si E es un punto nuevo, entonces hay un punto nuevo en el plano original ACD. Por el otro lado, si E es un punto original, entonces el punto nuevo N está en un plano original, a saber, en el plano ABE. En cualquier caso un punto nuevo está en un plano original.

Existe un triángulo original FGH en un plano original y en el segmento FG y un punto original I. Si se une un punto original L con I entonces, por el axioma II, 4, las rectas IL y FH o las rectas IL y GH se intersectan en un punto K. Si K es nuevo, entonces un punto nuevo K está en una recta origi-



nal FH o GH. Si, por el otro lado, K es original, entonces un punto nuevo L está en la recta original IK. Todas estas suposiciones contradicen entonces el axioma de completez de la recta. La suposición de un punto nuevo en un plano original debe en consecuencia ser descartada y por ende la suposición de elementos nuevos.

Las hipótesis del teorema de completez pueden aún debilitarse. No es necesario requerir incondicionalmente la permanencia de algunos de los axiomas mencionados para su validez. Sin embargo es esencial para su validez que el axioma I, 7, esté contenido entre los axiomas cuya permanencia se requiere. De hecho, puede ser demostrado que a un conjunto de elementos que satisfacen los axiomas I-V, siempre es posible añadir puntos, rectas y planos, de manera que estos mismos axiomas, con la excepción del axioma I, 7, se cumplan en el conjunto que resulta de la unión, i.e., un teorema de completez en el cual no esté contenido el axioma I, 7, o uno que sea equivalente a él, entrañaría una contradicción.

El axioma de completez no es una consecuencia del axioma de Arquímedes. De hecho, para demostrar, con la ayuda de los axiomas I-IV, que esta geometría es idéntica a la geometría analítica "Cartesiana", el axioma de Arquímedes por sí solo es insuficiente (véanse las secciones 9 y 12). Sin embargo, recurriendo al axioma de completez, aunque no contiene una afirmación directa acerca del concepto de convergencia, es posible demostrar la existencia de un límite que corresponde a una cortadura de Dedekind, así como el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre la existencia de puntos de acumulación, con lo cual esta geometría aparece idéntica a la geometría cartesiana.

Con el tratamiento anterior, la necesidad de la continuidad ha sido separada en dos partes esencialmente distintas, a saber, en el axioma de Arquímedes, cuyo papel es preparar el requisito de la continuidad, y en el axioma de completez, que constituye la piedra angular de todo el conjunto de axiomas.[11]

Las investigaciones subsecuentes descansan esencialmente en el axioma de Arquímedes y en general, no se supone el axioma de completez.

C A P I T U L O   II

LA CONSISTENCIA Y LA INDEPENDENCIA MUTUA DE LOS AXIOMAS

9. La consistencia de los axiomas

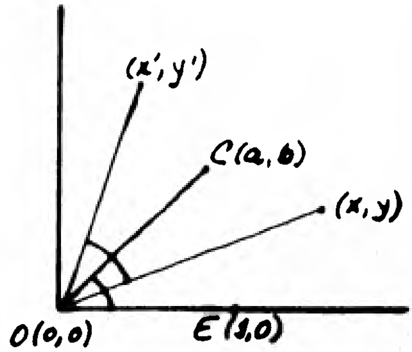
Entre los axiomas formulados en los cinco grupos del Capítulo I, no existen contradicciones, i.e., a partir de los axiomas es imposible deducir, por inferencia lógica, un resultado que sea contradictorio con alguno de ellos. Para mostrar esto construiremos un conjunto de objetos, a partir de los números reales, en el que todos los axiomas de los cinco grupos se satisfacen.

Consideremos el campo Ω de todos los números algebraicos que se obtienen del número 1 y de la aplicación, un número finito de veces de las cuatro operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división y una quinta operación $\left|\sqrt{1 + w^2}\right|$, donde w denota un número que resulta de estas cinco operaciones.

Consideremos un par de números (x, y) del campo Ω como un punto y las razones $(u : v : w)$ entre tres números cualesquiera de Ω como una recta, siempre que u, v no sean ambos cero. Además la existencia de la ecuación

$$u x + v y + w = 0$$

significará que el punto (x, y) está en la recta $(u : v : w)$. Así, como es fácil ver, los axiomas I, 1-3 y IV se satisfacen inmediatamente. Los números del campo Ω son reales; teniendo en cuenta que estos pueden ser ordenados según sus magnitudes, es fácil encontrar interpretaciones para estos puntos de acuerdo a las cuales todos los axiomas de orden son también válidos. De hecho, si (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),... son puntos cualesquiera en una recta, este arreglo será el orden de sucesión en la recta cuando los números x_1, x_2, x_3,... ó y_1, y_2, y_3,... en el arreglo sean monótonamente crecientes o decrecientes. Para satisfacer también el el axioma II, 4, basta establecer que todos los puntos



(x, y), para los cuales $ux + vy + w$ es menor o mayor que 0, están en un lado o en el otro de la recta $(u : v : w)$, respectivamente. Es fácil convencerse de que esta interpretación es compatible con la anterior que determinaba la sucesión de los puntos en una recta.

Para la construcción de ángulos y segmentos se emplean los métodos de la geometría analítica. Una transformación de la forma

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

efectúa una traslación paralela de segmentos y ángulos; y una transformación de la forma

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

efectúa una reflexión sobre la recta $y = 0$. Además, si denotamos los puntos $(0, 0)$ por O, $(1, 0)$ por E y un punto arbitrario (a, b) por C, entonces, mediante una rotación por el ángulo $\sphericalangle COE$ alrededor del punto fijo O, el punto (x, y) se convierte en (x', y') donde hay que hacer las sustituciones

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}y.$$

Como el número

$$\sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

resulta estar en el campo Ω, los axiomas III, 1-4 también se cumplen para estas interpretaciones y claramente los axiomas III, 5 de congruencia de triángulos, así como el axioma de Arquímedes V, 1 también se satisfacen. El axioma de completez V, 2 no se cumple.

Toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-IV, V, 1 debía ser, por lo tanto, detectable en la aritmética del campo Ω.[12]

Si en el desarrollo anterior se escoge el campo de los números reales en lugar del campo Ω, se obtiene la geometría cartesiana plana ordinaria. El hecho de que en esta geometría (además de los axiomas I, 1-3, II, III, IV, y V, 1) el axioma de completez también se cumple, puede ser visto de la siguiente manera:

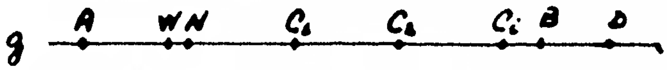
En la geometría cartesiana se deduce, sobre la base de las definiciones de orden y congruencia de segmentos, que todo segmento puede ser dividido en un número dado n de partes congruentes, y si un segmento AB es menor que un segmento AC entonces la n-ésima parte de AB es también menor que la de AC.

Supongamos ahora que existe una recta g a la cual, contradiciendo el axioma de completez, es posible añadir puntos en la geometría dada sin afectar la validez de los axiomas II, 1-3, III, 1-3, V, 1, el teorema 5 o la unicidad de la construcción de un segmento (p. H-14). Sea N uno de los puntos añadidos. Este divide la recta g en dos rayos cada uno de los cuales contiene, por el axioma de Arquímedes, puntos que existían antes de la extensión. Llamemos a éstos los puntos originales. Entonces N divide los puntos originales de g en dos rayos. Considerando g representada en la forma paramétrica

$$x = mt + n, \qquad y = pt + q$$

en la cual todos los valores que toma el parámetro t antes de la extensión por N son reales, entonces la partición inducida por N da por resultado una cortadura de Dedekind para estos valores. Como es bien sabido, para tal cortadura solamente se cumple una de las dos condiciones siguientes: O la primera clase determinada por ésta tiene un último elemento, o la segunda clase tiene un primer elemento. Sea A el punto que corresponde a uno de estos elementos. Entonces ningún punto original está entre A y N.

Sin embargo, existe un punto original B tal que N está entre A y B. Por el axioma de Arquímedes existe un número, digamos, n - 1 de puntos distintos C_1, C_2,..., C_{n-1} D tales que los n segmentos AN, NC_1, C_1C_2,..., $C_{n-1}D$ son congruentes entre sí y tal que B está entre A y D. Dividimos ahora el segmento AB en n partes congruentes. To-



dos los puntos que determinan la división son puntos originales. Sea W el punto más cercano a A. De las condiciones de orden en la recta y congruencia introducidas al principio de esta demostración, resulta que el segmento AW es menor que AN, mientras que AB es menor que AD. El punto original W está entonces entre A y N. La suposición de que un punto podía ser añadido a la recta g sin que afectara la validez de los axiomas de la recta, nos ha llevado a una contradicción.

En la geometría cartesiana se cumplen entonces <u>todos</u> los axiomas del plano y la recta.

El tratamiento correspondiente para la geometría del espacio no presenta dificultad.

Toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-V debería por consiguiente, ser detectable en la aritmética de los números reales.

Como puede verse, existe un número infinito de geometrías que satisfacen los axiomas I-IV, V, 1. Sin embargo, existe sólo <u>una</u>, la geometría cartesiana, en la cual se cumple, simultáneamente, el axioma de completez.

10. <u>La independencia del axioma de las paralelas</u> <u>(Geometría no euclidiana)</u> (1)

Después de haber visto la consistencia de los axiomas es interesante investigar si son todos independientes uno de otro. De hecho, puede probarse que no hay parte esencial de ninguno de estos grupos de axiomas que pueda ser deducida de los otros por inferencia lógica.

Por lo que respecta a los axiomas de los grupos I, II y III es fácil demostrar que los axiomas de uno y el mismo grupo son esencialmente independientes entre sí.

En la presente exposición los axiomas de los grupos I y II son básicos para los otros axiomas, por lo tanto, sólo es necesario probar la independencia de cada uno de los grupos III, IV y V con relación a los otros.

El axioma de las paralelas IV es independiente de los otros axiomas. La forma más simple y conocida de demostrar esto es la siguiente: Escojamos aquellos puntos, rectas y planos de la geometría ordinaria (cartesiana) construída en la sección 9 que estén en una esfera fija, como los elementos de una geometría del espacio y reemplacemos las congruencias de esta geometría por transformaciones lineales de la geometría ordinaria que mapean la esfera fija en sí misma. Mediante interpretaciones adecuadas puede verse que en esta <u>geometría</u> "<u>no euclidiana</u>" todos los axiomas excepto el axioma IV de Euclides son válidos y, ya que la existencia de la geometría ordinaria ha sido demostrada en la sección 9, se concluye ahora la existencia de la geometría no euclidiana.

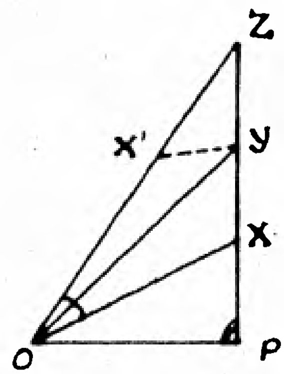
Son de especial interés los teoremas que se cumplen independientemente del axioma de las paralelas, <u>i.e.</u>, aquellos que se cumplen tanto en las geometrías euclidianas como en las no euclidianas. Como los ejemplos más importantes veremos dos de los teoremas de Legendre. El primero requiere para su demostración, además de los axiomas I hasta III, el axioma de Arquímedes V, 1. Primero se demostrarán algunos teoremas preparatorios:

<u>TEOREMA 33</u>. Considérese dado un triángulo OPZ con un ángulo recto en P. En el segmento PZ sean X, Y tales que

$$\sphericalangle XOY \equiv \sphericalangle YOZ$$

entonces

$$XY < YZ.$$



Para la <u>demostración</u> construyamos el segmento OX' sobre OZ tal que

$$OX \equiv OX'.$$

Por los teoremas 22 y 23, X' está en el segmento OZ, y con ayuda del teorema 22 y el axioma III, 5 obtenemos

$$\sphericalangle X'ZY < \sphericalangle OYX \equiv \sphericalangle OYX' < \sphericalangle YX'Z.$$

Por los teoremas 12 y 23, de la relación $\sphericalangle X'ZY < \sphericalangle YX'Z$ se obtiene la afirmación.

TEOREMA 34. Para cualesquiera dos ángulos α y ε siempre es posible encontrar un número natural r tal que

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon .$$

Aquí $\frac{\alpha}{2^r}$ denota el ángulo que resulta de la bisección de α, r veces.

DEMOSTRACION. Sean α y ε dos ángulos dados. Por los axiomas supuestos, la bisección de los ángulos es posible (véase p. H-25). Consideremos el ángulo agudo $\frac{\alpha}{2}$. Si $\frac{\alpha}{2} \lesseqgtr \varepsilon$, la aserción del teorema 34 es verdadera para r = 2. Si $\frac{\alpha}{2} > \varepsilon$, entonces desde un punto C en un lado del ángulo $\frac{\alpha}{2}$ se traza una perpendicular al otro lado que intersecta a éste en un punto B. Denotamos el vértice de $\frac{\alpha}{2}$ por A. Si ε es construído en el lado AB en el interior del ángulo $\sphericalangle BAC = \frac{\alpha}{2}$ entonces por la desigualdad supuesta, el tercer lado intersecta el segmento BC en el punto D (véase p. H-13). El axioma de Arquímedes V, 1 permite afirmar que existe un número natural n tal que

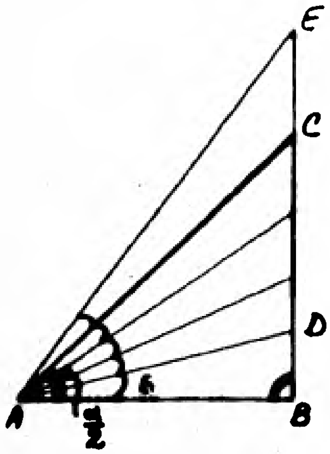
$$n \cdot BD > BC.$$

Construyamos ahora el ángulo ε en el tercer lado resultante, hacia afuera n veces.

Puede haber un caso en el que en la última n-ésima construcción, el tercer lado resultante no intersecte el rayo BC, y digamos que, la m-ésima construcción es la primera en la que esto ocurre. Ya que el tercer lado anterior aún intersecta el lado de este rayo, el ángulo $(m - 1)\varepsilon$ es agudo.

Por lo tanto, se concluye fácilmente que el interior del ángulo m veces construído, $m\varepsilon$, está en el semiplano de AB que contiene a C, y además que el rayo AC está en el interior del ángulo $m\varepsilon$, i.e.,

$$m \cdot \varepsilon > \frac{\alpha}{2} .$$



En el otro caso, todo ángulo ε obtenido en la construcción repetida n veces define un segmento en el rayo BC que por el teorema 33 es mayor o igual a BD. Sea E el punto en el que el n-ésimo tercer lado intersecta a BC. La suma BE de los n segmentos determinados en BC es mayor que n • BD y entonces a fortiori es mayor que BC. Por consiguiente concluímos que

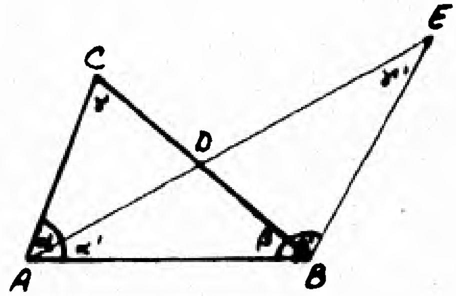
$$n \cdot \varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$

Para m ó n sea r un número natural tal que $m < 2^{r-1}$ ó $n < 2^{r-1}$, respectivamente. Denotemos el ángulo $m\varepsilon$ ó $n\varepsilon$ por μ. Los ángulos $\frac{\mu}{2^{r-1}}$ y $\frac{\alpha}{2^r}$ pueden construirse. De la posibilidad de comparar ángulos se infiere fácilmente que la desigualdad $2^{r-1} > m$ es consecuencia de la desigualdad $\frac{\mu}{2^{r-1}} < \frac{\mu}{m} = \varepsilon$ la desigualdad $\mu > \frac{\alpha}{2}$. Por lo tanto, de la transitividad de la comparación cuantitativa (p. H-21) se concluye que $\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon$.

El primer teorema de Legendre puede ser mostrado con la ayuda del teorema 34.

<u>TEOREMA 35</u>. (<u>Primer teorema de Legendre</u>). La suma de los ángulos de un triángulo es menor o igual a dos ángulos rectos.

<u>DEMOSTRACION</u>. Denótese cualquiera de los tres ángulos de un triángulo por $\sphericalangle A = \alpha$, y los otros dos por $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ de tal manera que $\beta \leq \gamma$. Por el teorema 26, el segmento BC tiene un punto medio D. Prolongamos AD más allá de D, por una cantidad igual a él, hasta E. Por la congruencia de ángulos verticales, el axioma III, 5 puede ser aplicado



a los triángulos ADC y EDB. Definiendo la suma de los ángulos sobre la base del teorema 15, en una manera obvia, obtenemos para los ángulos α', β', γ' del triángulo ABE la relación

$$\alpha' + \gamma' = \alpha, \qquad \beta + \gamma' = \beta'.$$

La suma de los ángulos del triángulo ABE es por lo tanto, igual a la del triángulo ABC.

De la desigualdad $\beta \lesseqgtr \gamma'$ se concluye fácilmente, por los teoremas 23 y 12, que

$$\alpha' \lesseqgtr \gamma' \text{ y luego entonces } \alpha' \lesseqgtr \frac{\alpha}{2}.$$

De aquí que, a todo triángulo ABC y para cualquiera de sus ángulos α, siempre es posible asignar un triángulo con igual suma de ángulos, en el cual un ángulo es menor o igual a $\frac{\alpha}{2}$ y por consiguiente, dado un número natural r, es posible asignarle un triángulo con una suma de ángulos igual, en el que uno de los ángulos es menor o igual a $\frac{\alpha}{2^r}$.

Supongamos ahora, contradiciendo la afirmación del primer teorema de Legendre, que la suma de los ángulos de un triángulo dado es mayor que dos ángulos rectos.

Se infiere, del teorema 22, que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos. Luego, de acuerdo con la suposición, la suma de los ángulos de un triángulo dado puede ser representada de la forma

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\rho + \varepsilon$$

donde ε denota cualquier ángulo y ρ denota un ángulo recto. Por el teorema 34, es posible determinar un número real r tal que

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Construimos ahora, de la manera señalada, un triángulo con ángulos $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ que satisfacen las relaciones

$$\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 2\rho + \varepsilon, \quad \alpha^* \lesseqgtr \frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

En este triángulo

$$\beta^* + \gamma^* > 2\rho,$$

lo que contradice el teorema 22. Queda así demostrado el primer teorema de Legendre.

TEOREMA 36. Si el cuadrilátero ABCD tiene ángulos rectos en A y B, y si además sus lados opuestos AD y BC son congruentes, entonces los ángulos ∡C y ∡D también son congruentes entre sí. Además, la perpendicular al segmento AB trazada en el punto medio M, intersecta el lado opuesto CD en un punto N de tal manera que los cuadriláteros AMND y BMNC son congruentes.

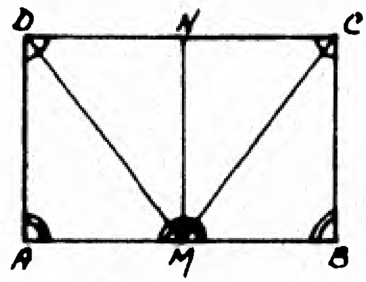
DEMOSTRACION. De los teoremas 21 y 22 resulta que la perpendicular a AB, levantada en M, está en el interior del ángulo ∡DMC y, por uno de los teoremas mencionados en la p. H-13, ésta intersecta al segmento CD en el punto N. Se concluye de los teoremas 12, 21 y 15 que los triángulos MAD y MBC, y por consiguiente también los triángulos MDN y MCN son congruentes. Con la ayuda del teorema 15 se obtiene de estas congruencias que

$$\measuredangle BCN \equiv \measuredangle ADN.$$

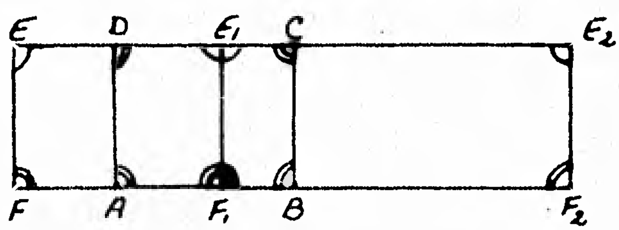
Por lo tanto, los cuadriláteros AMND y BMNC son congruentes.

TEOREMA 37. Si el cuadrilátero ABCD tiene cuatro ángulos rectos entonces toda perpendicular EF trazada desde un punto E en la recta CD al lado opuesto AB es también perpendicular a CD.

DEMOSTRACION. El concepto de una reflección sobre una recta a se introduce como sigue:



Si se traza una perpendicular desde cualquier punto P a cualquier recta a y se extiende una cantidad igual mas allá del pie hasta P', entonces el punto P' es la imagen de P. Reflejemos el segmento EF sobre AD y BC. Las imágenes E_1F_1 y E_2F_2, según concluímos de la

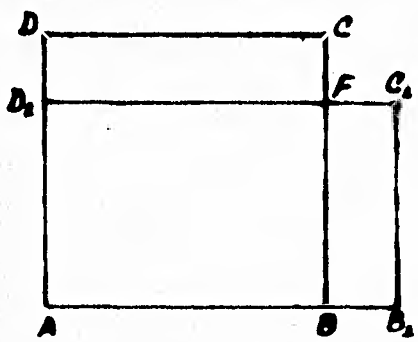


segunda parte del teorema 36, son congruentes al segmento EF. Los puntos E_1 y E_2 , al igual que E, están en CD; los puntos F_1 y F_2, al igual que F, están en AB. Las hipótesis de la primera parte del teorema 36 son satisfechas por los cuadriláteros EFF_1E_1, EFF_2E_2 y $E_1F_1F_2E_2$ y de aquí obtenemos la igualdad de los cuatro ángulos en los puntos E, E_1, E_2 . Por lo tanto, en uno de estos cuatro puntos dos ángulos suplementarios son iguales (en E_1 en la figura), i.e., los cuatro ángulos iguales son ángulos rectos.

TEOREMA 38. Si todos los ángulos en un cuadrilátero son ángulos rectos entonces en todo cuadrilátero con tres ángulos rectos, el cuarto ángulo es también recto.

DEMOSTRACION. Sea A'B'C'D' un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y ABCD cualquier cuadrilátero con tres ángulos rectos en A, B, D. Construyamos el cuadrilátero $AB_1C_1D_1$ que es congruente a A'B'C'D' y cuyo ángulo recto en A coincide con el del cuadrilátero ABCD.

Si B coincide con B_1 o D coincide con D_1 entonces lo que se afirma coincide con el teorema 37. Si B está entre A y B_1 y D_1 está entre A y D entonces, al igual que en la demostración del teorema 36, del teorema del ángulo exterior resulta que los segmentos BC y C_1D_1 se intersectan en un punto F. El teorema 37 muestra entonces



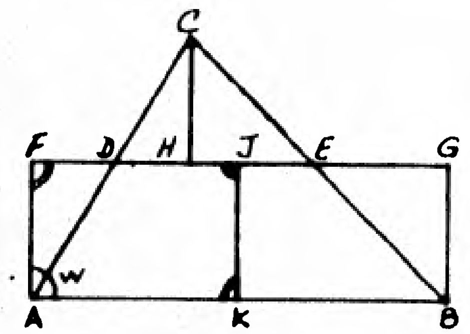
que el ángulo en F, y por lo tanto también en C, es un ángulo recto.

Los casos restantes para el posible orden de los puntos A, B, B_1 y A, D, D_1 se obtienen de una manera análoga.

Con la ayuda del teorema 38 puede demostrarse el segundo teorema de Legendre.

TEOREMA 39. (Segundo teorema de Legendre). Si en algún triángulo, la suma de los ángulos es igual a dos ángulos rectos, entonces la suma de los ángulos en todo triángulo es igual a dos ángulos re[illegible].

DEMOSTRACION. A todo triángulo ABC, la suma de cuyos



ángulos es $2w$, es posible asociar un cuadrilátero con tres ángulos rectos cuyo cuarto ángulo sea igual a w. Para hacerlo unamos los puntos medios D y E de los lados AC y BC y desde A, B y C, tracemos las perpendiculares AF, BG y CH a los segmentos unidos. De la congruencia de los triángulos AFD y CHD, así como de la congruencia de los triángulos BGE y CHE, tenemos que

$$AF \equiv BG,$$

$$\measuredangle FAB + \measuredangle GBA = 2w,$$

sin importar si uno de los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ de los triángulos dados es obtuso o no.

Trazando la perpendicular JK a FG en su punto medio, resulta de la segunda parte del teorema 36 que los cuadriláteros AKJF y BKJG son congruentes. Cada uno de estos cuadriláteros tiene tres ángulos rectos y los cuartos ángulos son iguales, i.e.,

$$\measuredangle FAB \equiv \measuredangle GBA.$$

Por consiguiente obtenemos

$$\measuredangle FAB = w,$$

y el cuadrilátero AKJF está por lo tanto, asociado al triángulo dado, como queríamos.

Ahora sean dados un triángulo D_1 en el cual la suma de los ángulos es igual a dos ángulos rectos y otro triángulo D_2. Consideremos los cuadriláteros asociados V_1 y V_2. V_1 es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y V_2 es uno con tres ángulos rectos. Por el teorema 38 el cuarto ángulo en V_2 es también un ángulo recto. Queda así demostrado el segundo teorema de Legendre.

11. La independencia de los axiomas de congruencia

De los resultados que son consecuencia de la independencia de los axiomas de congruencia demostraremos el siguiente, que es particularmente importante: El axioma III, 5 no puede ser deducido de los otros axiomas I, II, III, 1-4, IV, V por inferencia lógica.

Escojamos los puntos, rectas y planos de la geometría ordinaria como los elementos de la nueva geometría del espacio y definamos la construcción de un ángulo como en la geometría ordinaria, digamos que en la forma establecida en la sección 9. Sin embargo, definamos la construcción de segmentos de una manera diferente: Supongamos que los puntos A_1 y A_2 tienen coordenadas x_1, y_1, z_1 y x_2, y_2, z_2 en la geometría ordinaria. Denotemos la longitud del segmento A_1A_2 por el valor positivo de

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

y digamos que dos segmentos cualesquiera A_1A_2 y $A'_1\ A'_2$ son congruentes siempre que tengan la misma longitud en el sentido anterior.

Es inmediatamente claro que en la geometría del espacio construída de esta forma, los axiomas I, II, III, 1-2, 4, IV, V (así como los teoremas 14, 15, 16, 19, 21 que fueron deducidos con la ayuda del axioma III, 5), se cumplen.

Para demostrar que el axioma III, 3 también se cumple escojamos cualquier recta a y tres puntos A_1, A_2, A_3 en ella tales que A_2 esté entre A_1 y A_3. Defínanse los puntos x, y, z en la recta a por medio de las ecuaciones

$$x = \lambda t + \lambda',$$
$$y = \mu t + \mu',$$
$$z = \nu t + \nu',$$

donde t es un parámetro y $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ denotan ciertas constantes. Si t_1, $t_2\ (< t_1)$, $t_3 (< t_2)$ son valores paramétricos que corresponden a los puntos A_1, A_2, A_3 entonces las longitudes de los tres segmentos A_1A_2, A_2A_3 y A_1A_3 serán

$$(t_1 - t_2)\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|,$$
$$(t_2 - t_3)\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|,$$
$$(t_1 - t_3)\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|,$$

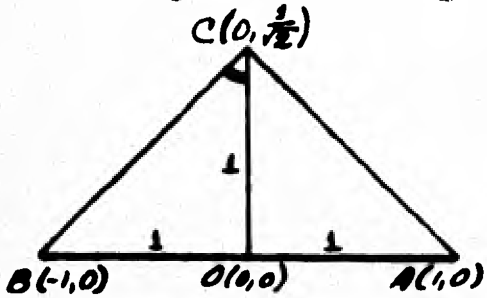
y la suma de los segmentos A_1A_2 y A_2A_3 es por lo tanto igual a la longitud del segmento A_1A_2. Luego, se concluye la validez del axioma III, 3.

El axioma III, 5 no siempre se satisface en esta geometría. Como ejemplo consideremos los cuatro puntos

O con las coordenadas $x = 0$, $y = 0$,
A con las coordenadas $x = 1$, $y = 0$,
B con las coordenadas $x = -1$, $y = 0$,
C con las coordenadas $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

en el plano $z = 0$.

La longitud de los segmentos OA, OB y OC es 1. Para los triángulos rectángulos AOC y COB las congruencias



$$\angle AOC \equiv \angle COB$$
$$OA \equiv OC$$
$$OC \equiv OB$$

se cumplen.

Contrario al axioma III, 5 los ángulos $\angle OAC$ y $\angle OCB$ no son congruentes. Al mismo tiempo, la primera congruencia en este ejemplo no se cumple ya que la longitud de AC es $\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{2}}}$ y la de BC es $\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{2}}}$. El teorema 11 no es válido para ninguno de los triángulos AOC ó COB.

Un ejemplo de una geometría plana en la cual todos los axiomas excepto el axioma III, 5 se cumplen, es el siguiente: Definamos todos los conceptos que aparecen en el axioma, con excepción de "segmento congruente", de la manera usual en un plano α. Sin embargo, tomamos la longitud de su proyección, definida de la manera usual en un plano β que está inclinado respecto a α en algún ángulo agudo (no cero).

12. La independencia del axioma V de continuidad (Geometría no arquimediana)

Con el objeto de demostrar la independencia del axioma V, 1 de Arquímedes es necesario construir una geometría en la cual se cumplen todos los axiomas con la excepción del axioma V.[14]

Para este fin, construyamos un campo $\Omega(t)$ de todas las funciones algebraicas de t que resultan de t y las cinco operaciones: suma, resta, multiplicación, división y la operación $|\sqrt{1 + w^2}|$. Donde w denota cualquier función que se obtiene por estas cinco operaciones. El conjunto de elementos $\Omega(t)$ es, al igual que el conjunto de los elementos de Ω, en la sección 9, numerable. Las cinco operaciones están bien definidas y sus resultados son reales. Por lo tanto el campo $\Omega(t)$ contiene sólo funciones de t reales y bien definidas.

Sea c cualquier función del campo $\Omega(t)$. Ya que c es una función algebraica de t, sólo puede anularse para un número finito de valores de t; y para valores positivos suficientemente grandes de t, la función será por consiguiente, siempre positiva o siempre negativa.

Veamos ahora las funciones del campo $\Omega(t)$ como una especie de números complejos en el sentido de la sección 13 que sigue a ésta. Claramente, en los números complejos definidos de esta forma son válidas todas las reglas ordinarias de operación. Más aún, si a, b son dos números distintos cualesquiera de este conjunto de números complejos, sea el número a mayor o menor que b, en símbolos $a > b$ ó $b < a$, según si la resta $c = a - b$, como función de t, es siempre positiva o negativa para valores de t suficientemente grandes. Con esta convención es posible ordenar los números de este conjunto de números complejos de acuerdo a su magnitud, en una forma análoga a la de los números reales. Vemos fácilmente que los teoremas según los cuales las desigualdades siguen siendo válidas cuando el mismo número es sumado a ambos lados o cuando ambos lados son multiplicados por el mismo número positivo, también se cumplen para estos números complejos.

Si n denota cualquier entero racional positivo, entonces la desigualdad $n < t$ ciertamente se cumple para los dos números n y t del campo $\Omega(t)$ para valores de t suficientemente grandes, ya que la diferencia $n - t$, considerada como una función de t, es obviamente siempre negativa. Este resultado puede expresarse como sigue: Los dos números 1 y t del campo $\Omega(t)$, que son mayores que cero, tienen la propiedad de que cualquier múltiplo del primero es siempre menor que el segundo.

Construyamos ahora una geometría a partir de estos números complejos del campo $\Omega(t)$ de la misma manera que lo hicimos para la sección 9, basada entonces en el campo Ω de los números algebraicos. Consideremos un conjunto (x, y, z) de tres números del campo $\Omega(t)$ como un punto, y las razones (u : v : w : r) entre cuatro números cualesquiera del campo $\Omega(t)$, donde u, v, w no son cero, como un plano. Además la existencia de la ecuación

$$ux + vy + wz + r = 0$$

expresará el hecho de que el punto (x, y, z) está en el plano (u : v : w : r) y definamos una recta como la totalidad de los puntos en dos planos diferentes u : v : w. Haciendo entonces convenciones apropiadas acerca del orden de los elementos y la construcción de segmentos y ángulos como en la sección 9, se obtiene una <u>geometría "no arquimediana"</u> en la cual, como las propiedades de los números complejos $\Omega(t)$ discutidos arriba lo muestran, todos los axiomas con la excepción del axioma de continuidad se cumplen. De hecho, el segmento 1 puede ser construído contiguamente en el segmento t un número arbitrario de veces sin sobrepasar el extremo del segmento t. Esto contradice lo postulado por el axioma de Arquímedes.

La primera geometría construída en la sección 9 muestra que el axioma de completez V, 2 es también independiente de todos los axiomas precedentes I-IV, V, 1, ya que en ella el axioma de Arquímedes se cumple.

Ambas geometrías la no arquimediana y la no euclidiana son de fundamental importancia, y en particular el papel que juega el axioma de Arquímedes en la demostración de los teoremas de Legendre es de gran interés. Las investigaciones emprendidas sobre esta cuestión por M. Dehn[15], a sugerencia mía, han conducido a una completa aclaración de este problema. Las investigaciones de M. Dehn son básicas para los axiomas I-III. Los axiomas de orden II fueron formulados sólo al final en la obra de Dehn, en una forma más general que en la presente obra para dar cabida a la geometría riemanniana (elíptica). Estos pueden formularse, posiblemente, como sigue:

Cuatro puntos A, B, C, D en una recta pueden ser siempre descompuestos en dos pares A, C y B, D, de forma que A, C y B, D están "separados" e inversamente. Cinco puntos en una recta pueden ser siempre nombrados A, B, C, D, E de tal manera que A, C estén separados por B, D y B, E, que A, D estén separados por B, E y C, E, etc.

Sobre la base de estos axiomas I-III y por lo tanto sin el uso de la continuidad, M. Dehn demuestra de una forma extendida del segundo teorema de Legendre, teorema 39.

Si en un triángulo cualquiera la suma de los ángulos es mayor, igual o menor que dos ángulos rectos, entonces sucede lo mismo en todo triángulo.[14]

En este mismo trabajo se demuestra la siguiente extensión del primer teorema de Legendre, el teorema 35.

Si se omite el axioma de Arquímedes, de la suposición de que un número infinito de paralelas pasan por un punto no resulta que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor que dos ángulos rectos. Además, existe una geometría (la geometría no legendriana) en la cual es posible trazar por un punto un número infinito de paralelas a una recta, y sin embargo se cumplen los teoremas de la geometría (elíptica) riemanniana. Por otro lado, hay una geometría (la geometría semieuclidiana) en la cual existen un número infinito de paralelas y en la que se siguen cumpliendo los teoremas de la geometría euclidiana.

De la suposición de que no existen paralelas siempre resulta que la suma de los ángulos en un triángulo es mayor que dos ángulos rectos.

Finalmente, puede observarse que si se recurre al axioma de Arquímedes, el axioma de las paralelas puede ser reemplazado por el requisito de que la suma de los ángulos en un triángulo sea igual a dos ángulos rectos.

C A P I T U L O III

TEORIA DE LA PROPORCION

13. Conjuntos de números complejos

Comenzaremos este capítulo con una breve discusión acerca de los números complejos que resultará particularmente útil más adelante para aclarar la exposición.

Los números reales como un todo forman un conjunto de objetos con las siguientes propiedades:

TEOREMAS DE COMPOSICION (1-6):

1. El número a y el número b generan al "sumarse" un número definido c. En símbolos

$$a + b = c \quad ó \quad c = a + b.$$

2. Si a y b son números dados, siempre existe uno y sólo un número x, y también uno y sólo un número y tales que

$$a + x = b \quad y \quad y + a = b.$$

3. Existe un número definido, denotado por 0, tal que para toda a

$$a + 0 = a \quad y \quad 0 + a = a.$$

4. El número a y el número b generan de otra manera: al "multiplicarse", un número definido c. En símbolos

$$a\,b = c \quad ó \quad c = a\,b.$$

5. Si a y b son cualesquiera números dados, y a no es 0, siempre existe uno y sólo un número x, y también uno y sólo un número y, tales que

$$a\,x = b \quad y \quad y\,a = b.$$

6. Existe un número definido, denotado por 1, tal que para toda a

$$a\cdot 1 = a \quad y \quad 1\cdot a = a.$$

REGLAS DE OPERACION (7-12):

Si a, b, c son tres números cualesquiera, se cumplen las siguientes reglas de operación:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$

8. $a + b = b + a$

9. $a (b c) = (a b) c$

10. $a (b + c) = a b + a c$

11. $(a + b) c = a c + b c$

12. $a b = ba$

TEOREMAS DE ORDEN (13-16):

13. Si a, b son dos números cualesquiera distintos, uno y sólo uno de ellos (digamos a) es siempre mayor que el otro. Este último es llamado el número menor. En símbolos

$$a > b \quad y \quad b < a.$$

$a > a$ no se cumple para ningún número a.

14. Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.

15. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

16. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a c > b c$.

TEOREMAS DE CONTINUIDAD (17-18):

17. (Teorema de Arquímedes). Si $a > 0$ y $b > 0$ son dos números cualesquiera, siempre es posible sumar a a sí mismo un número suficiente de veces de tal forma que la suma que resulta es mayor que b. En símbolos

$$a + a + \ldots + a > b.$$

18. (Teorema de Completez). Es imposible añadir al conjunto de los números otro conjunto de objetos, como números, de tal forma que los teoremas 1-17 también se satisfagan en el conjunto que resulta de la unión cuando las relaciones entre los números se preservan; o brevemente, los números forman un conjunto de objetos en el cual, si se preservan todas las relaciones y los teoremas formulados, no

es posible una extensión.

Llamemos a un conjunto de objetos, que tienen sólo algunas de las propiedades 1-18, un conjunto de números complejos. Un conjunto de números complejos será arquimediano o no arquimediano según satisfaga o no la propiedad 17.

Algunas de las propiedades 1-18 formuladas, son consecuencia de las otras. El problema ahora es investigar la dependencia lógica de estas propiedades. A causa de su importancia geométrica, en el capítulo VI, secciones 32 y 33, serán resueltas dos cuestiones de naturaleza similar. Por ahora sólo demostraremos que la propiedad 17 no es en modo alguno una consecuencia lógica de las anteriores ya que por ejemplo, el conjunto de los números complejos $\Omega(t)$ considerado en la sección 12 tiene todas las propiedades 1-16 pero no satisface la 17.

Por lo demás, las observaciones correspondientes hechas en la sección 8 acerca de los axiomas geométricos de continuidad, son válidas para los teoremas de continuidad (17-18).

14. Demostración del teorema de Pascal

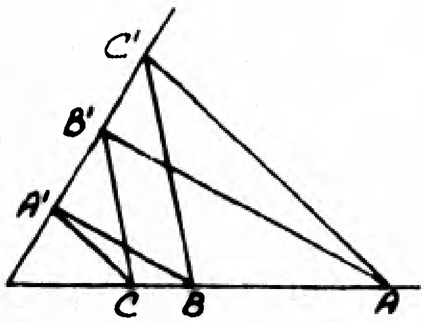
En este capítulo y en el siguiente, suponemos para la investigación, los axiomas del plano de todos los grupos, con la excepción del axioma de continuidad, i.e., los axiomas I, 1-3 y II-IV. En el presente capítulo se pretende establecer la teoría de la proporción de Euclides por medio de estos axiomas, i.e., en el plano e independientemente del axioma arquimediano.

Para este propósito se demostrará a continuación un resultado que es un caso especial del bien conocido teorema de Pascal en la teoría de secciones cónicas.

Este teorema, al cual nos referiremos de aquí en adelante como el teorema de Pascal, afirma lo siguiente:

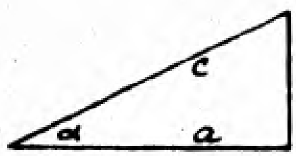
TEOREMA 40.[1] (Teorema de Pascal). Sean A, B, C y A', B', C' dos conjuntos de puntos en dos rectas que se intersectan y que son distintos del punto de intersección de las dos rectas. Si CB' es paralela a BC' y CA' es paralela a AC' entonces BA' es también paralela a AB'.

Para la demostración de este teorema introducimos la siguiente notación: En un triángulo rectángulo el cateto a está únicamente determinado por la hipotenusa c y el ángulo de la base α entre a y c.



Dicho brevemente

$$a = \alpha c,$$



luego el símbolo αc siempre denota un segmento definido, cuando c es cualquier segmento dado y α es cualquier ángulo agudo dado. De la misma manera, un segmento c está únicamente determinado por algún segmento dado a y por cualquier ángulo agudo α , a través de la ecuación

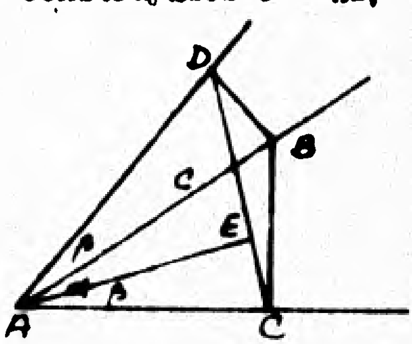
$$a = \alpha c.$$

Sea ahora c cualquier segmento y α , β dos ángulos agudos cualesquiera. Se observará que la congruencia de segmentos

$$\alpha \beta c \equiv \beta \alpha c$$

siempre se cumple y por lo tanto, los símbolos α , β pueden ser siempre intercambiados.

Para demostrar esta congruencia, construyamos c = AB, con A como vértice, el ángulo α en un lado y el ángulo β en el otro lado. Tracemos desde B las perpendiculares BC y BD a los otros lados de estos ángulos, unamos C con D y finalmente bajemos de A la perpendicular AE a CD.



Ya que los ángulos ∢ ACB y ∢ ADB son ángulos rectos, los cuatro puntos A, B, C, D están en un círculo, y por consiguiente, los dos ángulos ∢ ACD y ∢ ADB, como ángulos inscritos sobre la misma cuerda AD, son congruentes. Ahora, $\measuredangle$ACD sumado a $\measuredangle$CAE, y $\measuredangle$ABD sumado a $\measuredangle$BAD constituyen ángulos rectos, y consecuentemente los ángulos $\measuredangle$CAE y $\measuredangle$BAD son también congruentes, i.e.,

$$\measuredangle CAE \equiv \beta$$

y de aquí

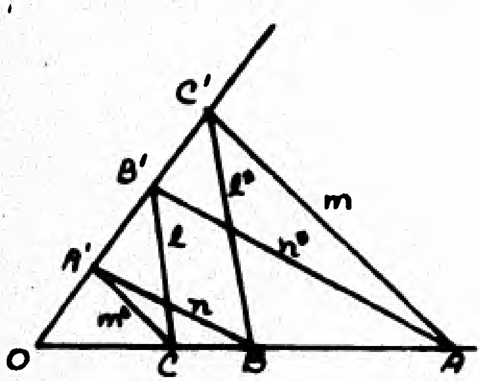
$$\measuredangle DAE \equiv \alpha .$$

Las congruencias de segmentos

$$\beta c \equiv AD, \qquad \alpha c \equiv AC,$$
$$\alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE, \qquad \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE,$$

se obtienen inmediatamente y de ellos se desprende la validez de la congruencia antes mencionada.

Volviendo ahora a la figura del teorema de Pascal, denotemos por O el punto de intersección de las dos rectas y los segmentos OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', AC', CA', BA', AB' por a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*, respectivamente. Después tracemos perpendiculares de O a l, m^*, n. Denotemos por λ' y λ los ángulos agudos formados por las perpendiculares a l y los segmentos OA y OA', respectivamente; y sean μ, μ' y σ, σ', los ángulos formados por éstos a m^* y n, respectivamente. Expresando ahora estas tres perpendiculares, en la manera indicada arriba, en términos de las hipotenusas y los ángulos de la base de los triángulos rectángulos formados, en dos maneras, obtenemos las tres congruencias siguientes:



(1) $\lambda b' \equiv \lambda c,$

(2) $\mu a' \equiv \mu' c,$

(3) $\sigma a' \equiv \sigma' b.$

Como por hipótesis l es paralela a l^* y m es paralela a m^*, las perpendiculares de O a l^* y a m deben coincidir con aquellas a l y m^* respectivamente, y de este hecho obtenemos

$$(4) \qquad \lambda c' \equiv \lambda' b,$$

$$(5) \qquad \mu c' \equiv \mu a.$$

Si se aplica el símbolo $\lambda'\mu$ a los lados izquierdo y derecho de la congruencia (3), y recordamos que, de acuerdo a lo que se ha demostrado antes, estos símbolos son intercambiables, encontramos que

$$\sigma \lambda' \mu a' \equiv \sigma' \mu \lambda' b.$$

En esta congruencia sustituímos la congruencia (2) en el lado izquierdo y la congruencia (4) en el derecho. Entonces

$$\sigma \lambda \mu' c \equiv \sigma' \mu \lambda c'$$

o

$$\sigma \mu' \lambda' c \equiv \sigma' \lambda \mu c'.$$

Sustituyendo aquí la congruecia (1) en el lado izquierdo y la (5) en el derecho

$$\sigma \mu' \lambda b' \equiv \sigma' \lambda \mu' a$$

o

$$\lambda \mu' \sigma b' \equiv \lambda \mu' \sigma' a.$$

Sobre la base de las propiedades de los símbolos dados en la p. H-52, concluímos inmediatamente de la última congruencia que

$$\mu' \sigma b' \equiv \mu' \sigma' a$$

y, por consiguiente

$$(6) \qquad \sigma b' \equiv \sigma' a.$$

Considerando ahora la perpendicular a n trazada desde A y B', la congruencia (6) muestra que el pie de las dos últimas perpendiculares coincide, i.e., la recta $n^* = AB$ es perpendicular a la perpendicular a n y es entonces paralela a n. La demostración del teorema queda así completa.

Con el objeto de establecer la teoría de la proporción será utilizado el caso especial del teorema de Pascal en el cual la congruencia

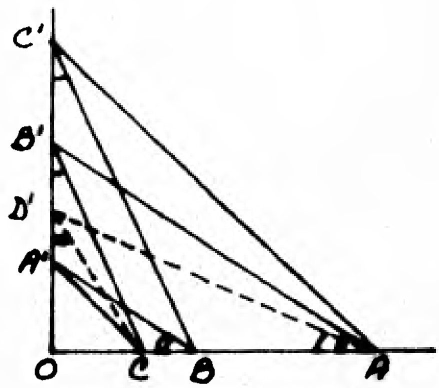
$$OC \equiv OA'$$

y por lo tanto también

$$OA \equiv OC'$$

se cumplen, y en el cual los puntos A, B, C están en el mismo rayo que parte de O. En este caso especial, la demostración es particularmente fácil, a saber:

Desde O tracemos el segmento OB, en OA', hasta D' de tal forma que la recta que conecta BD' es paralela a CA' y AC'. En vista de la congruencia de los triángulos OC'B y OAD'



(1 #) ∡OC'B ≡ ∡OAD'.

Y ya que por hipótesis CB' y BC' son paralelos

(2 #) ∡OC'B ≡ ∡OB'C;

de (1 #) y (2 #) deducimos

∡OAD' ≡ ∡OB'C;

Puesto que, por una propiedad de los círculos, ACD'B' es un cuadrilátero inscrito, la congruencia

(3 #) ∡OD'C ≡ ∡OAB'

resulta de un conocido teorema acerca de los ángulos de un cuadrilátero inscrito. Por otro lado, debido a la congruencia de los triángulos OD'C y OBA'

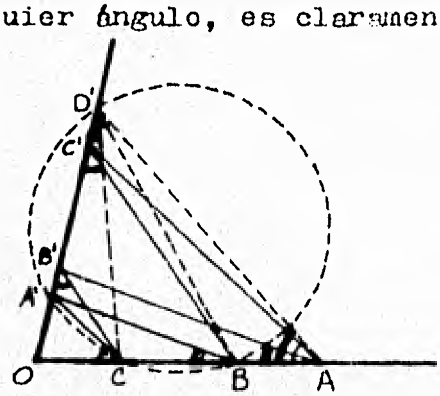
(4 #) ∡OD'C ≡ ∡OBA'.

De (3 #) y (4 #) deducimos que

∡OAB' ≡ ∡OBA',

y esta congruencia muestra que AB' y BA' son paralelas, como lo requiere el teorema de Pascal.

Dada una recta cualquiera, un punto fuera de ella y cualquier ángulo, es claramente posible encontrar una recta que pasa por el punto dado e intersecta la recta dada en el mismo ángulo, construyendo este ángulo y trazando una perpendicular. Por esta razón, es posible usar para la demostración



del teorema de Pascal más general el sencillo argumento siguiente, cuyo conocimiento debo a otra fuente.

Por B tracemos una recta que intersecte OA' en el punto D' formando el ángulo $\measuredangle$OCA', de tal manera que se cumpla la congruencia

(1*) $\measuredangle OCA' \equiv \measuredangle OD'B$

luego, por un conocido teorema de círculos, CBD'A' es un cuadrilátero inscrito, y del teorema de congruencia de ángulos inscritos en la misma cuerda se desprende la congruencia

(2*) $\measuredangle OBA' \equiv \measuredangle OD'C.$

Como por hipótesis CA' y AC' son paralelas

(3*) $\measuredangle OCA' \equiv \measuredangle OAC'.$

De (1*) y (3*) deducimos la congruencia

$$\measuredangle OD'B \equiv \measuredangle OAC'.$$

Pero BAD'C' es también un cuadrilátero inscrito, y por el teorema de los ángulos de un cuadrilátero la congruencia

(4*) $\measuredangle OAD' \equiv \measuredangle OC'B$

se cumple. Además, por hipótesis CB' es paralela a BC por lo que tenemos también

(5*) $\measuredangle OB'C \equiv \measuredangle OC'B.$

De (4*) y (5*) deducimos la congruencia

$$\measuredangle OAD' \equiv \measuredangle OB'C.$$

Esta última muestra finalmente que CAD'B' es un cuadrilátero inscrito y por lo tanto la congruencia

(6*) $\measuredangle OAB' \equiv \measuredangle OD'C$

también se cumple.

De (2*) y (6*) se sigue

$$\measuredangle OBA' \equiv \measuredangle OAB',$$

y esta congruencia muestra que BA' y AB' son paralelas, según lo pedía el teorema de Pascal.

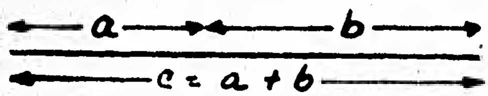
Si D' coincide con alguno de los puntos A', B', C', o si el orden de los puntos A, B, C es diferente, es necesario introducir un cambio en este argumento, como es fácil ver.[18]

15. La aritmética de los segmentos basada en el teorema de Pascal

El teorema de Pascal demostrado en los párrafos anteriores prepara el terreno para la introducción, en la geometría, de una aritmética de los segmentos en la cual todas las reglas de operación de los números reales se cumplen sin ninguna modificación.

En la aritmética de los segmentos, la palabra "igual" será usada en vez de "congruente" y el signo " = " en lugar de " $\equiv$ ".

Si A, B, C son tres puntos distintos en una recta y si B está entre A y C, la suma de los dos segmentos a = AB y b = BC se denota por c = AC y se expresa como



$$c = a + b.$$

Se dice que los segmentos a y b son menores que c. En símbolos

$$a < c, \qquad b < c,$$

y se dice que c es mayor que a y b. En símbolos

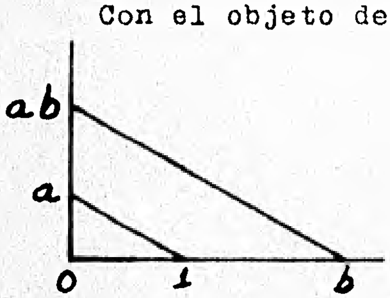
$$c > a, \qquad c > b.$$

De las congruencias III, 1-3 es fácil inferir que para la suma de segmentos así definida la ley asociativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

así como la ley conmutativa $a + b = b + a$, son ambas válidas.

Con el objeto de definir geométricamente el producto de un segmento a por un segmento b, se usará la siguiente construcción: Escojamos cualquier segmento que permanezca fijo durante toda la discusión y denotémoslo



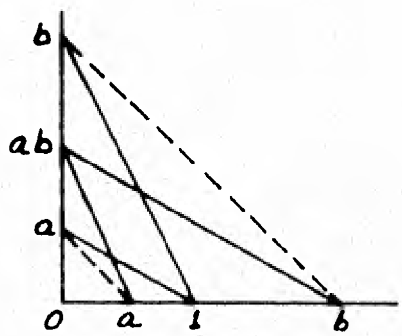
por 1. Tracemos ahora los segmentos 1 y b, desde el vértice O, en un lado de un triángulo rectángulo. Después tracemos el segmento a en el otro lado. Unamos los puntos finales de los segmentos 1 y a con una recta, y por el punto final del segmento b tracemos una paralela a esta recta. Esta paralela determinará un segmento c en el otro lado. Este segmento es llamado el producto del segmento a por el segmento b y se denota por

$$c = a\ b.$$

Primero se demostrará que la multiplicación de segmentos así definida cumple la ley conmutativa

$$a\ b = b\ a.$$

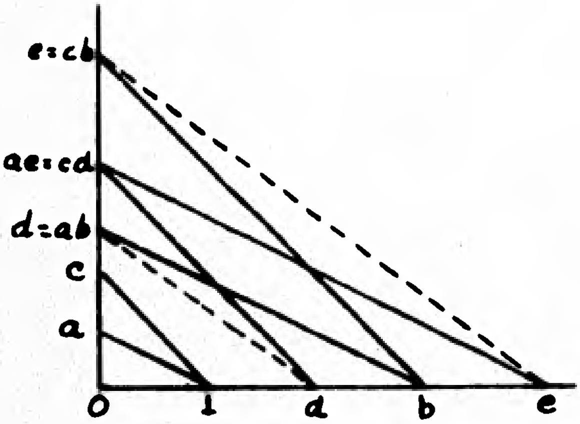
Para esto construyamos de la forma antes descrita el segmento ab. Tracemos después el segmento a en el primer lado del ángulo recto y el segmento b en el otro lado, unamos con una recta el extremo del segmento 1 con el extremo del segmento b en el otro lado y dibujemos una paralela a esta recta por el extremo de a en el primer lado. Esta última determina en el otro lado el segmento ba. Por el teorema de Pascal (teorema 40), como consecuencia del paralelismo de las rectas punteadas auxiliares que se muestran en la figura, el segmento ba coincide con el segmento previamente construído ab. E inversamente: se desprende también, de la validez de la ley conmutativa en la aritmética de segmentos, como es aparente, que el caso especial del teorema de Pascal referido en la p. H-51 se cumple también para figuras en las cuales los rayos OA y OA' forman un ángulo recto.



Con el fin de demostrar la ley asociativa

$$a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$$

para la multiplicación de segmentos, construyamos, desde el vértice O, los segmentos 1 y b en un lado del ángulo recto, y también desde O, los segmentos a y c en el otro lado. Construimos después los segmentos d = ab y e = cb, y desde O trazamos estos segmentos en el primer lado. Construyendo a continuación ae y cd, resulta nuevamente por el teorema de Pascal, como se ve en la figura, que



los extremos de estos segmentos coinciden, i.e.,

ae = cd ó a(cb) = c(ab)

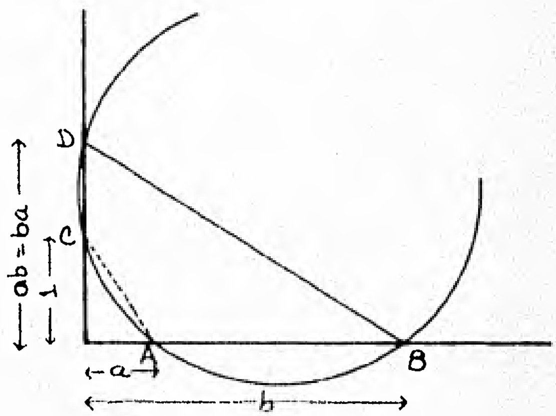
y por consiguiente, se tiene también, con la ayuda de la ley conmutativa, que

a(b c) = (a b)c.[19]

Como puede verse, en las demostraciones anteriores de la ley conmutativa y la ley asociativa de la multiplicación, sólo fue utilizado el caso especial del teorema de Pascal cuya demostración, hecha en las páginas H-55 y H-56 (sección 14), puede llevarse a cabo de una manera particularmente sencilla haciendo uso repetidas veces del teorema del cuadrilátero inscrito.

Combinando estos desarrollos, llegamos al siguiente método para la multiplicación de segmentos que entre todos los métodos encontrados parece ser el más sencillo.

Tracemos el segmento a = OA y b = OB, a partir del vértice O, en uno de los lados de un ángulo recto y sobre el otro lado el segmento unitario 1 = OC. Sea D el punto en el que el círculo que pasa por los puntos A, B, C intersecta al último lado. El punto D puede obtenerse fácilmente sólo por el axioma de congruencia, y



sin el uso del compás, trazando desde el centro del círculo una perpendicular a OC y reflejando respecto a ésta el punto C. De la igualdad de los ángulos $\measuredangle OCA$ y $\measuredangle OBD$, se desprende de la definición del producto de dos segmentos (p. H-58) que

$$OD = ab,$$

y por la igualdad de los ángulos $\measuredangle ODA$ y $\measuredangle OBC$ resulta de la misma definición que

$$OD = ba.$$

Por la observación en la p. H-58, la ley conmutativa de la multiplicación

$$a\, b = b\, a$$

que se obtiene de lo anterior, muestra ahora que el caso especial del teorema de Pascal referido en la p. H-58 se cumple para los lados de un ángulo recto, y de aquí a su vez, por la p. H-59, se desprende la ley asociativa de la multiplicación

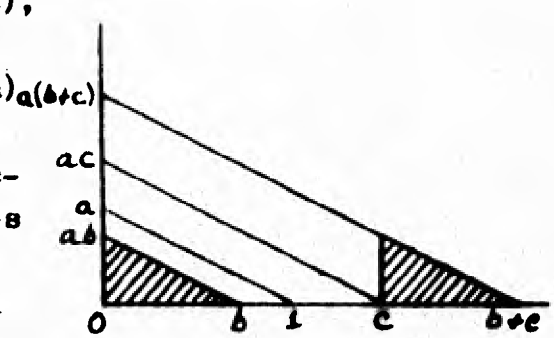
$$a\,(b\, c) = (a\, b)\, c.$$

Por último, también la ley distributiva

$$a\,(b + c) = a\, b + ac$$

se cumple en esta aritmética de segmentos.

Con el fin de demostrar esto, construyamos los segmentos ab, ac y a(b + c), y, por los extremos del segmento c (véase figura) tracemos una paralela al otro lado del ángulo recto. La congruencia de los dos ángulos rectos, los triángulos sombreados en la figura, y una aplicación del teorema sobre la igualdad de los lados opuestos en un paralelogramo nos da por resultado la demostración deseada.



Si b y c son dos segmentos cualesquiera, siempre existe un segmento a tal que c = ab. El segmento a será denotado por $\frac{c}{b}$ y llamado el <u>cociente</u> de c y b.

16. Teoremas de proporción y semejanza

Con ayuda de la aritmética de segmentos establecida puede desarrollarse satisfactoriamente la teoría de la proporción de Euclides sin el axioma de Arquímedes de la siguiente manera:

DEFINICION. Si a, b, a', b' son cuatro segmentos cualesquiera la proporción

$$a : b = a' : b'$$

denotará únicamente la ecuación de segmentos

$$a\, b' = b\, a'.$$

DEFINICION. Se dice que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.

TEOREMA 41. Si a, b y a', b' son los lados correspondientes de dos triángulos semejantes, entonces la proporción

$$a : b = a' : b'$$

se cumple.

DEMOSTRACION. Consideremos el caso especial en el que los ángulos, en ambos triángulos, incluidos por las rectas a, b, y a', b' son ángulos rectos; y supongamos que ambos triángulos están inscritos en uno y el mismo ángulo recto. Tracemos entonces a partir del vértice el segmento 1 en un lado y por el extremo de este segmento dibujemos una paralela a ambas hipotenusas. Sea e el segmento que determina esta paralela en el otro lado. Entonces, por la definición de la multiplicación de segmentos

$$b = e\, a, \qquad b' = e\, a';$$

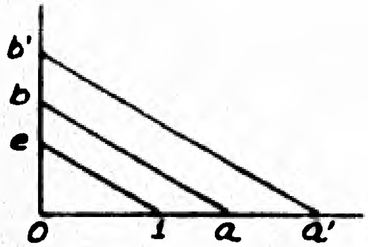
y por lo tanto, obtenemos

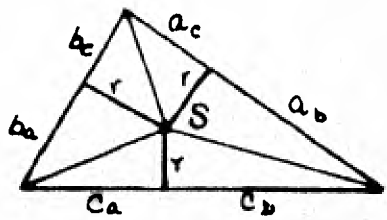
$$a\, b' = b\, a',$$

i.e.,

$$a : b = a' : b'.$$

Volviendo al caso general, construyamos en cada uno de los triángulos semejantes los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos S y S', cuya existencia es fácil deducir del teorema 25, y de ellas tracemos las perpendiculares r y r' a los lados de los triángulos.





Denotemos los segmentos determinados de esta forma por

$$a_b,\ a_c,\ b_c,\ b_a,\ c_a,\ c_b$$

y

$$a'_b,\ a'_c,\ b'_c,\ b'_a,\ c'_a,\ c'_b.$$

El caso especial de este teorema demostrado antes nos da por resultado las proporciones

$$a_b : r = a'_b : r' \qquad b_c : r = b'_c : r'$$

$$a_c : r = a'_c : r' \qquad b_a : r = b'_a : r'$$

de las cuales, con la ayuda de la ley distributiva, deducimos

$$a : r = a' : r, \qquad b : r = b' : r'$$

y de aquí

$$b'\ a\ r' = b'\ r\ a', \qquad a'\ b\ r' = a'\ r\ b'.$$

Recurriendo a la ley conmutativa de la multiplicación, estas ecuaciones nos dan por resultado

$$a : b = a' : b'.$$

Del teorema 41 deducimos fácilmente el teorema fundamental de la teoría de la proporción, que se formula de la manera siguiente:

<u>TEOREMA 42. Si dos paralelas determinan en los lados de cualquier ángulo los segmentos</u> a, b <u>y</u> a', b' <u>entonces se cumple la proporción</u>

$$a : b = a' : b'.$$

<u>Recíprocamente: si cuatro segmentos</u> a, b, a', b' <u>sa-</u>

tisfacen esta proporción y a, a' y b, b' son construídas por pares en los lados de cualquier ángulo, las rectas que unen los extremos de a, b y a', b' son paralelas.

17. Las ecuaciones de rectas y planos

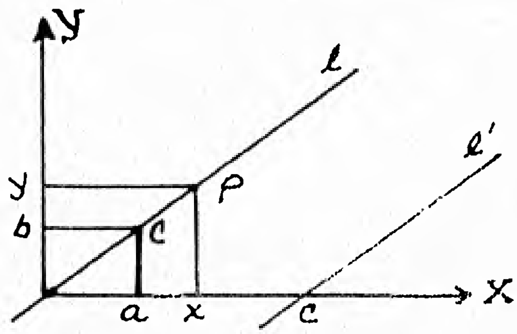
Al conjunto de segmentos hasta aquí considerado añadamos otro conjunto de segmentos. Por los axiomas de orden es fácil distinguir en una recta una dirección "positiva" y una "negativa". Un segmento AB que ha sido hasta ahora denotado por a, seguirá siendo denotado por a sólo si B está en la dirección positiva de A; en el caso contrario por $-a$. Un punto se denotará como el segmento 0. Se dice que el segmento a es "positivo" o mayor que 0, en símbolos $a > 0$; se dice entonces que el segmento $-a$ es "negativo" o menor que 0, en símbolos $-a < 0$.

En esta aritmética de segmentos extendida son válidas todas las reglas de operación 1-16 dadas en la sección 13. Haremos énfasis en los siguientes resultados especiales:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \text{y} \qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

siempre se cumplen. Si $a\,b = 0$, $a = 0$ ó $b = 0$. Si $a > b$ y $c > 0$ entonces siempre sucede que $a\,c > b\,c$. Además si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ son n puntos cualesquiera en una recta, la suma de los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ es igual a cero.

En un plano α consideremos dos rectas mutuamente perpendiculares por el punto O como ejes coordenados fijos y tracemos desde O dos segmentos cualesquiera x, y en las dos rectas. Levantamos después perpendiculares a estas rectas por los extremos de los segmentos x y y, y determinamos su punto de intersección P. Los segmentos x, y son llamados las coordenadas del punto P. Todo punto en el plano α está únicamente determinado por sus coordenadas x, y,



que pueden ser segmentos positivos, negativos ó 0.

Sea l cualquier recta en el plano α que pasa por los puntos O y C con coordenadas a, b. Si x, y son las coordenadas de cualquier punto en l, es fácil encontrar, por el teorema 42, que

$$a : b = x : y;$$

o que

$$b\,x - a\,y = 0$$

es la ecuación de la recta l. Si l' es una recta paralela a l que determina el segmento c en el eje x, la ecuación de la recta l' puede obtenerse sustituyendo el segmento x − c por el segmento x, en la ecuación de la recta l. La ecuación deseada es entonces

$$b\,x - a\,y - b\,c = 0.$$

De este desarrollo es sencillo concluir, en forma independiente del axioma arquimediano, que toda recta en un plano puede ser representada por medio de una ecuación lineal en las coordenadas x, y; e inversamente: toda ecuación lineal, en la cual los coeficientes son segmentos en la geometría dada, representa una recta.

Los resultados correspondientes en la geometría del espacio pueden ser demostrados con igual facilidad.

El desarrollo posterior de la geometría puede hacerse de aquí en adelante por los métodos ordinarios que se emplean en la geometría analítica.

Hasta este punto el axioma arquimediano no ha sido utilizado en este capítulo. Si ahora se supone su validez, es posible asignar números reales a los puntos de cualquier recta en el espacio de la siguiente manera:

Escojamos dos puntos cualesquiera en una recta y asignémosles los números 0 y 1. Bisectemos después el segmento 01 determinado por ellos y denotemos el punto medio resultante por $\frac{1}{2}$. Denotemos entonces el punto medio del segmento $0\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$, etc. Después de repetir n veces este procedimiento alcanzamos un punto que designaremos por el número $\frac{1}{2^n}$. Tracemos entonces el segmento $0\frac{1}{2^n}$ contiguamente m veces desde el punto 0 hacia el punto 1 así como al otro lado y asignemos a los puntos resultantes los números $\frac{m}{2^n}$ y $-\frac{m}{2^n}$ respectivamente. Sobre la base de esta asignación puede deducirse fácilmente por el axioma arquimediano que a cualquier punto en una recta puede asignársele un número real de una manera únicamente determinada, y por supuesto, que esta asignación tiene la siguiente propiedad: Si A, B, C son tres puntos cualesquiera en una recta α, β, γ son sus números reales correspondientes, y B está entre A y C, estos números siempre satisfacen las desigualdades

$$\alpha < \beta < \gamma \quad ó \quad \alpha > \beta > \gamma.$$

De los desarrollos en la sección 9 del capítulo II, es evidente que para todo número del campo algebraico Ω debe existir un punto en la recta al cual puede ser asignado. Si a cualquier otro número real corresponde un punto depende de si el axioma de completez V, 2 se cumple en la geometría dada.

Sin embargo, si en una geometría se supone sólo la validez del axioma arquimediano, es posible extender el conjunto de puntos, rectas y planos con elementos "irracionales", de tal forma que en toda recta de la geometría resultante, a todo conjunto de tres números reales que satisfacen su ecuación le corresponde un punto, sin excepción. Por interpretaciones apropiadas es posible inferir, al mismo tiempo, que todos los axiomas I-V son válidos en la geometría extendida. Esta geometría extendida (con la unión de elementos irracionales) no es otra que la geometría del plano cartesiano ordinario, en el cual el axioma de completez V, 2 también se cumple.[20]

C A P I T U L O IV

TEORIA DEL AREA PLANA

13. Equidescomponibilidad y equicomplementabilidad de polígonos

Para las investigaciones de este capítulo supondremos los mismos axiomas que fueron considerados para el tercer capítulo, es decir, los axiomas de todos los grupos de la recta y el plano con la excepción del axioma de continuidad, *i.e.*, los axiomas I, 1-3, y II-IV.

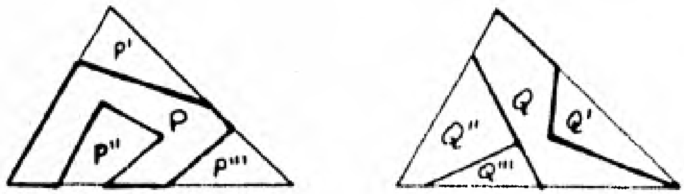
La teoría de la proporción discutida en el capítulo III y la aritmética de segmentos ahí introducida hacen posible desarrollar la teoría del área de Euclides, con ayuda de los axiomas antes mencionados, *i.e.*, desarrollarla *en el plano independientemente del axioma de continuidad*.

Puesto que, según el desarrollo del capítulo III, la teoría de la proporción descansa esencialmente en el teorema de Pascal (teorema 40), lo mismo se cumple para la teoría del área. Este desarrollo de la teoría del área aparece como una de las aplicaciones más notables del teorema de Pascal en la geometría elemental.

DEFINICION. Si dos puntos de un polígono simple P están unidos por algún segmento poligonal contenido totalmente en el interior del polígono y que no tiene ningún punto doble, se forman dos nuevos polígonos simples P_1 y P_2 cuyos puntos interiores están en el interior de P. Se dice entonces que P se *descompone* en P_1 y P_2 o que P *está descompuesto* en P_1 y P_2 o que P_1 y P_2 componen a P.

DEFINICION. Se dice que dos polígonos simples son *equidescomponibles* si pueden ser descompuestos en un número finito de triángulos que son congruentes por pares.

DEFINICION. Se dice que dos polígonos simples P y Q son *equicomplementables* si es posible unirles un nú-

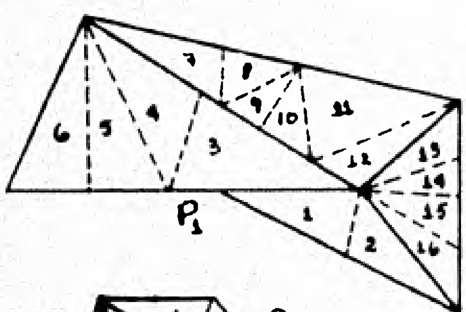


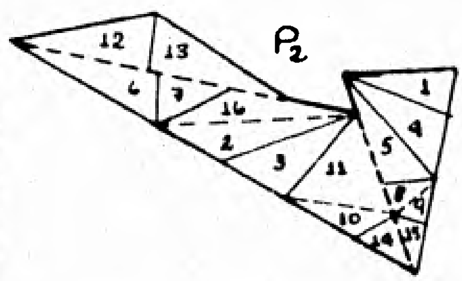
mero finito de pares de polígonos equidescomponibles P', Q'; P'', Q''; ...; P''', Q''' tales que los polígonos $P + P' + P'' + \ldots + P'''$ y $Q + Q' + Q'' + \ldots + Q'''$ sean equidescomponibles entre sí.

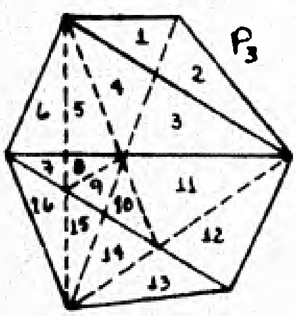
De estas definiciones se desprende inmediatamente que de la combinación de polígonos equidescomponibles resultan nuevamente polígonos equidescomponibles; y si polígonos equidescomponibles son sustraídos de polígonos equidescomponibles los polígonos que quedan son equicomplementables.

Además se cumplen los siguientes teoremas:

TEOREMA 43. Si dos polígonos P_1 y P_2 son equidescomponibles con un tercer polígono P_3, entonces son equidescomponibles entre sí. Si dos polígonos son equicomplementables con un tercero, entonces son equicomplementables entre sí.







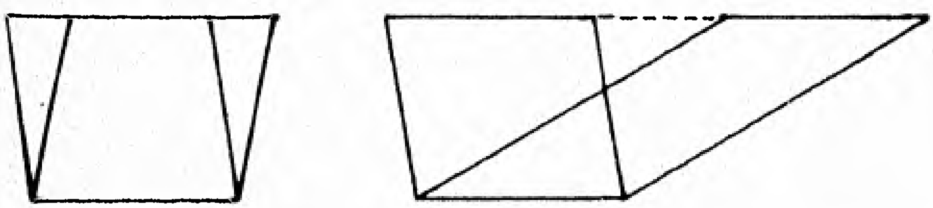
DEMOSTRACION. Por hipótesis es posible para P_1 una descomposición en triángulos, y lo mismo ocurre para P_2, de tal manera que a cada una de estas dos descomposiciones le corresponde una descomposición de P_3 en triángulos congruentes. Si se consideran simultáneamente ambas descomposiciones de P_3 , todo triángulo de una descomposición generalmente estará descompuesto en polígonos, por segmentos de la otra descomposición. Añadamos ahora un número suficiente de segmentos de tal forma que cada uno de estos polígonos se divida en triángulos y apliquemos las dos descomposiciones resultantes en triángulos a P_1 y P_2. Evidentemente los dos polígonos P_1 y P_2 se dividen en un número igual de triángulos congruentes por pares y son entonces por definición, equidescomponibles entre sí.

La segunda afirmación del teorema 43 se obtiene ahora sin dificultad. Los conceptos de rectángulo, base y altura de un paralelogramo, base y altura de un triángulo estarán definidos de la manera usual.

19. Paralelogramos y triángulos con bases y alturas iguales

El conocido argumento de Euclides, ilustrado en las figuras siguientes, proporciona el siguiente teorema:

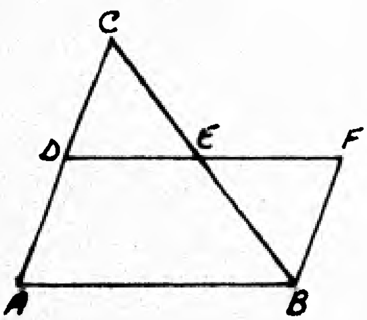
TEOREMA 44. Dos paralelogramos con las mismas bases y las mismas alturas son equicomplementables entre sí.



Además, se cumple el conocido resultado siguiente:

TEOREMA 45. Todo triángulo ABC es equidescomponible con un paralelogramo de igual base y la mitad de su altura.

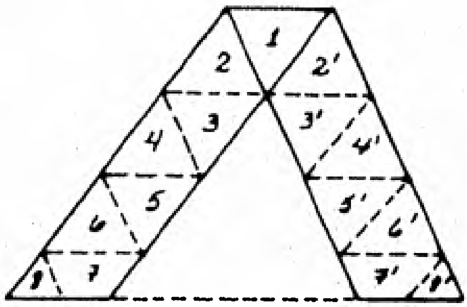
DEMOSTRACION. Bisectando AC en D y BC en E, y después extendiendo DE una cantidad igual hasta F, los triángulos resultantes DCE y FBE son congruentes, y consecuentemente el triángulo ABC y el paralelogramo ABFD son equidescomponibles.



De los teoremas 44 y 45 y con la ayuda del teorema 43, se desprende inmediatamente que:

TEOREMA 46. Dos triángulos con bases y alturas iguales son equicomplementables.

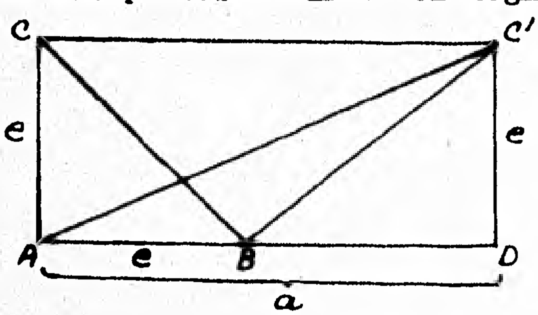
Como es bien sabido, es fácil demostrar, como lo muestra la figura, que dos paralelogramos, y por los teoremas 43 y 45 también dos triángulos, con bases y alturas iguales son equidescomponibles. Sin embargo, debe notarse que la demostración de esto es imposible sin el uso del axioma arquimediano. De hecho, en toda geometría no arquimediana, (véase la sección 12 del capítulo II para un ejemplo), es posible especificar dos triángulos con bases y alturas iguales que son entonces, según el teorema 46, equicomplementables y sin embargo no son equidescomponibles.



En un rayo en una geometría no arquimediana trazamos dos segmentos AB = e y AD = a para los cuales ningún entero n satisface la relación

$$n \cdot e \not\geq a.$$

Tracemos las perpendiculares AC y DC' de longitud e en los puntos finales del segmento AD. Por el teorema 46 los triángulos ABC y ABC' son equicomplementables. Del teorema 23 resulta que la suma de los dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado, donde la suma de los dos lados es entendida en el sentido de la aritmética de segmentos introducida en el capítulo III.



Se obtiene por lo tanto, que BC < e + e = 2e. Además es posible demostrar el siguiente teorema sin el uso de la continuidad: Un segmento que está totalmente en el interior de un triángulo es menor que el mayor de sus lados. Consecuentemente todo segmento en el interior del triángulo ABC es también menor que 2e.

Supongamos ahora dadas las descomposiciones de los triángulos ABC y ABC' en un número finito, digamos k, de triángulos congruentes por pares. Todo lado de un triángulo parcial usado en la descomposición del triángulo ABC está o dentro del triángulo ABC o en uno de sus lados, i.e., es menor que 2e. El perímetro de todo triángulo parcial es por lo tanto menor que 6e. Consecuentemente, la suma de todos estos perímetros es menor que $6k \cdot e$. La descomposición de los triángulos ABC y ABC' debe dar por resultado la misma suma para los perímetros, de aquí que, la suma de los perímetros usada en la descomposición de ABC' debe ser también menor que $6k \cdot e$. En esta suma, el lado AC' es un sumando, i.e., $AC' < 6k \cdot e$ y luego entonces, por el teorema 23, a fortiori $a < 6k \cdot e$. Esto contradice la hipótesis acerca de los segmentos e y a. La suposición de la posibilidad de descomponer los triángulos ABC y ABC' en triángulos parciales congruentes por pares nos ha llevado a una contradicción.

Los teoremas importantes de la geometría elemental sobre la equicomplementabilidad de polígonos, en particular el teorema de Pitágoras, son sencillos corolarios de los teoremas anteriores. Mencionaremos el siguiente teorema:

TEOREMA 47. Para todo triángulo y por consiguiente para todo polígono simple siempre es posible construir un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es unitario, y que es equicomplementable con el triángulo o con el polígono.

En el caso de los triángulos la afirmación se desprende fácilmente de los teoremas 43 y 46; en el caso de los polígonos se obtiene como sigue: Descompongamos el polígono simple dado en triángulos y determinemos los triángulos rectángulos equicomplementables, cada uno de ellos con un cateto unitario. Como los catetos de longitud unitaria forman las alturas de estos triángulos, una composición (p. H-66) sobre la base de los teoremas 43 y 46 nos lleva a la conclusión buscada.

Al continuar desarrollando la teoría del área se encuentra una dificultad esencial. En particular, las investigaciones anteriores no despejan la duda de que quizás no todos los polígonos son equicomplementables. Si este fuera el caso, todos los teoremas establecidos anteriormente resultarían cuestionables y desprovistos de sentido. Relacionada con esto está la pregunta de si en dos rectángulos equicomplementables con un lado común los otros lados son necesariamente iguales.

Un examen más detenido nos muestra que con el objeto de responder esta pregunta necesitamos el inverso del teorema 46 que es:

TEOREMA 48. Si dos triángulos equicomplementables tienen las mismas bases entonces tienen también las mismas alturas.

Este teorema fundamental lo encontramos en el primer libro de los elementos de Euclides como el teorema 39. Euclides recurre en su demostración al teorema general de magnitudes "Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν" (El todo es mayor que cualquiera de las partes), un método que es equivalente a la introducción de un nuevo axioma geométrico de equicomplementabilidad.

Sin embargo, es posible establecer el teorema 48 y también la teoría del área en la forma propuesta, i.e., con la ayuda de los axiomas del plano solamente y sin el uso del axioma arquimediano. Con el objeto de ver esto necesitamos el concepto de área.

20. Las áreas de triángulos y polígonos

DEFINICION. Una recta AB separa los puntos de una geometría plana que no están en ella, en dos regiones de puntos. Se dice que una de estas regiones está a la derecha del rayo AB, que parte de A, o del "segmento dirigido AB"; y a la izquierda del rayo BA, que parte de B, o del "segmento dirigido BA". Se dice que la otra región está a la izquierda del rayo AB y a la derecha del rayo BA. Se dice que la misma región está a la derecha de dos segmentos dirigidos AB y AC si B y C están en el mismo rayo que parte de A (e inversamente). Una vez definida la región derecha de un rayo g que parte de O, y si un rayo h que parte de O está en esta región entonces, con respecto a h, la región que contiene a g está a la izquierda de h. Es evidente que de esta forma, empezando con un rayo definido AB, los lados derecho e izquierdo en una geometría plana están únicamente determinados con respecto a todo rayo o todo segmento dirigido.

Los puntos en el interior (p. H-9) de un triángulo ABC están o a la izquierda de los lados AB, BC, CA o a la izquierda de CB, BA, AC. En el primer caso se dice que ABC (o BCA, o CAB) es la orientación positiva y CBA (o BAC, o ACB) la orientación negativa. En el otro caso se dice que CBA es la orientación positiva y ABC es la orientación negativa del triángulo.

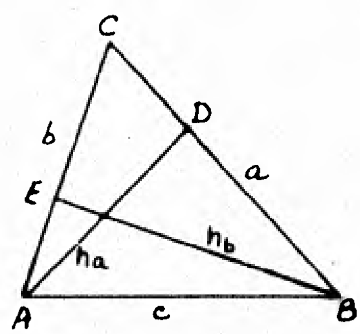
DEFINICION. Si se construyen dos alturas $h_a = AD$ y $h_b = BE$ en un triángulo ABC con lados a, b, c la proporción

$$a : h_b = b : h_a ,$$

i.e.,

$$a\, h_a = b\, h_b ;$$

se desprende, por el teorema 41, de la semejanza de los triángulos BCE y ACD. Por lo tanto, en todo triángulo el producto de una base por su altura correspondiente es independiente del lado del triángulo que se escoja como base. La mitad del producto de la base por la altura es entonces un segmento a' que es característico del triángulo ABC. Sea la orientación del triángulo ABC positiva. El segmento positivo a' (de acuerdo con la definición en la



p. H-63) será llamado ahora el área del triángulo positivamente orientado ABC y será denotado por $[ABC]$. El segmento negativo $-a'$ será llamado el área del triángulo negativamente orientado ABC y denotado por $[CBA]$.

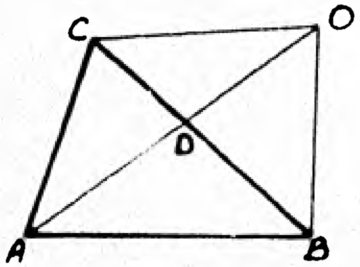
El sencillo teorema siguiente se cumple:

TEOREMA 49. Si un punto O está fuera de un triángulo ABC la relación

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA]$$

se cumple para el área del triángulo.

DEMOSTRACION. Supongamos que los segmentos AO y BC se intersectan en un punto D.



Con la ayuda de las leyes distributivas de la aritmética de segmentos obtenemos de la definición de área las relaciones

$$\begin{aligned}[OAB] &= [ODB] + [DAB],\\ [OBC] &= -[OCB] = -[OCD] - [ODB],\\ [OCA] &= [OCD] + [CAD].\end{aligned}$$

La suma de los segmentos en estas ecuaciones, con la ayuda de un teorema establecido en la p. H-63, nos da por resultado

$$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [DAB] + [CAD] \;,$$

y luego, de nuevo por la ley distributiva

$$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [ABC] \;.$$

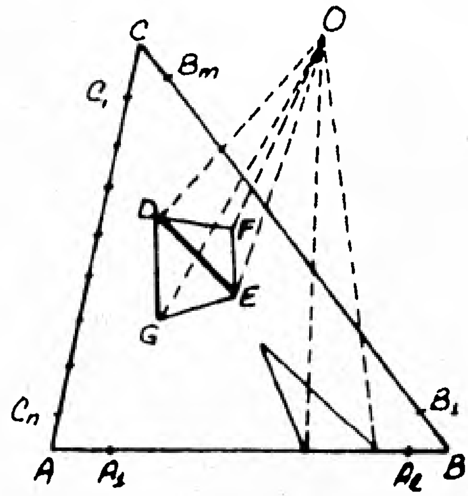
Las posibles suposiciones restantes respecto a la posición de O nos llevan de una manera similar a la afirmación del teorema 49.

TEOREMA 50. Si se descompone un triángulo ABC en un número finito de triángulos Δ_k, el área del triángulo positivamente orientado ABC es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos Δ_k positivamente orientados.

DEMOSTRACION. Sea ABC y sea DE un segmento en el interior del triángulo ABC en el cual los dos triángulos DEF y DEG tienen un lado común en la descomposición. Sea DEF la orientación positiva del triángulo DEF. GED es entonces la orientación positiva del triángulo DEG. Escojamos ahora un punto O fuera del triángulo ABC, las relaciones:

$$\begin{aligned}[DEF] &= [ODE] + [OEF] + [OFD],\\ [GED] &= [OGE] + [OED] + [ODG],\\ &= [OGE] - [ODE] + [ODG]\end{aligned}$$

se cumplen por el teorema 49. Sumando estas dos ecuaciones de segmentos nos resulta el área [ODE] del lado derecho.



Expresamos las áreas de todos los triángulos Δ_k de esta manera, de acuerdo con el teorema 49, y sumamos todas las ecuaciones de segmentos así generadas. Entonces para todo segmento DE en el interior del triángulo ABC resulta el área [ODE] del lado derecho. Denotando, de acuerdo con su orden, los puntos usados para la descomposición del triángulo ABC que están en sus lados, por la sucesión A, $A_1, \ldots, A_l$, B , $B_1, \ldots, B_m$, C, $C_1, \ldots, C_n$; y denotando por brevedad Σ para la suma de todos los triángulos Δ_k positivamente orientados, la suma de todas las ecuaciones de segmentos nos da, como es fácil ver,

$$\begin{aligned}\Sigma &= [OAA_1] +\ldots+ [OA_lB]\\ &+ [OBB_1] +\ldots+ [OB_mC]\\ &+ [OCC_1] +\ldots+ [OC_nA]\\ &= [OAB] + [OBC] + [OCA].\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema 49

$$\Sigma = [ABC].$$

DEFINICION. Definamos el área [P] de un polígono simple positivamente orientado como la suma de las áreas de todos los triángulos positivamente orientados en los cuales el polígono queda dividido en alguna descomposición particular. Por un argumento similar al usado en la sección 18 para la demostración del teorema 43, resulta evidente, por el teorema 50, que el área [P] es independiente de la descomposición en triángulos y por lo tanto, está únicamente determinada por el polígono.

Con la ayuda del teorema 50 deducimos que los polígonos equidescomponibles tienen áreas iguales. (Aquí y en lo sucesivo, el área será interpretada como aquella de orientación positiva).

Además, si P y Q son polígonos equicomplementables, por definición, existen necesariamente polígonos P', Q'; ...; P", Q" tales que el polígono P + P' +...+ P", compuesto de P, P',..., P" es equidescomponible con el polígono Q + Q' +...+ Q", compuesto de Q, Q',..., Q". De las ecuaciones

$$[P + P' + \dots + P''] = [Q + Q' + \dots + Q'']$$
$$[P'] = [Q']$$
$$\vdots$$
$$[P''] = [Q'']$$

es fácil concluir que

$$[P] = [Q].$$

i.e., los polígonos equicomplementables tienen áreas iguales.

21. Equicomplementabilidad y área

En la sección 20 encontramos que los polígonos equicomplementables tienen áreas iguales. De este resultado se desprende inmediatamente la demostración del teorema 48: Denotando las bases iguales de los dos triángulos por g, las alturas correspondientes por h y h' concluímos de la supuesta equicomplementabilidad de los dos triángulos que deben tener también áreas iguales, i.e., se sigue que

$$\tfrac{1}{2} g\, h = \tfrac{1}{2} g\, h'$$

y por consiguiente, después de dividir entre $\frac{1}{2}g$

$$h = h'$$

Esta es la afirmación del teorema 48.

Ahora es posible también invertir la afirmación hecha al final de la sección 20. Sean P y Q dos polígonos con áreas iguales. Por el teorema 47 construyamos dos triángulos rectángulos Δ y E de la siguiente clase: Hagamos que ambos triángulos tengan un lado unitario y sea el triángulo Δ equicomplementable con el polígono P y el triángulo E equicomplementable con el polígono Q. Resulta entonces, del teorema demostrado al final de la sección 20, que Δ y P, así como también E y Q tienen áreas iguales. En vista de la igualdad de las áreas de P y Q, Δ y E tienen también áreas iguales. Puesto que los dos triángulos rectángulos coinciden en sus lados unitarios, necesariamente coinciden en sus otros lados, i.e., los triángulos son congruentes. Por lo tanto, por el teorema 43, los dos polígonos P y Q son equicomplementables.

Los dos resultados deducidos en el párrafo anterior se combinan en el siguiente teorema:

TEOREMA 51. Dos polígonos equicomplementables tienen áreas iguales y dos polígonos con áreas iguales son equicomplementables.

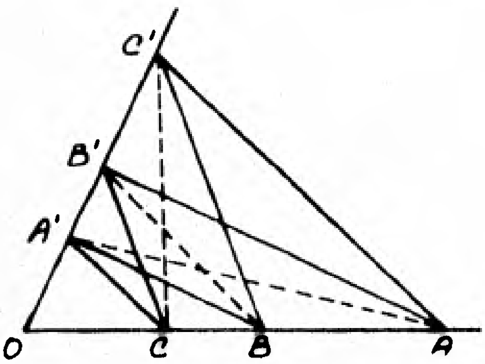
En particular, dos rectángulos equicomplementables con un lado en común deben coincidir también en sus otros lados. El siguiente teorema también se cumple:

TEOREMA 52. Si se descompone un rectángulo en varios triángulos por medio de rectas y se omite uno de estos triángulos, es imposible llenar el rectángulo con los triángulos restantes.

Este teorema fue tomado como un axioma por De Zolt[21] y O. Stolz[22] y fue demostrado por F. Schur[23] y W. Killing[24] con la ayuda del axioma arquimediano. En la discusión anterior ha sido probado que es completamente independiente del axioma arquimediano.

En esencia, para demostrar los teoremas 48, 50 y 51 fue usada la aritmética de segmentos introducida en la sección 15 del capítulo III, y ya que éstos descansan en el teorema de Pascal (teorema 40) o mejor dicho en un caso especial de éste (p. H-54), el teorema de Pascal se destaca como el elemento más importante en la construcción de la teoría del área.

Es fácil ver que, inversamente, el teorema de Pascal puede ser deducido de los teoremas 46 y 48. De hecho, del paralelismo de las rectas CB' y C'B se desprende por el teorema 48, la equicomplementabilidad de los triángulos OBB' y OCC'.



También la equicomplementabilidad de los triángulos OAA' y OCC' resulta del paralelismo de las rectas CA' y AC'. Ya que de acuerdo con esto, los triángulos OAA' y OBB' son también equicomplementables, el teorema 48 nos muestra que BA' y AB' deben también ser paralelas.

Además, es fácil ver que el área de un polígono que está totalmente en el interior de otro polígono es menor que la de este último; y por lo tanto, por el teorema 51, no puede ser equicomplementable con él. Este resultado contiene al teorema 52 como un caso particular.

De esta manera han quedado establecidos los teoremas esenciales de la teoría del área plana.

Gauss había llamado ya la atención de los matemáticos sobre el mismo problema en el espacio. He expresado una conjetura respecto a la imposibilidad de un desarrollo análogo de la teoría del volumen en el espacio y he propuesto el problema específico[25] de encontrar dos tetraedros con áreas iguales en la base y alturas iguales que no pudieran ser descompuestos de ninguna forma en tetraedros congruentes y los cuales, mediante la unión de tetraedros congruentes, no pudieran ser expandidos a poliedros que pudieran a su vez ser descompuestos en tetraedros congruentes.

M. Dehn[26] ha demostrado, de hecho, esta conjetura. Al mismo tiempo demostró rigurosamente la imposibilidad de desarrollar la teoría del volumen de la misma manera que se desarrolló en los párrafos anteriores la teoría de las áreas planas.

De aquí en adelante, con el objeto de tratar problemas análogos en el espacio, tendremos que recurrir a otros medios, tales como el principio de Cavalieri.[27]

W. Süss[28] ha desarrollado en este sentido la teoría del volumen en el espacio. El llama a dos tetraedros de alturas iguales y equicomplementables, iguales en el sentido de Cavalieri. Llama también a dos poliedros equidescomponibles en el sentido de Cavalieri, si pueden ser descompuestos en un número finito de tetraedros que sean iguales en el sentido de Cavalieri. Finalmente, a dos poliedros que pueden ser representados como diferencias de poliedros que son equidescomponibles en el sentido de Cavalieri, los llama equicomplementables en el sentido de Cavalieri. Es posible demostrar, sin el uso del axioma de continuidad, que la igualdad de áreas y la equicomplementabilidad en el sentido de Cavalieri son conceptos equivalentes, mientras que la equidescomponibilidad, en el sentido de Cavalieri, en poliedros de igual volumen puede ser demostrada solamente con la ayuda del axioma arquimediano.

Como un resultado reciente obtenido por J. P. Sydler[29] se menciona el siguiente: El teorema del plano, deducido en la p. H-69 (después del teorema 46), de que dos polígonos equicomplementables son también equidescomponibles, puede ser extendido a poliedros en el espacio suponiendo el axioma arquimediano. De este resultado deducimos, por otra parte, que las clases de equivalencia de los poliedros con respecto a la equidescomponibilidad tienen la cardinalidad del continuo.

C A P I T U L O V

EL TEOREMA DE DESARGUES

22. El teorema de Desargues y su demostración en el plano con la ayuda de los axiomas de congruencia

Entre los axiomas formulados en el capítulo I, los grupos II-V son en parte axiomas de la recta y en parte axiomas del plano. Los axiomas 4-8 del grupo I son los únicos axiomas del espacio. Con el objeto de comprender claramente el significado de los axiomas del espacio, supongamos alguna geometría plana y estudiemos las condiciones generales bajo las cuales esta geometría puede ser inmersa en una geometría del espacio, en la cual se satisfagan los axiomas formulados para la geometría plana, y también los axiomas I, 4-8 de incidencia en el espacio.

Generalmente, en este capítulo y en los siguientes, no recurriremos a los axiomas de congruencia. Consecuentemente el axioma IV de las paralelas (p. H-27) debe formularse con mayor precisión.

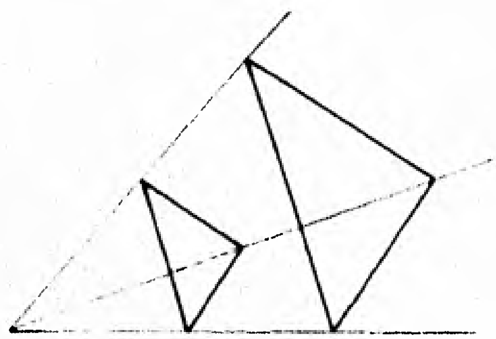
IV*. (Axioma de las paralelas en forma precisa). Sea a una recta y A un punto fuera de ella. Existe, en el plano determinado por a y A, una y sólo una recta que pasa por A y no intersecta a a.

Es bien sabido que el llamado teorema de Desargues puede ser demostrado sobre la base de los grupos de axiomas I-II, IV*. El teorema de Desargues es un teorema de intersección en el plano. La recta en la cual están los puntos de intersección de los lados correspondientes de dos triángulos, es particularmente importante, y es usualmente denominada "la recta al infinito". El teorema y el inverso que resulta en este caso, serán llamados el teorema de Desargues. Este teorema afirma lo siguiente:

TEOREMA 53. (Teorema de Desargues). Si triángulos están en un plano de tal manera que los pares de lados correspondientes son paralelos, las rectas que unen los vértices correspondientes pasan por uno y el mismo punto o son paralelas.

Inversamente, si dos triángulos están en un plano de tal forma que las rectas que unen vértices correspondientes pasan por un punto o son paralelas, y si además dos pares de lados correspondientes de los triángulos son paralelos, entonces el tercer par es también paralelo.

Como ya fue señalado, el teorema 53 es una consecuencia de los axiomas I, II, IV*. De acuerdo a este resultado, la validez del teorema de Desargues en una geometría plana es por lo menos una condición <u>necesaria</u> para que esta geometría sea inmersible en una geometría del espacio en la cual los grupos de axiomas I, II, IV* se cumplan.



Como en los capítulos III y IV, supongamos una geometría <u>plana</u> en la cual se cumplen los axiomas I, 1-3 y II-IV y supongamos que se introduce una aritmética de segmentos como en la sección 15. Siendo así, como se demostró en la sección 17, es posible asignar a todo punto del plano un par de segmentos (x, y) y a toda recta una razón de tres segmentos (u : v : w) en la que u, v no son ambos cero, de tal manera que la ecuación lineal

$$u x + v y + w = 0$$

representa la condición para la posición común del punto y la recta. De acuerdo a la sección 17, el conjunto de todas las rectas en esta geometría forma un campo numérico para el cual se cumplen las propiedades 1-16 enumeradas en la sección 13. Por lo tanto, como fue hecho en la sección 9 y en la 12 por medio de los conjuntos de números Ω y $\Omega(t)$, respectivamente, es posible construir una geometría del espacio. Para hacer esto, acordemos que un conjunto de tres segmenos (x, y, z) representa un punto, las razones de cuatro segmentos $(u : v : w : r)$ en los cuales u, v, w no se anulen simultáneamente, representan un plano; y las rectas están definidas como las intersecciones de pares de planos. De esta manera, la ecuación lineal

$$u x + v y + w z + r = 0$$

expresa el hecho de que el punto (x, y, z) está en el plano $(u : v : w : r)$. Finalmente, respecto al orden de los puntos en una recta, o de los puntos en un plano respecto a una recta en él, o al orden de los puntos en el espacio con respecto a un plano, estos pueden establecerse mediante las desigualdades entre los segmentos de manera análoga a la hecha para el plano en la sección 9.

Ya que la geometría plana original puede ser recobrada haciendo $z = 0$, resulta evidente que esta geometría plana puede ser vista como <u>parte</u> de una geometría del espacio. Para esto, de acuerdo con las discusiones anteriores, la validez del teorema de Desargues es una condición necesaria, y se concluye por consiguiente que el teorema de Desargues debe cumplirse también en la geometría plana supuesta. Es entonces una consecuencia de los axiomas I, 1-3, II-IV.

Nótese que el resultado obtenido puede también obtenerse sin dificultad directamente del teorema 42 en la teoría de la proporción o del teorema 61.

23. <u>La imposibilidad de demostrar el teorema de Desargues sin la ayuda de los axiomas de congruencia</u>

En el estudio del problema de si es posible demostrar el teorema de Desargues en la geometría plana sin los axiomas de congruencia, llegamos al siguiente resultado:

<u>TEOREMA 54</u>. <u>Existe una geometría plana en la cual los axiomas</u> I, 1-3, II, III, 1-4, IV*, <u>i.e., todos los axiomas de la recta y el plano con la excepción del a-</u>

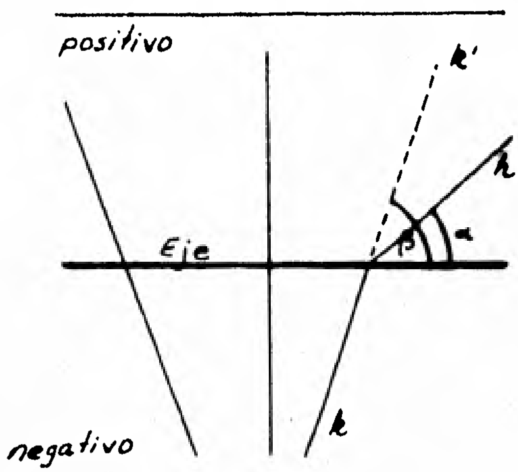
xioma III, 5 de congruencia se cumple pero en la cual no se cumple el teorema de Desargues (teorema 53). Por lo tanto, el teorema de Desargues no puede ser deducido solamente de los axiomas antes mencionados. Para su demostración son necesarios o los axiomas del espacio o el axioma III, 5 de congruencia de triángulos.

DEMOSTRACION.(30) En la geometría plana ordinaria cartesiana, cuya existencia ha sido demostrada en la sección 9, cambiamos las definiciones de rectas y ángulos de la siguiente manera: Escojamos cualquier recta en la geometría cartesiana como un eje e introduzcamos las direcciones positiva y negativa, así como los semiplanos positivo y negativo con respecto a este eje.

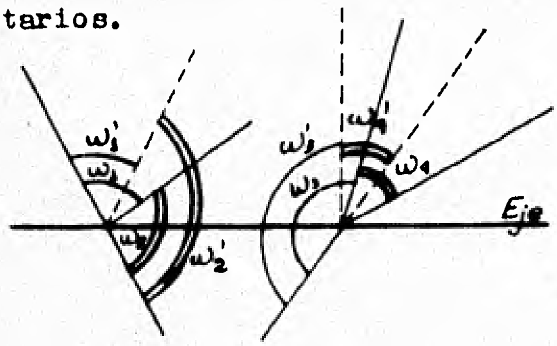
Como rectas en esta nueva geometría tomemos este eje y toda recta en la geometría cartesiana que sea paralela a él, toda recta en la geometría cartesiana cuya parte en el semiplano positivo forme un ángulo agudo o recto con dirección positiva del eje, y finalmente, todo par de rayos h, k con la propiedad de que el vértice común h y k está en el eje. Supongamos que el rayo h que está en el semiplano forma, con la dirección positiva del eje, un ángulo agudo α, y supongamos que la extensión k' del rayo k, que está en el semiplano negativo, forma con la dirección positiva un ángulo β, de tal manera que en la geometría cartesiana se cumpla la relación

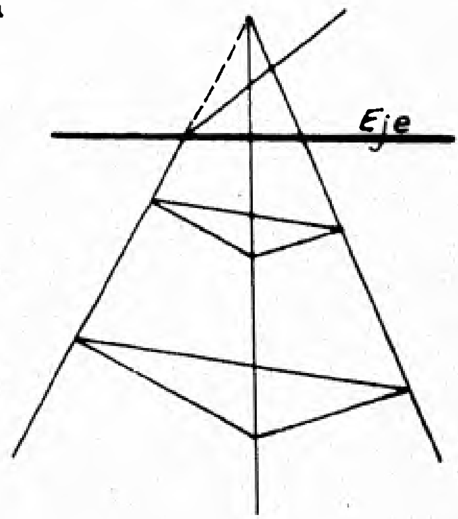
$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 2.$$

El orden de los puntos y las longitudes de los segmentos serán definidos de la manera usual incluso en las rectas que en la geometría cartesiana son representadas como pares de rayos. Puede verse fácilmente que en la geometría definida de esta forma son válidos los axiomas I, 1-3, II, III, 1-3, IV*. Es inmediato, por ejemplo que las rectas que pasan por un punto cubren el plano de una manera simple. Además, los axiomas V son también válidos.



Todos los ángulos, que no tengan al menos un lado que parta del eje hacia el semiplano positivo y forme un ángulo agudo con la dirección positiva del eje, se miden como es usual en la geometría cartesiana. Sin embargo, si al menos un lado de un ángulo ω es un rayo h con las propiedades mencionadas, entonces el valor del ángulo ω en la nueva geometría se define como el valor del ángulo ω' en la geometría cartesiana que en lugar de h tiene el rayo k' correspondiente (véase la página anterior) como un lado. La figura de la izquierda ilustra este método de definición para dos pares de ángulos suplementarios.





Sobre la base de esta definición el axioma III, 4 es también válido. En particular, para todo ángulo $\measuredangle(l, m)$

$$\measuredangle(l, m) \equiv \measuredangle(m, l).$$

Sin embargo, como nos muestra la figura de la derecha y como puede comprobarse, el teorema de Desargues no se cumple en esta nueva geometría plana. Es igualmente fácil dibujar una figura que muestre que tampoco se cumple el teorema de Pascal.

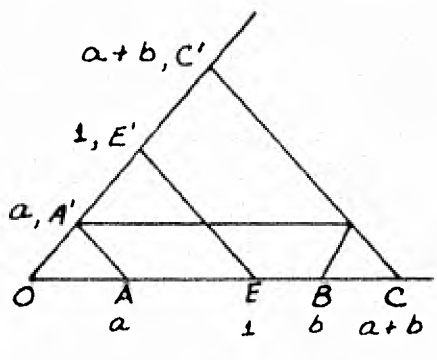
La geometría plana "no desarguiana" dada aquí sirve al mismo tiempo como ejemplo do una geometría plana en la cual los axiomas I, 1-3, II, III, 1-4, IV* son válidos y que sin embargo no puede ser inmersa en una geometría del espacio.[31]

24. Introducción de una aritmética de segmentos basada en el teorema de Desargues con la ayuda de los axiomas de congruencia [32]

Con el objeto de apreciar plenamente la importancia del teorema de Desargues (teorema 53) construiremos una geometría plana en la cual los axiomas I, 1-3, II, IV*[33], i.e., todos los axiomas de la recta y el plano, excepto los axiomas de congruencia y continuidad, son válidos. En esta geometría será introducida una nueva aritmética de segmentos, independiente de los axiomas de congruencia, de la siguiente manera:

Tomemos dos rectas fijas en el plano que se intersectan en el punto O y consideremos sólo los segmentos cuyo punto inicial es O y cuyo punto final está en cualquier parte de estas dos rectas fijas. Denotemos el punto O como el segmento O. En símbolos

$$OO = O \qquad \text{ó} \qquad O = OO$$



Sean E y E' dos puntos fijos, uno en cada una de las rectas fijas por O. Denotamos los dos segmentos OE y OE' como el segmento 1. En símbolos

$$OE = OE' = 1$$

ó

$$1 = OE = OE'.$$

Llamemos a la recta EE', la recta unitaria para abreviar. Además, si A y A' son puntos en las rectas OE y OE' respectivamente, y si la recta que une AA' es paralela a EE' consideraremos los segmentos OA y OA' iguales. En símbolos

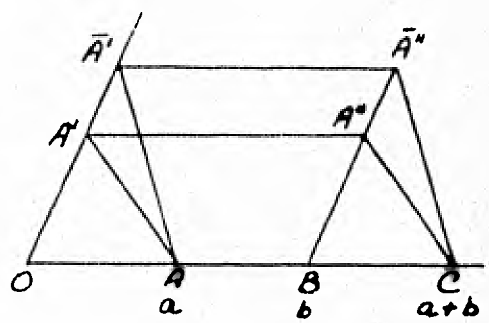
$$OA = OA' \qquad \text{ó} \qquad OA' = OA.$$

Para definir la suma de los segmentos a = OA y b = OB en OE, construyamos AA' paralela a la recta unitaria EE' y dibujemos una paralela a OE por A', y por B una paralela a OE'. Estas dos paralelas se intersectan en un punto AA". Finalmente dibujemos una paralela a la recta unitaria EE' por A". Esta intersecta a las rectas fijas OE y OE' en los puntos C y C', respectivamente. Entonces llamemos al segmento c = OC = OC' la <u>suma</u> del segmento a = OA y el segmento b = OB. En símbolos

$$c = a + b \quad ó \quad a + b = c.$$

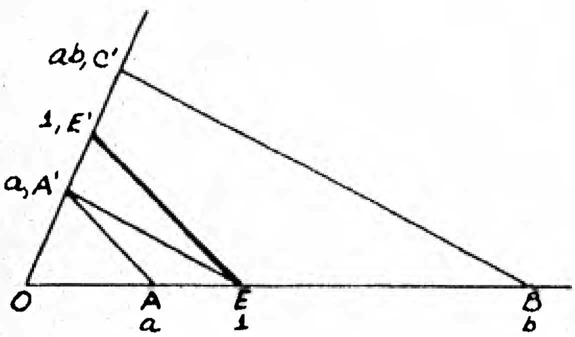
Supongamos que dando por hecho la validez del teorema de Desargues (teorema 53), puede obtenerse generalmente la suma de dos segmentos. El punto C determinado por la suma a + b, en la recta en la cual están A y B, es entonces independiente de la recta unitaria EE' adoptada, <u>i.e.</u>, el punto C puede obtenerse también por la siguiente construcción:

Escojamos cualquier punto $\bar{A}'$ en la recta OA' y tracemos una paralela a O$\bar{A}'$ por B y la paralela a OB por $\bar{A}'$. Estas dos paralelas se intersectan en un punto $\bar{A}''$. La paralela a A$\bar{A}'$ trazada ahora por $\bar{A}''$ intersecta la recta OA en el punto C que determina la suma a + b.



Para la demostración, supondremos que los puntos A' y A" así como los puntos $\bar{A}'$ y $\bar{A}''$, se obtienen de la manera antes mencionada, y que el punto C está determinado en OA de tal forma que CA" es paralela a AA'. Entonces es necesario demostrar que C$\bar{A}''$ es también paralela a A$\bar{A}'$. Los triángulos AA'$\bar{A}'$ y CA"$\bar{A}''$ están situados de tal modo que las rectas que unen vértices correspondientes son paralelas y consecuentemente los dos pares de lados correspondientes, llamémosles A'$\bar{A}'$ y A"$\bar{A}''$ así como AA' y CA", son paralelos. De hecho, por la segunda afirmación del teorema de Desargues los terceros lados A$\bar{A}'$ y C$\bar{A}''$ también son paralelos.

Con el objeto de definir el producto de dos segmentos a = OA y b = OB será utilizada la misma construcción descrita en la sección 15, excepto que ahora los lados del



ángulo recto serán reemplazados por las dos rectas fijas OE y OE'. La construcción es consecuentemente la siguiente: Determinemos el punto A' en OE' de tal forma que AA' sea paralela a la recta unitaria EE'. Unamos E con A' y por B dibujemos una paralela a EA'. Esta paralela intersecta a la recta fija OE' en el punto C'. Llamemos al segmento c = OC' el <u>producto</u> del segmento a = OA y el segmento b = OB. En símbolos

$$c = a\,b \qquad ó \qquad a\,b = c.$$

25. <u>Las leyes asociativa y conmutativa de la suma en la nueva aritmética de segmentos</u>

Como es fácil ver, todos los teoremas de composición formulados en la sección 13 son válidos para esta nueva aritmética de segmentos. Investigaremos ahora cuáles de las reglas de la aritmética formuladas son válidas en esta aritmética de segmentos, cuando se parte de una geometría plana en la cual se satisfacen los axiomas I, 1-3, II, IV*, y <u>también se cumple el teorema de Desargues</u>.

Se demostrará primero que se cumple la ley <u>conmutativa</u> de la suma de segmentos

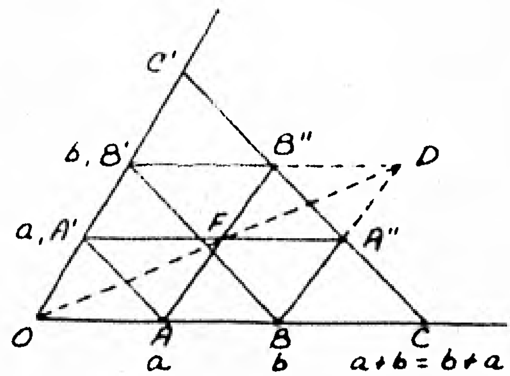
$$a + b = b + a$$

definida en la sección 24. Sean

$$a = OA = OA',$$
$$b = OB = OB',$$

por lo cual, de acuerdo a la definición empleada, AA' y BB' son paralelas a la recta unitaria. Construyamos el punto A" y B" trazando A'A" así como B'B" paralelas a OA, y también AB" y BA" paralelas a OA'. Como puede inmediatamente verse, la afirmación establece que la recta A"B" es paralela a AA'.

Esta afirmación se verifica usando el teorema de Desargues (teorema 53) como sigue: Denotemos por F el punto de punto de intersección de AB" con A'A", y el punto de intersección de BA" con B'B" por D. Así los lados correspondientes de los triángulos AA'F y BB'D son paralelos. Concluímos entonces, por el teorema de Desargues, que los tres puntos O, F, D son colineales. En este caso, los dos triángulos OAA' y DB"A" están situados de tal forma que las rectas que unen vértices correspondientes pasan por el mismo punto F; y ya que además dos pares de lados correspondientes llamémosles OA y DB", así como OA' y DA" son paralelos, el tercer par AA' y B"A' también es paralelo por la segunda afirmación del teorema de Desargues.



Al mismo tiempo se concluye de esta demostración que no importa en cuál de las dos rectas fijas se principia la construcción de la suma de dos segmentos.

También se cumple la ley <u>asociativa</u> de la suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Consideremos los segmentos

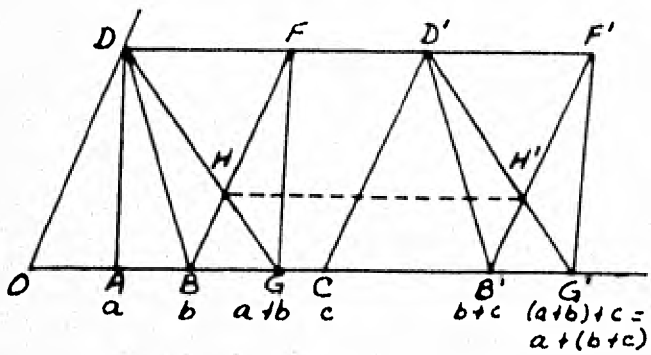
$$a = OA, \quad b = OB, \quad c = OC$$

en la recta OE. Sobre la base de las reglas generales de la suma, dadas en la sección anterior, las sumas

$$a + b = OG, \quad b + c = OB', \quad (a + b) + c = OG'$$

pueden construirse como sigue: Escojamos arbitrariamente un punto D en la recta OE' y unámoslo con A . La paralela a OA por D intersectará a las dos paralelas a OD por B y por C en los puntos F y D' respectivamente.

Las paralelas a AD y BD trazadas por F y D' intersectan ahora a la recta OA en los puntos antes mencionados G y B', respectivamente; y la paralela a GD dibujada por D' intersecta a la recta OA en el punto G' también mencionado. La suma a + (b + c) se obtendrá finalmente trazando la paralela a OD por B', que es intersectada por las rectas DD' en un punto F', y trazando una paralela a AD por F'. Sólo falta demostrar que G'F' es paralela a AD. Denotemos por H el punto de intersección de la recta BF con GD, y por H' el punto de intersección de la recta B'F' con G'D'; concluímos que los lados correspondientes de los triángulos BDH y B'D'H' son paralelos. Además, como las dos rectas BB' y DD' son paralelas, por el teorema de Desargues la recta HH' es también paralela a estas dos rectas. Es posible entonces aplicar la segunda afirmación del teorema de Desargues a los triángulos GFH y F'F'H' y por consiguiente darnos cuenta de que G'F' es paralela a GF y, de hecho, es paralela también a AD.



26. <u>La ley asociativa y las dos leyes distributivas de la multiplicación en la nueva aritmética de segmentos</u>

Con las suposiciones hechas, también se cumple la ley <u>asociativa</u> de segmentos

$$a\ (b\ c) = (a\ b)\ c.$$

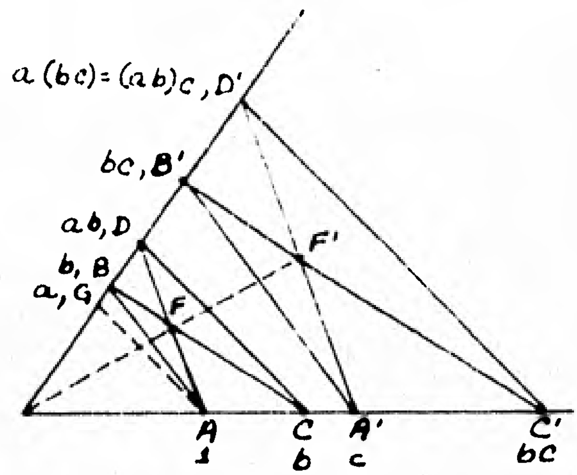
Consideremos los segmentos

$$1 = OA, \qquad b = OC, \qquad c = OA'$$

en una de las dos rectas fijas por O, y los segmentos

$a = OG$ y $b = OB$ en la otra. Con el objeto de construir los segmentos

$bc = OB'$ y $bc = OC'$
$ab = OD$
$(ab)c = OD'$



de acuerdo con la sección 24, dibujemos A'B' paralela a AB, B'C' paralela a BC, CD paralela a AG y A'D' paralela a AD. Puede verse que la afirmación es equivalente a decir que CD debe también ser paralela a C'D'. Denotando por F el punto de intersección de la recta A'D' con B'C', los lados correspondientes de los triángulos ABF y A'B'F' son paralelos. Por consiguiente, por el teorema de Desargues los tres puntos O, F, F' son colineales. En vista de esta situación, la segunda afirmación del teorema de Desargues puede ser aplicada a los triángulos CDF y C'D'F' y entonces puede verse que CD es de hecho paralela a C'D'.

Finalmente, las dos leyes distributivas

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

y

$$(b + c)\,a = ba + ca$$

serán demostradas por el teorema de Desargues.

Para la demostración de la <u>primera ley distributiva</u>

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

supongamos que los segmentos

$$1 = OE, \qquad b = OB, \qquad c = OC$$

están dados en la primera de las dos rectas fijas y el segmento

$$a = OA$$

en la segunda.

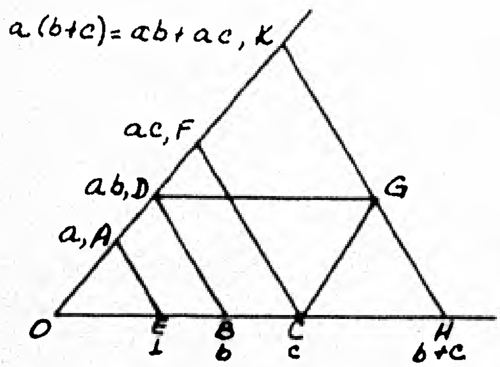
Las rectas paralelas a EA trazadas por B y C intersectan a la recta OA en los puntos D y F respectivamente. Por la regla de multiplicación de la sección 24

$$OD = ab, \qquad OF = ac.$$

De acuerdo con la regla generalizada de la suma de la sección 24 obtenemos la suma

$$OH = b + c$$

trazando las paralelas a OD por C y a OC por D y también trazando por el punto de intersección G de estas dos rectas la paralela a BD que intersecta OC en el punto H antes mencionado, y a OD en un punto K. Como OH = b + c, por la



regla de la multiplicación

$$OK = a\,(b + c).$$

De acuerdo con la regla generalizada de la suma y de la intercambiabilidad de las rectas fijas OE, OE' en la construcción de una suma, demostrada en la p. H-87, la suma ac + ab puede ser finalmente construída de la siguiente manera: Por cualquier punto de OE, digamos por C, trazamos la paralela CG a OD, la paralela DG a OC por D y la paralela GK a CF por G.

Entonces

$$OK = ac + ab$$

y por lo tanto concluímos, con la ayuda de la ley conmutativa de la suma, la primera ley distributiva.

Para demostrar la <u>segunda ley distributiva</u>, supongamos que los segmentos

$$1 = OE, \qquad a = OA$$

están dados en la primera de las dos rectas fijas y los segmentos

$$b = OB, \qquad c = OC$$

en la segunda. Los segmentos

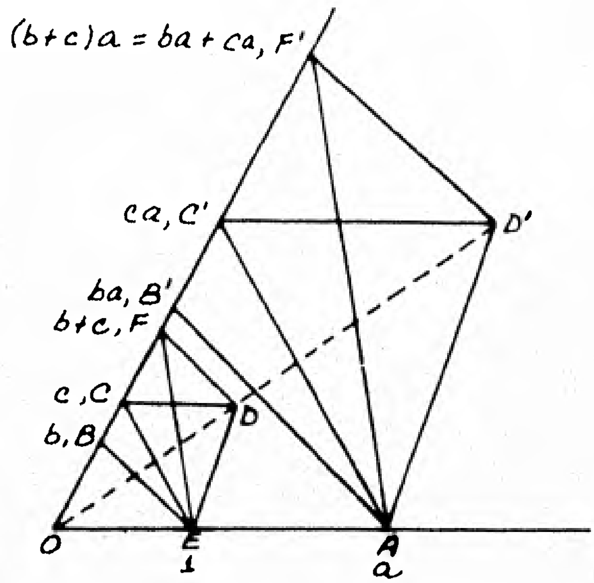
$$OB' = ba, \qquad OC' = ca$$

están determinados por las paralelas AB' a EB y AC' a EC respectivamente.

Construyamos los segmentos

$$OF = b + c, \qquad OF' = ba + ca$$

nuevamente en la recta fija OB por la regla generalizada de la suma, como sigue: Tracemos las paralelas a OE por C y a OC por E. Por el punto D en el cual se intersectan, tracemos la paralela a EB que es intersectada por OA en el punto F antes mencionado. De la misma manera tracemos las paralelas a OC' por A y a OA por C'. Por el punto D' en el que se intersectan tracemos la paralela a AB', que se intersecta con OA en el punto F' antes mencionado.



Por la regla de la multiplicación, la segunda ley distributiva queda demostrada tan pronto como probemos que AF' es paralela a EF.

Los lados correspondientes de los triángulos ECD y AC'D' son paralelos. Por el teorema de Desargues los puntos O, D, D' son colineales. Por lo tanto es posible aplicar la segunda afirmación del teorema de Desargues a los triángulos EDF y AD'F' y darse cuenta de que en efecto, AF' es paralela a EF.

27. La ecuación de una recta basada en la nueva aritmética de segmentos

En las secciones 24–26 fue introducida una aritmética de segmentos por medio de los axiomas formulados en la sección 24 y bajo la hipótesis de la validez del teorema de Desargues en el plano. En esta aritmética, además de los teoremas de composición formulados en la sección 13, se cumplen la ley conmutativa de la suma, las leyes asociativas de la suma y de la multiplicación, así como ambas leyes distributivas. Que la ley conmutativa de la multiplicación no necesariamente persista resultará evidente en la sección 33. En esta sección veremos de qué manera es posible una representación analítica para los puntos y rectas del plano, basada en esta aritmética de segmentos.

DEFINICION. Llámese a las dos rectas fijas por O en el plano, el eje X y el eje Y. Consideremos cualquier punto P en el plano determinado por los segmentos x, y, obtenidos sobre el eje X y el eje Y, respectivamente, trazando paralelas a estos ejes por P. Estos segmentos x, y son llamados las coordenadas del punto P.

Por el teorema de Desargues y la nueva aritmética de segmentos, llegamos al siguiente resultado:

TEOREMA 55. Las coordenadas x, y de los puntos en cualquier recta satisfacen una ecuación de segmento de la forma

$$a x + b y + c = 0.$$

En esta ecuación, los segmentos a, b deben estar a la izquierda de las coordenadas x, y. Los segmentos a, b nunca son cero y c es cualquier segmento.

Inversamente, toda ecuación de un segmento de la forma descrita representa una recta en la geometría plana adoptada.

DEMOSTRACION. La abcisa x de cualquier punto P en el eje Y o sobre una recta paralela a ella es independiente de como escogemos el punto P en la recta deseada, i.e., tal recta puede ser representada en la forma

$$x = \bar{c}.$$

Para $\bar{c}$ existe un segmento c tal que

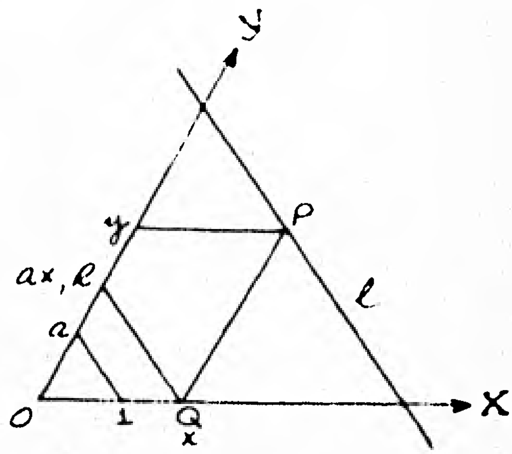
$$\bar{c} + c = 0$$

y por lo tanto,

$$x + c = 0.$$

Esta ecuación es de la forma deseada.

Ahora, sea l una recta que intersecta al eje Y en un punto S. Por cualquier punto P en esta recta tracemos una paralela al eje Y que el eje X intersecta en el punto Q. El segmento OQ = x es la abcisa de P. La paralela a l por Q determina un segmento OR en el eje Y y por la definición de la multiplicación, concluímos que



$$OR = ax$$

donde a es un segmento que depende solamente de la posición de l, pero no de como hayamos escogido a P en l. Sea y la ordenada de P. Por la definición extendida de una suma descrita en las páginas H-84-87 y por la posibilidad de construir una suma empezando con el eje Y, como ya se vió en la página H-87, el segmento OS nos da ahora la suma ax + y. OS = $\overline{c}$ es un segmento determinado sólo por la posición de l. De la ecuación

$$ax + y = \overline{c}$$

se sigue que

$$ax + y + c = 0$$

donde c es nuevamente el segmento determinado por la ecuación $\overline{c} + c = 0$. La última ecuación es de la forma deseada.

Es fácil ver que las coordenadas de un punto que no está en l no satisface esta ecuación.

Es igual de fácil demostrar la validez de la segunda afirmación del teorema 55. Dada una ecuación de segmento

$$a'x + b'y + c' = 0$$

en la cual a' y b' no son ambos cero, si b' = 0, multiplicamos la ecuación de la izquierda por el segmento a determinado por la relación aa' = 1 y si b' $\neq$ 0 la multiplicamos por el segmento b determinado por la relación $bb' = 1$. Luego, con las reglas de la aritmética, obtenemos una ecuación de una recta como la que derivamos antes y es fácil construir en la geometría adoptada una recta que satisfaga esta ecuación.

Conviene hacer explícito que bajo la suposición hecha, una ecuación de segmento de la forma

$$xa + yb + c = 0$$

en la cual los segmentos a, b están <u>a la derecha</u> de las coordenadas x, y <u>no</u> representa generalmente una recta.

En la sección 30 se verá una aplicación importante del teorema 55.

28. <u>La totalidad de los segmentos considerados como números complejos</u>

Ya hemos dicho que en la nueva aritmética de segmentos expuesta en la sección 24, los teoremas 1-6 de la sección 13 son válidos.

También hemos demostrado en las secciones 25 y 26, con la ayuda del teorema de Desargues, que en esta aritmética de segmentos las reglas de operación 7-13 de la sección 13 son válidas. Por lo tanto, se cumplen todos los teoremas de composición y las reglas de operación, con la excepción de la conmutatividad de la multiplicación.

Finalmente, con el objeto de ordenar los segmentos, adoptaremos la siguiente convención: Sean A, B dos puntos distintos en la recta OE. Arreglemos los cuatro puntos O, E, A, B, de acuerdo con el teorema 5, en una sucesión en la cual E está después de O. Si en esta sucesión B está también después de A, entonces decimos que el segmento $a = OA$ es <u>menor</u> que el segmento $b = OB$. En símbolos

$$a < b.$$

Sin embargo, si en esta sucesión A está después de B, decimos que el segmento $a = OA$ es <u>mayor</u> que el segmento $b = OB$. En símbolos

$$a > b.$$

Es fácil ver que en esta aritmética las reglas de operación 13-16 son válidas ahora por el axioma II. Por consiguiente, la totalidad de todos los diferentes segmentos forman un conjunto de números complejos que tiene las propiedades 1-11, 13-16 de la sección 13, i.e., son válidas todas las reglas excepto la ley conmutativa de la multiplicación y los axiomas de continuidad. En adelante, tal conjunto de números será llamado un conjunto desarguiano de números.

29. La construcción de una geometría del espacio con la ayuda de un conjunto desarguiano de números

Sea ahora D un conjunto desarguiano de números. Con él será posible construir una geometría del espacio en la cual se satisfagan los axiomas I, II, IV*.

Para ver esto, consideremos cualquier conjunto desarguiano de números D como un punto, y cualquier conjunto de cuatro números de D en el cual los tres primeros números no son simultáneamente cero, como un plano. Los conjuntos $(u : v : w : r)$ y $(au : av : aw : ar)$ donde a es algún número distinto de 0, representarán, sin embargo el mismo plano. La existencia de la ecuación

$$ux + vy + wz + r = 0$$

expresará el hecho de que el punto (x, y, z) está en el plano $(u : v : w : r)$. Finalmente, se define una recta con la ayuda de un conjunto de dos planos $(u' : v' : w' : r')$ y $(u'' : v'' : w'' : r'')$ cuando es posible encontrar en D un número a distinto de cero tal que

$$au' = u'', \quad av' = v'', \quad aw' = w''$$

simultáneamente. Se dirá que un punto (x, y, z) está en la recta

$$\left[(u' : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')\right]$$

si es común a los planos $(u' : v' : w' : r')$ y $(u'' : v'' : w'' : r'')$. Dos rectas que contengan los mismos puntos no serán consideradas distintas.

Aplicando las reglas de operación 1-11 de la sección 13, que por hipótesis son válidas en D, es fácil llegar a la conclusión de que los axiomas I y IV* se cumplen en la geometría del espacio construído.

Para que también se satisfagan los axiomas de orden II, se adoptarán las siguientes convenciones: Sean

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad (x_2,\ y_2,\ z_2),\quad (x_3,\ y_3,\ z_3)$$

tres puntos cualesquiera en la recta

$$(u' : v' : w' : r'),\ (u'' : v'' : w'' : r'') .$$

Diremos que el punto $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ está entre los otros si al menos uno de los seis pares de desigualdades:

(1) $\qquad x_1 < x_2 < x_3, \qquad x_1 > x_2 > x_3,$

(2) $\qquad y_1 < y_2 < y_3, \qquad y_1 > y_2 > y_3,$

(3) $\qquad z_1 < z_2 < z_3, \qquad z_1 > z_2 > z_3,$

se satisface. Ahora, si una de las dos desigualdades dobles (1) se cumple, entonces es fácil inferir que ó $y_1 = y_2 = y_3$ ó una de las desigualdades dobles (2) debe cumplirse y también que $z_1 = z_2 = z_3$, ó una de las desigualdades dobles (3) debe cumplirse. De hecho, multiplicando las ecuaciones

$$u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0,$$

$$v'x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0,$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

por la izquierda, por números adecuados de D que sean distintos de cero y sumando después las ecuaciones resultantes obtenemos un conjunto de ecuaciones de la forma

(4) $$u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

Aquí el coeficiente v''' es ciertamente distinto de O porque de otra manera concluiríamos la igualdad de los tres números x_1, x_2, x_3. Si $u''' = 0$ entonces obtenemos

$$y_1 = y_2 = y_3.$$

Sin embargo, si $u''' \neq 0$ entonces inferimos de

$$x_1 \lessgtr x_2 \lessgtr x_3$$

la doble desigualdad

$$u''' x_1 \lesseqgtr u''' x_2 \lesseqgtr u''' x_3$$

y por lo tanto, por (4)

$$u''' y_1 + r''' \lesseqgtr v''' y_2 + r''' \lesseqgtr v''' y_3 + r'''$$

de donde

$$w''' y_1 \lesseqgtr v''' y_2 \lesseqgtr v''' y_3,$$

y como v''' no es cero

$$y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr y_3.$$

En cada una de estas desigualdades dobles debe considerarse el signo superior o inferior en toda la derivación.

Las discusiones anteriores demuestran que en esta geometría se cumplen los axiomas II, 1-3 de orden de la recta. Falta demostrar que el axioma del plano II, 4 es válido.

Para esto, consideremos un plano $(u : v : w : r)$ y una recta en él $\left[(u : v : w : r), (u' : v' : w' : r')\right]$. Supongamos que todos los puntos (x, y, z) que están en el plano $(u : v : w : r)$ están en uno o el otro lado de la recta según sea la expresión $u'x + v'y + w'z + r$ menor o mayor que 0. Entonces es necesario demostrar que esta definición es única y que concuerda con la de la p. H-8, lo cual es fácil de hacer.

Hemos visto así que todos los axiomas I, II, IV* se satisfacen en esta geometría del espacio construída de la forma antes descrita, a partir de un conjunto desarguiano de números D.

Como el teorema de Desargues es una consecuencia de los axiomas I, 1-8, II, IV* es evidente lo siguiente:

A partir de un conjunto desarguiano de números D es posible construir en la forma descrita anteriormente una geometría del plano en la cual los números del conjunto D constituyen los elementos de una aritmética de segmentos como la introducida en la sección 24, y en la cual los axiomas I, 1-3, II, IV* se satisfacen. En tal geometría plana el teorema de Desargues siempre se cumple.

Este es el inverso del resultado al cual llegamos en la sección 28 y que puede ser formulado como sigue:

En una geometría plana en la cual, además de los axiomas I, 1-3, II, IV*, se cumple el teorema de Desargues es posible introducir una aritmética de segmentos como se hizo en la sección 24. Con una definición apropiada del orden, los elementos de esta aritmética de segmentos forman entonces un conjunto desarguiano de números.

30. La importancia del teorema de Desargues

Si los axiomas I, 1-3, II, IV* se satisfacen en una geometría plana, en la cual también se cumple el teorema de Desargues, entonces, por el último teorema, siempre es posible introducir en esta geometría una aritmética de segmentos para la cual valen las reglas 1-11, 13-16 de la sección 13. Considérese nuevamente la totalidad de estos segmentos como un conjunto de números complejos, y constrúyase a partir de ellos un espacio geométrico de acuerdo al desarrollo de la sección 29, en el cual los axiomas I, II, IV* sean válidos.

Considerando en esta geometría del espacio solamente los puntos (x, y, 0) y las rectas en las cuales están estos puntos, obtenemos una geometría plana. Tomando en cuenta el teorema 55, deducido en la sección 27, es claro que esta geometría plana debe coincidir con la geometría plana supuesta al principio, i.e., los elementos de ambas geometrías pueden hacerse corresponder de una manera inyectiva y suprayectiva, y pueden por lo tanto preservarse sus operaciones y su orden. De aquí obtenemos el siguiente teorema que debe ser visto como el objetivo final de todos los desarrollos de este capítulo:

TEOREMA 56. Supongamos que los axiomas I, 1-3, II, IV* se satisfacen en una geometría plana. La validez del teorema de Desargues es entonces una condición necesaria y suficiente para que esta geometría plana pueda ser vista como parte de una geometría del espacio en la cual se cumplen los axiomas I, II, IV*.

El teorema de Desargues puede, por consiguiente, ser caracterizado para la geometría plana como, por así decirlo, el resultado de eliminar los axiomas del espacio.

Los resultados obtenidos nos colocan también en la posición de darnos cuenta de que toda geometría del espacio en la cual los axiomas I, II, IV* se satisfacen, puede ser siempre considerada como una parte de una "geometría de cualquier número de dimensiones". Por una geometría de cualquier número de dimensiones se entenderá una colección de puntos, rectas, planos y otros elementos para la cual los axiomas extendidos correspondientes de incidencia y orden, así como el axioma de las paralelas, se satisfacen.

CAPITULO VI

EL TEOREMA DE PASCAL

31. Dos teoremas acerca de la demostración del teorema de Pascal

Como ya hemos observado, el teorema de Desargues puede ser demostrado partiendo de los axiomas I, II, IV*, i.e., usando esencialmente los axiomas del espacio pero sin recurrir a los axiomas de congruencia. En la sección 23 he probado que su demostración, sin el uso del grupo I de axiomas del espacio y sin los axiomas III de congruencia, es imposible, aún si usamos el axioma de continuidad.

El teorema de Pascal (teorema 40), en la sección 14, y también el teorema de Desargues, en la sección 22, fueron deducidos de los axiomas I, 1-3, II-IV, es decir, sin los axiomas del espacio y usando esencialmente los axiomas de congruencia. Surge el problema de si puede también demostrarse el teorema de Pascal sin el uso de los axiomas de congruencia pero recurriendo a los axiomas de incidencia del espacio. Las investigaciones mostrarán que en este respecto, el teorema de Pascal es completamente diferente del teorema de Desargues, en tanto que la admisión o exclusión del axioma de Arquímedes en la demostración del teorema de Pascal tiene un efecto decisivo en su validez. Como generalmente no supondremos los axiomas de congruencia en este capítulo, es necesario formular el axioma arquimediano de la siguiente manera:

V, 1*. (Axioma arquimediano de la aritmética de segmentos). Supongamos dados un segmento a y dos puntos A y B en una recta g. Entonces es posible definir un número de puntos A_1, A_2,..., A_{n-1}, A_n tales que B está entre A y A_n, y los segmentos AA_1, A_1A_2,..., $A_{n-1}A_n$ son iguales al segmento a en el sentido de la aritmética de segmentos la cual, de acuerdo con la sección 24, puede ser introducida en la recta g sobre la base de los axiomas I, II, IV* y el teorema de Desargues.

Los resultados esenciales de estas investigaciones pueden ser combinados en los siguientes dos teoremas:

TEOREMA 57. El teorema de Pascal (teorema 40) puede ser demostrado con los axiomas I, II, IV*, V, 1*, i.e., sin los axiomas de congruencia pero con la ayuda del axioma de Arquímedes.

TEOREMA 58. El teorema de Pascal (teorema 40) no puede ser demostrado con los axiomas I, II, IV*, i.e., sin los axiomas de congruencia ni el axioma arquimediano.

En la formulación de estos teoremas es posible también, por el teorema general 56, reemplazar los axiomas del espacio I, 4-8 por la condición de geometría plana de que el teorema de Desargues (teorema 53) se cumpla.

32. La ley conmutativa de la multiplicación en el conjunto arquimediano de números

Las demostraciones de los teoremas 57 y 58 descansan esencialmente en ciertas relaciones mutuas que existen para las reglas de operación y las propiedades fundamentales de la aritmética ordinaria, y cuyo conocimiento parece también interesante por sí mismo. Formularemos ahora los dos siguientes teoremas:

TEOREMA 59. La ley conmutativa de la multiplicación en un conjunto arquimediano de números es una consecuencia necesaria de las otras reglas de operación, i.e., si un conjunto de números tiene las propiedades 1-11, 13-17 enumeradas en la sección 13 entonces se concluye necesariamente que satisface también la fórmula 12.

DEMOSTRACION. Nótese primero que si a es cualquier número del conjunto de números y

$$n = 1 + 1 + \ldots + 1$$

es un número entero positivo racional, se cumple la ley conmutativa de la multiplicación para a y n. En efecto,

$$an = a\,(1 + 1 + \ldots + 1) = a\cdot 1 + a\cdot 1 + \ldots + a\cdot 1$$
$$= a + a + \ldots + a$$

y

$$na = (1 + 1 + \ldots + 1)\,a = 1\cdot a + 1\cdot a + \ldots + 1\cdot a$$
$$= a + a + \ldots + a.$$

Ahora, contradiciendo la hipótesis, sean a y b dos números del conjunto de números para los cuales no se cumple la ley conmutativa de la multiplicación. Es claro que está permitido suponer que

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad ab - ba > 0.$$

Por la condición 5 de la sección 13 existe un número c (> 0) tal que

$$(a + b + 1)\,c = ab - ba.$$

Finalmente escojamos un número d que satisfaga las desigualdades

$$d > 0, \qquad d < 1, \qquad d < c$$

simultáneamente, y denotemos por m y n dos números enteros racionales no negativos para los cuales

$$md < a \leqq (m + 1)\,d$$

y

$$nd < b \leqq (n + 1)\,d,$$

respectivamente. La existencia de los números m y n es una consecuencia directa del axioma arquimediano (teorema 17 de la sección 13). Refiriéndonos a la observación hecha al principio de esta demostración, obtenemos multiplicando las dos últimas desigualdades

$$ab \leqq mnd^2 + (m + n + 1)\,d^2,$$

$$ba > mnd^2,$$

y luego restando

$$ab - ba < (m + n + 1)\,d^2.$$

Ahora

$$md < a, \quad nd < b, \quad d < 1$$

y por lo tanto

$$(m + n + 1)\, d < a + b + 1,$$

i.e.,

$$ab - ba < (a + b + 1)\, d$$

y como $d < c$

$$ab - ba < (a + b + 1)\, c.$$

Esta desigualdad contradice el valor determinado para el número c y de esta forma se completa la demostración del teorema 59.

33. La ley conmutativa de la multiplicación en un conjunto no arquimediano de números

TEOREMA 60. En un conjunto no arquimediano de números la ley conmutativa de la multiplicación no es una consecuencia necesaria de las otras reglas de operación, i.e., existe un conjunto de números que tiene las propiedades 1-11, 13-16 enumeradas en la sección 13, un conjunto desarguiano de números según la sección 28, que no tiene la ley conmutativa de la multiplicación (12).

DEMOSTRACION. Sean t un parámetro y T una expresión en un número finito o infinito de términos de la forma

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \dots$$

donde $r_0 (\neq 0)$, r_1, r_2,... son números racionales cualesquiera y n es cualquier número entero racional. Añádase el 0 a estas expresiones de T. Dos expresiones de la forma de T serán iguales si todos los números n, r_0, r_1, r_2 coinciden por pares. Además, sean s otro parámetro y S cualquier expresión en un número finito o infinito de términos de la forma

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \dots$$

donde $T_0 (\neq 0)$, T_1, T_2,... son expresiones cualesquiera de la forma T, y sea m un nuevo número entero racional. Consideremos como un conjunto de números Ω (, t) a la totalidad de las expresiones de la forma S, al cual se añade el número 0 y en el que se adoptan las siguientes reglas de operación:

Operemos sobre los parámetros s y t según las reglas 7-11 de la sección 13, mientras que en lugar de la regla 12 usaremos la fórmula:

(1) $\quad ts = 2st.$

Es fácil convencernos de que esta definición no es contradictoria.

Si S', S" son dos expresiones de la forma

$$S' = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \dots ,$$

$$S'' = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \dots ,$$

es claro que sumando término a término es posible formar una nueva expresión S' + S", únicamente determinada, de la forma S. Esta expresión S' + S" es llamada la suma de los números representados por S' y S".

La multiplicación formal y usual término a término de las dos expresiones S', S" da por resultado una expresión de la forma

$$S'S'' = s^{m'} T'_0 \; s^{m''} T''_0 + (s^{m'} T'_0 \; s^{m''+1} T''_1 + s^{m'+1} T'_1 \; s^{m''} T''_0) + (s^{m'} T'_0 \; s^{m''+2} T''_2 + s^{m'+1} T'_1 \; s^{m''+1} T''_1 + s^{m'+2} T'_2 \; s^{m''} T''_0) + \dots .$$

Con el uso de la fórmula (1) es claro que esta expresión se convierte en una expresión únicamente determinada de la forma S. Esta es llamada el producto de los números representados por S' y S".

En este método de operación la validez de las reglas de operación 1-4 y 6-11 de la sección 13 es evidente. La validez de la regla 5 de la sección 13 tampoco es difícil de establecer. Para hacerlo, supongamos que

$$S' = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \dots$$

y

$$S'''' = s^{m''''} T''''_0 + s^{m''''+1} T''''_1 + s^{m''''+2} T''''_2 + \dots$$

son dos expresiones de la forma S, y supongamos que por definición el primer coeficiente r'_0 de T'_0 es diferente de 0. Igualando las potencias de s en ambos lados de la ecuación

(2) $\quad S'S'' = S''''$

encontramos en forma únicamente determinada primero un número entero m" como exponente y después una sucesión de expresiones

$$T''_0, \ T''_1, \ T''_2, \ldots$$

tales que usando la fórmula (1) la expresión

$$S'' = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \ldots$$

satisface la ecuación (2). Un resultado correspondiente se cumple para la ecuación

$$S''' S' = S''''.$$

Por consiguiente la demostración está completa.

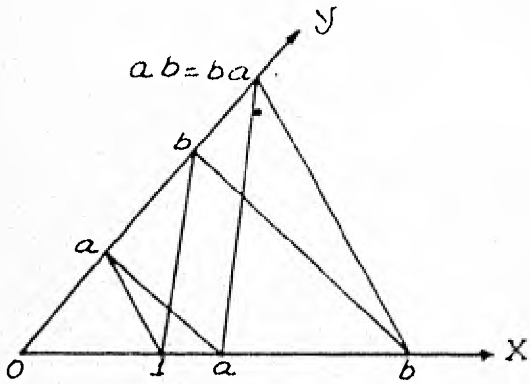
Finalmente, para poder ordenar los números del conjunto de números $\Omega(s, t)$ hagamos las siguientes definiciones: Un número de un conjunto será mayor o menor que 0 según sea el primer coeficiente r_o de T_o, en la expresión S que lo represente, mayor o menor que 0. Dados dos números cualesquiera a y b del conjunto de números, $a < b$ ó $a > b$ si $a - b < 0$ ó $a - b > 0$, respectivamente. Es inmediatamente claro que de acuerdo a estas definiciones las reglas 13-16 de la sección 13 son también válidas, i.e., $\Omega(s, t)$ es un conjunto desarguiano de números (véase sección 28).

Como muestra la fórmula (1), la regla 12 de la sección 13 no es válida para el conjunto de números $\Omega(s, t)$. La validez del teorema 60 queda así completamente establecida.

De acuerdo con el teorema 59, el teorema arquimediano (teorema 17 de la sección 13) no se cumple en el conjunto de números $\Omega(s, t)$ construido antes.

34. Demostración de los dos teoremas acerca del teorema de Pascal (Geometría no pascaliana)

Si en una geometría del espacio se cumplen los axiomas I, II, IV*, el teorema de Desargues (teorema 53) también se cumple. Por lo tanto, por el último teo[illegible] de la sección 28, es posible introducir en todo par de rectas que se intersectan de dicha geometría, una aritmética de segmentos en la que se cumplan las reglas 1-11, 13-16 de la sección 13. Si en esta geometría se supone el axioma arquimediano V, 1* es entonces claro que el teorema arquimediano (teorema 17 de la sección 13) se cumplirá para la aritmética de segmentos y por consiguiente, por el teorema 59, se obtendrá también la ley conmutativa de la multiplicación.



En la figura puede verse que la ley conmutativa de la multiplicación no es otra que el teorema de Pascal para los dos ejes. La validez del teorema 57 queda así establecida.

Para demostrar el teorema 58 consideremos el conjunto desarguiano de números $\Omega(s, t)$ formulado en la sección 33 y con su ayuda construyamos, de la forma descrita en la sección 29, una geometría del espacio en la cual los axiomas I, II, IV* se satisfagan. Sin embargo en esta geometría el teorema de Pascal no se cumple, porque en el conjunto desarguiano de números $\Omega(s, t)$ no se cumple la ley conmutativa de la multiplicación. Necesariamente, la geometría "no pascaliana" construída de esta forma es al mismo tiempo, de acuerdo con el teorema 57 antes demostrado una geometría "no arquimediana".

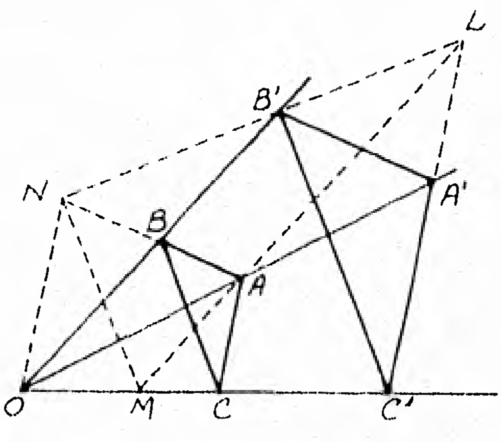
Es claro que con las suposiciones hechas es imposible demostrar el teorema de Pascal, aún si la geometría del espacio es vista como parte de una geometría de cualquier número de dimensiones en la cual además de los puntos, rectas y planos, existen también otros elementos, y para la cual suponemos un conjunto de axiomas de incidencia y de orden correspondientes, así como el axioma de las paralelas.

35. Demostración del teorema de cualquier punto de intersección por medio del teorema de Pascal

A continuación se demostrará el importante resultado:

TEOREMA 61. El teorema de Desargues (teorema 53) puede ser demostrado a partir del teorema de Pascal (teorema 40) con la ayuda de los axiomas I, 1-3, II, IV* solamente, y por lo tanto sin el uso de los axiomas de continuidad.

DEMOSTRACION.[31] Es claro que afirmaciones del teorema 53 se desprenden directamente una de la otra. Basta entonces probar, por ejemplo, la segunda afirmación del teorema 53. La demostración se hará con hipótesis auxiliares. Colóquense dos triángulos ABC y A'B'C' de tal forma que las rectas que unen vértices correspondientes pasen por el punto O, AB sea paralela a A'B' y AC sea paralela a A'C'. Supongamos además que las rectas OB' y A'C' son paralelas o las rectas OC' y A'B' son paralelas. Tracemos la paralela a OB' por A que es intersectada por la recta A'C' en el punto L



y por la recta OC' en un punto M. Además, supongamos que la recta LB' es paralela a OA ó a OC. Las rectas AB y LB' no son paralelas, i.e., se intersectan en un punto N. Unamos este punto con M y O.

Por la construcción, el teorema de Pascal puede ser aplicado a la configuración ONALA'B' y puede verse que ON es paralela a A'L y es por consiguiente, también paralela a CA. Además, el teorema de Pascal puede también ser aplicado a la configuración ONMACB y ONMA'C'B' y demostrarse que MN es paralela a CB así como a C'B'. Por lo tanto, los lados CB y C'B' son paralelos.

Las hipótesis auxiliares hechas para esta demostración pueden ahora omitirse una a una. La demostración de estas posibilidades no se hará aquí.

Consideremos ahora una geometría plana en la cual, además de los axiomas I, 1-3, II, IV*, se cumple también el teorema de Pascal. El teorema 61 nos muestra que el teorema de Desargues también se cumplo en esta geometría. Por lo tanto, es posible introducir en ésta una aritmética de segmentos de acuerdo con la sección 24. Por la sección 34 el teorema de Pascal y la ley conmutativa de la multiplicación se cumplen en esta aritmética de segmentos, i.e., son válidas todas las reglas de operación 1-12 de la sección 13.

Denotando una figura que satisfaga el teorema de Pascal o el de Desargues como una configuración pascaliana o desarguiana, respectivamente, es posible combinar los resultados de las secciones 24-26 y 36 como sigue: Toda aplicación de las reglas de operación (teorema 1-12 de la sección 13) en esta aritmética de segmentos resulta ser una combinación de un número finito de configuraciones pascalianas o desarguianas. Como, por la demostración del teorema 61, las configuraciones desarguianas pueden ser representadas como una combinación de configuraciones pascalianas construyendo puntos y rectas auxiliares apropiados, toda aplicación de estas reglas de operación en esta aritmética de segmentos es una combinación de un número finito de configuraciones pascalianas.

Por la sección 27 y con la ley conmutativa de la multiplicación es posible representar un punto en esta aritmética de segmentos por un par de números reales (x, y) y una recta mediante una razón de tres números reales $(u : v : w)$ en la cual los dos primeros no se anulan simultáneamente. El lugar geométrico común de un punto y una recta está caracterizado por la ecuación:

$$ux + vy + w = 0$$

y el paralelismo de dos rectas $(u : v : w)$ y $(u' : v' : w')$ por la proporción:

$$u : v = u' : v'.$$

Propongamos ahora en la geometría especificada de esta manera un teorema puro de punto de intersección. Un teorema puro de punto de intersección se entenderá aquí como un teorema que contiene una afirmación acerca del lugar geométrico común de puntos y rectas y del paralelismo de rectas sin el uso de otras relaciones tales como la congruencia y la perpendicularidad. Todo teorema puro de intersección en una geometría plana puede ser puesto de la siguiente manera:

Escojamos un conjunto arbitrario de un número finito de puntos y rectas. Después tracemos de una manera prescrita paralelas a algunas de estas rectas. Escojamos puntos en alguna de las rectas y tracemos rectas por algunos de estos puntos. Entonces, si se construyen rectas de unión, puntos de intersección y paralelas por los puntos determinados en el procedimiento anterior se obtiene finalmente un conjunto definido de un número finito de rectas, acerca de las cuales el teorema afirma que o pasan por el mismo punto o son paralelas.

Consideremos ahora las coordenadas de puntos y rectas escogidos arbitrariamente, como parámetros $p_1, \ldots, p_n$. Algunas de las coordenadas de los puntos y rectas escogidos menos arbitrariamente pueden ser consideradas como parámetros adicionales $p_{n+1}, \ldots, p_r$. Estos elementos están entonces representados por los parámetros $p_1, \ldots, p_r$. Las coordenadas de todas las rectas de unión, puntos de intersección y paralelas que pueden ser ahora construidos se convierten entonces en expresiones $A(p_1, \ldots, p_r)$ que dependen racionalmente de estos parámetros, y la afirmación del teorema del punto de intersección propuesto está representada por la afirmación de que algunas expresiones del tipo darán por resultado valores iguales para valores iguales de los parámetros, i.e., el teorema del punto de intersección establecerá que ciertas expresiones $R(p_1, \ldots, p_r)$, que dependen racionalmente de ciertos parámetros $p_1, \ldots, p_r$, se anulan tan pronto como algunos elementos de la aritmética de segmentos introducida en la geometría propuesta son sustituídos por estos parámetros. Como el dominio de estos elementos es infinito concluímos por un conocido teorema de álgebra que las expresiones $R(p_1, \ldots, p_r)$ deben anularse idénticamente sobre la base de las reglas de operación 1-12 de la sección 13. Sin embargo, para probar que las expresiones $R(p_1, \ldots, p_r)$ se anulan idénticamente en la aritmética de segmentos es suficiente ahora, como ya se ha demostrado por la aplicación de las reglas de operación, aplicar el teorema de Pascal y resulta entonces lo siguiente:

TEOREMA 62. Todo teorema puro del punto de intersección que se cumpla en una geometría plana en la cual son válidos los axiomas I, 1-3, II, IV* y el teorema de Pascal toma, después de la construcción de puntos y rectas auxiliares apropiados, la forma de una combinación de un número finito de configuraciones pascalianas.

Para demostrar el teorema puro de un punto de intersección con la ayuda del teorema de Pascal no es entonces necesario recurrir a los axiomas de continuidad y congruencia.

C A P I T U L O   VII

CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS BASADAS EN LOS AXIOMAS I-IV

36. Construcciones geométricas con regla y compás

Consideremos una geometría del espacio en la cual se cumplan los axiomas I-IV. Para simplificar la exposición se tratará en este capítulo con una geometría plana que está contenida en la geometría del espacio. Se investigará cuáles problemas elementales de construcción (disponiendo de útiles adecuados) pueden necesariamente ser resueltos en esta geometría.

Los problemas siguientes siempre tienen solución sobre la base de los axiomas I, II, IV:

PROBLEMA 1. Unir dos puntos por una recta y encontrar el punto de intersección de dos rectas en caso de que no sean paralelas.

La construcción de segmentos y ángulos es posible por los axiomas III de congruencia, i.e., los problemas siguientes pueden ser resueltos en la geometría dada:

PROBLEMA 2. Dados una recta, un punto y una dirección, construir un segmento determinado.

PROBLEMA 3. Dados una recta, un punto y un lado, construir un ángulo determinado o construir una recta que intersecte una recta dada en un punto y un ángulo dados.

Puede verse que suponiendo los axiomas I-IV sólo se pueden resolver aquellos problemas de construcción que puedan ser reducidos a los problemas 1-3.

Añadiremos los dos problemas siguientes a los problemas fundamentales 1-3:

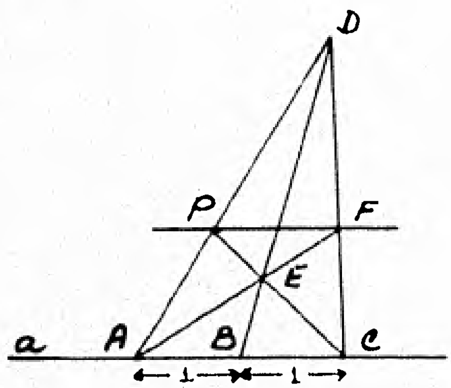
PROBLEMA 4. Trazar una paralela a una recta por un punto dado.

PROBLEMA 5. Construir una perpendicular a una recta dada.

Puede verse inmediatamente que ambos problemas pueden resolverse de varias maneras por medio de los problemas 1-3.

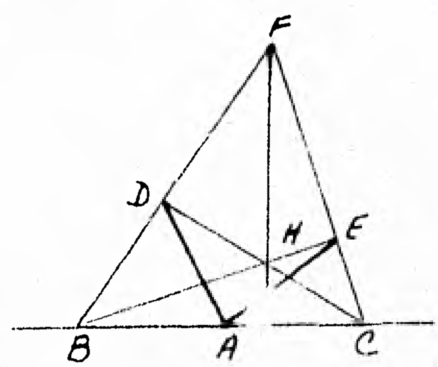
Para llevar a cabo la construcción del problema 1 necesitamos una regla. Para resolver los problemas 2-5 es suficiente, como se demostrará después, usar además de la regla una escala: un instrumento con el cual trazar un segmento fijo[35], como el segmento unitario. Por lo anterior, podemos llegar al siguiente resultado:

TEOREMA 63. Aquellos problemas de construcción geométrica que tienen solución sobre la base de los axiomas I-IV pueden necesariamente ser resueltos con una regla y una escala.



DEMOSTRACION. Para hacer la construcción del problema 4, unamos el punto dado P con cualquier punto A de la recta dada a y tracemos con la escala dos veces contiguas el segmento unitario en a, digamos hasta B y C. Ahora, sea D cualquier punto sobre AP, diferente de A y P, para el cual BD no es paralela a PC. Entonces CP y BD se intersectan en un punto E y AE y CD se intersectan en un punto F. De acuerdo con Steiner PF es la paralela deseada.

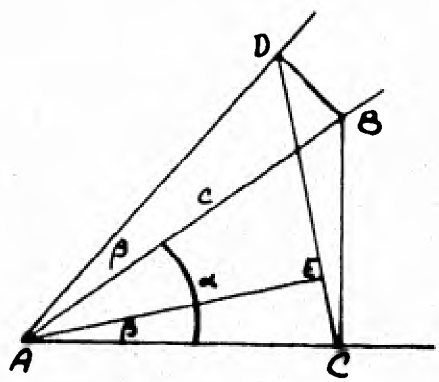
El problema 5 se resuelve de la siguiente forma: Sea A cualquier punto en la recta dada. Tracemos con la escala en ambos lados de A los segmentos unitarios AB y AC y después determinemos, sobre dos rectas cualesquiera por A, los puntos E y D tales que los segmentos AD y AE sean también iguales al



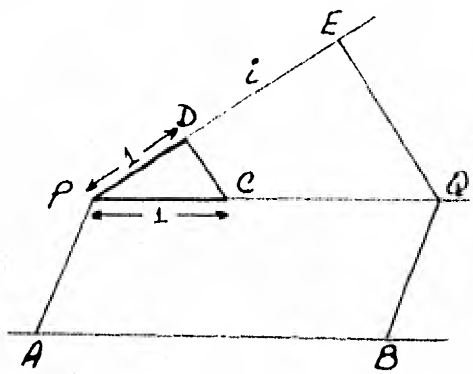
segmento unitario. Las rectas BD y CE se intersectan en un punto F, las rectas BE y CD se intersectan en un punto H y FH es la perpendicular deseada. De hecho, los ángulos ∡BDC y ∡BEC, como ángulos inscritos en un semicírculo cuyo diámetro es BC, son ángulos rectos; luego por el teorema de punto de intersección de las alturas de un triángulo aplicado al triángulo BCF, FH es también perpendicular a BC.

Sobre la base de los problemas 4 y 5 siempre es posible trazar una perpendicular a una recta dada a por un punto D que no está en la recta, o levantar en ésta una perpendicular en un punto A en ella.

Es fácil ahora resolver el problema 3 con sólo regla y escala. Adoptemos el siguiente método en el cual sólo se necesita trazar paralelas y perpendiculares: Sea β el ángulo por construir y A su vértice. Tracemos por A la recta 1 paralela a la recta dada, sobre la cual el ángulo será construído. Desde cualquier punto B en un lado de β bajemos perpendiculares al otro lado del ángulo β y a 1. Sean D y C los pies de estas perpendiculares. D y C son distintos y A no está en CD. Por lo tanto, es posible bajar una perpendicular de A a CD. Sea E el pie de ésta. Según la demostración dada en la página H-53 ∡CAE = β. Si B se escoge en el otro lado del ángulo dado entonces E está del otro lado de 1. Tracemos ahora una paralela a AE por el punto dado en la recta dada. El problema 3 queda así resuelto.



Finalmente, para la construcción del problema 2 usaremos el sencillo método siguiente debido a J. Kürschák: Sea AB el segmento a construir y P el punto en la recta dada 1. Tracemos la paralela a AB por P, y en el lado de AP donde está B, el segmento unitario desde el punto P hasta, digamos, C. Construyamos además el segmento u-



nitario en 1 desde P a D en el lado dado. Sea Q el punto donde la paralela a AP por B intersecta a PC y E donde la paralela a CD, trazada por O, intersecta a 1. Entonces PE = AB. En caso de que 1 coincida con PQ y Q no esté en el lado dado, la construcción puede seguirse de una manera sencilla.

Se ha demostrado que todos los problemas 1-5 tienen solución con regla y escala y en consecuencia hemos completado la demostración del teorema 63.

37. Criterio para la posibilidad de construcciones con regla y compás

Aparte de los problemas geométricos elementales tratados en la sección 36, existe una larga serie de problemas cuya solución requiere sólo el trazo de rectas y la construcción de segmentos. Para explorar el dominio de todos los problemas que pueden ser resueltos de esta manera, en la siguiente discusión introduciremos un sistema coordenado ortogonal y las coordenadas de los puntos serán consideradas de la forma usual como números reales o funciones de algunos parámetros arbitrarios. Para responder a la cuestión acerca de la totalidad de los puntos construibles adoptaremos el siguiente enfoque:

Consideremos un conjunto de puntos fijos. Las coordenadas de estos puntos forman un dominio racional R, que contiene algunos números reales y parámetros arbitrarios p. Consideremos ahora la colección de todos los puntos que pueden ser construídos a partir del conjunto de puntos dado trazando rectas y construyendo segmentos. Denotemos el dominio formado por las coordenadas de estos puntos por $\Omega(R)$. Este contiene algunos números reales y funciones de los parámetros arbitrarios p.

Las discusiones de la sección 17 muestran que el trazo de rectas y paralelas es analíticamente equivalente a las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de segmentos. Además, la conocida fórmula para una rotación, dada en la sección 9, muestra que para la construcción de segmentos en cualquier recta basta la operación analítica de extracción de raíces cuadradas de la suma de dos cuadrados cuyas bases han sido ya construídas. Inversamente, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos segmentos puede siempre ser trazada construyendo segmentos sobre la base del teorema de Pitágoras y con la ayuda de un triángulo rectángulo.

Concluímos de estas discusiones que el dominio $\Omega(R)$ contiene aquellos y sólo aquellos números reales y funciones de los parámetros p que resultan de un número finito de aplicaciones de las cinco operaciones a los números y parámetros en R, a saber, las cuatro operaciones aritméticas elementales y una quinta operación, la extracción de la raíz cuadrada de la suma de dos cuadrados. El resultado lo expresamos como sigue:

> <u>TEOREMA 64</u>. Un problema de construcción geométrica puede resolverse trazando rectas y construyendo segmentos, <u>i.e.</u>, con regla y escala si y sólo si en el tratamiento analítico del problema las coordenadas del punto deseado son funciones de las coordenadas de los puntos dados, cuya formación requiere sólo de operaciones racionales y la operación de extracción de raíces cuadradas de la suma de dos cuadrados, y requiere la aplicación de estas cinco operaciones sólo un número finito de veces.

Es inmediatamente obvio, a partir de este teorema, que no todo problema que puede resolverse con compás puede también resolverse con regla y escala solamente. Para demostrar esto consideremos la geometría que fue construída en la sección 9 con la ayuda del campo de números algebraicos Ω. En esta geometría existen sólo elementos que son construíbles con regla y escala, o sea, los segmentos determinados por los números del campo Ω.

Ahora, si w es cualquier número en Ω puede verse, a partir de la definición del campo Ω, que todo número conjugado de w debe estar también en Ω. Ya que es claro que todos los números de Ω son reales, se concluye que contiene sólo números cuyos conjugados son también reales, i.e., todos los números del campo Ω son reales.

Consideremos el problema de construir un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y un cateto $\sqrt{2} - 1$. El número algebraico $\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$, que expresa el valor numérico del otro cateto, no está en el campo Ω porque su conjugado $\sqrt{-2\sqrt{2} - 2}$ es imaginario.

Por lo tanto, el problema no tiene solución en la geometría supuesta y entonces no puede ser resuelto nunca con regla y escala, aunque la construcción puede hacerse inmediatamente con un compás.

Este análisis es también reversible, i.e., se cumple lo siguiente: Todo número real obtenido de números racionales por raíces cuadradas reales, está en el campo Ω. Luego, todo segmento determinado por tal número es construible con regla y escala. La demostración de este teorema se obtendrá partiendo de consideraciones más generales. Es posible, en efecto, encontrar un criterio para la solución con regla y compás de un problema de construcción geométrica que nos permita determinar inmediatamente, de la naturaleza analítica del problema y su solución, si la construcción es también posible con regla y escala solamente. Este criterio está dado en el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 65. Consideremos un problema de construcción geométrica en cuyo tratamiento analítico las coordenadas de los puntos deseados pueden encontrarse, partiendo de las coordenadas de los puntos dados, mediante operaciones racionales y la extracción de raí-</u>

ces cuadradas únicamente. Sea n el menor número de raíces cuadradas suficiente para calcular las coordenadas de los puntos. Si el problema de construcción dado puede también resolverse trazando rectas y construyendo segmentos solamente, entonces, incluyendo el punto al infinito, es necesario y suficiente que el problema geométrico tenga exactamente 2^n soluciones reales para todas las posiciones de los puntos dados, i.e., para todos los valores de los parámetros arbitrarios que aparecen en las coordenadas de los puntos dados.

Sobre la base de las consideraciones hechas al principio de esta sección, la necesidad del criterio formulado es inmediata. La afirmación de que este criterio es también suficiente, es equivalente al siguiente teorema aritmético:

TEOREMA 66. Sea $f(p_1,\ldots,p_n)$ una función formada a partir de los parámetros $p_1,\ldots,p_n$ por operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas. Si para todo conjunto de valores reales de los parámetros, ésta representa un número real, entonces está en el campo $\Omega(R)$ que se obtiene por las operaciones aritméticas elementales y la extracción de raíces cuadradas de la suma de dos cuadrados, partiendo de $1, p_1,\ldots, p_n$.

Obsérvese que puede prescindirse de la restricción a suma de cuadrados de dos sumandos en la definición de $\Omega(R)$. De hecho, las fórmulas

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2+d^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

muestran que la extracción de raíces cuadradas de una suma de cualquier número de cuadrados puede ser siempre reducida a la extracción repetida de raíces cuadradas de la suma de dos cuadrados.

Según esto, considerando los campos racionales que resultan de la adjunción, una por una, de las raíces cuadradas más internas en la construcción de la función $f(p_1, \ldots, p_n)$, basta probar que el radicando puede representarse en el campo racional anterior como una suma de cuadrados. Esta demostración estará basada en el siguiente teorema algebraico:

<u>TEOREMA 67. Toda función racional $\rho(p_1, \ldots, p_n)$ con coeficientes racionales que nunca toma valores negativos para valores reales de los parámetros puede ser representada como una suma de cuadrados de funciones racionales de las variables $p_1, \ldots, p_n$ con coeficientes racionales.</u>[56]

Se dará a este teorema la siguiente forma:

<u>TEOREMA 68. En el campo racional generado por $1, p_1, \ldots, p_n$ toda función que no tome valores negativos para ningún conjunto de valores reales de las variables es una suma de cuadrados.</u>

Sea $f(p_1, \ldots, p_n)$ una función con las propiedades dadas en el teorema 66. Extendamos la última afirmación a los campos que resultan de la adjunción una por una de estas raíces cuadradas que se requieren para la construcción de la función f. En estos campos, es cierto que toda función no negativa, junto con todos sus conjugados, puede ser representada como una suma de cuadrados de funciones del campo bajo consideración.

La demostración se hará por inducción. Consideremos primero un campo que se forma de R con la adjunción de una de las raíces cuadradas más internas de la función. El radicando de esta raíz cuadrada es una función <u>racional</u> $f_1(p_1, \ldots, p_n)$. Sea $f_2(p_1, \ldots, p_n)$ una función del campo $(R, \sqrt{f_1})$ que se forma de la adjunción, que junto con todos sus conjugados, nunca toma valores negativos, y asimismo nunca se anula idénticamente. Tiene la forma $a + b\sqrt{f_1}$, donde a, b y f_1 son funciones racionales. De la hipótesis hecha sobre f_2 se concluye que la suma φ, y el producto ψ, de las funciones $a + b\sqrt{f_1}$, $a - b\sqrt{f_1}$ nunca toman valores negativos. Las funciones

$$\varphi = 2a, \qquad \psi = a^2 - b^2 \quad f_1^2$$

son por lo tanto racionales, y por el teorema 68 pueden ser representadas como sumas de cuadrados de funciones de R. Además, φ no se puede anular idénticamente.

De la ecuación

$$f_2^2 - \varphi f_2 + \psi = 0$$

que satisface f_2, obtenemos

$$f_2 = \frac{f_1^2 + \psi}{\varphi} = \left(\frac{f_1}{\varphi}\right)^2 \cdot \varphi + \frac{\varphi\psi}{\varphi^2} .$$

Según las descripciones de φ y ψ, f_2 puede ser representada como una suma de cuadrados de funciones del campo $(R, \sqrt{f_1})$. Por consiguiente, el resultado obtenido para el campo $(R, \sqrt{f_1})$ corresponde al teorema 68, que se cumple en el campo R. Repitiendo el procedimiento anterior para otras uniones llegamos finalmente al resultado de que en todos los campos obtenidos por la construcción de la función f, toda función no negativa junto con todos sus conjugados, es una suma de cuadrados de funciones del campo bajo consideración. Consideremos cualquier raíz cuadrada en f. Esta, junto con sus conjugadas, es siempre real. De aquí, su radicando, junto con todos sus conjugados, es una función no negativa en el campo en el que puede ser representado, y en consecuencia pueden ser representados en ese campo como una suma de cuadrados. Así queda demostrado el teorema 65. El criterio dado en el teorema 65 es entonces suficiente.

Los polígonos regulares que son construíbles con un compás pueden ser tomados como un ejemplo de la aplicación del teorema 65. En este caso no aparece un parámetro arbitrario p. Las expresiones a ser construídas están en este caso representadas por los números algebraicos. Es fácil ver que el criterio del teorema 65 se satisface, de donde se desprende que todo polígono regular puede ser construído trazando solamente líneas rectas y construyendo segmentos; resultado que puede también ser deducido directamente de la teoría de la ciclotomía.

Por lo que respecta a problemas conocidos de la geometría elemental, sólo se mencionará aquí que el problema de Malfatti se puede resolver sólo con regla y escala[51], pero no el problema de contacto de Apolonio.

C O N C L U S I O N

El presente escrito es una investigación crítica de los principios de la geometría. En esta investigación la regla fundamental fue discutir todos los problemas de forma que, al mismo tiempo, se encontrara si podían ser resueltos de una manera específica con ciertos medios limitados. Esta regla fundamental me parece que contiene un lineamiento general y natural. De hecho, si en el curso de la investigación matemática se encuentra un problema o se conjetura un teorema, el deseo de conocimiento se satisface entonces sólo si se tiene éxito en la solución completa del problema y la demostración rigurosa del teorema, o si se ve claramente la razón de fondo para la imposibilidad del éxito y por consiguiente la inevitabilidad del fracaso.

La imposibilidad de ciertas soluciones y problemas desempeña, por lo tanto, un importante papel en las matemáticas modernas, y el esfuerzo por resolver cuestiones de este tipo fue algunas veces la causa de los descubrimientos de nuevas y fructíferas áreas de investigación. Recordemos solamente la demostración de Abel de la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado por radicales, la comprensión de la imposibilidad de demostrar el axioma de las paralelas, y el teorema de Hermite y Lendemann sobre la imposibilidad de construir algebraicamente los números e y π.

La regla fundamental según la cual debían discutirse los principios de la posibilidad de una demostración está íntimamente relacionada con el requisito de "pureza" en los métodos de demostración que ha sido propugnado con gran énfasis por muchos matemáticos. Básicamente, este requisito no es sino una forma subjetiva de la regla fundamental seguida aquí. De hecho, la presente investigación busca descubrir qué axiomas, hipótesis o apoyos son necesarios para la demostración de un hecho en la geometría elemental, y en cada decisión permanece abierta la cuestión de cuál método de demostración es preferible desde el punto de vista adoptado.

NOTAS

(1) Estos axiomas fueron estudiados en detalle por M. Pasch en su _Vorlesugen über neuere Geometrie_ (Leipzig, 1882). En particular, el axioma II, 4 se debe esencialmente a él.

(2) Esta demostración se debe a A. Wald.

(3) Este teorema, que aparece en la primera edición como un axioma fue reconocido por E. H. Moore, _Trans. Am. Math. Soc._, 1902, como una consecuencia de los axiomas de orden e incidencia del plano formulados anteriormente. Véanse también los trabajos subsecuentes a éste de Veblen, _Trans. Am. Math. Soc._, 1904, y Schweitzer, _American Journal_, 1909. En E. V. Huntington, "A New Set of Postulates for Betweenness with Proof of Complete Independence", _Trans. Am. Math. Soc._, 1924, se encuentra un estudio exhaustivo de los conjuntos independientes de axiomas de orden para la recta. Véase también _Trans. Am. Math. Soc._, 1917.

(4) De aquí en adelante se supondrá que los vértices de un triángulo no están en la misma recta.

(5) Esta demostración del teorema 19, que aparecía como axioma en la primera edición es de A. Rosenthal. Véase _Math. Ann._, Vol. 71.

También se deben a él las modificaciones de los axiomas I, 3 y I, 4, véase _Math. Ann._, Vol. 69.

(6) Ya en la obra de _Proclo_, comentando los elementos de Euclides, aparece la idea de esta demostración. En lugar del teorema 14, Proclo utiliza la hipótesis de que en la construcción de un ángulo recto se obtiene siempre otro ángulo recto, _i.e._, un ángulo igual a su suplementario.

Una traducción francesa de los comentarios de Proclo con introducción y notas de P. Ver Eecke fue publicada en _Collection de travaux de l'Acad. internat. d'histoire des sciences_, No. 1, "Proclus de Lycie". (Bruges, 1948).

(7) Con respecto a la cuestión de hasta dónde pueda este teorema reemplazar al recíproco del axioma de las paralelas, véanse las observaciones en la sección 12, al final del capítulo II.

(8) Una clasificación precisa de las condiciones que se requieren aquí para el orden y la congruencia de la recta fue hecha por F. Bachmann y fue incorporada en la formulación del axioma V, 2 de la séptima edición.

(9) La observación de que el axioma de completez de la recta es suficiente se debe a P. Bernays.

(10) Esta afirmación era considerada, en las ediciones previas, como un axioma de completez.

(11) Compárense también las observaciones al final de la sección 17, así como mi conferencia sobre el concepto de número, "Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900". La investigación del teorema acerca de la igualdad de los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles conduciría a otros dos axiomas de continuidad. Véase mi artículo "Uber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck", Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 35 (1903).

Mencionaremos las siguientes investigaciones sobre los axiomas de continuidad: R. Baldus, "Zur Axiomatik der Geometrie", I-III, I en Math. Ann., (1928), 100, 321-33; II en Atti d. Conge. int. d. Mat. (Bologna, 1928), IV (1931); III en Sitzber. d. Heidelberger Akad. Wiss., 1930, Fifth Proceedings. A. Schmidt, "Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie", Ibid., 1931, Fifth Proceedings. P. Bernays, "Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome", Math. Zeitschr. 63 (1955), 219-92.

(12) Respecto a la cuestión de la consistencia de los axiomas de la aritmética, compárense mis conferencias sobre el concepto de número "Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", 1900, así como también

"Mathematische Probleme" dadas en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900, *Göttinger Nachrichten*, en particular el problema 2.

(13) Incidentalmente puede ser demostrado que en una geometría en que los axiomas I-III y el axioma de Arquímedes V, 1 son válidos, la afirmación del axioma de las paralelas no es satisfecha por ningún par: una recta a y un punto A no en a; o por todo par. Véase R. Baldus, *Nichteuklidische Geometrie* (Berlín, 1927).

(14) G. Veronese ha hecho también un intento para construir una geometría que es independiente del axioma de Arquímedes, en su profundo libro, *Fondamenti di Geometria* (Padua, 1891). Traducción al alemán por A. Schepp, *Grundzüge der Geometrie*, (Leipzig, 1894).

(15) "Die Legendresche Sätze über die Winkelsumme im Dreieck", *Math. Ann.*, Vol 53 (1900).

(16) Una demostración de este teorema fue también producida después por F. Schur, *Math. Ann.*, Vol. 55 y nuevamente por Hjelmslev, *Math. Ann.*, Vol. 64. En el último es notable el argumento extremadamente corto que se da para la demostración de la mitad de este teorema. Véase también F. Schur, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig y Berlín, 1909), Sección 6.

(17) F. Schur ha publicado en *Math. Ann.*, Vol 51 una interesante demostración del teorema de Pascal basada en los axiomas I-III del plano y del espacio. También lo ha hecho Kehn en *Math. Ann.*, Vol. 53. Más tarde, J. Hjelmslev, usando los resultados de G. Hessenberg (*Math. Ann.*, Vol. 61) logró demostrar el teorema de Pascal sobre la base de los axiomas del plano I-III ("Neue Begründung der ebenen Geometrie", *Math. Ann.*, Vol. 64).

(18) Resulta también interesante el uso que puede hacerse del teorema sobre el punto de intersección de las alturas de un triángulo en la demostración del teorema de Pascal, o en la teoría de la proporción. Acerca de

esto véase F. Schur, Math. Ann., Vol. 57, y J. Mollerup, Studier over den plane geometris Aksiomer (Copenhague, 1903).

(19) Compárense con ésto, también, los métodos empleados en el desarrollo de la teoría de la proporción que han trabajado al mismo tiempo A. Kneser, Archiv für Math. und Phys., Series III, Vol. 2, y Mollerup, Math. Ann., Vol. 56; así como también Studier over den plane geometris Aksiomer (Copenhague, 1903), en el cual se supone la ecuación de proporción. En "Zur Proportionenlehre", F. Schur comenta que Kupfer (Sitzungsber der Naturforschergesellschaft zu Dorpat, 1893), ha demostrado correctamente la ley conmutativa de la multiplicación. Sin embargo, el resto del desarrollo de Kupffer de la teoría de la proporción debería verse como inadecuado.

(20) Véanse las observaciones al final de la sección 8.

(21) Principii della equaglianza di poligono preceduti da alcuni citici sulla teoria della equivalenza geometrica (Milano, Briola, 1881). Véase también Principii della equaglianza di poliedri e di poligoni sferici (Milano, Briola, 1883).

(22) Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5 (1894).

(23) Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges., 1892.

(24) Grundlagen der Geometrie, Vol. 2, Parte 5, Sección 5 (1898).

(25) Véase mi conferencia "Mathematische Probleme", No. 3.

(26) "Uber raumgleiche Polyeder", Göttinger Nachrichten, 1900, así como también "Uber den Rauminhalt", Math. Ann., Vol. 57.

(27) Sólo la primera parte del teorema 51, así como de los teoremas 48 y 52, se cumplen análogamente en el espacio. Véase Schatunowsky, "Uber den Rauminhalt der Polyeder", Math. Ann., Vol. 57. En la exposición "Uber den Inhalt spherischer Dreiecke", Math. Ann. Vol. 60, M. Dehn ha demostrado que con la ayuda de los teoremas

de congruencia es posible desarrollar la teoría del área plana sin el axioma de las paralelas. Véase además Finzel, "Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie", *Math. Ann.*, Vol. 72.

28 "Begründung der Lehre vom Polyederinhalt", *Math. Ann.*, Vol. 82.

29 "Sur la décomposition des polyèdres", *Comm. Helv.*, Vol. 16 (1943/44), 266-73.

30 En lugar de la primera geometría "no desarguiana" introducida en este punto en las ediciones previas de este libro, será ilustrada en lo sucesivo una geometría no desarguiana más simple que se debe a Moulton, "A Simple non-Desarguesian Plane Geometry", *Trans. Ann. Math. Soc.*, 1902.

31 H. Mohrmann da más ejemplos interesantes de sistemas de rectas no desarguianos en *Festschrift David Hilbert* (Berlín, 1922), p. 181.

32 G. Hessenberg en su artículo "Uber einen geometrischen Kalkül", *Acta Math.*, Vol. 29, 1904, efectúa la derivación de una aritmética de segmentos relacionada con el desarrollo de las ideas de topología. Algunas partes de la derivación se obtienen más fácilmente si se desarrolla la suma de vectores sobre la base del teorema de Desargues. Véase Hölder, *Streckenrechnung und projektive Geometrie* (Leipzig y Berlín, 1911).

33 Mediante una forma proyectiva del teorema de Desargues puede introducirse una nueva aritmética de segmentos, aún sin el axioma de las paralelas IV.

34 El teorema 61 fue demostrado por G. Hessenberg ("Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen", *Math. Ann.*, Vol. 61), en la forma mostrada a continuación.

35 J. Kürschák ha observado que la condición de construir un segmento es suficiente. Véase su nota "Das Streckenabtragen", *Math. Ann.* 55 (1902).

(36) Este problema fue primero tratado por mí para <u>una</u> variable donde E. Landau demostró completamente el teorema para una variable con el uso de herramientas simples y elementales. La demostración completa ha sido dada recientemente por Artin, <u>Hamburger Abhandlungen</u>, Vol. 5 (1927).

(37) Para otras construcciones geométricas con regla y escala, véase M. Feldblum, <u>Über elementargeometrische Konstruktionen</u>, Inaugural Dissertation (Göttingen, 1899).

I N D I C E

GEORGE D. BIRKHOFF

UN CONJUNTO DE POSTULADOS PARA LA GEOMETRIA PLANA BASADOS EN LA REGLA Y EL TRANSPORTADOR*

* La traducción se tomó de Birkhoff, George D., "A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor", Annals of Mathematics. Vol. 33, 1932, pp. 329-345.

UN CONJUNTO DE POSTULADOS PARA LA GEOMETRIA PLANA BASADOS EN LA REGLA Y EL TRANSPORTADOR[1]

Introducción. Hace algunos años, buscando presentar los hechos geométricos más sencillos en una forma popular me dí cuenta de cómo la geometría plana podía ser desarrollada fácilmente a partir de los elementos y relaciones incorporadas en la regla graduada y el transportador[2].

El propósito de este artículo es presentar el conjunto correspondiente de postulados en una forma matemática rigurosa. Desde el punto de vista puramente matemático, estos postulados difícilmente pueden compararse con otros conjuntos entre los cuales, sólo en este país, podemos nombrar los de Veblen, Veblen y Young, Schweitzer y Huntington. Sin embargo, a causa de su inmediatez y posible utilidad, el nuevo conjunto posee un interés obvio.

1. Elementos y relaciones supuestas. Los elementos supuestos son: (a) los puntos, designados por A, B, ..., y (b) ciertas clases de puntos llamadas líneas (rectas), designadas por l, m, ...

Las relaciones supuestas son: (c) la distancia entre dos puntos cualesquiera A, B designada por d(A, B): un número real no negativo con d(A, B) = d(B, A) y (d) el ángulo formado por tres puntos ordenados A, O, B (A ≠ O, B ≠ O)[3] designado por ∠AOB: un número real (mod 2π).

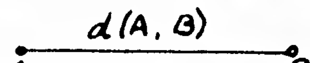


fig. 1

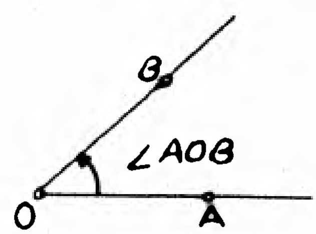


fig. 2

El punto O es llamado el vértice del ángulo.

2. El postulado de la medida sobre una recta. El postulado de la medida sobre una recta se formula como sigue:

POSTULADO I. *Los puntos* A, B,... *de cualquier recta* l *pueden ser puestos en correspondencia* (1, 1) *con los números reales* x *de tal manera que* $|x_B - x_A| = d(A, B)$ *para todos los puntos* A, B.

Evidentemente la escala o regla graduada incorpora este postulado.

fig. 3

Las conclusiones siguientes son inmediatas:

(a) $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

(b) Si tres puntos cualesquiera A, B, C de una recta están ordenados correctamente, la ecuación:

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$

se cumple, pero solamente en este orden A, B, C o en el orden inverso C, B, A.

(c) Si x' denota cualquier segundo sistema de numeración en la recta l, para todos los puntos A en l y para alguna constante d, ó $x'_A = x_A + d$ ó bien, $x'_A = -x_A + d$.

Claramente (c) afirma que la numeración en la escala está determinada por el origen marcado con el O y la *dirección* tomada como positiva.

Podemos ahora definir: Un punto B está entre A y C $(A \neq C)$ si se cumple la relación (b). Los puntos A y C, junto con todos los puntos B entre A y C forman el *segmento* AC; en otras palabras, el segmento AC es el conjunto de puntos P tales que $\begin{Bmatrix} x_A \leq x_P \leq x_C \\ x_C \leq x_P \leq x_A \end{Bmatrix}$ según ocurra que $\begin{Bmatrix} x_A < x_C \\ x_C < x_A \end{Bmatrix}$.

Asimismo, una semirrecta l' con extremo O queda definida por dos puntos O, A en una recta l $(A \neq O)$ como la clase de todos los puntos A' de l tales que O no está entre A y A'; en otras palabras si O se toma como el origen del sistema de numeración y A se toma en el lado positivo, *i.e.*, $x_A > 0$, la semirrecta OA consiste precisamente de los puntos P para los cuales $x_P \geq 0$. La recta dada l consiste de dos de estas semirrectas con el extremo común dado O.

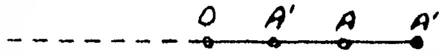


fig. 4

Si A, B, C son tres puntos distintos, se dice que los tres segmentos AB, BC, CA forman un triángulo $\triangle ABC$, con lados AB, BC, CA y vértices A, B, C. Si A, B, C están en la misma línea recta, se dice que $\triangle ABC$ es degenerado, en caso contrario es no degenerado.

3. El postulado del punto-recta. Este segundo postulado se formula de la siguiente manera:

POSTULADO II. Una y sólo una línea recta l contiene dos puntos dados P, Q $(P \neq Q)$.

Como consecuencia de II, dos rectas distintas cualesquiera l, m sólo pueden tener un punto en común o no tener ninguno. En el primer caso se dice que son paralelas[4]; una recta l siempre se considera como paralela a sí misma.

El postulado II establece el hecho de que puede trazarse una única recta por dos puntos, de manera que si dos rectas se intersectan, esto ocurre en un punto determinado.

Todas las construcciones geométricas dependen de este hecho.

4. El postulado de la medida angular. El tercer postulado, de la medida angular, puede formularse como sigue:

POSTULADO III. Las semirrectas l, m,... por cualquier punto O pueden ser puestas en correspondencia (1, 1) con los números reales a(mod 2π) de tal forma que si $A \neq O$ y $B \neq O$ son puntos de l y m respectivamente, la diferencia $a_m - a_l$, (mod 2π) es $\angle AOB$.[5] Además, si el punto B en m varía continuamente sobre

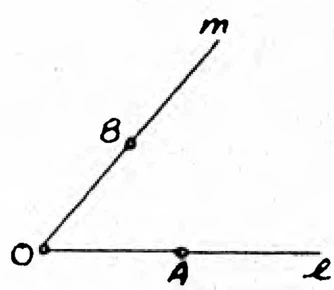


fig. 5

una recta r que no contiene el vértice O, el número a_m varía también continuamente.(6)

Según este postulado, es evidente que cualesquiera dos semirrectas l, m con extremo común O definen un $\angle lOm$, a saber $\angle AOB$, donde $A \neq O$ y $B \neq O$ están en l y m respectivamente.

Evidentemente el transportador materializa este postulado.

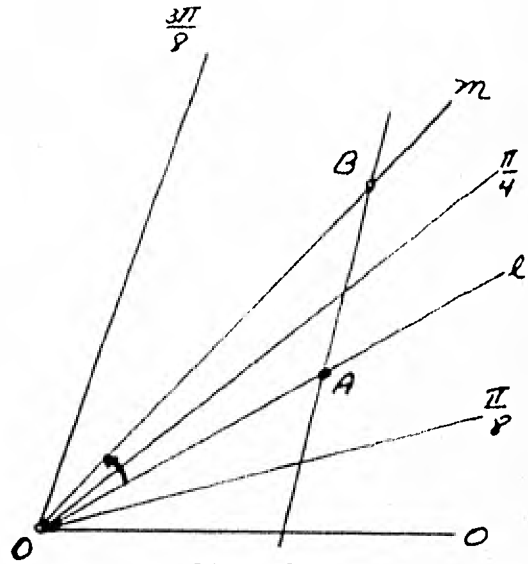


fig. 6

Veremos que el ángulo $\angle lOm$ es, según esta concepción, el ángulo dirigido de la semirrecta l a la semirrecta m que determina la posición de m relativa a l. El ángulo usual $\angle lOm$ está entonces dado por el valor numérico del menor residuo de $a_m - a_l$ (mod 2π). El ángulo signado usual se obtiene tomando alguna diferencia algebraica $a_m - a_l$ que es considerada como representativa del ángulo generado por la rotación continua de una semirrecta desde l a m.

Las siguientes conclusiones se desprenden de inmediato:

(a) $\angle lOm \equiv 0$ si y sólo si $l = m$.

(b) Si l, m, n son tres rectas cualesquiera por O, entonces

$$\angle lOm + \angle mOn \equiv \angle lOn.$$

(c) Si a' denota cualquier segundo sistema de numeración, para todas las semirrectas l por O y para alguna constante d, $a'_l \equiv a_l + d$ o bien $a'_l \equiv -a_l + d$.

Se dice que dos semirrectas l, m por O forman un ángulo llano si

$$\angle lOm \equiv \pi.$$

Es claro, por esta definición, que si $\angle lOm$ es un ángulo llano entonces también lo es $\angle mOl$.

Se dice que dos semirrectas l, m por O forman un ángulo **recto** si

$$lOm \equiv \frac{\pi}{2}$$

Es también claro que si $\angle lOm$ es un ángulo recto entonces lo es $\angle mOl$. En este caso decimos también que **m es** perpendicular a l y escribimos $m \perp l$. Se concluye que hay dos semirrectas m_1, m_2 $\perp$ a una semirrecta dada l en su extremo O, a saber, aquellas tales que:

$$\angle lOm_1 \equiv \frac{\pi}{2}, \qquad \angle lOm_2 \equiv -\frac{\pi}{2}.$$

Evidentemente m_1 y m_2 forman un ángulo llano.

5. El postulado de semejanza. El cuarto y último postulado, de semejanza, es el siguiente:

POSTULADO IV. Si en dos triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ y para alguna constante $k > 0$, $d(A', B') = k\, d(A, B)$, $d(A', C') = k\, d(A, C)$ y además $\angle B'A'C' = \pm \angle BAC$, entonces ocurre también que $d(B', C') = k\, d(B, C)$, $\angle C'B'A' = \pm \angle CBA$, $\angle A'C'B' = \pm \angle ACB$.

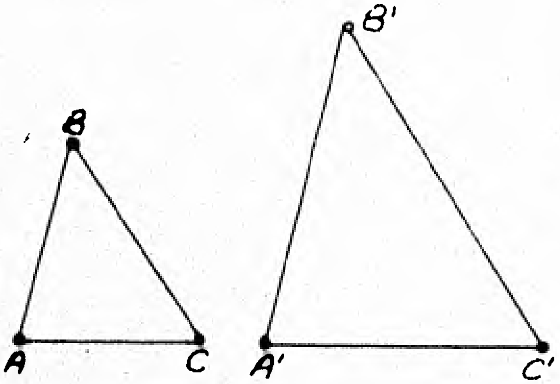


fig. 7a fig. 7b

En otras palabras, si definimos dos triángulos como **semejantes** en el caso de que los lados correspondientes sean proporcionales, y los ángulos correspondientes sean todos iguales o bien sean los ángulos de uno negativos de los ángulos correspondientes en el otro, este postulado establece que si $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen dos lados proporcionales y el ángulo incluído correspondiente igual, entonces son semejantes.

Una línea quebrada A B C ... K L consiste de una colección de segmentos AB, BC, ..., KL que pueden o no intersectarse en ciertos puntos. Los puntos A, B,..., L son los <u>vértices</u> de la línea quebrada. Si el punto inicial A y el punto final L coinciden, la línea quebrada es llamada un <u>polígono</u>.

Se dice que dos líneas quebradas o dos polígonos son semejantes si los lados correspondientes están en proporción y los ángulos correspondientes son todos iguales o los ángulos de uno son todos negativos de los correspondientes en el otro. Se concluye inmediatamente del postulado IV que si sólo A'B',...,K'L' y AB,...,KL respectivamente están en la misma proporción, mientras que ∠A'B'C',..., ∠J'K'L' y ∠ABC,..., ∠JKL respectivamente, son iguales o unos son los negativos de los otros, entonces las líneas quebradas o polígonos deben ser semejantes.

En general, cualesquiera dos figuras geométricas pueden ser llamadas <u>semejantes</u> si existe una correspondencia de puntos tal que todas las distancias correspondientes están en la misma proporción y los ángulos correspondientes sean todos iguales o unos sean todos los negativos de los otros.

De una manera análoga, dos líneas quebradas, o triángulos, o polígonos, o figuras serán llamadas <u>congruentes</u> si son semejantes con razón de proporcionalidad k = 1 para las distancias, de forma que las distancias correspondientes son iguales.

Hacemos notar que el postulado IV se aplica en el caso degenerado, cuando los puntos A, B, C ó A', B', C' están en una línea recta, ya que ABC, A'B'C' en ese caso también formarán triángulos (degenerados), de acuerdo a la definición.

Evidentemente, este último postulado es esencialmente una formulación del hecho de que cualquier figura geométrica puede ser aumentada o disminuída en una razón arbitraria k con una orientación prescrita arbitraria en el plano.

Al demostrar cómo estos postulados son suficientes como base para la geometría plana, probaremos algunos de los teoremas más sencillos y fundamentales, I-X, de los cuales se concluye inmediatamente que este conjunto de postulados caracterizan categóricamente el plano euclidiano. Por supuesto, una vez hecho esto, el desarrollo de la geometría se continúa en la forma usual.

6. <u>El teorema sobre los ángulos llanos.</u> Una primera consecuencia de los postulados I-IV es el siguiente teorema:

<u>TEOREMA I. El ángulo lOm es un ángulo llano si y sólo si l y m son las dos semirrectas de una sola recta n, que tienen O como extremo común</u>[7].

<u>DEMOSTRACION</u>. Supongamos primero que n es una recta con un punto O y las semirrectas correspondientes l y m. Demostraremos que $\angle lOm \equiv \pi$.

Escogemos A en l y B en m de tal forma que OA = OB = 1 (postulado I).

fig. 8

En los triángulos degenerados ΔOBA y ΔOAB tenemos

$$\angle OBA \equiv \angle OAB \equiv 0$$

y también

$$d(B, O) = d(A, O), \qquad d(B, A) = d(A, B)$$

por lo tanto ΔOBA y ΔOAB son congruentes, <u>i.e.</u>, semejantes con k = 1; por el postulado IV los ángulos correspondientes restantes son iguales

$$\angle BOA \equiv \angle AOB \equiv -\angle BOA$$

de donde

$$2\ \angle BOA \equiv 0.$$

De aquí $\angle BOA \equiv 0$ ó π. Pero la posibilidad $\angle BOA \equiv 0$ debe ser excluída ya que OA y OB son semirrectas distintas (postulado III). De lo cual inferimos que $\angle BOA \equiv \pi$, como queríamos.

Supongamos ahora que las semirrectas l y m se intersectan en O y forman un ángulo llano π. La otra semirrecta l' en la misma recta que l con extremo O forma también un ángulo llano π con l por lo anterior, de modo que

$$\angle lOm \equiv \pi, \qquad \angle l'Ol \equiv \pi.$$

Luego entonces

$$\angle l'Om \equiv \angle l'Ol + \angle lOm \equiv 0,$$

i.e., m debe coincidir con l'.

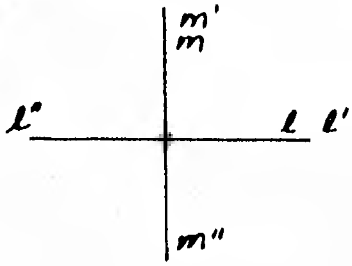


fig. 9

De los teoremas anteriores es inmediato que dos líneas rectas ilimitadas l y m son apropiadamente llamadas perpendiculares, $l \perp m$, si se intersectan en un punto O con semirrectas perpendiculares l', l" y m', m".

7. Los tres teoremas del triángulo. Probemos a continuación el conocido teorema siguiente:

TEOREMA II. Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes si dos pares de ángulos correspondientes son iguales o negativos unos de los otros.

DEMOSTRACION. Supongamos por ejemplo $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Definimos $k = \frac{A'B'}{AB}$ y sea C" el punto en la semirrecta A'C' tal que también $\frac{A'C''}{AC} = k$. Claramente, por el postulado IV, $\triangle A'B'C''$ es semejante a $\triangle ABC$ con ángulos iguales. Por lo tanto $\angle A'B'C'' \equiv \angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Por el postulado III, B'C' de estar entonces en la misma semirrecta que B'C". De aquí que C" está

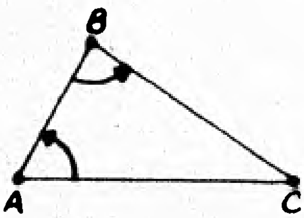


fig. 10a

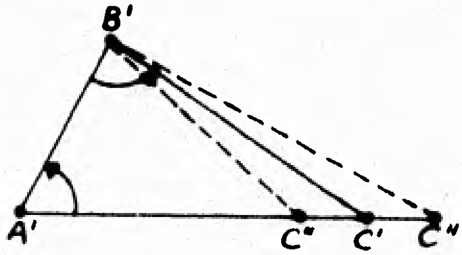


fig. 10b

en la línea B'C' y también en A'C'. Resulta obvio que $\triangle A'B'C'$ es necesariamente semejante a $\triangle ABC$ según afirma el teorema.

En segundo lugar probemos:

TEOREMA III. Si $d(A, C) = d(B, C)$ en ΔABC, entonces $\angle CAB \equiv -\angle CBA$, e inversamente.

DEMOSTRACION. Comparemos los triángulos ΔCAB y ΔCBA en los cuales
$d(C, A) = d(C, B)$,
$d(C, B) = d(C, A)$,
$\angle ACB \equiv -\angle BCA$. Estos triángulos son congruentes (postulado IV con $k = 1$), y
$\angle CAB \equiv -\angle CBA$.

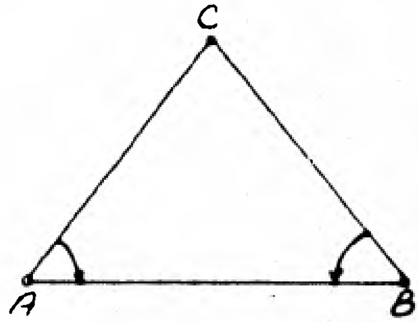


fig. 11

Para probar el inverso, suponemos $\angle CAB \equiv -\angle CBA$ y comparamos de nuevo los triángulos ΔCAB y ΔCBA en los cuales también

$$\angle BCA \equiv -\angle ACB.$$

Por lo tanto, por el teorema II, los triángulos son semejantes con $k = 1$. Resulta entonces que $d(A, C) = d(B, C)$, como se afirma.

Un triángulo con dos lados iguales es llamado un triángulo isósceles.

En tercer lugar probemos:

TEOREMA IV. Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

DEMOSTRACION. Construyamos $\Delta A'B'C'$ semejante a ΔABC y tal que $\angle C''A'B'$ sea de signo opuesto a $\angle C'A'B'$ (postulado IV). Esto es siempre posible a menos que $\angle C'A'B'$ ó $\angle CAB \equiv 0$ ó π. Por el momento excluimos tales casos, de manera que C' y C'' son distintos. Obviamente, bastará probar que $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A'B'C''$ son semejantes; es claro que sus lados correspondientes son iguales.

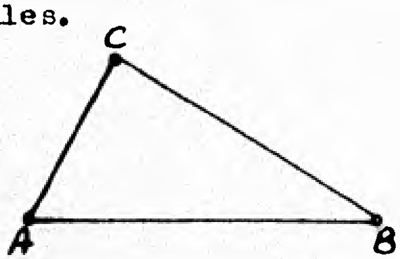


fig. 12a

Pero por el teorema III aplicado a los triángulos isósceles $\Delta C'A'C''$ y $\Delta C'B'C''$, tenemos
$\angle A'C''C' \equiv -\angle A'C'C''$,
$\angle C'C''B' \equiv -\angle C''C'B'$,

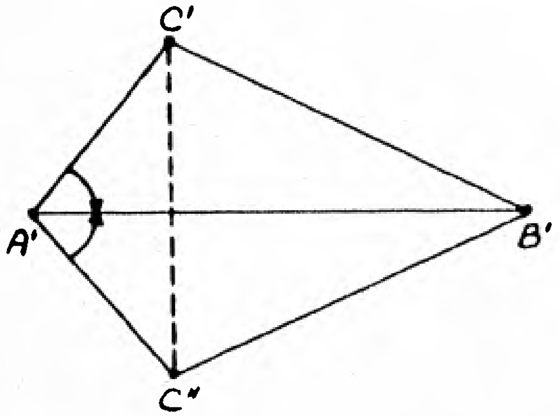


fig. 12b

de donde al sumar

$$\angle A'C'B' \equiv \angle A'C"B'.$$

De aquí que, los ángulos en $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A'B'C"$ con vértices en C' y C" son negativos uno del otro, y estos triángulos son semejantes.

Evidentemente, la misma demostración se aplica siempre y cuando podamos tomar C" $\neq$ C'. Pero tal posición de C" ocurrirá a menos que tengamos $\angle CAB \equiv \angle C'A'B' \equiv 0$ ó π. En este caso, el teorema establecido es obviamente verdadero por el postulado IV.

El postulado IV y los teoremas II-IV forman las bases usuales para los teoremas de congruencia y semejanza, que no necesitamos desarrollar más.

8. El teorema de la suma de ángulos. Ahora puede ser inmediatamente establecido el siguiente teorema:

TEOREMA V. En cualquier triángulo ΔABC: $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB \equiv \pi$. Además, si ΔABC no es degenerado los tres ángulos pueden ser tomados del mismo signo entre 0 y π. (9)

DEMOSTRACION. Para demostrar la primera afirmación sean K, L, M los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente. Observemos primero que, de acuerdo con el postulado IV, ΔAML, ΔMBK, ΔLKC son semejantes a ΔABC con $k = 1/2$ y ángulos iguales. Tenemos entonces que $d(L, M) = 1/2\, d(B, C)$, $d(M, K) = 1/2\, d(C, A)$, $d(K, L) = 1/2\, d(A, B)$. Por lo tanto, el ΔKLM es congruente a cada uno de los triángulos pequeños por el teorema IV. Si ahora escribimos

$$\angle ABC \equiv \beta, \quad \angle BCA \equiv \gamma, \quad \angle CAB \equiv \alpha,$$

tenemos

$$\angle MKL \equiv \pm\alpha, \quad \angle KLM \equiv \pm\beta, \quad \angle LMK \equiv \pm\gamma,$$

donde el signo + ó - siempre será el mismo.

Ahora, el ángulo

$\angle AMB \equiv \angle AML + \angle LMK + \angle KMB$

$\equiv \beta + \angle LMK + \alpha$.

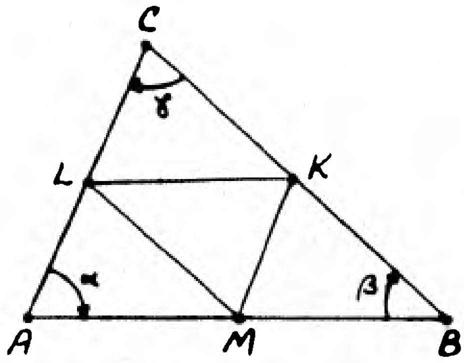


fig. 13

es un ángulo llano. Obtenemos entonces la relación deseada si el signo es + .

Sin embargo, en caso de que el signo sea - , tendremos

$\pi \equiv \beta - \gamma + \alpha$ e igualmente $\pi \equiv \gamma - \alpha + \beta$

$\pi \equiv \alpha - \beta + \gamma$

de donde, al sumar $3\pi \equiv \pi \equiv \alpha + \beta + \gamma$

(como antes) así que de las ecuaciones anteriores

$2\alpha \equiv 2\beta \equiv 2\gamma \equiv 0$,

y por lo tanto, $\alpha \equiv 0$ ó π, $\beta \equiv 0$ ó π, $\gamma \equiv 0$ ó π.

Por lo cual el signo es + en éste y en todos los demás casos.

Para establecer la segunda parte procedamos como sigue:

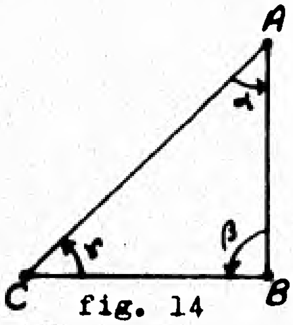


fig. 14

La segunda parte se cumple para cualquier ΔABC rectángulo con ángulo recto en B. De hecho, podemos ordenar A, B, C de tal forma que $\angle ABC \equiv \frac{\pi}{2}$ Hagamos tender ahora C hacia B por la línea BC. $\angle CAB$ varía continuamente (postulado III, parte 2), y nunca toma el valor 0 ó $\frac{\pi}{2}$ (mod 2π) ya que C nunca está en la línea AB y además $\angle BCA \not\equiv 0$ (usamos el teorema V, parte 1). Luego, el menor residuo α de $\angle CAB$ debe ser numéricamente menor que $\frac{\pi}{2}$. De la misma manera, el menor residuo γ de $\angle BCA$ es numéricamente menor que $\frac{\pi}{2}$. Ahora tenemos

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma \equiv \pi \qquad \text{ó} \qquad \alpha + \gamma \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Esto sólo puede ocurrir si estos menores residuos son positivos. De aquí que, la segunda parte del teorema se cumple para cualquier triángulo rectángulo.

Un razonamiento semejante valdrá para cualquier ΔABC no rectángulo a menos que al hacer tender hacia C, por ejemplo, $\angle CAB$ se convierta en un ángulo recto en D. De hecho, si esto no sucede para algún caso, deberíamos concluir que los menores residuos α, β, γ de $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ son numéricamente menores que $\frac{\pi}{2}$. Pero entonces tendríamos también

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi$$

de tal forma que los menores residuos son todos necesariamente del mismo signo (+ ó −), y la conclusión es la misma que antes.

Pero si existe tal punto D, vemos de inmediato, a partir del triángulo rectángulo ΔADB, que $\angle BAD$ y $\angle DBA$ pueden ser tomados como $<\frac{\pi}{2}$ numéricamente, y del mismo signo que $\angle ADB \equiv \pm\frac{\pi}{2}$, con

$$\angle BAD + \angle DBA \equiv \pm\frac{\pi}{2}.$$

De la misma forma, del triángulo ΔCDA obtenemos

$$\angle ACD + \angle DAC \equiv \angle CDA \equiv \pm\frac{\pi}{2}.$$

Sin embargo, ya que tenemos

$$\angle ADB + \angle CDA \equiv \angle CDB \equiv \pi$$

aparece el mismo signo $\pm$ en ambos casos. Entonces al sumar

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA \equiv \pm\pi$$

donde los menores residuos en el miembro de la izquierda son del mismo signo $\pm$ y numéricamente menores que π.

Por supuesto sólo un residuo puede exceder $\frac{\pi}{2}$.

9. <u>Una propiedad del bisector perpendicular</u>. El <u>bisector perpendicular</u> de un segmento AB es la recta $\perp AB$ en el punto medio D de AB, <u>i.e.</u>, el punto D para el cual $d(A, D) = d(D, B)$. Tal punto existe por el postulado **I.** El bisector perpendicular tiene la siguiente importante

propiedad de "lugar geométrico":

TEOREMA VI. Todos los puntos P equidistantes de A y B ($A \neq B$) y sólo estos, están en el bisector perpendicular de la línea AB.

DEMOSTRACION. Dados A, B y un punto P tal que $d(P, A) = d(P, B)$, sea M el punto medio de AB y unamos P con M. Los dos triángulos ΔAMP y ΔBMP son entonces congruentes por el teorema IV, ya que

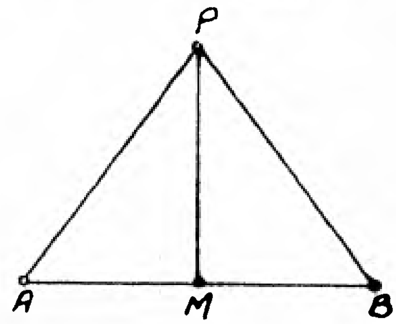


fig. 15

$d(A, P) = d(B, P)$, $d(A, M) = d(B, M)$, $d(M, P) = d(M, P)$.
Luego $\angle MPB \equiv \pm \angle MPA$. Pero debe tomarse el signo - ya que A y B son distintos. Por lo tanto, también

$$\angle BMP \equiv -\angle AMP \equiv \angle PMA.$$

Y de aquí

$$\angle AMB \equiv \angle AMP + \angle PMB \equiv 2\angle AMP$$

ó

$$\pi \equiv 2\angle AMP$$

En consecuencia

$$\angle AMP \equiv \pm \frac{\pi}{2}$$

i.e., el punto P está en el bisector perpendicular de AB.

Más aún, supongamos que P es cualquier punto en el bisector perpendicular, entonces en los triángulos ΔAMP, ΔBMP

$\angle AMP \equiv -\angle BMP$, $d(A, M) = d(M, B)$, $d(M, P) = d(M, P)$.

Luego por el postulado IV, los triángulos son congruentes, y por ende $d(A, P) = d(B, P)$. Esto completa la demostración.

10. La existencia de una única perpendicular de un punto a una recta. Probaremos ahora el siguiente teorema:

TEOREMA VII. Existe una y sólo una recta perpendicular a la recta l y que contiene un punto dado P.

DEMOSTRACION. Para P en l la afirmación es obviamente verdadera. Para P no en l procedemos de la siguiente manera: Sean A, B dos puntos distintos de l. Construyamos $\triangle AP'B$, congruente a $\triangle APB$ con P' distinto de P; esto lo hacemos escogiendo un rayo AP' de tal forma que $\angle P'AB \equiv -\angle PAB$ y tomando P' tal que $d(A, P) = d(A, P')$,

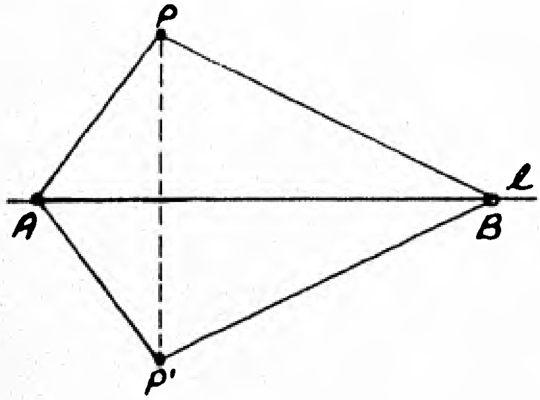


fig. 16

determinando así $\triangle AP'B$. Aquí por supuesto $P \neq P'$. Pero A y B están a la misma distancia de P y P' y por consiguiente están en el bisector perpendicular de PP'. Por lo tanto la recta PP' y la recta AB son $\perp$, y obtenemos así una perpendicular a AB por P. Si hubiera una segunda perpendicular a AB por P, tendríamos un triángulo $\triangle PMM'$ donde PM y PM' son las perpendiculares en cuestión, con M y M' en l. Pero, por el teorema V,

$$\pi \equiv \angle MM'P + \angle M'PM + \angle PMM'$$

ó

$$\pi \equiv \pm\frac{\pi}{2} + \angle M'PM \pm \frac{\pi}{2}$$

de donde

$$\angle M'PM \equiv 0 \text{ ó } \pi$$

i.e., M'P y MP serían la misma línea recta, contrario a la hipótesis.

11. El teorema de Pitágoras. Podemos ahora demostrar el teorema de Pitágoras:

TEOREMA VIII. En cualquier $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle ACB \equiv \pm\frac{\pi}{2}$, $d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(C, B)^2$ ó $c^2 = a^2 + b^2$.

DEMOSTRACION. Si agrandamos este triángulo en la proporción de b a 1 (postulado IV), se transforma en

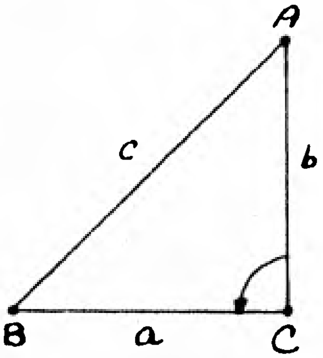


fig. 17

un triángulo rectángulo con lados ab, b , bc semejante al primero, con k = b y el mismo ángulo $\angle ACB$ en el nuevo triángulo A'B'C' así obtenido.

De la misma manera, un triángulo $\Delta A''B''C''$ con k = a tiene lados a , ab, ac respectivamente y $\angle A''C''B'' \equiv \angle ACB$. Si estos triángulos fueran "acomodados juntos" (véase fig. 18) de tal forma que B', C' y A", C" respectivamente sean los extremos de un segmento dado, es claro que

$$\angle A'C'B'' \equiv \angle A'C'B' + \angle B'C'B'' \equiv \pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \equiv \pm\pi.$$

Por lo tanto, C' está en la recta A'B" entre A' y B". Además

$$\angle B''B'A' \equiv \angle B''B'C' + \angle C'B'A'$$
$$\equiv \angle BAC + \angle CBA \equiv \pm \frac{\pi}{2},$$ por el teorema V.

Resulta entonces que $\Delta A'B''B'$ es semejante a ΔABC con ángulos de signo contrario.

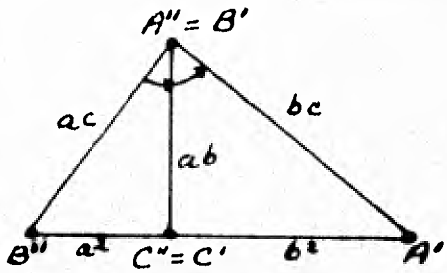


fig. 18

Pero por otro lado es claro que el factor de escala k, es k = c, ya que las distancias d(A, C), d(C, B) se convierten en bc y ac en el nuevo triángulo. El tercer lado es entonces c^2. Comparando ahora: $c^2 = a^2 + b^2$ (postulado I).

12. <u>Paralelas</u>. <u>Redes Rectangulares</u>. Una propiedad fundamental de las rectas paralelas en el plano es el siguiente:

<u>TEOREMA IX</u>. <u>Una y sólo una recta paralela a una recta dada contiene un punto dado</u> P.

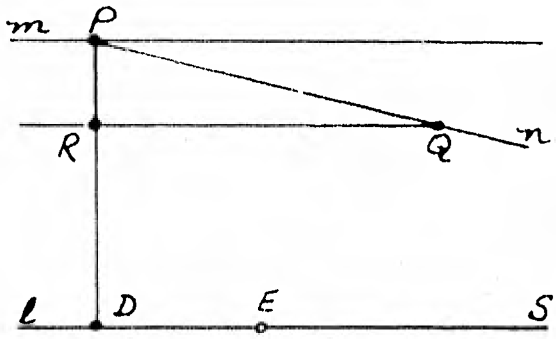


fig. 19

DEMOSTRACION. Si P está en l, este hecho es obvio: l es paralela a sí misma.

Si P no está en l, consideremos la única recta PD $\perp$ l, y la recta m $\perp$ PD en P.

Esta recta m no puede intersectar a l, ya que de otra forma habría dos perpendiculares desde el punto de intersección a PD, intersectándola en P y D, lo cual contradice el teorema VII.

Por lo tanto la recta m es $\parallel$ a l. Falta demostrar que ésta es la única paralela por P.

Si hubiera otra recta n, escojamos un punto Q $\neq$ P en n, y desde Q construyamos la perpendicular a PD que intersecta a ésta última en R. Tracemos, en la semirrecta DE de l tal que $\angle QRP \equiv \angle EDP \pm \frac{\pi}{2}$, una distancia DS tal que

$$\frac{SD}{PD} = \frac{QR}{PR}$$

El $\triangle$PDS es entonces semejante a $\triangle$PRQ con ángulos iguales (postulado IV). Por consiguiente, la semirrecta PS coincide con PQ y la recta n no es $\parallel$ a l, ya que intersecta a l en S. Esto contradice la suposición.

Es inmediato del teorema IX que si l, m, n son tres rectas cualesquiera tales que l $\parallel$ m y m $\parallel$ n entonces también l $\parallel$ n. Porque si l intersecta a n habría dos paralelas a m por su punto de intersección.

El conjunto de rectas paralelas a una recta dada l, y en consecuencia entre sí mismas, es llamado un sistema de paralelas, y está determinado por cualquiera de sus rectas. Una y sólo una recta de cualquier sistema pasa por cualquier punto del plano.

Cualquier recta que no esté en el sistema es llamada una transversal del sistema y por supuesto intersecta a todas las rectas del sistema de paralelas.

Es inmediato que una recta perpendicular a una recta de tal sistema es perpendicular a todas, y que cualesquiera dos perpendiculares son ellas mismas paralelas. Por lo tanto obtenemos una red rectangular formada por dos sistemas de paralelas mutuamente perpendiculares en la cual una y sólo una recta de cada sistema pasa por cualquier punto. Claramente, tal red está únicamente definida por cualquier recta l de cualquier sistema.

Dos pares de rectas de cada sistema l_1, l_2 y m_1, m_2 se intersectan en cuatro puntos distintos:

l_1, m_1 en P; l_1, m_2 en S; l_2, m_1 en Q; l_2, m_2 en R.

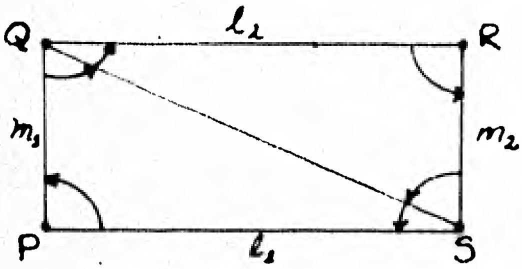


fig. 20

El polígono de cuatro lados PQRS es un rectángulo por definición, ya que los cuatro ángulos en P, Q, R, S son ángulos rectos.

TEOREMA X. En cualquier rectángulo PQRS los dos pares de lados opuestos PQ, RS y PS, RQ son iguales, y los cuatro ángulos $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RSP$, $\angle SPQ$ son todos congruentes a $\frac{\pi}{2}$ ó a $-\frac{\pi}{2}$.

DEMOSTRACION. La verdad de la primera parte del teorema es una consecuencia inmediata de la aplicación del postulado IV a un par de triángulos tales como $\triangle SPQ$, $\triangle QRP$: como estos triángulos son evidentemente triángulos rectángulos congruentes, PS = QR.

La segunda parte del teorema puede demostrarse como sigue:

Por el teorema V de la suma de ángulos, aplicado a los triángulos $\triangle SPQ$, $\triangle QRP$, tenemos que la suma de los cuatro ángulos rectos es $\equiv 2\pi$. Además, por el mismo teorema, $\angle RSQ$ y $\angle SQR$ son numéricamente $< \frac{\pi}{2}$ y del mismo signo que el ángulo recto $\angle QRS$; de la misma manera $\angle QSP$ y $\angle PQS$ son numéricamente $< \frac{\pi}{2}$ y del mismo signo que el ángulo recto $\angle SP$. Pero tenemos

$$\angle RSQ + \angle QSP \equiv \pm \frac{\pi}{2}$$

de tal forma que los menores residuos de $\angle RSQ$ y $\angle QSP$ deben tener el mismo signo. Consecuentemente, los menores residuos de todos los ángulos escritos tienen el mismo signo $\pm$, y los cuatro ángulos rectos del rectángulo son todos congruentes a $+\frac{\pi}{2}$ ó a $-\frac{\pi}{2}$.

De este teorema se desprende que podemos hablar de un sentido o dirección positiva en las rectas de un sistema de paralelas, a saber, el que se obtiene asignando los mismos números x_R al punto R en l que a los puntos correspondientes S de intersección con otra recta cualquiera m del sistema, i.e., $x_S = x_R$.

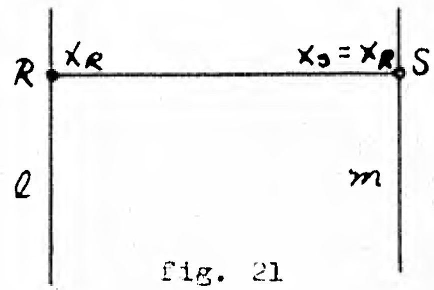


fig. 21

En general, cuando hablamos de un sistema de paralelas nos referimos a un sistema dirigido de este tipo. De la misma manera, pensamos en una red rectangular como dirigida, i.e., de cada uno de sus sistemas componentes como dirigido.

Resulta entonces del teorema anterior que en una red rectangular dirigida, las rectas dirigidas l de un sistema forman con las rectas dirigidas m del otro sistema precisamente el mismo ángulo $\frac{\pi}{2}$ ó $-\frac{\pi}{2}$ en todos los casos.

Aquí pueden demostrarse de inmediato los teoremas usuales relacionados con rectas paralelas, por ejemplo el hecho de que una transversal dirigida n de un sistema de paralelas dirigidas, las intersecta en el mismo ángulo. En general, los teoremas ordinarios de la geometría euclidiana que aún no han sido deducidos, se desprenden como ejercicios fáciles de los resultados hasta ahora obtenidos y no es necesario proseguir en esta dirección.

13. Coordenadas rectangulares. Estamos ahora preparados para definir un sistema coordenado rectangular (x, y), teniendo por ejes las rectas perpendiculares dirigidas Ox, Oy que se intersectan en el origen O.

Escojamos un sistema de numeración a lo largo de Ox, Oy tal que O esté marcado 0 en ambas rectas, y los números crezcan algebraicamente en la dirección positiva. Tracemos las perpendiculares únicas de P a Ox y Oy respectivamente, intersectando a estas rectas en P_x y P_y. Las coordenadas rectangulares de x_P y y_P asignados a P_x y P_y respectivamente. Evidentemente estos números están únicamente determinados.

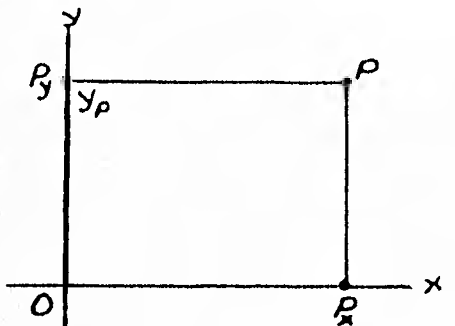


fig. 22

Puede ahora demostrarse, sobre la base de los teoremas antes establecidos, que la "ecuación de cualquier línea recta" tiene la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A y B no son ambos 0, y que inversamente, cualquier ecuación de esta forma representa una línea recta.

Además el teorema de Pitágoras muestra que

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

14. Angulo euclidiano. Con el objeto de mostrar que el conjunto anterior de postulados es categórico, falta indicar brevemente porqué nuestro ángulo supuesto debe coincidir con el ángulo euclidiano (mod 2π).

Para este fin observamos que el círculo está definido de la manera usual, como el lugar geométrico de todos los puntos P a una distancia fija r (el radio) de un punto fijo O (el centro). Evidentemente, si O es tomado como el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, la ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

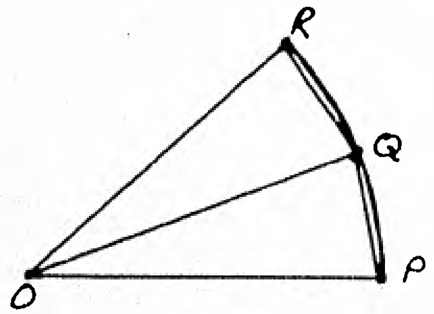


fig. 23

Sobre la base de los teoremas anteriores, la longitud de arco euclidiano puede ser definida de la manera usual y el ángulo POQ (P, Q en el círculo) será definida como el arco PQ sobre el círculo unitario ($r = 1$). Además, no es difícil demostrar, por el postulado III parte 2, que $\angle POQ$ varía continuamente con variaciones continuas de P ó Q.

Consideremos ahora la razón $\dfrac{\angle POQ}{\text{arc } PQ}$ para una posición fija de P y para Q variable. Es fácil demostrar que si el arc PQ es multiplicado por cualquier razón entera $m : 1$ entonces también $\angle POQ$ es multiplicado en la misma razón $m : 1$. Por ejemplo, si la longitud de arco se duplica, de tal manera que arc PQ = arc QR, entonces $d(P, Q) = d(Q, R)$, por supuesto, de tal forma que $\angle POQ \equiv \angle QOR$ y $\angle POR \equiv \angle POQ + \angle QOR \equiv 2\angle POQ$. Por lo tanto el resultado establecido se cumple para $m = 2$

$$\frac{\angle POR}{\text{arc } PR} = \frac{\angle POQ}{\text{arc } PQ}.$$

El mismo tipo de demostración puede ser extendido obviamente para $m = 3, 4, \ldots$.

Inversamente tenemos que si arc PQ es dividido en la razón $1 : n$ también $\angle POQ$ es dividido en esta razón. Consecuentemente, si la razón tiene un valor k para arc PQ = s_0 tiene el mismo valor para arc PQ $= \dfrac{m}{n} s_0$, donde m y n son cualesquiera enteros positivos. En virtud de la segunda parte del postulado III resulta, sin embargo, que la razón es una función continua de s, de tal manera que $\dfrac{\angle POQ}{\text{arc } PQ}$ es una constante k para toda $Q \neq P$. Pero si arc $PQ = \pi$, tenemos también que $\angle POQ = \pi$, luego esta razón es 1. Por lo tanto, el ángulo $\angle POQ$ (orientado) coincide con la longitud de arco PQ (orientado) subtendida en el círculo unitario.

<u>En conclusión los postulados</u> I-IV <u>forman un sistema categórico</u>.

N O T A S

(1) Recibido el 8 de Agosto de 1931.

(2) El origen, la naturaleza y la influencia de la relatividad, Macmillan (1926), Capítulo II, La naturaleza del espacio y el tiempo. Véase también un artículo que escribimos mi colega el profesor Ralph Beatley y yo, "Un nuevo enfoque de la geometría elemental", Yearbook of the National Association of Mathematics Teachers, 1929.

(3) I.e., A no es O, y B no es O.

(4) Es, por supuesto, verdadero sólo para la geometría plana.

(5) De acuerdo con la notación matemática usual el símbolo $d \pmod{2\pi}$, léase d módulo 2π, representa el conjunto infinito $d + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ que tiene el mismo residuo que d cuando es dividido por 2π. El menor de estos no excede π en valor absoluto y es llamado el menor residuo.

(6) De manera más precisa, $\lim a_m = a_\ell$ si $\lim_{B \to A} d(B, A) = 0$ para puntos B, A de la recta m (véase fig. 6). Es la segunda parte del postulado III la que excluye las posibilidades no arquimedianas: desde un punto de vista elemental, esta segunda parte puede muy bien omitirse en un primer estudio de la geometría.

(7) Desde el punto de vista elemental el teorema I puede ser presentado como un postulado independiente, complementario al postulado III.

(8) Esto es, los menores residuos, mod 2π, son de signo opuesto.

(9) La segunda parte de este teorema puede considerarse evidente desde el punto de vista elemental.

I N D I C E