UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA DE MATEMATICO

"SOBRE LAS PRIMERAS DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS LIMITE EN PROBABILIDAD"

JAIME FRANCISCO LARA GUERRERO.
JUAN GONZALEZ HERNANDEZ

ENERO 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCION

Este trabajo nace de una inquietud que tenemos en torno a una cuestión fundamental para la comprensión cabal de la Probabilidad, y esta es: ¿Qué es lo que ha hecho que se desarrolle la Probabilidad? ¿Cuál es el determinante principal (sí existe) del desarrollo de la Probabilidad? Para tratar de contestar esta pregunta hicimos un plán de trabajo que consta de tres partes:

1.- Revisar las demostraciones originales de las principales proposiciones en probabilidad.

2.- Estudiar las aplicaciones y las diferentes concepciones que han habido acerca de conceptos tales como el azar, la Probabilidad, etc., así como las distintas concepciones que de ellas se derivan.

3.- Investigar la relación que ha existido entre la Probabilidad y las Matemáticas en general, con las demás Ciencias y con la Sociedad en su Conjunto.

De todo este plan original (que esperamos llegar a completar posteriormente) únicamente pudimos llegar al Primer Punto, y eso, parcialmente.

El material que se incluye aquí es el siguiente:

Demostración de Bernoulli de su Teorema, la derivación que hace De Moivre del Teorema Central del Límite, la derivación de la Fórmula de De Moivre-Stirling por el método de Laplace, demostración de Poisson del Teorema Central del Límite en la forma que obtiene De Moivre, la derivación de Poisson a la distribución de Poisson, la demostración de Chebyshev al Teorema de Poisson, la ley de los grandes números en la forma que obtiene Chebyshev y la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev.

Este trabajo es autocontenido y la herramienta que se utiliza es Cálculo, Funciones Analíticas de los Reales y algunas fórmulas básicas de Variable Compleja.

Todos los pasos que en las demostraciones originales, desde un punto de vista actual, no fueron hechos rigurosamente, los hemos justificado, así como todos los que ellos no hicieron y que ofrecen alguna dificultad, esto con el fin de que pueda ser leído por un alumno que haya cursado la mitad de la Carrera de Matemáticas.

Deseamos puntualizar que el hecho de que firmemos nosotros dar es puramente formal (para hacer un cierto trámite), ya que en realidad este trabajo es el resultado de una parte de la labor cotidiana de un Grupo, en el que participan entre otros Miguel Angel García, Begoña Fernández y nosotros.

Para terminar, queremos agradecer ante todo a Lucina Parra Aguilar, Ma. Luisa Espinosa González y Amalia Zaragoza

Ruvalcaba, quienes se encargaron de mecanografiar este trabajo, a Jésus López Estrada, Santiago López de Medrano y Luis Briseño con quienes llegamos a discutir algunos puntos; y a Joaquín -- Diez Canedo que nos ayudó en cuestiones de redacción.

ÍNDICE

CAPITULO I

LA DERIVACIÓN QUE HACE BERNOULLI DE LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

Se presenta a continuación la demostración(1) hecha por Jacob Bernoulli(1654-1705) al siguiente teorema.

Teorema: Consideremos un experimento el cual tiene dos posibles resultados que llamaremos éxito y fracaso. Supongamos que el numéro de casos favorables para éxito es r y para fracaso s. La probabilidad de éxito es $P(E) = \frac{r}{t}$ ya que todos los casos son igualmente posibles.

Sea $t = r + s$, si hacemos nt experimentos independientes entre si, tales que P(E) permanezca constante, tendremos:

$$\lim_{nt \to \infty} \frac{\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| < \frac{1}{t}\right\}}{\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| \geq \frac{1}{t}\right\}} = \infty$$; Donde #(E) = número de éxitos en nt experimentos

A partir de esto, como $P\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| < \frac{1}{t}\right\} + P\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| \geq \frac{1}{t}\right\} = 1$,

Tenemos:

$$\lim_{nt \to \infty} P\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| < \frac{1}{t}\right\} = 1$$;(Que es una forma mas conocida en la actualidad)

(1) En el trabajo de Bernoulli, la demostración se concluye de 5 lemas previos, cuya formulación incluye algunos términos matemáticos poco precisos. Estos enunciados de Bernoulli así como el bosquejo de las demostraciones, fueron tomados del libro de Maistrov [1]. Nos vimos pues en la necesidad de modificar los enunciados de algunos lemas cuidando de no alterar la esencia de las afirmaciones, así como de precisar y hacer más explícitos algunos pasos de las demostraciones.

Como se podrá observar, si bien es cierto que la demostración es bastante laboriosa, tiene la cualidad de utilizar únicamente herramienta matemática muy sencilla aunada al hecho de que deja claro cuál es el significado del teorema. La idea de la demostración es la siguiente.

Bernoulli cuenta los casos favorables al evento $\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| < \frac{1}{t}\right\}$, y al evento $\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| \geq \frac{1}{t}\right\}$, utilizando para ello algunas propiedades del binomio $(r + s)$ elevado a la potencia nt.

Al desarrollar la expresión $(r + s)^{nt}$ tenemos:

$$(r+s)^{nt} = \binom{nt}{0} r^0 s^{nt} + \binom{nt}{1} r^1 s^{nt-1} + \dots + \binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns} + \dots + \binom{nt}{nt-1} r^{nt-1} s^1$$

$$+ \binom{nt}{nt} r^{nt} s^0$$

Supongamos que tenemos un experimento con dos posibles resultados que llamaremos éxito y fracaso que tenemos además r casos favorables para éxito y s para fracaso y que hacemos nt experimentos independientes entre sí:

Definamos los eventos $$A_{nt} = \left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| < \frac{1}{t}\right\}$$

y

$$B_{nt} = \left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| \geq \frac{1}{t}\right\}$$

Si consideramos todos los posibles resultados en nt experimentos, habrá cierto número de casos favorables al evento A_{nt} y los restantes serán favorables al evento B_{nt}, siendo todos ellos igualmente probables.

Ahora bien, el número de casos en que se obtienen K éxitos y nt-K fracasos es $\binom{nt}{K} r^k s^{nt-k}$, el cuál es un término del desarrollo $(r+s)^{nt}$.

Basándose en esta relación, Bernoulli demuestra que el cociente del número de casos favorables al evento A_{nt} entre el número de casos favorables al evento B_{nt} crece más allá de toda cota cuando nt tiende a infinito.

Esto lo hace, a grandes rasgos, de la siguiente forma. El término mayor del desarrollo de $(r+s)^{nt}$ es $\binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}$. Denotemos por M a este término, por L a $\binom{nt}{nr-n} r^{nr-n} s^{ns+n}$ y por λ a $\binom{nt}{nr+n} r^{nr+n} s^{ns-n}$, es decir L y λ son los términos distantes de M en n lugares a ambos lados. Al hacer el cociente de la suma de los términos comprendidos entre L y λ dividido entre la suma de todos los términos restantes, éste es cada vez mayor, conforme nt tiende a infinito.

Por otro lado, los términos comprendidos entre L y λ satisfacen $nr - n < \#(E) < nr + n$, es decir, son precisamente el número de casos favorables al evento A_{nt} y los términos restantes son los casos favorables al evento B_{nt} de donde

$$\lim_{nt\to\infty} \frac{A_{nt}}{B_{nt}} = \infty.$$

Demostración

Lema 1 Considere las dos series

0,1,2,.....,r - 1, r, r + 1,.....,r + s

0,1,2,.....,nr - n,.....,nr + n,.....,nr + ns

a) Conforme n aumenta:

(1) El número de términos mayores que nr - n y menores o iguales que nr, se incrementa.

(2) El número de términos mayores que nr, y menores que nr + n, se incrementa. Esto también vale para el número de términos menores o iguales que nr - n y para el número de términos mayores o iguales que nr + n.

b) No importa cuán grande sea n, el número de términos mayores o iguales que nr + n, es S + (s - 1) veces el número de términos mayores que nr y menores que nr + n.

c) El número de términos menores o iguales que nr - n es, 1 + (r - 1) veces el número de términos mayores que nr - n y menores o iguales a nr.

a) Demostración. El número de términos de (1) es (nr + 1) - (nr - n + 1) = n. El número de términos de (2) es (nr + n) - (nr + 1) = n - 1, es claro que si n se incrementa el número de términos de (1) y (2) se incrementa. Las demostraciones de las otras aseveraciones son muy similares.

b) <u>Demostración</u>. El número de términos mayores o iguales que $nr + n$ es $(nr + ns + 1) - (nr + n) = n(s - 1) + 1$ y $s + (s - 1)$ veces el número de términos mayores que nr y menores que $(nr + n)$ es: $S + (s-1)[(nr + n) - (nr + 1)] = S + (s-1)(n-1) = n(s-1)+1$

La demostración de (c) es análoga

Lema 2 El número de términos en la expansión de $(r + s)^n$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ es $n + 1$

Demostración: $(r + s)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$ y esta suma consta de $n + 1$ términos.

Lema 3 Si un binomio $r + s$ es elevado al menos a una potencia $t = r + s$ ó $nt = nr + ns$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Entonces:

a) Existe un término mayor que es $M = \binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}$ y el término más cercano a M de cada lado es más grande que los términos más distantes a M del mismo lado.

b) Sea $t_k = \binom{nt}{k} r^k s^{nt-k}$, $1 \leq k \leq nt$

Entonces $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-i}} < \dfrac{t_{nr-i}}{t_{nr-2i}}$ $\quad 1 \leq i \leq \left[\dfrac{nr}{2}\right]$ (2)

(2) $[X]$ es la función máxima entero.

$$y \quad \frac{t_{nr}}{t_{nr+i}} < \frac{t_{nr+i}}{t_{nr+2i}} \ , \quad 1 \leq i \leq \left[\frac{ns}{2}\right]$$

a) Demostración: Sea $j \in \mathbb{N}$, Si $0 \leq j \leq nr-1$

$$\binom{nt}{j} r^j s^{nt-j} < \binom{nt}{j+1} r^{j+1} s^{nt-(j+1)} \Longleftrightarrow \frac{j+1}{(nt-j)} < \frac{r}{s}$$

Ahora bien $0 \leq j \leq nr-1$ Entonces $j+1 \leq nr$ Por lo tanto $\frac{j+1}{nt-j} \leq \frac{nr}{nt-j}$

$\leq \frac{nr}{(nt-(nr-1))} = \frac{nr}{ns+1} < \frac{nr}{ns} = \frac{r}{s}$ Concluimos $\frac{(j+1)}{(nt-j)} < \frac{r}{s}$

Si $nr \leq j \leq nt$. Como $\binom{nt}{j} r^j s^{nt-j} > \binom{nt}{j+1} r^{j+1} s^{nt-(j+1)} \Longleftrightarrow \frac{s}{r} > \frac{(nt-j)}{(j+1)}$

$\frac{s}{r} = \frac{ns}{nr} \geq \frac{ns}{j} > \frac{ns}{j+1} = \frac{nt-nr}{j+1} \geq \frac{nt-j}{j+1}$ Por consiguiente $\frac{s}{r} > \frac{(nt-j)}{j+1}$

b) Demostraremos un caso más general, a saber,

$$\frac{t_k}{t_{k-i}} < \frac{t_{k-i}}{t_{k-2i}} \quad 2 \leq k \leq nt, \ 1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$$

$$y \quad \frac{t_k}{t_{k+i}} < \frac{t_{k+i}}{t_{k+2i}} \ 0 \leq k \leq nt-2, \ 1 \leq i \leq \left[\frac{nt-k}{2}\right].$$

$$\frac{t_k}{t_{k-i}} < \frac{t_{k-i}}{t_{k-2i}} \Longleftrightarrow \frac{\binom{nt}{k} r^k s^{nt-k}}{\binom{nt}{k-i} r^{(k-i)} s^{nt-(k-i)}} < \frac{\binom{nt}{k-i} r^{(k-i)} s^{nt-(k-i)}}{\binom{nt}{k-2i} r^{k-2i} s^{nt-(k-2i)}}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(nt-k+i)\ (nt-k+i-1)\ldots(nt-k+1)}{k(k-1)\ldots\ldots\ldots(k-i+1)} < \frac{(nt-k+2i)(nt-k+2i-1)\ldots(nt-k+i+1)}{(k-i)(k-i-1)\ldots(k-2i+1)}$$

la demostración del otro caso es esencialmente la misma.

Lema 4 El cociente de t_{nr} entre t_{nr-n}, y el cociente de t_{nr} entre t_{nr+n} puede hacerse tan grande como se desee.

Se hará la demostración sólo para el primer cociente, la del segundo cociente es completamente análoga.

Por demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{nr}}{t_{nr-n}} = \infty$$

Bernoulli procede de la siguiente manera, primero por simples pasos algebráicos llega a la igualdad:

$$\frac{t_{nr}}{t_{nr-n}} = \frac{(rs+r)(rs+r-\frac{r}{n})\ldots(rs+\frac{r}{n})}{(rs-s+\frac{s}{n})(rs-s+\frac{s}{n})\ldots(rs)}$$

de la siguiente manera

$$\frac{t_{nr}}{t_{nr-n}} = \frac{\binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}}{\binom{nt}{nr-n} r^{nr} s^{ns+n}} = \frac{(nr-n)!\,(ns+n)!}{(nr)!\quad (ns)!}\ \frac{r^n}{s^n}$$

$$= \frac{(nrs+nr)(nrs+nr-r)\ldots(nrs+r)}{(nrs-sn+s)(nrs-ns+2s)\ldots(nrs)}$$

$$= \frac{(rs+r)(rs+r-\frac{r}{n})\ldots.(rs+\frac{r}{n})}{(rs-s+\frac{s}{n})(rs-s+\frac{2s}{n})\ldots(rs)}$$

Después, en el numerador de este cociente, transforma los términos $rs+r-\frac{r}{n}$, $rs+r-\frac{2r}{n}$, ... en $rs+r-1$; los términos

$rs+r-1-\frac{r}{n}$, $rs+r-1-\frac{2r}{n}, \ldots$ en $rs+r-2$, etc; y en el denominador transforma los términos $rs-s+\frac{s}{n}, rs-s+\frac{2s}{n}, \ldots$ en $rs-s+1$; los términos $rs-s+1+\frac{s}{n}$, $rs-s+1+\frac{2s}{n}, \ldots$ en $rs-s+2$ etc.

Ya que el numerador lo estamos minorizando, y el denominador lo estamos mayorizando, resulta que:

$$\frac{t_{nr}}{t_{nr-n}} \geq \frac{(rs+r)(rs+r-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(rs)}{(rs-s+1)(rs-s+2)\ldots\ldots\qquad(rs)} \quad (1)$$

Y este cociente tiende a infinito cuando n tiende a infinito. Se podría pensar que aunque cada producto $\left[\frac{rs+r}{rs-s+1}\right], \left[\frac{rs+r-1}{rs-s+1}\right], \ldots, \frac{rs}{rs}$ es mayor ó igual que uno, el cociente (1) no tendiera a infinito o que de los productos $\frac{rs+r}{rs-s+1}, \ldots, \frac{rs}{rs}$ la mayoría estuvieran muy cercanos a 1, pero éste no es el caso.

Si $r>1$, el número de productos mayores o iguales que $\frac{rs+1}{rs}$ es mayor que $\frac{n}{2}$, si $s>1$ el número de productos mayores o iguales que $\frac{rs}{rs-1}$ es mayor ó igual que $\frac{n}{2}$, en ambos casos $\frac{t_{nr}}{t_{nr-n}}$ tiende a infinito.

Sea $L = t_{nr-n}$ y $\lambda = t_{nr+n}$ entonces,

Lema 5. El cociente de la suma de todos los terminos mayores que L y menores que λ entre la suma de todos los terminos restantes puede hacerse arbitrariamente grande cuando n se incrementa.

Para demostrar esto seguiremos esta secuencia:

Primero demostraremos que, (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr}+\dots\dots+t_{nr-n+1}}{t_{nr-n}+\dots+t_o} = \infty$

y que, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr+1}+\dots+t_{nr+n-1}}{t_{nr+n}+\dots+t_{nr+ns}} = \infty$

Después por medio de algunas desigualdades apropiadas llegaremos a que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{nr-n+1}+t_{nr-n+2}+\dots+t_{nr+n-2}+t_{nr+n-1}}{(t_o+\dots\dots+t_{nr-n})+(t_{nr+n}+\dots+t_{nr+ns})} = \infty$$

Por demostrar (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr}+\dots+t_{nr-n+1}}{t_{nr-n}+\dots\dots+t_o} = \infty$

Haciendo $K = nr,\ nr-1,\ nr-2, \dots, nr-n,\ nr-n-1, \dots$ e $i=1$

Por (3(b)) tenemos que $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-1}} < \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-2}};\ \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-2}} < \dfrac{t_{nr-2}}{t_{nr-3}}; \dots;$

$$\frac{t_{nr-n}}{t_{nr-n-1}} < \frac{t_{nr-n-1}}{t_{nr-n-2}};\ \frac{t_{nr-n-1}}{t_{nr-n-2}} < \frac{t_{nr-n-2}}{t_{nt-n-3}} < \dots$$

Entonces $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-1}} < \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-2}} < \dots < \dfrac{t_{nr-n}}{t_{nr-n-1}} < \dfrac{t_{nr-n-1}}{t_{nr-n-2}} < \dfrac{t_{nr-n-2}}{t_{nr-n-3}} < \dots$

De donde $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}};\ \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}} < \dfrac{t_{nr-2}}{t_{nr-n-2}}; \dots;$

$$\frac{t_{nr-n-1}}{t_{nr-n-2}} < \frac{t_{nr-n-2}}{t_{nr-n-3}}\ ; \dots (c)$$

Por lo tanto $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}} < \dfrac{t_{nr-2}}{t_{nr-n-2}} < \dots < \dfrac{t_{nr-n-1}}{t_{nr-n-2}} < \dfrac{t_{nr-n-2}}{t_{nr-n-3}} < \dots (d)$

Por lema (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} = \infty$

Así $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}} = \infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr-2}}{t_{nr-n-2}} = \infty$, etc.

También tenemos que (e) $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr}+t_{nr-1}}{t_{nr-n}+t_{nr-n-1}}$

ya que $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr}+t_{nr-1}}{t_{nr-n}+t_{nr-n-1}} \Longleftrightarrow \dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}}$, y esto se cumple por (c)

Ahora bien, como $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr}+t_{nr-1}+t_{nr-2}}{t_{nr-n}+t_{nr-n-1}+t_{nr-n-2}} \Longleftrightarrow$

$$\frac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \frac{t_{nr-1}+t_{nr-2}}{t_{nr-n-1}+t_{nr-n-2}}$$

Pero $\dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}} < \dfrac{t_{nr-1}+t_{nr-2}}{t_{nr-n-1}+t_{nr-n-2}}$ (Por un razonamiento idéntico al usado para demostrar (e))

y por (c) $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr-1}}{t_{nr-n-1}}$ tenemos $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr-1}+t_{nr-2}}{t_{nr-n-1}+t_{nr-n-2}}$

Por consiguiente $\dfrac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \dfrac{t_{nr}+t_{nr-1}+t_{nr-2}}{t_{nr-n}+t_{nr-n-1}+t_{nr-n-2}}$ ...(f)

Siguiendo razonamientos similares, se llega a:

$$\frac{t_{nr}}{t_{nr-n}} < \frac{t_{nr}+\dots+t_{nr-n+1}}{t_{nr-n}+\dots+t_{nr-2n+1}}$$

Por (I(c)) El número de términos menores o iguales que nr-n es 1 + (r-1) veces el número de terminos mayores que nr-n y menores o iguales a nr. Por (3(a)) la sucesión $t_{nr-n}, t_{nr-n-1}, \dots, t_o$ es decreciente y denominando por t_L al término aislado, (Que es uno de los términos menores o iguales que t ... tenemos:

$$\frac{t_{nr}+\ldots\ldots+t_{nr-n+1}}{t_{nr-n}+\ldots+to} > \frac{t_{nr}+\ldots\ldots+t_{nr-n+1}}{(t_{nr-n}+\ldots+t_{nr-2n+1})(r-1)+t_L}$$

$$> \frac{t_{nr}+\ldots\ldots+t_{nr-n+1}}{(t_{nr-n}+\ldots\ldots+t_{nr-2n+1})r}$$

De donde $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr}+\ldots+t_{nr-n+1}}{t_{nr-n}+\ldots+to} > \dfrac{1}{r} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr}+\ldots+t_{nr-n+1}}{(t_{nr-n}+\ldots+to)} = \infty$

Se sigue $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr}+\ldots+t_{nr-n+1}}{t_{nr-n}+\ldots+to} = \infty \ldots (a)$

Para demostrar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+ns}} = \infty$, se utiliza esencialmente el mismo razonamiento que se usa para demostrar (f).

Ahora bien, por (I(b)) el número de términos mayores o iguales que $nr+n$ es $s+(s-1)$ veces el número de términos mayores que nr y menores que $nr+n$.

Por otro lado si $n \geq 2$ $s+(s-1)(n-1) \leq s(n-1)+(s-1)(n-1)=(2s-1)(n-1)$

y por (3(a)) $t_{nr+n},\ldots\ldots,t_{nr+ns}$ es decreciente.

luego $t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+ns} < (t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+2n-2})(2s-1)$

Se sigue $\dfrac{t_{nr+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+ns}} > \dfrac{t_{nr+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{(2s-1)(t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+2n-2})}$

Como $\dfrac{1}{(2s-1)} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{(t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+2n-2})} = \infty$

Concluimos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+ns}} = \infty$ (b)

Para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{nr+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{t_{nr+n}+\ldots+t_{nr+nt}} = \infty \quad \ldots(g)$

Como (a) es de la forma $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{C_n} = \infty$ y (b) de la forma $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{D_n} = \infty$

por consiguiente demostrar (g) es equivalente a demostrar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n + B_n}{C_n + D_n} = \infty$

Por (a) $A_n > k \cdot C_n \quad \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n > N_1$

Por (b) $B_n > k \cdot D_n \quad \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n > N_2$

Entonces $A_n + B_n > K(C_n + D_n)$ i.e. $\dfrac{A_n + B_n}{C_n + D_n} > k \quad \forall k \in \mathbb{R}^+,$

$$, \forall n > \max\{N_1, N_2\}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n + B_n}{C_n + D_n} = \infty$

A partir de esto se concluye fácilmente el teorema, ya que:

$$\frac{t_{nr-n+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{(to+\ldots+t_{nr-n})+(t_{nr+n}+\ldots+t_{nt})} = k \qquad (k \in \mathbb{R}^+)$$

Pero
$$\frac{t_{nr-n+1}+\ldots+t_{nr+n-1}}{(to+\ldots+t_{nr-n})+(t_{nr+n}+\ldots+t_{nt})} =$$

$$\frac{\left[\dfrac{t_{nr-n+1}}{t^{nt}}\right]+\ldots\ldots+\left[\dfrac{t_{nr+n-1}}{t^{nt}}\right]}{\left[\left[\dfrac{to}{t^{nt}}\right]+\ldots+\left[\dfrac{t_{nr-1}}{t^{nt}}\right]\right]+\left[\left[\dfrac{t_{nr+n}}{t^{nt}}\right]+\ldots+\left[\dfrac{t_{nt}}{t^{nt}}\right]\right]}$$

$$= \frac{P(nr-n < \#E < nr+n)}{P(\#(E) \leq nr-n) + P(\#(E) \geq nr+n)} = \frac{P\left[\dfrac{r-1}{t} < \dfrac{\#(E)}{nt} < \dfrac{r+1}{t}\right]}{P\left[\dfrac{\#(E)}{nt} \leq \dfrac{r-1}{t}\right] + P\left[\dfrac{\#(E)}{nt} \geq \dfrac{r+1}{t}\right]}$$

Donde $\#(E)$ = número de éxitos en n experimentos

Además, $P\left[\frac{r-1}{t} < \frac{\#(E)}{nt} < \frac{r+1}{t}\right] + \left[P\left[\frac{\#(E)}{nt} \leq \frac{r-1}{t}\right] + P\left[\frac{\#(E)}{nt} \geq \frac{r+1}{t}\right]\right] = 1$

Entonces: $P\left[\frac{r-1}{t} < \frac{\#(E)}{nt} < \frac{r+1}{t}\right] + \dfrac{P\left[\frac{r-1}{t} < \frac{\#(E)}{nt} < \frac{r+1}{t}\right]}{k} = 1$

Pero, (como consecuencia del Lema 5) cuando nt tiende a infinito, k crece mas allá de toda esta, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{r-1}{t} < \frac{\#(E)}{nt} < \frac{r+1}{t}\right\} = 1$$

o, lo que es equivalente $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{-1}{t} \leq \frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t} \leq \frac{1}{t}\right\} = 1$

es decir $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\#(E)}{nt} - \frac{r}{t}\right| < \frac{1}{t}\right\} = 1$

CAPITULO II

LA DERIVACIÓN QUE HACE DE MOIBRE DEL TEOREMA DEL LÍMITE

LA DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DE DE MOIVRE-STIRLING, POR EL MÉTODO DE LAPLACE.

El mérito de la obtención del segundo Teorema Límite de la Teoría de la Probabilidad, le corresponde a Abraham De Moivre (1667-1754).

A continuación se presenta el razonamiento [1] seguido por él en la demostración de este teorema.

Teorema: Consideremos un experimento que tiene dos posibles resultados a los que llamaremos éxito y fracaso. Supongamos que el número de casos favorables para el éxito es a y para el fracaso b. La probabilidad de éxito es $p = \frac{a}{a+b}$, ya que todos los casos son igualmente probables.

(1) La demostración de este teorema fué tomada de una parte del artículo <u>A Method of approximating the Sums of the Terms of the Binomial $\overline{a+b}\backslash^n$ expanded into a Series, from whence are deduced Some practical Rules to estimate The Degree of Assent which is to be given to Experiments.</u>

["Un método para aproximar la suma de los términos del binomio $\overline{a+b}\backslash^n$ desarrollado en series, de donde se deducen algunas reglas prácticas para estimar el grado de certitud que se debe dar a los experimetos"]. Este artículo se encuentra en el libro de A. De Moivre [2] (pp. 243-254).

Gran parte de este artículo consta de una serie de resultados, (algunos de ellos fueron obtenidos en su *Miscellanea Analytica*) la mayoría de los cuales se presentan bajo la forma de corolarios y lemas que nos conducen lógicamente a la demostración de este teorema, primeramente para el caso en que $p=\frac{1}{2}=q$ y posteriormente para $p=\frac{a}{a+b}$. Sin embargo, estos resultados aparecen sin demostración en el artículo.

Con el fin de hacer más clara la demostración y dado que no nos fué posible conseguir la *Miscellanea Analytica* nos vemos obligados a demostrar algunos de los resultados que la componen y a modificar un poco la notación. Asimismo, en el apéndice [I] presentamos la traducción de la parte del artículo donde se encuentra la derivación de este teorema.

$$P\left\{ \left| \frac{\#E}{nt} - p \right| \overset{(2)}{\leqslant} \frac{[p\sqrt{nt}]}{nt} \right\}^{(3)} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi ab}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{a^{r+1}}{(2b)^r(2r+1)}$$

Donde, $\#E$ es el número de éxitos en nt experimentos y $n >$ $> \frac{(2a+b)^2}{(a+b)b^2}$.

Al igual que Bernoulli, De Moivre calcula la probabilidad del evento $\left| \frac{\#E}{nt} - p \right| \leqslant \frac{[p\sqrt{nt}]}{nt}$, contando los casos que lo favorecen (utilizando para ello algunas propiedades del binomio $(a+b)$ elevado a la potencia nt), y dividiendo este resultado entre el número de casos posibles.

Consideremos nt experimentos independientes y denotemos por A_{nt} al evento $\left| \frac{\#E}{nt} - p \right| \leqslant \frac{[p\sqrt{nt}]}{nt}$. Si consideramos todos los posibles resultados en nt experimentos puede ser que A_{nt} ocurra o pueda ser que no. Ahora bien, en nt experimentos de Bernoulli independientes, el número de casos favorables para obtener m éxitos y $nt - m$ fracasos es $\binom{nt}{m} a^m b^{nt-m}$, el cuál es un término del desarrollo de la expresión $(a+b)^{nt}$.

Haciendo uso de esta relación De Moivre muestra que el número de casos que satisfacen la desigualdad $p(nt) - [p\sqrt{nt}] \leqslant \#E \leqslant p(nt) + [p\sqrt{nt}]$, es la suma de los términos cuya distancia al término mayor del desarrollo de $(a+b)^{nt}$ no exceda $[p\sqrt{nt}]$ lugares, -

(2) $[x]$ significa el mayor entero menor ó igual a x.

(3) $Cnt \sim Dnt$ significa $\lim_{nt \to \infty} \frac{Cnt}{Dnt} = 1$.

considerando tanto los de la derecha como los de la izquierda. El número de casos que satisfacen $p(nt) - |p\sqrt{nt}| \leq \#E \leq p(nt) + |p\sqrt{nt}|$ es el mismo de los que favorecen al evento A_{nt}, y siendo todos los casos igualmente probables, al dividir el número de casos que satisfacen $p(nt) - |p\sqrt{nt}| \leq \#E \leq p(nt) + |p\sqrt{nt}|$ entre $(a+b)^{nt}$, es decir, entre el número total de casos obtenemos, la probabilidad buscada:

$$P\left\{ \left| A_{nt} \right| \right\} = \frac{1}{(a+b)^{nt}} \sum_{L=-|p\sqrt{nt}|}^{|p\sqrt{nt}|} \binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}$$

Sin embargo, como lo hace notar De Moivre al inicio de este artículo este tipo de expresiones es muy difícil de calcular cuando nt es un número muy grande.

Para simplificar este cálculo, De Moivre deduce una expresión asintótica de esta suma, en cuya obtención juega un papel esencial la fórmula $(nt)! \sim \sqrt{2\Pi}\,(nt)^{(nt+\frac{1}{2})}\,e^{-nt}$ (4), y ésta es;

$$\frac{2}{\sqrt{2\Pi ab}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{a^{r+1}}{(2b)^r (2r+1)}$$

(4) Esta fórmula es atribuida en la actualidad a James Stirling (1692, 1770), sin embargo De Moivre, como lo menciona al principio de su artículo, ya había obtenido gran parte de ella (él obtuvo, $Ln\, m! = Ln\, B + (m+\frac{1}{2})\, Ln\, m - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} \mp \cdots$, siendo $Log\, B = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} +$ etc. (Véase Adams |5|, p 21)). A Stirling le corresponde el mérito de obtener el valor de B, que es 2Π. Por esta razón la llamaremos fórmula de De Moivre-Stirling.

Demostración

I]

$$\frac{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}}{(a+b)^{nt}} \sim \frac{t}{\sqrt{2\pi\, ab\, nt}}$$

Demostración. Claramente

$$\frac{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}}{(a+b)^{nt}} = \frac{(nt)!\, a^{na} b^{nb}}{(na)!\,(nb)!\,(a+b)^{nt}} .$$

Además, aplicando la fórmula de De Moivre-Stirling y simplificando se tiene

$$\frac{(nt)!\, a^{na} b^{nb}}{(na)!\,(nb)!\,(a+b)^{nt}} \sim \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi\, a\, b\, n}} = \frac{t}{\sqrt{2\pi\, ab\,(nt)}}$$

y, de aquí

$$\frac{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}}{(a+b)^{nt}} \sim \frac{t}{\sqrt{2\pi\, ab\,(nt)}}$$

II]

$$\frac{\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}}{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}} \sim e^{\frac{-t^2L^2}{2ab(nt)}}, \quad \text{para } n > \frac{(2a+b)^2}{(a+b)b^2} \text{ y } L \in Z \ni .\ |L| \leq [p\sqrt{nt}]$$

ó, en forma equivalente,

$$\operatorname{Log} \frac{\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}}{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}} \sim \frac{-t^2 L^2}{2ab(nt)}$$

Demostración

$$\operatorname{Log} \frac{\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}}{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}} = -\operatorname{Log} \frac{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}}{\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}} = -\operatorname{Log} \frac{(na+L)!\,(nb-L)!\,b^L}{(na)!\,(nb)!\,a^L}$$

Por un lado, aplicando la fórmula de De Moivre-Stirling, se tiene

$$\frac{(na+L)!\,b^L}{(na)!\,(nb)!\,a^L} \sim \frac{(na+L)^{(na+L+\frac{1}{2})}\,(nb-L)^{(nb-L+\frac{1}{2})}\,b^L}{(na)^{(na+\frac{1}{2})}\,(nb)^{(nb+\frac{1}{2})}\,a^L}$$

Y, por otro

$$\frac{(na+L)^{(na+L+\frac{1}{2})}\,(nb-L)^{(nb-L+\frac{1}{2})}\,b^L}{(na)^{(na+\frac{1}{2})}\,(nb)^{(nb+\frac{1}{2})}\,a^L} \sim \frac{(na+L)^{(na+L+\frac{1}{2})}\,(nb-L)^{(nb-L+\frac{1}{2})}}{a^L\,(na)^{(na+\frac{1}{2})}\,(nb)^{(nb+\frac{1}{2})}}\,b^L\left(1-\frac{L(a-b)}{2nab}\right)$$

De las equivalentes anteriores obtenemos

$$\frac{(na+L)!\,(nb-L)!\,b^L}{(na)!\,(nb)!\,a^L} \sim \frac{(na+L)^{(na+L+\frac{1}{2})}\,(nb-L)^{(nb-L+\frac{1}{2})}}{a^L\,(na)^{(na+\frac{1}{2})}\,(nb)^{(nb+\frac{1}{2})}}\,b^L\left(1-\frac{L(a-b)}{2nab}\right)$$

Y, por consiguiente

$$\operatorname{Log} \frac{\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}}{\binom{nt}{na} a^{na} b^{nb}} \sim -\operatorname{Log} \frac{(na+L)^{(na+L+\frac{1}{2})} (nb-L)^{(nb-L+\frac{1}{2})}}{a^{L} (na)^{(na+\frac{1}{2})} (nb)^{(nb+\frac{1}{2})}} b^{L} \left(1 - \frac{L(b-a)}{2nab}\right)$$

Agrupando, la última expresión es igual a:

$$-\left\{ (na+\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log}\left(1+\frac{L}{na}\right) + (nb+\tfrac{1}{2}) \log\left(1-\frac{L}{nb}\right) + L \log\left(1+\frac{L(a+b)}{nab-aL}\right) + \operatorname{Log}\left(1-\frac{L(b-a)}{2nab}\right) \right\}$$

Denotando por k a $|p\sqrt{nt}|$ y desarrollando los logaritmos en series de Taylor, con centro encero esta expresión, para $n > \frac{(2a+b)^2}{b^2(a+b)}$ y $|L| \leq k$, resulta ser [5]

$$-\left\{ (na+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{L}{na} - \frac{L^2}{2(na)^2} + O\left(\frac{|L|^3}{(na)^3}\right) \right) + (nb+\tfrac{1}{2}) \left(-\frac{L}{nb} - \frac{L^2}{2(nb)^2} + O\left(\frac{|L|^3}{(nb)^3}\right) \right) \right.$$

,

(5) Decimos que $f(nt) = O(g(nt))$ Si $\lim \left| \frac{f(nt)}{g(nt)} \right| < C$, siendo C = cte. ∋ .

∋ . $0 < C < +\infty$ Al desarrollar $\operatorname{Log}\left(1+\frac{L}{na}\right)$ en series de Taylor, con centro en cero, obtendremos

$$\operatorname{Log}\left(1+\frac{L}{na}\right) = -\frac{L}{na} + \frac{L^2}{2(na)^2} + \sum_{w=3}^{\infty} \frac{(-1)^{w+1}}{w} \frac{(L)^w}{(na)^w}$$

Sin embargo, $\sqrt{n} > \frac{(2a+b)^2}{b^2(a+b)}$ y $|L| \leq K$, por lo que $\frac{|L|}{na} < 1$. Entonces

$$\left| \sum_{w=3}^{\infty} \frac{(-1)^{w+1}}{w} \left(\frac{L}{na}\right)^w \right| \leq \sum_{w=3}^{\infty} \frac{|L|^w}{(na)^w} = \frac{|L|^3}{(na)^2 (na-|L|)} \sim \frac{|L|^3}{(na)^3} = O\left(\frac{|L|^3}{(na)^3}\right)$$

Análogamente se demuestran los otros desarrollos.

$$+L\left(\frac{L(a+b)}{nab-aL}-\frac{L^2(a+b)^2}{2(nab-aL)^2}+0\left(\frac{|L|^3(a+b)^3}{(nab-aL)^3}\right)\right)+\left(-\frac{L(b-a)}{2nab}-\frac{L^2(b-a)^2}{8(nab)^2}+0\left(\frac{L^3(b-a)^3}{(nab)^3}\right)\right)\Bigg\}$$

ó, lo que es lo mismo

$$-\Bigg\{-\frac{L^2}{2na}+0\left(\frac{|L|^3}{(na)^2}\right)+\frac{L}{2na}-\frac{L^2}{4(na)^2}+0\left(\frac{|L|^3}{2(na)^3}\right)-\frac{L^2}{2nb}+0\left(\frac{|L|^3}{(nb)^2}\right)-\frac{L}{2nb}-\frac{L^2}{4(nb)^2}+0\left(\frac{|L|^3}{2(nb)^3}\right)$$

$$+\frac{L^2(a+b)}{(nab-aL)}-\frac{L^3(a+b)^2}{2(nab-aL)^2}+0\left(\frac{L^4(a+b)^3}{(nab-aL)^3}\right)-\frac{L(b-a)}{2nab}-\frac{L^2(b-a)^2}{8(nab)^2}+0\left(\frac{|L|^3(b-a)^3}{(nab)^2}\right)\Bigg\}$$

Ahora bien, como $|L| \leq k$ (siendo $n > \frac{(2a+b)^2}{b^2(a+b)}$), existen dos casos;

$\lim\limits_{nt\to\infty} \frac{L}{p\sqrt{nt}} = 0$ ó $\lim\limits_{nt\to\infty} \frac{L}{p\sqrt{nt}} = 1$. En el primer caso, la expresión anterior es igual a:

$$\frac{(a+b)L^2}{2nab}-\frac{(a+b)L^2}{(nab-aL)}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Sin embargo, $\frac{(a+b)L^2}{(nab-aL)} \sim \frac{(a+b)L^2}{nab}$, con lo cual,

$$\frac{(a+b)L^2}{2nab}-\frac{(a+b)L^2}{(nab-aL)}+0\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{L^2(a+b)}{2nab}$$

En el segundo caso, es decir, cuando $\lim\limits_{nt\to\infty} \frac{L}{p\sqrt{nt}} = 1$, la expresión es igual a

$$\frac{L^2}{2na} + \frac{L^2}{2nb} - \frac{L^2(a+b)}{nab-aL} + 0\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

Pero $\dfrac{L^2(a+b)}{(nab-aL)} \sim \dfrac{L^2(a+b)}{nab}$, por lo que

$$\frac{L^2}{2na} + \frac{L^2}{2nb} - \frac{L^2(a+b)}{(nab-aL)} + 0\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \sim \frac{L^2(a+b)}{2nab} = \frac{L^2(a+b)^2}{2ab(nt)}$$

Así pues, tenemos en cualquiera de los dos casos

$$\text{Log}\ \frac{\binom{nt}{na+L}a^{na+L}b^{nb-L}}{\binom{nt}{na}a^{na}b^{nb}} \sim \frac{(a+b)^2L^2}{2ab(nt)}$$

Comentario. De la multiplicación de I y II se deduce

$$P\left\{\frac{\#E}{nt} = p + \frac{L}{nt}\right\} \sim \frac{t}{\sqrt{2\Pi ab(nt)}}\, e^{-\frac{t^2L^2}{2ab(nt)}}$$

ó, lo que es lo mismo,

$$P\left\{\frac{\#E-(nt)p}{(nt)} = \frac{L}{nt}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\Pi pq(nt)}}\, e^{-\frac{1}{2}(x_L)^2}, \text{ donde } x_L = \frac{L}{\sqrt{pq(nt)}}$$

$$L = -k, \dots, k$$

en todo intervalo finito $\left[-\sqrt{\frac{a}{b}},\ \sqrt{\frac{a}{b}}\right]$ de valores de x_L. Es decir una parte de lo conocemos en la actualidad como el Teorema de DeMoivre-Laplace[6].

(6) Por ejemplo en el libro de M. Loeve [6] (pp. 22) se denomina Teorema de DeMoivre-Laplace al siguiente.

Teorema de DeMoivre-Laplace. En el caso Bernoulli con $p>o$, $q=1-p>o$, cuando $n\to\infty$

de Moivre (1732):

$$P_n(x) = P[\,S_n = j\,] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{j-np}{\sqrt{npq}}, \quad S_n = \# E$$

uniformemente en todo intervalo finito $[a,b]$ de valores de x:

Laplace (1801):

$$P\left[a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Cabe destacar que con la información que hemos obtenido hasta ahora, de los trabajos de DeMoivre no se puede derivar que

$$P\left\{\frac{\# E - p(nt)}{(nt)} = \frac{L}{(nt)}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi pq(nt)}}\, e^{-\frac{1}{2}(x_L)}$$

, uniformemente en todo intervalo finito $\left[-\sqrt{\frac{a}{b}},\sqrt{\frac{a}{b}}\right]$ de valores x_L. (Por otra parte, el concepto de convergencia uniforme no se conocía a principios del siglo XVIII, época de la que data el trabajo de DeMoivre) ya que para poder asegurar esto es indispensable conocer si

$$\frac{(na+L)!\,b^L}{(na)!\,(nb)!\,a^L} \sim \frac{(na+L)^{(na+L+\frac{1}{2})}\,(nb-L)^{(nb-L+\frac{1}{2})}\,b^L}{(na)^{(na+\frac{1}{2})}\,(nb)^{(nb+\frac{1}{2})}\,a^L}$$

uniformemente en todo intervalo $[-K, K]$ de valores de L, y es claro que esto no es posible a partir de la fórmula de DeMoivre-Stirling, (en la forma que DeMoivre conocía, es decir $\ln m! = \frac{1}{2}\ln 2\pi + (m+\frac{1}{2})\ln m - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} \mp \ldots$,) En efecto, si multiplicamos I y II obtenemos

$$\frac{\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}}{(a+b)^{nt}} \sim \frac{t}{\sqrt{2\Pi ab(nt)}} e^{-\frac{t^2 L^2}{2ab(nt)}}$$

Sin embargo, la expresión $\binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}$, es el número de casos que satisfacen $\{\#E = na+L\}$, o sea, es el número de casos favorables al evento $\left\{ \frac{\#E}{nt} = p + \frac{L}{nt} \right\}$, por lo que al dividirla entre $(a+b)^{nt}$, es decir entre el número total de casos resulta que,

$$P\left\{ \frac{\#E}{nt} = p + \frac{L}{nt} \right\} \sim \frac{t}{\sqrt{2\Pi ab(nt)}} e^{-\frac{t^2 L^2}{2ab(nt)}}$$

Asimismo, se tiene $t = (a+b)$, $p = \frac{a}{(a+b)}$ y $q = \frac{b}{(a+b)}$, substituyendo y simplificando, la relación anterior resulta ser.

$$P\left\{ \frac{\#E - p(nt)}{(nt)} = \frac{L}{nt} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\Pi pq(nt)}} e^{-\frac{1}{2}(X_L)},$$

$$\text{donde } X_L = \frac{L}{\sqrt{pq(nt)}}, \quad L = -k, \ldots, k$$

Ahora bien, la suma $\sum_{L=-k}^{k} \binom{nt}{na+L} a^{na+L} b^{nb-L}$ nos proporciona el número total de casos que satisfacen la relación $na - k \leq \#E \leq na + k$, ó equivalentemente el número total de casos favorabies al evento A_{nt}

Entonces al dividir la suma $\sum_{l=-k}^{k} \binom{nt}{na+L} a^{na+L}\, b^{nb-L}$ entre $(a+b)^{nt}$ es decir, entre el número total de casos, se obtiene

$$P\left\{ A_{nt} \right\} = \frac{1}{(a+b)^{nt}} \sum_{l=-k}^{k} \binom{nt}{na+L} a^{na+L}\, b^{nb-L}$$

Por otra parte, de I y II resulta que

$$\frac{1}{(a+b)^{nt}} \sum_{l=-k}^{k} \binom{nt}{na+L} a^{na+L}\, b^{nb-L} \sim \frac{t}{\sqrt{2\pi ab(nt)}} \sum_{l=-k}^{k} e^{-\frac{t^2L^2}{2ab(nt)}}$$

y de aquí, (ya que $k=[p\sqrt{nt}\,]$), obtenemos

$$P\left\{ \left| \frac{\#E}{nt} - p \right| \leq \frac{[p\sqrt{nt}]}{nt} \right. \sim \frac{t}{\sqrt{2\pi ab(nt)}} \sum_{L=-[p\sqrt{nt}]}^{[p\sqrt{nt}]} e^{-\frac{t^2L^2}{2ab(nt)}} \quad \ldots (III)$$

A continuación, De Moivre deduce otra forma de la última expresión obteniendo

$$\frac{t}{\sqrt{2\pi ab(nt)}} \sum_{L=-[p\sqrt{nt}]}^{[p\sqrt{nt}]} e^{-\frac{t^2L^2}{2ab(nt)}} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi ab}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{a^{r+1}}{(2b)^r(2r+1)} \quad \ldots (IV)$$

En efecto, si desarrollamos $e^{-\frac{t^2L^2}{2ab(nt)}}$ en series de Taylor, - con centro en cero, resulta ser $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{(tL)^{2r}}{(2ab(nt))^r}$. En -

donde

$$\frac{t}{\sqrt{2\pi ab(nt)}} \sum_{L=-k}^{k} e^{-\frac{t^2L^2}{2ab(nt)}} = \frac{t}{\sqrt{2\pi ab(nt)}} \sum_{L=-k}^{k}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{(tL)^{2r}}{(2ab(nt))^r} = \frac{t}{\sqrt{2\pi ab(nt)}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^{2r}}{r!(2ab(nt))} \sum_{L=-k}^{k} L^{2r}$$

Por otro lado como $\sum_{L=-k}^{k} (L)^{2r} = \sum_{L=-k}^{-1} (L)^{2r} + \sum_{L=0}^{k} (L)^{2r} = \sum_{L=1}^{k} (L)^{2r} +$

$$+ \sum_{L=0}^{k} (L)^{2r} = 2 \sum_{L=1}^{k} (L)^{2r}$$ y

$$2\sum_{L=1}^{k}(L)^{2r} \overset{(7)}{\sim} \frac{2(p\sqrt{nt})^{2r+1}}{2r+1}. \quad \text{Luego}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2\Pi ab(nt)}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r t^{2r}}{r!(2ab(nt))^r}\sum_{L=-k}^{k}(L)^{2r} \sim \frac{2}{\sqrt{2\Pi ab}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{a^{r+1}}{(2b)^r(2r+1)}$$

(7) $\quad 2\sum_{L=1}^{k}(L)^{2r} \sim \frac{2(p\sqrt{nt})^{2r+1}}{2r+1}$ ó, lo que es lo mismo $\sum_{L=1}^{k}(L)^{2r} \sim \frac{(p\sqrt{nt})^{2r+1}}{2r+1}$

Demostración. Por el teorema del binomio

$$(L+1)^{2r+1} - (L)^{2r+1} = \sum_{j=0}^{2r+1}\binom{2r+1}{j}(L)^j - (L)^{r+1} = \sum_{j=0}^{2r}\binom{2r+1}{j}(L)^j$$

Variando L desde 0 hasta k, tenemos

$$(1)^{2r+1} = \binom{2r+1}{0}$$

$$(2)^{2r+1} - (1)^{2r+1} = \binom{2r+1}{0}1 + \binom{2r+1}{1}1 + \binom{2r+1}{2}1^2 + \cdots + \binom{2r+1}{2r-1}1 + \binom{2r+1}{2r}1$$

$$\vdots$$

$$(K+1)^{2r+1} - (K)^{2r+1} = \binom{2r+1}{0}K^0 + \binom{2r+1}{1}K^1 + \binom{2r+1}{2}K^2 + \cdots + \binom{2r+1}{2r-1}K^{2r-1} + \binom{2r+1}{2r}K^{2r}$$

Sumando por columnas llegamos a:

$$(K+1)^{2r+1} = (K+1) + \binom{2r+1}{1}\sum_{L=1}^{K}(L)^2 + \binom{2r+1}{2}\sum_{L=1}^{K}(L)^2 + \cdots + \binom{2r+1}{2r-1}\sum_{L=1}^{K}(L)^{2r+1} + \binom{2r+1}{2r}\sum_{L=1}^{K}(L$$

Ahora bien, por un lado tenemos $(K+1)^{2r+1} \sim (K)^{2r+1}$, y por otro $(K+1) +$ $+\binom{2r+1}{1}\sum_{L=1}^{K}(L) + \binom{2r+1}{2}\sum_{L=1}^{K}(L)^2 + \cdots + \binom{2r+1}{2r-1}\sum_{L=1}^{K}(L)^{2r-1} + \binom{2r+1}{2r}\sum_{L=1}^{K}(L)^{2r} \approx$ $\approx \binom{2r+1}{2r}\sum_{L=1}^{K}(L)^{2r}$ resulta entonces que $(K)^{2r+1} \sim \binom{2r+1}{2r}\sum_{L=1}^{K}(L)^{2r}$, y de aquí

$$\frac{K^{2r+1}}{(2r+1)} \sim \sum_{L=1}^{K}(L)^{2r}.$$

Sin embargo $K = [p\sqrt{nt}] \sim p\sqrt{nt}$, subsituyendo concluimos

$$\frac{(p\sqrt{nt})^{2r+1}}{} \sim \sum^{K}(L)^{2r}$$

Y, por consiguiente

$$P\left\{\left|\frac{\#E}{nt}-p\right|\leq\frac{[p\sqrt{nt}]}{nt}\right\}\sim\frac{2}{\sqrt{2\Pi ab}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{a^{r+1}}{(2b)^r(2r+1)}$$

Comentario A partir de(III) se puede derivar de una manera dife rente, la relación,

$$P\left\{\left|\frac{\#E}{nt}-p\right|\leq\frac{[p\sqrt{nt}]}{nt}\right\}\sim\frac{2}{\sqrt{2\Pi ab}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{a^{r+1}}{(2b)^r(2r+1)}$$

que como veremos, nos muestra muy claramente que esta última - expresión es precisamente el desarrollo en series de

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Por lo que, una forma equivalente de expresar la relación ante rior es

$$P\left\{\left|\frac{\#E-(nt)p}{(nt)}\right|\leq\frac{[p\sqrt{nt}]}{nt}\right\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

o, lo que es lo mismo, (ya que $[p\sqrt{nt}]\sim p\sqrt{nt}$)

$$P\left\{ \frac{|\#E-(nt)p|}{\sqrt{(nt)pq}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

es decir, la otra parte del Teorema de De Moivre-Laplace (Veáse nota (6)).

Para mostrar esto, observemos que de (III) se sigue que,

$$P\left\{ \left| \frac{\#E}{nt} - p \right| \leq \frac{[p\sqrt{nt}]}{nt} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{L=-[p\sqrt{nt}]}^{[p\sqrt{nt}]} e^{-\frac{1}{2}\frac{L^2}{pq(nt)}} \frac{1}{\sqrt{pq(nt)}}$$

Además, si hacemos $X_L = \dfrac{L}{\sqrt{pq(nt)}}$, tenemos que $\Delta(X_L) = X_{L+1} - X'_L = \dfrac{1}{\sqrt{pq(nt)}}$ $\forall X_L \in \left[-\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right]$. Con lo cual la última expresión resulta ser

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\{X_L \dashv L=-[p\sqrt{nt}], \ldots, [p\sqrt{nt}]\}} e^{-\frac{1}{2}(X_L)^2} \Delta(X_L)$$

Ahora bien, $\forall X_L$ $\lim\limits_{nt\to\infty} \Delta(X_L) = \lim\limits_{nt\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{pq(nt)}} = 0$. De donde

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \sum_{\{X_L \cdot\cdot\}\cdots l=-[p\sqrt{nt}\,], \ldots, [p\sqrt{nt}\,]\}} e^{-\frac{1}{2}(X_L)^2} \Delta(X_L) \sim \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\frac{[p\sqrt{nt}\,]}{\sqrt{pq(nt)}}}^{\frac{[p\sqrt{nt}\,]}{\sqrt{pq(nt)}}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

Como $[p\sqrt{nt}\,] \sim p\sqrt{nt}$, substituyendo y simplificando, obtenemos

$$P\left\{ \frac{|\#E-(nt)p|}{\sqrt{(nt)pq}} < \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Asimismo, como la función $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ es analitica en $(-\infty,\infty)$, la podemos expresar como una serie de potencias convergente en todo - este intervalo. Así, si desarrollamos $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en series de -- taylor, con centro en cero, obtendremos que la expresión anterior es equivalente

$$\frac{1}{2^r\sqrt{2\Pi}} \int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} X^{2r} \right\} dx$$

Ahora bien, por un resultado bien conocido del análisis, (el - cual nos afirma que en todo subintervalo compacto del intervalo de convergencia, la integral de una serie de potencias es igual a la serie de las integrales, tenemos que $\forall X \in \left[-\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right]$.

$$\frac{1}{2^{r}\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!} X^{2r} \right\} dx = \frac{1}{2^{r}\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!}$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} X^{2r} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!} \left. \frac{X^{2r+1}}{2r+1} \right|_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Pero, la última expresión es igual a

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!} \left[\frac{a}{2b} \right]^{r} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{(2r+1)}$$

ó, lo que es lo mismo

$$\frac{2t}{\sqrt{2\pi ab}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!} \frac{a^{r} p \sqrt{nt}}{(2r+1)(2b)^{r}}$$

de donde

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx = \frac{2t}{\sqrt{2\Pi ab(nt)}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{a^r \, p\sqrt{nt}}{(2r+1)\,(2b)^r}$$

y, por consiguiente.

$$P\left\{ \left| \frac{\#E}{nt} - p \right| \leq \frac{|\,p\sqrt{nt}\,|}{nt} \right\} \sim \frac{2t}{\sqrt{2\Pi ab(nt)}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{a^r \, p\sqrt{nt}}{(2r+1)\,(2b)^r}$$

APENDICE I

Presentamos a continuación la traducción de una parte del artículo. A Method of approximating the Sums of the Terms of the Binomial $\overline{a+b}\backslash^{n}$ expanded in to a Series, from whence are deduced Some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to Experiments, que se encuentra en el libro de A. De Moivre [2] (pp 243 - 254).

Como ya hemos dicho, en esta parte se encuentra la derivación del segundo teorema límite de la teoría de la probabilidad.

"Un método para aproximar la suma de los términos del binomio $\overline{a+b}\backslash^{n}$ desarrollado en series, de donde se deducen algunas reglas prácticas para estimar el grado de certitud que se debe dar a los experimentos".

"Aunque la solución a Problemas de Azar requiere, a menudo, sumar varios términos del binomio $\overline{a+b}\backslash^{n}$, sin embargo para potencias muy grandes, la tarea resulta, tan laboriosa y de tan gran dificultad que muy pocos la han emprendido; porque, además de *James* y *Nicolas Bernoulli*, dos grandes matemáticos, no conozco a nadie que lo haya intentado; en lo cual, aunque han mostrado gran destreza y que tienen los elogios que merece su ingenio, se requerían aún más resultados; pues lo que han hecho no es tanto una aproximación, sino la determinación de límites muy amplios, dentro de los cuales, según mostraron, estaba contenida la suma de los términos.

Ahora bien, el método que ellos han seguido, fue descrito brevemente en mi *Miscellanea Analytica*, que el lector puede consultar si lo desea, a menos que eligiera, lo cual sería mejor, consultar lo que ellos mismos han escrito sobre el tema: en lo que a mí toca, lo que me condujo a aplicarme a esa tarea no fué la idea de que yo pudiera superar a otros, en lo que, sin embargo podría estar disculpado; sino el plegarme a los deseos de un - Caballero de gran valía, y muy buen matemático, que me interesó en ello: ahora añado algunas ideas a los anteriores; pero, para aclarar su conexión, es necesario resumir algunos resultados - que había obtenido hace ya bastante tiempo".

I.- Hoy hace ya una docena de años o más desde que encontré lo siguiente: Si el binomio (I + I) es elevado a una potencia muy grande denotada por n, la proporción que el término medio tiene a la suma de todos los términos, esto es, a 2^n, puede ser expresada por la fracción $\dfrac{2A \times \overline{n-1}\backslash^n}{n^n \times \sqrt{n-1}}$, en donde A representa el -- el número cuyo lagoritmo es $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$, etc.

Pero debido a que la cantidad $\dfrac{\overline{n-1}\backslash^n}{n^n}$ o $\overline{1-\frac{1}{n}}\backslash^n$ es muy aproximada cuando n es una potencia grande, lo cual no es difícil de probar, se sigue que en una potencia infinita esta cantidad estará absolutamente determinada. Y representa el número cuyo logaritmo hipérbolo es igual a - 1 ; de donde se sigue, que si β denota el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a $-1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} +$

$+ \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$, etc. La expresión escrita arriba se convertirá en $\frac{2\beta}{\sqrt{n-1}}$ o aproximadamente $\frac{2\beta}{\sqrt{n}}$; y por consiguiente, si cambiamos los signos de esta media, y suponemos que β representa el número cuyo logaritmo hiperbólico es $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} +$ $+ \frac{1}{1680}$, etc., esta expresión será transformada en $\frac{2}{\beta\sqrt{n}}$.

Cuando comencé esta indagación me satisfizo el poder determinar el valor aproximado de β, lo cuál se hacía por la adición de algunos términos de la serie escrita anteriormente: pero cuando me dí cuenta de que convergía muy lentamente, y viendo al mismo tiempo que había contestado en forma tolerable a mi propósito, desistí de continuar más adelante hasta que mi valioso y culto amigo *Mr. James Stirling*, quién se había abocado a esa indagación después que yo, encontró que la cantidad β representa la raíz cuadrada de la circunferencia de un círculo cuyo radio es la unidad. De forma que, si la circunferencia es denotada por c, la proporción del término medio a la suma de todos los términos será expresada por $\frac{2}{\sqrt{nc}}$.

Pero, aunque no es necesario conocer la relación que guarda el número con la circunferencia del círculo, siempre y cuando se alcance su valor, ya sea siguiendo la serie logarítmica antes dicha, o de cualquier otra forma; reconozco con gusto que este descubrimiento, además de que ha ahorrado problemas, confiere una elegancia singular a la solución.

II.- "También encontré que el logaritmo de la proporción que el término medio de una potencia grande tiene a cualquier término distante de él por un intervalo denotado por L puede ser denotado con una aproximación muy cercana, (suponiendo $m = \frac{1}{2}n$) por las cantidades, $(m + L - \frac{1}{2})$ Log $(m + L - 1) + (m - L + \frac{1}{2})$ Log $(m - L + 1) - 2m$ Log $m +$ Log $\frac{m+L}{m}$.

Corolario I

"Una vez admitido esto, concluí que si m ó $\frac{1}{2}n$ es una cantidad infinitamente grande, entonces el logaritmo de la proporción, que un término distante del medio por el intervalo L, tiene al término medio es $-\frac{2n^{2}}{n}$.

Corolario 2

Dado que el número, que tiene como logaritmo hiperbólico a $-\frac{2L^2}{n}$ es

$$1 - \frac{2L^2}{n} + \frac{4L^4}{2n^2} - \frac{8L^6}{6n^3} + \frac{16L^8}{24n^4} - \frac{32L^{10}}{120n^5} + \frac{64L^{12}}{720n^6}, \text{ etc.}$$

se sigue que la suma de los términos comprendidos entre el término medio y el término cuya distancia a éste se denota por L, será

$$\frac{2}{\sqrt{nc}} \left[L - \frac{2L^3}{1 \times 3n} + \frac{4L^5}{2 \times 5n^2} - \frac{8L^7}{6 \times 7n^3} + \frac{16L^9}{24 \times 9n^4} - \frac{32L^{11}}{120 \times 11n^5}, \text{ etc.} \right]$$

Supongamos ahora, que $L = s\sqrt{n}$ (1), entonces la suma anterior -- será expresada por la serie

$$\frac{2}{\sqrt{c}}\left[s - \frac{2s^3}{3} + \frac{4s^5}{2X5} - \frac{8s^7}{6X7} + \frac{16s^9}{24X9} - \frac{32s^{11}}{120X11}, \text{ etc.} \right]$$

Además, si s es interpretado por $\frac{1}{2}$, entonces la serie se transfomará en

$$\frac{2}{\sqrt{c}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3X4} + \frac{1}{2X5X8} - \frac{1}{6X7X10} + \frac{1}{24X9X32} - \frac{1}{120X11X64}, \text{ etc} \right]$$

la cual converge tan rápidamente, que bastan siete u ocho términos, para aproximar esta suma hasta seis o siete decimales; -- Ahora la suma resulta ser 0.427812, independientemente del multiplicador común $\frac{2}{\sqrt{c}}$, y por consiguiente añadiendo al tabular logaritmo de 0.427812, que es $\overline{1}.6312529$, el logaritmo de $\frac{2}{\sqrt{c}}$, es decir, $\overline{9}.019800$, la suma será $\overline{19}.5331029$, a la cual corresponde el número 0.3413344.

Lema

Si un evento depende de tal forma del Azar, que las probabilidades de que ocurra o no sean iguales, y se hace un cierto número dado n de experimentos para observar cuántas veces ocurre y

(1) En el texto aparece el símbolo $\surd$, para evitar confusiones lo reemplazamos por s.

cuántas no, y si L es otro número dado, menor que $\frac{1}{2}n$, entonces la probabilidad de que no ocurra más de $\frac{1}{2}n+L$ veces, ni menos de $\frac{1}{2}n-L$ veces, puede hallarse como sigue.

Sean L y L dos términos igualmente distantes, por un intervalo igual a L, a ambos lados del término del binomio $(1+1)^n$ desarrollado; sea también S la suma de los términos comprendidos entre L y L; incluyendo a los extremos, entonces la probabilidad buscada será correctamente expresada por la fracción $S/2^n$, lo cual, al estar fundado en los principios comunes de "The Doctrine of Chances", no requiere demostración en este lugar.(2)

Corolario 3

Y por consiguiente, si fuese posible tomar un número infinito de experimentos, la probabilidad de que un evento, que tiene

(2) En la introducción de "The Doctrine of Chances", De Moivre, define la probabilidad de un evento de la siguiente manera:

1.- "La probabilidad de un evento es mayor o menor, de acuerdo al número de veces en las que puede ocurrir, comparado, al número total de veces en las que puede o no ocurrir.

2.- "Por lo tanto, si formamos una fracción cuyo numerador sea el número de veces en las cuales un evento puede ocurrir, y el denominador el número de todas las veces en las que puede o no ocurrir, dicha fracción representará correctamente la probabilidad de ocurrencia. Así, si un evento puede ocurrir tres veces, y 2 no, la fracción $\frac{3}{5}$ representará adecuadamente la probabilidad de su ocurrencia, y puede tomarse como la medida de ésta".

"Lo mismo puede decirse de la probabilidad de no ocurrencia, que estará medida, de la misma forma, por una fracción cuyo numerador es el número de veces que deje de ocurrir, y el denominador el número total de veces, de su ocurrencia o su no ocurrencia; entonces la medida de la probabilidad de no ocurrencia del evento que puede no ocurrir 2 veces y 3 sí, será la fracción $\frac{2}{5}$ ".

igual número de probabilidades de ocurrir o no, no ocurra más de $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ veces, ni menos de $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ veces, será expresada por la doble suma del número exhibido en el segundo corolario, esto es, por 0.682688, y consecuentemente, la probabilidad del evento contrario, que es el de ocurrir más o menos veces que en la proporción establecida arriba será 0.317312; estas dos probabilidades juntas completan la unidad, que es la medida de la certeza: Ahora bien, la proporción entre las 2 probabilidades es, en números redondos, aproximadamente de 28 a 13.

Corolario 4

A pesar de que no es practicable tomar un número infinito de experimentos, aún así las conclusiones precedentes pueden muy bien ser aplicadas a números finitos, siempre y cuando sean grandes: por ejemplo, si se hacen 3600 experimentos, es decir, $n = 3600$, entonces $\frac{n}{2}$ será igual a 1800, y $\frac{\sqrt{n}}{2} = 30$, luego, la probabilidad de que el evento no ocurra más de 1830 veces, ni menos de 1770, será 0.682688.

Corolario 5

Y por lo tanto podríamos establecer como una máxima fundamental que, para potencias grandes, la proporción que la suma de los términos incluidos entre dos extremos distantes a ambos lados del término medio por un intervalo igual a $\frac{\sqrt{n}}{2}$, tiene a la suma de todos los términos, será correctamente expresada por el decimal 0.682688, que es aproximadamente $\frac{28}{41}$.

Aún así, no debe pensarse que sea necesario que el número n sea inmensamente grande; suponiendo que no vaya más allá de la 900-ésima potencia, ni siquiera más allá de la 100-ésima, la regla dada aquí será tolerablemente precisa, lo cual he confirmado por experimentos.

Pero vale la pena observar, que esa pequeña parte como es $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ con respecto a n, y mucho menor con respecto a n cuando n se incrementa, nos da rápidamente la probabilidad $\frac{28}{41}$ o las posibilidades de 28 a 13; lo que nos llevará naturalmente a preguntarnos, ¿cuáles son las cotas dentro de las que está contenida la proporción de igualdad?. Mi respuesta es que estas cotas estarán a una distancia del término medio expresada aproximadamente por $\frac{\sqrt{2n}}{4}$; de manera que en el caso arriba mencionado, donde n se supuso igual a 3600, $\frac{\sqrt{2n}}{4}$ será aproximadamente 21.2, que respecto a 3600 no es mayor a $\frac{1}{169}$ ésima parte: así que hay una posibilidad casi igual ó más bien un poco mayor, de que en 3600 experimentos, en cada uno de los cuales un evento puede ocurrir o no, el exceso de ocurrencias o no ocurrencias por encima de 1800 veces, no será mayor que un número muy próximo a 21.

Corolario 6

Si L es tomado como $\sqrt{n}$, la serie no convergerá tan rápidamente como en el caso anterior, cuando L $\frac{\sqrt{n}}{2}$, ya que aquí, no menos que 12 ó 13 terminos de las [illegible] pien, proporcionarán una -

aproximación tolerable, y aún se requerirán mas términos, conforme L tenga una proporción mayor a $\sqrt{n}$, por tal razón hago uso en este caso del artificio de Cuadraturas Mecánicas, primero inventado por *Sir Isaac Newton*, y después investigado por *Mr. Cotes*, *Mr. James Stirling*, yo, y quizás otros; este consiste en determinar aproximadamente el área de una curva, a partir del conocimiento de cierto número de sus ordenadas A, B, C, D, E, F, etc. colocadas a intervalos iguales; mientras mayor sea el número de ordenadas, más exacta será la cuadratura; pero aquí me limitaré a 4, que son suficientes para mi propósito: supongamos que las cuatro ordenadas son A, B, C, D, y que la distancia entre la primera y la última es denotada por L, entonces el área contenida entre la primera y la última será $\frac{\overline{A+D} + 3 \times \overline{B+C}}{8}$ X L ; ahora tenemos las distancias $0\sqrt{n}$, $\frac{1}{6}\sqrt{n}$, $\frac{2}{6}\sqrt{n}$, $\frac{3}{6}\sqrt{n}$, $\frac{4}{6}\sqrt{n}$, $\frac{5}{6}\sqrt{n}$, $\frac{6}{6}\sqrt{n}$, cada una de las cuales excede a la precedente por $\frac{1}{6}\sqrt{n}$, y siendo la última $\sqrt{n}$; de estas tomaremos las cuatro últimas, i. e. $\frac{3}{6}\sqrt{n}$, $\frac{4}{6}\sqrt{n}$, $\frac{5}{6}\sqrt{n}$, $\frac{6}{6}\sqrt{n}$, entonces tomando sus cuadrados, doblando a cada uno de ellos, dividiéndolos por n, y prefijándoles el signo $-$, tendremos $-\frac{1}{2}$, $-\frac{8}{9}$, $-\frac{25}{18}$, $-\frac{2}{1}$, que deben ser vistos como los logaritmos hiperbólicos de los números 0.60653; 0.41111; 0.24935; 0.13534 que corresponderán a los 4 ordenadas A, B, C, D. Ahora, habiendo hecho L igual a $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, el área será igual a 0.170203 X $\sqrt{n}$, cuyo doble, multiplicado por $\frac{2}{\sqrt{nc}}$, será 0.27160; agréguese esto al área encontrada anteriormente, esto es, a 0.682688, y la suma, 0.95428, dará cuál es, después de un número de experimentos denota do por n, la probabilidad de que el evento no ocurra más de -- $\frac{1}{2}n + \sqrt{n}$ veces, ni menos de $\frac{1}{2}n - \sqrt{n}$ veces, y por lo tanto la probabilidad del evento contrario será 0.95572: que muestra que las posibilidades de que el evento no ocurra ni más ni menos -- veces dentro de los límites asignados son de 21 a 1. Y por el mismo razonamiento, se encontrará que la probabilidad de que el evento no ocurra más de $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\sqrt{n}$, ni menos que $\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\sqrt{n}$ veces será 0.99874, lo que hará que las posibilidades en este -caso sean aproximadamente de 369 a 1.

Para aplicar esto a casos particulares, será necesario estimar la frecuencia de la ocurrencia o no ocurrencia de un evento, -por la raíz cuadrada del número que denota cuántos experimientos se han hecho, o se proponen hacer; y esta raíz cuadrada, de --acuerdo, a como se insinuó en el corolario cuatro, será algo -como el Modulus por el que vamos a regular nuestra estimación; y por consiguiente, supongamos que el número de experimentos a realizar es 3600, y que fuera necesario asignar la probabilidad de que el evento no ocurriese más de 2850 veces, ni menos de -1750, números que pueden variar arbitrariamente, siempre y cuando estén a igual distancia de la suma media 1800, para esto, tomemos la mitad de la diferencia entre los dos números, 1850 y 1750, que es, en este caso, 50 igual a $s\sqrt{n}$; ahora habiendo -supuesto 3600 igual a n, entonces $\sqrt{n}$ será igual a 60 lo que -hará que 50 igual a 60s, de donde $s = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$; y por consiguiente si tomamos la proporción, que en una potencia infinita, la doble suma de los términos correspondientes al intervalo $\frac{5}{6}\sqrt{n}$, tiene a la suma de todos los términos, tendremos una cantidad que difiere en muy poco de la probabilidad buscada.

Lema 2

En el desarrollo del binomio $\overline{a+b}\backslash^{n}$ el término mayor es aquel en el que los índices de las potencias de a y b tienen la misma proporción que a y b; considerando entonces la 10ésima potencia de $(a+b)$, que es $a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$; y suponiendo que la proporción de a a b es la de 3 a 2, entonces el término $210a^6b^4$ será el mayor, debido a que los índices de las potencias de a y b, en este término, están en la misma proporción que 3 y 2; pero suponiendo que la proporción de a a b fuera la de 4 a 1, entonces el término $45a^8b^2$ sería el mayor.

Lema 3

Si un evento depende del Azar de forma tal que las probabilidades de que ocurra o no están en cualquier proporción asignada, que podríamos suponer como la de a a b, y un cierto número de experimentos es designado para llevarse a cabo, y observar cuantas veces ocurrirá y, cuantas no; entonces la probabilidad de que no ocurra más de $\frac{an}{a+b} + L$ veces, ni menos de $\frac{an}{a+b} - L$, se encontrará como sigue:

Sean L y R igualmente distantes, por el intervalo L del término mayor; Sea también S la suma de los términos incluidos entre L y R, incluyendo a estos extremos, entonces la probabilidad - buscada será correctamente expresada por $\frac{S}{\overline{a+b}\backslash^n}$

Corolario 8

La proporción que tiene, en una potencia infinita denotada por n, el término mayor a la suma de todos los términos restantes, - será correctamente expresada por la fracción $\frac{a+b}{\sqrt{a\,b\,n\,c}}$, en donde c denota, como antes, la cirunferencia de un círculo de radio igual a la unidad.

Corolario 9

Si, en una potencia infinita, cualquier término dista del mayor por el intervalo L, entonces el logaritmo hiperbólico de la proporción que el término tiene al mayor será expresado por la -- fracción $-\frac{\overline{a+b}\backslash^2}{2\,a\,b\,n} \times L^2$; siempre y cuando la proporción de L a n no sea una proporción finita, sino semejante a la que puede ser concebida entre cualquier número dado p y $\sqrt{n}$, de tal forma que L sea expresable por $p\sqrt{n}$, en cuyo caso los dos términos L y R serán iguales.

Corolario 10

Si las probabilidades de que un evento ocurra o no, no estuviesen en una proporción de igualdad, los problemas relacionados a la suma de los términos del binomio $\overline{a+b}\backslash^{n}$, se resolverían con la misma facilidad que aquellos en la que las probabilidades de ocurrir o no están en una proporción de igualdad.

APENDICE II

Fórmula de De Moivre - Stirling

$$n! = \sqrt{2\Pi}\ n^{n+1/2}\ e^{-n}\ [1 + o(1)]^{(1)}$$

Se conocen en la actualidad varias demostraciones de la fórmula de De Moivre - Stirling, en algunas de ellas se utiliza la fórmula de Wallis. Sin embargo, preferimos esta demostración ya que presenta la ventaja de ilustrar un método que fué muy utilizado por Laplace y Poisson para la obtención de algunos teoremas - límite y que, como ya hemos dicho, es debido precisamente a - Laplace.

Derivaremos esta fórmula a partir de dos maneras diferentes de evaluar la función gamma, $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-u} u^t du, (t > -1)$, para el caso en que $t = n \in Z^+$.

Demostración:

Si integramos $(n + 1)$ veces por partes la función $\Gamma(n + 1)$ obtendremos

---

(1) $f(n) = o(g(n))$ significa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-u}u^n du = n!$$

Por otro lado, si hacemos $u = n(1+x)$ se tiene

$$\int_0^\infty e^{-u}u^n du = \int_{-1}^\infty e^{-n(1+x)}[n(1+x)]^n n dx = e^{-n}n^{n+1}\int_{-1}^\infty e^{-nx}(1+x)^n dx.$$

Si denotamos por $h(x)$ a la suma $-x + \log(1+x)$, la última integral resulta ser

$$e^{-n}n^{n+1}\int_{-1}^\infty e^{nh(x)}dx$$

Ahora bien, $h(x)$ alcanza su máximo cuando $x = o$, siendo su valor 0; por consiguiente, $h(x)$ es negativa en los intervalos $[-1,0)$ y (o, ∞). A partir de esto, se puede ver que $e^{nh(x)}$ alcanza su máximo cuando $x = o$, (ya que $e^{nh(x)}$ es estrictamente creciente) y éste es 1. Además, se tiene $\lim_{n\to\infty} e^{nh(x)} = 0 \quad \forall x \in \{[-1,0), (0,\infty)\}$.

Estas propiedades de la función $e^{nh(x)}$, cuando n tiene a infinito, nos sugieren la posibilidad de utilizar el método de Laplace para calcular su integral.

Así, si denotamos por δ una variable que satisface $0 < \delta \leq 1/2$, podemos representar la integral $\int_{-1}^\infty e^{nh(x)}dx$ como la suma siguiente:

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{nh(x)}dx + \int_{-\delta}^{\delta} e^{nh(x)}dx + \int_{\delta}^{\infty} e^{nh(x)}dx$$

Para calcular el valor de los intervalos de los extremos observemos que $h(x)$ es creciente en $[-1,-\delta]$ y decreciente en $[\delta,\infty)$ (2), por consiguiente $e^{nh(x)} \leqslant e^{nh(-\delta)}$ $\forall\, x \in [-1,-\delta]$ y $e^{nh(x)} \leqslant e^{nh(\delta)}$ $\forall\, x \in [\delta,\infty)$, con lo cual.

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{nh(x)}dx \overset{(3)}{=} O\left(e^{nh(-\delta)}\right) \quad y$$

(2) Como $h(x) = -x + \log(1+x)$ entonces $h'(x) = -1 + \dfrac{1}{(1+x)}$.
Si $x \in (-1,-\delta]$, donde $-\frac{1}{2} < \delta < 0$, se tiene $\dfrac{1}{(1+x)} > 1$ y por consiguiente $h'(x) > 0$, es decir, $h(x)$ es creciente en $(-1,-\delta]$.
Si $x \in [\delta,\infty]$ entonces $\dfrac{1}{(1+x)} < 1$ y por lo tanto $h'(x) < 0$, es decir, $h(x)$ es decreciente en $[\delta,\infty)$.

(3) Decimos que $f(n) = O(g(n))$ si $\left| \lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} \right| < C$, donde $0 < C < +\infty$.

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{nh(x)}dx = {}^{(4)}O\left(e^{\frac{1}{2}nh(\delta)}\right),$$

En donde $\lim_{n\to\infty} e^{nh(-\delta)} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}nh(\delta)} = 0$

(4) Como $h(x)$ es decreciente en $[\delta,\infty)$, se tiene $nh(x) \leqslant nh(\delta)$ y $nh(x) \leqslant$ $\leqslant h(x)$ de donde $nh(x) \leqslant \frac{1}{2}[nh(\delta) + h(x)]$, y por consiguiente $\int_{\delta}^{\infty} e^{nh(\delta)} \leqslant$ $\leqslant e^{-\frac{1}{2}nh(\delta)} \int_{\delta}^{\infty} e^{\frac{1}{2}h(x)}dx$

Ahora bien, $\int_{\delta}^{\infty} e^{\frac{1}{2}h(x)}dx = \int_{\delta}^{2} e^{\frac{1}{2}h(x)}dx + \int_{2}^{\infty} e^{\frac{1}{2}h(x)}dx$. La primera integral del lado derecho claramente existe. Para demostrar que la segunda integral del lado derecho, también existe, observemos que para $x \geqslant 2$ se tiene $\frac{1}{2}h(x) \leqslant -\frac{x}{2}\log x$.

Por lo que $\int_{2}^{\infty} e^{\frac{1}{2}h(x)}dx \leqslant \int_{2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x\,dx$. Integrando por partes se demuestra facílmente que ésta ultima integral existe.

Concluimos $\int_{\delta}^{\infty} e^{nh(x)}dx = e^{\frac{1}{2}nh(\delta)}[\leqslant(\delta)] = O\left(e^{\frac{1}{2}nh(\delta)}\right)$

En efecto, como $h(x)$ es creciente en $[-1, -\delta]$ se tiene

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{nh(x)}dx \leq e^{nh(-\delta)} \int_{-1}^{-\delta} dx = e^{nh(-\delta)}[1-\delta] = O\left(e^{nh(-\delta)}\right)$$

Por otra parte, al ser $h(x)$ decreciente en $[\delta, \infty)$ se tiene -- $nh(x) \leq nh(\delta)$ y $nh(x) \leq h(x)$ entonces $nh(x) \leq \frac{1}{2}[nh(\delta) + h(x)]$. De donde

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{nh(x)}dx \leq \int_{\delta}^{\infty} e^{\frac{1}{2}[nh(\delta)+h(x)]}dx = e^{\frac{1}{2}nh(\delta)} \int_{\delta}^{\infty} e^{h(x)}dx = O\left(e^{\frac{1}{2}nh(\delta)}\right)$$

Así pues, sólo nos resta calcular el valor de la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{nh(x)}dx$$

Para esto encontraremos dos cotas de esta integral cuya diferencia tenderá a cero conforme n tienda a infinito y δ, a cero. Si desarrollamos en series de Taylor, con centro en cero, el - log $(1+x)$ se tiene

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

donde

$$\left|\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \overset{(5)}{\leq} \frac{x^4}{2} \quad \forall x \in [-\delta,\delta]$$

Por lo cual $\frac{x^2}{2}[-1+\frac{2x}{3}-x^2] \leq h(x) \leq \frac{x^2}{2}[-1+\frac{2x}{3}+x^2]$. Además se tiene $\forall x \in [-\delta,\delta]$, que $x^2 \leq |x| \leq \delta$, por consiguiente $\frac{x^2}{2}[-1-\frac{5}{3}\delta] \leq h(x) \leq \frac{x^2}{2}[-1+\frac{5}{3}\delta]$.

Y resulta

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{x^2}{2}[1-\frac{5}{3}\delta]}dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{nh(x)}dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{x^2}{2}[1+\frac{5}{3}\delta]}dx$$

Por otro lado,

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}dx - \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}dx - \int_{\delta}^{\infty} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}dx \quad ...[1]$$

Ahora bien, por razonamientos muy similares a los que hicimos para demostrar que $\int_{\delta}^{\infty} e^{-nh(x)}dx \leq O(e^{\frac{1}{2}nh(\delta)})$, se tiene que

(5) Demostración

Si $0 \leq x \leq \delta$ entonces $\left|\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^k}{k} \leq \frac{1}{4}\sum_{k=4}^{\infty}x^k = \frac{1}{4}[\frac{x^4}{1-x}]$, a su vez, $\frac{1}{4}[\frac{x^4}{1-x}] \leq \frac{1}{4}[\frac{x^4}{1-1/2}] = \frac{x^4}{2}$. Por consiguiente $\left|\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{x^4}{2}$. Análogamente se demuestra que $\left|\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{x^4}{2}$ para $x \in [-\delta, 0]$.

$$\left| -\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}\,dx - \int_{\delta}^{\infty} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}\,dx \right| = 0(e^{-\alpha(\delta)n}) \ldots [2]$$

siendo $\alpha(\delta)$ una constante positiva que depende de δ y no de n.

Para calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}\,dx$$

Hagamos el siguiente cambio de variable. $w = x\sqrt{\frac{n}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}$. Tenemos en términos de w;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}\,dw = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n[1\pm\frac{5}{3}\delta]}}$$

Substituyendo [2] y esta última expresión en [1] obtendremos:

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{x^2}{2}[1\pm\frac{5}{3}\delta]}\,dx = \sqrt{2\pi}\; n^{-\frac{1}{2}}\,[1\pm\frac{5}{3}\delta]^{-\frac{1}{2}} + 0(e^{-\alpha(\delta)n})$$

Es claro que

$$[1+\frac{5}{3}\delta]^{-\frac{1}{2}} = 1-\varepsilon_1(\delta) \quad \text{y} \quad [1-\frac{5}{3}\delta]^{-\frac{1}{2}} = 1+\varepsilon_2(\delta),$$

donde $\varepsilon_1(\delta)$ y $\varepsilon_2(\delta)$ son positivas y tienden a cero conforme δ tiene a cero. Si $\delta > 0$ es fija tenemos, para n suficientemente grande, las desigualdades

$$|O(e^{-a(\delta)n})| < \min(\varepsilon_1(\delta),\ \varepsilon_2(\delta))\ \sqrt{2\Pi}\ n^{-\frac{1}{2}}$$

$$|O(e^{nh(-\delta)})| < \min(\varepsilon_1(\delta),\ \varepsilon_2(\delta))\ \sqrt{2\Pi}\ n^{-\frac{1}{2}}$$

$$|O(e^{+-\frac{n}{2}h(\delta)})| < \min(\varepsilon_1(\delta),\ \varepsilon_2(\delta))\ \sqrt{2\Pi}\ n^{-\frac{1}{2}}$$

en efecto, para cualquier constante $C > 0$, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{nc}} = 0$

A partir de esto podemos afirmar, para n suficiente grande, lo siguiente:

$$\sqrt{2\Pi}\ n^{-\frac{1}{2}}\ (1 - 3\varepsilon_1(\delta)) < \int_{-1}^{\infty} e^{nh(x)}dx < \sqrt{2\Pi}\ n^{-\frac{1}{2}}\ (1 + 3\varepsilon_2(\delta))$$

Como $\varepsilon_1(\delta)$ y $\varepsilon_2(\delta)$ son arbitrariamente pequeños si δ lo es, se deduce que

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{nh(x)}dx = \sqrt{2\Pi}\ n^{-\frac{1}{2}}\ [1 + o(1)]$$

Por lo que

$$e^{-n}(n)^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{nh(x)}dx = \sqrt{2\Pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ [1 + o(1)]$$

Concluimos finalmente:

$$n! = \sqrt{2\Pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ [1 + o(1)]$$

CAPITULO III

LA DERIVACIÓN QUE HACE POISSON DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE.

LA DERIVACIÓN DE POISSON A LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

Presentamos a continuación la demostración[1] que hace S.D.Poisson (1781-1840) de la siguiente proposición.

Si consideramos μ repeticiones independientes de un experimento A, el cuál tiene asociados dos eventos excluyentes E y F, con probabilidad respectivamente p_μ, q_μ. (Denotamos por p_μ, q_μ las probabilidades de los eventos E y F, ya que estas probabilidades dependen del número de repeticiones del experimento A, es decir, de μ). Entonces.

[I] Si $p_\mu = p$ y $q_\mu = q \ \forall \mu$, $(p, q \neq 0)$ tendremos

$$P\left\{ -u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} < \frac{n}{\mu} - q \leq u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right\}^{(2)} \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

---

(1) Esta demostración se encuentra en el libro de Simeon Denis Poisson RECHERCHES sur la PROBABILITE DES JUGEMENTS [3]." Investigaciones sobre la Probabilidad de los Juicios".

La derivación que hace Poisson de esta proposición contiene algunos resultados cuya justificación en bastante larga, y aún cuando Poisson bosqueja en cada caso su demostración, hacen que la derivación de esta proposición sea sumamente laboriosa y que se corra el peligro de que el razonamiento llevado a cabo por él quede un poco obscurecido.

Por esta razón, nos vimos obligados a modificar un poco la demostración original poniendo en un Apéndice la demostración de estos resultados y a justificar ciertos pasos de los mismos que Poisson no realiza y que pueden presentar cierta dificultad.

Además, se hicieron algunas modificaciones en lo que se refiere a relaciones asintóticas y a la notación. Todo esto con la finalidad de hacer la derivación más sencilla.

A pesar de todas estas modificaciones, creemos que la demostración que aquí se presenta deja intactos el razonamiento y los métodos utilizados por Poisson en su demostración.

(2) $A_\mu \sim B_\mu$ significa $\lim_{\mu \to \infty} \frac{A_\mu}{B_\mu} = 1$

Donde $u \in \mathbb{R}^+$ y n es el número de veces que ocurre F en las μ repeticiones del experimento A.

[II] Si q_μ tiende a cero conforme μ tiende a infinito, de tal forma que $q_\mu \cdot (\mu) = w$, w=cte. (en este caso q_μ, resp p_μ pueden valer cero)

Entonces;

(a) $P\{n \leq k\} \sim (1+\frac{w}{1}+\frac{w^2}{1.2}+\ldots+\frac{w^k}{1.2\ldots k})\,e^{-w}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

ó en forma equivalente (ya que $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{w^r}{r!} = e^w$

(b) $P\{n \leq k\} \sim 1-\frac{w^{k+1}e^{-w}}{1.2\ldots(k+1)}\left(1+\frac{w}{(k+2)}+\frac{w^2}{(k+2)(k+3)}+\ldots\right)$

Ahora bien, si observamos que $1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$ y por consiguiente

$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{u} e^{-t^2}dt$, obtenemos que una manera diferente de expresar [1] es la siguiente:

$$P\left\{-u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} < \frac{n}{\mu} - q \leq u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{u} e^{-t^2}dt$$

Forma muy conocida en la actualidad del Teorema Integral de De Moivre-Laplace.

Por otro lado, $\forall\ k \in \mathbb{Z}^+$

$$P\{n=k\} = P\{n \leq k\} - P\{n \leq k-1\}$$

De donde, aplicando [2(a)] resulta que

$$P\{n=k\} \sim \left(1+\frac{w}{1}+\frac{w^2}{1.2}+\frac{w^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{w^k}{1.2\ldots k}\right)e^{-w}$$

$$-\left(1+\frac{w}{1}+\frac{w^2}{1.2}+\frac{w^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{w^{k-1}}{1.2.3\ldots k-1}\right)e^{-w},$$

simplificando, se sigue

$$P\{n=k\} \sim \frac{w^k e^{-w}}{1.2\ldots k}, \forall\ k\in \mathbb{Z}^+ .$$

En el caso de k=0, de [H(a)] se obtiene

$$P\{n=o\} \sim e^{-w}$$

Y por consiguiente

$$P\{n=k\} \sim \frac{w^k e^{-w}}{1.2.3\ldots k}, \forall\ k\in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},$$

es decir, lo que hoy denominamos Distribución Poisson.

La idea de la demostración de [I], es la siguiente:

Poisson al calcular la probabilidad del evento $P\{L' < n \leq L\} = P\{n \leq L\} - P\{n \leq L'\}$ ($L \in \mathbb{Z}^+$, $L' \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) obtiene

$$P\{L' < n \leq L\} = p^{\mu} + \mu p^{\mu-1} q + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-L+1)}{1.2.3\ldots L} p^{\mu-L} q^{L}$$

$$- p^{\mu} + \mu p^{\mu-1} q + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-L+1)}{1.2.3\ldots L'} p^{\mu-L'} q^{L'}$$

Sin embargo, el cálculo de esta expresión se complica demasiado para valores muy grandes de μ, L, L', (μ-L) y (μ-L').

Poisson procede entonces a encontrar una expresión asintótica de esta suma, que le permita calcular esta probabilidad de una manera más sencilla, basándose en un método de P.S.Laplace. Este método consiste, en esencia, en obtener representaciones asintóticas de integrales definidas, (cuyos integrandos dependen de exponentes muy grandes) que tienen la propiedad de que su valor sobre todo el intervalo es "casi igual" a su valor en un subintervalo, (por lo regular, muy pequeño en relación al intérvalo) que contiene al punto donde el integrando alcanza el máximo valor. Para hacer esto, expresa $P\{n \leq L\}$ (respectivamente $P\{n \leq L'\}$), en otra forma ($P\{n \leq L\} = p^{\mu-L}$ [$1+(\mu-L)q+$ $+\frac{(\mu-L)(\mu-(L-1))}{1.2} q^2 + \ldots + \frac{(\mu-L)\ldots(\mu-1)}{1.2.3\ldots L} q^L$; resp $P\{n \leq L'\} = p^{\mu-L'}$ [$1+ \frac{(\mu-L')}{1} q + \ldots + \frac{(\mu-L')\ldots(\mu-1)}{1.2\ldots L'} q^{L'}$) que le es más fácil manejar, en este caso, como un cociente de integrales con estas características.

La idea de [II] es :

A partir de que Poisson obtiene la expresión

$$(p_\mu)^{\mu-k}\left[1+(\mu-k)q_\mu+\frac{(\mu-k)(\mu-(k-1))}{1.2}(q_\mu)^2+\ldots+\frac{(\mu-k)(\mu-(k-1))\cdots(\mu-1)}{1.2.3\ldots k}(q_\mu)^k\right]\ldots[**]$$

para $P\{n\leqslant k\}$, (la cuál sigue siendo muy difícil de calcular cuando la μ es grande) deriva otra más sencilla al obtener el límite cuando μ tiende a infinito de [* *].

Cabe señalar que la forma en que Poisson deriva [II] es fundamentalmente la misma que aparece en los textos modernos sobre probabilidad.

Sea $r=\dfrac{n-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}$ y $L\in\mathbb{Z}^+ \cdot\ni\cdot \dfrac{L-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}=u\in\mathbb{R}^+$. Además, sea

$L'\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\cdot\ni\cdot L'<L$ y $\dfrac{L'-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}\sim -u$(3). Entonces

$$P\left\{L'<n\leqslant L\right\} = P\left\{\frac{L'-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}<\frac{n-\mu p}{\sqrt{2\mu pq}}\leqslant\frac{L-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}\right\}$$

---

(3) Para ver que existe $L'\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ que satisface estas condiciones observamos que de $\dfrac{L-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}=u$, se sigue que $-u=\dfrac{-L+\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}$

Ahora bien, $X=-L+2\mu q$ es un número real que satisface $\dfrac{X-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}=-u$,

de donde, si hacemos $L'=-L+2[\mu_q]$ (siendo $[\mu q]$ el máximo entero menor ó igual que μq) tenemos $\dfrac{L'-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}\sim\dfrac{X-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}=-u$, es decir, $L'\in\mathbb{Z}\cup\{0\}\cdot\ni\cdot\dfrac{L'-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}}\sim -u$.

Por su parte no es difícil verificar que $L'\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ y $L'<L$.

Por otro lado $P\{L' < n \leq L\} = P\{n \leq L\} - P\{n \leq L'\}$

Ahora bien, $P\{n \leq L\}$ es la suma de los primeros $(L+1)$ términos del desarrollo de $(q+p)^{\mu}$, es decir,

$$P\{n \leq L\} = p^{\mu} + \mu p^{\mu-1} q + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-2} q^{2} + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-L+1)}{1.2.3\ldots L} p^{\mu-L} q^{L} ;$$

Sin embargo, el cálculo de esta expresión se complica demasiado para valores muy grandes de μ.

Por esta razón, Poisson procede a expresar $P\{n \leq L\}$ en otra forma que le es más fácil de manejar, en este caso, como un cociente de integrales a las cuales se puede aplicar el método de P.S. Laplace.

Así, Poisson denota por G al evento $\{n \leq L\}$, es decir, al evento {en μ experimentos F ocurre a lo más L veces}, que es equivalente a {en μ experimentos E ocurre al menos $(\mu-L)$ veces} y lo descompone en los siguientes L+1 eventos ajenos:

Sea Ai= {En μ experimentos E ocurre $\mu-L$ veces hasta el $(\mu-L+i)$-ésimo experimento}

Entonces $P(G) \overset{(4)}{=} P\left(\bigcup_{i=0}^{L} A_i\right) = \sum_{i=0}^{L} P(Ai)$, $\mu-L \leq m \leq \mu$

---

(4) Demostración

Si m es el número de veces que ocurre el evento E en μ experimentos y $Ci = \{$en μ experimentos $\mu-L \leq m \leq \mu-i\}$. Es claro que $Ai = Ai \cap Ci$, $\forall i$, de donde, $\bigcup_{i=0}^{L} Ai = \bigcup_{i=0}^{L} (Ai \cap Ci) = \{\bigcup_{i=0}^{L} Ai\} \cap \{\bigcup_{i=0}^{L} Ci\}$ y como $Ci \supset Ci+1$ $\forall i \in (0,\ldots,i-1)$ la última expresión resulta ser $\bigcup_{i=0}^{L} Ai \cap Co$.

Por otro lado $Co \supset Ai$ $\forall i$, con lo cuál $Co \supset \bigcup_{i=0}^{L} Ai$ y por consiguiente

$\bigcup_{i=0}^{L} Ai \cap Co = Co = \{$en μ experimentos , $\mu-L \leq m \leq \mu\} = G$

donde $P(A_0)=\binom{\mu-L}{0}p^{\mu-L}$, $P(A_1)=\binom{\mu-L}{1}p^{\mu-L}q,\ldots,P(A_L)=\binom{\mu-L}{L}p^{\mu-L}q^L$.

Se sigue de aquí que

$$P(G)=p^{\mu-L}+\frac{(\mu-L)p^{\mu-L-1}q}{1}+\frac{(\mu-L+1)(\mu-L)}{1.2}p^{\mu-L-2}q^2+\ldots+\frac{(\mu-1)\ldots(\mu-L)}{1.2.3\ldots L}p^{\mu-L}q^L,$$

haciendo $s=\mu-L$ y factorizando tenemos:

$$P(G)=p^s\left[1+sq+\frac{(s+1)s}{1.2}q^2+\ldots+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(s)}{1.2\ldots L}p^s q^L\right]\ldots\left[*\right]$$

Por otro lado

$$p^s\left[1+sq+\frac{(s+1)s}{1.2}q^2+\ldots+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots s}{1.2\ldots L}p^s q^L\right]=\frac{\int_{q/p}^{\infty}\frac{X^L}{(1+X)^{\mu+1}}dx}{\int_0^{\infty}\frac{X^L}{(1+X)^{\mu+1}}dx}$$

En efecto, integrando L+1 veces por partes y siendo C una constante arbitraria, se tendrá

$$\mu\int\frac{X^L}{(1+X)^{\mu+1}}dx=C-\frac{X^L}{(1+X)^{\mu}}-\frac{L\,X^{L-1}}{(\mu-1)(1+X)^{\mu-1}}-\frac{L(L-1)\,X^{L-2}}{(\mu-1)(\mu-2)(1+X)^{\mu-2}}\ldots$$

$$-\frac{L(L-1)(L-2)\ldots2.1}{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-L+1)(\mu-L)}\;\frac{1}{(1+X)^{\mu-L}}$$

Como $\mu>L$, todos los términos de esta fórmula se anulan cuando X tiende a infinito. Si α es una cantidad no negativa tendremos:

$$\mu\int_{\alpha}^{\infty}\frac{X^L}{(1+X)^{\mu+1}}dx=\frac{\alpha^L}{(1+\alpha)^{\mu}}+\frac{L\,\alpha^{L-1}}{(\mu-1)(1+\alpha)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{L(L-1)(L-2)\ldots1}{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-L)}\;\frac{1}{(1+\alpha)^{\mu-L}}$$

En el caso de $\alpha=0$, esta ecuación se reduce a

$$\mu\int_{0}^{\infty}\frac{X^{L}\,dx}{(1+X)^{\mu+1}}=\frac{L(L-1)(L-2)\ldots 1}{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-L)}\;;$$

Por lo anterior,

$$\frac{\displaystyle\int_{\alpha}^{\infty}\frac{X^{L}}{(1+X)^{\mu+1}}\,dx}{\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{X^{L}}{(1+X)^{\mu+1}}\,dx}=\frac{1}{(1+\alpha)^{\mu-L}}\left[1+\frac{(\mu-L)\alpha}{(1+\alpha)}+\ldots+\frac{(\mu-L)(\mu-L+1)(\mu-L+2)\ldots(\mu-1)}{1.2.3\ldots L}\,\frac{\alpha^{L}}{(1+\alpha)^{L}}\right]$$

Haciendo $\alpha=\frac{q}{p}$, y como $s=\mu-L$, $p+q=1$, se sigue;

$$\frac{\displaystyle\int_{\frac{q}{p}}^{\infty}\frac{X^{L}}{(1+X)^{\mu+1}}\,dx}{\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{X^{L}}{(1+X)^{\mu+1}}\,dx}=p^{s}\left[1+sq+\frac{(s+1)s}{1.2}\,q^{2}+\ldots+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots S}{1.2.3\ldots L}\,p^{S}\,q^{L}\right],$$

es decir, $P(G)=\dfrac{\displaystyle\int_{q/p}^{\infty}\frac{X^{L}}{(1+X)^{\mu+1}}\,dx}{\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{X^{L}}{(1+X)^{\mu+1}}\,dx}$

Por otra parte, para calcular $P\{n\leqslant L'\}$ (Denotaremos con G' al evento $\{n\leqslant L'\}$) se sustituye L' en lugar de L en los razonamientos anteriores y denotando por S' a la diferencia $\mu-L'$ resulta,

$$P\ (G') = \frac{\displaystyle\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{X^{L'}}{(1+X)^{\mu+1}}\,d\,x}{\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{X^{L'}}{(1+X)^{\mu+1}}\,d\,x}$$

Ahora bien, para el cálculo de este tipo de integrales, Poisson utiliza el método de Laplace obteniendo en general $a, b, c \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\} \ni.\ a+b=c$ y, $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{a}{c} = \alpha_1$, $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{b}{c} = \alpha_2$ donde α_1 y α_2 son dos constantes $\ni.$ $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$. Se tiene

$$\int_{0}^{\infty} \frac{X^{a}}{(1+X)^{c+1}}\,d\,x \sim \frac{a^{a}(b+1)^{b+1}\sqrt{\pi}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)\,a}{(b+1)^{3}}} \right\} \quad \ldots (a^{*})$$

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{X^{a}}{(1+X)^{c+1}}\,d\,x \sim \frac{a^{a}(b+1)^{b+1}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^{3}}} \int_{k}^{\infty} e^{-t^{2}}\,d\,t + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^{2}}\,e^{-k^{2}} \right\} \ldots (b^{*})$$

Si $\frac{q}{p} > \frac{a}{(b+1)}$

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{X^{a}}{(1+X)^{c+1}}\,d\,x \sim \frac{a^{a}(b+1)^{b+1}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^{3}}} \left(\sqrt{\pi} - \int_{k}^{\infty} e^{-t^{2}}\,d\,t \right) + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^{2}}\,e^{-k^{2}} \right\} \ldots (c^{*})$$

Si $\frac{q}{p} < \frac{a}{(b+1)}$, y siendo $K = \sqrt{a \operatorname{Log} \frac{a}{q(c+1)} + (b+1) \operatorname{Log} \frac{(b+1)}{p(c+1)}}$

(5) Véase Apéndice III, (A)

En nuestro caso, $L=\mu q+u\sqrt{2\mu pq}$, entonces $(s+1)=\mu p+1-u\sqrt{2\mu pq}$

(ya que $(s+1)=(\mu+1)-L=(\mu+1)(p+q)-\mu q-u\sqrt{2\mu pq}=\mu p+1-u\sqrt{2\mu pq}$) de donde

$\frac{L}{s+1}=\frac{\mu q+u\sqrt{2\mu pq}}{\mu p+1-u\sqrt{2\mu pq}}$. Si $\sqrt{\mu}>\frac{1}{u\sqrt{2pq}}$ se sigue que

$$\frac{L}{s+1}=\frac{\mu q+u\sqrt{2\mu pq}}{\mu p+1-u\sqrt{2\mu pq}}>\frac{\mu q}{\mu p}=\frac{q}{p}.$$

Así pues, si hacemos $a=L, b=s$ y $c=\mu$ hay que utilizar (a) y (c) para calcular $P(G)=P(n\leqslant L)$ $=P(n\leqslant\mu q+u\sqrt{2\mu pq})$. Por lo que

$$P(n\leqslant\mu q+u\sqrt{2\mu pq})\sim 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{K'}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{(\mu+L+1)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}\sqrt{(s+1)}\sqrt{(\mu+1)L}}e^{-k^2},$$

siendo $K'=\sqrt{L\,\mathrm{Log}\,\frac{L}{q(\mu+1)}+(s+1)\mathrm{Log}\,\frac{(s+1)}{p(\mu+1)}}$. Además, como

$\lim\limits_{\mu\to\infty}\frac{s}{s+1}=1$ y $\lim\limits_{\mu\to\infty}\frac{\mu}{\mu+1}=1$, resulta que:

$$P(n\leqslant\mu q+u\sqrt{2\mu pq})\sim 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{K'}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{(\mu+L)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi s\mu L}}e^{-(K')^2}$$

Para calcular $P(G')=P(n\leqslant L')=P(n\leqslant -L+2[\mu q])$ observamos que

$s'+1=(\mu+1)-L'=(\mu+1)(p+q)+\mu q+u\sqrt{2\mu pq}-2[\mu q]$ de donde

$$\frac{L'}{s+1}=\frac{-\mu q-u\sqrt{2\mu pq}+2[\mu q]}{(\mu+1)(p+q)+\mu q+u\sqrt{2\mu pq}-2[\mu q]}\leqslant\frac{-\mu q-u\sqrt{2\mu pq}+2\mu q}{(\mu+1)(1+q)+\mu q+u\sqrt{2\mu pq}-2\mu q}<\frac{\mu q}{\mu p}=\frac{q}{p}$$

y por consiguiente, si hacemos $L'=a$, $s'=b$ y $\mu=c$, hay que utilizar (a) y (b). Así:

$$P(n \leqslant -L+2\,|\mu q|) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k''}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{(\mu+1+L')\sqrt{2}\; e^{-(k'')^2}}{3\sqrt{\pi\,(s+1)\,(\mu+1)\,L'}}$$

donde $K'' = \sqrt{L'\,\mathrm{Long}\,\frac{L'}{q(\mu+1)} + (s'+1)\,\mathrm{Log}\,\frac{(s'+1)}{p(\mu+1)}}$. Además, como

$P(n \leqslant -L+2\,|\mu q|) = P(n \leqslant -\mu q - u\sqrt{2\mu pq} + 2|\mu q|) = P(n \leqslant \mu q - u\sqrt{2\mu pq})$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{(\mu+1+L')}{(\mu+L')} = 1$,

$\lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{(s'+1)}{s'} = 1$ y $\lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{(\mu+1)}{\mu} = 1$. Se deduce

$$P(n \leqslant \mu q - u\sqrt{2\mu pq}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k''}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{(\mu+L')\sqrt{2}\; e^{-(k'')^2}}{3\sqrt{\pi\, s'\mu L'}}$$

Por lo que

$$P\left\{\mu q - u\sqrt{2\mu pq} < n \leqslant \mu q + u\sqrt{2\mu pq}\right\} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k''}^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k'}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$+ \frac{(\mu+L)\sqrt{2}\; e^{-(k')^2}}{3\sqrt{\pi\, s\mu L}} - \frac{(\mu+L')\sqrt{2}\; e^{-(K'')^2}}{3\sqrt{\pi\, s'\,\mu\, L'}}$$

Sin embargo, $L \sim \mu q$, $L' \sim \mu q$, $s \sim \mu p$, $s' \sim \mu p$. Sustituyendo y simplificando, la relación anterior se transforma en:

$$P\left\{\mu q - u\sqrt{2\mu pq} < n \leqslant \mu q + u\sqrt{2\mu pq}\right\} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k''}^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k''}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$+ \frac{(1+q)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi\,\mu\, pq}} \left(e^{-(k')^2} - e^{-(k'')^2}\right)$$

A partir de esto, Poisson procede a encontrar una expresión asintótica para K' y K" obteniendo[6]

$$K' \sim u - \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} \quad , \quad K'' \sim u + \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}$$

Además, como $u - \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}$ y $u + \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} \sim u$, se sigue que

$K' \sim u$ y $K'' \sim u$ y por consiguiente $e^{-(K')^2} \sim e^{-(u)^2}$ y $e^{-(K'')^2} \sim e^{-(u)^2}$.

Sustituyendo en la relación anterior, ésto resulta ser.

$$P\{\mu q - u\sqrt{2\mu pq} < n \leq \mu q + u\sqrt{2\mu pq}\} \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

ó, en forma equivalente,

$$P\left\{-u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} < \frac{n}{\mu} - q \leq u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right\} \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

A continuación, Poisson hace la observación de que si queremos calcular $P\{\mu q - u\sqrt{2\mu pq} \leq n \leq \mu q + u\sqrt{2\mu pq}\}$ hay que añadirle a $P\{\mu q - u\sqrt{2\mu pq} < n \leq \mu q + u\sqrt{2\mu pq}\}$, $P\{n = L'\}$. De la misma manera, si queremos calcular $P\{\mu q - u\sqrt{2\mu pq} < n < \mu q + u\sqrt{2\mu pq}\}$ hay que restarle $P\{n = L\}$. Al calcular esta última probabilidad obtiene;

$$P\{n = L\} = P\left\{\frac{n - \mu q}{\sqrt{2\mu pq}} = \frac{L - \mu q}{\sqrt{2\mu pq}} = u\right\} \sim \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

(6) Véase Apéndice III, (B).

es fácil ver que también $P\{n=L\} \sim \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$.

Como podemos observar, este resultado es una parte del Teorema Integral de De Moivre-Laplace.

Mostraremos la manera en que deriva este resultado, que como veremos, es la misma que aparece en los textos modernos de Teoría de la Probabilidad.

Demostración

Claramente $P\{n=L\} = P\left\{\dfrac{n-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}} = \dfrac{L-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}} = u\right\} = \dfrac{\mu!\, p^L q^{\mu-L}}{L!\,(\mu-L)!}$ . . . III

Debido a que el cálculo de esta expresión es muy complicado para valores de μ, L y $(\mu-L)$ muy grandes, Poisson, con la finalidad de simplificar este cálculo, utiliza expresiones asintóticas para $\mu!L!$ y $(\mu-L)!$ muy similares a las que se obtienen cuando se utiliza la fórmula de De Moivre-Stirling[7] la cual él ya conocía. Estas son;

IV

(a) $L! = o\,(\sqrt{2\pi L}\;\; L^L)$

(b) $(\mu-L)! = o\,(\sqrt{2\pi(\mu-L)}\;(\mu-L)^{(\mu-L)})$

(c) $\mu! = o\,(\sqrt{2\pi\mu}\;\; \mu^{\mu})$

Demostración de (a)

---

(7) La fórmula de De Moivre-Stirling nos asegura que $Z! \sim \sqrt{2\pi Z}\, Z^Z e^{-Z}$, $Z \in N$

(8) $A_\mu = o(B_\mu)$ significa $\lim \dfrac{A_\mu}{B_\mu} = 0$

Por la fórmula de De Moivre-Stirling $L! \sim \sqrt{2\pi L}\, L^L e^{-L}$ y como $\lim\limits_{L\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi L}\, L^L e^{-L}}{\sqrt{2\pi L}\, L^L} = 0$

se sigue que $L! = o\,(\sqrt{2\pi L}\, L^L)$, las otras dos afirmaciones se demuestran de la misma manera.

V

$$\frac{\mu!}{L!\,(\mu-L)!} \sim \sqrt{\frac{\mu}{2\pi L(\mu-L)}}\,\left(\frac{\mu}{L}\right)^L \left(\frac{\mu}{\mu-L}\right)^{\mu-L}$$

Demostración

Por la Fórmula de De Moivre-Stirling se tiene que $L! \sim \sqrt{2\pi L}\, L^L e^{-L}$, $\mu! \sim \sqrt{2\pi\mu}\;\mu^\mu e^{-\mu}$; $(\mu-L)! \sim \sqrt{2\pi(\mu-L)}\,(\mu-L)^{(\mu-L)}\, e^{-(\mu-L)}$ y de aquí

$$\frac{\mu!}{L!\,(\mu-L)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi\mu}\;\mu^\mu e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi L}\, L^L e^{-L} \sqrt{2\pi(\mu-L)}\,(\mu-L)^{(\mu-L)}\, e^{-(\mu-L)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi L(\mu-L)}}\,\left(\frac{\mu}{L}\right)^L \left(\frac{\mu}{\mu-L}\right)^{(\mu-L)}$$

Sustituyendo (V) en (III) obtenemos

$$P\,\{n=L\} \sim \sqrt{\frac{\mu}{2\pi L(\mu-L)}}\,\left(\frac{\mu p}{L}\right)^L \left(\frac{\mu q}{L}\right)^{\mu-L} \qquad \ldots\ (VI)$$

Así pues, hemos obtenido una expresión asintótica de $P\{n=L\}$ que nos facilita su cálculo para valores muy grandes de μ, L y $(\mu-L)$.

Sin embargo, podemos hacer aún más fácil este cálculo si observamos que;

$$\text{Log } \left(\frac{\mu p}{L}\right)\left(\frac{\mu q}{L}\right)^{\mu-L} = L \text{ Log } \left(\frac{\mu p}{L}\right) + (\mu - L) \text{ Log } \left(\frac{\mu q}{L}\right)$$

$$= (\mu p + u\sqrt{2\mu pq}) \text{ Log } \left(\frac{\mu p}{\mu p + u\sqrt{2\mu pq}}\right) + (\mu q - u\sqrt{2\mu pq}) \text{ Log } \left(\frac{\mu q}{\mu q - u\sqrt{2\mu pq}}\right)$$

$$= -(\mu p + u\sqrt{2\mu pq}) \text{ Log } \left(1 + \frac{u}{p}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right) - (\mu q - u\sqrt{2\mu pq}) \text{ Log } \left(1 - \frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)$$

Y, (Al desarrollar en series de Taylor con centro en cero)

$$\text{Log } \left(1 - \frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right) \overset{(9)}{=} -u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} - \frac{u^2 p}{\mu q} + 0\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\log \left(1 + \frac{u}{p}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right) \overset{(10)}{=} u\sqrt{\frac{2q}{\mu p}} - \frac{u^2 q}{\mu p} + 0\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Para $\sqrt{\mu} > [\max \{ |u| \sqrt{\frac{2q}{p}}, |u| \sqrt{\frac{2p}{q}} \}]$

Por lo que:

$$\text{Log } \left(\frac{\mu p}{L}\right)^{L}\left(\frac{\mu q}{\mu - L}\right)^{\mu - L} = -(\mu p + u\sqrt{2\mu pq})\left\{u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} - \frac{u^2 p}{\mu q} + 0\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}$$

$$-(\mu q - u\sqrt{2\mu pq})\left\{-u\sqrt{\frac{2q}{\mu p}} - \frac{u^2 q}{\mu p} + 0\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} \sim -u^2$$

(9) y (10) Véase Apéndice III (c)

Y de aquí, $\left(\frac{\mu p}{L}\right)^L \left(\frac{\mu q}{\mu - L}\right)^{\mu - L} \sim -u^2$. Asimismo, se tiene

$$\frac{L(\mu-L)}{\mu} = \frac{(\mu p+u\sqrt{2\mu pq})(\mu q-u\sqrt{2\mu pq})}{\mu} = \frac{\mu^2 \left(p+u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)\left(q-u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)}{\mu}$$

$$= \mu \left(p+u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)\left(q-u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right) \sim \mu pq \text{, es decir, } \frac{L(\mu-L)}{\mu} \sim \mu pq$$

y por consiguiente (VI) se transforma en:

$$P\{n=L\} = P\left[\frac{n-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}} = \frac{L-\mu q}{\sqrt{2\mu pq}} = u\right] \sim \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

Por otra parte, para la derivación de [II] Poisson sigue el si guiente razonamiento:

Sustituyendo k, μ-k, p_μ y q_μ por L, μ-L=s, p y q, respectivamen te, en [*], se obtiene;

$$P\{n\leqslant k\}=(p_\mu)^{\mu-k}\left[1+(\mu-k)q_\mu+\frac{(\mu-k)(\mu-(k-1))}{1.2}(q_\mu)^2+\ldots+\frac{(\mu-k)(\mu-(k-1))\ldots(\mu-1)}{1.2.3\ldots k}(q_\mu)^k\right]\cdots[**]$$

Además, como $q_\mu \cdot (\mu) = w$, $\forall \mu$ w=cte se sigue que $q_\mu = \frac{w}{\mu}$ y $p_\mu = 1-q_\mu = (1-\frac{w}{\mu})$

Sustituyendo en [**], tendremos

$$P(n\leqslant k)=(1-\frac{w}{\mu})^\mu(1-\frac{w}{\mu})^{-k}\left[1+(1-k)(\frac{w}{n})+\frac{(\mu-k)(\mu-(k-1))}{1,2}(\frac{w}{\mu})^2+\ldots+\frac{(\mu-k)(\mu-(k-1)\ldots(\mu-1)}{1.2.3\ldots k}(\frac{w}{\mu}\right.$$

$$=\left(1-\frac{w}{\mu}\right)^{\mu}\left(1-\frac{w}{\mu}\right)^{-k}\left[1+\left(1-\frac{k}{\mu}\right)\frac{w}{1}+\left(1-\frac{k}{\mu}\right)\left(1-\frac{k-1}{\mu}\right)\frac{w^2}{1.2}+\ldots+\left(1-\frac{k}{\mu}\right)\left(1-\frac{(k-1)}{\mu}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\frac{w^k}{1.2\ldots k}\right]$$

Poisson procede a calcular el límite de este producto cuando μ tiende a infinito. Así:

$$\lim_{\mu\to\infty}\left(1-\frac{w}{\mu}\right)^{\mu}= e^{-w},\quad \lim\left(1-\frac{w}{\mu}\right)^{-k}= 1,$$ (ya que la k es fija)

$$y \lim_{\mu\to\infty}\left(1+\left(1-\frac{k}{\mu}\right)\frac{w}{1}+\left(1-\frac{k}{\mu}\right)\left(1-\frac{(k-1)}{\mu}\right)\frac{w^2}{1.2}+\ldots+\left(1-\frac{k}{\mu}\right)\left(1-\frac{(k-1)}{\mu}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\frac{w^k}{1.2\ldots k}\right)$$

$$=\left(1+\frac{w}{1}+\frac{w^2}{1.2}+\ldots+\frac{w^k}{1.2\ldots k}\right)$$

y, por consiguiente

$$P(n\leqslant k)\sim\left(1+\frac{w^1}{1}+\ldots+\frac{w^k}{1.2\ldots k}\right)e^{-w}$$

Finalmente, si sumamos y restamos $\left(\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{w^r}{r!}\right)e^{-w}$ a esta última expresión tendremos que otra forma de expresar la relación anterior es la siguiente:

$$P(n\leqslant k)\sim 1-\frac{e^{-w}\; w^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)}\left(1+\frac{w}{(k+2)}+\frac{w^2}{(k+2)(k+3)}+\ldots\right)$$

APENDICE III

[A]

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}^{+} \cdot\ni\cdot\ a+b=c$ y $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{a}{c} = \mathbb{C}_1$, $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{b}{c} = \mathbb{C}_2$, donde $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ son dos constantes $\cdot\ni\cdot\ \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2 \in (0,1)$. Se tiene

$$\int_{a}^{\infty} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{c+1}} \sim \frac{a^{a}(b+1)^{b+1}\sqrt{\pi}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^{3}}} \right\} \quad \ldots(a^{*})$$

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} \sim \frac{a^{a}(b+1)^{(b+1)}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^{3}}} \int e^{-t^{2}}dt + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^{2}}\, e^{-k^{2}} \right\} \ldots(b^{*})$$

Si $\frac{q}{p} > \frac{a}{(b+1)}$

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} \sim \frac{a^{a}(b+1)^{(b+1)}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^{3}}} \left(\sqrt{\pi} - \int_{k}^{\infty} e^{-t^{2}} \right) + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^{2}}\, e^{-k^{2}} \right\} \ldots(c^{*})$$

Si $\frac{q}{p} < \frac{a}{(b+1)}$, y siendo $k = \sqrt{a \operatorname{Log} \frac{a}{q(c+1)} + (b+1) \operatorname{Log} \frac{(b+1)}{p(c+1)}}$

Para la derivación de estos resultados seguiremos el razonamiento [1]

(1) Las Justificaciones de los resultados que aparecen en este Apéndice que Poisson no realiza les hemos antepuesto el símbolo(*)

hecho por Poisson.

[1] Sea $f(x) = \dfrac{X^a}{(1+X)^{(c+1)}}$, $X \in [0,\infty]$, entonces, $f(x)$ alcanza su valor máximo cuando $x = \dfrac{a}{(b+1)}$.

Demostración. Simplificando, las dos primeras derivadas se reducen a:

$$f'(x) = \frac{X^{(a-1)}\{a(1+x)-(c+1)x\}}{(1+x)^{(c+2)}} \quad , \quad \forall x \in (0,\infty)$$

$$f''(x) = \frac{X^{(a-2)}(1+X)^{(c+1)}\left[\{a(1+x)-(c+1)x\}\{(a-1)(1+x)-(c+2)x\}-(b+1)x(1+x)\right]}{(1+x)^{2(c+2)}} \quad , \forall x \in (0$$

como $x \in (0,\infty)$, entonces $f'(x)=0$ si y solo si $\{a(1+x)-(c+1)x\}=0$ y esta relación se satisface para $x = \dfrac{a}{(b+1)}$. Asimismo

$$f''\left(\frac{a}{b+1}\right) = \frac{-(b+1)^{(b+4)}a^{(a-1)}}{(c+1)^{(c+2)}} < 0 ,$$ por consiguiente $f(x)$ alcanza su valor máximo cuando $x = \dfrac{a}{b+1}$.

Antes de continuar con la descripción de los pasos hechos por Poisson para la obtención del valor de

$$\int_0^\infty \frac{X^a}{(1+x)^{(c+1)}}\, dx$$

mostraremos que la integral

$$\int_0^\infty \frac{X^a}{(1+x)^{(c+1)}}\, dx$$

tiene propiedades que sugieren la posibilidad de utilizar el método de Laplace para calcular su valor.

En [1] hemos visto que $f(x)= \dfrac{X^{a}}{(1+X)^{(c+1)}}$, $X \in [0, \infty)$ alcanza su máximo valor cuando $X= \dfrac{a}{b+1}$. Si denotamos por δ_1, δ_2 dos constantes reales tales que $0 < \delta_1 < \dfrac{a}{b+1}$, $\delta_2 > \dfrac{a}{b+1}$ podemos representar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{X^{a}}{(1+x)^{(c+1)}} \, dx$$

como la suma siguiente;

$$\int_0^{\delta_1} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} + \int_{\delta_2}^{\infty} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}}$$

Además.

$$\int_0^{\delta_1} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} < \int_0^{\delta_1} \frac{(1+X)^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = \int_0^{\delta_1} \frac{dx}{(1+X)^{(c+1)}} = \frac{(1+\delta_1)^{b}-1}{b(1+\delta_1)^{b}} < \frac{1}{b}$$

$$\int_{\delta_2}^{\infty} \frac{X^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} < \int_{\delta_2}^{\infty} \frac{(1+X)^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = \int_{\delta_2}^{\infty} \frac{dx}{(1+X)^{(b+1)}} = \frac{1}{b(1+\delta_2)^{b}}$$

Y por consiguiente

$$\int_0^{\delta_1} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = 0\left(\frac{1}{b}\right), \int_{\delta_2}^{\infty} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = 0\left(\frac{1}{b(1+\delta_2)^b}\right),$$

donde $\mathrm{Lim}\, \frac{1}{b} = 0$ y $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{b(1+\delta_2)^b} = 0$

Así pues, el valor $\int_0^{\infty} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}}$ para valores muy grandes de **c** es casi igual al valor de $\int_{\delta_1}^{\infty} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}}$ para valores muy grandes.

De aquí en adelante, denotaremos por h el punto donde f(X) alcanza su valor máximo y por H el valor máximo de f(X), ó sea

$$h = \frac{a}{b+1} \quad y \quad H = \frac{h^a}{(1+h)^{(c+1)}}$$

2] Sea t (X) talque

$$t(X) = \begin{cases} +\sqrt{\mathrm{Log}\, H - \log \frac{X^a}{(1+X)^{(c+1)}}}, & \text{si } X \geq h \\ -\sqrt{\mathrm{Log}\, H - \log \frac{X^a}{(1+X)^{(c+1)}}}, & \text{si } X < h, \end{cases}$$

es decir t(X) es una función que satisface $\frac{X^a}{(1+X)^{(c+1)}} = H\, e^{-\{t(X)\}^2}$

Entonces;

a) t(X) es analítica en $(0, \infty)$ b) $t'(h) > 0$

a) Demostración.(*)

Sea $g(X) = \log H - \mathrm{Log}\, \frac{X^a}{(1+X)^{(c+1)}}$, es claro que g(X) es analítica en $(0,\infty)$ $g(X) > 0 \ \forall X \in \{(0,\infty) \setminus h\}$. Por un resultado bastante conocido del análisis (si $g(X) > 0$ es analítica en un intervalo cualquiera entonces $\sqrt{g(X)}$ es analítica en ese intervalo) tenemos que $\sqrt{g(X)}$ es analítica en $\{(0,\infty)\setminus h\}$. Además, como el producto de funciones analíticas es analítico, se sigue, en particular, que $-\sqrt{g(X)}$ es analítica en $\{(0,\infty)\setminus h\}$. Por todo esto, podemos concluir que $t(X)$ es analítica en $\{(0,\infty)\setminus h\}$. Así pues, sólo nos resta por demostrar que $t(X)$ es analítica en h. Con esta finalidad demostraremos las dos proposiciones siguientes:

c) La función $g(X)$ es de orden 2 en h (es decir, la primera derivada que no se anula en h es la segunda) y por consiguiente, dado que $g(X)$ es analítica en $(0,\infty)$ la podemos expresar en la forma siguiente:

$$g(X) = a_2(X-h)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k (X-h)^k \qquad \forall X \in (-R_h + h, R_h + h),$$

donde, R_h es un número real positivo que depende de h y

$$a_2 = \frac{f''(h)\,f(h)}{2!\,[f(h)]^2} > 0,$$

d) Si denotamos por $\psi(X)$ a :

$$\psi(X) = \begin{cases} \sqrt{(X-h)^2}, & \text{si } X \geq h \\ -\sqrt{(X-h)^2}, & \text{si } X < h \end{cases}$$

Entonces. $\psi(X)$ es analítica en h.

c) Demostración(*)

$$g(X) = \text{Log } H - \text{Log } \frac{X^a}{(1+X)^{(c+1)}}$$, o bien, $g(X) = \text{Log } H - \text{Log } f(X)$, se

sigue que $g'(X) = \frac{-f'(X)}{f(X)}$, y de aquí $g'(h) = 0$. Asimismo

$$g''(X) = \frac{-f''(X)f(X) + [f(X)]^2}{[f(X)]^2}$$. Por lo que $g''(h) = \frac{-f''(h)f(h)}{[f(h)]^2} > 0$.

Ahora bien, $g(X)$ es analítica en h, es decir $\exists\, R_h > 0 \,/\!\!.\; \forall X \in$ $(-R_h + h,\ R_h + h)$ podemos expresar a $g(X)$ como una serie de Taylor con centro en h tenemos;

$$g(X) = a_2(x-h)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k (x-h)^k \quad \forall X \in (-R_h + h,\ R_h + h).$$

siendo

$$a_2 = -\frac{f''(h)f(h)}{2![f(h)]^2} > 0$$

d) Demostración.

Si $X \geq h$ entonces $\psi(X) = \sqrt{(x-h)^2} = |x-h| = (X-h)$

Si $X < h$ entonces $\psi(X) = -\sqrt{(x-h)^2} = -|x-h| = -(-(x-h)) = (x-h)$

de donde, $\psi(x) = (x-h)$. Como sabemos un polinomio de primer grado es analítico en todo su dominio, que en este caso es $(0,\infty)$, y el radio de convergencia $\forall\, x_i \in (0,\infty)$ es

$$\{x\in(0,\infty)\ .\!\!\ni.\ |x-x_1|<M\quad M\in(0,\infty)\}\ .$$

Ahora bien, por (c)

$$g(x)=a_2(x-h)^2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(x-h)^k\ ,\ \forall x\in(-R_h+h,\ R_h+h)$$

$$=(x-h)^2\left\{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(x-h)^{k-2}\right\}\ ,$$

pero, $a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(k-h)^{k-2}$ tiene el mismo radio de convergencia de $g(x)\ \forall x\in(0,\infty)$ y es positiva en h por lo que $\forall x\in(-R_h+h,R_h+h)$ $\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(x-h)^{k-2}}$ converge, es decir $\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(x-h)^{k-2}}$ es analítica en h.

Y de aquí

$$t(X)=\begin{cases}+\sqrt{\log H-\mathrm{Log}\dfrac{X^a}{(1+X)^{c+1}}} & \text{si } x\geq h\\[2ex] -\sqrt{\log H-\log\dfrac{X^a}{(1+X)^{c+1}}} & \text{si } x<h\end{cases}$$

ó lo que es lo mismo $t(X)=(X-h)\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}(X-h)^{k-2}}\quad\forall x\in(0,\infty)$ converge en $\{X\in(0,\infty)\ .\!\!\ni.\ |X-h|<R_h\}$. Por lo que $t(X)$ es analítica en h y por consiguiente $t(X)$ es analítica en $(0,\infty)$.

b) Demostración.

Por lo anterior tenemos que $\forall X\in(0,\infty)\ .\!\!\ni.\ |X-h|<R_h$

$t(X)=(X-h)\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}}$ converge si derivamos $t(X)$ obtenemos;

$$T'(X)=\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}}+\frac{\frac{d}{dx}\left|\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}\right|}{2\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}}}$$

Sin embargo, como $\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}$ converge en $\{X . \ni . |X-h|<Rh\}$ se sigue que $\frac{d}{dx}\left\{\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}\right|$ converge en el mismo intervalo y es igual a

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{d}{dx}\left\{a_k(X-h)^{k-2}\right|=\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)a_k(X-h)^{k-3}$$

por lo que la expresión anterior resulta ser:

$$\sqrt{a_2+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}}+\frac{\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)a_k(X-h)^{k-3}}{2\sqrt{a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(X-h)^{k-2}}}$$

y de aquí, se deduce que $t'(h)=\sqrt{a_2}>0$.

El hecho de que $t(X)$ sea analítica en h y $t'(h)>0$ nos asegurá que su inversa $X(t)$ es analítica en cero, es decir:

3] $\exists$ $R_0>0 . \ni . \forall t$ que satisface $|t-0|<R_0$ podemos expresar a $X(t)$ como una serie de potencias convergente.

$$X(t)=h+\sum_{z=1}^{\infty}K^{(z)}t^{z}$$

4]
$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}} \overset{(2)}{=} H \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} \frac{d\{h+\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z\}}{dt} \, dt = H \sum_{z=1}^{\infty} z K^{(z)} \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} t^{z-1} \, dt$$

Demostración:

Por [2] es claro que;

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = H \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} \frac{d\{X(t)\}}{dt} \, dt$$

Además, por [3] , $X(t)= h+\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z$ converge $\forall\, t \ni . |t| < R_\theta$

y como $t(X)$ es continua y creciente podemos escoger $\delta_1, \delta_2 \ni .$ $0 < \delta_1 < h$, $\delta_2 > h$ de tal forma que $t(\delta_2) < R_\theta$. Además:

$$\frac{d\{h+\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z\}}{dt} = \frac{d\{\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z\}}{dt} \text{ , por lo que,}$$

$$H \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} \frac{d\{h+\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z\}}{dt} \, dt = H \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} \frac{d\{\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z\}}{dt} \, dt$$

---

(2) Poisson obtiene:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = H \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{d\{h+\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^z\}}{dt} \, dt = H \sum_{z=1}^{\infty} z K^{(z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{z-1} \, dt$$

Ahora bien, como $\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^{z}$ converge $\forall$ t.), $|t| < R_0$, se sigue

$$\frac{d\left\{\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^{z}\right\}}{dt} = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left\{K^{(z)} t^{z}\right\} = \sum_{z=1}^{\infty} z\, K^{(z)}\, t^{z-1} .$$

Esta última sumatoria converge en todo intervalo cerrado contenido en $(-R_0, R_0)$ en particular en $|t(\delta_1), t(\delta_2)|$. A partir de esto, se sigue fácilmente que $\sum_{z=1}^{\infty} e^{-t^2} K^{(z)} t^{z-1}$ converge uniformemente en $|t(\delta_1), t(\delta_2)|$, por lo cual;

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{X^a \, dx}{(1+X)^{(c+1)}} = H \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} \frac{d\{h+\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^{z}\}}{dt} dt = H \sum_{z=1}^{\infty} Z\, K^{(z)} \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} t^{z-1}\, dt$$

Sin embargo , si Z es un número par, la función $e^{-t^2} t^{z-1}$ es impar. Si escogemos δ_1, δ_2 de tal forma que $t(\delta_2) = -t(\delta_1)$, se deduce, que la última integral es:

$$H\, K^{(1)} \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} dt + H \sum_{z=1}^{\infty} (2Z+1)\, K^{(2z+1)} \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} t^{2z}\, dt \quad \ldots |5|$$

6| Para determinar los coeficientes $K^{(Z)}$, $Z=1,\ldots\infty$ de esta serie Poisson hace, en términos generales, el siguiente razonamiento. Por |2| se tiene,

$$\frac{X^a}{(1+X)^{c+1}} = H\, e^{-t^2} \quad \text{ó, lo que es lo mismo,} \quad \text{Log}\, \frac{X^a}{(1+X)^{c+1}} - \text{Log}\, K + t^2 = 0$$

Si desarrollamos en series de Taylor $\text{Log } \frac{X^a}{(1+X)^{c+1}}$, con centro en h, obtenemos:

$$\text{Log } \frac{X^a}{(1+X)^{c+1}} = \text{Log } H + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \left[a \left[\sum_{w=0}^{r-1} \binom{r}{w} K^w \right] - K^r (b+1) \right]}{} (X-h)^r ,$$

ya que la primera derivada de $\log \frac{X^a}{(1+X)^{c+1}}$ evaluada en h se anula por donde la función alcanza el máximo. Así, la igualdad anterior se transforma en:

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \left[a \left[\sum_{w=0}^{r-1} \binom{r}{w} K^w \right] - K^r (b+1) \right] (X-h)^r}{r\, [h(1+h)]^r} + t^2 = 0$$

Además, como $X'(t) = X(t) - h = \sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^{(z)}$ substituyendo tenemos:

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \left[a \left[\sum_{w=0}^{r-1} \binom{r}{w} K^w \right] - K^r (b+1) \right] \left[\sum_{z=1}^{\infty} K^{(z)} t^{(z)} \right]^r}{r\, [h(1+h)]^r} + t^2 = 0$$

Para determinar $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, ..., etc., igualamos la suma de los coeficientes de las potencias de t a cero. Por ejemplo para t^2

$$- \left[\frac{\left[a \left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1} h \right] - \left(K^{(1)} \right)^2 (b+1) \right]}{2 [h(1+h)]^2} - 1 \right] t^2 = 0 ,$$

simplificando, se deduce que $(K^{(1)})^2 = \frac{2[h(1+h)]^2}{[a+2ha-h^2(b+1)]}$ y de aquí, $K^{(1)} = \sqrt{\frac{2a(c+1)}{(b+1)^3}}$.

Hasta ahora, hemos encontrado una representación bastante com-

de la integral $\displaystyle\int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} \frac{x^a\,dx}{(1+x)^{(c+1)}}$, y por consiguiente, de la

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(1+x)^{(c+1)}}$. Sin embargo esta representación se puede simpli

ficar sensiblemente si buscamos una expresión asintótica a --

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(1+x)^{(c+1)}}.$$

Para esto, observemos que, por un lado podemos escoger δ_1, δ_2 $\cdot\ni\cdot$ $-1 < t(\delta_1) < 0$ y $0 < t(\delta_2) < 1$ y por otro, como comenta -- Poisson[(3)], "cuando a, b, c, sean números muy grandes y del - mismo orden de magnitud, es fácil ver que estos valores de las cantidades $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$, etc., formarán una serie que decrece muy rapidamente, cuyo primer terminos $K^{(1)}$ será del mismo orden de pequeñez que la fracción $\frac{1}{\sqrt{c}}$ el segundo término $K^{(2)}$ del orden de $\frac{1}{c}$, el tercero $K^{(3)}$ de $\frac{1}{c\sqrt{c}}$, y así sucesivamente". Y de aquí.

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(1+x)^{(c+1)}} \sim H\sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^3}} \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2}\,dt.$$

(3) Veáse [3], (pp. 193).

Y como $\sqrt{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \int_{t(\delta_1)}^{t(\delta_2)} e^{-t^2} dt$, concluimos.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a \, dx}{(1+x)^{(c+1)}} \sim \Pi \sqrt{\frac{2(c+1)a!!}{(b+1)^3}} = \frac{a^a (b+1)^{(b+1)} \sqrt{\Pi}}{(c+1)^{(c+1)}} \sqrt{\frac{2a(c+1)}{(b+1)^2}} \quad \ldots \text{(a*)}$$

Un resultado muy similar a este, se puede deducir de una manera menos laboriosa directamente la fórmula de De Moivre-Stirling, cabe señalar que Poisson deriva esta fórmula utilizando el método de Laplace[4], para esto observemos que:

Integrando (a + 1) veces por partes, se obtiene.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a \, dx}{(1+1)^{(c+1)}} = \frac{a!}{(c)(c-1)\cdots(b)} = \frac{a!(b-1)!}{c!}$$

Utilizando la Fórmula de De Moivre-Stirling y simplificando, se deduce:

$$\frac{a!(b-1)!}{c!} = \frac{a^a (b-1)^{(b+1)} \sqrt{\Pi}}{(c)^{(c+1)}} \sqrt{\frac{2ac}{(b-1)^3}} \quad e$$

(4) Veáse [3] (pp 172-177) ó bien, Apéndice [II]

Si dividimos $\dfrac{a^{a}(b-1)^{(b+1)}\sqrt{\Pi}}{(c)^{(c+1)}}$ e entre $\dfrac{a^{a}(b+1)^{(b+1)}\sqrt{\Pi}}{(c+1)^{(c+1)}}$

y, $\sqrt{\dfrac{2ac}{(b-1)^{3}}}$ entre $\sqrt{\dfrac{2a(c+1)}{(b+1)^{3}}}$, obtenemos respectivamente --

$$\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c}\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{2}{b+1}\right)^{b+1},\sqrt{\left(1+\frac{2}{(b-1)}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{c+1}\right)}$$

tomando el límite cuando c tiende a infinito, resulta que el producto de estas dos expresiones es 1 y, por consiguiente,

$$\frac{a^{a}(b+1)^{(b+1)}\sqrt{\Pi}}{(c+1)^{(c+1)}}\sqrt{\frac{2a(c+1)}{(b+1)^{3}}}\sim\frac{a^{a}(b-1)^{(b+1)}\sqrt{\Pi}}{(c)^{(c+1)}}\sqrt{\frac{2ac}{(b-1)^{3}}}\ e$$

En el caso de la integral

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty}\frac{x^{a}\,dx}{(1+x)^{(c+1)}}$$

su expresión será diferente según se tenga $\frac{q}{p}\geq h$ ó $\frac{q}{p}<h$, ya que, como hemos visto, la variable que hemos representado por t es no negativa para todos los valores de $x\geq h$ y negativa para $x<h$.

Así pues, calcularemos esta integral en estos dos casos. Para esto obtendremos el valor correspondiente de t cuando $x = \frac{q}{p} \geq h$ y cuando $x = \frac{q}{p} < h$.

Como sabemos

$$t(X) = \begin{cases} + \sqrt{\text{Log } H - \text{Log } \dfrac{x^{a}}{(1+X)^{(c+1)}}} & , \text{ si } x \geq h \\ \\ - \sqrt{\log H - \log \dfrac{x^{a}}{(1+X)^{(c+1)}}} & , \text{ si } x < h \end{cases}$$

Si $x = \frac{q}{p} \geq h$, se sigue $t(x) = \sqrt{a \text{ Log } \dfrac{a}{q(c+1)} + (b+1) \log \dfrac{(b+1)}{p(c+1)}}$

y, si $x = \frac{q}{p} < h$ se sigue $t(x) = \sqrt{a \text{ Log } \dfrac{a}{q(c+1)} + (b+1) \text{Log } \dfrac{(b+1)}{p(c+1)}}$.

En adelante, denotaremos por K el valor de t que corresponde a $x = \frac{q}{p} \geq h$ y por $-K$ el que corresponde a $x = \frac{q}{p} < \frac{L}{S+1}$.

Ahora bien, si $\frac{q}{p} \geq \frac{a}{b+1}$ expresamos la integral $\displaystyle\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{x^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}}$,

de la manera siguiente;

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}} - \int_{0}^{\frac{q}{p}} \frac{x^{a}\, dx}{(1+X)^{(c+1)}}$$

Como podemos notar, el punto h ya está en el dominio de integración de la función $f(x) = \dfrac{x^a}{(1+x)^{(c+1)}}$, si procedemos de la misma manera que se hizo para obtener (a*), resulta que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a\,dx}{(1+X)^{(c+1)}} - \int_0^{\frac{q}{p}} \frac{x^a\,dx}{(1+X)^{(c+1)}}$$

es igual a:

$$\frac{a^a(b+1)^{(b+1)}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^3}} \int e^{-t^2} dt + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^2}\, e^{-k^2} \right\}$$

y, por consiguiente.

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{x^a\,dx}{(1+X)^{(c+1)}} \sim \frac{a^a(b+1)^{(b+1)}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^3}} \int e^{-t^2} dt + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^2}\, e^{-k^2} \right\}$$

De una manera similar, si $\frac{q}{p} < \frac{a}{(b+1)}$ obtenemos.

$$\int_{\frac{q}{p}}^{\infty} \frac{x^a\,dx}{(1+x)^{(c+1)}} \sim \frac{a^a(b+1)^{(b+1)}}{(c+1)^{(c+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2(c+1)a}{(b+1)^3}} \left(\sqrt{\pi} - \int e^{-t^2} \right) + \frac{2(c+1+a)}{3(b+1)^2}\, e^{-k^2} \right\}$$

(B)

$$K' \sim u + \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} \quad , \quad K'' \sim u - \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}$$

Demostración:

$L = \mu q - u\sqrt{2\mu pq}$ definamos $\varphi = u\sqrt{2\mu pq}$ entonces $L = \mu q - \varphi$

Por consiguiente

$$K' = \sqrt{(\mu q - \varphi)\log\frac{(\mu q-\varphi)}{(\mu+1)q} + (\mu p + 1 + \varphi)\log\frac{(\mu p+1+\varphi)}{(\mu+1)p}}$$

$$\sim \sqrt{(\mu q - \varphi)\log\frac{(\mu q-\varphi)}{\mu q} + (\mu p + \varphi)\log\frac{(\mu p+\varphi)}{\mu p}}$$

$$= \sqrt{(\mu q - \varphi)\log\left(1 - \frac{\varphi}{\mu q}\right) + (\mu p + \varphi)\log\left(1 + \frac{\varphi}{\mu p}\right)}$$

Como $\log\left(1 - \frac{\varphi}{\mu q}\right) = -\sum_{z=1}^{\infty}\frac{\varphi^z}{z[\mu q]^z}$ y $\log\left(1 + \frac{\varphi}{\mu p}\right) = \sum_{z=1}^{\infty}\frac{(-1)^{z+1}\varphi^z}{z[\mu p]^z}$

tenemos

$$\sqrt{\sum_{z=1}^{\infty}\frac{(-1)^{z+1}\varphi^z[\mu p+\varphi]}{z[\mu p]^z} - \sum_{z=1}^{\infty}\frac{\varphi^z[\mu q-\varphi]}{z[\mu q]^z}}$$

$$= \sqrt{\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\varphi^z[\varphi-\mu q]p^z+(-1)^{z+1}\varphi^z[\mu p+\varphi]q^z}{z[\mu pq]^z}}$$

Agrupando, se tiene

$$\sqrt{\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\varphi^{z+1}[p^z+(-1)^{z+1}q^z]}{z[\mu pq]^z} + \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\varphi^z \mu pq[(-1)^{z+1}q^{z-1}-p^{z-1}]}{z[\mu pq]^z}}$$

Ahora bien, como el primer término de la segunda serie es cero, se sigue,

$$\sqrt{\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\varphi^{z+1}[p^z+(-1)^{z+1}q^z]}{z[\mu pq]^z} + \sum_{z=2}^{\infty} \frac{\varphi^z \mu pq[(-1)^{z+1}q^{z-1}-p^{z-1}]}{z[\mu pq]^z}}$$

Sea $z' = z - 1$ dado que, en la segunda serie, $z \varepsilon \{2,3,4 \ldots\}$ se tiene $z' \varepsilon \{1,2,3 \ldots\}$ Así,

$$\sqrt{\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\varphi^{z+1}[p^z+(-1)^{z+1}q^z]}{z[\mu pq]^z} + \sum_{z'=1}^{\infty} \frac{\varphi^{z'+1} \mu pq[(-1)^{z'+2}q^{z'}-p^{z'}]}{(z'+1)[\mu pq]^{z'+1}}}$$

Como z y z' tienen el mismo dominio de variación y $(-1)^{z'+2} = (-1)^{z'}$ agrupando obtenemos:

$$\sqrt{\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\varphi^{z+1} \mu pq(p^z+(-1)^{z+1}q^z)}{z(z+1)[\mu pq]^{z+1}}}$$

o bien

$$\sqrt{\frac{\varphi^2}{2|\mu pq|}\sum_{z=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi}{\mu pq}\right]^{z-1} 2\left\{\frac{p^z+(-1)^{z+1}q^z}{z(z+1)}\right\}}$$

Pero $\varphi = u\sqrt{2\mu pq}$; substituyendo, la expresión anterior resulta - ser

$$u\sqrt{\left[1+\frac{\sqrt{2}\,u(p-q)}{3\sqrt{\mu pq}}+\sum_{z=3}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{\mu pq}}\right]^{z-1} 2\left\{\frac{p^z+(-1)^{z+1}q^z}{z(z+1)}\right\}\right.}$$

o, lo que es lo mismo.

$$u\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}\,u(p-q)}{3\sqrt{\mu pq}}+\frac{u^2(p-q)^2}{2(9)\mu pq}-\frac{u^2(p-q)^2}{2(9)\mu pq}+\sum_{z=3}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{\mu pq}}\right]^{z-1} 2\left\{\frac{p^z+(-1)^{z+1}q^z}{z(z+1)}\right\}}$$

Agrupando términos, tenemos

$$u\sqrt{\left(1+\frac{u\sqrt{p-q}}{3\sqrt{2\mu pq}}\right)^2-\frac{u^2(p-q)^2}{2(9)(\mu pq)}+\sum_{z=3}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{2}\,u}{\sqrt{\mu pq}}\right]^{z-1} 2\left\{\frac{p^z+(-1)^{z+1}q^z}{z(z+1)}\right\}}$$

$$\overset{(5)}{\sim} u \sqrt{\left(1 + \frac{u(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} \right)^2}$$

Por consiguiente $K' \sim \left(1 + \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} \right)$

De la misma manera se demuestra.

$$K'' \sim u - \frac{u^2(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}$$

(5), Demostración:

$$-\frac{u^2(p-q)^2}{2(9)\mu pq} + \sum_{z=3}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}\,u}{\sqrt{\mu pq}} \right]^{z-1} 2 \left\{ \frac{p^z + (-1)^{z+1} q^z}{z(z+1)} \right\} < 2 \sum_{z=3}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}\,u}{\sqrt{\mu pq}} \right]^{z-1}$$

Además, si $\sqrt{\mu} > \frac{\sqrt{2}\,u}{\sqrt{pq}}$, $2 \sum_{z=3}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}\,u}{\sqrt{\mu pq}} \right]^{z-1} \sim \frac{4u^2}{\mu pq}$

Por otra parte, $\lim_{\mu \to \infty} \frac{\left(\frac{4u^2}{\mu pq} \right)}{\left(\frac{1}{\mu} \right)} = \frac{4u^2}{pq}$

O sea, $\frac{4u^2}{\mu pq} = O\left(\frac{1}{\mu} \right)$. Y claramente $u \sqrt{\left(1 + \frac{u(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\mu} \right)} \sim u \sqrt{\left(1 + \frac{u(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}\right)}$

(C)

Para $\sqrt{\mu} > \max \left\{ u\sqrt{\frac{2q}{p}} \, , \; u\sqrt{\frac{2p}{q}} \right\}$ se tiene;

$$\text{Log}\left(1 - \frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right) = - u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} - \frac{u^2 p}{\mu q} + O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\text{Log}\left(1 + \frac{u}{p}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right) = u\sqrt{\frac{2q}{\mu p}} - \frac{u^2 q}{\mu p} + O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Demostración:

Debido a que las demostraciones de estas igualdades son muy similares sólo haremos la primera de ellas.

Al desarrollar $\text{Log}\left(1 - \frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right)$ en series de Taylor con centro en cero, se obtiene;

$$\text{Log}\left(1 - \frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right) = - u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} - \frac{u^2 p}{\mu q} + \sum_{r=3}^{\infty} (-1) \left[u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]^r \left[\frac{1}{r} \right]$$

Además.

$$\sum_{r=3}^{\infty} (-1) \left[u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]^r \left[\frac{1}{r} \right] \leq \left| \sum_{r=3}^{\infty} (-1) \left[u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]^r \left[\frac{1}{r} \right] \right| \leq$$

$$< \sum_{r=3}^{\infty} \left[u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]^r ,$$

y como $u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} < 1$ (ya que $\sqrt{\mu} > \max \left\{ u\sqrt{\frac{2q}{p}} \; , \; u\sqrt{\frac{2p}{q}} \right\}$, se sigue que,

$$\sum_{r=3}^{\infty} \left[u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]^r = \frac{u^3 \left[\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]}{\left[1 - u\sqrt{\frac{2p}{\mu q}} \right]} = \frac{u^3 [\sqrt{2p}]^3}{[\sqrt{\mu q}]^2 [\sqrt{\mu q} - u\sqrt{2p}]} .$$

Por otra parte

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{\dfrac{u^3 [\sqrt{2p}]^3}{[\sqrt{\mu q}]^2 [\sqrt{\mu q} - u\sqrt{2p}]}}{\dfrac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}} = \frac{u^3 [\sqrt{2p}]^3}{[\sqrt{q}]^3} \lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\left[1 - \dfrac{u\sqrt{2p}}{\sqrt{\mu q}} \right]} = \frac{u^3 [\sqrt{2p}]^3}{[\sqrt{q}]^3} ,$$

por lo que $\dfrac{u^2 [\sqrt{2p}]^3}{[\sqrt{\mu q}]^2 [\sqrt{\mu q} - u\sqrt{2p}]} = O\left(\dfrac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \right)$

Concluimos.

$$\operatorname{Log} \left(1 - \frac{u}{q} \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right) = - u \sqrt{\frac{2p}{\mu q}} - \frac{u^2 p}{\mu q} + O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \right)$$

CAPITULO IV

LA DEMOSTRACIÓN DE CHEBYSHEV AL TEOREMA DE POISSON.

LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS QUE OBTIENE CHEBYSHEV (INCLUYE LA DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV-BIENAYMÉ).

La proposición de Chebyshev demuestra en el artículo Des valeurs moyennes[1] es la siguiente.

Dada una sucesión de variables aleatorias independientes $U_1, U_2, U_3, \ldots$ que toman un número finito de valores distintos (no necesariamente toman los mismos valores ni el mismo número de valores distintos), tales que existe $k > 0$ con la propiedad de que $E(U_1^2) \leq k$, $E(U_2^2) \leq k$, $E(U_3^2) \leq k, \ldots$, entonces

$$\text{(a)}\ \forall \varepsilon > 0 \ \lim_{N \to \infty} P \left\{ \left| \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_N}{N} - \frac{E(U_1) + E(U_2) + \ldots + E(U_N)}{N} \right| \leq \varepsilon \right\} = 1$$

Si consideramos las variables U_i $i = 1, 2, 3, \ldots$ que toman los valores 1 ó 0 dependiendo de que ocurra o no el evento E, siendo p_i y q_i las probabilidades respectivas, entonces $U_1 + U_2 + \ldots + U_N = N(E)$ es el número de veces que ocurre el evento E en los primeros N experimentos y $E(U_i) = p$ $i = 1, 2, 3, \ldots$.

La proposición (a) se transforma en el Teorema de Poisson

$$\text{(b)}\ \forall \varepsilon > 0 \ \lim_{N \to \infty} P \left\{ \left| \frac{N(E)}{N} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_N}{N} \right| \leq \varepsilon \right\} = 1$$

En el caso particular en que $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p$ obtenemos el Teorema de Bernoulli

---

(1) En el artículo Desvaleurs moyennes, "De los valores medios", se encuentra el volumen II de Chebyshev, Pafnuti L'. Oeuvres [4]. La derivación que hace Chebyshev de esta proposición (a), es sumamente clara, por esta razón, después de nuestro comentario, presentaremos la traducción del mencionado artículo.

$$\text{(c)}\ \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{N \to \infty} P \left\{ \left| \frac{N(E)}{N} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Para poder demostrar su proposición (a), Chebyshev utiliza la desigualdad conocida generalmente con el nombre de desigualdad de Chebyshev, y que aquí llamaremos de Bienaymé-Chebyshev, porqué, como puntualiza Markov (2)

"Asociamos esta notable y simple desigualdad con los dos nombres, Bienaymé y Chebyshev, porque Chebyshev fué el primero en expresarla claramente y en comprobarla; mientras que la idea básica de la demostración la hizo notar muy anteriormente Bienaymé en una memoria que contenía a la desigualdad misma, si bien en una forma no particularmente obvia" (3).

Esta desigualdad es la siguiente.

Sean x, y, Z, ..., N variables aleatorias independientes, que toman un número finito de valores distintos (no necesariamente toman los mismos valores ni el mismo número de valores distintos), tales que $E(x) = a$, $E(y) = b$, $E(Z) = C$, ...; $E(x^2) = a_1$, $E(y^2) = b_1$, $E(Z^2) = C_1$ ...; entonces

(2) T.E.Maistrov | 1 | pp.202

(3) La idea de la básica desigualdad estaba contenida en un artículo de I.J. Bienaymé sobre el método de mínimos cuadrados. Este artículo fué reimpreso en la misma edición del Journal de Liouville en que apareció "Sur les valeurs moyennes" (J.Math.Pures et Appliqués, 1867).

$$\text{(ch)}\ \forall\, t > 0 \quad p\left\{ \left| \frac{x+y+z+\ldots}{N} - \frac{a+b+c+\ldots}{N} \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1}{N} - \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}} \right\} \geqslant 1 - \frac{t^2}{N}$$

Como podemos observar, esta desigualdad es en realidad, la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev que aparece en los libros de probabilidad, a saber

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad P\left\{ |X-E(X)| \leqslant \varepsilon \right\} > 1 - \frac{\text{Var }(X)}{\varepsilon^2}$$

y podemos pasar de una a otra haciendo simplemente

$$X = \frac{x+y+z+\ldots}{N}$$, entonces

$$\sqrt{\text{Var. }(X)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N} - \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

,

y haciendo $t = \dfrac{\sqrt{N}\,\sqrt{\text{Var. } X}}{\varepsilon}$

Para demostrar la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev (ch), Chebyshev utiliza otra desigualdad totalmente equivalente, que es:

Sean $x, y, z, \ldots$ un número finito de variables aleatorias, que toman un número finito de valores distintos, tales que $E(x)=a$, $E(y)=b$, $E(z)=C, \ldots$; $E(x^2)=a_1$, $E(y^2)=b$, $E(z^2)=C_1, \ldots$; entonces

$$\alpha > 0 \quad P\left\{a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots} \leq x+y+z+\ldots \leq a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots}\right\} \geq 1-\frac{1}{\alpha^2}$$

A su vez esta desigualdad la demuestra a pie, utilizando solamente álgebra muy sencilla.

La demostración que hace Chebyshev de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev es la misma que aparece en los textos modernos, con la diferencia de que el maneja varias variables en lugar de una sola.

En general toda la demostración se apega a la forma en que se demuestran en la actualidad teoremas como el de Poisson (b) y el de Bernoulli (c).

Por último, cabe destacar que cuando Chebyshev utiliza el símbolo $>$ le está dando el significado de $\geq$ y a $<$ el de $\leq$, cuando habla de "mayor" de hecho está hablando de "mayor o igual", cuando dice "x comprendido entre a y b lo está entendiendo como $a \leq x \leq b$, etc.

DES VALEURS MOYENNES

DE LOS VALORES MEDIOS

Si convenimos en llamar esperanza matemática de una cantidad cualquiera, a la suma de todos los valores que ella es susceptible de tomar, multiplicados por sus probabilidades respectivas, nos será fácil establecer un teorema bastante simple sobre los límites entre los cuales estará comprendida una suma de cantidades cualesquiera.

Teorema: Si se designan por a,b,c,.... las esperanzas matemáticas de las cantidades x,y,z,.....; y por a_1, b_1, c_1,.... las esperanzas matemáticas de sus cuadrados x^2, y^2, z^2,.....; la probabilidad de que la suma x + y + z + ..., esté comprendida entre los límites.

$$a+b+c.....+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+...-a^2-b^2-c^2-......},$$

$$a+b+c.....-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+...-a^2-b^2-c^2-......},$$

será siempre mayor que $1-\frac{1}{\alpha^2}$, cualquiera que sea α

Demostración Sean $x_1, x_2, x_3, ...x_l,$

$y_1, y_2, y_3, ...y_m,$

$z_1, z_2, z_3, ...z_n,$

....

todos los valores posibles de las cantidades x,y,z,.... y sean

$$p_1, p_2, p_3, \dots p_l,$$

$$q_1, q_2, q_3, \dots q_m,$$

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

las probabilidades respectivas de esos valores, o bien, las probabilidades de las hipótesis

$$x = x_1, x_2, x_3, \dots x_l,$$

$$y = y_1, y_2, y_3, \dots y_m,$$

$$z = z_1, z_2, z_3, \dots z_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Conforme a estas notaciones, las esperanzas matemáticas de las cantidades.

$$x, y, z, \dots\dots,$$

$$x^2, y^2, z^2, \dots\dots$$

Se expresarán como sigue

$$(1)\quad \begin{cases} a = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \dots + p_lx_l, \\ b = q_1y_1 + q_2y_2 + q_3y_3 + \dots + q_my_m, \\ c = r_1z_1 + r_2z_2 + r_3z_3 + \dots + r_nz_n, \end{cases}$$

$$
(2)\quad \begin{cases} a_1 = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + \ldots + p_l\ x_l^2, \\ b_1 = q_1y_1^2 + q_2y_2^2 + q_3y_3^2 + \ldots + q_m\ y_m^2, \\ c_1 = r_1z_1^2 + r_2z_2^2 + r_3z_3^2 + \ldots + r_n\ z_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

Ahora bien, como las hipótesis que acabamos de hacer sobre las cantidades $x, y, z, \ldots\ldots$, son las únicas posibles, sus probabilidades satisfarán a las ecuaciones siguientes:

$$
(3)\quad \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l = 1, \\ q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_m = 1, \\ r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

Nos será fácil encontrar, con la ayuda de las ecuaciones (1), (2) y (3), a qué se reduce la suma de todos los valores de la expresión

$$(x_\lambda + y_r + z_v + \ldots - a - b - c \ldots)^2 p_\lambda q_r r_v \ldots\ldots,$$

Si hacemos sucesivamente

$$\lambda = 1,2,3,\ldots\ldots l;\ r = 1,2,3,\ldots\ldots m;\ v = 1,2,3,\ldots\ldots n;\ldots\ldots$$

En efecto, esta expresión siendo desarrollada nos da

$$p_\lambda q_r r_v \ldots x_\lambda^2 + p_\lambda q_r r_v \ldots y_r^2 + p_\lambda q_r r_v \ldots z_v^2 + \ldots$$

$$+ 2p_\lambda q_r r_v \ldots x_\lambda y_r + 2p_\lambda q_r r_v \ldots x_\lambda z_v + 2p_\lambda q_r r_v \ldots y_r z_v + \ldots$$

$$- 2(a+b+c+\ldots)p_\lambda q_r r_v \ldots x_\lambda - 2(a+b+c+\ldots)p_\lambda q_r r_v \ldots y_r -$$

$$- 2(a+b+c+\ldots)p_\lambda q_r r_v \ldots z_v - \ldots + (a+b+c+\ldots)^2 p_\lambda q_r r_v \ldots$$

Dando, en esta expresión, a λ todos los valores desde λ igual a uno hasta l y sumando los resultados de estas substituciones, obtenemos la suma que sigue:

$$q_r r_v \ldots (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots p_l x_l^2)$$

$$+ (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_r r_v \ldots y_r^2 + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_r r_v \ldots z_v^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_r r_v \ldots y_r + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots +$$

$$+ p_l x_l) q_r r_v \ldots z_v + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_r r_v \ldots y_r z_v + \ldots$$

$$- 2(a+b+c+\ldots)\ (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_r r_v \ldots$$

$$- 2(a+b+c+\ldots)\ (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_r r_v \ldots y_r$$

$$- 2(a+b+c+\ldots)\ (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_r r_v \ldots z_v$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (a+b+c+\ldots)^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_r r_v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, en virtud de las ecuaciones (1), (2) y (3), substituimos en lugar de las sumas

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l,$$

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_l$$

sus valores a, a_1 y l, obtendremos la fórmula que sigue

$$a_1 q_r r_v \ldots + q_r r_v \ldots\ldots y_r^2 + q_r r_v \ldots\ldots z_v^2 + \ldots$$

$$+ 2a\, q_r r_v \ldots y_r + 2a\, q_r r_v \ldots\ldots z_v + \ldots\ldots + 2q_r r_v \ldots y_r z_v + \ldots$$

$$- 2(a+b+c+\ldots)\, a q_r r_v \ldots\ldots - 2(a+b+c+\ldots\ldots)\, q_r r_v \ldots y_r -$$

$$- 2'(a+b+c+\ldots)\, q_r r_v \ldots\ldots z_v - \ldots\ldots + (a+b+c+\ldots\ldots)^2\, q_r r_v \ldots$$

Damos en esta fórmula a r los valores $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$ después sumamos las expresiones que resultan de estas substituciones, y reemplazamos las sumas

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \ldots + q_m y_m,$$

$$q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \ldots + q_m y_m^2$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots + q_m$$

por sus valores b, b_1 y 1 obtenidos de las ecuaciones (1), (2) y (3); obtendremos la expresión siguiente:

$a_1\ r_v \ldots\ldots + b_1 r_v \ldots\ldots + r_v \ldots z_v^2 + \ldots$

$+\ 2abr_v \ldots + 2ar_v \ldots z_v + 2br_v \ldots z_v + \ldots$

$-2\ (a+b+c+\ldots\ldots)\, ar_v \ldots - 2(a+b+c+\ldots)br_v \ldots$

$-2\ (a+b+c+\ldots\ldots)\, r_v \ldots z_v - \ldots + (a+b+c+\ldots)^2\ r_v \ldots$

tratando de la misma manera v,..., veremos que la suma de todos los valores de la expresión:

$$(x_\lambda + y_r + z_v + \ldots - a - b - c \ldots)^2\ p_\lambda\ q_r\ r_v \ldots,$$

que se obtiene haciendo $\lambda = 1,2,3\ldots\ldots l$; $r = 1,2,3,\ldots m$; $v = 1, 2,3\ldots n$; será igual a

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots$$

$$+\ 2ab + 2ac + 2bc + \ldots$$

$$-2\ (a+b+c+\ldots)\,a - 2(a+b+c+\ldots)\,b - 2(a+b+c+\ldots)\,c - \ldots$$

$$+ (a+b+c+\ldots\ldots)^2,$$

Esta expresión siendo desarrollada se reduce a

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots\ldots$$

De donde, concluimos que la suma de los valores de la expresión

$$\frac{(x_\lambda + y_r + z_v + \ldots - a - b - c - \ldots\ldots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 \ldots\ldots)}\ p_\lambda\ q_r\ r_v \ldots,$$

que se obtiene haciendo

$$\lambda = 1,2,3,\ldots.l;\ r = 1,2,3,\ldots.m;\ v = 1,2,3,\ldots.n;\ldots.,$$

será igual a $\frac{1}{\alpha^2}$. Ahora bien, es evidente que quitando de esta suma todos los términos en los cuales el factor

$$\frac{(x_\lambda + y_r + z_r + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)}$$

es inferior a 1, y reemplazándolo por la unidad en cualquier parte donde es más grande que 1, disminuimos esta suma, y ella será menor que $\frac{1}{\alpha^2}$.

Pero esta suma, así reducida, no estará formada más que de los productos $p_\lambda \cdot q_r \cdot r_v \ldots.,$

que corresponden a los valores de $x_\lambda, y_r, z_v, \ldots.$ para los cuales la expresión

$$\frac{(x_\lambda + y_r + z_v + \ldots - a - b - c - \ldots.)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} > 1$$

y representará evidentemente la probabilidad de que $x, y, z, \ldots$ tengan valores que satisfagan la condición

$$\frac{(x + y + z + \ldots - a - b - c - \ldots.)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 \ldots)} > 1 \tag{4}$$

Esta misma probabilidad puede ser reemplazada por la diferencia

$$1 - P,$$

si designamos por P la probabilidad de que los valores de las x,y,z,...... no satisfagan la condición (4), o bien, lo que es lo mismo, que esas cantidades tengan valores para los cuales el cociente

$$\frac{(x+y+z+\ldots-a-b-c-\ldots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots)}$$

no es > 1; y por consiguiente, que la suma $x+y+z+\ldots$. quede comprendida entre los límites

$$a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots},$$

$$a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots}.$$

De donde es evidente que la probabilidad P deberá satisfacer la desigualdad $1-P < \frac{1}{\alpha^2}$, que nos dá $P > 1 - \frac{1}{\alpha^2}$, lo que se trataba de demostrar.

Sea N el número de cantidades $x,y,z,\ldots$; si se toma en el teorema que acabamos de demostrar

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{t}},$$

y se divide por N la suma $x + y + z + \ldots$., y sus límites

$$a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2\ldots},$$

$$a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c+\ldots-a^2-b^2-c^2\ldots},$$

se obtiene el teorema siguiente concerniente a los valores medios.

Teorema

Si las esperanzas matemáticas de las cantidades

$$x, y, z, \ldots x^2, y^2, z^2, \ldots\ldots$$

son respectivamente $a, b, c, \ldots a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots,$

la probabilidad de que la diferencia entre la media aritmética de las N cantidades $x, y, z, \ldots$ y la media aritmética de las esperanzas matemáticas de esas cantidades no exceda

$$\frac{1}{t} \cdot \sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N} - \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

será siempre más grande que $1-\frac{t^2}{N}$ cualquiera que sea t.

Como las fracciones

$$\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}, \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}$$

expresan las medidas de las cantidades

$$a_1, b_1, c_1, \ldots$$

$$a^2, b^2, c^2, \ldots$$

siempre que las esperanzas matemáticas

$$a, b, c, \ldots$$

$$a_1, b_1, c_1, \ldots$$

no escedan un cierto límite finito, la expresión

$$\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}{N}}$$

tendrá también un valor finito, no importa cuán grande sea el número N, y por consiguiente depende de nosotros hacer el valor

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}{N}}$$

tan pequeño como querramos, atribuyendo a **t** un valor suficientemente grande. Ahora bien, como cualquiera que sea t, el crecimiento de el número N hasta el infinito, hace nula la fracción t^2/N, concluimos, en virtud de el teorema anterior:

Teorema

Si las esperanzas matemáticas de las cantidades $U_1, U_2, U_3, \ldots$..

y de sus cuadrados U_1^2, U_2^2, U_3^2,... no sobrepasan un límite finito cualquiera, la probabilidad de que la diferencia entre la media aritmética de un número N de esas cantidades y la media aritmética de sus esperanzas matemáticas, será menor que una cantidad dada, se reduce a la unidad cuando N tiende a infinito.

En la hipótesis particular de que las cantidades U_1, U_2, U_3,... se reduzcan a la unidad o a cero, según que un evento E tenga o no lugar en el 1º, 2º, 3º.....$N^{-ésimo}$ experimento, veremos que la suma $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$ dará el número de repeticiones de el evento E en N experimentos, y la media aritmética

$$\frac{U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_N}{N}$$

representará el cociente del número de repeticiones del evento E y el número de experimentos. Para aplicar a este caso nuestro último teorema, designemos por $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$ las probabilidades del evento E, en el 1º, 2º, 3º .....,$N^{-ésimo}$ experimento: las esperanzas matemáticas de las cantidades $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_N$ y de sus cuadrados U_1^2, U_2^2, $U_3^2, \ldots, U_N^2$ se expresarán, de acuerdo a nuestra notación, por

$$P_1 \cdot 1 + (1-P_1) \cdot 0; \quad P_2 \cdot 1 + (1-P_2) \cdot 0; \quad P_3 \cdot 1 + (1-P_3) \cdot 0; \ldots$$

$$P_1 \cdot 1^2 + (1-P_1) \cdot 0^2; P_2 \cdot 1^2 + (1-P_2) \cdot 0^2; \quad P_3 \cdot 1^2 + (1-P_3) \cdot 0^2; \ldots$$

De donde se ve que esas esperanzas matemáticas son

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

y que la media aritmética de las N primeras esperanzas es

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_N}{N}$$

es decir, la media aritmética de las probabilidades

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$$

Como consecuencia de esto, y en virtud del teorema anterior, llegamos a la conclusión siguiente:

Cuando el número de experimentos tiende a infinito, se obtiene una probabilidad, tan cercana como se quiera a la unidad, que la diferencia entre la media aritmética de las probabilidades de este evento durante estos experimentos; y el cociente entre el número de repeticiones de este evento y el número total de experimentos, sea menor que toda cantidad dada.

En el caso particular donde la probabilidad de el evento permanece igual durante todos los experimentos, tenemos el teorema de Bernoulli.

El segundo artículo que escribió *Pafnuti Lvovich Chebyshev* -- (1821-1894) sobre probabilidad se denomina: Démonstration élémentaire d' une proposition générale de la Théorie des probabilités. "Demostración elemental de una proposición general de la teoría de las probabilidades".[1]

En este artículo demuestra la siguiente proposición:

Sean p_1, p_2, p_3, ... las probabilidades del evento E en los experimentos independientes 1, 2, 3, ... respectivamente. Sea - $\mu(E)$ el número de veces que ocurre el evento E en los primeros μ experimentos. Entonces,

$$\forall Z, Q > 0 \ \exists N \ni \ \forall \mu > N \quad P\left\{ \left| \frac{\mu(E)}{\mu} - \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu}{\mu} \right| < Z \right\} > 1 - Q$$

Esta proposición había sido demostrada anteriormente por Poisson, pero, en opinión de Chebyshev, a la demostración de Poisson le falta rigor por no dar cotas al error que comporta en su aproximación; Chebyshev pensaba que una solución aproximada era segura cuando se daban cotas a los errores. En cambio él encuentra que

(1) Este artículo se encuentra en el volumen II de Chebyshev, Oeuvres - [4].

Lo que aquí se presenta es fundamentalmente el razonamiento seguido por él en la demostración de esta proposición. Asimismo, con el fin de lograr una mayor claridad en su ya de por sí clara exposición, además de resaltar ciertos aspectos interesantes que se presentan en ésta, hemos añadido algunos comentarios entre sección y sección.

Por lo demás, ciertos pasos que el no efectúa y que pueden presentar dificultades, los hemos hecho al calce de las páginas.

$$(*) \quad P\left\{\left|\frac{\mu(E)}{\mu}-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_\mu}{\mu}\right|<Z\right\}<1-\frac{1}{2\mu Z}\sqrt{\frac{(S+\mu Z)(\mu-S-\mu Z)}{\mu}}\,\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{S}{S+\mu Z}\right)^{S+\mu Z}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S-\mu Z}\right)^{\mu-S-\mu Z+1}-\frac{1}{2\mu Z}\sqrt{\frac{(S-\mu Z)(\mu-S+\mu Z)}{\mu}}\,\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\mu-S}{\mu-S+\mu Z}\right)^{\mu-S+\mu Z}\left(\frac{S}{S-\mu Z}\right)^{S-\mu Z+1}$$

donde $S = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu$ es fija y el error está acotado por

$$\frac{1}{2\mu Z}\sqrt{\frac{(S+\mu Z)(\mu-S-\mu Z)}{\mu}}\left(\frac{S}{S+\mu Z}\right)^{S+\mu Z}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S-\mu Z}\right)^{\mu-S-\mu Z+1}$$

$$+\frac{1}{2\mu Z}\sqrt{\frac{(S-\mu Z)(\mu-S+\mu Z)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S+\mu Z}\right)^{\mu-S+\mu Z}\left(\frac{S}{S-\mu Z}\right)^{S-\mu Z+1}$$

A partir de la desigualdad (*), Chebyshev encuentra en forma explícita la N adecuada. Esta **N** es

$$(**) \quad \text{máx}\left\{\frac{\operatorname{Log}\left[Q\ \frac{Z}{1-P}\sqrt{\frac{1-P-Z}{P+Z}}\right]}{\operatorname{Log} H},\ \frac{\operatorname{Log}\left[Q-\frac{Z}{P}\sqrt{\frac{P-Z}{1-P-Z}}\right]}{\operatorname{Log} H_1}\right\}$$

donde $H = \left(\frac{P}{P+Z}\right)^{P+Z}\left(\frac{1-P}{1-P-Z}\right)^{1-P-Z}$, $H_1 = \left(\frac{1-P}{1-P+Z}\right)^{1-P+Z}\left(\frac{P}{P-Z}\right)^{P-Z}$

y, $p = \frac{S}{\mu}$

Al hacer ambas cosas: acotar el error y explicitar la N, Chebyshev completa una demostración rigurosa, acorde con su concepto de rigor.

La demostración la hace sencilla utilizando, como siempre hacía, solamente álgebra y cálculo. En términos generales es la siguiente:

Chebyshev empieza maximizando P_m, la probabilidad de que E ocurra al menos m veces en μ experimentos, con respecto a los distintos valores de las p_i's; obtiene que el valor más grande que P_m puede alcanzar, con φ ceros y θ unos, donde S es fija e incluyendo al mismo tiempo el mayor número de valores iguales a cero o uno, corresponde a

$$p_1 = 0, \ldots, p_{\varphi} = 0, \; p_{\varphi+1} = 1, \ldots, p_{\varphi+\theta} = 1,$$

$$p_{\varphi+\theta+1} = p_{\varphi+\theta+1} = p_{\mu} = \frac{S-\theta}{\mu-\varphi-\theta}$$

Después mayoriza P_m hasta llegar a la desigualdad

$$P_m < \binom{\mu}{m} \left(\frac{S}{\mu}\right) \left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1} \frac{m}{m-S},$$

esta cota no es alcanzable por P_m. Luego, aplicando la fórmula de De Moivre-Stirling resulta que P_m es menor que

$$\frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{m}}\left(\frac{S}{m}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}$$

En esta desigualdad se cambia a $1-p_1, \ldots, 1-p_\mu$ para acotar Q_n: la probabilidad de que E ocurra a lo más n veces en los μ experimentos, por la siguiente expresión

$$\frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$$

y con estas dos desigualdades llega a (*), para calcular finalmente la N adecuada (**) para la proposición.

Chebyshev comienza en su artículo aclarando que:

I.-(La proposición, cuya demostración es el objetivo de este artículo, es la siguente:

Se puede siempre asignar un número de experimentos tal, que la probabilidad de que el cociente del número de ocurrencias del evento E entre el número total de experimentos, no se desvíe de la media de las probabilidades de E mas allá de los límites dados, sin importar que tan próximos estén estos límites, se aproximará tanto como se desée a la certitud.

Esta proposición fundamental de la teoría de las probabilidades, que contiene como caso particular la ley de Jaques Bernoulli, -

fué deducida por Mr. Poisson a partir de una fórmula que él obtiene al calcular aproximadamente el valor de una integral definida bastante complicada (V. Recherches sur les probabilités des jugements, cha. IV).

A pesar de todo lo ingenioso que es el método empleado por el célebre géometra, éste no provée el límite del error que conlleva su análisis aproximativo, y por esta incertitud sobre el valor del error, a su demostración de la proposición le falta rigor.

II.- En esta sección del artículo Chebyshev maximiza el valor de P_m, que es la probabilidad de que E ocurra al menos m veces en μ experimentos, con respecto a las diferentes probabilidades de E para cada experimento, manteniendo fija la suma de las probabilidades que es S. Demuestra que el valor más grande que puede tomar P_m corresponde a $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ \ldots,p_\varphi = 0,\ p_{\varphi+1} = 1,\ \ldots,p_{\varphi+\sigma} = 1,\ p_{\varphi+\sigma+1} = \frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma},\ \ldots,p_\mu = \frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}$; para algunos φ y σ donde $S = p_1+p_2+\cdots+p_\mu$ es fija.

Esta maximización la hace a partir del desarrollo del producto $(p_1t+1-p_1)\cdot(p_2t+1-p_2)\cdots(p_\mu t+1-p_\mu)$, para evitarse el problema de que al aumentar o disminuir el valor de p_i, el de $1-p_i$ disminuya o aumente al mismo tiempo, al maximizar así tendríamos que fijarnos a que factor está multiplicando p_i y, a que factor está multiplicando $1-p_i$, lo cual complicaría innecesariamente el proceso de maximizar P_m. En lugar de esto Chebyshev no asocia $1-p_i$, lo que le permite manejar una sola cantidad p_i

en lugar de manejar las dos cantidades p_i y $1-p_i$.

Sean $p_1, \dots, p_\mu$ las probabilidades del evento E en μ experimentos consecutivos, y P_m la probabilidad de que E ocurra al menos m veces en μ experimentos.

Se va a llegar a la expresión de P_m a partir del desarrollo del producto:

$$(p_1 t + 1 - p_1)\ (p_2 t + 1 - p_2) \cdots (p_\mu t + 1 - p_\mu),$$

considerando las potencias de t y tomando la suma de los coeficientes de $t^m, \dots, t^\mu$

De ahí resultan evidentemente estas dos propiedades de P_m:

1) Esta cantidad no contiene a $p_1, \dots, p_\mu$ más que en los grados no superiores a la unidad(2).

(2) Considerememos los eventos siguientes:

A_m, E ocurre al menos m veces en los μ experimentos;
B_i, E ocurre en el i-ésimo experimento; $i = 1, \dots \mu$
C, E ocurre al menos m veces en los $\mu-1$ experimentos distintos del i-ésimo, y
D, E ocurre al menos m-1 veces en los $\mu-1$ experimentos distintos del i-ésimo.

Entonces: $P_m = P(A_m) = P(A_m \cap (B_i \cup B_i^c)) = P(A_m \cap B_i) + P(A_m \cap B_i^c)$

$= P(D \cap B_i) + P(C \cap B_i^c)$, ya que $C \cap B_i = A_m \cap B_i^c$ y $D \cap B_i = A_m \cap B_i$

$= P(C) P(B_i^c) + P(D) P(B_i)$, porque son independientes

$= P(C)(1-p_i) + P(D) p_i = p_i (P(D) - P(C)) + P(C)$

En el primer sumando aparece como factor p_i una sola vez, en el segundo ninguna.

2) Es una función simétrica respecto a $p_1, \ldots, p_\mu$ [3].

En virtud de la primera propiedad P_m puede ser puesto en la forma $U + V_{p_1} + V_{1\,p_2} + W_{p_1 p_2}$ donde U, V, V_1 y W no contienen ni a p_1 ni p_2.

En virtud de la segunda propiedad V y V_1 son iguales [4], se sigue que la forma de la expresión de P_m es $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1 \cdot p_2$, donde U, V y W no contienen ni a p_1 ni a p_2. A partir de esto es fácil probar, sobre la expresión P_m el teorema siguente.

(3) Sean A_m y B_n como aparecen en (2) y definamos los siguientes eventos:

F, E ocurre al menos m-2 veces en los μ-2 experimentos distintos de i,j;

G, E ocurre al menos m-1 veces en los μ-2 experimentos distintos de i,j;

H, E ocurre al menos m veces en los μ-2 experimentos distintos de i,j;

Entonces

$$\begin{aligned}
P_m = P(A_m) &= P(A_m \cap B_i \cap B_j) + P(A_m \cap B_i \cap B_j^c) \\
&\quad + P(A_m \cap B_i \cap B_j) + P(A_m \cap B_i^c \cap B_j^c) \\
&= P(F \cap B_i \cap B_j) + P(G \cap B_i \cap B_j^c) + P(G \cap B_i^c \cap B_j) \\
&\quad + P(B \cap B_i^c \cap B_j^c) \\
&= P(F)P(B_i)P(B_j) + (G)P(B_i)P(B_i^c) \\
&\quad + P(G)P(B_i^c)P(B_j) + P(B)P(B_i^c)P(B_j^c) \\
&= P(B) + p_i(P(G) - P(H) = p_i(P(G) - P(H)) \\
&\quad + p_i p_j(P(B) - 2P(G))P(H))
\end{aligned}$$

y en esta última igualdad se observa que p_i y p_j están multiplicando al mismo factor.

(4) Alternativamente se sigue a partir de (3); ya que $P_m = U + V_{p_1} + V_{1\,p_2} + W_{p_1 p_2}$,

TEOREMA. Si p_1, p_2 son diferentes entre si y de cero y uno, se puede, manteniendo fijos los valores $p_3, \ldots, p_n$ y el de $p_1 + p_2$ aumentar el de P_m haciendo $p_1 = p_2$ si $W > 0$, $p = 0$ si $W \leq 0$ y $p_1 + p_2 \leq 1$.

$p_1 = 1$ si $W \leq 0$ y $p_1 + p_2 > 1$ donde U, V, W son tales que $P_m = U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2$ y U, V, W no contienen ni a p_1 ni a p_2 (5).

Demostración.

Vimos que la expresión de P_m puede ser puesta en la forma $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2$ donde U, V y W son independientes de p_1, p_2 (6).

Haciendo los siguientes cambios:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \text{si } W > 0$$

$$\hat{p}_1 = 0, \; \hat{p}_2 = p_1 + p_2 \quad \text{si } W \leq 0 \text{ y } p_1 + p_2 \leq 1$$

$$\hat{p}_1 = 1, \; \hat{p}_2 = p_1 + p_2 - 1 \quad \text{si } W \leq 0 \text{ y } p_1 + p_2 > 1$$

resulta que $p_1 + p_2 = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$, U permanece igual, V sigue multiplicando al mismo factor $p_1 + p_2$ y el único factor que cambia es el que está multiplicando a W, de la siguiente manera:

(5) Si $p_i \neq p_j$, podemos suponer que $i = 1$ y $j = 2$, por (3) que nos permite cambiar el orden de los p_i's.

(6) No es necesario pedir que p_1, $p_2 \notin \{0, 1\}$ y Chebyshev no lo hace, pero de hecho lo que se quiere es obtener un número máximo de ceros y unos e igualar los restantes, sin disminuir el valor de P_m.

p_1p_2 lo cambia por $\frac{1}{2}(p_1+p_2)\frac{1}{2}(p_1+p_2)$ si $W>0$

p_1p_2 lo cambia por $0(p_1+p_2)$ si $W\leq 0$ y $p_1+p_2\leq 1$

p_1p_2 lo cambia por $1(p_1+p_2-1)$ si $W\leq 0$ y $p_1+p_2>1$

En el primer caso, cuando $W>0$ estamos aumentando el factor que esta multiplicando a W, en los otros dos casos cuando $W\leq 0$ estamos disminuyendo el factor que está multiplicando a W, por lo tanto, al hacer estos cambios no estamos disminuyendo el valor de P_m.

Este teorema nos conduce directamente al siguiente, que es lo primordial en esta sección.

TEOREMA. El mayor valor que pueda tomar P_m con φ ceros y σ unos, donde $p_1+\cdots+p_\mu=S$, e incluyendo al mismo tiempo el número mas grande de valores iguales a 0 o 1, corresponde a los valores de $p_{\varphi+\sigma+1},\ldots,p_\mu$ dados por las ecuaciones:

$$p_{\varphi+\sigma+1}=\cdots=p_\mu=\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}$$

Demostración.

Supongamos que $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_\mu$ es el sistema de los valores de $p_1,\ldots,p_\mu$ que verifican la ecuación $p_1+\cdots+p_\mu=S$, dando el mayor valor a P_m, e incluyendo al mismo tiempo el número mas grande posible de valores iguales a 1 o a 0, bajo estas condiciones.

Sean además $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\varphi$ las que son iguales a 0 entre las cantidades $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_\mu$; $\Pi_{\varphi+1}, \Pi_{\varphi+2}, \ldots, \Pi_{\varphi+\sigma}$ las que son iguales a la unidad; todas las otras $\Pi_{\varphi+\sigma+1}, \Pi_{\varphi+\sigma+2}, \ldots, \Pi_\mu$ que son, segú la suposición, diferentes de 0 y 1, deben ser iguales entre ellas, como vamos a probar a continuación.

En efecto, si $\Pi_{\varphi+\sigma+1}$ no es igual a $\Pi_{\varphi+\sigma+2}$, es posible de acuerdo al teorema precedente, hacer P_m más grande sin cambiar la suma

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_{\varphi+\sigma+1} + \Pi_{\varphi+\sigma+2} + \cdots + \Pi_\mu$$

haciendo $\Pi_{\varphi+\sigma+1} = \Pi_{\varphi+\sigma+2}$, o haciendo $\Pi_{\varphi+\sigma+1}$ igual a 1 o a 0. Pero esto es contrario a la suposición de que el sistema $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu$ dá el valor más grande P_m bajo la condición de que $\Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_\mu = S$; el otro caso es contrario a la suposición de que de todos los sistemas que tienen esta propiedad $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu$ es aquel que tiene el número mas grande de valores iguales a uno o a cero, por consiguiente se hace necesario que sean

$$\Pi_{\varphi+\sigma+1} = \Pi_{\varphi+\sigma+2} = \cdots = \Pi_\mu$$

Una pregunta que sruge de forma natural es: ¿Existe un método finito de alcanzar el máximo que aparece en el segundo teorema de esta sección, usando repetidas veces el primero?. La respuesta es que no existe. Para hacer ver esto consideremos el ejemplo siguiente; sea $\sim : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relación de equivalencias definida como sigue $x \sim y \iff y - x \in Q$, tenemos a $p_1 \in [0,1] \ni p_1 \notin \overline{Q}$; a $p_2 \in [0,1] \ni p_2 \notin \overline{Q}, -p_1$; a $p_3 \in [0,1] \ni p_3 \in \overline{Q}$ y que cumpla además la propiedad de que ningún número de los que resultan de sumar o dividir entre dos a cualquiera dos de ellos, cualquier número de veces, sea racional, es decir, que los números que resultan de aplicar el teorema un número finito de veces, si no son ceros o unos, sean irracionales. Para lograr esto basta con que seleccionemos a p_3 de manera que:

$$\forall n_1, n_2, n_3 \in N \quad \forall m_1, m_2, m_3 \in Z \quad \frac{n_1 p_1}{2^{m_1}} + \frac{n_2 p_2}{2^{m_2}} + \frac{n_3 p_3}{2^{m_3}} \notin Q$$

y esto a su vez lo aseguramos si:

$$p_3 \notin \left\{ x = -(q_1 p_1 + q_2 p_2) : q_1,\ q_2 \in Q > 0 \right\}$$

similarmente, sea $p_4 \in [0,1] \ni$

$$p_4 \notin \left\{ x = -(q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3) : q_1, q_2,\ q_3 \in Q > 0 \right\}$$

y así sucesivamente para p_5, p_6, etc.

Entonces escogiendo a las probabilidades p_i's de esta manera, resulta que, por más que apliquemos este teorema , siempre tendremos probabilidades irracionales, y como el máximo lo alcanza con probabilidades racionales, nunca lo alcanzaremos.

III.- En esta sección lo que hace Chebyschev es seguir mayorizando, pero de una forma completamente diferente a la que se sirvió en la sección anterior, aquí mayoriza usando simples trucos albegraicos.

Pasemos ahora a la investigación de los valores de la expresión de P_m corresponden a $p_1 = 0, \ldots, p_\varphi = 0$, $p_{\varphi+1} = 1, \ldots, p_{\varphi+\sigma} = 1$,

$p_{\varphi+\sigma+1} = \frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}, \ldots, p_\mu = \frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}$ este valor es la suma de los coeficientes de $t^m, \ldots, t^m$ en el desarrollo del producto $t^\sigma \left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma} t + \frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma} \right)^{\mu-\varphi-\sigma}$ y en consecuencia, es igual a

$$\frac{1\cdot 2 \cdots (\mu-\varphi-\sigma)}{1\cdot 2 \cdots (m-\sigma)\, 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)} \left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{m-\sigma} \left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{\mu-m-\varphi} \left\{ 1 + \frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi} + \frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\,\frac{\mu-m-\varphi-1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi} + \cdots + \frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\sigma} \cdots \frac{1}{\mu-\varphi-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi} \right\}$$

He aquí la expresión que, como consecuencia del teorema precedente, para ciertos números enteros positivos φ y σ, será el límite superior de todos los valores de P_m, en el caso en que $p_1 + \cdots + p_\mu = S$.

Observando que el valor de la expresión

$$1+\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma+1}\;\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}+\cdots+\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma+1}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\sigma}\cdots\frac{1}{\mu-\varphi-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}$$

es más pequeño que el

$$1+\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}+\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\right)^{\mu-m-\varphi}$$

que es el desarrollo de

$$\frac{1-\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\right)^{\mu-m-\varphi+1}}{1-\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\;\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\right)}$$

o de

$$\frac{m-\sigma}{m-S}\cdot\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\right]$$

llegamos a este teorema.

TEOREMA Para ciertos números enteros y positivos φ y σ el valor de la expresión

$$\frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\sigma)}{1\cdot 2\cdots(m-\sigma)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{\mu-m-\varphi+1}$$

$$\frac{m-\sigma}{m-S}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\sigma}\cdot\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varphi}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\right]$$

sobrepasa al valor P_m de la probabilidad de que en μ experimentos el evento E, teniendo las probabilidades $p_1, \ldots, p_\mu$, ocurra al menos m veces, donde S es la suma $p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu$.

Nótese que para φ y σ fijos esta cota para P_m ya no es alcanzable por ninguna combinación de valores de $p_1, \ldots, p_\mu$.

IV.- Aquí Chebyschev vuelve a mayorizar el valor de P_m, esta vez demostrando que

$$\frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\sigma)}{1\cdot 2\cdots(m-\sigma)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\sigma}{m-S}\right)$$

aumenta si disminuímos el valor de σ o de φ, para esto tiene que suponer que $m > S+1$, esto lo lleva a que P_m es menor que

$$\frac{1\cdot 2\cdots\mu}{1\cdot 2\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m)}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\left(\frac{m}{m-S}\right)$$

que corresponde a $\varphi = \sigma = 0$.

Detengámonos en el caso en que m sobrepasa S + 1. Siguiendo el último teorema tenemos

$$P_m < \frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\theta)}{1\cdot 2\cdots(m-\theta)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\theta}{\mu-\varphi-\theta}\right)^{m-\theta}\left(\frac{\mu-S-\theta}{\mu-\varphi-\theta}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\theta}{m-S}\right)$$

$$\left[\,1-\left(\frac{\mu-m-\varphi}{m-\theta}\cdot\frac{S-\theta}{\mu-S-\varphi}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\right]$$

y con mayor razón

$$[1]\quad P_m < \frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\theta)}{1\cdot 2\cdots(m-\theta)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\theta}{\mu-\varphi-\theta}\right)^{m-\theta}\left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\theta}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\theta}{m-S}\right)$$

pero si m se toma mas grande que $S+1$, el valor de la expresión

$$\frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\theta)}{1\cdot 2\cdots(m-\theta)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\theta}{\mu-\varphi-\theta}\right)^{m-\theta}\left(\frac{\mu-S-\theta}{\mu-\varphi-\theta}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\theta}{m-S}\right)$$

aumentará por la disminución de los números enteros positivos φ y θ.

En efecto, si dividimos por esta expresión el valor que toma después de cambiar θ por $\theta-1$, hallamos para su cociente

$$\frac{\mu-\varphi-\theta+1}{m-\theta+1}\cdot\frac{(S-\theta+1)^{m-\theta+1}}{(S-\theta)^{m-\theta}}\cdot\frac{(\mu-\varphi-\theta)^{\mu-\varphi-\theta+1}}{(\mu-\varphi-\theta+1)^{\mu-\varphi-\theta+2}}$$

o bien

$$\frac{S-\theta+1}{m-\theta+1}\cdot\left(\frac{S-\theta+1}{S-\theta}\right)^{m-\theta}\cdot\left(\frac{\mu-\varphi-\theta}{\mu-\varphi-\theta+1}\right)^{\mu-\varphi-\theta+1}$$

que siendo puesto en la forma

$$\frac{1}{1+\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}} \quad e^{-(m-\sigma)\log\left(1-\frac{1}{S-\sigma+1}\right)+(\mu-\varphi-\sigma+1)\log\left(1-\frac{1}{\mu-\varphi-\sigma+1}\right)}$$

se reduce a

$$\frac{1}{1+\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}} \quad e^{\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^2}-\frac{1}{\mu-\varphi-\sigma+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3}-\frac{1}{(\mu-\varphi-\sigma+1)^2}\right)+}$$

Ahora bien, esto valor es evidentemente mas grande que 1, ya que

$$\frac{1}{1+\frac{m-S-\sigma}{S-\sigma+1}} \quad e^{\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}}$$

es igual a

$$\frac{1+\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}\right)^2+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}\right)^3+\cdots}{1+\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}}$$

y esto sobrepasa la unidad porque, siendo m por suposición mas grande que S + 1, m - S - 1 tendrá un valor positivo(7).

$$\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^2}-\frac{1}{\mu-\varphi-\sigma+1}\ ,\quad \frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3}-\frac{1}{(\mu-\varphi-\sigma+1)^2}\ ,\ \dots$$

éstas son positivas dado que por suposición, $m-\sigma$ sobrepasa $S-\sigma+1$ y $S-\sigma+1$ no puede sobrepasar $\mu-\varphi-\sigma+1$ porque de otro modo $\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}$, que es el valor de una cierta probabilidad (ver II), sería mas grande que la unidad(8).

Nos hemos convencido de que con la disminución de σ el valor de la expresión

$$\frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\sigma)}{1\cdot 2\cdots(m-\sigma)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\sigma}{m-S}\right)$$

aumenta, lo mismo sucede con respecto a φ

(7) Además de ser m-S+1 positivo, $S-\sigma+1$ tambien lo es porque σ es el número de P_i's que son iguales a 1 y por lo tanto $\sigma\leq S$, así resulta $\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}>0$ y haciendo la división nos queda

$$1+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-S-1}{S-\ +1}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}\right)^3+\cdots}{1+\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}}$$

y esto es mayor que uno ya que el segundo miembro es positivo

(8) $$\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^n}>\frac{S-\sigma+1}{(S-\sigma+1)^n}=\frac{1}{(S-\sigma+1)^{n-1}}>\frac{1}{(\mu-\varphi-\sigma+1)^{n-1}}$$

de donde

$$\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^n}-\frac{1}{(\mu-\varphi-\sigma+1)^{n-1}}>0 \text{ y por consiguiente } e^{\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^n}-\frac{1}{(\mu-\varphi-\sigma+1)^{n-1}}}>$$

Concluímos de aquí que para $m > S+1$ el valor de la expresión

$$\frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\sigma)}{1\cdot 2\cdots(m-\sigma)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\sigma}{m-S}\right)$$

en la desigualdad [I] no puede sobrepasar el que corresponde a $\varphi = 0$, $\sigma = 0$ y que es igual a

$$\frac{1\cdot 2\cdots\mu}{1\cdot 2\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m)}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\left(\frac{m}{m-S}\right)$$

Por consiguiente podemos deducir de la desigualdad [I] la siguiente:

[2] $$P_m < \frac{1\cdot 2\cdots\mu}{1\cdot 2\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m)}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\frac{m}{m-S}$$

donde se supone que m es mayor que $S+1$.

La forma de demostrar que con la disminución de φ el valor de la expresión

$$\frac{1\cdot 2\cdots(\mu-\varphi-\sigma)}{1\cdot 2\cdots(m-\sigma)\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m-\varphi)}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varphi}{\mu-\varphi-\sigma}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{m-\sigma}{m-S}\right)$$

aumenta, es la siguiente:

Dividimos el valor que ésta toma cuando cambiamos φ, entre su valor original y nos queda

$$\frac{\mu-\sigma-\varphi+1}{\mu-m-\varphi+1}\;\frac{(\mu-S-\varphi+1)^{\mu-m-\varphi+2}}{(\mu-S-\varphi)^{\mu-m-\varphi+1}}\;\frac{(\mu-\sigma-\varphi)^{\mu-\sigma-\varphi+1}}{(\mu-\sigma-\varphi+1)^{\mu-\sigma-\varphi+2}}$$

que es igual a:

$$\frac{\mu-S-\varphi+1}{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{\mu-S-\varphi+1}{\mu-S-\varphi}\right)^{\mu-m-\varphi+1}\left(\frac{\mu-\theta-\varphi}{\mu-\theta-\varphi+1}\right)^{\mu-\theta-\varphi+1}$$

y que siendo puesto en la forma

$$\frac{1}{1-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}\, e^{-(\mu-m-\varphi+1)\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{\mu-S-\varphi+1}\right)+(\mu-\theta-\varphi+1)\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{\mu-\theta-\varphi+1}\right)}$$

se reduce a

$$\frac{1}{1-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}\, e^{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^{n}}-\frac{1}{(\mu-\theta-\varphi+1)^{n-1}}\right)}$$

si nos fijamos únicamente en

$$\frac{e^{\frac{\mu-m-\varphi+1}{\mu-S-\varphi+1}-1}}{1-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}=\frac{e^{-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}}{1-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}=\frac{\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\left(\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}\right)^{n}}{1-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}\right)^{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}\right)^{3}+\frac{1}{4}\left(\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}\right)^{4}-\cdots}{1-\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}}$$

vemos que es mayor que uno porque el segundo sumando es positivo, y esto a su vez es debido a que la serie en el númerador - es alternante, con el primer término positivo (*i.e.*

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\left(\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}\right)^n > \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{m-S}{\mu-S-\varphi+1}\right)^{n+1} = |a_{n+1}|, S_{gn}a_n = -S_{gn}a_{n+1}$$

y $a_2 > 0$).

Ahora nos resta fijarnos en

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^n} - \frac{1}{(\mu-0-\varphi+1)^{n-1}}\right)$$

y debemos demostrar que

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^n} - \frac{1}{(\mu-0-\varphi+1)^{n-1}}\right) > 0$$

para esto hay que hacer ver que

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^n} - \frac{1}{(\mu-0-\varphi+1)^{n-1}} > 0 .$$

Para $n = 1$ esto no es cierto, pero sí lo es para $n = 2$, porque

$$\frac{\mu-0-\varphi+1}{\mu-S-\varphi+1} > \frac{\mu-S-\varphi+1}{\mu-m-\varphi+1}$$

entonces

$\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^2} > \frac{1}{\mu-0-\varphi+1}$ y por consiguente $\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^2} - \frac{1}{\mu-0-\varphi+1} >$

Y a partir de esto se demuestra que también es cierto para toda $n > 2$, ya que

$$\frac{1}{(\mu-S-\varphi+1)^{n-2}} \geq \frac{1}{(\mu-\sigma-\varphi+1)^{n-2}}$$

y multiplicando respectivamente a cada miembro de (*) obtenemos

$$\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^{n}} \geq \frac{1}{(\mu-S-\varphi+1)^{n-2}}$$

y así

$$e^{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\mu-m-\varphi+1}{(\mu-S-\varphi+1)^{n}} - \frac{1}{(\mu-\sigma-\varphi+1)^{n-1}}\right)} > 1$$

que es lo que necesitábamos.

La cota que Chebyshev encuentra en esta sección para P_m [2], ya no es alcanzable por ninguna combinación de valores de $p_1, \ldots, p_\mu$, y aquí ya no es necesaria la restricción de que φ y σ estén fijas (puesto que las quitamos), como lo fué en el comentario de la sección anterior.

V.- En esta parte Chebyschev hace dos cosas: primero aplica la fórmula de De Moivre-Stirling en la cota que ha encontrado para P_m [2], y simplifica haciendo uso de una cierta mayorización muy concreta; despues muy ingeniosamente, acota a Q_n: la probabilidad de obtener a lo más n éxitos en μ ensayos, basándose en la desigualdad [2], simplemente cambiando en esta a p_i por $1 - p_i$, para esto tiene que suponer que $m < S - 1$.

Como se sabe, el valor del producto $1 2 3 \ldots (x-1)x$ es menor que $2.53\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{1}{12}x}$ y mayor que $2.50\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x}$ (9)

Deacuerdo a esto el valor de la expresión

$$\frac{1\cdot 2\cdots \mu}{1\cdot 2\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdots(\mu-m)}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\frac{m}{m-S}$$

es menor que (10)

$$\frac{(2.53)\, e^{\frac{1}{12}\mu}}{(2.50)^2}\;\frac{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}\,(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\frac{m}{m-S}$$

y, con mayor razón, es menor que

$$\frac{\frac{1}{2}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}\,(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\frac{m}{m-S}$$

ya que, para el mayor valor de $e^{\frac{1}{12}\mu}$, que es $e^{\frac{1}{12}}$, el producto $\frac{2.51}{(2.50)^2}\, e^{\frac{1}{12}}$ es menor que $\frac{1}{2}$.

(9) $\sqrt{2\Pi} \sim 2.5066283$ y por lo tanto está entre 2.5 y 2.53

(10) $\frac{2.53}{(2.50)} = 0.4048 < \frac{1}{2}$

De donde se sigue [2]:

$$P_m < \frac{\frac{1}{2}\ \mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}\ (\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}} \left(\frac{S}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1} \frac{m}{m-S}$$

o lo que es lo mismo

$$P_m < \frac{1}{2(m-S)} \sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m}\right)^m \left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}$$

esta desigualdad nos da el teorema siguiente.

TEOREMA. Si las probabilidades del evento E en μ experimentos consecutivos son $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ y su suma es S, el valor de la expresión

$$\frac{1}{2(m-S)} \sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m}\right)^m \left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}$$

para m mayor que $S+1$, sobrepasa siempre la probabilidad de que E ocurra al menos m veces en esos μ experimentos.

Cambiando m, p_1, $p_2, \ldots, p_\mu$ y S, por $\mu-n$, $1-p_1$, $1-p_2, \ldots,$ $1-p_\mu$, $\mu-S$ se sigue de este teorema que, si la suma $1-p_1+$ $+1-p_2+\cdots+1-p_\mu$ es igual a $\mu-S$, el valor de la expresión

$$\frac{1}{2(S-n)} \sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}} \left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n} \left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$$

para $\mu-n > \mu-S+1$ sobrepasa el de la probabilidad de que el evento contrario a E ocurra al menos $\mu-n$ veces en μ experimentos, donde $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ son las probabilidades de E.

Observando que las condiciones

$$1 - p_1 + 1 - p_2 + \cdots + 1 - p_\mu = \mu - S; \quad \mu - n > \mu - S + 1$$

se reducen a

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = S, \quad n < S - 1$$

y que el evento contrario a E no ocurra menos de $\mu - n$ veces en μ experimentos, se reduce a que E no se presente en esos experimentos mas de n veces, llegamos al teorema siguiente.

TEOREMA. Si las probabilidades del evento E en μ experimentos consecutivos son $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ y su suma es S, el valor de la expresión

$$\frac{1}{2(S-n)} \sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}} \left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n} \left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$$

para n menor que $S - 1$, sobrepasará siempre al de la probabilidad de que no ocurra en esos experimentos más de n veces.

Aquí se esta suponiendo que $1 < S < \mu - 1$, para que existan al menos una m y una n tales que $0 \leq n < S < m \leq \mu$. Es claro que para μ muy grande esto es una restricción muy débil. Por ejemplo si $p_1 = p_2 = \cdots = 0$ ó 1 entonces

$$p\left\{\left|\frac{\mu(E)}{\mu} - \frac{p_1 + \cdots + p_\mu}{\mu}\right| < Z\right\} = 1 > 1 - Q$$

y si $p_1 = p_2 = \cdots$ y $p_1 \neq 0, 1$ en este caso existe una $N \ni \forall \mu > N$ $1 < S < \mu - 1$.

VI.- A partir de los dos últimos teoremas Chebyshev puede mayorizar la probabilidad de que sucedan más de n y menos de m -- éxitos, y de aquí lo que resta es relacionar estas n y m con la Z que tiene en el enunciado del teorema que está demostrando, para que finalmente despeje a la N adecuada.

Pero la repetición del evento E no puede dar lugar más que a -- uno de estos tres casos: o el evento E ocurre al menos m veces, o no ocurre más de n veces, o por último ocurre más de n y menos de m veces.

Donde la probabilidad del último caso será determinada por la diferencia entre la unidad y la suma de las probabilidades de los dos primero casos.

Se sigue, como consecuencia de los dos últimos teoremas, que resulta el siguiente.

TEOREMA. Si las probabilidades del evento E en μ experimentos consecutivos con $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ y su suma es S, la probabilidad de que el número de repeticiones del evento E en esos μ experimentos sea menor que n y mayor que m sobre pasará para m mayor que S+1 y n menor que S-1, el valor de la expresión

$$1 - \frac{1}{2(m-S)} \sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m}\right)^{m} \left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1} - \frac{1}{2(S-n)} \sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}} \left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n} \left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$$

Para deducir de este teorema la proposición al común uso del --

artículo, notemos que el cociente del número de repeticiones - del evento E en μ experimentos al número total de experimentos μ, no alcanzará los límites

$$\frac{S}{\mu}+z \qquad \frac{S}{\mu}-z$$

si E en esos experimentos ocurre menos de $S+\mu z$ y más de $S-\mu z$ veces. Pero la probabilidad de que esto ocurra sobrepasará - (de acuerdo al último teorema) para $z > \frac{1}{\mu}$, el valor de la expresión

$$1-\frac{1}{2\mu z}\sqrt{\frac{(S+\mu z)(\mu-S-\mu z)}{\mu}}\left(\frac{S}{S+\mu z}\right)^{S+\mu z}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S-\mu z}\right)^{\mu-S-\mu z+1}$$

$$-\frac{1}{2\mu z}\sqrt{\frac{(S-\mu z)(\mu-S+\mu z)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S+\mu z}\right)^{\mu-S+\mu z}\left(\frac{S}{S-\mu z}\right)^{S-\mu z+1}$$

que puede ser puesto en la forma

$$[3] \qquad 1-\frac{1-p}{2z\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{p+z}{1-p-z}}\,H^{\mu}-\frac{p}{2z\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1-p+z}{p-z}}\,H_1^{\mu}$$

donde, para abreviar, se hizo $\frac{S}{\mu}=p$ y

$$[4] \qquad \left(\frac{p}{p+z}\right)^{p+z}\left(\frac{1-p}{1-p-z}\right)^{1-p-z}=H;\ \left(\frac{1-p}{1-p+z}\right)^{1-p+z}\left(\frac{p}{p-z}\right)^{p-z}=H_1$$

Las ecuaciones [4] nos darán para los logaritmos naturales de -

H, H_1 las series siguientes (11):

$$-\frac{z^2}{2p}\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{z}{p}\right)-\frac{z^4}{12p^3}\left(1-\frac{3}{5}\,\frac{z}{p}\right)-\cdots-\frac{z^2}{2(1-p)}-\frac{z^4}{6(1-p)^3}-\cdots$$

y

$$-\frac{z^2}{2p}-\frac{z^3}{6p^2}-\cdots-\frac{z^2}{2(1-p)}\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{z}{1-p}\right)-\frac{z^4}{12(1-p)^3}\left(1-\frac{3}{5}\,\frac{z}{1-p}\right)-\cdots$$

de donde es claro que H y H_1 tienen valores menores que 1.

Se sigue de esto que la expresión [3] se aproximará indefinidamente hacia 1, cuando μ crece, de manera que su diferencia con 1 se volverá mucho mas pequeña que Q tomando μ como cualquier número mayor que

$$\frac{\operatorname{Log}\left[Q\,\frac{z}{1-p}\sqrt{\frac{1-p-z}{p+z}}\right]}{\operatorname{Log} H} \quad y \quad \frac{\operatorname{Log}\left[Q\cdot\frac{z}{p}\sqrt{\frac{p-z}{1-p+z}}\right]}{\operatorname{Log} H_1}$$

(11) Para llegar a estas expresiones, empecemos por la del logaritmo de H, que es:

$$\operatorname{Log} H = -(p+z)\operatorname{Log}\left(1+\frac{z}{p}\right)-(1-p-z)\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{p}\right)$$

$$=\sum_2^\infty \frac{(-1)^{(n)}}{n}\cdot\frac{z^{(n)}}{p^{(n-1)}}+\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{z^{(n+1)}}{p^{(n)}}+\sum_2^\infty\frac{1}{n}\cdot\frac{z^{(n)}}{(1-p)^{(n-1)}}-\sum_1^\infty\frac{1}{n}\cdot\frac{z^{(n+1)}}{(1-p)^{(n)}}$$

$$=\sum_2^\infty\frac{(-1)^{(n)}}{n}\cdot\frac{z^{(n)}}{p^{(n-1)}}\left(1-\frac{n}{n-1}\right)+\sum_2^\infty\frac{1}{n}\,\frac{z^{(n)}}{(1-p)^{(n-1)}}\left(1-\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=-\sum_1^\infty\frac{(-1)^{(2j)}}{(2j)(2j-1)}\cdot\frac{z^{(2j)}}{p^{(2j-1)}}\left(1-\frac{2j-1}{2j+1}\cdot\frac{z}{p}\right)-\sum_2^\infty\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{z^{(n)}}{(1-p)^{(n-1)}}$$

Si cambiamos a p por $1-p$ en la expresión de H obtenemos la expresión de H_1.

Hemos llegado a la demostración rigurosa de la proposición que es el objetivo de esta nota.

Aparentemente, las cotas y la N que Chebyshev halla son independientes de la sucesión $p_1, p_2, \ldots$.

Pero esto no es así, porque dependen de $S(\mu) = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu$. De todos modos, caba preguntarse qué tan efectivas son estas cotas y esta N que Chebyshev halla.

BIBLIOGRAFÍA

1. L.E. MAISTROV, PROBABILITY THEORY (A HISTORICAL SKETCH), ACADEMIC PRESS, NEW YORK. 1974.

2. A DE MOIVRE, THE DOCTRINE OF CHANCES (OR A METHOD OF CALCULATING THE PROBABILITIES OF EVENTS IN PLAY), 3a.edición, reeditado por Wm.C.Brown, Iowa USA.

3. S.D.POISSON, RECHERCHES SUR LA PROBABILITIES DES JUGEMENTS EN MATIERE CRIMINELLE ET EN MATIERE CIVILE, BACHELIER, PARIS 1837.

4. P.L'CHEBYSHEV, OEUVRES. PUBLIEES PAR LES SOINS DE A. MARKOFF ET N.SONIN NEW YORK, CHELSEA 1962? 2 VOL.

5. WILLIAM J.ADAMS, THE LIFE AND TIMES OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM, KAEDMON PUBLISHING COMPANY, NEW YORK 1974.

6. M.LEOVE, PROBABILITY THEORY I, 4a.edición, Springer-Verlag, USA 1977.