UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

PROPIEDADES TOPOLOGICAS INVARIANTES BAJO CLASES DE FUNCIONES CONTINUAS

T E S I S

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

p r e s e n t a :

PATRICIA ESPERANZA BALDERAS CAÑAS

México, D.F. 1982

I N D I C E

PROLOGO

Una de las razones que propiciaron la elaboración de este trabajo es la de recopilar resultados sobre propiedades topológicas invariantes bajo diversas clases de funciones continuas, ya que estos resultados se encuentran dispersos en los diferentes textos.

El contenido del trabajo se clasifica de acuerdo a las diversas clases de funciones consideradas, empezando por la clase de las funciones continuas, después, la clase de las identificaciones, luego, la de las identificaciones abiertas, posteriormente, la clase de las identificaciones cerradas, en seguida, la de las identificaciones perfectas, a continuación, las identificaciones que son cerradas y abiertas y por último, las funciones uniformemente continuas y uniformemente abiertas.

Las propiedades invariantes, o que se preservan, bajo una clase de funciones y que se estudian, son las propiedades más usuales como las relativas a los axiomas de separación: ser Fréchet, Hausdorff, regular, normal, completamente regular, perfectamente normal, y completamente normal.

Propiedades de numerabilidad: ser 1°contable y 2°contable, separable, Lindelöf, hereditariamente Lindelöf, hereditariamen te separable y ser espacio de Baire.

También se consideran las propiedades de compacidad, numerablemente compacto, σ-compacto, compacidad local, K-espacio, paracompacto y hereditariamente paracompacto.

Además, las propiedades de conexidad, conexidad por trayectorias, conexidad local y conexidad local por trayectorias.

Por otra parte, las propiedades que se refieren a espacios metrizables y métricos completos.

Se recuerdan en cada caso las definiciones de las propiedades topológicas, pues algunos autores difieren, sobre todo, al requerir o no la propiedad T_1 en las definiciones.

La mayor parte de los resultados son conocidos y se estudian en libros como el General Topology de Stephen Willard o de John L. Kelley y el de Topology de James Dugundji.

Sin embargo la demostración del teorema de Ernest Michael, que afirma, que la imagen continua bajo una función cerrada de un paracompacto sobre un espacio de Hausdorff es paracompacto, sólo se esboza en |W| página 148 y se encuentra demostrado en |M|.

Los resultados del capítulo quinto, referentes a funciones perfectas (funciones cerradas y con fibras compactas) son válidos aún para funciones cerradas con fronteras de las fibras compactas, ver |F|. En este capítulo se agregó al final, algunas propiedades topológicas que se reflejan bajo identificaciones perfectas, ésto es, propiedades que tiene el dominio de una identificación perfecta cada vez que le tiene la imagen.

El resultado del capítulo sexto, que afirma la invariancia de la regularidad completa bajo identificaciones abiertas y cerradas a la vez, es como una generalización del lema de Urysohn, cuya demostración se debe al doctor Adalberto García Máynez a quien se le agradece mucho sus valiosas indicaciones y sù interés en el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, en el capítulo séptimo, se prueba la invariancia de la completez en espacios métricos, bajo funciones uniformemente continuas y uniformemente abiertas; este resultado aparece en forma más general en |K|, página 202, pero no es cierto para espacios uniformes, véase también |W|, página 265.

Por último, quiero agradecer a la doctora Silvia de Neymet su valiosa y paciente orientación, así como su gran empeño en la revisión de este trabajo.

GENERALIDADES

Uno de los propósitos de este trabajo es estudiar propiedades topológicas invariantes bajo ciertas clases de funciones en las que, si P es una propiedad topológica y F una clase de funciones, se dice que P es invariante bajo la clase F si para todo espacio topológico X que tiene la propiedad P y cada función $f:X \to Y$ que pertenece a la clase F entonces $f(X)$ tiene la propiedad P.

Debido a que la imagen de f es quien debe tener la propiedad P, se consideran en general funciones suprayectivas.

Un resultado general que se aplica en varios casos es el que se refiere a propiedades P-hereditarias (HP), es decir, un espacio X tiene la propiedad HP si todo subespacio (no vacío) de X tiene la propiedad P.

LEMA.- Sea F una clase de funciones continuas suprayectivas que satisface: para toda $f:X \to Y$ que pertenece a F y para todo $B \subset Y$, la función $f_B:f^{-1}(B) \to B$ definida por f, pertenece a F. Entonces si P es una propiedad topológica invariante bajo F, la propiedad HP es invariante bajo F.

Sea X un espacio que tiene la propiedad HP, $f:X \to Y$ una función continua y suprayectiva que pertenece a F, por demostrar que Y tiene la propiedad HP.

Para $B \subset Y$ no vacío, como $f_B:f^{-1}(B) \to B$ pertenece a F y $f^{-1}(B)$ tiene la propiedad P, se concluye que B tiene la propiedad P.

Ejemplos de estas clases de funciones F, que satisfacen la hipótesis del lema son: la clase de todas las funciones continuas, la clase de todas las funciones continuas y abiertas, y la clase de todas las funciones continuas y cerradas, todas ellas suprayectivas.

En efecto, si $f:X \to Y$ es continua, suprayectiva y abierta (o cerrada) entonces para todo $B \subset Y$, $f_B:f^{-1}(B) \to B$ es continua, suprayectiva y abierta (o cerrada), pues para G abierto (o cerrado) de $f^{-1}(B)$ existe E abierto (o cerrado) en X tal que $G = E \cap f^{-1}(B)$ de ahí que $f(G) = f(E \cap f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$, pero $f(E)$ es abierto (o cerrado) de Y luego $f(G)$ es abierto (o cerrado) en B.

1 INVARIANTES BAJO FUNCIONES CONTINUAS

1.1 COMPACIDAD

1.1.1 Definición.- Un espacio topológico X es compacto si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

1.1.2 Proposición.- La compacidad es invariante bajo una función continua.

Sea $f:X \to Y$ una función suprayectiva y continua, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. La familia $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X. Entonces existen $U_1,\ldots,U_n \in \mathcal{U}$ tales que $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$ de donde $Y = f(X) = ff^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup ff^{-1}(U_n) = U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Por lo tanto Y es compacto.

1.1.3 Definición.- Un espacio X es de Lindelöf si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta contable.

1.1.4 Proposición.- De igual forma que en 1.1.2 se sigue que el ser Lindelöf es invariante bajo una función continua.

De esta proposición y del lema de generalidades se sigue:

1.1.5 Corolario.- Ser hereditariamente Lindelöf es invariante bajo funciones continuas.

1.1.6 Definición.- Un espacio X es numerablemente compacto si cada cubierta abierta contable de X tiene una subcubierta finita.

Es claro que un espacio X es compacto si y solo si es numerablemente compacto y de Lindelöf.

1.1.7 Proposición.- Si $f:X \to Y$ es continua de X numerablemente compacto sobre Y entonces Y es numerablemente compacto.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta contable de Y, considérese $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta contable de X, así que tiene una subcubierta finita, es decir, $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$ luego $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

1.1.8 Definición.- Un espacio X es σ-compacto si y solo si es unión contable de subconjuntos compactos.

Obsérvese que todo espacio σ-compacto es Lindelöf.

1.1.9 Proposición.- La imagen continua de un espacio σ-compacto es σ-compacto.

Sea $f:X \to Y$ continua y suprayectiva con X σ-compacto, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ con K_i compacto para todo i, de acuerdo a 1.1.2 $f(K_i)$ es compacto para todo $i = 1,2,\ldots,$ así que $f(X) = Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(K_i)$ de donde Y es σ-compacto.

1.2 CONEXIDAD

1.2.1 Definición.- Un espacio X es conexo si la única separación de X es la trivial, entendiéndose por una separación de un espacio X la colección de dos conjuntos abiertos ajenos cuya unión es el espacio; la separación se dice que es trivial si alguno de los dos conjuntos es vacío.

1.2.2 Proposición.- La imagen continua de un espacio conexo es conexa.

Sea $f: X \to Y$ continua y suprayectiva, con X conexo. Si $\{U, V\}$ es una separación de Y, $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ que por ser conexo se tiene $f^{-1}(U) = \phi$ ó $f^{-1}(V) = \phi$. Y como f es suprayectiva, $ff^{-1}(U) = U = \phi$ ó $ff^{-1}(V) = V = \phi$, de ahí que la única separación que admite Y es la trivial, por lo tanto Y es conexo.

1.3 CONEXIDAD POR TRAYECTORIAS

1.3.1 Definición.- Un espacio X es conexo por trayectorias si cualquier par de puntos de X están conectados por una trayectoria en X, es decir, si hay una función continua $w: I \to X$ tal que $w(0)$ y $w(1)$ es el par de puntos en cuestión.

1.3.2 Proposición.- La imagen continua de un espacio conexo por trayectorias es conexo por trayectorias.

Sea $f:X \to Y$ continua y suprayectiva, con X conexo por trayectorias. Para $y, y' \in Y$, sean $x \in f^{-1}(y)$, $x' \in f^{-1}(y')$; $w: I \to X$ una trayectoria en X que conecta x con x', entonces $fw: I \to Y$ es una trayectoria en Y que conecta y con y'.

1.4 SEPARABILIDAD

1.4.1 Definición.- Un espacio X es separable si contiene un conjunto contable y denso.

1.4.2 Proposición.- La imagen continua de un espacio separable es separable.

Considérese $f:X \to Y$ continua de X separable sobre Y, sea D un conjunto denso contable de X, $f(D)$ es un conjunto contable de Y y es denso en Y pues $\overline{f(D)} \supset f(\overline{D})$ por ser f continua y como $\overline{D} = X$ y f es suprayectiva $\overline{f(D)} \supset Y$ lo que implica $Y = \overline{f(D)}$

De este resultado y del lema del capítulo de generalidades se sigue:

1.4.3. Corolario.- Ser hereditariamente separable es invariante bajo funciones continuas.

2 INVARIANTES BAJO IDENTIFICACIONES

2.1 CONEXIDAD LOCAL

2.1.1 Definición.- Un espacio es localmente conexo si cualquier vecindad de cada punto del espacio contiene una vecindad conexa del punto.

2.1.2 Lema.- Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) X es localmente conexo

b) Cada componente de cualquier subespacio abierto de X es abierta

c) X tiene una base de conjuntos conexos.

a) $\Rightarrow$ b) Sea X localmente conexo, U un subespacio abierto de X y C_U una componente de U. Si $x \in C_U$, U es una vecindad de x luego hay una vecindad N de x en X que es conexa y contenida en U, entonces $N \subset C_U$ de ahí que C_U es abierta.

b) $\Rightarrow$ c) Supóngase que X satisface b), sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los abiertos conexos de X, por demostrar que es una base de X. Sea U un abierto de X, $x \in U$, si $C_U(x)$ es la componente de U que contiene a x, por b) $C_U(x) \in \mathcal{C}$ y como $x \in C_U(x) \subset U$, $\mathcal{C}$ es una base de X.

c) $\Rightarrow$ a) Sea N cualquier vecindad de $x \in X$, existe C abierto y conexo tal que $x \in C \subset N$ luego X es localmente conexo.

2.1.3 Definición.- Una identificación es una función suprayectiva $f:X \to Y$ de un espacio X sobre un espacio Y que tiene la topología inducida por f, es decir $U \subset Y$ es abierto de Y si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

2.1.4 Proposición.- La conexidad local es invariante bajo identificaciones.

Sea $f:X \to Y$ una identificación, con X localmente conexo. Aplicando el lema anterior, para demostrar que Y es localmente conexo, hay que probar que cada componente C_U de U un abierto de Y es abierta en Y.

Por la topología de Y, C_U es abierta en Y si y solo si $f^{-1}(C_U)$ es abierto en X. Sea $x \in f^{-1}(C_U) \subset f^{-1}(U)$, como $f^{-1}(U)$ es abierto en X la componente $C_{f^{-1}(U)}(x)$ de $f^{-1}(U)$ que contiene a x es abierta; por 1,2, $f(C_{f^{-1}(U)}(x))$ es conexo en Y y está contenido en U; luego $f(C_{f^{-1}(U)}(x)) \subset C_U$ por ser C_U la componente de U que contiene a $f(x)$ entonces $x \in C_{f^{-1}(U)}(x) \subset f^{-1}(C_U)$ lo que implica que x es un punto interior de $f^{-1}(C_U)$ de ahí que $f^{-1}(C_U)$ sea abierto en X.

2.2 CONEXIDAD LOCAL POR TRAYECTORIAS

2.2.1 Definición.- Un espacio es localmente conexo por trayectorias si cada vecindad de cada punto del espacio contiene una vecindad conexa por trayectorias del punto.

2.2.2 Lema.- Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) X es localmente conexo por trayectorias

b) Las componentes por trayectorias de cada subespacio abierto de X son conjuntos abiertos

c) Los conjuntos abiertos y conexos por trayectorias de X forman una base de X

a) => b) Sean U subespacio abierto de X localmente conexo por trayectorias, c_U una componente por trayectorias de U. Para $x \in c_U$,U es vecindad de x luego hay una vecindad conexa por trayectorias N de x en X, contenida en U, de donde $N \subset c_U$ por lo tanto c_U es abierta.

b) => c) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los abiertos conexos por trayectorias de X que satisface b). Sea U abierto de X, $x \in U$; si $c_U(x)$ es la componente por trayectorias de U que contiene a x, $c_U(x)$ es abierta y de ahí $c_U(x) \in \mathcal{C}$ y como $x \in c_U(x) \subset U$, $\mathcal{C}$ es una base de X.

c) => a) Sea N cualquier vecindad de $x \in X$, por c) existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $x \in c \subset \mathring{N}$, luego X es localmente conexo por trayectorias.

2.2.3 Proposición.- La conexidad local por trayectorias es invariante bajo identificaciones.

Considérese $f: X \to Y$ una identificación en donde X es localmente conexo por trayectorias. Para demostrar que Y es localmente conexo por trayectorias se probará, en virtud del lema, que las componentes por trayectorias de cada subespacio abierto de Y son abiertas.

Sea c_U una conponente por trayectorias de U abierto en Y. Por la topología de Y, c_U es abierta si y solo si $f^{-1}(c_U)$ es abierto en X. Sea $x \in f^{-1}(c_U) \subset f^{-1}(U)$, como $f^{-1}(U)$ es abierto en X, la componente $c_{f^{-1}(U)}(x)$ de $f^{-1}(U)$ que contiene a x es abierta y por 1.3 $f(c_{f^{-1}(U)}(x))$ es conexo por trayectorias en Y y está contenido en U, luego $f(c_{f^{-1}(U)}(x)) \subset c_U$. Entonces $x \in c_{f^{-1}(U)}(x) \subset f^{-1}(c_U)$ por lo tanto x es un punto interior de $f^{-1}(c_U)$ de donde $f^{-1}(c_U)$ es abierto en X.

2.3 K-ESPACIO

2.3.1 Definición.- Un espacio X es un K-espacio (compactamente generado) si su topología es coherente con la familia de todos sus subespacios compactos, es decir, U es abierto en X si y solo si $U \cap K$ es abierto en K para todo K compacto de X.

2.3.2 Lema.- Un espacio X es K-espacio si y solo si es el espacio de identificación de algún espacio localmente compacto[1].

---

(1) Véase la definición de espacio localmente compacto en 3.1.1

Sea X un K-espacio, $K = \{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ la familia de todos los subespacios compactos de X. Considérese el espacio suma topológica $Z = \sum_\alpha K'_\alpha$ con $K'_\alpha = \{\alpha\} \times K_\alpha$, sea $h_\alpha : K'_\alpha \to K_\alpha$ el homeomorfismo definido por $(\alpha, x) \to x$ para cada $x \in K_\alpha$. Entonces la función $h: Z \to X$ definida por $h|K'_\alpha = h_\alpha$ es continua. Para $U \subset X$ tal que $h^{-1}(U)$ es abierto en Z se tiene que $h^{-1}(U) \cap K'_\alpha = h_\alpha^{-1}(U \cap K_\alpha)$ es abierto en K'_α para cada $\alpha \in A$(puesto que Z es la suma topológica de los K'_α); como cada h_α es un homeomorfismo, $U \cap K_\alpha$ es abierto en K_α para cada α, como X es un K-espacio se sigue que U es abierto en X, Por lo tanto h es una identificación y X es el espacio de identificación de Z que es localmente compacto. En efecto, si $x \in Z = \sum_\alpha K'_\alpha$ entonces $x \in K'_\alpha$ para un solo α, pero K'_α es vecindad abierta y compacta de x puesto que es homeomorfo a K'_α.

Ahora, sean $h: Z \to X$ una identificación donde Z es localmente compacto, $U \subset X$ tal que $U \cap K$ es abierto en K para cada K compacto de X. Para $z \in h^{-1}(U)$ y K_z una vecindad compacta de z en Z, como $h(K_z)$ es compacta en X, se tiene que $U \cap h(K_z)$ es abierto en $h(K_z)$ de donde existe V abierto en X tal que $U \cap h(K_z) = V \cap h(K_z)$ luego $h^{-1}(U) \cap K_z = h^{-1}(V) \cap K_z$ es abierto en K_z, más aún es una vecindad de z en Z contenida en $h^{-1}(U)$, por lo que z es un punto interior de $h^{-1}(U) \Rightarrow$ es abierto y como h es una identificación, U es abierto en X. Con éso se comprueba que X es un K-espacio

2.3.3 Proposición.- Ser K-espacio es invariante bajo identificaciones.

Si X es un K-espacio y $f:X \to Y$ es una identificación entonces hay que probar que Y es un K-espacio. Por el lema anterior existe $g:Z \to X$ una identificación con Z un espacio localmente compacto. Entonces la función $f \circ g$ es una identificación de Z sobre Y y por el mismo lema 2.3.2 se tiene que Y es un K-espacio.

3 INVARIANTES BAJO IDENTIFICACIONES ABIERTAS

3.1 COMPACIDAD LOCAL

3.1.1 Definición.- Un espacio es localmente compacto si todo punto del espacio tiene al menos una vecindad compacta.

3.1.2 Proposición.- La imagen de un espacio localmente compacto bajo una identificación abierta es localmente compacta.

Sean $f:X \to Y$ una identificación abierta, $y \in Y$, $x \in f^{-1}(y)$ y N una vecindad compacta de x, como f es abierta $f(N)$ es vecindad abierta de $f(x) = y$. Además por 1.1 $f(N)$ es compacta, por lo tanto Y es localmente compacto.

3.2 1° CONTABLE

3.2.1 Definición.- Un espacio es 1°contable (o satisface el primer axioma de contabilidad) si tiene una base local contable en cada uno de sus puntos.

3.2.2 Proposición.- Sea $f:X \to Y$ una identificación abierta, si X es 1°contable entonces Y también lo es.

Sea $y \in Y$, $x \in f^{-1}(y)$ y β_x una base local contable de x, por ser f abierta, $\beta'_{f(x)} = \{f(V) \mid V \in \beta_x\}$ es una familia de vecindades de $f(x) = y$ contable. Considérese V una vecindad de y $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x de ahí que existe $U \in \beta_x$ tal que $x \in U \subset f^{-1}(V)$ lo que implica $y \in f(U) \subset ff^{-1}(V) = V$ y $f(U) \in \beta'_{f(x)}$, por lo tanto $\beta'_{f(x)}$ es una base local de y, de donde Y es 1°contable.

3.3 2°CONTABLE

3.3.1 Definición.- Un espacio es 2°contable si tiene una base contable.

3.3.2 Proposición.- Sea $f:X \to Y$ una identificación abierta, si X es 2°contable entonces Y lo es.

Sean $\mathcal{B}$ una base contable de X, $y \in U$ un abierto de Y, considérese $\mathcal{B}' = \{f(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$ es una familia contable de abiertos en Y, pues f es abierta. Sea $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$ abierto en X entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset f^{-1}(U)$ de donde $y \in f(V) \subset ff^{-1}(U) = U$, por lo tanto $\mathcal{B}'$ es una base de Y contable, luego Y es 2°contable.

3.4 ESPACIO DE BAIRE

3.4.1 Definición.- Un espacio X es de Baire cuando toda sucesión de abiertos densos $D_1, D_2, \ldots$ en X es tal que su intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso en X (equivalentemente, si toda sucesión $F_1, F_2, \ldots$ de cerrados con interior vacío tiene unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ con interior vacío).

3.4.2 Proposición.- Ser espacio de Baire se preserva bajo identificaciones abiertas.

Sea $f: X \to Y$ una identificación abierta con X espacio de Baire; sea $B_1, B_2, \ldots$ una sucesión de abiertos densos en Y, considérese $A_n = f^{-1}(B_n)$ con $n = 1, 2, \ldots$, son abiertos y además $A_n \cap U \neq \phi$ para todo U abierto no vacío en X puesto que $f(A_n \cap U) = f(f^{-1}(B_n) \cap U) = B_n \cap f(U)$ pero como f es abierta f(U) es abierto y por la densidad de B_n en Y, $B_n \cap f(U) \neq \phi$ de donde $f(A_n \cap U) \neq \phi$. Por lo anterior $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de abiertos densos en X luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en X. Como la imagen continua de un denso es denso (ver 1.4) se tiene que $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = f(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)) = ff^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso en Y, por lo tanto Y es un espacio de Baire.

4 INVARIANTES BAJO IDENTIFICACIONES CERRADAS

4.1 T_1

4.1.1 Definición.- Un espacio X es de Fréchet o T_1 si para cada par de puntos distintos de X hay una vecindad de cada uno que no contiene al otro punto.

4.1.2 Lema.- X es de Fréchet si y solo si $\{x\}$ es cerrado en X para todo $x \in X$.

Sea $x \in X$ espacio de Fréchet, para cada $x' \in X - \{x\}$ existe un abierto U en X tal que $x' \in U$ X $-\{x\}$ por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

Sean $x_1, x_2 \in X$ distintos, entonces $X - \{x_1\}$ y $X - \{x_2\}$ son abiertos que contienen a x_2 y a x_1 respectivamente pero no contienen a x_1 y a x_2, de ahí que X es un espacio de Fréchet.

4.1.3 Proposición.- Ser de Fréchet es invariante bajo identificaciones cerradas.

Sea $f:X \to Y$ una identificación cerrada con X de Fréchet y sea $y \in Y$, $x \in f^{-1}(y)$, $\{x\}$ es cerrado de X luego $\{y\} = \{f(x)\}$ es cerrado de Y, se sigue por el lema que Y es de Fréchet.

Observación.- En la demostración anterior no se usó que f fuera continua, así que ser de Fréchet es invariante bajo funciones suprayectivas cerradas.

4.2 NORMALIDAD

4.2.1 Definición.- Un espacio X es normal si todo par de conjuntos cerrados ajenos en X tienen vecindades (abiertas) ajenas.

4.2.2 Lema.- Si $f:X \to Y$ es una función cerrada y suprayectiva y U es un abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subset U$ para alguna y, entonces $V = Y - f(X - U)$ es abierto en Y, que contiene a y, contenido en $f(U)$.

Es claro que V es abierto puesto que f es cerrada, $f^{-1}(y) \subset U$ implica que $X - f^{-1}(y) \supset X - U$ luego $f^{-1}(Y - \{y\}) \supset X - U$ de donde $Y - \{y\} \supset f(X - U)$ y por lo tanto $y \in V$. Por otra parte: $f^{-1}(V) = X - f^{-1}(f(X - U)) \subset X - (X - U)) = U$ de ahí que $V \subset f(U)$.

4.2.3 Proposición.- Sea $f:X \to Y$ una identificación cerrada, si X es normal entonces Y es normal.

Sean F_1 y F_2 cerrados ajenos en Y, $f^{-1}(F_1)$ y $f^{-1}(F_2)$ son cerrados ajenos de X así que existen U,V abiertos ajenos tales que $f^{-1}(F_1) \subset U$ y $f^{-1}(F_2) \subset V$; sean $U' = Y - f(X - U)$ y $V' = Y - f(X - V)$ que por el lema anterior son abiertos y tales que $F_1 \subset U'$ y $F_2 \subset V'$. También son ajenos pues $U' \cap V' = [Y - f(X$

$- U)] \cap [Y - f(X - V)] = Y - [f(X - U) \cup f(X - V)] = Y - f[(X - U) \cup (X - V)] = Y - f(X) = \phi$, por lo tanto Y es normal.

4.2.4 Corolario.- Ser T_4 se preserva bajo identificaciones cerradas.

Es consecuencia de que T_4 es por definición normal y T_1.

4.3 PERFECTAMENTE NORMAL

4.3.1 Definición.- Considérese el conjunto de racionales diádicos $D = \{k/2^n \mid k = 1,\ldots,2^n-1;\ n = 1,2,\ldots\}$.

4.3.2 Lema.- D es denso en I el intervalo unitario.

Por demostrar que dados t_o, t_1 tales que $0 < t_o < t_1 < 1$ existe $d \in D$ tal que $t_o < d < t_1$. Como $t_1 - t_o > 0$ existe $n \in N$ tal que $0 < 1/2^n < t_1 - t_o$ lo que implica $2^n(t_1 - t_o) > 1$ luego el intervalo $(2^n t_o, 2^n t_1)$ tiene longitud mayor que 1 entonces existe $k \in N$ tal que $2^n t_o < k < 2^n t_1$ de donde $t_o < k/2^n < t_1$. Además $t_1 \leq 1$ implica $k < 2^n t_1 < 2^n$ es decir $k = 1,\ldots,2^n-1$, por lo tanto $k/2^n \in D$.

4.3.3 Lema.- Sea $\mathcal{U} = \{U_d \mid d \in D\}$ una familia de abiertos de X tal que si $d < d'$; $\overline{U}_d \subset U_{d'}$. Entonces existe una función continua $f: X \to I$ tal que $f(\bigcap_{d \in D} U_d) = 0$ y $f(\bigcap_{d \in D}(X - U_d)) = 1$.

Defínase $f:X \to Y$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U_d \text{ para todo } d \in D \\ \\ \inf \{d \in D \mid x \in U_d\} \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Es claro que $f(\bigcap_{d \in D} U_d) = 0$ y $f(\bigcap_{d \in D}(X - U_d)) = 1$; es más, $f^{-1}(0) = \bigcap_{d \in D} U_d$.

Obsérvese que si $x \notin \overline{U}_{d'}$, $f(x) = \inf\{r \mid x \in U_r\} \geq d'$; y si $x \in U_{d''}$, $f(x) \leq d''$.

Para probar la continuidad de f, se considera a G una vecindad de $f(x)$, si $f(x) = 1$ existe por 4.3.2 un d racional diádico tal que $[d,1] \subset G$ por lo tanto $x \in (X - \overline{U}_d)$ abierto de X y $f(X - \overline{U}_d) \subset [d,1] \subset G$. Si $f(x) = 0$ existe $d \in D$ tal que $[0,d] \subset G$ y $x \in U_d$ abierto y $f(U_d) \subset [0,d] \subset G$.

Finalmente, si $0 < f(x) < 1$ existen d,d' diádicos tales que $f(x) \in [d,d']$ G, por lo anterior, $x \in U_{d'} - \overline{U}_d$ abierto en X y $f(U_{d'} - \overline{U}_d) \subset [d,d'] \subset G$.

4.3.4 Lema de Urysohn.- Un espacio X es normal si y solo si para cada A y B cerrados ajenos en X, existe una función continua $f:X \to [0,1]$ con $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

Supóngase que X es normal, A y B cerrados ajenos en X, por la normalidad, existe un abierto que podemos llamar $U_{1/2}$ tal que $A \subset U_{1/2}$ y $\overline{U}_{1/2} \cap B = \phi$. Considérese A, $X - U_{1/2}$ cerrados ajenos, de nuevo existen $U_{1/4}$, $U_{3/4}$ abiertos tales que: $A \subset U_{1/4}$ $\overline{U}_{1/4} \subset U_{1/2}$; $\overline{U}_{1/2} \subset \overline{U}_{3/4}$ y $\overline{U}_{3/4} \cap B = \phi$. Este proceso puede continuarse al paso n+1 debido a la normalidad, por inducción, se tiene que para cada racional diádico $d = k/2^n$ existe U_d abierto con las siguientes propiedades:

1) $A \subset U_d$ y $U_d \cap B = \phi$

2) $\overline{U}_d \subset U_{d'}$ si $d < d'$

Se tiene con lo anterior una familia $\mathcal{U} = \{U_d \mid d \in D\}$ que satisface las condiciones del lema 4.3.3 y por lo tanto existe $f:X \to I$ tal que $f(\bigcap_{d\in D} U_d) = 0$ y $f(\bigcap_{d\in D}(X - U_d)) = 1$; como $A \subset \bigcap_{d\in D} U_d$ y $B \subset X - \overline{U}_d \subset X - U_d$ entonces $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

4.3.5 Definición.- Un espacio T_1, X es perfectamente normal si y solo si para cada par de conjuntos cerrados ajenos A y B hay una función continua $f:X \to I$ tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.

4.3.6 Definición.- Un conjunto G_δ es un espacio topológico, es una intersección contable de abiertos y un conjunto F_σ es unión contable de cerrados.

4.3.7 Proposición.- Un espacio X es perfectamente normal si y solo si es normal y cada conjunto cerrado en X es un G_δ (equivalentemente, si cada conjunto abierto es un F_σ).

Supóngase que X es perfectamente normal, es inmediato del lema de Urysohn que X es normal. Sea F un conjunto cerrado en X y $f:X \to I$ una función continua tal que $f^{-1}(0) = F$. Se define $G_n = f^{-1}([0,1/n))$ que es un abierto de X y $F \subset G_n$ para todo n, luego $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Además si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ se tiene $f(x) = 0$, pues si $f(x) \neq 0$ existe m entero tal que $0 < 1/m < f(x)$ así que $x \notin G_m$, por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset F$.

Ahora si X es normal y cada conjunto cerrado en X es un G_δ, sean A y B cerrados ajenos luego $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ y $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n$ con G_n, G'_n abiertos. Por el lema de Urysohn existen $f_n:X \to I$ continuas tales que $f_n(A) = 0$ y $f_n(\bigcap_{n=1}^{\infty}(X - G_n)) = 1$ para cada n, análogamente existen $g_n:X \to I$ tales que $g_n(B) = 0$ y $g_n(\bigcap_{n=1}^{\infty}(X - G'_n)) = 1$.

Se define $f_A(x) = \Sigma f_n(x)/2^n$ y $g_B = \Sigma g_n(x)/2^n$.

La función $f(x) = f_A(x)/[f_A(x) + f_B(x)]$ es continua de X en I y tal que: $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$, por lo tanto X es perfectamente normal.

Tomando complementos se obtiene: X es perfectamente normal si y solo si es normal y cada conjunto abierto es un F_σ.

4.3.8 Proposición.- Ser perfectamente normal es invariante bajo identificaciones cerradas.

Sea $f:X \to Y$ una identificación cerrada de X perfectamente normal. Como X es normal, Y es normal por 4.2.3. Supóngase que U es un abierto en Y entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, de donde $f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ cada C_n es cerrado en X, luego $U = f(f^{-1}(U)) = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(C_n)$ es un F_σ en Y, pues cada $f(C_n)$ es cerrado en Y, por lo tanto Y es perfectamente normal.

4.4 PARACOMPACIDAD

4.4.1 Definición.- Una familia de conjuntos de un espacio X se llama punto finita si cada $x \in X$ pertenece a lo más a un número finito de elementos de la familia.

4.4.2 Definición.- Una familia de conjuntos de un espacio X es localmente finita si cada punto de X tiene una vecindad que intersecta a lo más a un número finito de elementos de la familia.

Toda familia localmente finita es punto finita.

4.4.3 Proposición.- Si F es una familia localmente finita de un espacio X, entonces, $F^* = \{\overline{E} \mid E \in F\}$ es una familia localmente finita y $\bigcup_{E \in F} \overline{E} = \overline{\bigcup_{E \in F} E}$.

Sea $x \in X$ como F es localmente finita existe una vecindad N, que se puede suponer abierta sin perder generalidad, tal que $N \cap E = \phi$ para todo $E \in F$ salvo $E \in F'$ con F' subfamilia finita de F. Se tiene entonces que $E \subset N^c$ (complemento de N) para toda $E \in F - F'$ pero N^c es cerrado luego $\overline{E} \subset N^c$ de donde $\overline{E} \cap N = \phi$, lo que prueba que F es localmente finita.

Para demostrar que $\bigcup_{E \in F} \overline{E} = \overline{\bigcup_{E \in F} E}$ obsérvese que siempre se tiene $\bigcup_{E \in F} \overline{E} \subset \overline{\bigcup_{E \in F} E}$ pues $E \subset \bigcup_{E \in F} E$ implica $\overline{E} \subset \overline{\bigcup_{E \in F} E}$ implica $\bigcup_{E \in F} \overline{E} \subset \overline{\bigcup_{E \in F} E}$. Por otro lado; $E \subset \overline{E}$ implica $\bigcup_{E \in F} E \subset \bigcup_{E \in F} \overline{E}$, así que $\overline{\bigcup_{E \in F} E} \subset \bigcup_{E \in F} \overline{E}$ si $\bigcup_{E \in F} \overline{E}$ es cerrado, es decir, si $(\bigcup_{E \in F} \overline{E})^c = A$

es abierto y ésto se cumple por lo siguiente:

Sea $x \in A$, de nuevo existe una vecindad abierta N de x tal que $N \cap \bar{E} = \phi$ para todo $E \in F - F'$, pero $\bigcup_{E \in F} \bar{E}$ es cerrado para F' finita y como $x \in (\bigcup_{E \in F'} \bar{E})^c$ entonces $V = N \cap (\bigcup_{E \in F'} \bar{E})^c$ es una vecindad de x contenida en A, pues, $V \cap \bar{E} \subset N \cap \bar{E} = \phi$ para toda $E \in F - F'$ y si $E \in F'$, $V \cap \bar{E} = (N \cap (\bigcup_{E \in F'} \bar{E})^c \cap \bar{E} = (N \cap \bigcap_{E \in F'} \bar{E}^c) \cap \bar{E} = \phi$ es decir $V \cap \bigcup_{E \in F} \bar{E} = \phi$ lo que implica que $V \subset \bigcup_{E \in F} \bar{E}^c = A$ de ahí que A es abierto.

4.4.4 Definición.- Un espacio de Hausdorff X es paracompacto si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

4.4.5 Proposición.- Todo espacio paracompacto es T_4.

Se demostrará primero que si un espacio es paracompacto entonces es regular (véase la definición 5.2.1, es incluso T_3 -regular y T_1).

Sea X un espacio paracompacto, F un conjunto cerrado y $x \in X - F$. Como X es Hausdorff para cada $y \in F$ existe una vecindad abierta U_y tal que $x \notin \bar{U}_y$.

La familia $\mathcal{U} = \{X - F, U_y \mid y \in F\}$ es una cubierta abierta de X así que tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ tal que $F \subset \cup \{V \in \mathcal{V} \mid V \cap F \neq \phi\} = B$ que por la proposición 4.4.3 se tiene: $\bar{B} = \cup \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{V}$ y $V \cap F \neq \phi\}$ y como $x \notin \bar{U}_y$ para toda $y \in F$ entonces $x \notin \bar{B}$ por ser $\mathcal{V}$ refina miento de $\mathcal{U}$. Con lo anterior se tiene que $\bar{B}^c$ y B son vecindades abiertas ajenas de x y F respectivamente, de donde X es regular.

Considérese ahora X un espacio paracompacto regular y dos conjuntos cerrados ajenos F_1 y F_2 en X. Para cada $x \in F_1$, por la regularidad de X existe U_x vecindad abierta de x tal que $\bar{U}_x \cap F_2 = \phi$. La cubierta $\mathcal{U} = \{X - F_1, U_x \mid x \in F_1\}$ de X tiene entonces un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ localmente finito. Sea $B = \dot{\cup}\{V \in \mathcal{V} \mid V \cap F_1 \neq \phi\}$ entonces B es abierto y contiene a F_1 Como $\bar{U}_x \cap F_2 = \phi$ para toda $x \in F_1$ entonces $F_2 \not\subset \bar{B}$ (por ser $\mathcal{V}$ refinamiento de $\mathcal{U}$) y por la proposición 4.4.3, $\bar{B} = \cup\{\bar{V} \mid V \in \mathcal{V}$ y $V \cap F_1 \neq \phi\}$ de ahí que B y $\bar{B}^c$ son vecindades ajenas de F_1 y F_2 respectivamente.

4.4.6 Definición.- En un espacio, una familia $\mathcal{F}$ se llama σ-localmente finita, si puede descomponerse en una colección contable de familias localmente finitas.

Es evidente que toda familia localmente finita es σ-localmente finita.

4.4.7 Proposición.- Para un espacio X, T_3, las cuatro propiedades siguientes son equivalentes:

1) X es paracompacto.

2) Cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento a-

bierto σ-localmente finito.

3) Cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito no necesariamente abierto (ni cerrado).

4) Cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito

Que 1) implica 2) es inmediato.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{U}$, es decir $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ donde cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita de conjuntos abiertos. Si $\mathcal{V} = \{V_{n,\alpha} \mid \alpha \in A\}$ se define $W_n = \bigcup_{\alpha\in A} V_{n,\alpha}$ y $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, \ldots\}$ es claro que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X. Considérese $C_n = W_n - \bigcup_{i<n} W_i$ como $C_n \subset W_n$ entonces $\mathcal{C} = \{C_n \mid n \in N\}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}$; es una cubierta localmente finita ya que: si $x \in X$, sea n el menor índice tal que $x \in W_n$ entonces $x \in C_n \subset W_n$ luego $W_n \cap C_m = \phi$ para toda $m > n$. La familia $\{C_n \cap V_{n,\alpha} \mid \alpha \in A, n \in N\}$ claramente es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$ y por tanto de $\mathcal{U}$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Se demostrará que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento cerrado localmente finito. Para cada $x \in X$ sea U_x un elemento de $\mathcal{U}$ que lo contiene. Como X es regular existe un abierto V_x tal que $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x$. La familia $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in X\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$. Por la proposición 4.4.3 se

tiene que $\mathcal{W}^* = \{\overline{W} \mid W \in \mathcal{W}\}$ es localmente finita y $W \subseteq V_x$ para algún x. Luego $\overline{W} \subset \overline{V}_x \subset U_x$ esto es $\mathcal{W}^*$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$.

Finalmente 4) ⇒ 1) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X; $\mathcal{C}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$. Entonces cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta V_x que intersecta a sólo un número finito de elementos de $\mathcal{C}$. De ahí que $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{D}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{V}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$ sea $W(C) = X - \cup\{D \in \mathcal{D} \mid D \cap C = \phi\}$ por la proposición 4.4.3, W(C) es abierto y $\mathcal{W} = \{W(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ es una familia en X localmente finita pues si $x \in X$ hay una vecindad N de x que intersecta a un número finito de $D \in \mathcal{D}$, supóngase que a $D_1, \ldots, D_n$. Por la definición de W(C) se tiene que $N \cap W(C) \neq \phi$ si $D_k \cap C \neq \phi$ para alguna $k = 1, 2, \ldots, n$ pero cada $D \in \mathcal{D}$ intersecta a sólo un número finito de elementos de $\mathcal{C}$ y por tanto N intersecta a sólo un número finito de elementos de $\mathcal{C}$ y de ahí, a sólo un número finito de elementos de $\mathcal{W}$.

Como $\mathcal{C}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ para cada $C \in \mathcal{C}$ sea U(C) un elemento de $\mathcal{U}$ tal que $C \subset U(C)$. La familia $\{U(C) \cap W(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$, puesto que $\mathcal{W}$ y $\mathcal{C}$ son localmente finitas y $C \subset U(C)$. Ahora si $x \in X$, existen $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ que contienen a x luego $C \cap D \neq \phi$ implica $x \in W(C)$ y como $C \subset U(C)$ entonces $x \in U(C) \cap W(C)$

con lo que $\{U(C) \cap V(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta de X.

4.4.8 Definición.- Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio topológico preserva cerradura si para toda subfamilia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ la unión de cerraduras es la cerradura de la unión, es decir, $\cup\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}'\} = \overline{\cup\{F \mid F \in \mathcal{F}'\}}$

En particular, $\mathcal{F}$ una familia de cerrados de un espacio preserva cerradura si y solo si cualquier unión de elementos de $\mathcal{F}$ es cerrada.

Es claro, por la proposición 4.4.3, que toda familia localmente finita preserva cerradura.

4.4.9 Lema.- Si una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de un espacio X tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento cerrado $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ que preserva cerradura y para cada $\alpha \in A$, $C_\alpha \subset U_\alpha$.

Sea $\mathcal{C}$ un refinamiento cerrado de $\mathcal{U}$ que preserva cerradura. Para cada $\alpha \in A$ sea $C_\alpha = \cup\{C \in \mathcal{C} \mid C \subset U_\alpha\}$ entonces la familia $\mathcal{C}' = \{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es un refinamiento cerrado de $\mathcal{U}$ que preserva cerradura, pues C_α es cerrado por ser unión de elementos de $\mathcal{C}$ que preserva cerradura (algún C_α puede ser vacío) y $\mathcal{C}'$ preserva cerradura ya que la unión de elementos de $\mathcal{C}'$ es unión de elementos de $\mathcal{C}$..

4.4.10 Proposición.- Un espacio X de Fréchet es paracompacto si y solo si toda cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura.

Si X es paracompacto, por la proposición 4.4.7, cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito, de ahí que este refinamiento preserve cerradura.

Supóngase que X es de Fréchet y que satisface la segunda condición de la proposición. Usando la proposición 4.4.7 se demuestra que X es paracompacto probando que cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento σ-localmente finito. Primero se probará que X es normal, sean F_1 y F_2 cerrados ajenos de X. La colección $\{X - F_1, X - F_2\}$ es una cubierta abierta de X, por la condición y por el lema 4.4.9, se tiene un refinamiento cerrado $\{C_1, C_2\}$ tal que $C_1 \subset X - F_1$ y $C_2 \subset X - F_2$ es decir, $F_1 \subset X - C_1$ y $F_2 \subset X - C_2$ con $X - C_1$ y $X - C_2$ abiertos tales que $(X - C_1) \cap (X - C_2) = X - (C_1 \cup C_2) = X - X = \emptyset$, es decir, X es normal.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de X donde A es un conjunto bién ordenado. Por demostrar que tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.

Como primer paso se construirá para cada $i \in N$ una familia $\mathcal{C}_i = \{C_{\alpha,i} \mid \alpha \in A\}$ de subconjuntos de X que satisfacen para toda i las siguientes condiciones:

1) $\mathcal{C}_i$ es una cubierta cerrada que preserva cerradura de X y $C_{\alpha,i} \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$

2) $C_{\alpha,i+1} \cap C_{\beta,i} = \phi$ para toda $\alpha > \beta$

La construcción se hace por inducción en i. Para $i = 1$ se puede encontrar por el lema 4.4.9 $C_1 = \{C_{\alpha,1} \mid \alpha \in A\}$ que satisfaga 1).

Se supone, como hipótesis de inducción, que las cubiertas $C_i = \{C_{\alpha,i} \mid \alpha \in A\}$ han sido construidas de manera que satisfacen con las condiciones 1) y 2) para $i = 1,\ldots,n$. Se construirá $C_{n+1} = \{C_{\alpha,n+1} \mid \alpha \in A\}$.

Sea $U_{\alpha,n+1} = U_\alpha - (\bigcup_{\beta<\alpha} C_{\alpha,n})$ para toda $\alpha \in A$. Los conjuntos $U_{\alpha,n+1}$ son abiertos ya que $C_n = \{C_{\alpha,n} \mid \alpha \in A\}$ por 1) preservan cerradura; además cubren a X porque si $x \in X$ entonces $x \in U_{\alpha,n+1}$ para el primer α para el cual $x \in U_\alpha$. Como $x \notin U_\beta$ para toda $\beta < \alpha$ por lo tanto $x \notin C_{\beta,n}$ es decir $x \in X - C_{\beta,n}$ lo que implica $x \in U_\alpha \cap \bigcap_{\beta<\alpha}(X - C_{\beta,n})$. Por hipótesis y por el lema 4.4.9 se tiene una cubierta cerrada que preserva cerradura $C_{n+1} = \{C_{\alpha,n+1} \mid \alpha \in A\}$ tal que $C_{\alpha,n+1} \subset U_{\alpha,n+1}$ para toda $\alpha \in A$; en consecuencia la condición 1) se cumple pues $U_{\alpha,n+1} \subset U_\alpha$. Ahora bién, por la definición de los conjuntos $U_{\alpha,n+1}$ y del hecho de que $C_{\alpha,n+1} \subset U_{\alpha,n+1}$ para toda $\alpha \in A$, si $\beta < \alpha$ $C_{\alpha,n+1} \cap C_{\beta,n} \subset U_{\alpha,n+1} \cap C_{\beta,n} = \phi$ entonces C_{n+1} satisface 2). Con lo que se completa la construcción de las cubiertas C_n.

Ahora, para cada α y cada i, sea: $V_{\alpha,i} = X - (\bigcup_{\beta \neq \alpha} C_{\beta,i})$, se demostrará que:

3) $V = \{V_{\alpha,i} \mid \alpha \in A,\ i \in N\}$ es una cubierta abierta de X y $V_{\alpha,i} \subset U_\alpha$ para toda α y toda i.

4) $V_{\alpha,i} \cap V_{\beta,i} = \phi$ si $\alpha \neq \beta$

Para probar lo anterior, nótese que $V_{\alpha,i}$ es abierto puesto que $\{C_{\alpha,i} \mid \alpha \in A\}$ preserva cerradura. Como $\{C_{\alpha,i} \mid \alpha \in A\}$ es una cubierta de X se tiene que $V_{\alpha,i} \subset C_{\alpha,i} \subset U_\alpha$ y por la definición de $V_{\alpha,i}$ también se tiene que: $V_{\alpha,i} \cap V_{\beta,i} = (X - \bigcup_{\gamma\neq\alpha} C_{\gamma,i}) \cap (X - \bigcup_{\gamma\neq\beta} C_{\gamma,i}) = X - \bigcup_{\gamma\in A} C_{\gamma,i} = X - X = \phi$ si $\alpha \neq \beta$. Para probar que $\mathcal{V}$ cubre a X, sea $x \in X$, se encontrará $V_{\alpha,i}$ que lo contenga. Usando el buen orden de A, sea $\alpha_i = \min\{\alpha \in A \mid x \in C_{\alpha,i}\}$ para $i \in N$ fija en virtud de 1) y sea $\alpha_k = \min\{\alpha_i \mid i \in N\}$ entonces $x \in C_{\alpha_k,k}$ pero $x \notin C_{\alpha,k+1}$ para $\alpha \neq \alpha_k$, si $\alpha > \alpha_k$ se sigue de 2) que $C_{\alpha,k+1} \cap C_{\alpha_k,k} = \phi$ luego $x \in V_{\alpha_k,k+1} = X - (\bigcup_{\alpha\neq\beta} C_{\beta,k+1})$.

Por la condición de la proposición, $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura y por el lema 4.4.9 se tiene $\mathcal{D} = \{D_{\alpha,i} \mid \alpha \in A,\ i \in N\}$ un refinamiento cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{V}$ tal que $D_{\alpha,i} \subset V_{\alpha,i}$ para toda α y toda i. Por la normalidad de X existe para cada α, i, $W_{\alpha,i}$ abierto tal que $D_{\alpha,i} \subset W_{\alpha,i} \subset \overline{W}_{\alpha,i} \subset V_{\alpha,i}$ y la familia $\mathcal{W} = \{W_{\alpha,i} \mid \alpha \in A,\ i \in N\}$ es tal que cada $\mathcal{W}_i = \{W_{\alpha,i} \mid \alpha \in A\}$ con $i \in N$ fijo, es localmente finita ya que si $x \in X$, x tiene una vecindad que intersecta a una sola $W_{\alpha,i}$ puesto que $V_{\alpha,i} \cap V_{\beta,i} = \phi$ si $\alpha \neq \beta$. Por lo tanto $\mathcal{W}$ es σ-localmente finita y por 3) refina a $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{D}$ cubre a X entonces $\mathcal{W}$ también cubre a X.

4.4.11 Proposición.- Teorema de Michael(1)**.- La imagen de un espacio paracompacto bajo una identificación cerrada es paracompacta.**

Sea X un espacio paracompacto y $f:X \to Y$ una identificación cerrada. Como Y es un espacio T_1 entonces por la proposición 4.4.10 es suficiente demostrar que toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura.

Sea $\mathcal{W} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$, como f es continua, $\mathcal{W}$ es una colección de abiertos que cubre a X. Entonces por la paracompacidad de X se tiene que $\mathcal{W}$ tiene un refinamiento cerrado $\mathcal{F}$ que preserva cerradura. Considérese $\mathcal{V} = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$, como f es cerrada, $\mathcal{V}$ es una colección de cerrados y puesto que $\mathcal{F}$ cubre a X y f es suprayectiva entonces $\mathcal{V}$ cubre a Y. Sea $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{V}' = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}', \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}\}$ cualquier subfamilia de $\mathcal{V}$, pero $\dot{\cup}\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}'\} = f(\dot{\cup}\{F \mid F \in \mathcal{F}'\}) = A$ es un cerrado pues $\mathcal{F}$ preserva cerradura y f es cerrada; por lo tanto $\mathcal{V}$ es el refinamiento cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{U}$ ya que si $V \in \mathcal{V}$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$, lo que implica $ff^{-1}(V) \subset ff^{-1}(U)$ de donde $V \subset U$ por ser f suprayectiva.

---

(1) |M| A note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. volumen 8, página 823.

4.5 COMPLETAMENTE NORMAL

4.5.1 Definición.- X es completamente normal si todo par de conjuntos F_1, F_2 de X tales que $\overline{F}_1 \cap F_2 = F_1 \cap \overline{F}_2 = \phi$ tienen vecindades ajenas.

4.5.2 Proposición.- X es completamente normal si y solo si X es hereditariamente normal.

Si X es completamente normal, sea E un subespacio de X, F_1, F_2 cerrados ajenos en E. Como $\overline{F}_i \cap E = Cl_E(F_i) = F_i$ ($i = 1,2$) se tiene que $F_1 \cap \overline{F}_2 = \overline{F}_1 \cap F_2 = \phi$ luego existen U_1, U_2 abiertos ajenos en X tales que $F_i \subset U_i$ por lo que $F_i \subset E \cap U_i = U_i'$, los U_i' son abiertos y ajenos en E por lo tanto E es normal y en consecuencia X es hereditariamente normal.

Ahora supóngase que X es hereditariamente normal, sean $F_1, F_2 \subset X$ tales que $F_1 \cap \overline{F}_2 = \overline{F}_1 \cap F_2 = \phi$. Sea $E = X - (\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2)$ subespacio de X donde $F_i \subset E$ ya que $F_i \subset X - \overline{F}_j$ ($i \neq j$). Por otra parte, como E es un subespacio normal de X, existen abiertos U_1, U_2 en E, ajenos tales que $\overline{F}_i \cap E = Cl_E F_i \subset U_i$. Pero como E es abierto en X, U_1, U_2 son vecindades abiertas en X de F_1 y F_2, por lo tanto X es completamente normal.

Del lema del capítulo de generalidades se sigue el corolario:

4.5.5 Corolario.- Ser completamente normal y ser hereditariamente paracompacto son invariantes bajo identificaciones cerradas.

5 INVARIANTES BAJO IDENTIFICACIONES PERFECTAS

5.1 T_2

5.1.1 Definición.- Un espacio es de Hausdorff o T_2 si cada par de puntos distintos tienen vecindades ajenas.

5.1.2 Lema.- Si X es un espacio de Hausdorff, K un conjunto compacto de X entonces para cada $x \in X - K$ existen U, V abiertos ajenos tales que $K \subset U$, $x \in V$.

Sea $x \in X - K$, para cada $y \in K$ existen U_y, V_y abiertos ajenos tales que $y \in U_y$, $x \in V_y$, por ser X espacio de Hausdorff La familia $\{U_y \mid y \in K\}$ es una cubierta abierta de K que es compacto, luego $K \subset U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n} = U$ es abierto, obviamente $x \in \bigcap^n V_{y_i} = V$ es abierto y además $U \cap V = \phi$

5.1.3 Lema.- En un espacio de Hausdorff cualquier par de conjuntos compactos ajenos tienen vecindades ajenas.

Sea X un espacio de Hausdorff, K_1, K_2 compactos ajenos. Por el lema anterior, para cada $x \in X$, existen U_x, V_x abiertos ajenos tales que $x \in U_x$, $K_2 \subset V_x$. La familia $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in K_1\}$ es una cubierta abierta de K_1 que es compacto, luego tiene una subcubierta finita $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$, como antes se tiene que $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$ son vecindades abiertas ajenas de K_1 y K_2 respectivamente.

5.1.4 Definición.- Una función p de X sobre Y se llama perfecta si es continua, cerrada y $p^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$.

5.1.5 Proposición.- Bajo una identificación perfecta se preserva el ser Hausdorff.

Sean $p: X \to Y$ una identificación perfecta, X un espacio de Hausdorff, $y_1, y_2 \in Y$ distintos, $p^{-1}(y_1)$, $p^{-1}(y_2)$ son compactos ajenos de X, de ahí que por 5.1.3 existen U_1 y U_2 abiertos ajenos tales que $p^{-1}(y_1) \subset U_1$, $p^{-1}(y_2) \subset U_2$. Sean $V_1 = Y - p(X - U_1)$ y $V_2 = Y - p(X - U_2)$ son abiertos, ajenos y tales que $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$ (ver lema 4.2.2 y la demostración de la proposición 4.2.3). Con lo anterior se ha probado que Y es Hausdorff.

5.2 REGULAR

5.2.1 Definición.- Un espacio X es regular si para $x \in X$ y F cerrado en X que no contiene a x, existen U,V vecindades ajenas de x y F respectivamente.

5.2.2 Lema.- Si X es un espacio regular, K un compacto de X. entonces para cada F cerrado en X ajeno a K existen U y V abiertos ajenos tales que $K \subset U$ y $F \subset V$.

Como X es regular para cada $x \in K$ existen U_x, V_x abiertos ajenos tales que $x \in U_x$ y $F \subset V_x$; la familia $\{U_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta de K luego existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} = U$ abierto y además $F \subset V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n} = V$ abierto. Entonces U y V son los abiertos ajenos que satisfacen la condición del lema.

5.2.3 Proposición.- La imagen de un espacio regular bajo una identificación perfecta es un espacio regular.

Sea $p: X \to Y$ una identificación perfecta con X espacio regular; sean $y \in Y$, F cerrado en Y que no contiene a y. Los conjuntos $p^{-1}(y)$ compacto y $p^{-1}(F)$ cerrado son ajenos en X luego existen U_1 y U_2 abiertos ajenos tales que $p^{-1}(y) \subset U_1$ y $p^{-1}(F) \subset U_2$. Los conjuntos $V_1 = Y - p(X - U_1)$ y $V_2 = Y - p(X - U_2)$ son abiertos ajenos y tales que $y \in V_1$ y $F \subset V_2$ (véase 4.2.2 y 4.2.3), por lo tanto Y es regular.

5.3 2°CONTABLE Y COMPACIDAD LOCAL

5.3.1 Proposición.- Si $p: X \to Y$ es una identificación perfecta y X es 2°contable entonces Y es 2°contable.

Sea β una base contable de X y $\mathcal{B}$ la familia de todas las uniones finitas de elementos de β. Es claro que $\mathcal{B}$ es contable. Los conjuntos $Y - p(X - B)$ para cada $B \in \mathcal{B}$ son abiertos ya que

p es una función cerrada.

La familia $\mathcal{U} = \{Y - p(X - B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es contable y además una base de Y puesto que si $y \in U$ abierto de Y, $p^{-1}(y) \subset p^{-1}(U)$ es abierto, pero $p^{-1}(y)$ es compacto en X, por lo que existen $V_1, \ldots, V_n$ elementos de β tales que $p^{-1}(y) \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n = B \subset p^{-1}(U)$ así que $B \in \mathcal{B}$ y por el lema 4.2.2, y $Y - p(X - B) \subset U$, por lo tanto Y es 2°contable con $\mathcal{U}$ una base contable de Y.

5.3.2 Proposición.- Si $p: X \rightarrow Y$ es una identificación perfecta y X es localmente compacto entonces Y es localmente compacto.

Para $y \in Y$, sea K_x una vecindad compacta de $x \in p^{-1}(y)$ en X, la colección $\{\mathring{K}_x \mid x \in p^{-1}(y)\}$ cubre a $p^{-1}(y)$ compacto y por lo tanto tiene una subcubierta finita $\{\mathring{K}_{x_1}, \ldots, \mathring{K}_{x_n}\}$. Si $U = \bigcup_{i=1} \mathring{K}_{x_i}$, $K = \bigcup_{i=1} K_{x_i}$, U es abierto de X y K compacto. De $p^{-1}(y) \subset U \subset K$ se tiene que $y \in [Y - p(X - U)] \subset p(U) \subset p(K)$ por el lema 4.2.2. Luego $p(K)$ es una vecindad compacta de y, por lo tanto Y es localmente compacto.

5.4 METRIZABLE

5.4.1 Definición.- Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de X, $A \subset X$, la estrella de A respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto $St(A, \mathcal{U}) = \dot{\cup}\{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \phi\}$

5.4.2 Definición.- Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos cubiertas de X, $\mathcal{V}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $St(V,\mathcal{V}) \subset U$.

Notación.- En un espacio métrico (X,d) se considera la notación $V_\varepsilon(x)$ para la ε-vecindad de x, es decir $V_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$..

5.4.3 Proposición.- Un espacio de Fréchet X es metrizable si y solo si tiene una sucesión de cubiertas abiertas $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ tal que:

1) Para toda $n \geq 1$ la cubierta $\mathcal{U}_{n+1}$ es refinamiento estrella de $\mathcal{U}_n$.
2) Para cada $x \in X$, $\{St(x,\mathcal{U}_n) \mid n = 1,2\ldots\}$ es una base de vecindades de x en X.

Supóngase que X es metrizable, sea d una métrica en X cuya topología τ_d es la topología de X. Se define para el entero $n \geq 1$, $\mathcal{U}_n$ como $\{V_{1/3^n}(x) \mid x \in X\}$. La sucesión de cubiertas(1) $\{\mathcal{U}_n \mid n = 1,2,\ldots\}$ satisface 1) y 2) pues: si $z \in St(V_{1/3^n}(x), {}_{n+1})$ entonces existe $y \in X$ tal que $z \in V_{1/3^{n+1}}(y)$ y $V_{1/3^{n+1}}(x) \cap V_{1/3^{n+1}}(y) \neq \phi$ así que para w en esa intersección se tiene: $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,w) + d(w,x) < 1/3^{n+1} + 1/3^{n+1} + 1/3^{n+1} = 1/3^n$ de donde $z \in V_{1/3^n}(x)$ lo que implica $St(V_{1/3^{n+1}}(x), {}_{n+1}) \subset V_{1/3^n}(x)$ y por lo tanto $\mathcal{U}_{n+1}$ es refinamiento estrella de $\mathcal{U}_n$ para toda $n \geq 1$. Para probar

(1) abiertas

2) obsérvese que $x \in V_{1/3^{n+1}}(x) \subset St(x,\mathcal{U}_{n+1}) \subset St(V_{1/3^{n+1}}(x),\mathcal{U}_{n+1}) \subset V_{1/3^n}(x)$. De la primera contención se tiene que $St(x,\mathcal{U}_n)$ es vecindad de x y de la última que $\{St(x,\mathcal{U}_n) \mid n = 1,2,\ldots\}$ es una base de vecindades de x pues $\{V_{1/3^n}(x) \mid n = 1,2,\ldots\}$ es una base de vecindades de x en X.

Si ahora se tiene una sucesión $\{\mathcal{U}_n \mid n = 1,2,\ldots\}$ de cubiertas* de X que satisface las condiciones 1) y 2) se demostrará que X es metrizable.

Obsérvese primero:

a) $\{x,y\} \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}_n$ si y solo si $y \in St(x,\mathcal{U}_n)$; $St(x,\mathcal{U}_{n+1}) \subset St(x,\mathcal{U}_n)$ para cada n; $y \in St(x,\mathcal{U}_n)$ para toda n si y solo si $x = y$

La primera afirmación se sigue de la definición de $St(x,\mathcal{U}_n)$. La segunda se sigue de la primera y de la hipótesis 1). La tercera resulta de la hipótesis 2) y de ser X un espacio T_1

Llámese $\mathcal{U}_0 = \{X\}$. Para $x \neq y$ sea $n(x,y) = \max\{n \mid y \in St(x,\mathcal{U}_n)\}$, $\eta(x,y) = 1/2^{n(x,y)}$ y $\eta(x,x) = 0$

b) Si $\eta(x,y) < 1/2^n$, $y \in St(x,\mathcal{U}_{n+1})$; además $\eta(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

Ahora se construirá una métrica que defina a la topología original de X.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sucesiones finitas de puntos de X con más de un término. Si $s = (x_1,\ldots,x_n)$ se pone $L(s) = \sum_{i=2}^{n} \eta(x_{i-1},x_i)$; se define $\mathcal{S}_{(x,y)} = \{s \in \mathcal{S} \mid$ el primer término es x y el último $y\}$ y $d(x,y) = \inf\{L(s) \mid s \in \mathcal{S}_{(x,y)}\}$

* abiertas

Se tiene que $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$ y por ser η simétrica, $d(x,y) = d(y,x)$. Ahora, si $s = (x,\dots,z) \in S_{(x,z)}$, $s' = (z,\dots,y) \in S_{(z,y)}$ entonces $ss' = (x,\dots,z,z,\dots,y) \in S_{(x,y)}$ y $L(ss') = L(s) + L(s')$ por lo tanto $d(x,y) \leq L(s) + L(s')$ lo que implica $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Finalmente, la propiedad: $d(x,y) = 0$ implica $x = y$ es consecuencia de la propiedad siguiente, que se probará más adelante.

c) Si $d(x,y) < 1/2^n$ entonces $y \in St(x,\mathcal{U}_n)$

La propiedad c) es a su vez consecuencia de:

d) $L(x_1,\dots,x_k) < 1/2^n$ implica $x_k \in St(x_1,\mathcal{U}_n)$

Se prueba d) por inducción en k.

Si $s = (x_1,x_2)$, $L(s) = \eta(x_1,x_2)$ y por a) y b) $x_2 \in St(x_1,\mathcal{U}_n)$.

Ahora se supone que se ha probado la propiedad para toda sucesión con menos de k-términos, $k > 2$; sea s una sucesión de k-términos tal que $L(s) < 1/2^n$.

De $\sum_{i=2}^{k} \eta(x_{i-1},x_i) = \eta(x_1,x_2) + \sum_{i=3}^{k} \eta(x_{i-1},x_i)$ si $\eta(x_1,x_2) \geq 1/2^{n+1}$, $\sum_{i=3}^{k} \eta(x_{i-1},x_i) < 1/2^{n+1}$ y como $\eta(x_1,x_2) < 1/2^n$, por b) se tiene $x_2 \in St(x_1,\mathcal{U}_{n+1})$ y por inducción $x_k \in St(x_2,\mathcal{U}_{n+1})$ luego por a) existen $U, U' \in \mathcal{U}_{n+1}$ tales que $\{x_1,x_2\} \subset U$ y $\{x_2,x_k\} \subset U'$ de donde $\{x_1,x_k\} \subset U \cup U' \subset St(U,\mathcal{U}_{n+1}) \subset U^*$ para algún $U^* \in \mathcal{U}_n$, nuevamente por a) $x_k \in St(x_1,\mathcal{U}_n)$. Considérese ahora el caso $\eta(x_1,x_2) < 1/2^{n+1}$, sea j el mayor entero en $\{2,\dots,k\}$ tal que $\sum_{i=2}^{j} \eta(x_{i-1},x_i) < 1/2^{n+1}$, si $j = k$ por inducción x_{k-1} St(

$x_1, \mathcal{U}_{n+1})$ y $x_k \in St(x_{k-1}, \mathcal{U}_{n+1})$ luego como antes $x_k \in St(x_1, \mathcal{U}_n)$. Si $j < k$ entonces $\sum_{i=2}^{j+1} \eta(x_{i-1}, x_i) \geq 1/2^{n+1}$; como $\sum_{i=2}^{k} \eta(x_{i-1}, x_i) < 1/2^n$ se tiene que $\sum_{i=j+1}^{k} \eta(x_{i-1}, x_i) < 1/2^{n+1}$ luego $x_j \in St(x_1, \mathcal{U}_{n+1})$ por hipótesis de inducción y para el índice n+1, pero $x_{j+1} \in St(x_j, \mathcal{U}_{n+1})$ pues $\eta(x_j, x_{j+1}) < 1/2^n$ aplicando b) y $x_k \in St(x_{j+1}, \mathcal{U}_{n+1})$ también por hipótesis de inducción, por a) existen $U, U', U'' \in \mathcal{U}_{n+1}$ tales que $\{x_1, x_j\} \subset U$, $\{x_j, x_{j+1}\} \subset U'$, $\{x_{j+1}, x_k\} \subset U''$ luego $\{x_1, x_k\} \subset U \cup U' \cup U'' \subset St(U', \mathcal{U}_{n+1}) \subset U^*$ para alguna $U^* \in \mathcal{U}_n$ por lo tanto $x_k \in St(x_1, \mathcal{U}_n)$.

Con lo anterior se ha demostrado que d es una métrica en X.

Para demostrar que la topología definida por d en X es la topología original de X basta probar que: para cada $x \in X$, $\{V_{1/2^n}(x) \mid n = 1,2,\ldots\}$ respecto a esta métrica d, es una base de vecindades abiertas de x en X. Esto resulta de $V_{1/2^n}(x) \subset St(x, \mathcal{U}_n)$ por c) y de $St(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subset V_{1/2^n}(x)$ pues si $y \in St(x, \mathcal{U}_{n+1})$, $\eta(x,y) \leq 1/2^{n+1} < 1/2^n$, por lo tanto $d(x,y) < 1/2^n$. Entonces basta probar que cada $V_{1/2^n}(x)$ es abierto de X, en efecto si $x' \in V_{1/2^n}(x)$ existe m entero tal que $V_{1/2^m}(x') \cap V_{1/2^n}(x)$ luego la vecindad abierta $St(x', \mathcal{U}_{m+1})$ de x' está contenida en $V_{1/2^n}(x)$.

5.4.4 Teorema de Frink.- Un espacio de Fréchet X es metrizable si y solo si tiene una base de vecindades $\{U_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$

para cada $x \in X$ tal que:

1) $U_n(x) \supset U_{n+1}(x)$ para toda $n \in N$

2) Para cada $n \in N$ existe un entero $m(n) > n$ tal que si $U_{m(n)}(y) \cap U_{m(n)}(x) \neq \phi$ entonces $U_{m(n)}(y) \subset U_n(x)$ y $U_{m(n)}(x) \subset U_n(y)$

Si X es un espacio de Fréchet y metrizable, sea d una métrica que define la topología de X; a la vecindad $V_{1/2^n}(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < 1/2^n\}$ de x en X llámesele $U_n(x)$. Entonces $\{U_n(x) \mid n \in N\}$ satisface la condición 1) y es una base de vecindades de x en X.

Cumple con la condición 2) puesto que para n entero positivo sea $m = n + 2$. Si $w \in V_{1/2^m}(y) \cap V_{1/2^m}(x)$ y $z \in V_{1/2^m}(y)$ se tiene que $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,w) + d(w,x) < 1/2^m + 1/2^m + 1/2^m = 3/2^m < 4/2^m = 1/2^n$. Por lo tanto $z \in V_{1/2^n}(x)$ luego $V_{1/2^m}(y) \subset V_{1/2^n}(x)$. Análogamente se cumple $V_{1/2^m}(x) \subset V_{1/2^n}(y)$.

Ahora supóngase que se tiene una base de vecindades $\{U_n(x) \mid n \in N\}$ para cada x en X, que satisface 1) y 2).

Sea $n_1 = m(1)$, $n_2 = m(n_1), \ldots, n_{r+1} = m(n_r)$, es claro que $n_{r+1} > n_r > r$. Defínase $V_r(x) = \mathring{U}_{n_r}(x)$ para toda $r \in N$. Las cubiertas abiertas $\mathcal{V}_r = \{V_r(x) \mid x \in X\}$ satisfacen las condiciones de la proposición 5.4.3 Para demostrar $St(V_{r+1}(x), \mathcal{V}_{r+1}) \subset V_r(x)$ basta probar que si $V_{r+1}(y) \cap V_{r+1}(x) \neq \phi$ entonces $V_{r+1}(y) \subset V_r(x)$ pero si $\phi \neq \mathring{U}_{n_{r+1}}(y) \cap \mathring{U}_{n_{r+1}}(x) \subset U_{m(n_r)}(y)$

$U_{m(n_r)}(x)$ lo que implica, por 2) $\dot{U}_{m(n_r)} \subset \dot{U}_{n_r}(x)$, de donde $V_{r+1}(y) \subset V_r(x)$.

Por otra parte $St(x, \mathcal{V}_{r+1}) \subset St(V_{r+1}, \mathcal{V}_{r+1}) \subset V_r(x) \subset U_r(x)$ y como $St(V_{r+1}(x), \mathcal{V}_{r+1}) = \bigcup_{V_{r+1}(y) \cap V_{r+1}(x) \neq \phi} V_{r+1}(y) \subset V_r(x)$ de ahí que $\{St(x, \mathcal{V}_r) \mid r = 1,2,\ldots\}$ es una base de vecindades de x. Con lo anterior se concluye que X es metrizable.

5.4.5 Proposición.- Sea $p:X \to Y$ una identificación perfecta. Si X es metrizable entonces Y lo es.

Sea d una métrica en X que induce su topología. Para cada $y \in Y$ y n entero positivo sea $U_n(p^{-1}(y)) = \{x \in X \mid d(x,p^{-1}(y)) < 1/n\}$, es una vecindad abierta de la fibra $p^{-1}(y)$; de ahí que $V_n(y) = Y - p(X - U_n(p^{-1}(y)))$ es una vecindad abierta de y contenida en $p(U_n(p^{-1}(y)))$.

La familia $\{V_n(y) \mid n = 1,2,\ldots\}$ es una base de vecindades de y pues si N es cualquier vecindad de y, el cerrado $X - p^{-1}(N)$ es ajeno al compacto $p^{-1}(y)$ lo cual implica $d(X - p^{-1}(N), p^{-1}(y)) = \delta > 0$, si n es tal que $0 < 1/n < \delta$, $U_n(p^{-1}(y)) \subset p^{-1}(N)$ de donde $V_n(y) \subset p(U_n(p^{-1}(y))) \subset N$. Y es T_1 pues X lo es y p es cerrada, ver 4.1.

Finalmente se probará que $\{V_n(y) \mid n \in N\}$ satisface 1) y 2) del teorema 5.4.4.

La condición 1) se cumple pues $U_{n+1}(p^{-1}(y)) \subset U_n(p^{-1}(y))$

para toda $n \in N$.

Para demostrar 2) de dicho teorema sean $n \in N$, $y \in Y$ dados, tómese $m \geq 2n, 2r$ donde $r = d(X - p^{-1}(V_{2n}(y)), p^{-1}(y)) > 0$. Si $y'' \in V_m(y') \cap V_m(y)$ para algún $y' \in Y$, $p^{-1}(y'') \subset p^{-1}(V_m(y')) \cap p^{-1}(V_m(y)) \subset U_m(p^{-1}(y')) \cap U_m(p^{-1}(y))$ por definición de $V_n(y)$, entonces para cada $x'' \in p^{-1}(y'')$ la distancia $d(x'', U_m(p^{-1}(y')) < 1/m$ y $d(x'', U_m(p^{-1}(y)) < 1/m$ luego $d(p^{-1}(y), p^{-1}(y')) \leq d(p^{-1}(y), x'') + d(x'', p^{-1}(y')) < 2/m$ pero como $p^{-1}(y')$ es compacto existe $x' \in p^{-1}(y')$ tal que $d(x', p^{-1}(y)) \leq 2/m$; por la elección de m $d(x', p^{-1}(y)) < r$ luego $x' \in p^{-1}(V_{2n}(y))$ por la selección de r, de ahí que $y' \in V_{2n}(y)$, es decir, para todo $x' \in p^{-1}(y')$ la $d(x', p^{-1}(y)) < 1/2n$.

Por otra parte si $y^* \in V_m(y')$, $p^{-1}(y^*) \subset p^{-1}(V_m(y')) \subset U_m(y')$ luego para cada $x^* \in p^{-1}(y^*)$, $d(x^*, p^{-1}(y')) < 1/m$. Sea $x'_o \in p^{-1}(y')$ tal que $d(x^*, x'_o) \leq 1/m$ entonces $d(x^*, p^{-1}(y)) \leq d(x^*, x'_o) + d(x'_o, p^{-1}(y)) < 1/m + 1/2n < 2/2n = 1/n$ de ahí que $x^* \in U_n(p^{-1}(y))$ y ésto para toda $x^* \in p^{-1}(y^*)$ lo que implica $p^{-1}(y^*) \subset U_n(p^{-1}(y))$, pero $p^{-1}(y^*) \subset p^{-1}(V_n(y)) \subset U_n(p^{-1}(y))$, en consecuencia $y^* \in V_n(y)$ es decir $V_m(y') \subset V_n(y)$, con ésto queda demostrado que se cumple la condición 2) y por lo tanto Y es metrizable.

5.5 PROPIEDADES QUE REFLEJAN LAS IDENTIFICACIONES PERFECTAS

5.5.1 Proposición.- Sea $p:X \to Y$ una identificación perfecta. Si Y es compacto entonces X lo es.

Si Y es compacto, $p:X \to Y$ es una identificación perfecta y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, para cada $y \in Y$ sean $U_{y_1}, \ldots, U_{y_{n(y)}}$ elementos de $\mathcal{U}$ que cubren a $p^{-1}(y)$ que es compacto en X. Sea $V(y) = Y - p(X - \bigcup_{i=1}^{n(y)} U_{y_i})$ es un abierto que contiene a y, véase el lema 4.2.2, entonces $\mathcal{V} = \{V(y) \mid y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y que es compacto así que, $Y = \bigcup_{j=1}^{m} V(y_j)$. La familia $\{U_{y_j,i} \mid j = 1,\ldots,m\ ;\ i = 1,\ldots, n(y_j)\}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$, pues si $x \in X$, $p(x) = y \in Y$, existe $V_{y_j} \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V_{y_j} = Y - p(X - \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} U_{y_j,i})$ luego $x \in p^{-1}(V_{y_j}) = X - p^{-1}p(X - \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} U_{y_j,i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} U_{y_j,i}$

Por lo tanto X es compacto.

5.5.2 Proposición.- Si $p:X \to Y$ es una identificación perfecta y Y es de Lindelöf entonces X es de Lindelöf.

La demostración es igual a la de 5.5.1 sólo se reemplaza $Y = \bigcup_{j=1}^{m} V(y_j)$ por $Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(y_j)$.

5.5.3 Proposición.- Si $p:X \to Y$ es una identificación perfecta con Y un espacio paracompacto entonces X es paracompacto.

Para $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X se construye la cubierta abierta $\mathcal{V}$ como en 5.5.1 y tiene un refinamiento $\mathcal{W}$ abierto localmente finito pues Y es paracompacto. Sea $W(y) = \cup\{W \in \mathcal{W} \mid W \subset V(y)\}$ se tiene entonces $\mathcal{W}' = \{U_{y_j,i} \cap p^{-1}(W(y)) \mid i = 1,\ldots,n(y_i),\ y \in Y\}$ es claramente un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ la cubierta dada en X. Además $\mathcal{W}'$ es localmente finita, si $x \in X$, como $\mathcal{W}$ es localmente finita existe N vecindad de $y = p(x)$ que intersecta a sólo un número finito de W por consiguiente intersecta a sólo un número finito de $W(y)$; $p^{-1}(N)$ es vecindad de x que intersecta a un número finito de $p^{-1}(W(y))$ y de ahí a un número finito de elementos de $\mathcal{W}'$. Por lo tanto X es paracompacto.

5.5.4 Proposición.- Si $p:X \to Y$ es una identificación perfecta con Y localmente compacto entonces X también es localmente compacto.

Para cada $x \in X$ y K vecindad compacta de $p(x)$ en Y, $p(x) \in U \subset K$ con U abierto en Y, luego $x \in p^{-1}(U) \subset p^{-1}(K)$ donde $p^{-1}(U)$ es abierto y $p^{-1}(K)$ es compacto en X por 5.5.1 y por ser $p|p^{-1}(K)$ una identificación perfecta sobre $p(K)$, de ahí que X es localmente compacto.

6 INVARIANTES BAJO IDENTIFICACIONES ABIERTAS Y CERRADAS

6.1 COMPLETAMENTE REGULAR

6.1.1 Definición.- Un espacio X es completamente regular si para cada $x \in X$, $F \subset X$ cerrado que no contiene a x existe una función continua $f: X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.

6.1.2 Proposición.- La propiedad de ser completamente regular es invariante bajo identificaciones abiertas y cerradas.

Sea $f: X \to Y$ una identificación abierta y cerrada con X completamente regular y un punto $y_o \in Y - F$ con F cerrado de Y; para $x_o \in f^{-1}(y_o)$ y $f^{-1}(F)$ cerrado en X existe $\zeta: X \to I$ continua tal que $\zeta(x_o) = 0$, $\zeta(f^{-1}(F)) = 1$.

Considérese el conjunto D de los racionales diádicos (ver 4.3.1), se define $U_d = f(\zeta^{-1}([0,1)))$ para toda $d \in D$, es abierto por serlo f; como f también es cerrada, $\overline{U}_d \subset U_{d'}$ si $d < d'$, luego la familia $\mathcal{U} = \{U_d \mid d \in D\}$ satisface las condiciones de lema 4.3.3, por lo que la función $\psi: Y \to I$ dada por:

$$\psi(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \notin U_d \text{ para toda } d \in D \\ \inf \{d \in D \mid y \in U_d\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es continua.

Obsérvese que $y \in U_d$ si y solo si existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $f(x) < d$; como $\zeta(x_o) = 0 < d$ para toda $d \in D$ $\psi(y_o) =$

0. Además $\zeta(f^{-1}(F)) = 1$ implica $\psi(F) = 1$ pues para todo $y \in F$, $y \notin U_d$ para todo $d \in D$, luego la función $\psi: Y \to I$ manda y_0 en 0 y F en 1, lo que prueba que Y es completamente regular.

7 INVARIANTES BAJO IDENTIFICACIONES UNIFORMEMENTE CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE ABIERTAS

7.1 ESPACIO COMPLETO

7.1.1 Definición.- Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X,d) es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ siempre que $n,m \geq N$

7.1.2 Definición.- Un espacio métrico (X,d) se dice que es completo si y solo si cada sucesión de Cauchy en X converge en X.

La recta real $\mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio completo.

7.1.3 Definiciones.- Para (X,d), (X',d') espacios métricos y $f:X \to X'$ una función:

1) f es uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_1,x_2) < \delta$ entonces $d'(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$ para todos los $x_1,x_2 \in X$.

2) f es uniformemente abierta si dado $\eta > 0$ existe $\mu > 0$ tal que $f(V_\eta(x)) \supset V'_\mu(f(x))$ para toda $x \in X$

3) f es una isometría si para todos los $x_1,x_2 \in X$

$$d'(f(x_1),f(x_2)) = d(x_1,x_2)$$

Es fácil comprobar que toda función uniformemente continua es continua; toda función uniformemente abierta es abierta; toda isometría es inyectiva(|D| página 285) y uniformemente continua, si la isometría es suprayectiva entonces además es uniformemente abierta, por lo tanto es un homeomorfismo. Toda isometría es una inmersión.

7.1.4 Definición.- Una completación de (X,d) un espacio métrico, es un espacio métrico completo (X^*,d^*) y una isometría $(X,d) \to (X^*,d^*)$ tal que la imagen de X es densa en X^*.

7.1.5 Proposición.- Todo espacio métrico tiene una completación.

Dado (Y,d) un espacio métrico sea S el conjunto de sucesiones de Cauchy en (Y,d). Se define la relación $\sim$ entre dos sucesiones $s = (y_n)$, $s' = (y_n')$ de S como sigue: $s \sim s'$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,y_n') = 0$ ($\sim$ es una relación de equivalencia).

En el conjunto $Y^* = S/\sim$ defínase la siguiente métrica: $d^*([s],[s']) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,y_n')$ para $(y_n) \in [s]$ y $(y_n') \in [s']$, d^* está bién definida porque $(d(y_n,y_n'))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ con la métrica usual por lo tanto existe $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,y_n')$, es un número real no negativo y no depende de los representantes que se tomen de $[s]$, $[s']$.

Se prueba que d^* es una métrica: $d^*([s],[s']) = 0$ si y solo si, por definición de $\sim$, $[s] = [s']$; $d^*([s],[s']) = d^*([s'],[s])$ y $d^*([s],[s'']) = \lim_{n\to\infty} d(y_n,y_n'') \leq \lim_{n\to\infty} [d(y_n,y_n') + d(y_n',y_n'')] = d^*([s],[s']) + d^*([s'],[s''])$.

Para cada $y \in Y$ sea $I(y) = [s_y] \in Y^*$ donde $s_y = (y,y,\ldots)$, $I:(Y,d) \to (Y^*,d^*)$ es una isometría, pues: $d^*(I(y),I(y')) = d^*([s_y],[s_{y'}]) = \lim_{n\to\infty} d(y,y') = d(y,y')$. Luego I es un homeomorfismo de Y sobre $I(Y)$ subespacio del espacio métrico (Y^*, d^*).

Dados $\varepsilon > 0$, $s = (y_n) \in S$ hay que demostrar que existe $y \in Y$ tal que $[s_y] \in V_\varepsilon^*[s]$ para concluir que $I(Y)$ es denso en Y^*. Como $s \in S$ hay un entero positivo N tal que $d(y_n,y_m) < \varepsilon/2$ para toda $n,m \geq N$. Sea $y = y_N$ entonces $\lim_{n\to\infty} d(y_n,y) < \varepsilon$ es decir, $d^*([s],[s_y]) < \varepsilon$.

Ahora se probará que Y^* es completo, sea $s^m = (y_n^m) \in S$ tal que $([s^m])_{m=1,2,\ldots}$ es una sucesión de Cauchy en Y^*. Para cada m, por ser s^m de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ entero positivo tal que $d(y_i^m,y_j^m) < \varepsilon$ para toda $i,j \geq N(\varepsilon)$. Para $\varepsilon = 1/m$ se toma la subsucesión de s^m, $x_i^m = y_{N(1/m)+i}^m$ con $i = 1,2,\ldots$ es claro que $(x_i^m) \in S$ y $(x_i^m) \sim s^m$.

Por otro lado, como $([s^m])$ es de Cauchy en Y^*, dado $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_k^n,x_k^m) = d^*([s^n],[s^m]) < \varepsilon/3$ para toda $n,m \geq M(\varepsilon)$ luego existe k tal que $d(x_k^n,x_k^m) < \varepsilon/3$, si además $n,m \geq 3/\varepsilon$ se tiene que $d(x_n^n,x_m^m) \leq d(x_n^n,x_k^n) + d(x_k^n,x_k^m) + d(x_k^m,x_m^m) < 1/n + \varepsilon/2 + 1/m \leq \varepsilon$ lo cual prueba que la sucesión $s^* = (x_n^n)_{n=1,2,\ldots}$ es de Cauchy.

Se probará finalmente que $([s^*])$ converge a $[s^*]$ en Y^*. Para $\varepsilon > 0$ dado, considérese $M(\varepsilon/2)$ como antes, si $n,m \geq M(\varepsilon/2)$ y $n,m \geq 6/\varepsilon$ se tiene que $d(x_n^m, x_n^n) \leq d(x_n^m, x_m^m) + d(x_m^m, x_n^n) < 1/m + \varepsilon/2 < \varepsilon/3 + \varepsilon/2 < \varepsilon$ así que $d^*([s^m],[s^*]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^m, x_n^n) < \varepsilon$ para $m \geq M(\varepsilon/2)$ y $m \geq 6/\varepsilon$.

7.1.6 Proposición.- Sea $f:(X,d) \to (Y,d')$ una función suprayectiva, uniformemente continua y uniformemente abierta entre espacios métricos. Si (X,d) es completo entonces (Y,d') es completo.

Sea $i:(Y,d') \to (Y^*,d^*)$ una completación de (Y,d'). Para $r > 0$, como f es uniformemente abierta existe $\delta(r) > 0$ tal que $f(V_r(x)) \supset V'_{\delta(r)}f(x)$ para toda $x \in X$, por otro lado como $i(Y)$ es denso en Y^* y $V^*_{\delta(r)}(if(x)) \cap i(Y) = i(V'_{\delta(r)}(f(x)))$ entonces $\overline{i(V'_{\delta(r)}(f(x)))} = \overline{V^*_{\delta(r)}(if(x))}$ luego $\overline{if(V_r(x))} \supset V^*_{\delta(r)}(if(x))$ para toda $x \in X$ . . . .(1)

Ahora para $r > 0$, $e > 0$, $x \in X$ y $v \in \overline{if(V_r(x))}$ fijos se construirá por inducción en n una sucesión $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ de puntos en X tales que $V_{e/2^{m+1}}(x_m) \cap V_{e/2^m}(x_{m-1}) \neq \emptyset$ y $v \in \overline{if(V_{e/2^m}(x_m))}$ para toda m. Sea $r_n = e/2^{m+1}$ y $A_0 = V_r(x)$, como $v \in \overline{if(A_0)}$ existe $x_1 \in A_0$ tal que $if(x_1) \in V^*_{\delta(r_0)}(v)$. Supóngase que se han construido $x_1,\dots,x_{n-1}$ y $A_k = V_{r_k}(x_k)$ $k = 1,2,\dots,n-1$ de manera que $A_k \cap A_{k-1} \neq \emptyset$ y $v \in \overline{if(A_k)}$. Sea $x_n \in A_{n-1}$ tal que $if(x_n) \in V^*_{\delta(r_n)}(v)$ luego $v \in V^*_{\delta(r_n)}(if(x_n)) \subset \overline{if(V_{r_n}(x_n))} = \overline{if(A_n)}$ por (1).

La sucesión $(x_n)_{n=1,2,...}$ en X es de Cauchy pues dado $\varepsilon > 0$ existe n_e entero positivo tal que $r_n = e/2^{n+1} < \varepsilon$ para toda $n \geq n_e$; si $m \geq n > n_e$, $d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=0}^{m-n-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) < \sum_{i=0}^{m-n-1} r_{n+i} = e/2^{n+1} \sum_{i=0}^{m-n-1} 1/2^i = 2e/2^{n+1} [1 - 1/2^{m-n}] < e/2^n \leq e/2^{n_e+1} < \varepsilon$.

Por otra parte, como X es completo $(x_n)_{n=1,2,...}$ converge, supóngase que a u, entonces para $e/2$ sea m_e entero positivo tal que $d(x_m, u) < e/2$ para toda $m \geq m_e$; luego $d(x,u) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_m) + d(x_m, u) < r + e/2 + e/2 = r + e$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ existe n^* tal que $\delta(r_{n^*}) < \varepsilon$, como $v \in V^*_{\delta(r_n)}(if(x_n))$ para toda n, $d(if(x_n), v) < \delta(r_n) < \varepsilon$ si $n \geq n^*$, luego $(if(x_n))_{n=1,2,...}$ converge a v y como converge a $if(u)$ en Y^* se tiene que $v = if(u) \in if(V_{r+e}(x))$.

Se ha probado para r, e, x fijos, que cada $v \in \overline{if(V_r(x))}$ está en $if(V_{r+e}(x))$ luego $\overline{if(V_r(x))} \subset if(V_{r+e}(x))$ para cada $x \in X$. . . . . (2)

Para $r > 0$ dada y $e = r$ existe $\delta(r) > 0$ que por (1) y (2) es tal que $if(V_{2r}(x)) \supset V^*_{\delta(r)}(if(x))$ para toda $x \in X$.

Finalmente para $y^* \in Y^* = \overline{if(X)}$ existe $x \in X$ tal que $if(x) \in V^*_{\delta(r)}(y^*)$ por lo tanto $y^* \in V^*_{\delta(r)}(if(x)) \subset if(V_{2r}(x)) \subset if(X)$ de ahí que if es suprayectiva, lo que implica $i(Y) = Y^*$ de donde (Y, d') es completo.

BIBLIOGRAFIA

|D| James Dugundji. TOPOLOGY. Boston,Allyn and Bacon, Inc. 1976 (Series in Advanced Mathematics).

|F| A. H. Frink. "DISTANCE FUNCTIONS AND THE METRIZATION PROBLEM" Bulletin American Mathematical Society. 1937 Vol. 43 páginas 133-142.

|K| John L. Kelly. GENERAL TOPOLOGY. New York.Van Nostrand Reinhold Company. 1955 (The University Series in Higher Mathematics).

|M| Ernest Michael. "A NOTE ON PARACOMPACT SPACES". Proceedings American Mathematical Society. Providence Rhode Island. 1953. Vol. 4 páginas 831-838.

|W| Stephen Willard. GENERAL TOPOLOGY. Reading, Addison Wesley Publishing Company. 1970 (Addison-Wesley Series in Mathematics).