UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS.

" UNA PRESENTACION MATEMATICA DEL MODELO DE INSUMO - PRODUCTO DE LEONTIEF".

TESIS PROFESIONAL
Que para obtener el título de
MATEMATICO
Presenta :

Laura del Carmen Villegas Yarza

México, D.F. 1981.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

" UNA PRESENTACION MATEMATICA DEL MODELO DE INSUMO - PRODUCTO DE LEONTIEF".

A Wassily.

A los chacales.

AGRADECIMIENTOS

A Humberto Madrid,

en testimonio de mi reconocimiento

y amistad.

PROLOGO

Este trabajo consiste en una presentación matemática del modelo de Insumo-Producto de Leontief. Dicho modelo está integrado por dos modelos que son el modelo cerrado y el modelo abierto. El modelo cerrado se resuelve básicamente demostrando el teorema de Perron-Frobenius, este teorema puede demostrarse de varias maneras. La mayoría de las versiones que vimos usaban herramienta más o menos complicada por lo cual el mérito de este trabajo es el de presentar de una manera accesible los modelos mencionados. La resolución del modelo abierto consiste en determinar la existencia de $(I-C)^{-1}$ tal que $(I-C)^{-1} \geq 0$ para la cual se dan dos caracterizaciones y algunas condiciones suficientes. Los puntos más importantes del modelo cerrado se apoyan en ([2]) y ([6]), los del modelo abierto en ([1]), sin embargo no nos concretamos a seguir los lineamientos de estos artículos sino que hemos modificado algunas demostraciones e incluso hemos dado en varios casos demostraciones diferentes con herramienta más sencilla, utilizando básicamente resultados convencionales de algebra lineal y solamente en la resolución del modelo cerrado se utilizan unos cuantos resultados de análisis matemático. En el trabajo se dividen las matrices en reducibles e irreducibles, estos dos tipos de matrices juegan un papel importante en la resolución de los dos modelos. Cabe aclarar que existen varias definiciones de matriz reducible e irreducible y que con tan sólo variar la definición de estas matrices la presentación del modelo cambia radicalmente. Otras definiciones se pueden encontrar en ([4]).

Es importante mencionar, que este trabajo nace de la inquietud por encontrar ejemplos de motivación o aplicación de las matemáticas en conexión con otras disciplinas. Y creemos que el trabajo resultante puede servir en economía matemática como motivación y en algebra lineal para introducir y ver la aplicación de conceptos tales como operaciones con matrices o valores y vectores propios.

Nosotros no analizamos el modelo bajo el punto de vista económico, en ocasiones tan sólo nos limitamos a interpretar ciertos resultados con el fin de aclarar algunos conceptos matemáticos. Tampoco estudiamos sus implicaciones políticas pero es importante notar que la elaboración de una matríz de insumo-producto (de la cual dependen los resultados), no consiste sólo en vaciar datos, por lo que estamos conscientes que la aplicación de dicho modelo requiere de análisis económico y político.

Finalmente una aclaración sobre la notación: a través del trabajo se usan las letras A, B, C, I para matrices, las demás letras mayúsculas denotan vectores.

I N D I C E

Prólogo

CAPITULO I

ALGUNOS EJEMPLOS DE LOS MODELOS CERRADO Y ABIERTO

1. Introducción.

2. El Modelo Cerrado. Ejemplos.

3. El Modelo Abierto. Ejemplos.

4. Comentarios.

5. Planteamiento General de los Modelos.

CAPITULO II

UNA SOLUCION PARCIAL AL MODELO CERRADO

1. Introducción.

2. Un Ejemplo Típico.

3. Existencia de Soluciones no Triviales.

4. Otros Tipos de Economias.

5. Matrices Reducibles e Irreducibles.

6. Sobre la Existencia de Soluciones del Modelo Cerrado.

7. Forma de las Soluciones. Caso Irreducible.

8. Forma de las Soluciones. Caso Reducible.

CAPITULO III

EL TEOREMA DE PERRON - FROBENIUS Y LA RESOLUCION DEL MODELO CERRADO

1. Introducción.

2. Reformulación del Modelo Cerrado.

3. Aritmética de Matrices No-Negativas y Positivas.

4. Preliminares del Teorema.

5. El Caso Irreducible.

6. El Caso Reducible.

7. Aplicación al Modelo Cerrado.

CAPITULO IV

RESOLUCION DEL MODELO ABIERTO

1. Introducción.

2. Matrices Productivas.

3. Una Caracterización de Matrices Productivas.

4. Otra Caracterización de Matrices Productivas.

5. Condiciones Suficientes.

6. Dos resultados sobre el Caso Irreducible

CAPITULO I

ALGUNOS EJEMPLOS DE LOS MODELOS CERRADO Y ABIERTO

1. Introducción:

El objetivo de este trabajo es explicar y resolver los dos casos del Modelo de Insumo - Producto de Leontief que se conocen como el Modelo Cerrado de Leontief y el Modelo Abierto de Leontief.

En el primero se tienen varias industrias que comercian entre si, consumiendo entre ellas mismas el total de su producción, en este caso no se considera la demanda externa.

En el segundo modelo las industrias comercian entre si pero también consideran la demanda externa y tratan de satisfacerla.

En este capítulo nos dedicaremos a plantear algunos ejemplos de ambos modelos, los cuales nos darán elementos para abordar el problema de su resolución general.

2. El Modelo Cerrado. Ejemplos.

Ejemplo 1. Tres inquilinos dueños de sus casas, un carpintero, un electricista y un plomero deciden trabajar diez días cada uno y hacer las reparaciones necesarias de las tres casas. Ninguno de ellos quiere que los otros obtengan ventajas, por lo que establecen que la cantidad total pagada por cada uno de ellos sea igual a la cantidad total recibida por cada uno. Supongamos que también se pagará un salario razonable aún por el trabajo efectuado en sus propias casas. El plan de trabajo se encuentra descrito en la siguiente tabla:

	trabajo efectuado por el		
	carpintero	electricista	plomero
días de trabajo en casa del carpintero	2	1	6
días de trabajo en casa del electricista	4	5	1
días de trabajo en casa del plomero	4	4	3

Después de efectuar el trabajo se preguntan ¿cuál es el salario que se deben pagar tomando en cuenta que ninguno de ellos obtendrá ventajas sobre los otros?

Como se quiere que el total de gastos sea igual al total de ingresos; la situación anterior se puede plantear como sigue:

Si p_1 = salario diario del carpintero

p_2 = salario diario del electricista

p_3 = salario diario del plomero

$$
\begin{aligned}
2p_1 + p_2 + 6p_3 &= 10p_1\\
4p_1 + 5p_2 + p_3 &= 10p_2\\
4p_1 + 4p_2 + 3p_3 &= 10p_3
\end{aligned}
$$

Donde interesa encontrar los valores p_1, p_2 y p_3. El sistema de ecuaciones anterior se puede reescribir como:

$$
\begin{aligned}
8p_1 - p_2 - 6p_3 &= 0\\
-4p_1 + 5p_2 - p_3 &= 0\\
-4p_1 - 4p_2 + 7p_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Sería deseable encontrar p_1, p_2, p_3 positivas satisfaciendo el sistema. El vector $(31, 32, 36)^T$ lo satisface. En el capítulo II haremos algunas observaciones sobre el caracter de las soluciones de este sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2. Pensemos ahora en los cinco continentes y en su producción total en un año. Dicha producción es en parte consumida por sí mismos y la otra parte vendida a los otros continentes. Supongamos que queremos saber cuál es el precio de la producción total de cada continente, sujeto a total de gastos igual a total de ingresos.

Fijemos la siguiente correspondencia:

América - 1 , Africa - 2, Europa - 3 , Asia - 4 , Oceanía - 5.

Supongamos que tenemos la siguiente tabla. (La cual es hipotética.)

	1	2	3	4	5
1	.50	.10	.50	.05	.03
2	.10	.20	.12	.07	.09
3	.20	.30	.07	.11	.30
4	.15	.25	.06	.63	.28
5	.05	.15	.25	.14	.25

La elaboración real de dicha tabla es bastante complicada, sin embargo, ya hecha es bastante fácil interpretarla. Cada columna - leida de arriba hacia abajo, indica la fracción de la producción que los diferentes continentes consumen del total de la producción de - determinado continente. Por ejemplo, en la primera columna y el primer renglón (se numeran de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) se encuentra .50, lo cual indica que el continente 1, - es decir América, consume la mitad de su producción total. En - la primera columna y el segundo renglón se encuentra .10, lo cual indica que el continente 2, es decir Africa, consume la decima - parte de la producción total del continente americano. Cada renglón indica las fracciones de la producción total que un determinado continente consume de la producción de los otros continentes. Por ejem plo, en el tercer renglón se tienen las fracciones de la producción total que el continente europeo consume de la producción de los otros continentes y de su producción.

Queremos saber cuál es el precio de la producción total de cada continente sujeto a la condición total de pagos = total de ingresos. La situación anterior se puede plantear como sigue:

Si p_1 = precio de la producción total de América.

p_2 = precio de la producción total de Africa.

p_3 = precio de la producción total de Europa.

p_4 = precio de la producción total de Asia.

p_5 = precio de la producción total de Oceanía.

$$
\begin{aligned}
.50p_1 + .10p_2 + .50p_3 + .05p_4 + .03p_5 &= p_1 \\
.10p_1 + .20p_2 + .12p_3 + .07p_4 + .09p_5 &= p_2 \\
.20p_1 + .30p_2 + .07p_3 + .11p_4 + .30p_5 &= p_3 \\
.15p_1 + .25p_2 + .06p_3 + .63p_4 + .28p_5 &= p_4 \\
.05p_1 + .15p_2 + .25p_3 + .14p_4 + .25p_5 &= p_5
\end{aligned}
$$

Sería deseable encontrar p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 positivas que satisfagan el sistema de ecuaciones, veremos en el capítulo II por medio de un criterio sencillo que tal solución existe.

Ejemplo 3. Consideremos siete industrias donde cada industria tiene una cierta producción de bienes o servicios, que en su totalidad es utilizada por las industrias, de acuerdo con la siguiente tabla:

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
I_1	.2	.1	0	.3	0	0	0
I_2	0	.2	0	0	0	0	.5
I_3	0	.2	.5	0	.9	0	0
I_4	0	0	0	0	0	.4	0
I_5	0	0	.5	0	.1	0	.2
I_6	.8	0	0	.7	0	.6	0
I_7	0	.5	0	0	0	0	.3

Esta tabla también nos indica la fracción de la producción total que consume cada industria de las otras; cada columna indica cómo se distribuye la producción total de una determinada industria y cada renglón indica las fracciones de la producción total que una determinada industria consume de la producción de las otras industrias y de sí misma.

Queremos saber el precio de la producción total de cada industria de tal manera que la economía esté en equilibrio, es decir que para cada industria el total de gastos sea igual al total de ingresos.

Si, p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p_6 y p_7 son respectivamente los precios de la producción total de las siete industrias; el sistema de ecuaciones que nos interesa resolver es:

$$
\begin{array}{llllllll}
.2p_1 + & .1p_2 & + \, 0p_3 & + .3p_4 & + 0p_5 & + 0p_6 & + 0p_7 & = p_1 \\
0p_1 + & .2p_2 & + \, 0p_3 & + \, 0p_4 & + 0p_5 & + 0p_6 & + .5p_7 & = p_2 \\
0p_1 + & .2p_2 & + .5p_3 & + \, 0p_4 & + .9p_5 & + 0p_6 & + \, 0p_7 & = p_3 \\
0p_1 + & 0p_2 & + \, 0p_3 & + \, 0p_4 & + 0p_5 & .4p_6 & + \, 0p_7 & = p_4 \\
0p_1 + & 0p_2 & + .5p_3 & + \, 0p_4 & + .1p_5 & + 0p_6 & + .2p_7 & = p_5 \\
.8p_1 + & 0p_2 & + \, 0p_3 & + .7p_4 & + 0p_5 & + .6p_6 & + \, 0p_7 & = p_6 \\
0p_1 + & .5p_2 & + \, 0p_3 & + \, 0p_4 & + 0p_5 & + 0p_6 & + .3p_7 & = p_7
\end{array}
$$

También sería deseable encontrar p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 y p_7 positivas, pero en éste caso no es tan sencillo asegurarlo, como se verá más adelante.

Observaciones

1. En todos los casos la suma de los coeficientes de cada columna de la tabla es uno o se puede replantear el sistema de ecuaciones de tal manera que así sea.

2. Los elementos de las tablas no pueden ser negativos, ya que si son negativos no tienen sentido económico.

3. Entonces el objetivo del problema es encontrar precios o salarios satisfaciendo las dos condiciones anteriores y la de equilibrio.

3. El Modelo abierto. Ejemplos.

Ejemplo 1. Una ciudad tiene tres industrias, una mina de carbón, una planta generadora de energía eléctrica y un ferrocarril local.

Para producir \$1.00 de carbón la mina necesita \$0.25 de energía eléctrica y \$0.25 de tranporte para embarque. Para producir \$1.00 de energía eléctrica la planta necesita \$0.65 de carbón, \$0.05 de su propia energía y \$0.05 de transporte. El ferrocarril para proporcionar \$1.00 de transporte requiere de \$0.55 de carbón y \$0.10 de energía eléctrica. En una semana, la mina recibe pedidos por \$50,000.00 provenientes de consumidores externos, la planta recibe pedidos del exterior por \$25,000.00. El ferrocarril es la única industria que no tiene demanda externa. ¿Cuál debe ser el valor monetario de la producción de las tres industrias, en esa semana, para satisfacer exactamente la demanda interna y externa?

El consumo viene dado por la siguiente tabla.

	mina	planta	ferrocarril	
mina	0	.65	.55	
planta	.25	.05	.10	= C
ferrocarril	.25	.05	0	

Donde cada columna indica las necesidades de una determinada industria con respecto a ella misma y a las otras industrias en valor monetario. Por ejemplo, la primera columna indica que la mina para producir \$1.00 de carbón necesita \$0.25 de energía eléctrica y $0.25 de transporte. Cada renglón indica, en valor monetario, lo que se necesita de una determinada industria. Por ejemplo, el - primer renglón indica que para producir $1.00 de cada una de las - industrias, la planta necesita $0.65 de carbón y el ferrocarril - - $0.55 también de carbón.

Si X es un vector donde cada coordenada indica el valor monetario de la producción total de cada industria, las cantidades

$$\begin{array}{ccccc} 0X_1 & + & .65X_2 & + & .55X_3 \\ .25X_1 & + & .05X_2 & + & .10X_3 \\ .25X_1 & + & .05X_2 & + & 0X_3 \end{array}$$

representan los consumos de carbón, electricidad y transporte, - - que las industrias requieren para producir X_1, X_2 y X_3, respectivamente. Entonces considerando la tabla de consumo como una matriz C, tenemos que CX es el consumo interno y por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} X-CX &= \text{Producción total-Consumo Interno} \\ &= \text{Excedente.} \end{aligned}$$

En este caso se tiene una demanda externa y la pregunta es: - ¿Cuál debe ser el valor monetario de la producción para satisfacer exactamente la demanda interna y externa?

El vector de demanda externa es $D=(50,000.00, 25,000.00, 0)^T$ y buscamos X tal que $X-CX=D$ es decir $(I-C)X=D$ parece claro que si $(I-C)$ tiene inversa está resuelto el problema.

Veamos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & .65 & .55 \\ .25 & .05 & .10 \\ .25 & .05 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I-C)X = \begin{pmatrix} 1.00 & -.65 & -.55 \\ -.25 & .95 & -.10 \\ -.25 & -.05 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50,000.00 \\ 25,000.00 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X=(I-C)^{-1} D=\frac{1}{503} \begin{pmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50,000.00 \\ 25,000.00 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 102,087.00 \\ 56,163.00 \\ 28,330.00 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Tres ingenieros, un civil, (c), un electricista, (e), y un mecánico, (M), tienen cada uno, un despacho de asesorías que abarca varias disciplinas; por lo que cada uno tiene que utilizar los servicios de los otros. Por cada \$1.00 de asesoría que presta C, paga \$0.10 de asesoría a E y \$0.30 a M. Por cada \$1.00 de aseso ría que presta E, paga \$0.20 a C y \$0.40 a M. Por último por cada \$1.00 de asesoría que presta M, paga \$0.30 a C y \$0.40 a E. - En una determinada semana, C recibe solicitudes de asesoría externa por \$500.00, E por \$700.00 y M por \$600.00. ¿Cuanto debe - producir en valor monetario C, E y M por los servicios de asesoría de esa semana, de forma tal que se satisfaga exactamente la demanda interna y externa?

En este caso,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & .20 & .30 \\ .10 & 0 & .40 \\ .30 & .40 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 500.00 \\ 700.00 \\ 600.00 \end{pmatrix}$$

$$I-C = \begin{pmatrix} 1 & -.20 & -.30 \\ -.10 & 1 & -.40 \\ -.30 & -.40 & 1 \end{pmatrix}$$

$(I-C)^{-1}$ existe y

$$X = (I-C)^{-1}\ D = \begin{pmatrix} 1.21 & .0529 & .5476 \\ .317 & 1.3112 & .6196 \\ .4899 & .6628 & 1.4121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500.00 \\ 700.00 \\ 600.00 \end{pmatrix}$$

uno tiene que utilizar los servicios de los demás, por cada \$1.00 - de asesoría que presta C, paga \$0.10 de asesoría a E y \$0.30 a M. Por cada \$1.00 de asesoría que presta E, paga \$0.20 a C y \$0.40

a M, por último por cada \$1.00 de asesoría que presta M, paga - \$0.30 a C y \$0.40 a E. En una determinada semana, C recibe solicitudes de asesoría externa por \$500.00, E por \$700.00 y M por \$600.00. ¿Cuál debe ser el valor monetario por los servicios de - asesoría de C, E y M de esa semana, de tal manera que se satisfaga exactamente la demanda interna y la externa?

En este caso,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & .20 & .30 \\ .10 & 0 & .40 \\ .30 & .40 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I-C = \begin{pmatrix} 1 & -.20 & -.30 \\ -.10 & 1 & -.40 \\ -.30 & -.40 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = (500,\ 700,\ 600)^T$$

$(I-C)^{-1}$ existe y entonces

$$X = (I-C)^{-1} D = \begin{pmatrix} 1.21 & .0529 & .5476 \\ .317 & 1.3112 & .6196 \\ .4899 & .6628 & 1.4121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \\ 600 \end{pmatrix}$$

<u>Observaciones</u>

1.- Los elementos de C no pueden ser negativos.

2.- Si la suma de los elementos de la columna j es menor que la unidad eso indica que la industria j puede tener utilidades.

3.- Por la observación anterior, la suma de los elementos de - cada columna es a lo más uno, pues dicha suma representa la inver sión que una determinada industria hace para producir $1.00 de su - bien.

4.- Las cantidades de C no siempre representan valores monetarios, puede representar la cantidad que una determinada industria necesita consumir de otra para poder producir una unidad de su pro ducto. Para mayor claridad escogimos manejar valor monetario.

5.- El objetivo del problema es fijar cuál debe ser el valor monetario de la producción para satisfacer exactamente la demanda interna y externa en una periodo fijo y cuándo ésto es posible.

6.- En general se espera que X, el vector buscado sea no negativo, ya que de no ser así, no tendría sentido económico.

7.- Por lo anterior no es suficiente que (I-C) tenga inversa sino que se requiere que sus elementos sean no negativos.

4. Comentarios

Si bien los ejemplos planteados están muy simplificados, los - modelos respectivos son bastante utilizados en problemas reales.

Citemos a Leontief: "La aplicación del método input-output a la investigación empírica viene condicionado por la información estadís tica básica. En el año 1963 se elaboraron tablas input-output para unos 40 países. Sus principales aplicaciones económicas, distintas de las que puede tener en el campo de la ingeniería o en el de la gestión empresarial, se realizaron en el terreno de la proyección económica de la demanda output, empleo e inversión expresada en términos de los sectores individuales para el caso de países o regiones económicas más pequeñas (por ejemplo, áreas metropolitanas); en el del estudio de los cambios tecnológicos y de sus efectos sobre la productividad; en el del análisis de los efectos que los cambios en los salarios, beneficios e impuestos tienen sobre los precios; en el del estudio de las relaciones económicas internacionales e interregionales; en el de la utilización de recursos naturales; y en el de la planificación para el desarrollo.

Algunas de estas aplicaciones acostumbran requerir la construcción de modelos input-output para este propósito especial. Para el caso del análisis de las relaciones interregionales y para resolver los problemas que plantea la planificación para el desarrollo se utiliza una extensa variedad de modelos especiales". ([7]). Un ejemplo de estos modelos especiales es el descrito en ([8]) que es un estudio de la economía mundial a futuro.

5. Planteamiento General de los Modelos

Planteamiento General del Modelo Cerrado

Consideremos un sistema económico con un número finito de industrias I_1 , I_2 , ..., I_n y un periodo fijo de tiempo, digamos un año.

Cada industria tiene cierta producción de bienes o servicios, la cual en su totalidad la consideraremos como una unidad, dicha producción es utilizada por completo por las n industrias, de acuerdo a una forma predeterminada, la cual se puede presentar en una matriz de dimensión n x n en donde la j - ésima columna indica las fracciones que las diferentes industrias consumen del total de la producción de I_j y el i - ésimo renglón indica las fracciones que I_i consume de la producción total de las otras industrias y de ella misma.

Dicha matriz se llama de Intercambio y tiene la siguiente forma.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Donde a_{ij} es la fracción de la producción total de I_j que -

consume I_i .

Si fijamos $P = (p_1, p_2, \ldots p_n)^T$ como el vector de pre-- cios, donde pi es el precio de la producción total de I_i , entonces nuestro objetivo es determinar los precios de los n productos de - tal manera que el total de gastos sea igual al total de ingresos.

Debido a la definición de a_{ij} y p_i tenemos las siguientes condiciones:

1- $p_i \geq 0$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ ya que no tiene sentido - económico tener precios negativos. Que el precio de un bien sea - cero es algo sorprendente; en economía a dichos bienes se les llama bienes libres y uno de ellos es el aire que respiramos.

2- $0 \leq a_{ij} \leq 1$, para toda i, j, por ser fracciones de la - unidad

3- $a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$ por lo que el total de la producción de las industrias es consumida completamente por ellas mismas.

En resumen dada A, matriz de intercambio, es decir, - -

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1,2,\ldots n,$$ buscamos

un vector P que cumpla con las siguientes propiedades

1.- $A P = P$ ó $(I-A) P = 0$

2.- $P_i \geq 0$ para toda i

3.- $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ (pues es claro, que no nos interesa el caso en que toda p_i sea igual a cero).

Planteamiento General del Modelo Abierto

Consideremos un sistema económico con un número finito de industrias identificadas por I_1, I_2, ..., I_n que producen n bienes identificados por G_1, ..., G_n, respectivamente, en un periodo fijo de tiempo.

Cada industria para poder producir necesita consumir determinada parte de los bienes de las otras industrias. Dichas cantidades se pueden expresar en unidades, porcentajes ó valor monetario; hemos dicho antes que escogimos manejar valor monetario.

Las necesidades de las n industrias pueden ser resumidas en una matriz que llamaremos de consumo, en donde C_{ij} es el valor monetario que I_i necesita de G_j (bien que produce I_j) para producir \$1.00 de G_i, notemos que $C_{ij} \geq 0$ para toda i, j y que C_{ii} puede ser positiva.

El vector columna i, indica los valores monetarios de los diversos bienes que se necesitan para producir una unidad en valor monetario (\$1.00) de G_i.

Cada renglón indica los valores monetarios que se necesita de-un determinado bien, para que cada una de las industrias pueda producir una unidad en valor monetario de sus respectivos bienes.

Una matriz de consumo tiene la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea $X = (x_1, \ldots x_n)^T$ el vector cuya coordenada x_i, representa el valor monetario de la producción total de G_i, entonces $x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n.$

El vector CX representa el consumo interno entre las industrias $I_1, \ldots, I_n$ para que éstas produzcan X. Por lo tanto el vector X-CX representa el excedente de la producción en valor monetario.

Sea $D = (d_1, \ldots d_n)^T$ el vector de demanda externa, esto es, d_i es el valor monetario de G_i que es solicitado en el exterior (por supuesto $d_i \geq 0$ y $d_i = 0$ cuando la demanda externa de G_i es nula. Pero pediremos que $\sum_{i=1}^{n} d_i > 0$.)

Nuestro problema es: Dadas C y D tales como se definen anteriormente, encontrar X tal que satisfaga exactamente la demanda interna y externa. En otras palabras, Si $C = (C_{ij})$, $C_{ij} \geq 0$

y $D = (d_1, \ldots, d_n)^T$, $d_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} d_i > 0$, la pregunta es -

¿Existitá $X = (x_1, \ldots x_n)^T$ tal que $X - CX = D$ o $(I-C)X = D$ con $X_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$?

En caso afirmativo ¿Cómo encontrar tal X?

La diferencia esencial entre el Modelo Cerrado y el Abierto es que en el Modelo Cerrado la producción es fija y se trata de determinar los precios de dicha producción para que el sistema esté en equilibrio y en el Modelo Abierto los precios estan fijos y se trata de determinar cuál debe ser la producción, en valor monetario, para satisfacer la demanda interna y externa sin excedentes.

CAPITULO II

UNA SOLUCION PARCIAL AL MODELO CERRADO

1. Introducción:

En este capítulo veremos que el modelo cerrado siempre tiene soluciones no triviales. Luego, suponiendo la existencia de la solución del modelo con las características deseadas -existencia que será probada en el capítulo III- se verá la forma de las soluciones distinguiendo dos casos: aquel en que la matriz es irreducible y el otro, donde la matriz es reducible. También se verá que una matriz reducible puede adquirir dos formas, triangular o normal, - éstas formas serán útiles para ver la forma de las soluciones y - más adelante para probar la existencia de éstas.

2. Un Ejemplo Típico

En el Ejemplo 1. del capítulo I teníamos el siguiente sistema - de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2p_1 + p_2 + 6p_3 &= 10p_1 \\ 4p_1 + 5p_2 + p_3 &= 10p_2 \\ 4p_1 + 4p_2 + 3p_3 &= 10p_3 \end{aligned}$$

Dividiendo entre diez y poniendolo en forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} .2 & .1 & .6 \\ .4 & .5 & .1 \\ .4 & .4 & .3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Donde k es una constante arbitraria.

Las soluciones que tienen sentido económico son aquellas donde $k > 0$ y por lo tanto hay una infinidad de ellas, por lo que surge la pregunta ¿Cuál de ellas es la mejor? Antes de contestar notemos que:

$$\frac{p_1}{31} = k \qquad \frac{p_2}{32} = k \qquad \frac{p_3}{36} = k$$

$$\frac{p_1}{31} = \frac{p_2}{32} = \frac{p_3}{36} = k$$

Es decir, que lo importante es la existencia de una relación entre los salarios. El valor adecuado de k depende de la situación económica del lugar donde se desarrolla. Por ejemplo si los salarios se encuentran entre 60 y 80 unidades monetarias $k = 2$, $p_1 = 62$, $p_2 = 64$ y $p_3 = 72$.

Si se encuentran entre 3 100 y 3 700 unidades monetarias $k = 101$, $p_1 = 3\ 131$, $p_2 = 3\ 232$ y $p_3 = 3\ 636$.

El planteamiento matemático es independiente de la situación económica, a nosotros nos interesa encontrar alguna solución que satisfaga las condiciones del Modelo Cerrado. En este ejemplo hemos encontrado una solución particular $p_o = (31, 32, 36)^T$ cuyas coordenadas son positivas, y cualquier otra solución del sistema de ecuaciones es un múltiplo escalar de p_o. Veremos más adelante que ésto no siempre sucede. Pero antes de ello vamos a demostrar que el Modelo Cerrado tiene soluciones diferentes de la trivial, es decir, diferentes del vector nulo.

3. Existencia de Soluciones no Triviales

En el Modelo Cerrado se busca P tal que AP = P . Lo cual se puede reescribir como (I-A) P = 0. Por ser un sistema homogêneo tiene al menos una solución que es la trivial, pero nos interesan aquellas soluciones que sean diferentes de ésta.

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene soluciones diferentes de la trivial si logramos reducirlo a un sistema de n - 1 ecuaciones con n incógnitas.

Veamos si esto es posible.

La matriz del sistema es:

$$I-A = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \cdot & 1-a_{22} & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ -a_{1n} & & & 1-a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sumando los primeros n-1 renglones al último tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{1n} \\ 1-\sum_{i=1}^{n} a_{i1} & 1-\sum_{i=1}^{n} a_{i2} & 1-\sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{pmatrix}$$

Considerando que en el Modelo Cerrado

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ & 1-a_{22} & & \\ -a_{n-1,1} & & & -a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

entonces hemos logrado reducir el sistema original a uno con n-1 - ecuaciones y n incógnitas.

Otra forma de demostrar lo anterior es viendo que el determinante del sistema es cero; la forma de hacerlo es transformando el determinante en otro cuyo último renglón es cero, de manera análoga al caso de matrices.

Hemos demostrado que un sistema de la forma (I-A) P=0 con - $0 \leq a_{ij} \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad j=1,\ldots n$ tiene soluciones no triviales, que pueden ser calculadas por los métodos usuales. Sin embargo nada nos garantiza que $\sum_{i=1}^{n} P_i > 0$. Sobre este problema - volveremos más adelante.

4. Otros tipos de Economías

El ejemplo típico, que tratamos en el inciso 2 de este capítulo, es un caso donde al considerar al carpintero, al plomero y al electricista como industrias, cada una de las industrias consume de todos los bienes que producen las otras. Sin embargo existen otro - tipo de situaciones que tienen las propiedades del Modelo Cerrado.

Veamos algunos ejemplos.

Caso I

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La solución de $(I-A)\ P = 0$ es:

$$(p_1, p_2, p_3, p_4)^T = (\tfrac{3}{4}, 0, 1, 0)^T p_3 + (0, 2, 0, 1)^T p_4$$

$$= sa + tb$$

Podemos observar que las soluciones son combinaciones lineales de dos soluciones básicas $a=(\frac{3}{4}, 0, 1, 0)^T$ y $b=(0, 2, 0, 1)^T$. Para p_3, p_4 positivos, la solución es positiva y cumple con las condiciones del Modelo Cerrado; si una de ellas es cero tendremos una solución con al menos una coordenada cero pero que sigue satisfaciendo las condiciones del Modelo Cerrado.

Caso II

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La solución de $(I-A)\ P = 0$ es:

$$\begin{aligned} (p_1, p_2, p_3, p_4)^T &= (p_3 - \tfrac{7}{12}\, p_4\,,\ -\tfrac{2}{12}\, p_4\,,\ p_3\,,\ p_4)^T \\ &= (1,0,1,0)^T p_3 + (-\tfrac{7}{12}, -\tfrac{2}{12}, 0, 1)^T p_4 \\ &= sa + tb \end{aligned}$$

En éste caso podemos hacer las mismas observaciones con respecto a la forma de las soluciones.

Comparemos las matrices y las soluciones.

CASO I

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\, p_3 \\ 2\, p_4 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

CASO II

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_3 - \frac{7}{12}\, p_4 \\ -\frac{2}{12}\, p_4 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

De A, en el Caso I, observamos que I_2 , I_4 no consumen nada de la producción de I_1, I_3 y viceversa. De las soluciones - podemos ver que los precios de las producciones de I_1 , I_3 son - independientes de los precios de las producciones de I_2, I_4 y - viceversa.

Al analizar A en el Caso II observamos que I_2 , I_4 no consumen de la producción de I_1 , I_3 pero I_1, I_3 si consumen de la producción de I_2 , I_4 . Lo anterior se refleja en los precios, ya que los precios de las producciones de I_2, I_4 son independientes - de los precios de las producciones de I_1 , I_4 . Sin embargo los de I_1, I_4 dependen de los otros, en particular $p_1 = p_3 - \frac{7}{4} p_4$.

Lo anterior establece una diferencia entre los dos casos. A los subconjuntos con las características del Caso I, esto es los subconjuntos (I_1 , I_3) , (I_2 , I_4) los llamaremos subconjuntos autónomos y al del Caso II: (I_1, I_3), los llamaremos subconjunto parásito.

Es decir, los subconjuntos que comercian exclusivamente entre sí los llamaremos autónomos. A aquellos que comercian entre si - pero además consumen bienes de otros subconjuntos los llamaremos parásitos.

Ambos casos tienen en común que sus soluciones son combinaciones lineales de dos soluciones básicas.

Hemos encontrado una semejanza entre las soluciones en ambos ejemplos y es natural preguntar si existe alguna semejanza entre las respectivas matrices.

La observación más obvia es que en ambos casos existen varios ceros en las matrices. Podemos rearreglar los indices de las industrias y tratar de agrupar los ceros.

Caso I

$$A^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} I_1 & I_3 & I_2 & I_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_3 \\ I_2 \\ I_4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Caso II

$$A^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} I_1 & I_3 & I_2 & I_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_3 \\ I_2 \\ I_4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

En ambos casos encontramos al menos un bloque de ceros.

Si trataramos de encontrar un bloque de ceros en el ejemplo del inciso 2 veríamos que ésto no es posible por lo que es importante diferenciar ese ejemplo de los casos I y II.

5. Matrices Reducibles e Irreducibles

El reordenamiento de los indices de las industrias, corresponde por un lado a intercambio de renglones y columnas correspondientes y por otro lado a permutación de indices, por lo que el intercambio de renglones y columnas lo podemos ver como permutación simultánea de renglones y columnas.

Definición: Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es llamada reducible si existe una permutación de columnas y de sus renglones correspondientes tales que la matriz resultante tiene la siguiente for ma

$$A^1 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O_{(n-r)xr} & B_3 \end{pmatrix}$$

donde (rxr), rx (n-r), (n-r) x(n-r), (n-r)xr son las dimensiones de los bloques B_1 , B_2 , B_3 y O respectivamente.

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ es llamada irreducible si no existe una permutación de columnas y de sus renglones correspondientes, tales que la matriz resultante tenga la forma anteriormente descrita.

Al aplicarle una permutación simultánea a una matriz, la información que se tiene sobre las industrias en ambas matrices (la matriz original y aquella resultante después de aplicarle la permutación simultânea) es la misma, pero realmente las matrices son diferentes. Sin embargo existe una relación matricial entre ellas que es: $PAP^{-1} = A^1$ donde P es una permutación matricial y P^{-1} su inversa.

Tomando en cuenta lo anterior diremos que la matriz A^1 se obtiene de la matriz A, por medio de permutaciones simultâneas.

Veamos algunos ejemplos de matrices reducibles. Las matrices estan formadas por elementos positivos y ceros, a los primeros los denotaremos por X, ya que por el momento no nos interesa el valor númerico de éstos, sino reordenar los indices y llegar a la forma que nos indica que la matriz es reducible.

a)

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \\ X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 \\ X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{pmatrix} \end{array} = PAP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} X & 0 & X & 0 & X \\ 0 & X & 0 & X & 0 \\ X & 0 & X & 0 & X \\ 0 & X & 0 & X & 0 \\ X & 0 & X & 0 & X \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} X & X & X & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix} \end{array}$$

c)

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & 0 & X \\ X & X & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{pmatrix} \end{array}$$

d)

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} X & X & 0 & X & X \\ X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \\ X & X & X & 0 & X \\ 0 & 0 & X & 0 & X \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} X & X & X & 0 & X \\ X & 0 & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix} \end{array}$$

e)

$$A = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\begin{pmatrix} X & 0 & X \\ X & X & X \\ X & 0 & X \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{pmatrix} X & X & X \\ 0 & X & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix} \end{array}$$

Es importante observar que una matriz puede ser irreducible y tener algunos elementos ceros, es decir, el hecho de que una matriz tenga ceros no implica que sea reducible. Por ejemplo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X & X \\ X & 0 & X \\ X & X & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & X & X & X \\ X & X & 0 & X \\ X & 0 & X & X \\ X & X & X & 0 \end{pmatrix}$$

En el apêndice se estudian otros criterios para determinar si - una matriz es reducible o irreducible.

La Forma Triangular de una Matriz Reducible

Si A es una matriz reducible no negativa, por medio de permu_ taciones simultaneas podemos reescribirla como:

$$A^1 = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

donde B y D son matrices cuadradas. Si una de las matrices anteriores es reducible, el proceso se continua y A puede ser llevada a la forma:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} K & H & F \\ O & L & G \\ O & O & M \end{pmatrix}$$

donde K, L, M son matrices cuadradas. Como A es de dimensión finita, el proceso en algún momento se detiene y se obtiene una matriz triangular

$$PAP^{-1} = A^{1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & A_{22} & \cdots & \cdot \\ & & A_{ii} & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde la diagonal está formada por bloques irreducibles o matrices de 1X1

Ejemplos

a)

$$A = \begin{pmatrix} .2 & .1 & 0 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & .2 & .5 & 0 & .9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 & .1 & 0 & .2 \\ .8 & 0 & 0 & .7 & 0 & .6 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & .3 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} .2 & .3 & 0 & .1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .8 & .7 & .6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & .3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & 0 & .5 & .9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .5 & .1 \end{pmatrix}$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} .2 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & .4 \\ .8 & .7 & .6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} .1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} .2 & .5 & 0 & 0 \\ .5 & .3 & 0 & 0 \\ .2 & 0 & .5 & .9 \\ 0 & .2 & .5 & .1 \end{pmatrix}$$

B es irreducible pero D no lo es por lo que aplicando a A^1 las permutaciones simultáneas necesarias para que D obtenga la forma - que caracteriza a una matriz reducible tenemos.

$$
A^{11} = \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{array} \begin{pmatrix} .2 & .3 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .8 & .7 & .6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & .9 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & .1 & 0 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5 & .3 \end{pmatrix}
$$

donde la diagonal formada por:

$$
A_{11} = \begin{pmatrix} .2 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & .4 \\ .8 & .7 & .6 \end{pmatrix} \qquad A^{22} = \begin{pmatrix} .5 & .9 \\ .5 & .1 \end{pmatrix}
$$

$$
A_{33} = \begin{pmatrix} .2 & .5 \\ .5 & .3 \end{pmatrix}
$$

consiste de bloques irreducibles por lo que hemos llegado a la forma triangular de A.

b)

$$
A= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$A^1 = \begin{array}{c} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \left(\frac{1}{3}\right) \qquad A_{33} = (1)$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

En este caso la diagonal en la forma triangular está formada - por matrices irreducibles y matrices de dimensión 1X1.

Ciertos bloques de la diagonal merecen especial mención. Un bloque diagonal A_{ii} $(1 \leq i \leq r)$ lo llamaremos aislado si $A_{ki} = O$ $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r$.

En particular podemos, por medio de permutaciones simultáneas, poner los bloques aislados en los primeros lugares de la diagonal y los demás al final. El último ejemplo queda:

$$PA^1P^{-1} = \begin{array}{c} 6 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y los bloques aislados son:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad A_{22} = (1)$$

La Forma Normal de una Matriz Reducible

En general, después de obtener la forma triangular de una matriz reducible, podemos fijarnos en los bloques aislados y por medio de permutaciones simultáneas ponerlos en los primeros lugares de la diagonal y los demás al final.

En la forma triangular al menos existe un bloque aislado - -

(el A_{11}) por lo tanto A toma la siguiente forma

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 & A_{1,g+1} \ldots & A_{1s} \\ O & & & A_{2,g+1} & A_{25} \\ & A_{ii} & & & \\ O \ldots & O & A_{gg} & A_{g,g+1} & \\ & & & A_{g+1,g+1} & \\ O & & O & O & A_{ss} \end{pmatrix}$$

donde $A_{11}, \ldots, A_{ss}$ son bloques irreducibles o bloques de dimen- sión 1x1 y en cada columna A_{17}, A_{27}, ..., A_{s7}, - - γ =g+1, ..., s al menos un bloque diferente del diagonal es di ferente de cero. A ésta forma la llamaremos forma normal de la matriz reducible, y está determinada de forma única salvo permutaciones simultáneas. ([4])

Si

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & A_{17} & \cdots & A_{1s} \\ & & A_{27} & & A_{25} \\ O & A_{gg} & A_{g+17} & & \\ & & A_{g+1,g+1} & & \\ O & O & O & & A_{ss} \end{pmatrix}$$

podemos reescribirla como:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} A_{11} & & \\ & & B \\ & A_{gg} & \end{array}\right)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} A_{17} & \cdots & A_{1s} \\ A_{g+1,\, g+1} & & \\ O & & A_{ss} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

a)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & O & a_{14} \\ O & a_{22} & O & a_{24} \\ O & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ O & a_{42} & O & a_{44} \end{pmatrix} \qquad A^{1} = \begin{pmatrix} a_{11} & O & a_{12} & a_{14} \\ O & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ O & O & a_{22} & a_{24} \\ O & O & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (a_{11}) \qquad A_{22} = (a_{33}) \qquad B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{22} & a_{42} \\ a_{14} & a_{34} & a_{24} & a_{44} \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & 0 & a_{42} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$PA^1P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & & 0 & \\ & A_{22} & & \\ & & A_{33} & B \\ & 0 & & \end{array}\right)$$

6. Sobre la Existencia de Soluciones del Modelo Cerrado

Enunciaremos algunos resultados importantes que probaremos en el Capítulo III. Preferimos en éste momento enunciarlos y ver sus aplicaciones, porque la demostración de estos requiere de herramientas más sofisticadas.

En dicho capítulo se prueban los siguientes resultados:

1.- Dada A matriz de intercambio irreducible, existe X que satisface $AX=X$, con $X_i > 0$ para toda i. (A una X tal la denotaremos como $X > 0$.)

2.- Dada A matriz de intercambio reducible, existe X que satisface $AX=X$ con $X_i \geq 0$ para toda i, $\sum_{i=1}^{k} X_i > 0$. (A una X tal la denotaremos como $X \geq 0$, $X \neq 0$.)

3.- Dada A matriz de intercambio irreducible y X una solución no negativa de $AX = X$, entonces esa solución es la trivial o todos-sus elementos son positivos.

7. Forma de las Soluciones. Caso Irreducible

Sea A una matriz de intercambio irreducible y supongamos que P, P^1 son soluciones de A que cumplen con las propiedades deseadas que son:

1.- $AP = P$ ó $(I-A)\,P = O$

2.- $P_i \geq O$ para toda i

3.- $\sum_{i=1}^{n} P_i > 0$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{pmatrix} \qquad P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n^1 \end{pmatrix}$$

Sea $k = \min \left(P_i^1 / P_i \right)$. Supongamos que $k = P_1^1 / P_1$, - tomando en cuenta que A es irreducible, $P > O$ y $P^1 > O$ y en consecuencia $k > O$. Además $P_j^1 / P_j \geq k$, para toda j . Entonces

$$P_j^1 - k\, P_j \geq O$$

para toda j.

Sea $P^{11} = P^1 - k\,P$ entonces $(I-A)\,P^{11} = O$. Es decir, P^{11} es una solución que cumple las dos primeras propiedades.

$P^{11} = P^{1} - kP \geq O$ para toda i, por lo tanto P^{11} tiene dos alternativas

a) $P^{11} = O$ es decir, $kP = P^{1}$ y en tal caso todas las soluciones de A son de la forma kP donde k es una constante positiva.

b) $P^{11} \neq O$. Por ser A irreducible y P^{11} solución de A entonces $P_i^{11} > 0$ para toda i , pero $P_1^{11} = P_1^{1} - (P_1^{1}/p_1)\, P_1 = O$, esto es, $P_1^{11} = O$ que contradice $p_i > O$ para toda i.

Realmente hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema

Si a es una matriz de intercambio ($0 \leq aij \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} aij = 1$ $j = 1, 2, \ldots, n$), irreducible, toda P tal que $AP = P$, $P_i \geq O$ para toda i, $\sum_{i=1}^{n} P > 0$ es de la forma kP_1, donde k es una constante positiva y P_1 una solución particular positiva.

La solución particular se puede encontrar por cualquiera de los métodos usuales.

En el Ejemplo 1. del Capítulo I tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} .2 & .1 & .6 \\ .4 & .5 & .1 \\ .4 & .4 & .3 \end{pmatrix} \qquad P = k \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$AP = P, \quad p_i \geq O \quad \text{para toda } i, \quad \sum_{i=1}^{3} P_i > O \quad \text{para } k > O.$$

En el Ejemplo 2. del Capítulo I (continentes) la matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} .5 & .1 & .5 & .05 & .03 \\ .1 & .2 & .12 & .07 & .09 \\ .2 & .3 & .07 & .11 & .3 \\ .15 & .25 & .06 & .63 & .28 \\ .05 & .15 & .25 & .14 & .25 \end{pmatrix}$$

A es una matriz Ireducible por lo tanto por el teorema anterior existe una solución cuyos elementos son todos positivos. Además - todas sus soluciones son de la forma kP, donde k es una constante positiva y P una solución particular positiva de A.

8. Forma de las Soluciones. Caso Reducible

Si A de orden n x n , se puede reescribir por medio de permutaciones simultáneas como

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

con A_{11}, A_{22} irreducibles, la situación es muy sencilla pues existen $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ tales que

$$A_{11}\overline{x}_1 = \overline{x}_1 \quad , \quad \overline{x}_1 > O$$

$$A_{22}\overline{x}_2 = \overline{x}_2 \quad , \quad \overline{x}_2 > O$$

X_1 es orden $r_1 \times 1$, si A_{11} es de orden $r_1 x\ r_1$. Podemos - definir $X_1{}^*$ cuyo vector de orden $n x 1$, cuyas primeras r_1 coorde- badas coinciden con las de $\overline{X}_1$ y las demás son ceros. Esto es

$$X_1^* = \left(\begin{array}{c} \overline{X}_1 \\ \hline \overline{o} \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \\ n-r_1 \end{array}$$

Además se tiene

$$A^1 \quad x_1{}^* = x_1{}^*$$

De la misma manera podemos definir

$$X_2^* = \left(\begin{array}{c} \overline{o} \\ \hline \overline{x}_2 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \\ n-r_1 \end{array}$$

también se tiene

$$A^1 \quad x_2{}^* = x_2{}^* \ ,$$

es decir que x_1^* , $x_2{}^*$ son soluciones de A^1 y $k_1 x_1{}^* +$ $k_2\ x_2{}^*$ también es solución de A^1 con k_1, k_2 no negativas y al menos una diferente de cero. De ésta manera hemos encontrado un método para encontrar soluciones de A^1 a partir de dos solucio nes particulares $x_1{}^*$, $x_2{}^*$. Veremos ahora que toda solución de $A^1 x = x$ es de esa forma.

Si X es solución de $A^1 x = x$

$$
X = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \hline \overline{X}_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \top \\ r \\ + \\ n-r \\ \bot \end{array} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \hline \overline{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \hline \overline{X}_2 \end{pmatrix}
$$

Al sustituir en $A^1 x = x$ tenemos:

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\overline{X}_1 \\ \hline \overline{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \hline A_{22}\overline{X}_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \hline \overline{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \hline \overline{X}_2 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto

$$
A_{11}\overline{X}_1 = \overline{X}_1 \quad , \quad A_{22}\overline{X}_2 = \overline{X}_2
$$

Esto es, toda solución de $A^1 x = x$ es una combinación lineal de $\overline{x}_1^*$, $\overline{x}_2^*$ soluciones particulares positivas de A^1, obtenidas cada una de ellas de $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ soluciones particulares positivas de $A_{11}X = X$, $A_{22} X = X$, respectivamente.

En general, si A de orden $n \times n$ se puede reescribir por medio de permutaciones simultáneas como:

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & A_{ii} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & & A_{gg} \end{pmatrix}$$

de la misma manera se pueden encontrar $\overline{X}_1$, ..., $\overline{X}_g$ y cualquier solución de $A^1 x = x$ se puede escribir de la forma

$$X = k_1 X_1^* + k_2 X_2^* + \ldots + k_g X_g^*$$

donde k_1 $i = 1, 2, \ldots g$ son reales no negativos. El vector X satisface $A^1 X = X$, $X_i \geq 0$ para toda i, para cumplir - - - $\sum_{i=1}^{n} X_i > 0$ al menos una k_i tiene que ser diferente de cero. - Estos ejemplos se refieren a una situación donde cada bloque corres ponde a un subconjunto autónomo.

Los ejemplos anteriores son casos muy particulares de matrices reducibles pero en general sabemos que toda matriz reducible puede ser llevada a su forma normal.

$$A^1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} A_{11} & \cdots & & & 0 & \\ 0 & & & & \vdots & \\ \vdots & & A_{ii} & & \vdots & \\ \vdots & & & & A_{gg} & B \\ & & & & 0 & \\ & & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & & & 0 & \end{array}\right)$$

Cada bloque aislado A_{ii} , de orden r_i x r_i , representa un conjunto autónomo y al menos existe un bloque aislado, A_{11}. A partir de $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ... $\overline{X}_g$ soluciones positivas de $A_{11}\overline{X}_1 = \overline{X}_1$, $A_{22}\overline{X}_2 = \overline{X}_2$, ..., $A_{gg}\overline{X}_g = \overline{X}_g$, respectivamente, podemos construir los siguientes vectores de orden n x 1 .

$$X_1^* = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \hline \overline{O} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ n-r_1 \end{array} ; \quad X_2^* = \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \hline \overline{X}_2 \\ \hline \overline{O} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ n-(r_1+r_2) \end{array} ; \ldots ; X_g^* = \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \hline \overline{X}_g \end{pmatrix} \begin{array}{l} n-rg \\ rg \end{array}$$

donde $\overline{X}_i$ es de orden r_i x1 si A_{ii} es de orden r_i x r_i .

Dichos vectores son soluciones que satisfacen las propiedades deseadas para el modelo cerrado. Con éstas soluciones se pueden construir otras que también cumplan con las propiedades deseadas. A saber, $X = k_1X_1^* + k_g X_g^*$ con $k_i \geq O$ y alguna $k_i \neq O$.

Sin embargo, nada nos garantiza que esas sean todas las soluciones.

Veamos un ejemplo sencillo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & O & a_{14} \\ O & a_{22} & O & a_{24} \\ O & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ O & a_{42} & O & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & O & a_{12} & a_{14} \\ O & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ O & O & a_{22} & a_{24} \\ O & O & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & O & d_{13} & d_{14} \\ O & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ O & O & d_{33} & d_{34} \\ O & O & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = (d_{11}) \quad A_2 = (d_{22}) \qquad B = \begin{pmatrix} d_{13} & d_{14} \\ d_{23} & d_{24} \\ d_{33} & d_{34} \\ d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

Supongamos $A^1 x = x$, que êste caso significa

$$A^1 x = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} & d_{14} \\ O & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ O & O & d_{33} & d_{34} \\ O & O & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{matrix} d_{11}x_1 + d_{13}\,x_3 + d_{14}\,x_4 \\ d_{22}x_2 + d_{23}\,x_3 + d_{24}\,x_4 \\ d_{33}\,x_3 + d_{34}\,x_4 \\ d_{43}\,x_3 + d_{44}\,x_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}\, x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_{22}\, x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{13}\, x_3 + d_{14}\, x_4 \\ d_{23}\, x_3 + d_{24}\, x_4 \\ d_{33}\, x_3 + d_{34}\, x_4 \\ d_{43}\, x_3 + d_{44}\, x_4 \end{pmatrix}$$

$$= A^1 \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A^1 \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = X_1^* + X_2^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

y como, $A^1 x = x$ se necesita $B \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$. Veamos qué significa como sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} d_{13}\, x_3 + d_{14}\, x_4 &= 0 \\ d_{23}\, x_3 + d_{24}\, x_4 &= 0 \\ d_{33}\, x_3 + d_{34}\, x_4 &= x_3 \\ d_{43}\, x_3 + d_{44}\, x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

Supongamos que $X_3 > 0$ y $X_4 = 0$ entonces $d_{13} = d_{23} = d_{43} = 0$ y d_{33} resultaría un bloque aislado lo que contradice que d_{33} esté en B en la forma normal de A.

Supongamos que $X_3 > O$ y $X_4 > O$ entonces $d_{13} = d_{23} = O$ y $d_{14} = d_{24} = O$, en tal caso el siguiente bloque sería aislado.

$$\begin{pmatrix} d_{33} & d_{34} \\ d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

contradiciendo nuevamente el hecho de que esté en B en la forma normal de A. Podemos concluir $X_3 = X_4 = O$ y las soluciones de A^1 son de la forma $X = k_1 x_1^* + k_2 x_2^*$

El ejemplo anterior sugiere el siguiente resultado:

<u>Teorema:</u>

Si A (nxn) es una matriz de intercambio reducible y A^1 representa la forma normal de A

$$A^1 = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & & O & \\ & A_{ii} & & \\ O & & A_{gg} & B \\ O & & O & \end{array}\right)$$

entonces las soluciones de A^1 son de la forma

$$X = \sum_{i=1}^{g} k_i \; X_i^*$$

$\overline{X}_1$, ..., $\overline{X}_g$ son soluciones positivas de $A_{11}\overline{X}_1 = \overline{X}_1$, ..., $A_{gg}\overline{X}_g = \overline{X}_g$, A_{ii} es de orden $r_i \times r_i$

$$X_1^* = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{O} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} r_1 \\ n-r_1 \end{array} ; X_2^* = \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \overline{X}_2 \\ \overline{O} \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ n-(r_1+r_2) \end{array} ; \dots ; X_g^* = \begin{pmatrix} O \\ \overline{X}_g \end{pmatrix} \begin{array}{c} n-r_g \\ r_g \end{array}$$

k_1, k_2, ..., k_g son reales no negativos y al menos uno diferente de cero.

Demostración

En general si A^1 es una matriz de intercambio en la forma normal y X una solución de $A^1 x = x$ se tiene

$$A^1_x = \left(\begin{array}{cc|c} A_{11} & O & \\ & A_{gg} & B \\ O & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = X$$

$$X = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{X}_g \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

donde $\overline{X}_i$ es de orden $r_i x1$ si A_{ii} es de orden $r_i x\ v_i$ entonces -

$$A^1 X = A^1 \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ O \\ \\ \\ O \end{pmatrix} + A^1 \begin{pmatrix} o \\ o \\ \overline{X}_2 \\ O \\ O \end{pmatrix} + \ldots + A^1 \begin{pmatrix} o \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{X}_g \\ O \end{pmatrix} + A^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \overline{X}_1 \\ o \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o \\ o \\ A_2 \overline{X}_2 \\ o \\ o \\ o \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_g \overline{X}_g \\ o \\ o \end{pmatrix} + B\bar{g}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ \overline{X}_2 \\ O \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} O \\ O \\ \overline{X}_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ O \\ O \\ \bar{g} \end{pmatrix} = X_1^* + X_2^* + . + X_2^* + y^*$$

$$X = \sum_{i=1}^{g} X_i^* + B_y^* \qquad X - \sum_{i=1}^{g} X_i^* = B_y^*.$$

$$(I-A^1)\, X = O \qquad (I - A^1) \sum_{i=1}^{g} X_i^* = O$$

entonces $B_{\bar{y}}$ también satisface la ecuación y tenemos

$$B_{\bar{y}} = y^* \qquad y^* = \begin{matrix} o \\ \vdots \\ \bar{y} \end{matrix}$$

Como A^1 es una matriz reducible $X \neq O$ con alguna $X_i \neq o$ entonces y tiene dos alternativas

a) $\bar{y} = o$ en tal caso $X = \sum_{i=1}^{g} X_i^*$

y como las soluciones de matrices irreducibles son de la forma k p donde k es una constante positiva entonces x se puede expresar como:

$$X = \sum_{i=1}^{g} k_i X_i^*$$

donde $\bar{X}_i$ es una solución particular positiva de $A_{ii} \bar{X}_i = \bar{X}_i$ y X_i^* es una solución particular positiva de $A^1 x = x$

b) $\bar{y} \neq O$. Entonces existe una $y_i \neq O$.

Supongamos que la dimensión de B es sx4 y

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

con $y_1 > O$, $y_2 = y_3 = y_4 = O$

tenemos que $B_{\bar{y}} = y^*$

$$\begin{array}{l}
b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + b_{14} y_4 = 0 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
b_{r-1,1} y_1 + \qquad\qquad + b_{r-1\,4} y_4 = 0 \\
b_{r1} y_1 + b_{r2} y_2 + b_{r3} y_3 + b_{r4} y_4 = y_1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = y_2 = O \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = y_3 = O \\
b_{51} y_1 + b_{52} y_2 + b_{53} y_3 + b_{54} y_4 = y_4 = O
\end{array}$$

Las primeras r-1 ecuaciones y las correspondientes a y_2, y_3, y_4 son iguales a cero, A^1 es no negativa por lo que cada sumando es igual a cero, como $y_1 > o$ entonces $b_{i1} = o$ para $i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots s$ $b_{11} \neq o$ (porque A^1 es una matriz de intercambio y la suma de las coordenadas de cada columna es 1) pero entonces b_{r1} es un bloque aislado (1x1), lo cual contradice que A^1 es la forma normal de A.

Supongamos que existen y_i, y_j mayores que cero y las restantes ceros, por medio de permutaciones podemos hacer que $y_i = y_1^1$, $y_j = y_2^1$ $\bar{y} = (y_1^1, y_2\ y_3\ y_5)^T$

De la misma manera que lo hicimos para el caso de $y_1 \neq 0$ podemos concluir que el siguiente bloque es aislado.

$$\begin{pmatrix} b_{r1}^1 & b_{r2}^1 \\ b_{r+1,1}^1 & b_{r+1,2}^1 \end{pmatrix}$$

Donde b_{ij}^1 son las coordenadas de B despuês de aplicarle las permutaciones simultâneas necesarias para que $y_i = y_1^1$ $y_j = y_2^1$, si dicho bloque es irreducible se tiene una contradicciôn. Si no por ser reducible se puede poner en forma triangular con bloques irreducibles en la diagonal y por lo menos el primero (en la forma triangular) es irreducible y aislado llegândose a ser una contradicciôn.

En general si $\mathcal{J} = \left\{ j \mid y_j > 0 \right\}$ por medio de permutaciones simultâneas podemos hacer que las primeras coordenadas de y sean las y_j donde $j \in \mathcal{J}$, entonces B tendrá un bloque aislado, dicho bloque es irreducible o en él se puede encontrar un bloque irreducible y aislado que contradice que A^1 es la forma normal de A.

Por lo tanto $\bar{y} = 0$, lo que implica que si X es solución de $A^1 x = x$ entontes $X = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^*$.

Ahora podemos resolver facilmente el ejemplo 3 del primer capítulo cuya matriz de intercambio es:

$$A = \begin{pmatrix} .2 & .1 & 0 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & .2 & .5 & 0 & .9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 & .1 & 0 & .2 \\ .8 & 0 & 0 & .7 & 0 & .6 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & .3 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} .2 & .3 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .8 & .7 & .6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & .9 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & .1 & 0 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5 & .3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} .2 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & .4 \\ .8 & .7 & .6 \end{pmatrix} \qquad \overline{X}1 = \begin{pmatrix} 0.15\ k_1 \\ 0.4\ k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} .5 & .9 \\ .5 & .1 \end{pmatrix} \qquad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 1.8 & k_2 \\ & k_2 \end{pmatrix}$$

$$X = \sum_{i=1}^{2} k_i \, x_i^{*}$$

$$X = k_1 \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (0.15\,k_1,\ 0.4\,k_1,\ k_1,\ 1.8\,k_2,\ k_2,\ 0,\ 0)^T$$

Si se hacen las permutaciones simultáneas necesarias para que A^1 obtenga su forma original entonces las soluciones de $Ax=x$ son:

$$(0.15\,k_1,\ 0,\ 1.8\,k_2,\ 0.4\,k_1,\ k_2,\ k_1,\ 0)^T$$

CAPITULO III

EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS Y LA RESOLUCION DEL MODELO CERRADO

1. Introducción

En este capítulo se prueba el Teorema de Perron-Frobenius para matrices no-negativas basandonos en un artículo de Debreu y Herstein ([4]) y en una presentación posterior de Erwin Klein. ([6]), los cuales a su vez se basan en el teorema de punto fijo de Brouwer. El Teorema de Perron-Frobenius nos asegura la existencia de un vector P tal que $AP = \lambda^* P$ con $\lambda^* \geq 0$, $p_i \geq 0$ para toda i, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, para matrices no-negativas.

Tomando en cuenta las características del Modelo Cerrado se prueba que en tal caso $\lambda^* = 1$ y como las matrices de intercambio son no negativas queda resuelto el problema del Modelo Cerrado de Leontief.

2. Reformulación del Modelo Cerrado

En el modelo cerrado de Leontief se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$AP = P$$

Donde A es una matriz no negativa, (esto es, $a_{ij} \geq 0$ para toda i, j) de intercambio y P un vector.

Realmente se trata de un caso particular de vectores propios. - Buscamos un vector propio positivo correspondiente al valor propio $\lambda = 1$.

Dicho sistema tiene una infinidad de soluciones como vimos en - el capítulo II, pero lo que nos interesa es probar la existencia de P tal que AP=P, $p_i \geq 0$ para toda i, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$.

Por otro lado, si tenemos que AP=P entonces A puede pensarse como una transformación que manda a P en si mismo, es decir P - es un punto fijo de A.

Estas dos ideas son la clave para resolver el problema del mo delo cerrado. Por otro lado como las matrices de intercambio son no negativas, lo que vamos a hacer es abordar el problema más en general, es decir, para cualquier matriz no negativa. Por lo tanto nos interesa demostrar.

<u>Teorema</u>

Dada A, una matriz no negativa y diferente de cero, existen - $\lambda \geq 0$ y P tales que $AP = \lambda P$, $p_i \geq 0$ para toda p_i, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$.

Este resultado es conocido como el Teorema de Perron-Frobenius.

Teniendo ésto, bastará con demostrar que λ =1 es el máximo - valor propio de una matriz de intercambio para tener resuelto el modelo cerrado.

3. Aritmética de Matrices No-Negativas y Positivas.

Como trabajaremos con matrices no negativas y positivas es conveniente establecer la siguiente notación:

Una matriz cuyos elementos son no-negativos, es decir, $a_{ij} \geq 0$ para toda i, j la denotaremos por

$$A \geq 0$$

Si todos los elementos de A son positivos diremos que A es - una matriz positiva y la denotaremos por

$$A > 0$$

Si todos los elementos de A son no negativos y existe alguno diferente de cero, la denotaremos por

$$A \geq 0 \qquad A \neq 0$$

Si todos los elementos de A son ceros la denotaremos por

$$A = 0$$

La misma notación se usará para vectores, considerandolos como matrices de orden nxl.

Algunas Propiedades

1.- Si $X \geq 0$, $A \geq 0$, k un real no negativo entonces $kx \geq 0$, - $kA \geq 0$.

2.- Si $X, Y \geq 0$ $A, B \geq 0$ entonces $X+Y \geq 0$ $XY \geq 0$ - - - $A+B \geq 0$ $A\ B \geq 0$ $AX \geq 0$.

3.- Si X, Y son dos vectores entonces $X-Y > 0$, $X - Y \geq 0$, - $X - y \neq 0$, implican $X > Y$, $X \geq Y$, $X \neq Y$ respectivamente y lo mismo para dos matrices A y B.

4.- Si $X \geq Y$, $A \geq 0$ entonces $AX \geq AY$

5.- Si $AX \geq 0$ pata todo $X \geq 0$ se tiene $A \geq 0$

6.- Si $AX > 0$ pata todo $X \geq 0$, $X \neq 0$ se tiene $A > 0$

7.- Si $X > Y$ $A > 0$ entonces $AX > AY$

8.- Si $X \geq 0$ y $B \geq A$ entonces $B_X \geq A_X$

9.- Si $0 \leq X < Y$ entonces existe α, $0 < \alpha < 1$ tal que - $0 \leq X < \alpha Y$

Veamos la demostración de algunas propiedades.

4. Si $X \geq Y$, $A \geq 0$ entonces $AX \geq AY$

Demostración:

Se tiene $x_j \geq y_j$ para toda j y $a_{ij} \geq 0$ para toda $i, j, = 1, 2, \ldots, n$

En particular

$$a_{11} x_1 \geq a_{11} y_1 \; ; \; a_{12} x_2 \geq a_{12} y_2 \; ; \ldots ; \; a_{1n} x_n \geq a_{1n} y_n$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j$$

análogamente se muestra que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad \text{para toda } i$$

Tomando en cuenta que

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n \end{pmatrix}$$

$$AY = \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n \end{pmatrix}$$

Podemos concluir $AX \geq AY$

6.- Si $AX > 0$ para toda $X \geq 0$, $X \neq 0$ entonces $A > 0$.

Demostración:

Como $AX > 0$ para toda $X \geq 0$, $X \neq 0$

en particular

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & + & 0 & + \ldots + & 0 \\ a_{21} & + & 0 & + \ldots + & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ a_{n1} & + & 0 & + \ldots + & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix} > 0$$

Es decir, $a_{i1} > 0 \quad i=1,2, \ldots, n$

Análogamente se muestra que los elementos de todas las columnas de A son positivas, por lo tanto $A \succ 0$

9.- Si $0 \leq X < Y$ entonces existe α, $0 < \alpha < 1$ tal que $0 \leq X < \alpha Y$

Demostración:

Por hipótesis tenemos: $0 \leq x_i < y_i$; por lo que existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que cumplen con: $0 < \alpha_i < 1$, $x_i < \alpha_i y_i$

Sea $\alpha = \max \{\alpha_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i < \alpha_i y_i < \alpha y_i$$

Es decir, $x_i < \alpha y_i$ para toda i, $0 \leq X < \alpha Y$.

Teorema

Si A es una matriz no negativa, en el caso general de vectores y valores propios tenemos:

$$A\ P = \lambda P$$

Si $\lambda \neq 0$ entonces

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right) A \quad P = P$$

En tal caso, P es punto fijo de $\left(\frac{1}{\lambda} A\right)$.

Intentaremos demostrar el teorema de Perron-Frobenius, mostrando primero que bajo ciertas condiciones para $A \geq 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $\left(\frac{1}{\lambda} A\right)$ tiene un punto fijo $P \geq 0$.

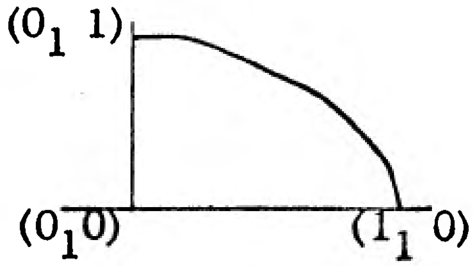
Hay varios teoremas de punto fijo, uno de ellos es el de Brouwer que dice:

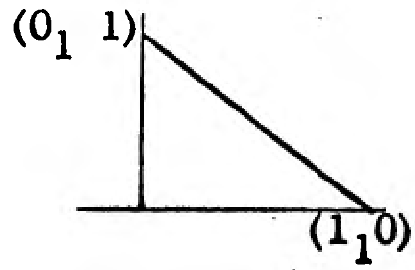
Sea $S \subset R^n$ un conjunto cerrado, acotado y convexo, si φ es una función continua de S en S entonces existe al menos un punto $X \in S$ tal que $\varphi(X) = X$, es decir, X es punto fijo bajo φ.

Por lo tanto necesitamos un conjunto cerrado, acotado y convexo y una función continua del conjunto en si mismo.

Como se quiere que $p_i \geq 0$ para toda i, el conjunto buscado es un subconjunto del primer cuadrante.

En muchos problemas de análisis el círculo unitario facilita la comprensión de lo que sucede en el plano, sin embargo, al restringirnos al primer cuadrante vemos que dicho conjunto es cerrado, acotado pero no convexo.





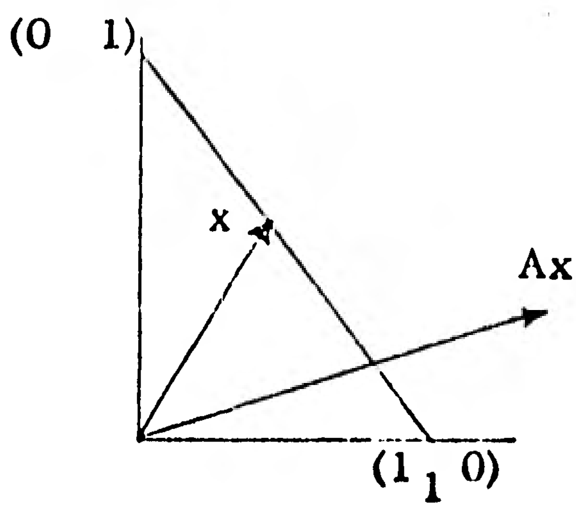
Un conjunto similar es:

$$S = \left\{ x \mid x \in R^2 \qquad x_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1} x_i = 1 \right\}$$

S es cerrado, acotado y convexo.

Veamos cómo definir ψ .

Tomemos $A \geq 0$, $A \neq 0$, al aplicar A a un elemento de S, A lo transforma en algún vector del primer cuadrante. (no necesariamente en S)



Es decir, $A(S) \not\subset S$, pero basta multiplicar Ax por $\dfrac{1}{m(x)}$,

en donde $m(x)$ es un escalar adecuado, para que $\dfrac{1}{m(x)} Ax$ sea un elemento de S.

Si $Ax = 0$ es imposible transformar Ax en un elemento de S por lo tanto tomemos como hipótesis adicional que $Ax \neq 0$, ya que,

$A \geq 0$, $A \neq 0$, $x \in S$ no implican que $Ax \neq 0$, ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $Ax \geq 0$ y $Ax \neq 0$ entonces

$$m(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

donde

$$l_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$$

Ejemplo.

Sea $Ax \geq 0$ $Ax \neq 0$

$$Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

como $Ax \neq 0$ entonces $a + b + c > 0$

$$m(x) = a + b + c > 0$$

$$\frac{1}{m(x)} Ax = \frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b+c} \\ \frac{b}{a+b+c} \\ \frac{c}{a+b+c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 1 \qquad x \in S$$

Sea $\varphi(x) = \frac{1}{m(x)} Ax$

φ es una función de S en S, es continua por ser la composición de dos funciones continuas.

Por ser S un conjunto cerrado acotado y convexo y φ una función continua de S en S. El teorema de Brouwer nos asegura que φ tiene al menos un punto fijo. Sea x^* un punto fijo de φ.

$$x^* = \varphi(x^*), \quad \text{además} \quad \varphi(x^*) = \frac{1}{m(x^*)} Ax^*$$

por lo tanto tenemos:

$$x^* = \frac{1}{m(x^*)} Ax^*, \quad m(x^*)\, x^* = Ax^*$$

es decir $m(x^*) > 0$ es valor propio de A.

Sea $\lambda^* = m(x^*)$ entonces $Ax^* = \lambda^* x^*$, $\lambda^* > 0$

El Teorema de Brouwer nos ayudó a encontrar un punto fijo de φx^* ; $x^* \geq 0$, $x \neq 0$ que resulta ser el vector buscado.

Pero recordemos que tenemos una hipótesis adicional. $(Ax \neq 0)$, veamos qué significa ésta hipótesis adicional.

Para esto, veamos cuándo $Ax = 0$.

Tenemos A_1 x no negativos y diferentes de cero.

Como $X \geq 0$, $X \neq 0$ podemos hacer un reacomodo de sus elementos de tal manera que $X = (\overline{X}_1, \overline{X}_2)^T$ $X_1 > 0$, $X_2 = 0$. Dicho reacomodo determina permutaciones en A. (seguiremos llamandole A a la matriz después de las permutaciones.)

La partición de X determina una partición en A y se tiene:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{11} \overline{X}_1 + A_{12} \overline{X}_2 = 0$$
$$A_{21} \overline{X}_1 + A_{22} \overline{X}_2 = 0$$

Tomando en cuenta que $\overline{X}_2 = 0$ tenemos:

$$A_{11} \overline{X}_1 = 0 \qquad A_{21} \overline{X}_1 = 0$$

Veamos qué sucede cuando se tiene

$$B\,Y = 0 \qquad\qquad Y > 0$$

Si $Y > 0$ y $BY = 0$ entonces $B = 0$

Demostración:

$$BY = \begin{pmatrix} b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2 + \ldots + b_{1n}\,y_n \\ \\ b_{n1}\,y_1 + b_{n2}\,y_2 + \ldots + b_{nn}\,y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es, $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,y_j = 0$ para toda j.

como $y_j > 0$ y $b_{ij} \geq 0$ para toda j, cada término de la suma es cero, es decir $b_{ij}\,y_j = 0$ para toda i, j ; considerando que $y_j > 0$ concluimos que $b_{ij} = 0$ para toda i, j y por lo tanto $B = 0$.

Teníamos que $A_{21}\,\overline{X}_1 = 0$ con $\overline{X}_1 > 0$ por lo tanto $A_{21} = 0$ y A es una matriz reducible.

En resumen tenemos que si $Ax = 0$ entonces A es una matriz reducible.

De lo contrario $(Ax \neq 0)$, tendremos que A es una matriz irreducible y entonces la hipótesis adicional equivale a pedir que A sea irreducible.

5. El Caso Irreducible

Por todo lo anterior podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema I

Si A es una matriz no negativa e irreducible, existen $\lambda^* > 0$, X^*, tales que $AX^* = \lambda^* X^*$ $x_i^* \geq 0$ para toda i, $\sum_{i=1}^{n} x_i^* > 0$.

Hasta el momento hemos resuelto el problema del Modelo Cerrado para el caso de matrices Irreducibles. Veremos que, en este caso podemos probar $X^* > 0$

Teorema II

Si A es una matriz no negativa, irreducible y, $\lambda^* > 0$, $x^* \geq 0$, son tales que $Ax^* = \lambda^* x^*$ entonces $x^* > 0$.

Demostración

Supongamos que podemos hacer un reacomodo de los elementos de x^* de tal manera que $x^* = (\overline{X}_1, \overline{X}_2)^T$ con $\overline{X}_1 > 0$, $\overline{X}_2 = 0$, haciendo las permutaciones simultáneas y la partición de A tenemos:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \lambda^* \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}\ \overline{X}_1 + A_{12}\ \overline{X}_2 = \lambda^*\ \overline{X}_1$$
$$A_{21}\ \overline{X}_1 + A_{12}\ \overline{X}_2 = \lambda^*\ \overline{X}_2$$

$$A_{11}\ \overline{X}_1 = \lambda\ \overline{X}_1 \qquad\qquad A_{21}\ \overline{X}_1 = 0$$

como $\overline{X}_1 > 0$ entonces $A_{21} = 0$ lo cual contradice que A sea irreducible, por lo tanto $\overline{X}_2 > 0$ y $X > 0$.

Propiedades de λ^* para A No Negativa e Irreducible

Veremos que λ^* es el máximo de los valores propios de A.

Sea A^T la matriz transpuesta de A, por ser la segunda irreducible y no negativa, la primera tiene las mismas propiedades y por lo tanto existen $\lambda^\circ > 0$ y $X^\circ > 0$ tales que

$$A^T\ X^\circ = \lambda^\circ\ X^\circ$$

Sea $B = (b_{ij})$ $b_{ij} \geq 0$ $0 \leq B \leq A$

con valor característico k y vector característico asociado Y, entonces $kY = BY$ es decir:

$$\begin{pmatrix} ky_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ky_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2 + \dots + b_{1n}\, y_n \\ \\ b_{n1}\, y_1 + b_{n2}\, y_2 + \dots + b_{nn}\, y_n \end{pmatrix}$$

$$k\ y_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ y_j \ , \ldots , \ k\ y_n = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\ y_j$$

que en general se expresa $k\ y_i = \overline{\sum_{i,j=1}^{n}} b_{ij}\ y_j$

$$/k/\ /\ y_i\ / \leq /k\ y_i\ / = /\ \overline{\sum_{i,j=1}^{n}} b_{ij}\ y_j /$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos:

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n}} |b_{ij}\ y_j| = \overline{\sum_{i,j=1}^{n}} b_{ij} |y_j|$$

como $B = (b_{ij})$ $b_{ij} \geq 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}\ y_j| = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} |y_j|$$

Por lo tanto

$$|k|\ |y_i| \leq \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} |y_j|$$

Si $\overline{Y} = (\ |y_1|\ ,\ |y_2|\ , \ldots ,\ |y_n|\ )^T = (\ \overline{y}_1\ \ldots\ \overline{y}_n\ )^T$ y

considerando que $B \leq A$

$$|k|\ \overline{y}_i \leq \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\ \overline{y}_j \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \overline{y}_j$$

$$|k|\ \overline{Y} \leq B\ \overline{Y} \leq A\ \overline{Y}$$

$$|k|\ (X^o)^T\ \overline{Y} \leq B\,(X^o)^T\ \overline{Y} \leq A(X^o)^T\ \overline{Y} = \lambda^o\ (X^o)^T\ \overline{Y}$$

Como $X^o > 0$, $(X^o)^T > 0$ además $\overline{Y} \neq 0$ por ser valor - propio de B, por lo tanto $(X^o)^T\ \overline{Y} > 0$ $(X^o)^T\ \overline{Y} \in R$

entonces

$$|k| \leq \lambda^o$$

Haciendo $B= A$, $\lambda = k$ se tiene $|\lambda| \leq \lambda^o$ y en particular $\lambda^* \leq \lambda^o$

Por otro lado

Sea $0 \leq B \leq A^T$ $Ax = \lambda^*\ x$

entonces

$$|k|\ x^T\ \overline{Y} \leq B\ x^T\ Y \leq A^T\ x^T\ \overline{Y} = \lambda^*\ x^T\ \overline{Y}$$

como $x^T > 0$, $\overline{Y} \neq 0$ entonces $x^T\ \overline{Y} > 0$ y $|k| \leq \lambda^*$

Haciendo $B = A^T$ se tiene $\lambda^o \leq \lambda^*$

por lo tanto

$$\lambda^o = \lambda^* \qquad y \qquad |\lambda| \leq \lambda^*$$

Hemos demostrado que cualquier λ, valor propio de A es menor o igual que λ^*, ademas de que el valor de λ^* aumenta al - aumentar cualquier coordenada de A ya que

Si $0 \leq A \leq A^1$ entonces $\lambda^* \leq \lambda^1$ donde λ^1 es el - máximo valor propio de A^1.

Las propiedades de λ^* las podemos resumir en:

1. Para cualquier λ, valor caracteristico de A se tiene - $|\lambda| \leq \lambda^*$

2. El valor de λ^* aumenta al aumentar cualquier elemento de A.

6. El Caso Reducible

Sería deseable que para A, una matriz reducible encontraramos $\lambda \geq 0$ y X tales que $Ax = \lambda x$, $x_i \geq 0$ para toda i, - - $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$.

Veamos, por ser A reducible, por medio de permutaciones si-- multáneas podemos reescribirla en su forma triangular.

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1r} \\ & A_{22} & & \\ & & A_{ii} & \\ 0 & & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde los bloques de la diagonal son irreducibles.

Llamemos A_R a la submatriz de la diagonal de máximo valor propio λ_R, como A_R es irreducible existe $X_R > 0$ tal que

$$A_R \; X_R = \lambda_R \; X_R$$

Dicho valor propio resulta ser también valor propio de A^1 ya que

$$|A^1 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} A_{11} & & * \\ & A_{ii} & \\ & & A_{RR} \end{pmatrix} - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda I & & * \\ & A_{ii} - \lambda I & \\ & & A_{rr} - \lambda I \end{vmatrix}$$

Por ser A^1 una matriz triangular

$$|A^1 - \lambda I| = |A_{11} - \lambda I| \; |A_{22} - \lambda I| \; \cdots \; |A_{rr} - \lambda I|$$

y los valores propios de las submatrices pero también valores propios de A, en particular λ_R, haciendo $\lambda_R = \lambda^*$ tenemos que λ^* es el máximo valor propio de A y su valor no decrece al aumentar cualquier elemento de A; la demostración es análoga a la del caso irreducible.

Un caso extremo es cuando la diagonal está formada por bloques de orden $|x|$; λ^* es el máximo de los valores de la diagonal, si éste es positivo se sigue el procedimiento antes descrito y se tiene $\lambda^* > 0$; pero puede darse el caso extremo de que los bloques de la diagonal sean todos ceros

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\lambda^* = \lambda_R = 0$.

A^1 con estas condiciones tiene como vector propio asociado a λ^* , $X^* = (r, o, o, \ldots o)^T$, $r \in = (\mathbb{R} - \{o\})$ y - en particular para $r=1$, $x^* \in S$.

Por lo anterior, hemos encontrado un valor característico — $\lambda^* \geq 0$ de A^1.

Las propiedades de λ^* son:

1. Para cualquier λ , valor característico de A^1 se tiene - $|\lambda| \leq \lambda^*$

2. El valor de λ^* no decrece al aumentar cualquier elemento de A^1

Se demuestran de manera análoga al caso irreducible.

Nos falta encontrar X^* tal que $x_i \geq 0$ para toda i, - -

$\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$ para tener resuelto el problema de matrices no - negativas en el caso reducible.

Podemos construir una sucesión de matrices positivas - - - $\{A_t \mid t \in N\}$ que converjan a la matriz A, donde cada ele— mento de dicha sucesión es una matriz irreducible.

Aplicando el teorema I de este capítulo a cada una de ellas sa bemos que existen $\lambda_t^* > 0$ y $X_t^* \in S$ donde - - - $S = \left\{ X \in R^n \mid x_i \geq 0 . \sum_{i=1}^{n} x_i > 0 \right\}$.

satisfaciendo $A_t \cdot X_t^* = \lambda_t X_t^*$.

S es un conjunto cerrado y acotado y por lo tanto compacto - por lo que, $\{X_t^{*1}\}$ contiene una subsucesión, $\{X_t^{*1} . \mid t \in N\}$ que converge a $X \geq 0$ $X \neq 0$. $\{\lambda_{t1}\}$ debe converger - puesto que también $\lambda_{t1}^* X_{t1}^*$ converge. Sea λ^* el límite de esta sucesión entonces se tiene, $\lambda^{*t1} X^{*t1} = A^{t1} x^{*t1}$ y en el límite $\lambda^* X^* = A X^*$.

Por lo anterior podemos establecer el siguiente teorema

Teorema III

Si A es una matriz no negativa reducible existen $\lambda^* \geq 0$ y $X^* \geq 0$ tales que $AX^* = \lambda^* X^*$, $X_i \geq 0$ para toda i, - - $\sum_{i=1}^{n} X_i > 0$

7. Aplicación al Modelo Cerrado

Al principio de este capítulo dijimos que en el caso cerrado de Leontief buscabamos un vector propio positivo correspondiente al valor propio $\lambda = 1$. Lo que en têrminos de los Teoremas I y II - equivale a decir que $\lambda^* = 1$ en un sistema de ecuaciones con - las características del modelo cerrado. Veamos, sean $X^* \gtrsim 0$ y - $X^* \in S$ tales que $Ax = \lambda^* x$.

$Ax = \lambda^* x$ representa el siguiente sistema:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = \lambda^* x_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = \lambda^* x_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = \lambda^* x_n$$

Sumando todas las ecuaciones tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} x_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{in} x_n = \lambda^*$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Tomando en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ para toda j.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda^* (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Pero $x \in S$ entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ y $1 = \lambda^*$.

Es decir, hemos encontrado P tal que AP = P con $p_i \geq 0$ para toda i, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ con lo cual queda resuelto el problema - - planteado para el modelo cerrado.

CAPITULO IV

RESOLUCION DEL MODELO ABIERTO

1. Introducción

En este capítulo se observa que la resolución del problema del Modelo Abierto depende de la existencia de $(I-C)^{-1}$ con $(I-C)^{-1} \geq 0$; se define como matrices productivas a aquellas matrices que cumplan con las propiedades anteriores y se dan dos caracterizaciones de estas; una que depende de la existencia de un vector $X \gtrsim 0$ -- $X \neq 0$ tal que $X < CX$ y la otra relacionada con el máximo valor propio de C. También se da una forma de encontrar $(I-C)^{-1}$, y se estudian algunas condiciones suficientes para asegurar que C es productiva en términos de los elementos de C y dos resultados importantes de matrices irreducibles.

En conclusión se resuelve el problema planteado para el Modelo Abierto y se dan criterios para saber si la solución existe.

2. Matrices Productivas

El Modelo Abierto plantea el siguiente problema:

Dadas C y D donde C es una matriz de consumo ($c_{ij} \geq 0$ para toda i, j) y $D \geq 0$ el vector cuyas coordenadas representan la de--

manda externa e interna. Es decir,

¿Existitá X con $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$ tal que $(I-C)X = D$? Y en caso de que exista ¿cómo encontrarlo?

Si $(I-C)$ tiene inversa $X = (I-C)^{-1} D$, pero para que X sea un vector con las características anteriores se necesita que sus coordenadas sean no negativas, por lo que, no basta con encontrar un vector solución del sistema $(I-C)X = D$ para tener resuelto el problema. Es decir $X = (I-C)^{-1} D$ no necesariamente es el vector buscado, ya que, si $(I-C)^{-1}$ tiene elementos negativos $(I-C)^{-1} D$ no necesariamente es no negativa.

Ejemplo $D = (1, 0)^T$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (I-C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Para asegurar $X \geq 0$, tomando en cuenta $D \geq 0$, se necesita $(I-C)^{-1} \geq 0$.

Si C es una matriz de consumo $(I-C)^{-1}$ existe y $(I-C)^{-1} \geq 0$ diremos que C es una matriz productiva y al vector $X \geq 0$ tal que - - $X = (I-C)^{-1} D$ lo llamaremos vector producción.

Con matrices productivas se puede satisfacer cualquier demanda externa por lo que sería conveniente tener alguna caracterización de dichas matrices.

3. Una Caracterización de Matrices Productivas

Teorema I

Una matriz de consumo C es productiva si y sólo si existe un vector de producción $X \geq 0$ $X \neq 0$ tal que $X > CX$.

Demostración:

Si C es productiva, existe $(I-C)^{-1} \geq 0$ y para cualquier vector de manda D, existe $X \geq 0$ tal que $(I-C)^{-1} D = X$.

Sea $D > 0$, como $(I-C)^{-1} \geq 0$ entonces $X = (I-C)^{-1} D \geq 0$ y $X \neq 0$. Por otro lado,

$$(I-C) X = D > 0$$

$$X - CX > 0,$$

esto es,

$$X > CX.$$

Antes de ver el recíproco veamos un Lema.

Lema:

Si C es una matriz de consumo y existe un vector $X \geq 0$ tal que $CX < X$ entonces $X > 0$.

Supongamos que no se cumple $X > 0$ y que $X_1 = 0$ entonces

$$C_{11} X_1 + C_{12} X_2 + \ldots + C_{1n} X_n < X_1 = 0$$

Por ser C de consumo $c_{1j} \geq 0$ $j = 1, 2, \ldots, n$ $x_j \geq 0$ - - $j = 1, 2, \ldots, n$ por hipótesis entonces

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} C_{1j} X_j < 0 = X_1 .$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto $X_1 > 0$ y $X > 0$.

Veamos el recíproco.

Tenemos que $CX < X$, por el inciso q de aritmética de Matrices No negativas y positivas sabemos que existe λ, $0 < \lambda < 1$, - tal que

$$CX < \lambda X$$

Si denotamos $C^{\circ} = I$, $CC = C^2$, $C^2 C = C^3$, ..., - - - $C^{n-1} C = C^n$ y $(C_{ij}^{k}) = C^k$ tenemos que es fácil probar que

$$C^k X < \lambda^k X .$$

Es decir

$$0 \leq C_{11}^{k} X_1 + C_{12}^{k} X_2 + \ldots + C_{1n}^{k} X_n < \lambda^k X_1$$

$$\vdots$$

$$0 \leq C_{n1}^{k} X_1 + C_{n2}^{k} X_2 + \ldots + C_{nn}^{k} X_n < \lambda^k X_n$$

Como $C_{ij}^{k} X_j \geq 0$ y $\lambda < 1$

$$\lim_{k \to \infty} (C_{11}^{k} X_1 + C_{12}^{k} X_2 + \ldots + C_{1n}^{k} X_n) = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} C_{11}^{k} X_1 + \lim_{k \to \infty} C_{12}^{k} X_2 + \ldots + \lim_{k \to \infty} C_{1n}^{k} X_n = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} C_{11}^{k} X_1 = 0 , \quad \lim_{k \to \infty} C_{12}^{k} X_2 = 0 , \ldots, \lim C_{1n}^{k} X_n = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} C_{ij}^{k} = 0 \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,n$$

Análogamente $\lim\limits_{k \to \infty} C_{ij}^{k} = 0 \quad i,j = 1,2,\ldots,n$

Lo cual denotaremos por $C^k \to \infty$ cuando $k \to \infty$

En el caso de los reales se tiene

Si $X \in \mathbb{R}$ y $|x| < 1$ entonces

$$(1-X)^{-1} \quad (1-X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} X^k$$

como $|X| < 1$ $\quad (I-X)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} X^k$

Análogamente se prueba por inducción

$$(I-C)\,(I+C+C^2+\ldots+C^{k-1}) = I - C^k$$

Como $C^k \to 0$ cuando $k \to \infty$

$$(I-C)\sum_{k=o}^{\infty} C^k = I$$

$$(I-C)^{-1} = \sum_{k=o}^{\infty} C^k$$

Es decir, $(I-C)^{-1}$ existe, para que C sea productiva falta checar que

$$(I-C)^{-1} \geq 0$$

pero

$$C_{ij} \geq 0\,, \quad C_{ij}^2 \geq 0\,, \ldots, \quad C_{ij}^k \geq 0$$

entonces

$$\sum_{k=o}^{\infty} C^k \geq 0$$

Por lo tanto, si existe un vector de producción $X \geq 0$ tal que $CX < X$ entonces C es productiva.

El teorema I queda probado y se tiene una caracterizaciín de matrices productivas en términos de encontrar un vector X de producción tal que $CX < X$. Este teorema tiene dos corolarios.

Corolario I

Si cada una de las sumas de los renglones de C son menores - que la unidad entonces C es productiva.

Demostración:

Si $$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} < 1 \quad i=1,2,\ldots n$$

entonces para $X = (1,1,\ldots,1)$

$$C_{i1} X_1 + C_{i2} X_2 + \ldots + C_{in} X_n = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} < 1 = X_i$$

Es decir $CX < X$ y C es productiva.

Corolario II

Si la suma de cada columna es menor que la unidad entonces C es productiva.

Demostración:

Si en C la suma de cada columna es menor que la unidad entonces en C^T la suma de cada renglón es menor que la unidad y por - el corolario anterior C^T es productiva, es decir $(I-C^T)$ existe y - es no negativa.

Tomando en cuenta que $I = C^T = (I-C)^T$ y que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ para cualquier matriz cuya inversa exista, entonces

$$(I-C^T)^{-1} = \left((I-C)^T\right)^{-1} = \left((I-C)^{-1}\right)^T \geq 0$$

por lo tanto $(I-C)^{-1}$ existe, es no negativa y por lo tanto C es productiva.

Estos corolarios nos dan algunas condiciones suficientes para que C sea productiva que dependen solo de C, veremos otra caracterización en têrminos de valores propios.

4. Otra Caracterización de Matrices Productivas

Teorema II

Sea C una matriz de consumo. C es productiva si y sólo si $\lambda < 1$ donde λ es el máximo valor propio de C.

Demostración:

Como $C \geq 0$ entonces $C^T \geq 0$ y por los teoremas I y II sabemos que existen $\lambda^* \geq 0$ y Y^* tales que

$$C^T \; Y^* = \lambda^* \; Y^* \qquad Y^* \geq 0 \qquad Y^* \neq 0$$

Sea $X \geq 0$, $X \neq 0$ tal que $CX < X$.

Multiplicando esta desigualdad por $(Y^*)^T$ tenemos:

$$(Y^*)^T \; CX < (Y^*)^T \; X$$

Tomando en cuenta que si $C^T Y = \lambda^* Y$ entonces - - - - $(Y^*)^T C = \lambda^* (Y^*)^T$, vemos que $\lambda^* (Y^*)^T X = (Y^*)^T X$, - pero $(Y^T)^* X > 0$ pues $X > 0$ y $Y \geq 0$, $Y \neq 0$. Por lo tanto

$$\lambda^* < 1$$

En el recíproco se tiene, $\lambda^* < 1$; por ser $C \geq 0$ existe - - $X \geq 0$ $X \neq 0$ tal que $CX = \lambda X$ y tenemos $CX = \lambda X < X$.

Por lo tanto C es productiva.

Con ésta caracterización basta con calcular λ^* , si $\lambda^* < 1$ entonces $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ y $X = (I-A)^{-1} D$, en caso contrario se sabe que no hay solución.

Recapitulación.

Si C es una matriz de consumo las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. Existe $(I-C)^{-1}$ tal que $(I-C)^{-1} \geq 0$

2. Existe $X \geq 0$ $X \neq 0$ tal que $CX < X$

3. $\lambda < 1$ donde λ es el máximo valor propio de C.

Por el momento se tienen dos caracterizaciones de matrices productivas pero sería conveniente tener condiciones suficientes para poder afirmar si una matriz es productiva o no en términos de los ele mentos de ésta.

5. Condiciones Suficientes

1. Los corolarios I y II nos dan condiciones suficientes para afirmar si una matriz es productiva con tan solo checar que la suma de todos los renglones (columnas) es menor que la unidad.

2. Una industria en desventaja. Supongamos que solo una industria no puede tener utilidades, esto es, la suma de una columna es la unidad y las sumas de todas las demás son menores que la unidad. ¿Es C productiva?

Por ser C no negativa existen $\lambda \geq 0$ y $X \geq 0$ tales que $CX = \lambda X$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$. Representando el sistema en forma explícita y sumando todas las ecuaciones tenemos:

$$
\begin{array}{l}
C_{11} X_1 + C_{12} X_2 + \ldots + C_{1n} X_n = \lambda X_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
C_{n1} X_1 + C_{n2} X_2 + \ldots + C_{nn} X_n = \lambda X_n \\
\hline
\sum_{i=1}^{n} C_{i1} X_1 + \sum_{i=1}^{n} C_{i2} X_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} C_{in} X_n = \\
\qquad \lambda (X_1 + \ldots + X_n)
\end{array}
$$

Supongamos que la primera columna es la que suma uno y que $k = \sum_{i=1}^{n} X_i$ entonces

$$X_1 + \sum_{i=1}^{n} C_{i2} X_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} C_{in} X_n = \lambda k$$

Si toda $X_i \neq 0$, el lado izquierdo de la igualdad es menor que k , ya que

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} < 1 \quad i=2,3,\dots,n$$

por lo tanto

$$k > X_1 + \sum_{i=1}^{n} C_{i2} X_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} C_{in} X_n = \lambda k$$

Es decir $k > \lambda k$.

Como $k > 0$ entonces $1 > \lambda$ y aplicado el Teorema II de este capítulo tenemos que C es productiva.

3. Una industria en ventaja. Supongamos que solo una industria puede tener utilidades, esto es, la suma de una columna es menor que la unidad y la suma de todas las demas columnas es la unidad. ¿Es C productiva?

Supongamos que la suma de la última columna es menor que la unidad, entonces si $X_i \neq 0$ para toda i tenemos:

$$k > X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} C_{in} X_n = \lambda k$$

Como $k > 0$ entonces $1 > \lambda$ y por lo tanto C es productiva.

En las condiciones 2 y 3 pedimos que $X_i \neq 0$ para toda i ya que no es suficiente con pedir que la suma de alguna columna sea menor que la unidad para poder concluir que C es productiva.

Ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I-C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que se tiene es:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} X_1 & = & \lambda X_1 \\ X_2 & = & \lambda X_2 \\ \hline \frac{1}{2} X_1 + X_2 & = & \lambda (X_1 + X_2) \end{array}$$

En la demostración pedíamos $X_i \neq 0$ para toda i, veamos qué sucede en este sistema.

Los valores propios son $\frac{1}{2}$, 1 y tenemos como vector propio $X = (o, 1)^T$ correspondiente a $\lambda = 1$, por lo tanto $X_1 = 0$ y $k = X_1 + X_2 \not> \frac{1}{2} X_1 + X_2$

Para asegurar que $X_i \neq 0$ para toda i es suficiente con pedir -

que C sea irreducible por que de esta manera por el teorema I del capítulo III, sabemos que $X_i > 0$ para toda i , por lo que las condiciones 2 y 3 quedan expresadas como:

Teorema III

Si C es una matriz irreducible y si la suma de todas las columnas es la unidad o menor que la unidad, con al menos la suma de una columna menor que la unidad, entonces C es productiva.

6. <u>Dos Resultados sobre el Caso Irreducible</u>

1. Si C es una matriz productiva e irreducible entonces $X > 0$

Haciendo $X = (\overline{X}_1 , \overline{X}_2)^T$ donde $\overline{X}_1 > 0$ y $X_2 = 0$ tenemos

$$(I-C)^1 X = \begin{pmatrix} I-C_{11} & -C_{12} \\ -C_{21} & I-C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = D \geqq 0$$

$$(I-C_{11})\,\overline{X}_1 = D_1 \geq 0$$

$$- C_{21}\,\overline{X}_1 = D_2 \geq 0$$

Como $\overline{X}_1 > 0$ entonces $C_{21} = 0$ lo que contradice que C sea irreducible.

2. Si C es una matriz productiva e irreducible entonces - - -

$$(I-C)^{-1} > 0$$

Sea $D_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ por el resultado anterior.

$$(I-C)\,X_1 = D_1 \qquad X_1 = (I-C)^{-1} \; D_1 > 0$$

Es decir, que los elementos de la primera columna de $(I-C)^{-1}$ - son positivos.

Tomando

$D_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $D_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots 0) \ldots$

se muestra que los elementos de $(I-C)^{-1}$ son todos positivos, por lo - tanto

$$(I-C)^{-1} > 0$$

BIBLIOGRAFIA

1	Anton Howard Rorres Chris	Aplicaciones de Algebra Lineal. Editorial Limusa México 1979.
2	Debreu Gerard Herstein I.N.	Nonnegative Square Matrices Econométrica 21, 1953.
3	Gale David	The Theory of Lineas Economic Models. Mc. Graw Hill Book Co. Inc. New York 1969.
4	Gantmacher F.R.	The Theory of Matrices Chelsea Publishing Company New York. Vol. II
5	Johnston John B. Price G. Baley Wan Vleck Fred	Lineal Equations and matrices Addison Wesley Publishing Co. Inc. Reading, Massachusetts.
6	Klein Erwuin	Mathematical Methods in Theoretical Economics Academic Press New York - London.
7	Leontief Wassily	Análisis Económico Input - Output. Biblioteca de Ciencia Económica Colección Demos Editorial Ariel.

8	Leontief Wassily et al.	The Future of the World Economy. New York Oxford University Press 1977.
9	Passinetti L.L.	Lectures on the Theory of Production. Mac. Millon Press 1977.