25 No 5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE GÖDEL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

PATRICIA CORTES FLORES

México D.F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

I n t r o d u c c i ó n

El matemático griego Euclides recopiló los conocimientos que existían acerca de la geometría y los organizó de una manera deductiva, partiendo de 5 axiomas:

1.- Por dos puntos cualesquiera pasa una línea recta.
2.- Se puede prolongar una línea recta finita continuamente en una línea recta.
3.- Se puede describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4.- Todos los ángulos rectos son iguales.
5.- Si una línea recta cae sobre otras dos y hace ángulos interiores en el mismo lado menores que dos rectos; las 2 líneas rectas, al ser prolongadas indefinidamente, se encontraran en el lado sobre el cual los ángulos son menores que dos rectos.

De estos axiomas, los 4 primeros parecieron evidentes durante muchos siglos, no así el quinto. Por ese motivo, los matemáticos se dieron a la tarea de demostrarlo a partir de los 4 anteriores.

En 1733 Gerolamo Saccheri intenta demostrar el quinto postulado de Euclides por el método de reducción al absurdo, para lo cual supone válidas las 26 primeras proposiciones del tratado de Euclides y falso el quinto postulado; de esta manera comienza a hacer deducciones y después de obtener numerosos resultados encuentra una proposición referente a una propiedad del infinito. A este resultado lo considera como la contradicción buscada pues ningún punto común satisfacía dicha propiedad. Se refiere a la proposición diciendo que:"repugna a la naturaleza de la línea recta".

Sin embargo lógicamente no ha encontrado contradicción; lo que sucede es que su concepción de línea recta (y la concepción de los matemáticos de su tiempo) no le permite aceptar dicha propiedad debido a que sale de las ideas vigentes. Si en lugar de basarse en lo que se pensaba del infinito hubiera hecho caso a lo que lógicamente había deducido, el nacimiento de la geometría no euclidiana se habría adelantado varios años.

La geometría no euclidiana se basa en algunos postulados entre los que se encuentra la negación del postulado de las paralelas (el cual es equivalente al quinto postulado de Euclides).

De esta manera, los elementos de la geometría euclidiana y los de la geometría no euclidiana, tienen diferentes propiedades. Los creadores de la geometría no euclidiana no se preocuparon de que los resultados que se obtuvieran concordaran con alguna propiedad verdadera*; lo importante era que estuvieran deducidos de manera lógica.

Esta idea no fue privativa de la geometría. Las diversas ramas de las matemáticas también pretendieron estructurar su teoría de la misma forma: por una parte , tratando de darles una baseaxiomática y por otra, creando nuevas ramas de tal manera que los resultados deducidos dependieran únicamente de las suposiciones hechas. Hofstadter ejemplifica esto diciendo:"Tenemos una lista de los grandes matemáticos, en la cual Georg Cantor no figura; si suponemos que la lista está completa, concluimos que Cantor no es un gran matemático. Pero si estamos convencidos de que Georg Cantor es un gran matemático, concluimos que la lista está incompleta".

---

* Entendiendo por verdad, el conjunto de conocimientos aceptados hasta ahora en sus diversas ramas.

Así pues, para aceptar una teoría matemática, no va a interesar el contenido, sino maś bien la estructura; no se trata de ver si un concepto es verdadero o falso, se requier ver si sigue ciertas normas determinadas por las suposiciones y por las reglas permitidas.

Los matemáticos pretendieron entonces formalizar las matemáticas pero, ¿qué significa formalizar las matemáticas?; significa establecer estructuras tipográficas que consten de axiomas o postulados y reglas con las cuales se deduzcan teoremas en un proceso finito de aplicación. A dichas estructuras se les llama sistemas formales o sistemas finitistas.

Enseguida de la aparición del concepto de sistema formal, surgió la inquietud por crear un sistema formal que capturara a toda la matemática.

Con ese fin, Whitehead y Russell crearon un sistema formal muy amplio al que llamaron "Principia Mathematica". Sin embargo, Kurt Gödel en 1931, demostró que dicho sistema formal es incompleto, ya que ni siquiera existe un sistema formal que capture completamente a la aritmética; es decir que contenga como teoremas a todas las verdades aritméticas, a menos que sea no congruente.

El objetico de este trabajo es el estudio de dos temas: los sistemas formales y el teorema de Gödel. No se pretende además tratarlos con rigor ni profundizar en ellos, sino más bien darles una presentación intuitiva.

Dentro del estudio de los sistemas formales, se incluyen primero temas como : lenguaje y metalenguaje de un sistema, modelos, teoremas y no teoremas; y después se analizan 3 propiedades de los sistemas formales; consistencia, independencia y completez.

Dentro del estudio del Teorema de Gödel se ve lo siguiente:

Formalización de la Teoría de los Números; la cual se basa en la dada por Hofstadter.

Numeración de Gödel para la Teoría de los Números formalizada; que seguirá la misma idea de la numeración originalmente dada por él.

Después de esto se presenta el teorema de Gödel simplificado, siguiendo los mismos pasos que dio Kurt Gödel. Finalmente, se analiza una generalización de dicho teorema a la manera de Turing.

P R I M E R A   P A R T E

C A P I T U L O   I

S I S T E M A S   F O R M A L E S

S i s t e m a s   F o r m a l e s

Los sistemas formales constan de:

(1) Un conjunto de símbolos o alfabeto del sistema.

(2) El conjunto de todas las hileras de símbolos finitas y distintas del conjunto vacío, llamadas cuerdas, fórmulas o palabras del sistema formal.

(3) Un conjunto de postulados que consistirá de cuerdas del sistema a partir de las cuales se deducirán los teoremas.

(4) Reglas de formación: son reglas que se establecen y con las cuales obtendremos las cuerdas bien escritas; éstas serán susceptibles de ser teoremas. A dichas cuerdas les llamaremos cuerdas bien formadas o fórmulas bien formadas (f.b.f.).

(5) Reglas de inferencia: que serán reglas que al aplicarse a una fórmula bien formada den como resultado otra fórmula bien formada.

(6) Teoremas: que son todas las cuerdas deducidas mediante las reglas de inferencia, aplicadas a los postulados; sea el conjunto de postulados.

(7) Demostraciones: son sucesiones finitas de cuerdas para la obtención de un teorema (incluyendo los postulados usados y el teorema final).

Dentro de un sistema formal puede haber cuerdas bien formadas que no sean teoremas (tal es el caso de los sistemas incompletos (de acuerdo a un tipo de completez que veremos adelante), a dichas cuerdas les llamaremos no-teoremas. Más adelante veremos un ejemplo en el que el conjunto de no-teoremas de un sistema formal constituye el conjunto de teoremas de otro sistema formal.

Ejemplos de sistemas formales:

1.- El sistema MIU

(1) Alfabeto : M, I, U

(2) Postulado: MI

(3) Reglas de inferencia

(a) Si Mx es teorema, entonces Mxx es teorema

(b) Si MxI es teorema, entonces MxIU es teorema

(c) Si MxIIIy es teorema, entonces MxUy es teorema

(d) Si MxUUy es teorema, entonces Mxy es teorema

Donde "x" y "y" son hileras cualesquiera de símbolos del sistema.

(4) Regla de formación: Toda cuerda que comience con M es f.b.f.

(5) Unos teoremas del sistema son MIU y MIUIU

(6) Demostración de MIU

1.- MI .... axioma

2.- MIU .... regla (b)

Demostración de MIUUI

1- MI .... axioma

2- MII .... regla (a)

3- MIIII .... regla (a)

4- MIIIIIIII ..... regla (a)

5- MIUIIII ...... regla (c) con X = I   Y= IIII

6- MIUUI .... regla (c) con X = IU   Y = I

2.- El Sistema S

(1) Alfabeto: a,b

(2) Postulados:

(a) a

(b) b

(c) ab

(d) ba

(3) Reglas de inferencia

(a) - Si xa es teorema, entonces xab es teorema

(b) - Si xb es teorema, entonces xba es teorema.

(4) Regla de formación: Toda cuerda que tenga como primer símbolo a es f.b.f. y toda cuerda que inicie con b también es f.b.f.

(5) Teoremas: se puede ver que los teoremas quedan caracterizados como hileras con los símbolos a y b alternados.

(6) Se deja al lector la deducción de algunos teoremas.

3.- El sistema p - q

(1) Alfabeto: {p, q, - , o}

(2) Axiomas: Axioma 1: x p - q x

Axioma 2: x p o q x

Axioma 3: o p x q x (donde x es una hilera de símbolos "-")

(3 (Regla de form.: toda fórmula de la forma xp yqz es fórmula bien formada (x,y,z, hileras de guiones).

(4) Regla de inferencia: Si xpyqz es un teorema, entonces xpy-qz es teorema.

(6) Teoremas:

En el casode este sistema, podemos encontrar un método para saber cuando una cuerda es o no teorema. Puesto que la única regla es de alargamiento (es decir, cada vez que se aplica a una cuerda, la cuerda resultante es más larga), dada una cuerda podemos ir retroocediendo aplicando la regla al revés, en caso de llegar a algún axioma, sabremos que se trata de un teorema, pero si no se llega al axioma y ya no se puede seguir retrocediendo, la cuerda no será un teorema del sistema p-q. Este procedimiento para la distinción de los teoremas puede resultar bastante largo, sin embargo existe una caracterización de los teoremas que veremos más adelante.

(7) Un teorema es ---p--q------- La deducción se deja al lector.

4.- El sistema t-q

(1) Alfabeto: (t - q)

(2) Axioma: x t - q x

(3) Regla de inferencia: Si xty qz es teorema, entonces

xty - qzx es teorema

(4) Un teorema es: -- t --- q ------

(5) Derivación:

(1) -- t - q-- axioma

(2) -- t -- q---- regla de inferencia aplicada a (1)

(3) -- t --- q ------ regla de inferencia aplicada a (2)

(6) Regla de formación: las fórmulas de la forma xtyqz son f.b.f.

5.- El sistema D

Este sistema depende del sistema t-q. Además añadimos:

Regla de inf.: Si xtyqz es teorema, entonces xDz es teorema

6.- Sistema DND

(1) Alfabeto: { DND, - }

(2) Axioma xyDNDx donde x, y son hileras de guiones

(3) Regla de formación: las fórmulas de la forma xDNDy son f.b.f.

(4) Regla de inferencia: Si x DNDy es teorema, enton-
ces xDNDxy es teorema.

(5) Ejemplo de derivación de un teorema

Teorema ------ DND ------------

Derivación:

(1) ------ DND -- Axioma

(2) -----DND------- Regla de inferencia aplicada a (1)

(3) -----DND------------ Regla de inf. aplicada a (2)

7.- Sistema PR. Depende de los sistemas DNDy D

Reglade formación: las cuerdas de la forma xPRygz, son cuerdas bien formadas.(x,y,z, hileras de guiones o el "o")

Regla de inferencia: Si xDNDy es teorema, entonces xPRyg- es teorema

Regla de inferencia: Si xDy es teorema, entonces xPRygo es teorema.

M o d e l o s

Se vió que un sistema formal en sí no tiene ningún significado, entonces ¿En qué momento nos van a ser útiles los sistemas formales en el estudio de las matemáticas?

Los sistemas formales van a tener significado en el momento en que se les de una interpretación.

Una interpretación de un sistema formal es una asociación de "objetos" que se hace a cada símbolo del sistema formal de manera que: 1.- Para cada objeto hay exactamente un"objeto" asociado.

2.-La interpretación de las f.b.f. sea el conjunto de las proposiciones verdaderas o falsas,(pero no ambas) o ninguna.

3.-Las reglas manden a verdades en verdades.

Algunas de las interpretaciones de un sistema formal no van a tener sentido según nuestro conocimiento;ese tipo de interpretaciones no serán útiles para los intereses del presente trabajo , nuestra finalidad será encontrar inter----

pretaciones de manera que todos los axiomas se conviertan en proposiciones verdaderas*. A dichas interpretaciones se les llamará modelos.

Con respecto a los modelos y al teorema de Gödel, podemos decir que Gödel procede en cierta forma a la inversa, pues conociendo la Teoría de los Números crea un sistema formal de manera que la Teoría de los Números sea un modelo del sistema.

Ejemplos de modelos de algunos sistemas formales:

Ejemplo 1.- Sistema AC. Adoptemos los símbolos, axiomas y reglas del cálculo de predicados**.

Sean A y C dos conjuntos que satisfacen los siguientes postulados:

1- Todo elemento de A está contenido en dos elementos de C.

2- No todos los elementos de A están contenidos en un solo elemento de C.

3- Dos elementos de C contienen un solo elemento de A.

4- Todo elemento de C contiene 3 elementos de A

Vamos a dar la siguiente interpretación del sistema:

A = el conjunto de las aristas de un tetraedro

C = el conjunto de las caras del tetraedro

---

* La noción de sistema formal es muy vasta; no obstante, a los matemáticos les interesan aquellos que están ligados a su actividad. En este sentido tenemos que exigir a los sistemas formales, que contengan variables, operadores lógicos para la negación, la implicación, etc. y operadores para la cuantificación. Respecto a esta clase de sistemas, se dispone de una definición muy rigurosa y precisa de modelo. Ver apéndice.

** Ver (4)

Un elemento a de A está contenido en un elemento c de C significa que la arista a forma uno de los lados de la cara c del tetraedro.

De esta manera los conjuntos A y C quedaron definidos implícitamente por los 4 postulados anteriores.

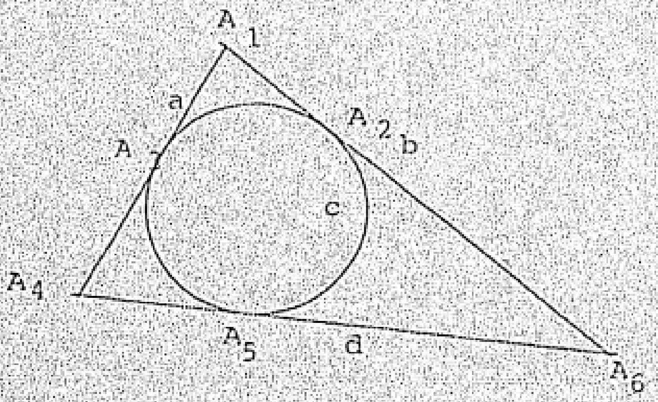
Un teorema de este sistema formal es el siguiente:

Para todo elemento de A, existe otro elemento de A para los cuales no va a existir ningún elemento de C que los contenga a ambos.

Otro modelo para el sistema anterior es un triángulo junto con su circunferencia inscrita. La correspondencia sería:

A = Los puntos de intersección de los lados del triángulo y los puntos de tangencia de cada lado con la circunferencia.

C = Los tres lados del triángulo y la circunferencia.



Es decir:

$A = \{ A_1, A_2, \ldots, A_6 \}$

$C = \{ a, b, c, d \}$

Ejemplo 2.- El sistema p-q visto anteriormente se puede interpretar como sigue:

p ——————— +

q ——————— =

o ——————— 0

\- ——————— 1

-- ——————— 2

--- ——————— 3

. . . .

Algunos de los teoremas del sistema p-q junto con su interpretación son:

Teorema	Interpretación
-- p - q ---	2+1 = 3
-- p -- q ----	2+2 = 4
--- p - q ----	3+1 = 4
--- p -- q -----	3+2 = 5
--- p --- q ------	3+3 = 6

Con esta interpretación, los teoremas quedan caracterizados como la suma de 2 enteros positivos o un entero positivo y el cero, siendo de esta manera más fácil reconocerlos.

La interpretación anterior hace verdaderos a los axiomas, de modo que la interpretación es un modelo para el sistema p-q.

Otra interpretación del sistema p-q es:

p ↔ es el resultado de sustraer

q ↔ de

o ↔ 0

\- ↔ 1

-- ↔ 2

--- ↔ 3

. . .

De esta manera -- p --- q ----- se interpreta:

2 es el resultado de sustraer 3 de 5

Esta interpretación también es un modelo.

Debemos observar que la cuerda -- p -- q ---- es un teorema no importa que 2+2 = 4 sea verdadera o falsa dentro de la aritmética, es decir, como dijimos en el principio, los teoremas no dependen de la interpretación que se le de al sistema.

De la misma manera que el sistema p-q, otros de los sistemas vistos anteriormente pueden interpretarse dentro de la Teoría de los Números.

Ejemplo 3.- Al sistema t-q lo podemos interpretar como el producto de 2 enteros positivos, asociando a t el símbolo " . " y dándoles a los otros símbolos la misma interpretación que al sistema p-q.

Ejemplo 4.- En el sistema D, xDy se interpreta como "x divide a y"

Ejemplo 5.- En el sistema DND, el símbolo DND se interpreta como "no divide a", así la regla de inferencia se interpreta: si $a \nmid b \Rightarrow a \nmid b + a$

y el axioma es equivalente a:

Si a y b son 2 enteros positivos $a+b \nmid a$, o bien si $a < b \Rightarrow b \nmid a$

Ejemplo 6.- Vamos a ver otro sistema formal que depende de los vistos en la sección anterior.

Sistema ¢

Regla de formación: las cuerdas de la forma n ¢ m (con n,m, hileras de guiones), son f.b.f.

Regla de inferencia: Si i-PRnqz$_i$ con $i \leq n-2$ son teoremas y si $z_1 \; pz_2 \; qm_1$

$m_1 \; pz_3 \; qm_2$

$m_2 \; pz_4 \; qm_3$

$m_{n-3} pz_{n-1} qm$

son teoremas, entonces $n \phi m -$ es teorema

ϕ Se puede interpretar como la función ϕ de la teoría de los números, entonces $n \phi m$ se interpreta: hay $m+1$ primos relativos con n menores que n.

También podemos interpretar al sistema ϕ de la manera siguiente:

n = número de caras de un prisma n-agonal regular cerrado (al cual se le han pegado una - base con otra).

m = el número de formas en que pueden ser unidas las bases, de manera que pueda ser dibujada una línea en todas las caras del prisma, sin despegar el lápiz.

Por ejemplo: $4 \phi 2$ se interpreta: hay 2 maneras de recorrer las caras de un prisma cuadrangular - sin separar el lápiz del prisma.

L e n g u a j e y M e t a l e n g u a j e

Quizá la distinción entre lenguaje y metalenguaje surge del intento de evitar la autorreferencia en las paradojas de la lógica.

Algunas variantes de las paradojas de este tipo más conocidas son:

La paradoja de Epiménides:

"Estoy mintiendo"

Esta frase P no podemos decir que sea verdadera, puesto que si así fuera, según su contenido, no estaría diciendo la verdad, es decir no estaría mintiendo, pero entonces $\sim P$: No estoy mintiendo es verdadero.

Tampoco podemos decir que sea falsa, puesto que en tal caso $\sim P$ (la negación de P), es verdadera, es decir no estaría mintiendo, pero si no estoy mintiendo, entonces digo verdad al decir P, o sea P es verdadera.

La paradoja de Bèrry:

Veamos la siguiente expresión: "El último número natural que no es definible en menos de veintiocho sílabas".

Supongamos que encontramos entre los números naturales un elemento n con esa propiedad. Sin embargo la frase ante-

anterior lo está definiendo y entonces n se puede definir (mediante ella) en 27 sílabas.

La paradoja de Richard:

Consideramos a las frases como sucesiones finitas de algunas de las 29 letras del abecedario o bien un espacio.

Ahora, de la totalidad de las frases desechemos las que no describen funciones de la teoría de los números y numeremos las restantes utilizando un orden de longitud, si una frase utiliza más símbolos que otra, será representada por un número natural posterior; si 2 frases tienen la misma longitud, entonces se numerarán en orden alfabético.

Así, cada frase de este tipo tendrá un número natural asociado.

Denotemos a la función que describe la i-ésima frase $f_i(a)$.

Consideremos la siguiente frase:

"La función cuyo valor para cada número natural se obtiene añadiendo 1 al valor para "a" de la función descrita por la frase correspondiente a "a" en la numeración de las frases que describen una función de la teoría de los números, por orden de longitud".

Esta fase describe una función que podemos representar:

$$f(a) = f_a(a) + 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Como representa a una función de la teoría de los números debe existir un número natural j tal que

$$f(a) = f_j(a) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Pero según (1) y (2) aplicando la función a j, tenemos

$$f_j(j) = f_j(j) + 1$$

La paradoja de Russell:

Existen 2 clases de conjuntos, los que se pertenecen a sí mismos y los que no se pertenecen a sí mismos o normales.

Sea R = conjunto formado por los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos.

¿A qué clase pertenece R?

Supongamos que es un conjunto normal, entonces se pertenece a sí mismo puesto que pertenece a todos los conjuntos normales.

Supongamos ahora que se pertenece a sí mismo, esto es, entre sus elementos se encuentra R, entonces tiene a un conjunto que no es normal.

En todas las paradojas anteriores se utiliza la autorreferencia y por ejemplo en la paradoja de Richard, la función que se construye no describe propiedades estrictamente aritméticas de los números naturales, sino que se utiliza una definición que se refiere a la notación acerca de las propiedades aritméticas, por lo que no pertenece a la aritmética, de este modo la paradoja queda solucionada si se hace la distinción entre la aritmética y las propiedades acerca de la aritmé-- tica (meta-aritmética).

Lo que sucede con las paradojas es que en sus argumentaciones se salen de ciertas limitaciones permitidas y es el momento en que se producen las situaciones paradójicas.

En los sistemas formales, tratando de evitar esto surgen los conceptos de lenguaje y metalenguaje.

Los sistemas formales utilizan un lenguaje que está constituído por los símbolos del sistema únicamente, este lenguaje es el lenguaje objeto. Al manejar las reglas, al hacer una demostración, estamos usando el lenguaje objeto.

El estudio de las propiedades del sistema, de los teoremas y su caracterización, se hace en un lenguaje distinto al que - se utiliza dentro del sistema. Al lenguaje que utilizamos - cuando hablamos acerca del sistema, le llamaremos metalenguaje.

De esta manera en el sistema S, el lenguaje objeto eran -

cadenas con los símbolos a y b y el metalenguaje, por ejemplo, el español.

Al hacer la observación de que en el sistema MIU toda cuerda que sea teorema va a comenzar con el símbolo M, no estamos - hablando en el lenguaje del sistema, nos hemos salido para - hacer algunas observaciones acerca del sistema.

Lo mismo sucede al hacer las siguientes observaciones:

(a) Tanto en el sistema t-q como en el DND, hay un número infinito de axiomas.

(b) En el caso del sistema DND, los teoremas quedan caracterizados así:

x DND y esteorema $\Longleftrightarrow$ y no es múltiplo de x

Estos resultados no pertenecen a la teoría del sistema formal, más bien pertenecen a una teoría acerca de dicho sistema formal, que podríamos llamar metateoría.

Para aclarar un poco esto, veamos el siguiente ejemplo

Sistema Cz. Regla de formación. Las cuerdas de la forma Cz con z hilera de guiones son f.b.f.

Regla de inferencia: Si x - t y - q z es un teorema - del sistema t-q , entonces Cz es un teorema.

Todos los teoremas de este sistema tendrán un número compuesto de guiones y todo elemento con un número -

compuesto de guiones será un teorema.

Esto nos sugiere construir un sistema formal en el cual cada primo pueda estar representado en un teorema, la regla de inferencia sería:

Regla de inferencia: Si Cx no es teorema, entonces Px es teorema.

Sin embargo este sistema no puede ser un sistema formal pues la regla que se usó se considera ilegal. Supongamos que tenemos un sistema formal en el que tenemos una cuerda y queremos saber si es o no un teorema y supongamos que no se tiene una caracterización de los teoremas del sistema. Entonces el sistema formal nos podría responder sólo en caso de que fuera teorema, pero si no es teorema y el conjunto de teoremas es infinito, entonces nunca sabremos la respuesta.

A pesar de todo sí podemos obtener un sistema formal que produzca primos, es decir, que contenga a las cuerdas Px como teoremas:

Sistema DF: Regla de Form.: todas las cuerdas de la forma xDFy son f.b.f.

Regla de inferencia: Si - - NDz es un teorema, entonces z DF - - es teorema

Regla de inferencia: Si z DF x es teorema y x-NDz es teorema, entonces z DF x - es teorema.

Los teoremas de este sistema quedan caracterizados como:

z DF x es teorema si no existen números entre 2 y x que dividan a z.

Sistema Px

Axioma: P --

Regla de inferencia: si z-DFz es teorema, entonces P_z- es teorema.

Regla de form.: toda cuerda de la forma Px , es f.b.f.

De aquí que el conjunto de no teoremas del sistema Cz es el conjunto de teoremas de otro sistema formal.

C A P I T U L O   I I

P R O P I E D A D E S   D E   L O S   S I S T E M A S

F O R M A L E S

Consistencia

Otra propiedad importante de los sistemas formales es la consistencia, esta propiedad es la que nos hace confiar en un sistema formal, ya que un sistema formal será consistente si dentro de su conjunto de teoremas no existen dos que sean contradictorios, es decir que uno sea la negación de otro.

Existe una forma de demostrar la consistencia de un sistema formal mediante el concepto de modelo.

Recordemos que un modelo es una interpretación de los símbolos de un sistema formal que hace verdaderos a los axiomas. Además supondremos que un modelo satisface la Ley de la no contradicción, que nos dice que ninguna proposición es verdadera y falsa al mismo tiempo.

De esta manera, un sistema formal será consistente en caso de poseer un modelo porque si no fuera así existirían S y ~S dos enunciados los cuales serían teoremas del sistema y serían satisfechos por el modelo, pero esto no es posible por la Ley de la no contradicción.

Por lo tanto para demostrar la consistencia de un sistema formal basta dar un modelo de dicho sistema.

Cuando el modelo que se encuentra para un sistema formal es otro sistema formal, diremos que el sistema formal original es consistente relativo al modelo, o que su consistencia es relativa. En caso de que el modelo no sea un sistema formal, diremos que el sistema es absolutamente consistente.

Ejemplos de sistemas absolutamente consistentes:

(a) Anteriormente se vio el sistema formal AC, al cual se le asignó un tetraedro como modelo, dicho sistema es según la definición, absolutamente consistente.

(b) La Geometría Proyectiva.

Adoptemos los símbolos, axiomas y reglas del cálculo de predicados* y añadamos :

Símbolos: variables para designar a los puntos

Variables para designar a las rectas

El símbolo "intersec."

El símbolo "está en"

Regla de formación 1: l_1 intersec. l_2 es c.b.f. si l_1 y l_2 son variables para designar rectas.

Regla de formación 2: P está en l es c.b.f. si P es variable para designar puntos y l es variable para designar recta.

Y los siguientes postulados:

P_1 Dos puntos distintos P,Q de S, están sobre una y sólo una recta.

P_2 Cualesquiera dos rectas están en al menos un punto

P_3 Existen tres puntos que no están en una misma recta.

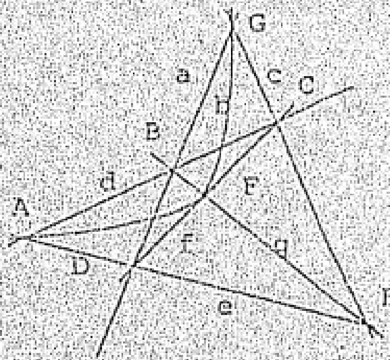
---

* Ver (4)

P_4 Cada línea contiene al menos tres puntos.

Estos postulados dan lugar a la geometría proyectiva.

Un modelo para este sistema formal es el plano proyectivo de los siete puntos:



Los puntos están denotados por A,B.C.D.E.F,G y las rectas por a,b,c,d,e,f,g. Donde a={D,B,G} ; e={A,D,E} c={G,C,E}, etc. y las reglas de form. a intersec. b corresponde a {DBG}∩{AFG}
Se puede ver que satisfacen los postulados por lo que la geometría proyectiva es absolutamente consistente.

Ejemplos de consistencia relativa:

(a) RxR es un modelo de la geometría euclidiana, asociando a los puntos pares ordenados de números reales; las rectas serán ecuaciones lineales en dos variables; un punto estará en una recta si si satisface la ecuación de la recta.

(b) Considérese la geometría hiperbólica, un modelo para la geometría hiperbólica lo constituye la geometría euclidiana.

Si se demuestra la consistencia de un sistema formal mediante un modelo B que resulta ser otro sistema formal, lo que se puede decir es que la consistencia de A depende de la consistencia de B, o bien, la consistencia de A se reduce a la de B

(es decir, A es consistente si B lo es).

Así, la geometría riemaniana es consistente si la geometría euclidiana es consistente.

Sin embargo todo esto está definido para los sistemas lógicos porque si nos fijamos en sistemas como el ab o el MIU, etc. ¿Qué es la negación de un teorema?

En estos sistemas no existen cuerdas que sean la negación de otras cuerdas, por lo tanto la consistencia se tiene que redefinir.

Para tales casos podemos definir la consistencia de dos maneras; una de ellas dependerá del sistema formal únicamente y la otra dependerá de la interpretación que se le de al sistema formal (es decir un sistema formal será consistente solamete bajo interpretación).

Consistencia interna: un sistema formal es consistente internamente si existe ϕ una cuerda bien formada y tal que ϕ no es demostrable.

Consistencia externa:

Un sistema formal es internamente consistente con respecto a una interpretación si no existen dos teoremas cuyas interpretaciones sean dos proposiciones de la forma S y ∼S.

Ejemplos:

a)- el sistema t-q, es interna y externamente consistente; es internamente consistente porque existen fórmulas bien formadas como: --t-q- que no son teoremas y es externamente consistente porque dos interpretaciones contradictorias como axb=c y axb=d con c≠d, nunca son teoremas a la vez, según la caracterización que se dió anteriormente.

b)- considérese el sistema p-q y agréguese un nuevo axioma:

Axioma: xp-qx (donde x es una hilera de guiones)

con la interpretación que teníamos resultan dos teoremas cuyas interpretaciones son contradictorias:

2+1=3 y 2+1=2

por lo tanto el sistema es externamente inconsistente, Pero es internamente consistente puesto que una f.b.f. es ----p--q- que no es teorema.

c)- modifiquemos la regla de formación del sistema S visto antes:

Regla de formación: toda cuerda con los símbolos "a" y "b" alternados es una f.b.f. Con esta nueva regla el sistema es inconsistente pues todas sus f.b.f. son teoremas del sistema.

I n d e p e n d e n c i a

Un conjunto de axiomas de un sistema lógico se dice que es independiente si ninguno de los axiomas es demostrable.

Para verificar que un axioma X es independiente del resto del conjunto, tenemos que comprobar que X no es teorema del sistema formal cuyos axiomas son el conjunto original excepto X y cuyas reglas son las mismas que se tenían originalmente.

Algunas veces se puede verificar la independencia de un postulado directamente, otras veces, podremos recurrir al siguiente resultado:

Supóngase que un sistema axiomático tiene como postulados un conjunto P y supóngase que $P \in P$, entonces si $(P \setminus P) \cup (\sim P)$, tiene un modelo, P es independiente del resto de los axiomas, ya que si P fuera dependiente, entonces P sería satisfecho por el modelo, ya que P se puede deducir de $P \setminus P$, pero también satisface $\sim P$, lo cual no puede ser, por lo tanto P es independiente. De esta manera, puesto que la geometría no euclidiana tiene un modelo, se deduce que el 5º postulado de Euclides es independiente de los restantes.

Sin embargo hay casos en que ninguno de los 2 "métodos" es efectivo y quizá ninguno. Recordemos que la conjetura de Fermat que nos dice que la ecuación

$$a^n + b^n = c^n$$

con a, b, c, n enteros positivos no tiene solución para $n > 2$; no ha podido demostrarse y tampoco se ha podido encontrar un contraejemplo, de modo que ni directa ni indirectamente podemos decir si tal proposición es independiente del resto de axiomas de la aritmética.

Hasta ahora hemos definido la independencia solamente para sistemas lógicos , sin embargo nosotros hemos visto sistemas cuyas reglas no son las reglas de la lógica, o dicho de otra forma, la lógica de esos sistemas es el conjunto de reglas del sistema, de manera que, en esos casos, la independencia de un postulado se define como:

Un postulado es independiente si no puede ser deducido del resto del conjunto por medio de las reglas del sistema.

Ejemplo 1

Los postulados del sistema S forman un conjunto independiente.

Los postulados son:

P_1 : a

P_2 : b

P_3 : ab

P_4 : ba

P_1 es independiente de $P_2 - P_4$:

Formemos el sistema S' como sigue:

Postulados: P_2, P_3, P_4

Regla de inferencia: Si xa es teorema, entonces xab es teorema y si xb es teorema, entonces xba es teorema. Bajo la condición de que x es una hilera formada por los símbolos 'a' y 'b'.

Observamos que la regla de inferencia es de alargamiento de modo que solo puede producir cuerdas más largas que b, ab y ba, por lo que 'a' no puede ser teorema de S'.

Análogamente se puede ver que P_2 es independiente.

Para ver que P_3 es independiente formamos el sistema S" con los postulados P_1, P_2 P_4 y con la misma regla.

Como la regla es de alargamiento, entonces para poder deducir 'ab', se debe partir de 'a' o de 'b', pero de 'a' y de 'b' no es posible deducir ningún teorema mediante la regla de inferencia, así que P_3 es independiente.

Análogamente se demuestra que P_4 es independiente

Ejemplo 2

Considérese el sistema M formado aumentando al MIU el axioma MU.

El sistema M tiene un conjunto de axiomas independientes.

MI es independiente de MU:

Con el axioma MU y las reglas del sistema MIU, se producen teoremas de la forma MX, donde X es una cuerda formada por una sucesión de 'U'. De modo que MI es independiente de MU.

MU es independiente de MI:

La cuerda MU no es teorema del sisteme MIU[1].

---

1 Ver Hofstadter Douglas R, 1979 pag. 260-261

Ejemplo 3

Volvamos con el sistema original p-q y aumentémosle un axioma: Ax.4 xp - qx. (x son cuerdas de guiones)

Este axioma es independiente de los originales. Esto se puede ver porque la regla siempre aumenta guiones entre la p y la q (por lo que el único teorema con un guión entre la p y la q es xp-qx-). También se puede ver que es independiente recurriendo al modelo que se le había dado al sistema. El axioma xp-qx se interpreta como $n+1 = n$ con $n \in \mathbb{N}$ que resulta ser una proposición falsa y por lo tanto no puede ser teorema del sistema p-q.

Observaciones:

Cuando tenemos un conjunto de axiomas consistentes y dependiente podemos obtener otro conjunto independiente que va a ser subconjunto del primero. La forma de hacerlo es anulando los que sean dependientes de los demás, este proceso debe terminar pues tenemos un conjunto finito de axiomas y si tenemos un solo axioma, éste siempre es independiente.

Cuando tenemos un conjunto de axiomas independiente cada vez que encontremos una cuerda bien formada -

de tal suerte que ni ella ni su negación sean teoremas del sistema, puede ser agregada y el conjunto de axiomas seguirá siendo independiente. Ahora nos podríamos preguntar si este proceso termina o continúa indefinidamente.

C o m p l e t e z

Existen dos tipos de completez:

1er. tipo: Un sistema formal es completo si para cada enunciado φ (escrito en el vocabulario técnico del sistema), se tiene que o bien φ es demostrable o $\sim\varphi$ lo es.

2o. tipo: Un sistema formal es completo si toda proposición verdadera expresable dentro del sistema es teorema.

Ejemplo:

Dentro de la geometría absoluta (cuyos axiomas los constituyen los 4 euclidianos) no es posible deducir ni el 5º postulado de Euclides (al que denotaremos Ψ) ni su negación, de modo que será incompleta según el primer tipo. Pero también va a ser incompleta según el segundo tipo ya que todo enunciado o es verdadero o es falso y si se tiene que es verdadero su negación es falsa y viceversa.

Ahora , si queremos hacer "más completa" a la geometría absoluta, de acuerdo al primer tipo podríamos aumentar τ como axioma del sistema y obtener la geometría euclidiana, o agregar $\neg\tau$ obteniendo la geometría hiperbólica.

Ahora veremos que el segundo tipo implica el primero en el sentido: Si existe I una interpretación tal que el sistema es completo según el segundo tipo, entonces es completo según el 1o.

Supongamos que un sistema formal es incompleto con la 1a. definición, entonces existe σ tal que σ no es demostrable y $\neg\sigma$ no es demostrable, entonces

1er. caso: Si σ es verdadero, tenemos que el sistema es incompleto según el 2o. tipo.

2o. caso: Si σ es falso, entonces $\neg\sigma$ es verdadero y no es demostrable de modo que el sistema es incompleto según el 2o. tipo.

Y esto para cualquier interpretación

Para el primer tipo de completez, tenemos un modo indirecto de demostrar la propiedad.

Criterio de completez: Si un sistema formal consistente es tal que todo par de modelos son isomorfos, entonces el sistema formal es completo.

Ejemplo: anteriormente vimos el sistema AC con 4 postulados,- ahora tomaremos solo los 3 primeros y demostraremos que el sistema es incompleto.

Veamos la siguiente proposición:

T: Todo elemento de C contiene 3 elementos de A

Su negación T diría por ejemplo:

~T: Todo elemento de C contiene 2 elementos de A

Un modelo para el sistema AC con los postulados: 1,2,3,T es el visto anteriormente.

Y un modelo para el sistema AC con los postulados: 1, 2, 3,~T es un triángulo en el que A será el conjunto formado por los vértices y C será el conjunto formado por los lados.

De esta manera, tanto T como ~T son independientes de: 1, 2 y 3; de manera que T es una fórmula bien formada tal que ni ella ni su negación son teoremas, de modo que el sistema es incompleto.

Las dos definiciones de completez dadas anteriormente, funcionan solamente para sistemas formales lógicos. Sin embargo, nosotros hemos visto otros tipos de sistemas formales.

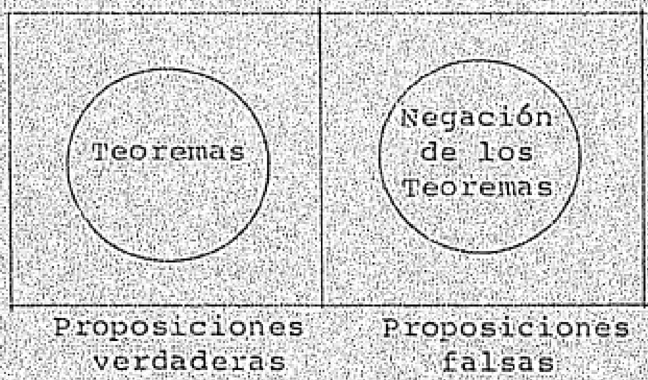
> Un sistema formal es completo respecto a una interpretación si cada proposición verdadera de la interpretación que sea traducible al lenguaje del sistema, se traduce en un teorema.

Un ejemplo de sistema completo es el t-q con la interpretación que se le dió ya que todo producto de 2 enteros positivos (que es el conjunto de las cuerdas expresables en el sistema) es traducible en un teorema del sistema.

Para un sistema formal consistente, tenemos el siguiente diagrama:

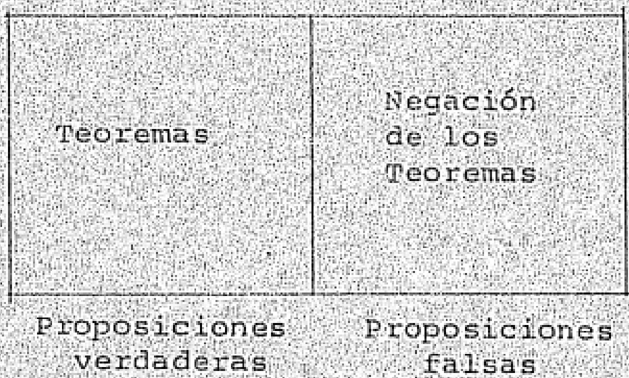
Sistema formal

(a)



Lo que nos dice el 2o. tipo de completez es que si el sistema es completo entonces el diagrama tendrá el siguiente aspecto:

(b)



Y si en lugar de sistema formal escribimos sistema formal interpretado, en vez de teoremas y negación de teoremas ponemos teoremas interpretados y negación de los teoremas, interpretados, tendremos el diagrama de completez definida para los sistemas no lógicos.

Otra manera de decir que un sistema es completo según el segundo tipo de completez o completo según la definición dada para los sistemas no lógicos, es la siguiente: cuando los no teoremas (o interpretaciones de los no teoremas) coinciden con la negación de los teoremas (o interpretaciones de la negación de los teoremas), el sistema es completo (o completo bajo interpretación).

En el caso de tener un sistema formal con un diagrama como el (a), podemos agregar una proposición verdadera como axioma (si no se tenía como teorema) y obtener así un sistema formal "más completo".

Si continuamos con este proceso ¿llegaremos siempre a tener un sistema formal completo?

Gödel demuestra que para el caso de la Teoría de los Números formalizada, siguiendo este procedimiento nunca se alcanza la completez, ya que siempre puede ser construída una cuerda que sea una proposición verdadera y que no sea teorema.

Esto se puede expresar también diciendo que no existe un sistema formal que sea capaz de reproducir como teoremas a todas las proposiciones verdaderas de la teoría de los números.

Hofstadfer nos dice que lo que Godel establece es la diferencia entre el razonamiento humano y el razonamiento mecánico, ya que mientras el hombre puede establecer proposiciones verdaderas mediante ciertos razonamientos; la estructura de un sistema formal nunca logrará producir las mismas proposiciones mecánicamente.

S E G U N D A   P A R T E

C A P I T U L O   I

F O R M A L I Z A C I O N   D E   L A
T E O R I A   D E   L O S   N U M E R O S

Formalización de la Teoría de los Números

Teoría Tipográfica de los Números

Daremos un sistema formal de la Teoría de los números al que llamaremos Teoría tipográfica de los números (TNT).

I.- Los símbolos del sistema y su interpretación:

Hay diferentes tipos de símbolos;

1.- Los numerales; son la representación de los números naturales en cuerdas del sistema:

cero ___ o

uno ___ so

dos ___ sso

. . .

2.- Símbolos de las operaciones binarias: "+"; "."; "=", con las interpretaciones que conocemos (los símbolos "+" y "." al usarse dentro del sistema, deberán - usarse colocando entre paréntesis a los 2 números o variables con los que se efectuará la operación: (a + so))

3.- Las variables, cuando nos queremos referir a algún - número sin especificarlo, se usarán las variables - que serán representadas por: y, y_1, y_2, ...

4.- Los símbolos del cálculo proposicional se utilizarán como símbolos del TNT (bajo la interpretación usual), a excepción de los que representan a los átomos, en su lugar tendremos a las proposiciones que indican alguna igualdad.

II.- Los términos. Son los numerales y las variables; los términos precedidos por el símbolo "s" también son términos,

Si s y t son términos también lo son (s+t) y (s.t)
Hay 2 clases de términos:

III.- Reglas de formación.

1.- Un atomo es una fórmula bien formada (f. b. f.)

2.- Si a una fórmula bien formada se le antepone el símbolo " $\sim$ ", la cuerda resultante será bien formada.

3.- Si 'x' y 'y' son f.b.f. y una variable que es libre en una, no es cuantificada en la otra, entonces

$$\langle x \wedge y \rangle, \quad \langle x \vee y \rangle \quad \text{y} \quad \langle x \supset y \rangle$$

también serán f.b.f.

4.- Si x es una fórmula bien formada y u es variable, entonces "$\forall$ u: x " y "$\exists$ u: x " son fórmulas bien formadas.

Definición.- En ($\forall$ u: x) fórmula bien formada, decimos que "x" es el alcance del cuantificador "$\forall$ u".

Definición.- Una ocurrencia de la variable "u" está acotada en una fórmula "x" si y solo si -- "u" es la variable de un cuantificador -- que aparece en "x", o bien, está dentro - del alcance de un cuantificador: "$\forall$ u" o "$\exists$ u".

En caso contrario la variable "u" será - libre.

Definición.- Una variable "u" se dice que es libre en una fórmula bien formada "x" si y solo si tiene una ocurrencia libre en "x".

Definición.- Una fórmula es abierta si tiene al menos una variable libre.

En caso contrario, la fórmula es cerrada.

IV.- Los axiomas del TNT.

Axioma 1: $\forall a: \sim sa = 0$

Axioma 2: $\forall a: (a+0) = a$

Axioma 3: $\forall a: \forall b: (a+sb) = s(a+b)$

Axioma 4: $\forall a: (a \cdot 0) = 0$

Axioma 5: $\forall a: \forall b: (a \cdot sb) = ((a \cdot b) + a)$

V.- Las reglas del TNT

1.- Las reglas del cálculo proposicional son adoptadas por el TNT.

2.- Regla de especificación: Supongamos que u es una variable dentro de la cuerda X, entonces si $\forall u:X$ es teorema, X también lo será y cualquier cuerda - que resulte al reemplazar u (en todos lados donde aparezca) por un término también lo será bajo la condición de no contener ninguna variable cuantificada en X.

3.- Regla de generalización: Supongamos que X es un - teorema en el que u es una variable libre, entonces la cuerda $\forall u:X$ es teorema. Esta regla no -

se puede aplicar a ninguna variable que aparezca en la premisa de una deducción[1].

4.- Regla de intercambio: Supongamos que u es una variable libre, entonces las cuerdas "$\forall u:\sim$" y " $\sim\exists u:$ " son intercambiables en cualquier parte dentro de un teorema.

5.- Regla de existencia: Supongamos que un término que puede contener numerales o variables libres, aparece una o varias veces en un teorema, entonces tal término puede ser reemplazado, en todos o algunos de los lugares donde aparezca, por una variable que no aparezca en otro lado del teorema, debiendo anteponer el cuantificador existencial correspondiente.

6.- Reglas de igualdad:

Simetría. Si $r = s$ es un teorema, entonces también $s = r$ lo es.

Transitividad. Si $r = s$ y $s = t$ son teoremas, entonces $r = t$ también lo es.

7.- Reglas del sucesor:

Añadir s : Si $r = t$ es teorema, también lo es

$$sr = st.$$

---

1 La regla o teorema de la deducción perteneciente al cálculo proposicional, nos dice que si tomamos una proposición A como hipótesis y mediante las reglas del cálculo proposicional podemos deducir una proposición B, entonces la proposición $A \supset B$ es un teorema. A la proposición A se le llama premisa y a B, conclusión.

Sustraer s: Si $sr = st$ es teorema, también lo es $r = t$.

8.- Regla de inducción: Supongamos que u es una variable y que $X(u)$ es una f.b.f. en la que u es libre. Si $\forall u: < X(u) \supset X(su/u) >$ y $X(o/u)$ son teoremas, entonces $\forall u: X(u)$ es teorema donde $X(a/u)$ es la cuerda que resulta al sustituir a por u

VI.- Ejemplo de una derivación:

(1)	$\forall a: (a+0) = a$	Axioma 2
(2)	$(a+0) = a$	Especificación
(3)	$a = (a+0)$	Simetría
(4)	$a = a$	Transitividad de (3) y (2)
(5)	$\forall a: a = a$	Generalización

Para el caso del sistema TNT pueden ser definidas una clase más de consistencia y una clase más de completez.

Consistencia-ω

En un sistema formal vamos a tener inconsistencia-ω en el caso de tener una propiedad P que posean todos los números naturales y pueda ser demostrada. (Es decir, tenemos una familia de teoremas: P(1), P(2), ...) Y que además, la cuerda que nos dice que existe al menos un número que no la cumple, es decir "$\exists m: \sim P(m)$" sea un teorema del sistema.

Un sistema formal es ω-consistente en caso contrario.

Completez-ω

Cuando sucede dentro de un sistema formal que todas las cuerdas en una familia piramidal son teoremas, es decir, todos los números poseen una propiedad, pero el cuantificador universal que las resume en una sola cuerda no es un teorema del sistema, tendremos un tipo especial de incompletez, que será llamado incompletez-ω. Un s.f. será ω-completo en caso contrario.

C A P I T U L O I I

N U M E R A C I O N D E G Ö D E L

N u m e r a c i ó n de G o d e l

Puesto que cualquier sistema formal posee un número finito de símbolos, podemos numerar tanto sus fórmulas como sus sucesiones de fórmulas, entre las cuales tendremos a las demostraciones, de tal manera que a cada una de ellas se les asocie - un número natural distinto.

Podemos por ejemplo asociar a los símbolos los primeros números naturales, entonces a cada fórmula le corresponderá una sucesión de números naturales finita y a cada sucesión de fórmulas le corresponderá una sucesión de sucesiones (finita o numerable).

Tomemos primero las sucesiones simples (es decir las que corresponden a fórmulas) y las dividimos en conjuntos de longitudes iguales. Después a cada uno de estos conjuntos se les ordena considerando la primera componente; si hay cuerdas cuya componente primera sea la misma, se ordenarán de acuerdo a la segunda componente, etc.

Después tomamos las sucesiones de sucesiones (correspondientes a las sucesiones de fórmulas y que contendrán a las demostraciones), éstas se ordenan de la misma forma.

De esta manera obtendremos parejas ordenadas asociadas a cada una de las sucesiones simples, donde la la. componente nos indica la longitud de la sucesión y la 2a. componente corres ponde al lugar que ocupa dentro del conjunto de sucesiones de la misma longitud. Análogamente tendremos parejas asociadas a las sucesiones de sucesiones.

Denotemos con (a,b) a las parejas ordenadas que corresponden a sucesiones simples y con [a,b] a las que corresponden a sucesiones de sucesiones.

Formemos ahora parejas de parejas ordenadas cuya primera compo nente va a ser una pareja ordenada de números naturales entre paréntesis redondo y cuya segunda componente va a ser la mis- ma pareja de números naturales pero con paréntesis cuadrado. Arreglemos a estas parejas así:

$$\begin{array}{lll} \langle (1,1), \rightarrow [1,1] \rangle \rightarrow & \langle (1,2), \rightarrow [1,2] \rangle & \langle (1,3), [1,3] \rangle \\ \langle (2,1), \rightarrow [2,1] \rangle & & \\ \downarrow & & \\ \langle (3,1), \rightarrow [3,1] \rangle & & \end{array}$$

Y numerémoslas según indican las flechas. De esta manera que dan numeradas todas las parejas ordenadas de números natura- les con paréntesis cuadrado y con redondo (Por supuesto exis ten parejas ordenadas con paréntesis redondo o cuadrado a - las que no les corresponde una fórmula o sucesión de fórmulas).

De esta manera podemos numerar las fórmulas y las sucesiones de fórmulas de tal manera que a cada una le corresponda un y solo un número natural distintivo. A dichos números les llamaremos números de Gödel de las fórmulas o sucesiones de fórmulas correspondientes.

Por otra parte las reglas pueden ser traducidas a operaciones numéricas.

Por ejemplo, si una regla dice: si la proposición N es teorema entonces la proposición M es teorema; se puede traducir a una relación numérica entre el número n asociado a N y el número m asociado a M, obteniendo R(n) = m

De la misma manera todas las reglas pueden ser traducidas a operaciones entre pares, tercias o n-adas de números naturales.

De esta manera podemos aritmetizar los símbolos, fórmulas y reglas de todo sistema formal.

Pero eso no es todo, podemos aritmetizar también el metalenguaje de los sistemas formales. Por ejemplo la frase "aba no es un teorema del sistema S", se puede traducir a la aritmética como:

El número m_{aba} (número de Gödel asociado a la cuerda aba) no es el resultado de la aplicación sucesiva de algunas relaciones aritméticas (reglas del sistema aritmetizadas) a ciertos números (números de Gödel de axiomas o teoremas).

De la misma manera, pueden ser aritmetizadas otras proposiciones metamatemáticas como:

M U es un teorema del sistema MIU

X es una derivación en el sistema T

Y en general todas las proposiciones metamatemáticas de un sistema.

Así pues, todo sistema formal puede ser numerado y traducido a la Teoría de los Números, pero como toda proposición de la teoría de los números puede ser llevada al TNT, entonces todo sistema y su metalenguaje puede reflejarse en el TNT. Se podría decir entonces que el estudio de las matemáticas formalizadas se puede reducir al estudio del TNT.

N u m e r a c i ó n d e l TNT

Hemos dicho que todo sistema formal puede ser numerado, por tanto podemos numerar al propio TNT

Daremos una numeración similar a la dada por Godel:

Los símbolos:

			+	⟶	7
S	⟶	3	.	⟶	9
=	⟶	5	(	⟶	11

)	$\leftrightarrow$	13
<	$\leftrightarrow$	15
>	$\leftrightarrow$	17
[	$\leftrightarrow$	19
]	$\leftrightarrow$	21
$\supset$	$\leftrightarrow$	23
$\sim$	$\leftrightarrow$	25
$\exists$	$\leftrightarrow$	27
$\forall$	$\leftrightarrow$	29
$\wedge$	$\leftrightarrow$	31
$\vee$	$\leftrightarrow$	33
:	$\leftrightarrow$	35
0	$\leftrightarrow$	37

A las variables numéricas les asociaremos números primos mayores o iguales que 41. Por ejemplo: $y \leftrightarrow 41$.

Las fórmulas:

A una fórmula M, le asociaremos un número $m=P_1^{m_1}.P_2^{m_2}...P_k^{m_k}$ donde $m_1, m_2, ..., m_k$ es la sucesión de los números asociados a los símbolos contenidos en la fórmula y $P_1, P_2, ..., P_k$ son los primeros k números primos; $P_1= 2$, $P_2= 3$, ...

Las sucesiones de fórmulas:

Supongamos que tenemos una sucesión de fórmulas $M_1, M_2, ... M_r$

con números de Gödel $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivamente.

Entonces a la sucesión de fórmulas le asociamos el número

$$P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \ldots P_r^{m_r}$$

donde $P_1, \ldots, P_r$ son los primeros r primos.

Además de poder numerar todas las cuerdas del TNT, tenemos que las reglas son ya operaciones aritméticas expresadas en el lenguaje del sistema TNT. También pueden ser expresadas dentro del sistema las frases como:

" a es un número TNT"

" a no es un número TNT "

Cuyos significados son: "La proposición A con número de Gödel a es teorema del TNT" o "La proposición A con número de Gödel a no es teorema del TNT."

Es decir el sistema TNT tiene la propiedad de poder reflejarse en sí mismo y esta propiedad es la que va a causar la incompletez del sistema.

C A P I T U L O I I I

T E O R E M A D E G Ö D E L

T e o r e m a   d e   G ö d e l

Vimos que toda fórmula del TNT y toda sucesión de fórmulas (que podría constituir una demostración dentro del TNT) tienen asociadas un número natural diferente. También vimos que algunas proposiciones metamatemáticas se encuentran representadas por una fórmula del TNT.

Utilizando ésto construiremos una cuerda que será lo que determine la incompletez de la aritmética.

De las proposiciones metamatemáticas tenemos en particular la -- proposición "La sucesión de fórmulas con número de Gödel x es una demostración de la fórmula con número de Gödel z"; que puede ser reflejada en el TNT y la denotaremos por Dem(x,z).

Observamos que para el caso en que x sea una demostración de z , va a existir una relación aritmética R(x,z), por lo tanto si se cumple tal relación, entonces Dem.(x,z) es verdadera y si no, es falsa.

Ahora nos fijaremos en ciertos números de Gödel:

El número de Gödel de la fórmula que se obtiene a partir de la - fórmula con número de Gödel m, sustituyendo la variable con número de Gödel 41 (que es y) por el numeral de m. Y lo denotaremos por Sust.(m,41,m).

Si hacemos variar el numeral de m, obtendremos diferentes números de Gödel, a los que denotamos con Sust.(Y,41,Y). Estos números de Gödel representan el número de Gödel de una determinada - fórmula, que utilizaremos más adelante.

Consideremos la fórmula "∿Dem,(x,z)" que se traduce como "La sucesión con número de Gödel x no es una demostración de la fórmula con número de Gödel z".

Si a esa fórmula le anteponemos $\forall x$, obtenemos la fórmula: "$\forall x \sim \text{Dem.}(x,z)$", cuyo significado es "Para la fórmula z no existe demostración" o "z no es demostrable".

Podemos ahora construir la fórmula (I):

$$\text{(I)} \quad \forall \; x \sim \text{Dem.}(x, \text{sust.}(y,41,y)$$

Que representa a la proposición metamatemática: "La fórmula con número de Gödel sust.(y,41,y) no es demostrable".

La fórmula (I) tiene un número de Gödel, supongamos que es n.

Sustituímos la variable y de la fórmula (I) por el numeral de n, obtenemos:

$$\text{(G)} \; \forall \; x \sim \text{Dem.}(x, \text{sust.}(n,41,n))$$

Como esta fórmula (G) la encontramos dentro de la aritmética, debe tener un número de Gödel.

Este número de Gödel va a ser sust.(n,41,n) ya que sust.(n,41,n) es el número de Gödel de la fórmula que se obtiene a partir de la fórmula de número de Gödel n, sustituyendo la variable de número 41 por el numeral de n; que es exactamente como fue construída G .

Pero G representa a la proposición: "La fórmula de número de Gödel sust.(n,41,n) no es demostrable".

Ahora vamos a ver que G no es demostrable.

Supongamos que G es demostrable, entonces existe una sucesión de fórmulas que constituyen su demostración. Sea k el número de Gödel de esta demostración. Entonces "Dem.(k,sust.(n,41,n)" es una fórmula aritmética verdadera. Y esta relación es de un tipo tal que si dicha relación se da entre un par definido de números, la fórmula que expresa esto es demostrable. Por lo tanto "Dem.(k,sust.(n,41,n))" es a la vez teorema. Y ahora mediante las reglas de transformación podemos derivar:

$\sim[\forall x \sim\text{Dem.}(x,\text{sust.}(n,41,n))]$ * que es la negación de G.

Por lo tanto si G fuera teorema, entonces ∿G sería teorema, es decir, si G es teorema, entonces el TNT es inconsistente. Esto último es equivalente a: si el sistema TNT es consistente, entonces G no es teorema.

De manera que bajo la suposición de que el TNT es consistente G no puede ser teorema, de donde cada una de las fórmulas de la siguiente sucesión:

$\sim\text{Dem.}(1,\text{sust.}(n,41,n))$

$\sim\text{Dem.}(2,\text{sust.}(n,41,n))$

. . .

va a ser un teorema del TNT.

Si suponemos que ∿G es teorema, entonces tenemos que la fórmula contradictoria que resume a la sucesión anterior (es decir, (*)) es teorema y tendremos entonces que el TNT es ω-inconsistente. Es decir, si ∿G es teorema, entonces el sistema es ω-inconsistente, o bien, la consistencia-ω implica que ∿G no es teorema del sistema.

Si suponemos la consistencia-ω del TNT (la cual implica la consistencia simple), tenemos que G es indecidible y por lo tanto el sistema es incompleto según el primer tipo (y por lo tanto según el segundo). Sin embargo se puede ver el problema también así:

Supongamos que $\sim$G es teorema. Como $\sim$G representa a la proposición " G es teorema" , se tiene que una proposición falsa se traduce a un teorema del TNT, lo cual no puede ser si se supone la consistencia .

Por lo tanto $\sim$G no es teorema. Además lo que dice $\sim$G es "G es teorema", por lo tanto dice algo verdadero.

Por lo tanto existe una proposición verdadera que no es teorema y entonces el TNT es incompleto según el segundo tipo de incompletez.

Pero vimos antes G no es teorema. De modo que tenemos que G es indecidible y por lo tanto tenemos incompletez según el primer tipo, bajo la suposición de que el sistema es consistente.

El TNT es ω-incompleto

Es decir, existe una familia piramidal infinita de cuerdas que son teorema, pero las cuerda que las resume no lo es.

La familia piramidal sería:

$\sim$Dem.(1,sust.(n,41,n))

$\sim$Dem.(2,sust.(n,41,n))

. . .

Y la cuerda que las resume sería G.

Puesto que G no es teorema, no existe ningún entero que corresponda a la demostración de G, por lo tanto cada proposición de la familia es verdadera y como Dem.(x,z) va a ser verdadera cada vez que exista una cierta relación aritmética entre 'x' y 'z', entonces cada proposición de la familia va a ser también teorema.

Segundo Teorema de Gödel

Mediante el teorema de la incompletez llegamos al siguiente resultado:

Si el TNT es consistente, entonces es incompleto.

Esta proposición puede ser escrita en el lenguaje del TNT como:

$$\exists\, y: \forall x \sim\text{Dem.}(x,y) \supset \forall x \sim\text{Dem.}(x,\text{sust.}(n,41,n))$$

Ya que la fórmula:

$$\exists\, y: \forall x \sim\text{Dem.}(x,y)$$

representa a la proposición:"Existe al menos una fórmula para la cual no existe demostración". Y esta proposición es equivalente a decir que la aritmética es consistente, ya que se puede demostrar que si el sistema es inconsistente, entonces toda fórmula es demostrable.

Y la fórmula:

$$\forall x \sim\text{Dem.}(x,\text{sust.}(n,41,n))$$

nos dice que la fórmula G no es demostrable, pero sabemos que G es verdadera, de modo que representa a la proposición:existe al menos una fórmula verdadera que no es demostrable, lo cual nos da la incompletez del sistema.

Si llamamos C a la primera fórmula, tenemos:

$$C \supset G$$

Esta fórmula es demostrable, es decir tenemos el teorema $C \supset G$.

Supongamos ahora que C es teorema, entonces según la regla de Modus-ponens G sería teorema, pero si G es teorema entonces el TNT es inconsistente.

De modo que C no puede ser teorema. Es decir, no se puede demostrar dentro del TNT la consistencia del mismo.

C A P I T U L O   I V

G E N E R A L I Z A C I O N   D E L

T E O R E M A   D E   G O D E L

Generalización del Teorema de Gödel

Introducción

Turing genraliza el Teorema de Gödel para cualquier sistema formal que pueda representar a la Teoría de los números. Para la demostración utiliza lo que llamó la máquina de Turing Con ello construye un predicado $\exists x: T(a,a,x)$ que demuestra que es indecidible, es decir que no existe un procedimiento dentro de la máquina que diga cuándo es verdadero y cuándo es falso. Por otra parte, demuestra que dicho predicado, al cual denota por Ca, puede ser expresado en cualquier sistema formal de la Teoría de los números, más aún, se demuestra:

(a) Si $\exists x: T(a,a,x)$

es verdadero, entonces Ca es teorema

Es decir, si el predicado es verdadro, entonces su representación en el sistema formal es teorema

Además todo sistema formal que represente a la Teoría de los números debe cumplir con: (b) Si Ca es teorema, entonces $\exists x: T(a,a,x)$ es verdadero.

Que aplicado a las proposiciones de la forma $\neg$Ca es:

(c) Si $\neg$Ca es teorema entonces $\neg$Ca es Verdadero

Con estos resultados ((a), (b),(c)) y utilizando la indecidibilidad del predicado $\exists x: T(a,a,x)$, se concluye que la proposición

(d) Si $\sim\exists x : T(a,a,x)$ es verdadera, entonces $\neg Ca$ es teorema.

No es válida siempre

Y de aquí se demuestra que para cierta "a", $\neg Ca$ no es teorema y sin embargo $\sim\exists x : T(a,a,x)$ es verdadero, lo que conduce finalmente a la incompletz del sistema.

Puesto que (a) se puede demostrar y (c) es (b) pero aplicada a las proposiciones de la forma $\neg P$, se tiene entonces, que b ajo la suposición de que el sistema formal cumple con (b), el sistema es incompleto. Pero (b) representa la consistencia del sistema.

Lo que demuestra en realidad es: si un sistema formal que represente a la Teoría de los números es consistente, entonces va a ser incompleto.

La máquina de Turing

Supongamos que tenemos un conjunto finito o numerable de preguntas o proposiciones cuya respuesta puede ser sí o no o verdadero o falso (A las cuales llamaremos predicados). Se plantea el problema de encontrar un procedimiento mecánico que nos lleve a la respuesta de cualquiera de las preguntas (del conjunto) que elijamos, con sólo seguir cada paso de dicho procedimiento.

De la misma manera que puede existir un conjunto de predicados, puede existir un conjunto de preguntas que requieren como respuesta un número natural (A estos conjuntos les llamaremos funciones). Para este tipo de conjunto se plantea el mismo problema.

A un conjunto de predicados para el cual existe un procedimiento como el que se requiere le llamaremos decidible. Y a una función le llamaremos computable.

Los predicados pueden verse como funciones; si P es un predicado y a es una variable, al predicado P(a) se le asocia la función f(a) como sigue:

$$f(a) = \begin{cases} 0 \text{ Si } P(a) \text{ es verdadero} \\ 1 \text{ Si } P(a) \text{ es falso} \end{cases}$$

La máquina de Turing va a considerar a los predicados como funciones de este tipo.

El concepto de la máquina de Turing surge de la idea de ver los procedimientos de computación como relaciones o repeticiones de operaciones elementales, Turing dice que repeticiones de sus operaciones elementales bastarían para cualquier posible computación.

Esto sugiere la Tesis Church-Turing:

Todas las funciones que pueden ser vistas como computables, son computables en la máquina de Turing (o efectivamente calculables o recursivas generales).

Más adelante, valiéndonos de esta tesis vamos a establecer algunos resultados, pero primero veremos como está constituída la máquina de Turing.

La máquina de Turing describe una máquina computadora teórica que difiere de las comunes y corrientes en 2 cosas:

1.- No tiene errores

2.- Se supone provista de una memoria infinita (y por lo tanto de una cinta infinita).

Descripción de la máquina de Turing.

Consta de:

Los estados.- serán los pasos del procedimiento (de los cuales sólo habrá un número finito).

Los momentos.- será el tiempo durante el cual está realizando un estado.

La cinta.- alargada y dividida en cuadros.

Los símbolos.- un conjunto finito de símbolos que van a ser impresos en la cinta (incluyendo el espacio en blanco).

Las condiciones de cuadro.- en un determinado momento un cuadro tiene impreso un símbolo, a tal símbolo se le llamará la condición de cuadro en ese momento.

Las operaciones.- entre un momento y otro la máquina realiza un acto consistente de 3 operaciones:

(a) Imprime un símbolo en el cuadro correspondiente, o borrar, o borrar e imprimir, o no hacer ningún cambio.

(b) Mover la cinta un cuadro a la derecha, o un cuadro a la izquierda, o dejarla donde está.

(c) Cambiar a otro estado o permanecer en el mismo estado.

Nota: cuando en (b) se requiere un movimiento a la izquierda y el cuadro en que se encuentra la máquina está a la extrema izquierda, la máquina se detendrá.

La configuración.- será el estado de la máquina junto con su condición de cuadro.

La situación.- al estado junto con la especificación de la condición de cuadro y todo lo impreso en la cinta se le llama la situación de la máquina en determinado momento.

Llamaremos a un procedimiento para alguna función o un predicado una máquina de Turing.

El procedimiento que debe seguir la máquina para dar los valores de una determinada función puede ser codificada con 15 símbolos; si cada símbolo se ve como un dígito en base 15 y luego numeramos con estos símbolos todo el procedimiento, obtenemos un número en base 15 que corresponde a un entero positivo. Así cada máquina tendrá asociado un índice i y se denotará Mi.

Definimos T(i,a,x) como la máquina con índice i con a como valor inicial que va a realizar x momentos.

Teorema I. T(i,a,x) es decidible.

Supongamos que tenemos los valores: i,a,x, dados, entonces podemos saber si el índice i corresponde o no a un programa, si no corresponde, T(i,a,x) es falso.

Si corresponde a un programa, entonces se puede seguir la trayectoria del programa con a como argumento hasta el momento x. Si en ese momento completó el valor de la función, entonces T(i a x) es verdadero, caso contrario, es falso.

De modo que parece claro que T(i a x) es decidible, entonces por la tesis Church-Turing es decidible en el sentido de que existe un programa que define a una función τ (i a x) que da como valor 0 si T(i a x) es verdadera y 1 si es falsa .

Teorema II. $\phi_i(a)$ como función parcial de i y a es computable.

$\phi_i(a)$ será el valor que de la máquina a T(i,a,x), el cual no siempre va a existir. Este valor existe sólo si existe x tal que T(iax) es verdadera.

A la función $\phi_i(a)$ como función de i y a se le llamará función parcialmente definida o función parcial.

Diremos que es computable como función parcial si existe un programa que de valores para los pares (i,a) cada vez que T(iax) es verdadera. Se puede ver a grandes rasgos que esta función es computable, entonces por la tesis Church-Turing aplicada a funciones parciales de la misma manera que a funciones totales, se demuestra que $\phi_i(a)$ es computable.

Para un cierto i que representa un programa que computa una función de la teoría de los números de una variable (esto es, para toda a, existe x tal que t(iax) es verdadera y $\phi_i(a)$ será el valor de la función), tendremos que ϕ_i es la función computada.

Teorema III. La función $\psi(a)$ definida:

$$\psi(a)\begin{cases} \phi_a(a) + 1 & \text{si ' x: T(aax) ' es verdadera} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

no es computable.

Demostración: si fuera computable esta función de una variable, existiría un programa al cual corresponde un índice p y como representa a una función de una variable, $_p$ es la función computada. Esto significa que $\psi(a)=\phi_p(a)$ para toda a.

Si sustituímos p por a, tenemos $\Psi(p)= \phi_p(p)$

Por otra parte, como existe el programa que computa a $\psi(a)$, tenemos que para toda a $\exists x$: T(aax), en particular $\exists x$: T(ppx), entonces por la definición de ϕ (a), tenemos

$$\psi(p) = \phi_p(p) + 1$$

lo cual es una contradicción, así que la función no es computable.

Teorema IV. El predicado $\exists x : T(a,a,x)$ es indecidible, Esto es, la función

$$\chi(a) = \begin{cases} 0 \text{ si } '\exists x : T(a,a,x)' \text{ es verdadero} \\ 1 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

no es computable.

Demostración : si fuera decidible podríamos computar la función $\psi(a)$ del teorema anterior, ya que si $'\exists(x) : T(a,a,x)'$ es verdadera, entonces obtenemos $\psi_a(a)$ y añadimos y si la respuesta es no $\psi(a) = 0$.

Teorema generalizado de Gödel

La proposición $\exists x: T(a,a,x)$ se puede expresar en el TNT o en cualquier sistema formal de la teoría de los números. Llamemos a esa fórmula Ca.

Si para cierta 'a' la proposición $\exists x : T(a,a,x)$ es verdadera, podemos demostrarla exhibiendo los pasos de la máquina M_a, aplicada a 'a' hasta el momento justo en que la máquina calcule un valor. Con ello se habrá probado $T(a,a,x)$ para esa x, de donde se sigue que $'\exists x : T(a,a,x)'$ es verdadera. De donde tenemos:

(1) Si $'\exists x: T(aax)'$ es verdadera, se prueba Ca es teorema.

Supondremos que en el TNT sólo las fórmulas verdaderas son demostrables, es dec

(2) Si Ca es un teorema, entonces $'\exists x:T(aax)'$ es verdadera.

Si las 2 proposiciones anteriores no fueran ciertas, el TNT no serviría como una formalización de la teoría de los números.

Teorema: no existe un procedimiento de decisión para demostrabilidad en el sistema formal TNT. Es decir, no existe un procedimiento de decisión para decir si una fórmula es o no teorema. (Esto se aplica a cualquier sistema formal para el cual para cada a se puede encontrar una fórmula cerrada Ca que cumpla con (1) y (2)).

Demostración:

Supongamos que sí existe tal procedimiento, entonces dado a, encontramos la fórmula Ca y aplicamos el procedimiento de decisión para ver si es demostrable; si es demostrable tenemos que '$\exists x$: T(aax)' es verdadera (de acuerdo a (2)) y si no es demostrable tendríamos que es falsa. De esta manera, dado un valor 'a', podemos decir si '$\exists x$:T(aax)' es verdadra o falsa, lo cual contradice al último teorema visto anteriormente.

Por lo tanto no existe tal procedimiento de decisión.

Hemos supuesto que sólo las fórmulas verdaderas son demostrables. Si aplicamos este criterio a las fórmulas de la forma $\neg$Ca, obtenemos:

(3) Si $\neg Ca$ es un teorema del TNT, entonces '$\sim\exists x: T(aax)$' es verdadero. Sin embargo el inverso:

(4) "Si '$\sim\exists x:T(aax)$' es verdadero entonces $\neg Ca$ es teorema" no es válido.

Ya que si fuera válida, dado 'a' podríamos encontrar una prueba que correspondiera a Ca o a $\neg Ca$ y de acuerdo a la que se haya encontrado, tendremos según (2) o (3) que '$\exists x:T(aax)$' es verdadera o falsa; nuevamente contradiciendo al mismo teorema.

Teorema (de la incompletez de Gödel generalizado):

Existe una fórmula cerrada Cp en el sistema TNT, tal que (i) $\neg Cp$ es verdadra (ii) $\neg Cp$ no es teorema (iii) Cp no es teorema.

Esto se aplica a cualquier sistema formal para el cual, para cada 'a', podemos encontrar una fórmula cerrada Ca tal que (1), (2) y (3) (o (2), (3), (5)) valen.

Demostración 1.

Puesto que (4) no vale para toda a, existe un número p tal que '$\sim\exists x:T(ppx)$' es verdadera pero $\neg Cp$ no es teorema en el TNT, lo cual nos da (ii).

Sin embargo '$\sim\exists x:T(ppx)$' se expresa por $\neg Cp$ en el sistema TNT de modo que $\neg Cp$ es verdadera y obtenemos (i).

Y como '$\sim\exists x$:T(ppx)' es verdadera, entonces por (2) Cp no es teorema en el sistema TNT, lo cual es (iii).

Demostración 2.

Sea Mp una máquina de Turing tal que al aplicarle 'a' como argumento busca entre la numeración de las pruebas del TNT, una de la forma $\neg$Ca y si encuntra una escribe 0, en otro caso nunca calcula un valor. Tenemos entonces:

(5) $\exists x$:T(a,a,x) es verdadra $\equiv$ ($\neg$Ca es teorema en el TNT.)

Supongamos que $\exists x$:T(ppx) es verdadera, entonces por (5) Cp es un teorema del TNT y por (3) '$\sim\exists$ x:T(ppx)' es verdadera, llegando así a una contradicción.

Por lo tanto $\sim\exists x$:T(ppx) es verdadera lo cual significa que $\neg$Cp es verdadera y se concluye (i).

Como '$\exists x$:T(ppx)' es verdadera, por (5), se tiene que $\neg$Cp no es teorema del TNT, es decir (ii).

Finalmente supongamos que Cp es Teorema del TNT, entonces por (2) '$\exists$ x:T(ppx)' es verdadera, entonces Cp es verdadera lo cual contradice (i). Por lo tanto Cp no es teorema del TNT con lo que se demuestra (iii).

Hemos encontrado una fórmula cerrada $\neg$Cp que es verdadera pero no demostrable, intentemos entonces extender el sistema TNT añadiendo $\neg$Cp, como un axioma, obtendremos un nuevo sistema formal N_o.

Si aplicamos el mismo proceso a N_o, obtenemos otra fórmula $\neg Cp_o$ verdadera y no demostrable en N_o. Este procedimiento se puede repetir obteniendo sistemas No, N_1... y nunca podremos evitar el teorema de Gödel.

En la demostración del teorema de Gödel, demostramos primeramente que existe una fórmula Cp tal que $\neg$Cp es verdadera, para ello se usó (3).

Esta expresión (3), se puede derivar de (1) y de la suposición de que el sistema TNT es simplemente consistente (es decir que no existe ninguna fórmula E tal que tanto E como $\sim$E sean teoremas del sistema).

Demostración:

Sabemos que

(a) '$\exists$ x: T(aax)' es verdadera, entonces Ca es teorema (esto es (1))

(b) $\neg$ Ca es teorema implica que Ca no es teorema (por la consistencia simple).

Entonces si suponemos que $\neg$Ca es teorema, por (b) Ca no es teorema y por (a) '$\sim\exists$x:T(aax)' es verdadera, es decir (3).

La misma parte del teorema de la incompletez se puede demostrar prescindiendo de (3), usando en su lugar la consistencia simple.

Demostración:

Supongamos que '$\exists$x:T(ppx)' es verdadera, entonces por (1) y (5) tenemos que tanto Cp como $\neg$Cp son teoremas, lo cual contradice la consistencia simple. Por lo tanto

$\sim\exists x{:}T(ppx)$ es verdadra, es decir $\neg Cp$ es verdadera.

Esto es, tenemos el resultado:

Si el TNT es simplemente consistente entonces $\sim\exists x{:}T(ppx)$ es verdadera.

Sea Mr un programa que busca entre las pruebas del TNT una prueba de una fórmula de la forma E y $\sim$E y si encuentra una escribe 0, si no, nunca da un valor.

De esta manera $\sim\exists x{:}T(rax)$ para cualquier a, expresa que el TNT es consistente, en particular $\sim\exists x{:}\ T(rrx)$, la cual se puede expresar por $\neg Cr$.

Si llamamos a esta fórmula C.

El resultado anterior se puede representar en el TNT como

$$C \supset \neg Cp$$

Que significa: si el sistema TNT es consistente, entonces es incompleto.

De esta fórmula obtenida mediante la máquina de Turing se puede deducir el 2° teorema de Gödel de la misma manera que se vió anteriormente.

A p é n d i c e

Una interpretación M consiste de un conjunto no vacío D (llamado el dominio de la interpretación) y una asignación que cumple lo siguiente:

Cada predicado A_j^n está asociado a una relación $(A_j^n)^M$ en D.

Cada función f_j^n, está asociado a una operación $(f_j^n)^M$ en D.

Cada constante a_i, está asociada con un elemento fijo.

Dadas tales interpretaciones, las variables son pensadas como teniendo rango en D y "$\sim$", "$\supset$", y los cuantificadores "$\exists$" y "$\forall$" tendrán su significado usual.

Para una interpretación dada, una f.b.f. sin variables libres (llamada cerrada), representa una proposición que es verdadera o falsa, mientras que una f.b.f. con variables libres permanece como una relación del dominio de la interpretación que puede ser verdadera para algunos valores en el dominio de las variables libres y falso para otras.

La noción de verdad puede ser precisada de la siguiente manera.

Sea M una interpretación con dominio D. Sea $\sum$ un conjunto de sucesiones numerables de elementos de D. Definiremos lo que significa que una sucesión $s=(b_1, b_2, \ldots)$ en $\sum$ satisfaga una f.b.f. $\mathcal{A}$ en M.

Primero definamos una función s^* de un argumento, con términos como argumentos y valores en D.

(1) Si t es la variable designada por x_i, $s^*(t)=b_i$

(2) Si t es una constante individual, entonces $s^*(t)$ es la interpretación en D de esa constante.

(3) Si f_j^n es una función y $(f_j^n)^M$ es la operación correspondiente en D, y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos , entonces;

$$s^*(f_j^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = (f_j^n)^M(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n))$$

Entonces, s* es una función (determinada por la sucesión s) del conjunto de términos en D.

Intuitivamente para una sucesión $s=(b_1, b_2, \ldots)$ y un término t, $s^*(t)$ es el elemento de D obtenido sustituyendo para cada i, b_i para todas las ocurrencias de x_i en t y llevando a cabo entonces la operación de la interpretación correspondiente a la función de t.

Procedamos ahora a la definición propiamente dicha (la cual - es inductiva).

(i).- si $\mathcal{A}$ es una f.b.f. atómica $A_j^n(t_1 \ldots t_n)$ y $(A_j^n)^M$ - es la relación de interpretación correspondiente, entonces la sucesión s satisface $\mathcal{A}$ sí y sólo si $(A_j^n)^M(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n))$, es decir, si la n-ada $(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n))$ es una relación $(A_j^n)^M$.

(ii).- s satisface $\sim\mathcal{A}$ si y solo si s no satisface $\mathcal{A}$.

(iii).- s satisface $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ si y solo si para cada s se - tiene que, o no satisface $\mathcal{A}$ o satisface $\mathcal{B}$.

(iv).- s satisface $\forall x_i\ \mathcal{A}$ si y solo si cada sucesión de Σ que difiere de s en al menos la iésima componente satisface $\mathcal{A}$.

Intuitivamente, una sucesión $s=(b_1, b_2, \ldots)$ satisface una - f.b.f. $\mathcal{A}$ si y solo si, cuando sustituímos para cada i un - símbolo que represente a b_i; para toda ocurrencia libre de x_i en $\mathcal{A}$, la proposición resultante es verdadera bajo la inter pretación dada.

Definición.- una f.b.f. $\mathcal{A}$ es verdadera para la interpreta-- ción M ($\models_M \mathcal{A}$), si y solo si cada sucesión en Σ satisface $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ es falsa para M si y solo si ninguna sucesión en Σ satisface $\mathcal{A}$.

Una interpretación M se dice que es un modelo para un conjunto Γ de f.b.f. si y solo si cada f.b.f. en Γ es verdadera en M.

B i b l i o g r a f í a

1.- Bonola Roberto. NON EUCLIDEAN GEOMETRY. Dover, 1955.

2.- Hofstadter Douglas R. GÖDEL ESCHER BACH AN ETERNAL GOLDEN BRAID. Basic Books, 1979.

3.- Kleene Sthephen Cole. MATHEMATICAL LOGIC. Jhon Wiley & sons, 1967.

4.- Mendelson Elliot. INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC. Van Nostrand, 1966.

5.- Nagel Ernest y James R. Newman. EL TEOREMA DE GÖDEL. Tecnos, 1979.

6.- Rojas Barbachano Rafael. CONSISTENCIA RELATIVA DE LA -- GEOMETRIA HIPERBOLICA PLANA MODELO DE POINCARE. 1979(Tesis).

7.- Smullyan Raymond M. THEORY OF FORMAL SYSTEM. Princeton University Press, 1961.