

3) 2/1/81



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**FACULTAD DE CIENCIAS**

# PUNTOS HOMOCLINICOS

## TESIS

para obtener el título de

# MATEMÁTICO

**HECTOR FIDENCIO SANCHEZ MORGADO**

MEXICO, D.F. 1981



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## I N T R O D U C C I O N

El objetivo del presente trabajo es presentar en forma más o menos directa y detallada uno de los fenomenos más interesantes que exhibe la estructura de órbitas de un difeomorfismo: la existencia de puntos homoclínicos.

Hasta donde sé, el primero en considerar esta situación fue Poincaré (quien le dió nombre a dichos puntos), al estudiar el problema restringido de los 3 cuerpos [9]. El hizo ver la complicación de las órbitas a consecuencia de la presencia de puntos homoclínicos, de tal manera que ni siquiera pretendió indicar graficamente el comportamiento del difeomorfismo. G.D. Birkhoff en sus trabajos acerca de difeomorfismos de superficies, estudió puntos homoclínicos y noto en [6] la relación entre ellos y el corrimiento (llamado de Bernoulli) que Hadamard habia usado para estudiar flujos geodésicos en variedades bidimensionales de curvatura constante negativa. Smale estableció en forma más clara esta relación, basandose en su estudio del mapeo conocido como "herradura". El mismo comentó que habia llegado a la herradura al tratar de obtener una imagen geométrica para una variante de la ecuación de vander Pol considerada por Levinson en su artículo [11]. Las ideas de Smale fueron explotadas ampliamente por Alekseev en [12], poniendose de manifiesto la importancia y riqueza del tema.

Las exposiciones acerca de puntos homoclínicos son en general poco accesibles debido en gran medida a que se incluye mucha información que resulta gratuita en el estudio de este tema. Además, casi no aparecen exposiciones más o menos detalladas de ejemplos donde ocurra el fenómeno homoclínico. Este trabajo pretende eliminar esos inconvenientes y considero que puede comprenderlo cabalmente cualquiera que conozca los aspectos básicos de la teoria cualitativa de E.D.O.\* La exposición se ha organizado de la siguiente manera.

El capítulo 1 comienza indicando la manera en que la dinámica de difeomorfismos entra en el estudio cualitativo de flujos de campos vectoriales. A continuación se consideran los puntos periódicos hiperbólicos y sus variedades asintóticas (estables e inestables), presentandose después un ejemplo que motiva la definición de punto homoclínico. Puesto que todos los puntos periódicos en este ejemplo son inestables, es muy sencillo exhibir aquí las diversas situaciones que acompañan a los puntos homoclínicos en el caso general. Después de dar la definición se discute en forma intuitiva, como la presencia de puntos homoclínicos obliga a las variedades asintóticas a

tener cierto comportamiento.

En el capítulo 2 se expone un ejemplo en el cual a diferencia del dado en el capítulo 1 hay al menos un punto periódico. La demostración de la existencia de órbitas homoclínicas es difícil y requiere de numerosos cálculos que se presentan en 2 apéndices al final del capítulo.

El capítulo 3 es una exposición del mencionado teorema de Smale, que da una buena información del comportamiento de un difeomorfismo en la presencia de puntos homoclínicos. Para finalizar el capítulo demostraremos una de las consecuencias del teorema: no existen integrales.

Hemos relegado para un apéndice un resultado cuya demostración es demasiado larga e intrincada para presentarla con detalle en un capítulo de este trabajo. Nos concretamos simplemente a bosquejar la demostración de este resultado que se refiere a la existencia de puntos homocínicos para difeomorfismos analíticos que preservan área y están definidos en la vecindad de un punto fijo elíptico en el plano. Se comentan también, aspectos muy interesantes acerca de dichos difeomorfismos.

\* Es suficiente con los libros  
[H-S] Hirsch-Smale. Differential equations, dynamical systems, and l. a.  
V.I. Arnold. Ordinary differential equations

## CAPITULO UNO : DEFINICIONES

Consideremos el flujo  $\Phi_t$  definido sobre una variedad diferenciable  $M$  por un campo vectorial  $X$ . Supongamos que  $\Phi_t$  posee una órbita periódica  $\Gamma \subset M$ . Sean  $p \in \Gamma$  y  $S$  una subvariedad de codimensión 1 tales que  $S \cap \Gamma = \{p\}$  y  $S$  es transversal a  $\Gamma$ , o sea que  $X(p) \notin T_p(S)$ . Por los teoremas sobre la dependencia respecto de las condiciones iniciales podemos encontrar una vecindad  $V \subset S$  de  $p$  y un difeomorfismo (llamado "mapeo de Poincaré")  $P: V \rightarrow S$  tal que si  $q \in V$  entonces  $q$  y  $P(q)$  son cortes consecutivos de una misma órbita con  $S$ . Varios problemas acerca del comportamiento cualitativo de  $\Phi_t$  en una vecindad de  $\Gamma$  pueden resolverse mediante el estudio del mapeo de Poincaré. Por ejemplo, para determinar la existencia de órbitas periódicas hay que buscar puntos  $q \in V$  tales que  $P^n(q) = q$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  (tales puntos se llaman periódicos y escribimos  $q \in \text{per}(P, n)$ )

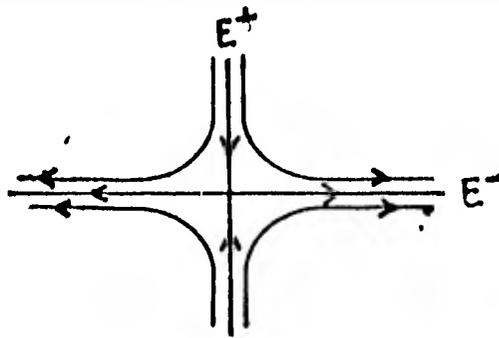


Introduciremos algunos conceptos importantes en el estudio de la dinámica de difeomorfismos, omitiendo otros no menos importantes pero que no serán usados en esta monografía.

### 1.- PUNTOS PERIODICOS HIPERBOLICOS

Consideremos un automorfismo lineal  $A: E \rightarrow E$  de un espacio vectorial de dimensión finita. Si todos los eigenvalores  $\lambda_i$  de  $A$  satisfacen  $|\lambda_i| \neq 1$ , diremos que  $A$  es hiperbólico. En particular  $A$  es una contracción si  $|\lambda_i| < 1$  y  $A$  es una expansión si  $|\lambda_i| > 1$ , para toda  $i$ . Se tiene entonces que el inverso de una expansión es una contracción y viceversa.

Notemos que si  $A: E \rightarrow E$  es hiperbólico, hay una descomposición canónica  $E = E^+ \oplus E^-$  donde  $E^+$  es el espacio invariante correspondiente a los eigenvalores con módulo menor que 1 y  $E^-$  el espacio invariante para los otros eigenvalores. De esta manera  $A|_{E^+}$  es una contracción y  $A|_{E^-}$  es una expansión y nosotros podemos representar esquemáticamente las órbitas bajo  $A$  en la forma



Cada órbita  $\{A^n(p) | n \in \mathbb{Z}\}$  está contenida propiamente en una de las variedades invariantes dibujadas.

Consideraremos ahora un difeomorfismo  $f: M \rightarrow M$  de una variedad diferenciable, con un punto fijo  $p \in M$ . Diremos que  $p$  es un punto fijo hiperbólico si  $df_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$  es hiperbólico.

Extendiendo la definición llamaremos a  $q \in \text{per}(f, n)$  hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de  $f^n$ .

**Traslademos ahora estos conceptos al caso de flujos.** Conservando la notación utilizada al principio del capítulo, supongamos que  $\Gamma$  es  $\omega$ -periódica. En tal caso  $X(p)$  es un vector fijo del automorfismo  $(d\Phi_\omega)_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$  y así,  $1$  es un eigenvalor de  $(d\Phi_\omega)_p$ . Se puede escoger una sección transversal  $S$  a través de  $p$  de tal forma que el mapeo de Poincaré  $P$  correspondiente, tiene parte lineal  $dP_p = d\Phi_\omega|_{T_p(S)}$

DEFINICION. Sean  $1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los eigenvalores de  $(d\Phi_\omega)_p$ , entonces diremos que la órbita periódica  $\Gamma$  es hiperbólica si  $|\lambda_j| \neq 1$  para  $j=2, \dots, n$ . Esta definición no depende del punto  $p \in \Gamma$ , porque si  $q = \Phi_s(p)$  para algún  $s \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(d\Phi_\omega)_q = (d\Phi_s)_p \circ (d\Phi_\omega)_p \circ (d\Phi_s)_p^{-1}$$

## 2.- Conjugación

Es apenas necesario mencionar la importancia de poder obtener información sobre la dinámica de un difeomorfismo, a partir del conocimiento de ella para otro difeomorfismo. Por eso los conceptos que introducimos en esta sección no resultan extraños.

Diremos que dos difeomorfismos  $f: M \rightarrow M$ ,  $g: N \rightarrow N$  son semiconjugados si hay una función continua  $h: M \rightarrow N$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

En tal caso tendremos que  $hf^n = g^n h$  para cualquier entero  $n$ . Por lo tanto  $h$  mapea puntos periódicos en puntos periódicos; además, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{kn}(p) = q$  entonces también  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{kn}(h(p)) = h(q)$ , y así, diversas propiedades de la estructura de órbitas de  $f$  se trasladan a  $g|_{h(M)}$ .

En el caso en que  $h$  es un homeomorfismo decimos que  $f$  y  $g$  son topologicamente conjugados o equivalentes.

### 3.- VARIETADES ASINTÓTICAS

De acuerdo al teorema de Hartman (ver [1]), en una vecindad de un punto fijo hiperbólico  $p$ , un difeomorfismo  $f$  es topológicamente equivalente a su parte lineal. Consecuentemente hay dos variedades invariantes (por lo pronto  $C^0$ )  $W_{loc}^+(p)$ ,  $W_{loc}^-(p)$  en las cuales  $f$  es una contracción, expansión respectivamente. Estas variedades pueden continuarse tomando

$$W^+(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^+(p)) \quad W^-(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^-(p))$$

En forma precisa y completa tenemos el siguiente

#### TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE (T.V.E.) PARA DIFEOMORFISMOS

Supongamos que  $p \in M$  es un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo  $f: M \rightarrow M$  y que  $T_p(M) = E^+ \oplus E^-$  es la descomposición correspondientes bajo  $df_p$ . Entonces existen, una variedad  $W^+(p)$ , una contracción  $g: W^+(p) \rightarrow W^+(p)$  con punto fijo  $q$  y una inmersión inyectiva  $J: W^+(p) \rightarrow M$  tales que  $J(q) = p$ ,  $dJ_q: T_q(W^+(p)) \rightarrow T_p(M)$  es un isomorfismo sobre  $E^+$  y  $Jg = fJ$ . Más aún,  $J(W^+(p))$  puede caracterizarse como el conjunto de las  $x \in M$  con la propiedad de que  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = p$ .

Nosotros identificaremos puntos bajo  $J$ , si bien  $J$  no es en general un homeomorfismo (como veremos en el ejemplo de abajo) y por lo tanto  $W^+(p)$  y  $J(W^+(p))$  pueden tener distintas topologías. Por otra parte esto es lo único en que difieren y ambas son llamadas la variedad estable de  $f$  a través de  $p$ .

La variedad inestable  $W^-(p)$  de  $f$  a través de  $p$ , se define como la variedad estable de  $f$  a través de  $p$ . Con la anotación del teorema,  $W^-(p)$  pasa por  $p$  y es tangente a  $E^-$ .

Para un punto  $q \in \text{per}(f, m)$  hiperbólico, se definen las variedades estable e inestable  $W^+(q)$ ,  $W^-(q)$  como las variedades correspondientes para  $q$  como punto fijo de  $f^m$ .

Ahora consideraremos un teorema análogo para flujos. Antes que nada daremos una definición: sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $\Gamma \subset M$  una órbita periódica del flujo  $\Phi_t$  definido en  $M$ . Diremos que  $\Phi_t(x) \rightarrow \Gamma$  cuando  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) si  $\Phi_t(x)$  está definido para todo  $t$  positivo (negativo) y para cada  $U$  vecindad abierta de  $\Gamma$  hay un  $T > 0$  ( $T < 0$ ) tal que  $\Phi_t(x) \in U$  para  $t > T$  ( $t < T$ ).

Definimos la variedad estable de  $\Gamma$  como

$$W^+(\Gamma) = \{x \in M \mid \Phi_t(x) \rightarrow \Gamma \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

y similarmente la variedad inestable de  $\Gamma$  como

$$W^-(\Gamma) = \{x \in M \mid \Phi_t(x) \rightarrow \Gamma \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}$$

T.V.E. PARA ORBITAS PERIÓDICAS DE FLUJOS

Sea  $X$  un campo vectorial diferenciable definido sobre una variedad diferenciable  $M$  compacta (para asegurar que  $\Phi_t$  sea completo). Si  $\Gamma$  es una órbita periódica hiperbólica para  $X$ , entonces  $W^+(\Gamma)$  y  $W^-(\Gamma)$  son subvariedades diferenciables inmersas de  $M$ .

Como ocurre usualmente, primero hay que demostrar una versión local, la cual depende de una buena elección de coordenadas. Para referencia posterior, mencionaremos algo sobre esta elección en el caso en que  $M$  es orientable. (Ver [2])

Llamaremos pseudocarta para  $\Gamma$  a una pareja  $(h, U)$  donde  $U$  es una vecindad de  $\Gamma$  en  $M$  y  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$  es un mapeo sobre  $U$  tal que

(i)  $h$  es un difeomorfismo local (ii)  $h(\mathbb{R} \times \{0\}) = \Gamma$

Si además  $h(\theta, x)$  es  $\omega$ -periódica en  $\theta$  diremos que  $(h, U)$  es periódica

Se demuestra que hay una pseudocarta periódica  $(h, U)$  para  $\Gamma$ , tal que en esta pseudocarta, el representante local de  $X$ , que denotaremos  $X_h = (X_1, X_2)$  con  $X_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

tiene la forma

$$(1) \quad \begin{aligned} X_1(\theta, x) &= 1 + Q(\theta, x) \\ X_2(\theta, x) &= B(\theta) x + R(\theta, x) \end{aligned}$$

donde  $B(\theta) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $Q(\theta, 0) = 0$ ,  $R(\theta, 0) = 0$ ,  $D_2 R(\theta, 0) = 0$  para toda  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $B, Q, R$  son  $\omega$ -periódicas en  $\theta$

El flujo del campo vectorial  $(1, B(\theta)x)$  tiene la forma

$$\Phi_t(\theta, x) = (\theta + t, \varphi_t(\theta) x)$$

donde  $\varphi_t(\theta) \in GL(\mathbb{R}^n)$

Hay un  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\varphi_{2\omega}(0) = \exp(2\omega A)$  y se demuestra que  $P(\theta) = \exp(\theta A) [\varphi_\theta(0)]^{-1}$  es  $2\omega$ -periódica

Mediante el cambio de coordenadas  $(\theta, x) \rightarrow (\theta, P(\theta)x)$ , (1) es llevada a la forma

$$(2) \quad \begin{aligned} X_1(\theta, x) &= 1 + Q(\theta, x) \\ X_2(\theta, x) &= Ax + R(\theta, x) \end{aligned}$$

donde  $Q$  y  $R$  satisfacen las mismas condiciones que en (1) excepto que ahora son  $2\omega$ -periódicas. Mas aún,  $\Gamma$  es una órbita periódica hiperbólica si y solo si  $A$  no tiene eigen-valores en el eje imaginario.

#### 4.- UN EJEMPLO

Como ilustración del posible comportamiento de las variedades asintóticas consideraremos ahora un difeomorfismo en el toro  $T^2$ . Recordemos que una manera de describir  $T^2$  es identificando parejas de puntos en  $R^2$  que difieran por elementos de  $Z^2$ , es decir tomar  $T^2 = R^2/Z^2$ . En tal caso, la proyección canónica  $\pi: R^2 \rightarrow T^2$ , nos servirá para dar coordenadas locales.

Un mapeo  $T^2 \rightarrow T^2$  puede definirse a través de otro mapeo  $F: R^2 \rightarrow R^2$  (llamado su levantamiento) mediante la igualdad  $f(\pi(z)) = \pi(F(z))$  siempre y cuando para toda  $z \in R^2, m \in Z^2$  se tenga que  $F(z+m) - F(z) \in Z^2$ . En tal caso,  $F$  nos servirá como representante local de  $f$ . Si  $F$  es un difeomorfismo,  $f$  también lo será si es inyectivo, o sea, si  $F(z) - F(y) \in Z^2 \implies z - y \in Z^2$ . Resumiendo, un difeomorfismo  $F: R^2 \rightarrow R^2$  induce un difeomorfismo  $T^2 \rightarrow T^2$  si para cada  $z \in R^2$

$$(1) \quad F(z+m) - F(z) \in Z^2 \iff m \in Z^2$$

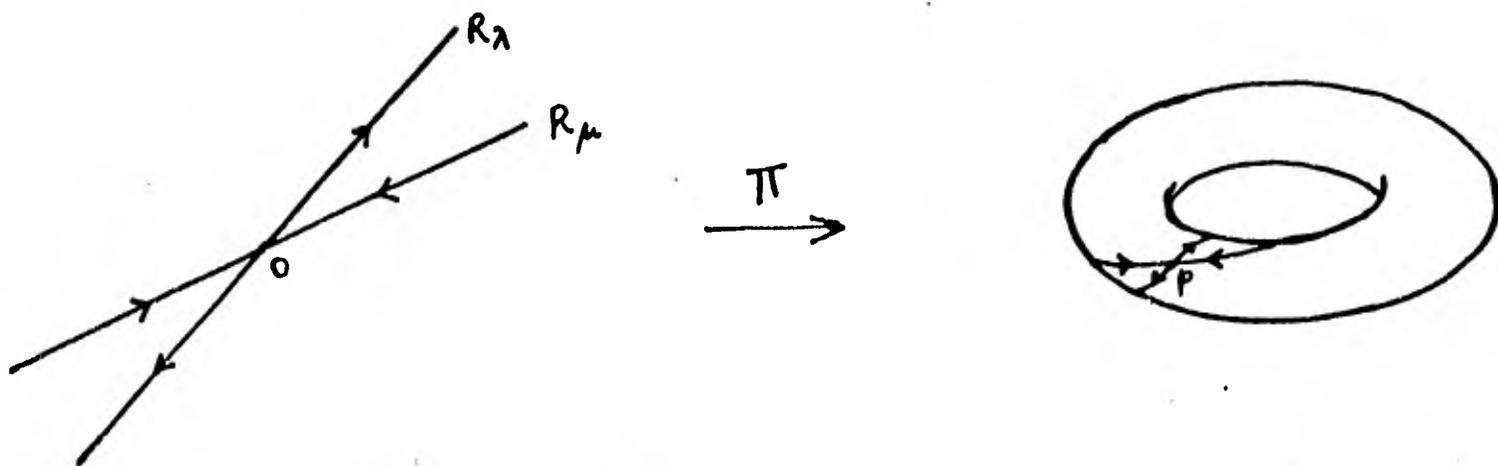
Sea  $L$  un automorfismo lineal de  $R^2$ , cuya matriz en la base usual tiene las siguientes propiedades

- (a) Entradas enteras
- (b) Determinante  $\pm 1$
- (c) Ningún eigenvalor con módulo 1

Es fácil verificar que  $L$  satisface la condición (1) y que por lo tanto define un difeomorfismo  $f: T^2 \rightarrow T^2$ , el cual tiene a  $p = \pi(0)$  como punto fijo.

Si  $\lambda$  y  $\mu$  son los eigenvalores de  $L$  entonces  $\lambda\mu = \det L = \pm 1$ . Esto junto con (c) implica que  $\lambda$  y  $\mu$  son reales y, digamos,  $|\lambda| > 1 > |\mu| > 0$ . Sean  $R_\lambda$  y  $R_\mu$  las rectas invariante correspondientes a  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente, entonces  $f(\pi(R_\lambda)) = \pi(L(R_\lambda)) = \pi(R_\lambda)$  y análogamente para  $\mu$ . Por otra parte, para cualquier  $q \in R_\mu$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(q) = 0$ , y así  $f^n(\pi(q)) = \pi(L^n(q)) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Análogamente si  $q \in R_\lambda$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(\pi(q)) = p$ .

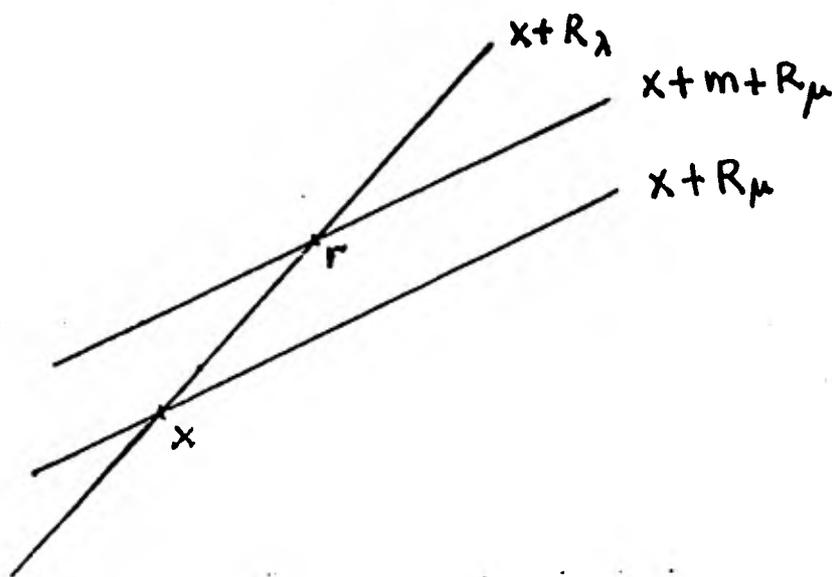
Tenemos así que  $\pi(R_\mu)$  y  $\pi(R_\lambda)$  son las curvas estable e inestable correspondientes al punto fijo  $p$ .



Si  $R_\lambda$  tuviera pendiente racional, se tendría que  $\pi(R_\lambda)$  es una curva cerrada. Como  $L$  expande uniformemente a  $R_\lambda$ ,  $f$  también expande cualquier segmento de la curva invariante  $\pi(R_\lambda)$  y así, no podría ser inyectiva. Por lo tanto  $R_\lambda$  debe tener pendiente irracional y en consecuencia  $\pi(R_\lambda)$  es densa en  $T^2$ . Un razonamiento analogo (aplicado a  $f^{-1}$ ) prueba lo mismo para  $\pi(R_\mu)$ .

Consideremos otros puntos periódicos (demostraremos que hay muchos).  $\pi(x) \in \text{per}(f, n)$  si y solo si  $L^n(x) - x \in Z^2$ . En tal caso  $\pi(x+R_\mu)$  y  $\pi(x+R_\lambda)$  son las curvas estable e inestable para el punto periódico  $\pi(x)$ . En efecto, sea  $m = L^n(x) - x$ ; si  $y = x + z$  con  $z \in R_\mu$  entonces  $L^n(y) = L^n(x) + L^n(z) = x + m + L^n(z)$ , y así,  $f^n(\pi(y)) = \pi(L^n(y)) = \pi(x + L^n(z))$ , de donde,  $\pi(x+R_\mu)$  es invariante bajo  $f^n$ . En general, tendremos que  $f^{kn}(\pi(y)) = \pi(x + L^{kn}(z))$  y así  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(\pi(y)) = \pi(x)$ . Analogamente si  $y \in x + R_\lambda$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-kn}(\pi(y)) = \pi(x)$ .

Observemos que ya que una curva estable y una inestable corresponden a rectas con diferente pendiente, las primeras siempre se intersectan. Si las curvas corresponden al mismo punto periódico  $\pi(x)$  nosotros sabemos que este punto es trivialmente un punto de intersección; lo interesante es que ya que  $\pi(x+R_\mu) = \pi(x+m+R_\mu)$  con  $m \in Z^2 \setminus \{0\}$  se tiene que la curva estable  $\pi(x+R_\mu)$  intersecta a la curva inestable  $\pi(x+R_\lambda)$  en un punto  $\pi(r) \neq \pi(x)$  (si  $r-x$  estuviera en  $Z^2$ ,  $R_\lambda$  tendría pendiente racional). Este punto  $\pi(r)$  es lo que se conoce como punto homoclínico.



Como apuntó Poincaré, y elaboró más tarde Birkhoff tales puntos homoclínicos complican considerablemente la estructura de órbitas del difeomorfismo. Por el momento, demostraremos que nuestro ejemplo tiene el siguiente comportamiento:

TEOREMA. El conjunto de puntos periódicos de  $f$  es denso en  $T^2$   
 Dem. Sea  $A_n = \left\{ \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) \mid p, q \in Z \right\}$ . Por (a),  $A_n$  es invariante bajo  $f$ . Como  $\pi(A_n) = \pi(A_n \cap [0, 1]^2)$ , consta de  $n^2$  términos. Si  $z \in \pi(A_n)$  entonces la órbita de  $z$  está contenida en  $\pi(A_n)$  y así,  $z$  debe ser un punto periódico. Por lo tanto todos los puntos de  $\pi(O^2)$  son periódicos.

Observese que si  $\pi(r) \neq p$  es un punto de intersección de  $\pi(R_\mu)$  y  $\pi(R_\lambda)$  entonces todos los puntos de  $\pi(r+Q^2)$  son homoclínicos y así el conjunto de puntos homoclínicos es denso en  $T^2$

### 5.- PUNTOS HOMOCLINICOS

DEFINICION. Sea  $f:M \rightarrow M$  un difeomorfismo. Sean  $p$  y  $q$  puntos periódicos hiperbólicos en una misma órbita. Un punto  $h$  es llamado homoclínico, si  $h \in W^+(p) \cap W^-(q) - \{p, q\}$

Si la intersección es transversal,  $W^+(p) \pitchfork W^-(q)$ , el punto  $h$  se llama transversal.

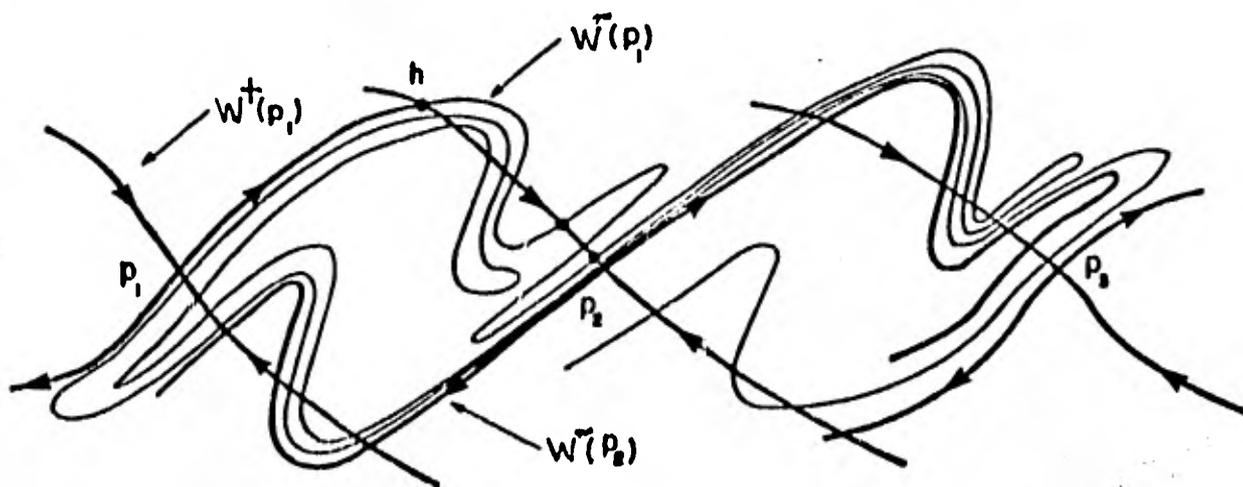
La definición de  $h$  homoclínico es equivalente a que sea doblemente asintótico, es decir existen enteros  $m$  y  $k$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{mn} f^{-k}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-mn}(h)$$

donde  $p, q \in \text{per}(f, m)$  y  $p = f^k(q)$

Se sigue de esta propiedad que la órbita de un punto homoclínico consta de puntos homoclínicos.

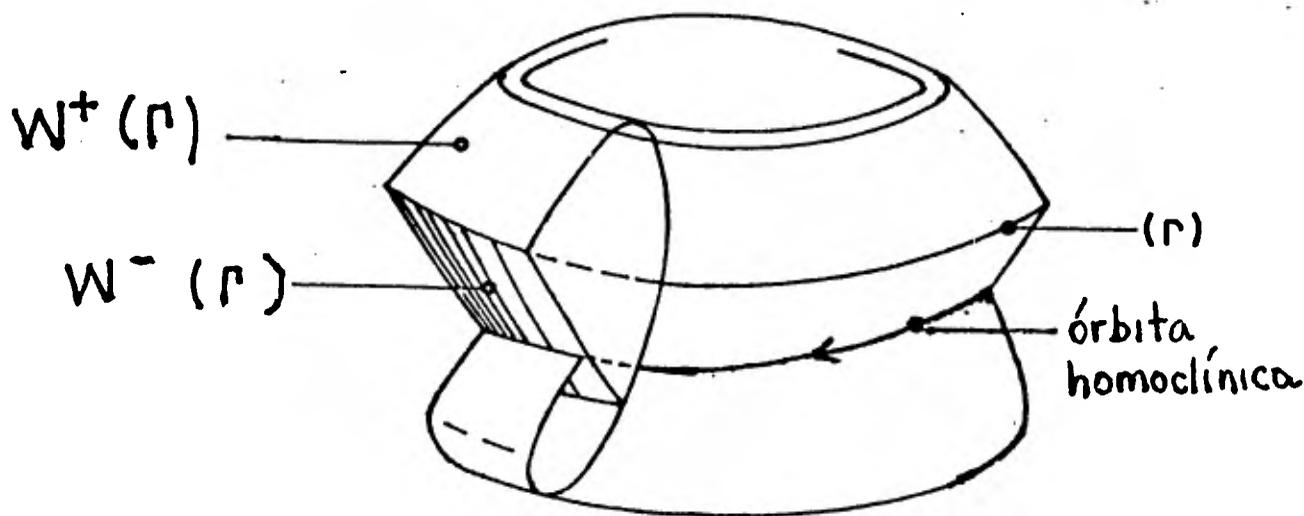
A manera de ilustración consideremos 3 puntos periódicos hiperbólicos  $p_i$  ( $i=1,2,3$ ), que pertenecen a una órbita donde las correspondientes variedades estables e inestables se intersectan transversalmente. El hecho de que la órbita de un punto homoclínico (como por ejemplo,  $h \in W^-(p_1) \cap W^+(p_2)$ ) consiste de puntos homoclínicos obliga a  $W^-(p_1)$  a oscilar hacia  $p_1$  y ya que  $h$  es un punto de intersección transversal,  $W^-(p_1)$  es presionada junto con su tangente, hacia  $W^-(p_2)$  y consecuentemente intersecta  $W^+(p_1)$  y  $W^+(p_3)$  transversalmente; entonces oscila hacia  $p_1$  y  $p_3$ . Debido a que  $W^-(p_1)$  es una subvariedad inmersa, no puede autointersectarse y está forzada por lo tanto a doblarse y a apilarse sobre si misma oscilando más y más - hasta que finalmente lo hace hacia todos los puntos periódicos hiperbólicos de la órbita. Una situación similar tiene lugar para  $W^+(p_1)$ ,  $W^-(p_2)$ ,  $W^+(p_2)$ ,  $i \geq 2$ . Así obtenemos una infinidad de puntos homoclínicos con órbitas distintas, una especie de malla de puntos homoclínicos.



A primera vista, es difícil analizar situaciones en las que aparecen puntos homoclínicos. No obstante, como demostró Birkhoff [8] el comportamiento de un difeomorfismo cerca de un punto homoclínico puede describirse mediante la dinámica simbólica. Smale [7] obtuvo este resultado observando que una iterada del difeomorfismo es un mapeo geométrico que él estudió en forma sistemática. En el capítulo tres presentamos este teorema en el caso de un difeomorfismo del plano.

Consideremos ahora el concepto de órbita homoclínica de un flujo. Sea  $\Gamma$  una órbita periódica hiperbólica del flujo  $\Phi_t$  definido en una variedad diferenciable  $M$ . Si  $W^+(\Gamma)$  y  $W^-(\Gamma)$  se intersectan en el punto  $p \in M$ , entonces la órbita  $\{\Phi_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  está contenida en  $W^+(\Gamma) \cap W^-(\Gamma)$  y se llama órbita homoclínica.

Supongamos que  $M$  es una región de  $\mathbb{R}^3$ . Para obtener una idea del comportamiento de las superficies asintóticas  $W^+(\Gamma)$  y  $W^-(\Gamma)$  es útil observar que su intersección con cada plano  $N_p$  que interseca perpendicularmente a  $\Gamma$  en  $p$  consiste de las curvas asintóticas  $W^+(p)$  y  $W^-(p)$  para el mapeo de Poincaré en  $N_p$ . Así, las superficies  $W^+(\Gamma)$ ,  $W^-(\Gamma)$  se obtienen pegando suavemente las curvas  $W^+(p)$ ,  $W^-(p)$  cuando  $p$  recorre la curva .



## CAPITULO DOS : UN SISTEMA HAMILTONIANO

El ejemplo toral considerado anteriormente es de un tipo muy especial, ya que todos los puntos periódicos son hiperbólicos además de que la topología del toro obliga a las curvas asintóticas a intersectarse. En este capítulo consideraremos un sistema hamiltoniano analítico que posee tanto una órbita periódica hiperbólica como una elíptica y demostraremos la existencia de órbitas homoclínicas.

## 1.- DESCRIPCION DEL EJEMPLO

Como es conocido, las oscilaciones del péndulo se describen mediante la ecuación  $x'' = -g \operatorname{sen} x$  (con  $g > 0$  cte.), o equivalentemente mediante el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{con } H = \frac{1}{2} y^2 + g \cos x$$

teniendo como espacio fase apropiado al cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ , donde

$$S^1 = \{ [x] \bmod 2\pi \mid x \in \mathbb{R} \}$$

con el retrato fase

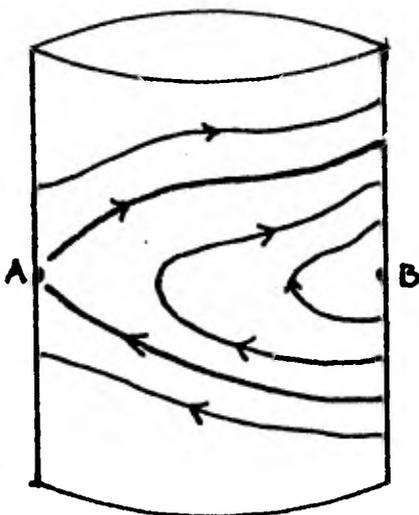


Fig. 1

las trayectorias asintóticas al punto de equilibrio A:  $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ,  $x' = 0$ , están dadas por la ecuación  $x' = 2g^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$ .

Identificando  $S^1 \times \mathbb{R}$  con un disco agujerado D a través de un difeomorfismo el retrato fase quedaría

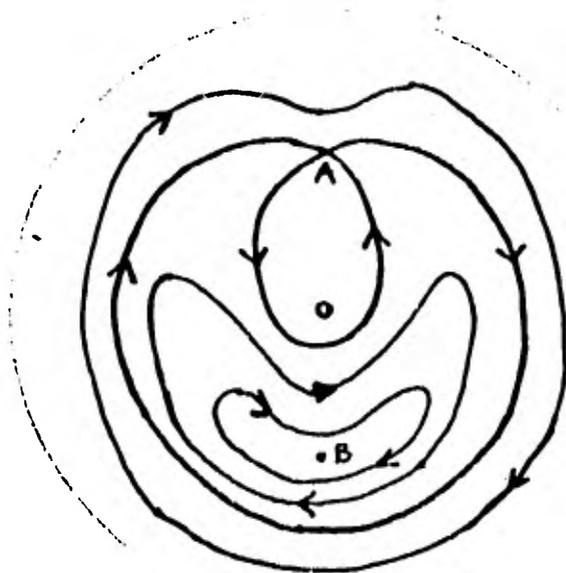


Fig. 2

El ejemplo consiste en cambiar la constante  $g$  por una función que pertenece a una familia 2-paramétrica de funciones periódicas pares positivas definida en (8b) abajo. Para no salirnos del marco de sistemas autónomos, consideraremos el sistema

$$(1) \quad \theta' = 1 \quad x'' = g(\theta) \sin x, \quad \text{donde}$$

$$(2) \quad 0 < g_* \leq g(\theta) \leq g^* \quad g(-\theta) = g(\theta) = g(\theta + 4K)$$

El espacio fase apropiado es  $S^1 \times D$  (el cual es difeomorfo a  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ ) con  $S^1 = \{ [\theta] \pmod{4K} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$

Si queremos conservar la forma de sistema hamiltoniano hay que considerar

$$(3) \quad x' = \frac{\partial H}{\partial y} \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \theta' = \frac{\partial H}{\partial p} \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\text{con} \quad H = \frac{1}{2} y^2 + g(\theta) \cos x + p$$

pero ya que podemos parametrizar las variedades de energía constante con las coordenadas  $\theta, x, x'$  y estas evolucionan de acuerdo al sistema autocontenido (1), nos olvidaremos de la variable  $p$ .

Hay dos órbitas periódicas (al menos)  $U: x \equiv 0 \pmod{2\pi}, x' = 0, \theta = t$ , y  $S: x \equiv \pi \pmod{2}, x' = 0, \theta = t$ .

En el caso degenerado, cuando  $g$  es una constante, la figura 2 puede considerarse como la representación del mapeo de Poincaré para la sección transversal  $\theta \equiv 0 \pmod{4K}$ , teniéndose entonces que  $U$  es una órbita hiperbólica cuyas superficies estable e inestable coinciden y  $S$  es una órbita elíptica.

Para la función  $g(\theta)$  que consideraremos, las órbitas periódicas  $U$  y  $S$  continúan siendo hiperbólica y elíptica respectivamente, y además  $W^+(U)$  y  $W^-(U)$  se intersectan sin coincidir. Nuestro propósito en este capítulo es demostrar estas afirmaciones.

2.-

Para demostrar la hiperbolicidad de  $U$ , comencemos observando que las coordenadas  $\theta, x, x'$  nos dan una pseudocarta periódica para  $U$  en la cual el sistema tiene la forma

$$(4) \quad \theta' = 1 \quad x'' = g(\theta)x + R(\theta, x)$$

donde  $R(\theta, 0) = 0$ ,  $D_2 R(\theta, 0) = 0$  y  $R(\theta, x)$  es  $4K$ -periódica en  $\theta$ .

De acuerdo con 3 cap.0, nos interesa el flujo  $\Phi_t$  del sistema

$$\theta' = 1 \quad x' = y \quad y' = g(\theta)x$$

Observemos que  $x$  es una solución (que no se anula) de  $x'' = g(t)x$  si y solo si  $f = \frac{x'}{x}$  es una solución de

$$(5) \quad f' = g(t) - f^2$$

Hay una única solución de (5) que satisfacen  $(g_*)^{1/2} < f(t) < (g^*)^{1/2}$ . En efecto, es única porque para cualesquiera 2 soluciones  $f_1, f_2$  de (5)

se tiene que  $f_1' - f_2' + (f_1 - f_2)(f_1 + f_2) = 0$ , lo cual implica que  $f_1 - f_2 = C \exp \int_t^{t_0} (f_1 + f_2)$  (C constante)

Si  $f_1$  y  $f_2$  exceden una cota positiva  $p$  para  $t \sim -\infty$ , entonces  $|f_1 - f_2| \geq |C| e^{2p(t_0 - t)}$

por lo tanto  $C = 0$ , o sea  $f_1 = f_2$

Para demostrar la existencia tomemos  $(f, \frac{\pi}{2K} \theta)$  como coordenadas polares en el plano, el sistema dado en estas coordenadas por  $\theta' = 1$ ,  $f' = g(\theta) - f^2$  satisface  $f' > 0$  para  $f < (g_*)^{1/2}$  y  $f' < 0$  para  $f > (g^*)^{1/2}$ . Se sigue de la teoría de **Poincaré-Bendixson** que hay una órbita periódica  $\theta = t$ ,  $f = f(t)$

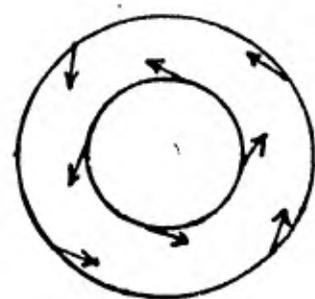


Fig. 3

Así  $f(t)$  es la única solución periódica de (5) y la representaremos graficamente. Por simplicidad supondremos que  $g(t)$  alcanza sus extremos solo una vez en cada periodo. En un plano  $t-z$ , la curva  $z = f(t)$  entre las líneas  $z = (g_*)^{1/2}$ ,  $(g^*)^{1/2}$ , tiene máximos y mínimos, cuando cruza los tramos **descendentes** y **ascendentes** de  $g^{1/2}(t)$  respectivamente

Definamos 
$$\psi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad b(t) = \int_0^t \exp(-2\psi(\tau)) d\tau$$

$$\mu = \frac{1}{4K} \Psi(4K)$$

entonces la pareja  $u(t) = \exp \psi(t)$ ,  $v(t) = b(t)u(t)$  es una base para las soluciones de  $x'' = g(t)x$ . Si definimos

$$B(t) = \begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix}$$

entonces con la notación de 3 cap.1, tenemos que

$$\varphi_t(0) = B(t) B(0)^{-1}$$

Como  $f$  es  $4K$ -periódica, se tiene que

$$B(0)^{-1} B(4K) = \begin{bmatrix} \exp \Psi(4K) & b(4K) \exp \Psi(4K) \\ 0 & \exp(-\Psi(4K)) \end{bmatrix}$$

Así, hay una matriz  $C$  con eigenvalores  $\mu, -\mu$  tal que  $B(0)^{-1} B(4K) = \exp(4KC)$  y así la matriz  $Q(t) = B(t) \exp(-tC)$  es  $4K$ -periódica. Se tiene entonces que  $\varphi_t(0) = P(t) \exp(tA)$

donde  $P(t)$  es una matriz  $4K$ -periódica y  $A = B(0) C B(0)^{-1}$  tiene los mismos eigenvalores que  $C$  y así, por 3 cap.1,  $U$  es hiperbólica.

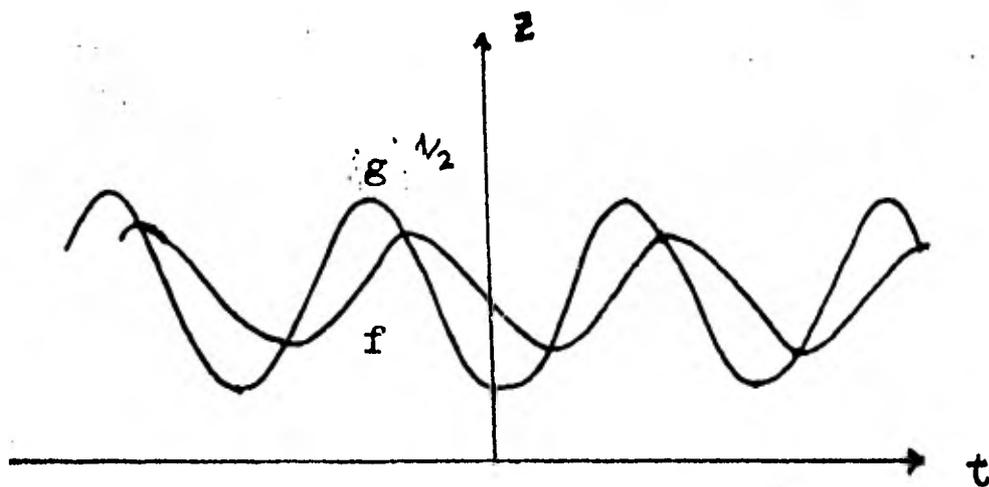


Fig. 4

3.-  $g(t)$  Y FUNCIONES RELACIONADAS

La función  $f(t)$  ya definida, es la clave para los cálculos que desarrollaremos, y es conveniente tener una fórmula explícita para ella, consistente con la paridad de  $g(t)$ . Para este propósito usaremos funciones elípticas de Jacobi. Escribiremos  $s, c, d$  para  $\text{sn}(t, k), \text{cn}(t, k), \text{dn}(t, k)$ , respectivamente ( $0 < k < 1$ ); para lo que sigue, únicamente se requerirán las propiedades algebraicas, diferenciales y descriptivas elementales de estas funciones. Escribiremos  $\kappa = (1 - k^2)^{1/2}$  para el módulo complementario, el cual se considera como un parámetro. Para  $f(t)$  escogemos una función involucrando un segundo parámetro positivo.

$$(8) \quad f = f(t) = \lambda \kappa^{-2} (d - kc) - \frac{1}{2} ks = \lambda (d + kc)^{-1} - \frac{1}{2} ks$$

De acuerdo con (5)

$$(8b) \quad g = \lambda^2 \kappa^{-4} (d - kc)^2 + \frac{1}{4} k^2 s^2 - \frac{1}{2} kcd = \lambda^2 (d + kc)^{-2} + \frac{1}{4} k^2 s^2 - \frac{1}{2} kcd$$

la cual como es deseado, es par en  $t$ ; alcanza sus extremos a  $t=0, 2K$

y son  $g_* = \lambda^2 (1+k)^{-2} - \frac{1}{2} k$   $g^* = \lambda^2 \kappa^{-4} (1+k)^2 + \frac{1}{2} k$ , y así,

$g_* > 0$  (para  $0 < k < 1$ ) si  $\lambda^2 > 2$

El mínimo  $f_*$  de  $f$  ocurre para un valor  $t_*$  en  $(0, K)$ . Para  $\lambda = \frac{1}{2}k$ ,  $f_* = 0$  y  $\text{sn}(t_*) = (1+k^2)^{-1/2}$ , y cuando  $\lambda$  crece  $f_*$  crece ( $f_* \sim \lambda(1+k)^{-1}$  para  $\lambda \sim \infty$ ) y  $t_*$  decrece a 0. Para conveniencia posterior, impondremos la restricción  $\lambda \gg 1$  y entonces, para cualquier  $k \in (0, 1)$

$$(9) \quad 5 < f_* \leq f(t) \leq f^* < 2\lambda\kappa^{-2} + \frac{1}{2}$$

Para  $k \sim 0$ ,  $f(t)$  tiene picos altos separados por valles comparativamente planos; por ejemplo a  $t=K, 3K$  toma los valores  $\lambda\kappa^{-1} - \frac{1}{2}k$ ,  $\lambda\kappa^{-1} + \frac{1}{2}k$ , que aunque grandes, son pequeños comparados con su valor  $\lambda\kappa^{-2} (1+k)$  para  $t=2K$ .

Necesitaremos también la solución periódica  $h(t)$  de

$$(10) \quad h' + 4hf(t) = 4f^2(t)$$

cuya existencia y unicidad se sigue de los argumentos dados para (5).

Los extremos de  $h$  ocurren cuando  $h=f$ , y así

$$(11) \quad f_* < h(t) < f^*$$

y las funciones  $g^{1/2}, f, h$  están relacionados como muestra la Fig. 5

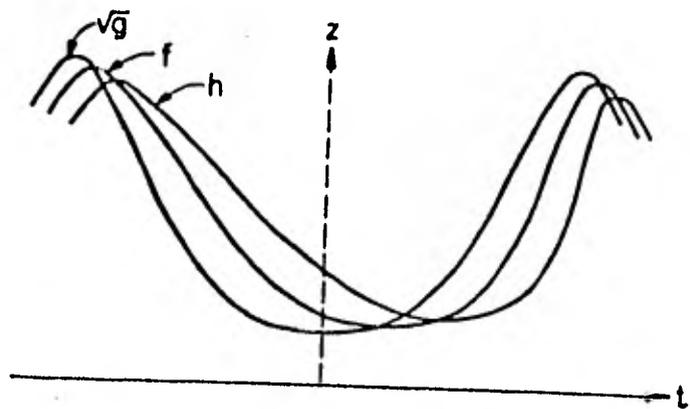


Fig. 5

Los extremos de  $h-f$  ocurren cuando  $h' = f'$ , y así por (10)

$$|h-f|_{\max} \leq \frac{1}{4} |f'/f|_{\max}$$

donde por (8)

$$(12) \quad f'/f = \frac{k(s - \frac{1}{2}cd(d+kc)/\lambda)}{1 - \frac{1}{2}ks(d+kc)/\lambda}$$

La cota burda  $|f'/f| < \lambda + 1/\lambda - 1$  se obtiene inmediatamente, y una estimación más cuidadosa muestra que para  $\lambda \gg 1$  la cota puede tomarse menor que 1.1. De la expresión (12) para  $f'/f$  se encuentra una expresión similar, incluyendo más factores, para su derivada, y así se obtiene una cota para ella; y de la cota para  $|(f'/f)'|$  se sigue una para  $|h'-f'|$ , con un argumento como el dado arriba. De esta manera encontramos que para  $\lambda \gg 1$  y  $0 < k < 1$ ,

$$(13 \text{ a,b}) \quad |h-f| < a = 0.275 \quad |h'-f'| < 0.9$$

$$(13 \text{ c,d}) \quad |f'/f| < 1.1 \quad |(f'/f)'| < 1.2$$

Si escribimos  $\Phi = \{f'(h-f) + \frac{1}{4}f''\} / f$ , un argumento sencillo muestra que la solución periódica de (10) satisface

$$hf - f^2 + \frac{1}{4}f' = \int_{-\infty}^t \Phi(\tau) \psi'(\tau) \exp(4\psi(\tau) - 4\psi(t)) d\tau$$

El valor absoluto de la integral es menor que  $\frac{1}{4}|\Phi(t)|_{\max}$ , y (12) nos proporciona una cota para esto. Así encontramos que

$$(14) \quad h = f - \frac{1}{4}f'/f + 0.23 I/f \quad \text{con} \quad |I| < 1$$

#### 4. LA SUPERFICIE INESTABLE

Obtendremos primero una información preliminar a cerca de la superficie inestable  $W^-(U)$ . Consideraremos por lo tanto las soluciones  $x$  de (1) para las cuales  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$

Cada una de estas soluciones tiene la forma

$\theta = t \quad x = w + O(w^2) \quad |w|$  suficientemente pequeña, donde  $w$  es una solución de la ecuación lineal  $x'' = g(t)x$ , que es la primera variación de la ecuación (1b)  $x'' = g(t) \operatorname{sen} x$

Por lo tanto  $w(t) = C_1 u(t) + C_2 v(t) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

y se requiere que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) = 0$ , lo cual es posible únicamente cuando  $C_2 = 0$ .

Centraremos nuestra atención en la rama de la superficie inestable generada al tomar  $C_1 > 0$ . Recordando que  $u(t) = \exp \psi(t)$ , observaremos que todas las soluciones de esta rama quedan cubiertas tomando  $C_1 = e^{\alpha \mu}$  con  $\alpha$  variando en el intervalo  $[0, 4k]$ . En resumen, esta rama de la superficie inestable es generada por la familia de soluciones que para  $|w|$  suficientemente pequeña tienen la forma  $\theta = t$

$$x = \exp(\alpha \mu + \psi(t)) + O(w^2)$$

de aquí obtenemos que  $x > 0$  para  $t \sim -\infty$ . También, ya que  $f(t)$  esta acotada

$$x' = f(t)x + O(w^2) = f(t)x + O(x^2)$$

y así  $x' > 0$  para  $t \sim -\infty$ , ya que  $f(t)$  tiene un mínimo positivo.

Además  $x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \mu x + O(x^2)$

$$x'_\alpha = \frac{\partial x'}{\partial \alpha} = f(t)\mu x + O(x^2)$$

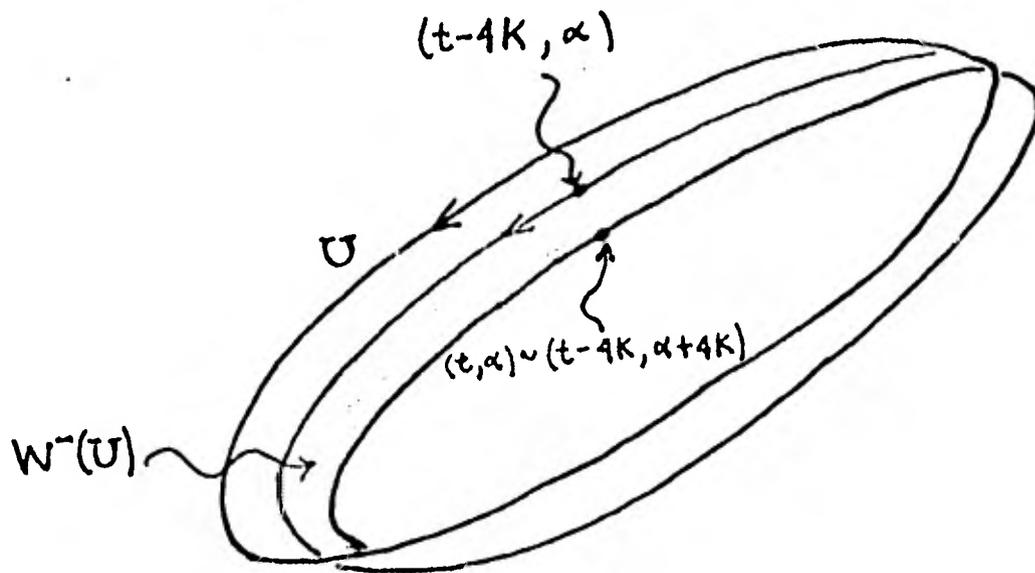
y por lo tanto  $x_\alpha, x'_\alpha > 0$  para  $t \sim -\infty$

Puesto que  $g(t)$  y  $\operatorname{sen} x$  son funciones analíticas y acotadas cualquier solución de (1 b) puede continuarse a todo  $\mathbb{R}$ . Por (1b)

$$(1c) \quad \frac{\partial x''}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} g(t) \cos x$$

y en virtud de (2) obtenemos que  $x'' > 0$  si  $0 < x < \pi$  y  $x''_\alpha / x_\alpha > 0$  para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . En vista de las condiciones obtenidas para  $t \sim -\infty$ , concluimos que para cualquier solución de la familia,  $x'$  y  $x$  crecen hasta que, para algún valor de  $t$ ,  $x$  alcanza el valor  $\pi$ ;  $x'_\alpha, x_\alpha$  deben crecer por lo menos hasta que  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Las soluciones de la familia generan una parte de la superficie inestable  $W^-(U)$ , la cual queda especificada dando  $x, x', \theta$  como funciones de las coordenadas  $(t, \alpha) \in \mathbb{R} \times [0, 4K]$ . Variando  $\alpha$  en el intervalo  $[0, 4K]$ , las soluciones de la familia forman una cinta que se extiende continuamente cuando  $t$  crece, hasta que es-



ta se pega analíticamente con la parte de la superficie ya generada, y por lo tanto los puntos correspondientes a  $(t, \alpha)$  y  $(t-4K, \alpha+4K)$  deben coincidir. (Fig. 6)

Ademas hemos mostrado que  $x_\alpha$  permanece positiva mientras  $x \leq \frac{\pi}{2}$ , así la ecuación  $x = x(t, \alpha)$  puede resolverse en forma única para obtener  $\alpha = \alpha(x, t)$  y de esta manera  $x'$  resulta una función de  $x$  y  $t$ , la cual debe ser periódica en  $t$ . Así la parte de la super-

ficie inestable para la cual  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  tiene la representación

$$(16) \quad x' = G(x, \theta) \quad G(x, \theta+4K) = G(x, \theta)$$

Para la  $g(\theta)$  particular que hemos definido, esta conclusión se extenderá para  $x \leq \pi$

Obtengamos más información de las soluciones de la familia.

De (1 b) tenemos

$$\left[ \frac{1}{2} x'^2 - g(t)(1 - \cos x) \right]' = -g'(t)(1 - \cos x)$$

e integrando

$$\frac{1}{2} x'^2 - g(t)(1 - \cos x) = - \int_{-\infty}^t g'(\tau) (1 - \cos x(\tau)) d\tau$$

La integral converge ya que  $x'$  y  $1 - \cos x \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Puesto

que  $x(\tau)$  crece con  $\tau$  mientras  $x \leq \pi$ , lo mismo ocurre con  $1 - \cos x(\tau)$

y así por el segundo teorema del valor medio hay un  $\bar{t} \in (-\infty, t)$  tal que

$$- \int_{-\infty}^t g'(\tau) (1 - \cos x(\tau)) d\tau = (1 - \cos x(\bar{t})) (g(\bar{t}) - g(t))$$

Es claro que  $F(t) = g^{1/2}(\bar{t})$  es una función analítica para la cual

$$(17) \quad x'(t) = 2F(t) \sin \frac{1}{2} x(t) \quad y$$

$$(17a) \quad (g_*)^{1/2} \leq F(t) \leq (g^*)^{1/2} \quad \text{para } 0 \leq x(t) \leq \pi$$

sustituyendo (17) en (1b), tenemos

$$(18) \quad F'(t) = (g(t) - F^2(t)) \cos \frac{1}{2} x(t)$$

la cual junto con (17) nos dá un sistema simultaneo para  $x, F$ . Por supuesto  $F(t)$  depende de la solución particular de (1b) que se este considerando.

La ecuación (18) sugiere una comparación con la solución periódica  $f(t)$  de la ecuación (5), y el conocimiento de la forma de  $G(x, \theta)$  en (16) depende de la estimación de la diferencia  $F-f$  para una solución arbitraria de (1b).

Los cálculos necesarios son tediosos y los hemos postergado al apéndice A al final del capítulo. Resumiremos el resultado de dichos cálculos en la siguiente:

PROPOSICION Cualquier solución  $x$  que decrece a 0 a través de valores positivos cuando  $t \rightarrow -\infty$ , satisface la relación

$$(19) \quad x' = 2 \sin \frac{1}{2}x \left\{ f + 2(h - f) \tan^2 \frac{1}{4}x + \frac{\int \sin^2 \frac{1}{2}x \tan^2 \frac{1}{4}x (8 + 3.2 \log f)}{f} \right\},$$

donde  $|\int| < 1$

Observemos que diferentes soluciones dan correspondencias distintas entre  $x$  y la fase de las funciones periódicas  $f, h$ . Esta correspondencia está implícita en (19) y resulta explícita cuando la integramos para obtener  $x$  en términos de  $t$  y una cte. de integración  $\alpha$ . En principio, la mejor aproximación a la superficie inestable se obtiene integrando (19), sustituyendo entonces el resultado en (19) para obtener  $x'$  en función de  $t, \alpha$  y eliminando luego  $\alpha$  para llegar a una relación entre  $x', x$  y  $t$ , la cual debe ser periódica en  $t$ . Sin embargo este procedimiento es superfluo pues reemplazando simplemente  $f(t), h(t)$  en (19) por  $f(\theta), h(\theta)$ , la superficie debe quedar dada en la forma (16). Así

$$(19a) \quad G(x, \theta) = 2 \sin \frac{1}{2}x \left\{ f(\theta) + 2(h(\theta) - f(\theta)) \tan^2 \frac{1}{4}x + \frac{I \sin^2 \frac{1}{2}x \tan^2 \frac{1}{4}x (8 + 3.2 \log f)}{f} \right\}$$

donde  $|I| < 1$ .

Podría suceder que si  $x$  es grande, la dependencia de  $x'$  sobre  $\theta$  sea multivaluada (un hecho que de estar presente debe aparecer en el residuo) pero hemos demostrado en la sección que esto no ocurre cuando  $x \leq \frac{\pi}{2}$ , y demostraremos que tampoco ocurre cuando  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ , para las funciones  $g, f$  que hemos venido usando. Es suficiente probar que a lo largo de cada solución,  $x_\alpha$ , la cual es positiva hasta  $x = \frac{\pi}{2}$ , continúa siendo positiva hasta  $x = \pi$ . Esto lo haremos en el apéndice B.

### 5.- LA ORBITA HOMOCLINICA.

Para  $0 \leq x \leq \pi$ , la superficie inestable  $W^-(U)$  está dada en la forma

$$x' = G(x, \theta)$$

Para determinar la forma de la superficie estable para  $x$  observemos que  $x(t)$  es una solución a (1 b) yal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2\pi$  si y solo si  $y(t) = 2\pi - x(-t)$  es una solución a (1b) tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ . Por lo tanto la ecuación de  $W^+(U)$  se obtiene

substituyendo  $x, \theta, x'$  por  $2\pi-x, -\theta, x'$ , o sea

$$x'_+ = G(2\pi-x, -\theta)$$

De aquí se ve fácilmente que para  $(x,0) = (\pi,0)$   $W^-$  y  $W^+$  se intersectan. En efecto

$$x'_+ = G(2\pi-\pi, -0) = G(\pi,0) = x'_-$$

Lo mismo ocurre para  $(x,0) = (\pi,2K)$ , ya que como  $G$  es  $4K$ -periódica en  $\theta$  se tiene que

$$x'_+ = G(2\pi-\pi, -2K) = G(\pi,2K) = x'_-$$

En general para  $x=\pi$  tenemos que

$$(20) \quad x'_+ - x'_- = 2(f(\theta)-f(-\theta)) - 4(h(\theta) - h(-\theta)) + R$$

$$\text{donde } |R| < \frac{8 + 3.2 \log f(\theta)}{f(\theta)} + \frac{8 + 3.2 \log f(4\theta)}{f(-\theta)}$$

y el segundo miembro de (20) debe ser una función impar y periódica de  $\theta$ . Por (8), (14), (12) esto es lo mismo que

$$(21) \quad x'_+ - x'_- = 2k_s \left\{ 1 + \frac{1 - \frac{1}{4}kcd(d+kc)^2/\lambda^2}{1 - \frac{1}{4}k^2s^2(d+kc)^2/\lambda^2} \right\} + \frac{0.92 I}{f(\theta)} + \frac{0.92 I}{f(-\theta)} + R$$

donde  $|I| < 1$

El término principal en (21) se anula únicamente para  $\theta = 0, 2K$  (mod  $4K$ ) y para  $\theta = K, 3K$  (mod  $4K$ ) domina sobre el término restante si  $k$  no es demasiado pequeña y  $\lambda$  es suficientemente grande. De hecho, si  $k \gg \frac{1}{4}$  y  $\lambda \gg \max(42(1-k)^{\frac{1}{2}}, 11)$  tenemos que

$$x'_+ - x'_- > 0 \quad \text{para } \theta = K$$

por lo tanto las superficies asintóticas no pueden coincidir.

FORMULAS DE COMPARACION. Consideraremos una solución arbitraria pero fija de la superficie inestable, de tal manera que  $x, F$  y  $H$  (abajo) también como  $f, h$  son funciones determinadas de  $t$ .

De (5) y (18) encontramos que

$$F' - f' + (F^2 - f^2) \cos \frac{1}{2}x = 2(f^2 - g) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4}x = -2f' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4}x$$

El factor integrante para esta ecuación, tratada como una ecuación lineal para  $F - f$ , es

$$\exp \int_{t_0}^t (F(\tau) + f(\tau)) \cos \frac{1}{2}x(\tau) d\tau = \exp \Phi(t), \quad \text{digamos,}$$

donde  $t_0$  es cualquier constante cerca de  $-\infty$ ; y mientras  $x < \pi$ , es una función creciente de  $t$ , ya que por (17a) y (9) el integrando es positivo. También por (17a) y (9)  $F - f$  permanece acotada cuando  $t \rightarrow -\infty$ , y la única solución con esta propiedad es

$$F(t) - f(t) = -2 \int_{-\infty}^t f'(\tau) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x(\tau) \exp(\Phi(\tau) - \Phi(t)) d\tau.$$

El coeficiente de  $f'(\tau)$  en el integrando es una función creciente de  $\tau$ , y así por el segundo teorema del valor medio

$$(22) \quad F(t) = f(t) - 2(f(t) - f(\bar{t})) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4}x(t) \quad -\infty < \bar{t} < t \\ = f(t) \cos \frac{1}{2}x(t) + 2H(t) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4}x(t)$$

donde hemos escrito  $f(\bar{t}) = H(t)$ ; entonces por (9)

$$(23) \quad f_* \leq H(t) \leq f^*$$

Se sigue de (18), (17), (5) y (22) que

$$(24) \quad x' = f \operatorname{sen} x + 4H \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4}x, \quad \text{y}$$

$$(25) \quad H' + 2(H-f)(H \operatorname{sen} \frac{1}{4}x \operatorname{sen} \frac{3}{4}x + 2f \cos \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{4}x) = 0.$$

Para  $x = 0$ , (25) se reduce a la forma de (10), de tal manera que es sugerida una comparación de  $H$  con la función periódica  $h$ . Encontramos que

$$(26) \quad H' - h' + (H-h) \left\{ f(1 + 3 \cos \frac{1}{2}x) + 2(H+h-2f) \operatorname{sen} \frac{1}{4}x \operatorname{sen} \frac{3}{4}x \right\} \\ = -6f(f-h) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4}x - 2(f-h)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{4}x \operatorname{sen} \frac{3}{4}x.$$

Aquí el hecho notable es que el coeficiente de  $f$  en  $\{\dots\}$  permanece positivo para  $0 < x \leq \pi$ , de tal forma que el desarrollo de la fórmula de comparación puede pararse aquí.

ESTIMACIONES PARA SOLUCIONES ASINTOTICAS EN  $0 < x \leq \pi$

(i) Usaremos primero (26) para mejorar la cota  $|H-h| \leq 2f^*$ , la cual se sigue de (11) y (23). Pongamos

$$(27) \quad \phi(t) = f(1 + 3 \cos \frac{1}{2}x) + 4(h-f) \operatorname{sen} \frac{1}{4}x \operatorname{sen} \frac{3}{4}x + 2(H-h) \operatorname{sen} \frac{1}{4}x \operatorname{sen} \frac{3}{4}x$$

y

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t \phi(\tau) d\tau$$

para alguna constante  $t_0$  cerca de  $-\infty$ . De las estimaciones (9), (13)

(11) y (23),  $\phi$  tiene una cota inferior positiva para  $x$  suficientemente pequeño, y así para  $t$  en algún rango extendiéndose desde  $-\infty$ . La única solución de (26) con la propiedad de estar acotada para valores de  $t$  en este rango, es

$$(28) \quad \begin{aligned} H(t) - h(t) = & -6 \int_{-\infty}^t f(\tau)(f(\tau) - h(\tau)) \sin^2 \frac{1}{4}x(\tau) \exp(\Phi(\tau) - \Phi(t)) d\tau \\ & - 2 \int_{-\infty}^t (f(\tau) - h(\tau))^2 \sin \frac{1}{4}x(\tau) \sin \frac{3}{4}x(\tau) \exp(\Phi(\tau) - \Phi(t)) d\tau. \end{aligned}$$

Por continuación analítica, esta fórmula debe seguir valiendo para aquellas  $t$  para las cuales  $x \leq \pi$ ; entonces

$$(29) \quad \begin{aligned} |H(t) - h(t)| \leq & 6 \left| \frac{f(\tau)(f(\tau) - h(\tau)) \sin^2 \frac{1}{4}x(\tau)}{\phi(\tau)} \right|_{\max} \\ & + 2 \left| \frac{(f(\tau) - h(\tau))^2 \sin \frac{1}{4}x(\tau) \sin \frac{3}{4}x(\tau)}{\phi(\tau)} \right|_{\max}, \end{aligned}$$

los máximos se calculan para  $-\infty < \tau \leq t$

Se sigue de (11) y (23) que para cualquier constante positiva  $c$  hay una cota positiva tal que

$$(30) \quad 2 \left| H(\tau) - h(\tau) \right| \sin \frac{1}{4}x(\tau) \sin \frac{3}{4}x(\tau) < c$$

siempre que  $x$  este superada por dicha cota. Así, por un argumento de continuación, (30) permanecerá valiendo en cualquier rango abierto de  $x$  en el cual, (30) implique via (29) una desigualdad más fuerte. Así, cuando  $x$  esta en el rango propuesto y es siempre  $\leq \pi$ , podemos inferir de (27) que

$$\phi > f - \frac{1}{4}a - c \geq f_* - \frac{1}{4}a - c,$$

donde como en (13),  $a$  es la cota superior de  $f-h$  y  $9/4$  es el máximo de  $4 \sin \frac{1}{4}x \sin \frac{3}{4}x$ . Por lo tanto, siempre que  $f_* > \frac{9}{4}a + c$

$$0 < \frac{f}{\phi} < \frac{f}{f - \frac{1}{4}a - c} \leq \frac{f_*}{f_* - \frac{1}{4}a - c},$$

y la inserción de esta estimación en (29) nos dá

$$(31) \quad |H - h| < \frac{6af_* \sin^2 \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}a^2 \sin \frac{1}{4}x \sin \frac{3}{4}x}{f_* - \frac{1}{4}a - c} \leq \frac{3af_* + \frac{9}{4}a^2}{f_* - \frac{1}{4}a - c};$$

aquí  $t$  es el argumento de todas las funciones, y en el término de en medio hemos usado el factor  $9/4$  en lugar de 2 como coeficiente de  $\sin x/4 \sin 3x/4$  ya que cuando  $x$  esta cerca de este producto es menor que su valor máximo  $9/16$ , por un factor de  $8/9$ .

Esta estimación para  $|H-h|$  es un mejoramiento de (30) para  $x \leq \pi$ , siempre que

(32)  $9/8 (3af_* + 9/8 a^2) \leq c (f_* - 9/4 a - c)$

y así, siempre que  $c > 27a/8$  y

$f_* \geq (81/64 a^2 + 9/4 ac + c^2) (c - 27/8 a)$

Para c positivo la expresión en el lado derecho toma el valor mínimo  $18a$  en  $c=63a/8$ , así la desigualdad se cumple si

(33 a,b)  $f_* \geq 18a$   $c = 63a/8$

De la sección 3 vemos que la condición (33a) se satisface cuando  $\lambda \gg 11$  ya que entonces  $f_* > 5$  y  $18a = 4.95$ .

Concluimos que si  $\lambda \gg 11$ , (30) y (31) son válidas para  $x \leq \pi$ , con el valor escogido para c; usando (32) y (33), obtenemos de (31) que

(34)  $|H-h| \leq \frac{2}{7} a (48 \text{sen}^2 \frac{1}{4} x + \text{sen} \frac{1}{4} x \text{sen} \frac{3}{4} x)$   $0 < x \leq \pi$

Si restringimos x a un rango que no incluya  $\pi$ , una desigualdad con constantes más pequeñas se puede obtener; por ejemplo si  $x \leq \frac{2}{3} \pi$  tenemos que  $1 + 3 \cos \frac{1}{2} x \geq \frac{5}{2}$ , y por repetición de (34) encontramos que

(35)  $|H-h| < \frac{a}{7} (18 \text{sen}^2 \frac{1}{4} x + \frac{1}{3} \text{sen} \frac{1}{4} x \text{sen} \frac{3}{4} x)$   $0 < x \leq \frac{2}{3} \pi$

(ii) De la estimación fundamental (34) se sigue de (24) que

$x' = 2f \text{sen} \frac{1}{2} x + 4 \text{sen} \frac{1}{2} x \text{sen}^2 \frac{1}{4} x \{ h-f + \frac{2}{7} a I \text{sen} \frac{1}{4} x (48 \text{sen} \frac{1}{4} x + \text{sen} \frac{3}{4} x) \}$

aquí y abajo,  $|I| < 1$ ; y así, ya que  $|f-h| \leq a$  y  $x \leq \pi$ ,

(36)  $x'/2 \text{sen} \frac{1}{2} x = f + 16 a I \text{sen}^2 \frac{1}{4} x$

Para la integración de esta ecuación, observaremos que, usando (36)

(37)  $\int_{t_0}^t 16 a I \text{sen}^2 \frac{1}{4} x(\tau) d\tau = \int_{x_0}^x \frac{8 a I \text{sen}^2 \frac{1}{4} x dx}{\text{Sen} \frac{1}{2} x (f + 16 a I \text{sen}^2 \frac{1}{4} x)} =$

$= 8 I \int_{x_0}^x \frac{\text{Sen}^2 \frac{1}{4} x dx}{\text{Sen} \frac{1}{2} x (18 - 16 \text{sen}^2 \frac{1}{4} x)}$

la integral converge cuando  $x_0 \rightarrow 0$  ó  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Así la integración da

(38)  $\log \tan \frac{1}{4} x(t) = \psi(t) + \beta + 4 I \log \frac{10 + 8 \cos \frac{1}{2} x(t)}{9 + 9 \cos \frac{1}{2} x(t)}$

donde

$\psi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \lambda \kappa^{-2} (\arctan \frac{s}{c} - \arctan \frac{s}{d}) + \frac{1}{2} \log \frac{d+kc}{1+k}$

$\beta$  es una constante (el límite de  $\log \tan \frac{1}{4} x(t) - \psi(t)$ , el cual existe en virtud de la convergencia de (37)) que caracteriza la solución considerada. Para  $x \sim 0$  el término restante es  $O(x^2)$ , y así (38) es equivalente a (15); identificando tenemos que

(39)  $\mu = \frac{1}{2} \pi \lambda \kappa^{-2} / K, \quad \mu \alpha = \beta + \log 4,$

donde debe notarse que para  $\kappa \sim 0, K \sim \log(4/\kappa)$  y entonces  $\mu$  es grande

Ya que  $\psi(t)$  se incrementa en  $2\pi \lambda \kappa^{-2}$  en cada ciclo  $(t_1 - 4K, t_1)$ , vemos que si  $\lambda \kappa^{-2}$  es grande, entonces x es exponencialmente pequeño un tiempo  $4K$  antes de que x alcance  $\pi$ , y a fortiori esto es válido para la infinidad de ciclos precedentes. Sin ninguna restricción sobre

$\lambda \kappa^2$ ,  $x$  se incrementa de  $x_0$  a  $x_1$  en un intervalo  $(t_0, t_1)$ , dado por

$$(40) \quad (t_1 - t_0) f(\bar{t}) = \log(\tan \frac{1}{4} x_1, \cot \frac{1}{4} x_0) + 4I \log\left(\frac{10}{9}\right)$$

observemos que en el lado derecho el primer término es el dominante si  $x_0$  es pequeño, y el intervalo es corto si  $f$  es grande a través de él y  $x_0$  no es demasiado pequeño.

(iii) Ahora procederemos a mejorar las estimaciones para los valores de  $H-h$  y  $x'$  que corresponden a un valor finito,  $x \leq \pi$ , de la solución considerada. Suponiendo que  $\lambda \kappa^2$  es grande, podemos en primera instancia limitar nuestra atención al caso en el que  $f(t)$  toma valores grandes a lo largo de la solución, y así las estimaciones serán asintóticas respecto a  $f$ .

Volviendo a (28) dividiremos el rango  $(-\infty, t)$  en  $t_0$  y llamaremos  $f_m$  al mínimo de  $f(\tau)$  para  $t_0 \leq \tau \leq t$ , y pondremos  $x_0 = x(t_0)$ . Una elección conveniente de  $t_0$  está dada por

$$(41) \quad \tan \frac{1}{4} x_0 = A f_m^{-1/6} \tan \frac{1}{4} x$$

donde  $A$  es una constante cercana a 1. En  $(t_0, t)$  usaremos  $\xi = x(\tau)$  como la variable. Por (13) y (34), (27) da  $\phi = f(1 + 3 \cos \frac{1}{2} x) \{1 + O(f_m^{-1})\}$  y usando (36),

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) - \Phi(t) &= - \int_{\tau}^t \phi dt = - \int_{\xi}^x \frac{1+3 \cos \frac{1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x} \{1 + O(f_m^{-1})\} dx \\ &\quad \left( \log \frac{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} \xi + \tan \frac{1}{4} \xi}{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x + \tan \frac{1}{4} x} \right) \{1 + O(f_m^{-1})\} \\ &\quad \log \frac{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} \xi + \tan \frac{1}{4} \xi}{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x + \tan \frac{1}{4} x} + O(f_m^{-1} \log f_m) \end{aligned} \quad (42)$$

el último paso es una consecuencia de (41), siempre que  $x_0 \leq \xi \leq x$ . La contribución de  $(t_0, t)$  para la primera integral en (28) es, cambiando la variable a  $\xi$  y volviendo a apelar a (36),

$$\int_{x_0}^x \frac{(f(\tau) - h(\tau)) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} \xi}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \xi} \frac{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} \xi + \tan \frac{1}{4} \xi}{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x + \tan \frac{1}{4} x} \{1 + O(f_m^{-1} \log f_m)\} d\xi$$

y en virtud de (13b), (40) y (41)

$$f(\tau) - h(\tau) = f(t) - h(t) + O(t - \tau) = f(t) - h(t) + O(f_m^{-1} \log f_m).$$

El factor en  $\xi$  tiene la integral  $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^6 \frac{1}{4} \xi$ , y así la contribución es

$$\frac{8(f-h)(\operatorname{sen}^6 \frac{1}{4} x - \operatorname{sen}^6 \frac{1}{4} x_0) \{1 + O(f_m^{-1} \log f_m)\} + \operatorname{sen}^6 \frac{1}{4} x O(f_m^{-1} \log f_m)}{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x + \tan \frac{1}{4} x} \quad (43).$$

y aquí el término  $\operatorname{sen}^6 \frac{1}{4} x_0$  es relativamente  $O(f_m^{-1})$  en virtud de (41), y puede ser omitido.

La segunda integral en (28) es  $O(f_m^{-1})$  veces la primera, y así su contribución en el rango  $(t_0, t)$  es despreciable.

Para la contribución de ambas integrales en el rango  $(-\infty, t_0)$  tenemos la estimación (34) o (35) (con  $x_0$  en lugar de  $x$ ) multiplicada por  $\exp(\Phi(t_0) - \Phi(t))$ , siendo este factor  $O(f_m^{-1/3})$  en virtud de (41) y

(42); así la contribución es  $O(f_m^{-2/3} \text{sen}^2 \frac{1}{4} x_0)$ , la cual por (41) es  $O(f_m^{-1} \text{sen}^2 \frac{1}{4} x)$ . Por lo tanto esta contribución se puede absorber en el residuo de (43).

Finalmente, la variación de  $f^{-1}$  en el intervalo  $(t_0, t)$  es  $(t-t_0)(f'/f^2)$ , y por (40), (41) y (13c) esto es  $O(f_m^{-1} \log f_m)$ . Por lo tanto podemos remplazar  $f_m$  por  $f$ , el valor correspondiente a  $x$ , en el residuo de (43) de tal manera que

$$H - h = -\tan^2 \frac{1}{4} x \left\{ f - h + O(f^{-1} \log f) \right\}$$

donde todas las funciones tienen a  $t$  como argumento.

Una examinación detallada de los residuos en este argumento, muestra una elección adecuada de  $A$  en (41) es  $6^{-1/6}$ , así ya que  $f_m > 5$ ,  $A f_m^{-1/6} < 30^{-1/6} < 3^{-1/6}$ ; y así en todos los casos  $x_0 < \frac{2}{3} \pi$ . De esta manera podemos usar siempre (35) para estimar la integral en el intervalo  $(-\infty, t_0)$ , y si  $\lambda \geq 11$ , se encuentra que

$$(44) \quad H - h = -\tan^2 \frac{1}{4} x \left\{ f - h + \frac{I(3 + 1.2 \log f_m)}{f_m} \right\},$$

donde  $|I| < 1$  y

$$(45) \quad \frac{1}{f_m} < \frac{1.3}{f} \quad \frac{\log f_m}{f_m} < \frac{1.3 \log f}{f}$$

y la inserción de (44), (45) en (24), para  $x \leq \pi$ , da

$$(46) \quad x' = 2 \text{sen} \frac{1}{2} x \left\{ f + 2(h-f) \tan^2 \frac{1}{4} x + \frac{I \text{sen}^2 \frac{1}{4} x \tan^2 \frac{1}{4} x (8 + 3.2 \log f)}{f} \right\},$$

$$|I| < 1$$

APENDICE B. Demostraremos que si  $x$  es una solución de (1b) que decrece a 0 cuando  $t \rightarrow -\infty$ , entonces  $x_\alpha > 0$  para  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

Sabemos que  $x_\alpha, x'_\alpha$  son positivas para  $x = \frac{\pi}{2}$ . Si  $x'_\alpha$  permanece positiva hasta  $x = \pi$ , entonces  $x_\alpha$  no decrece nunca.

Así el único caso que hay que examinar es aquel en el que  $x'_\alpha$  se vuelve negativa, y si ponemos

$$(48) \quad y = - \frac{x'_\alpha}{x_\alpha}$$

lo que hay que probar es que mientras  $x$  crece desde un valor mayor que  $\frac{\pi}{2}$  hasta  $\pi$ , y no puede crecer desde 0 hasta  $+\infty$ .

Usando (48) la ecuación diferencial (1c) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(t) \cos(\pi - x) + y^2}{x'}$$

Poniendo ahora  $Y = y/f(t)$  y usando (5) tenemos,

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(1 + f'/f^2) \cos(\pi - x) + Y^2 - Yf'/f^2}{x'/f}$$

Por (3.6) y (3.3a),  $x' > 2f \sin \frac{1}{2}x (1 - \frac{2}{9} \sin^2 \frac{1}{4}x)$ ; y por (9)y(13c),  $\left| \frac{f'}{f^2} \right| < 0.22$  para toda solución; así

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{dY}{dx} &< \frac{1.22 \cos(\pi - x) + 0.22Y + Y^2}{2 \sin \frac{1}{2}x (1 - \frac{2}{9} \sin^2 \frac{1}{4}x)} \\ &= \frac{(Y + 0.11)^2 + 1.22 \cos(\pi - x) - 0.0121}{2 \sin \frac{1}{2}x (1 - \frac{2}{9} \sin^2 \frac{1}{4}x)} \end{aligned}$$

Sea  $x_0$  el valor dado por  $\cos(\pi - x_0) = 0.0121/1.22$ . Si  $Y$ , que es negativa para  $x = \frac{\pi}{2}$ , resulta positivo para  $x \leq x_0$ , entonces  $Y$  alcanzará un valor  $Y_0$  a  $x_0$  tal que

$$\int_0^{Y_0} \frac{dY}{(Y + 0.11)^2 + 1.22} < \int_{\pi/2}^{x_0} \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}x (1 - \frac{2}{9} \sin^2 \frac{1}{4}x)} < 0.0083$$

de donde  $Y_0 < 0.00011$

Para  $x_0 \leq x \leq \pi$ , (49) da

$$\frac{dY}{dx} < \frac{(Y + 0.11)^2 + 1.22}{2 \sin \frac{1}{2}x (1 - \frac{2}{9} \sin^2 \frac{1}{4}x)}$$

así cuando  $x$  llega a  $\pi$ ,  $Y$  alcanza un valor  $Y_1$  tal que

$$\int_{Y_0}^{Y_1} \frac{dY}{(Y + 0.11)^2 + 1.22} < \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}x (1 - \frac{2}{9} \sin^2 \frac{1}{4}x)} < 1.228 \quad ;$$

el caso en que  $Y$  resulta positivo para un valor de  $x$  mayor que  $x_0$  que da cubierto poniendo  $Y_0 = 0$ . La última desigualdad da

$$\arctan \frac{Y_1 + 0.11}{(1.22)^{1/2}} < \arctan \frac{0 + 0.11}{(1.22)^{1/2}} + 1.36 < 1.46 < \arctan 9.0$$

y así  $Y_1 < 10$ .

Por lo tanto  $Y$  permanece menor que 10 y  $x_\alpha$  permanece positiva, mientras  $x \leq \pi$ .

C A P I T U L O T R E S

En este capítulo, presentaremos la manera en que el corrimiento de Bernoulli de la dinámica simbólica sirve para modelar el comportamiento en cierto subconjunto de una vecindad de un punto homoclinico. El primer paso consiste en relacionar el corrimiento con un mapeo geométrico (la llamada "herradura"). El resultado se obtiene notando que la restricción de una iterada del difeomorfismo a un cierto cuadrilátero es esencialmente este mapeo geométrico. Finalmente consideraremos el problema de la existencia de integrales.

1.- EL CORRIMIENTO DE BERNOULLI

Sea A un conjunto finito , el cual supondremos que está provisto con la topologia discreta. Llamaremos S al conjunto de funciones de Z en A, provisto con la topología producto; se sigue del teorema de Tychonoff que S es compacto, y de hecho es un conjunto de cantor. Si  $s \in S$ , denotaremos el valor de s en  $m \in Z$  por  $s_m$  y entonces podemos pensar a s como una sucesión infinita doble de elementos de A con un punto decimal entre  $s_0$  y  $s_1$ ; así

$$s = (\dots s_{-1} \cdot s_0 \cdot s_1 \cdot s_2 \dots)$$

La topologia sobre S puede metrizararse y de hecho dos métricas ocurren naturalmente, una es

$$d(s, s^*) = \frac{1}{N+1}$$

donde  $N = \sup \{n \mid s_i = s_i^* \text{ para toda } -n \leq i \leq n\}$  la otra es

$$d(s, s^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} \delta(s_n, s_n^*)$$

donde  $\delta$  es la métrica discreta sobre A.

El corrimiento de Bernoulli  $\sigma: S \rightarrow S$  está definido por

$$(\sigma(s))_k = s_{k-1}$$

obviamente  $\sigma$  es un homeomorfismo.

Notemos que  $\sigma^n(\dots s_{-1} \cdot s_0 \cdot s_1 \cdot s_2 \dots) = (\dots s_{-n-1} \cdot s_{-n} \cdot s_{-n+1} \dots)$  y así s es un punto de periodo n si y solo si

$$s_0 = s_{-n}, s_1 = s_{1-n}, \dots, s_n = s_0, \dots, s_k = s_{k-n}$$

odicho de otra forma, la sucesión es simplemente la repetición de un bloque de n simbolos.

PROPOSICION. El conjunto de puntos periódicos de  $\sigma$  es denso en S. Dem. Sea  $s = (s_m^*)$  cualquier punto de S. Definamos  $s^{(k)} = (s_m^{(k)})$  reite-

rando simplemente el k-bloque inicial de s , o sea,

$$s_{i+jk}^{(k)} = s_i^{(k)} = s_i^* \text{ para } |i| \leq k, j \in Z$$

Con la primera de las métricas introducidas tenemos que  $d(s^{(k)}, s) \leq \frac{1}{1+k}$

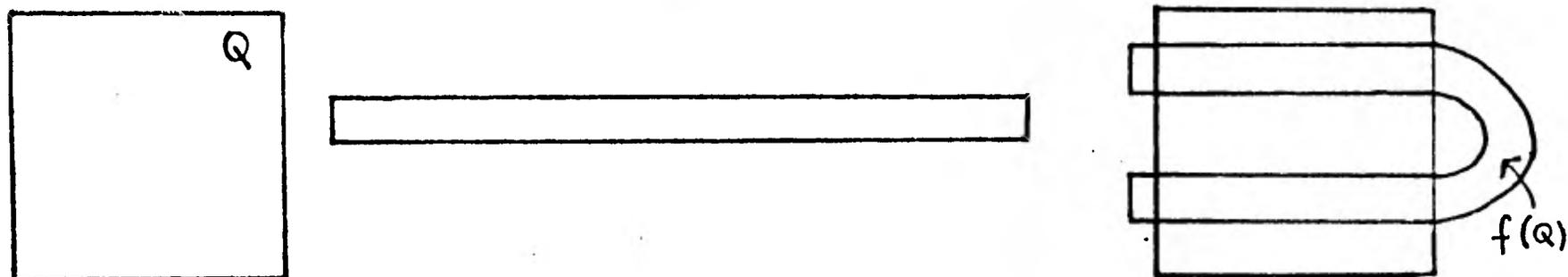
Q.E.D.

Consideremos ahora un punto periódico  $s=(s_m)$ , digamos que  $s_{k+n}=s_k$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ . Para cualquier punto  $s^*=(s_m^*) \neq s$  pero que satisface  $s_m^*=s_m$  cuando  $|m| > N$ , se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{kn}(s^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{-kn}(s^*) = s$$

2.- LA HERRADURA

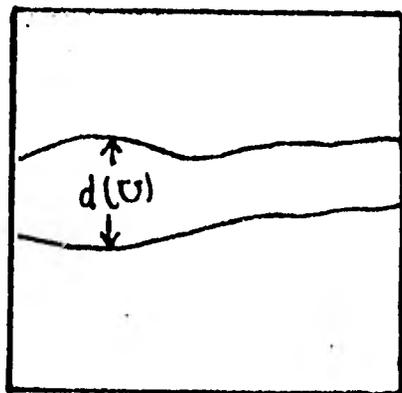
Consideremos un cuadrado  $Q$  del plano, el cual sera el dominio de un mapeo  $f$ . Este mapeo sera descrito intuitivamente de la siguiente manera: alarguemos  $Q$  en la dirección horizontal y comprimamoslo en la dirección vertical hasta obtener una "tira" delgada; doblemos esta tira y coloquemosla sobre  $Q$  de manera que lo intersecte en dos bandas horizontales.



a) Para definir el mapeo en forma precisa, comenzaremos introduciendo algunos conceptos.

Dado  $0 < \mu < 1$  llamaremos a la curva  $y=u(x)$  "horizontal" si  $u(x) \in [0,1]$  para toda  $x \in [0,1]$  y  $|u(x_1)-u(x_2)| \leq \mu|x_1-x_2|$  si  $x_1, x_2 \in [0,1]$ . Obsérvese que esto implica que  $u$  es continua.

Si  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  son dos curvas horizontales y además  $u_1(x) < u_2(x)$ , entonces al conjunto  $U = \{ (x,y) \mid x \in [0,1] \text{ y } u_1(x) \leq y \leq u_2(x) \}$  lo llamaremos banda horizontal. El número  $d(U) = \max_{x \in [0,1]} (u_2(x) - u_1(x))$  se llamará diámetro de  $U$ .



En forma analoga  $x=v(y)$  se llamara "curva vertical" si  $v(y) \in [0,1]$  para  $y \in [0,1]$  y  $|v(y_1)-v(y_2)| \leq \mu|y_1-y_2|$  si  $y_1, y_2 \in [0,1]$

Una banda vertical estara definida a través de dos curvas verticales. El número  $0 < \mu < 1$  permanecerá fijo en lo que sigue

b) A continuación estableceremos algunos hechos elementales que nos serán útiles.

LEMA 1. Si  $U_1 \supset U_2 \supset \dots$  es una sucesión anidada de bandas horizontales  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , y si  $d(U_k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \text{ define una curva horizontal}$$

Dem. Si  $U_k$  está definida por las curvas  $\bar{u}_k(x), u_k(x)$ , entonces

$$\bar{u}_k(x) \leq \bar{u}_{k+1}(x) < u_{k+1}(x) \leq u_k(x)$$

La sucesión  $(\bar{u}_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  es creciente y acotada superiormente, por lo tanto converge a, digamos,  $u(x)$ . Ya que  $(d(U_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge a cero, también  $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $u(x)$ .

Sean  $x_1, x_2 \in [0, 1]$

como  $|u_k(x_1) - u_k(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2|$  para toda  $k=1, 2, \dots$

al tomar límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , tenemos

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2|$$

Si  $(x, y) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$  entonces  $\bar{u}_k(x) \leq y \leq u_k(x)$  ( $k=1, 2, \dots$ ), así  $u(x) \leq y \leq u(x)$

Oviamente una afirmación similar es válida para sucesiones anidadas de bandas verticales.

LEMA 2. Una curva horizontal  $y=u(x)$  y una curva vertical  $x=v(y)$  se intersectan exactamente en un punto.

Dem. Un punto  $(x, y)$  está en la intersección de ambas curvas si y solo si es un cero de  $x-v(u(x))$  e  $y=u(x)$ . De acuerdo a las definiciones de curva horizontal y vertical tenemos que si  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ , entonces

$$|v(u(x_2)) - v(u(x_1))| \leq \mu |u(x_2) - u(x_1)| \leq \mu^2 (x_2 - x_1)$$

$$\text{así, } x_2 - v(u(x_2)) - x_1 + v(u(x_1)) \geq (x_2 - x_1) - \mu^2 (x_2 - x_1) = (1 - \mu^2)(x_2 - x_1)$$

Como  $\mu < 1$ , la función  $x-v(u(x))$  es estrictamente creciente, y como además es  $\leq 0$  para  $x=0$  y  $\geq 0$  para  $x=1$ , tiene precisamente un cero. Con esto queda probado el lema.

De esta forma podemos establecer un mapeo del espacio de parejas de curvas (una horizontal y otra vertical) en  $Q$ , asociando al par  $(u, v)$  su punto de intersección, digamos  $z=(x, y)$ . Este mapeo es Lipschitz en las normas  $\|u\| + \|v\| = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)| + \max_{y \in [0, 1]} |v(y)|$

$$|z| = |x| + |y|$$

De hecho, si  $z_j (j=1, 2)$  corresponden a  $(u_j, v_j) (j=1, 2)$  se tiene que  $x_j = v_j(y_j)$  y así,

$$|x_2 - x_1| \leq |v_2(y_2) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_1(y_1)| \leq \|v_2 - v_1\| + |y_2 - y_1|$$

similarmente podemos obtener  $|y_2 - y_1| \leq \|u_2 - u_1\| + \mu |x_2 - x_1|$   
 entonces  $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq (1 - \mu)^{-1} (\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|)$

c) Pasemos ahora a definir el mapeo

Sea  $A = 1, 2, \dots, N$  y supongamos que  $\{U_a | a \in A\}$ ,  $\{V_a | a \in A\}$  son colecciones de bandas horizontales y verticales respectivamente disjuntas en  $Q$ . El mapeo  $f: Q \rightarrow R^2$  es un homeomorfismo sobre su imagen que satisface las siguientes propiedades

(1)  $f(Q) \cap Q = \bigcup_{a \in A} U_a$  y  $f(V_a) = U_a$  para toda  $a \in A$  de tal manera que las fronteras verticales de  $V_a$  son mapeadas sobre las fronteras verticales de  $U_a$  y similarmente para las fronteras horizontales

2) Si  $V$  es una banda vertical en  $\bigcup_{a \in A} V_a$  entonces  $\bar{V}_a = f^{-1}(V) \cap V_a$  es una banda vertical para cualquier  $a \in A$  y similarmente si  $U$  es una banda horizontal en  $\bigcup_{a \in A} U_a$ ,  $\bar{U}_a = f(U) \cap U_a$  es una banda horizontal. Finalmente, supondremos que hay un  $0 < \nu < 1$  fijo tal que, con la notación de antes,  $d(\bar{V}_a) \leq \nu d(V)$ ,  $d(\bar{U}_a) \leq \nu d(U)$ . Obviamente la última condición expresa el hecho de que  $f$  realiza una **expansión en la dirección horizontal** y una **contracción en la dirección vertical**.

d) En seguida describiremos la manera en la que el mapeo  $f$  está relacionado al corrimiento de Bernoulli.

Primero notemos que ya que  $f(Q) \neq Q$ , las iteradas  $f^k$  del mapeo  $f$  no están definidas en todo  $Q$ . De esta manera si nosotros estamos interesados en las órbitas bajo  $f$  debemos considerar solo aquellos puntos  $p \in Q$  tales que  $f^k(p) \in \bigcup_{a \in A} V_a$  para  $k > 0$  y  $f^k(p) \in \bigcup_{a \in A} U_a$  para  $k \leq 0$ .

Por otra parte, para poder seguirle la pista a tales órbitas, debemos tener alguna manera de discernir que puntos van cayendo en determinadas regiones bajo las distintas iteradas de  $f$ . Así por ejemplo, si definimos

$$V_{s_0, s_1} = V_{s_0} \cap f^{-1}(V_{s_1}) = \{p \in Q | f^0(p) \in V_{s_0}, f^1(p) \in V_{s_1}\}$$

$$U_{s_1, s_2} = U_{s_1} \cap f(U_{s_2}) = \{p \in Q | f^0(p) \in U_{s_1}, f^{-1}(p) \in U_{s_2}\}$$

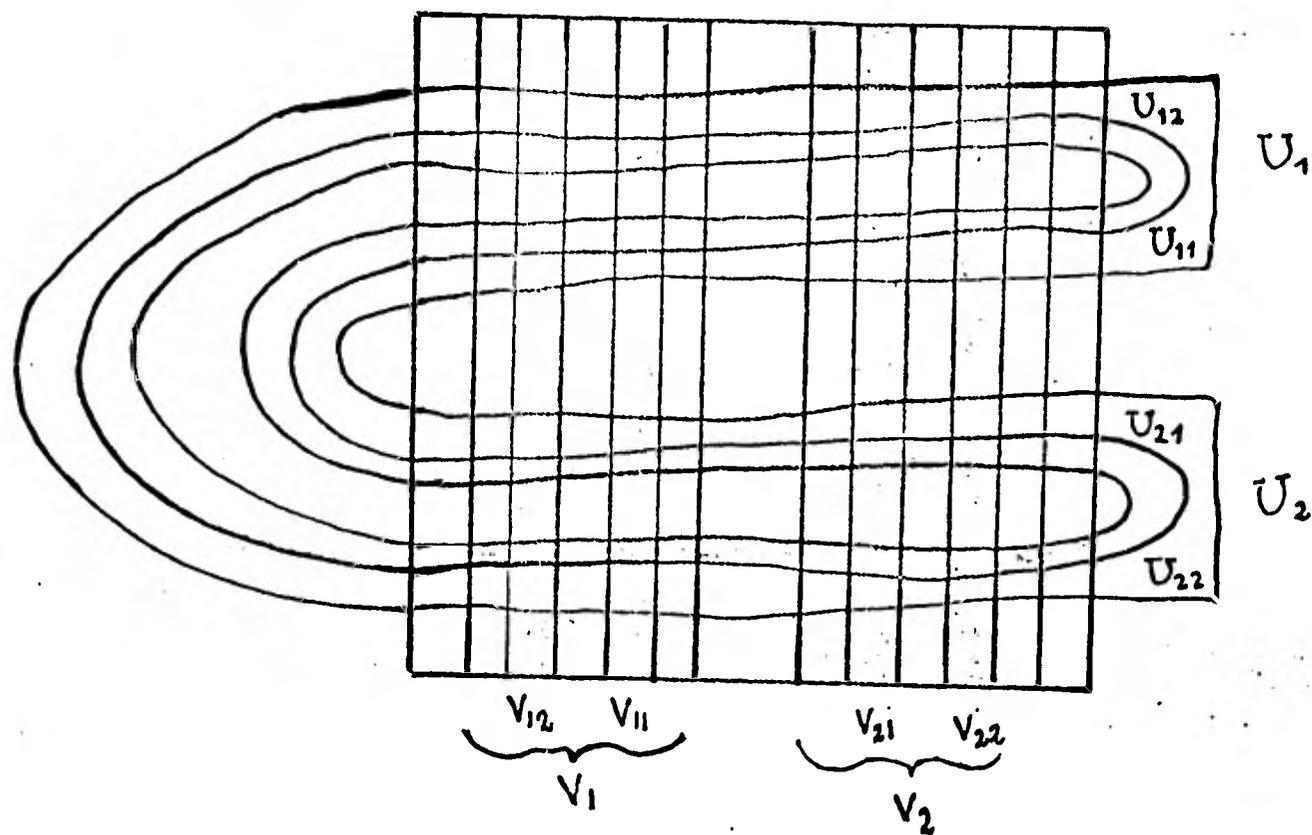
estamos etiquetando a través de las tetradas  $(s_{-1}, s_0, s_1, s_2)$ , los conjuntos que mediante las primeras iteradas de  $f$  van a caer a regiones predeterminadas. (En la figura representamos estos conjuntos cuando  $N=2$ )

Continuando con esta idea definimos inductivamente, para cada  $s \in S$

$$V_{s_0, s_1, \dots, s_n} = V_{s_0} \cap f^{-1}(V_{s_1, \dots, s_n})$$

Se puede demostrar fácilmente por inducción que

$$V_{s_0, s_1, \dots, s_n} = \{p \in Q | f^k(p) \in V_{s_k} \text{ (} k=0, 1, \dots, n \text{)}\}$$



Por lo tanto tendremos que  $V_{s_0 s_1 \dots s_n} \quad V_{s_0 s_1 \dots s_{n+1}}$

Usando la propiedad (2) verificamos también por inducción que

$V_{s_0 s_1 \dots s_n}$  es una banda vertical y que su diametro:  
 $d(V_{s_0 s_1 \dots s_n}) \leq \nu d(V_{s_1 \dots s_n}) \leq \nu^n d(V_{s_n}) \leq \nu^n$ , tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$

Así por el lema 1

$$V(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{ p \in Q \mid f^{-k}(p) \in V_{s_k}, k \leq 0 \}$$

define una curva vertical, la cual depende de la mitad izquierda de la sucesión s.

Similarmente definimos inductivamente para  $n \geq 2$

$$U_{s_1 \dots s_n} = U_{s_1} \cap f(U_{s_2 \dots s_n})$$

las cuales por la propiedad (2) son bandas horizontales anidadas cuyos diametros estan acotados por  $\nu^{n-1}$ . Así, ya que  $f(V_{s_k}) = U_{s_k}$

$$U(s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{s_1 \dots s_n} = \{ p \in Q \mid f^{1-k}(p) \in U_{s_k}, k \geq 1 \} = \{ p \in Q \mid f^{-k}(p) \in V_{s_k}, k \geq 1 \}$$

es una curva horizontal que depende de la mitad derecha de s.

Por el lema 2

$$U(s) \cap V(s) = \{ p \in Q \mid f^{-k}(p) \in V_{s_k}, k \in \mathbb{Z} \} \text{ define precisamente un punto.}$$

De esta manera, podemos definir un mapeo  $\tau: S \rightarrow Q$  asignando a  $s \in S$  el único punto en  $U(s) \cap V(s)$ .

Observemos que si  $\tau(s) = p$  entonces  $f^{-k}(f(p)) \in V_{s_{k-1}}$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $f\tau = \tau f$  y así  $C = \tau(S)$  es un conjunto de Cantor\* invariante bajo f.

\*Observe que esto se obtiene en forma más natural por la construcción de C.

TEOREMA 1.  $\tau: S \rightarrow C$  es un homeomorfismo

Dem. Como  $S$  es compacto, solo es necesario demostrar que  $\tau$  es continua e inyectiva.

Continuidad. Si  $s, s' \in S$  satisfacen que  $s_k = s'_k$  para  $|k| \leq n$ , entonces  $V(s), V(s') \subset V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$  y  $U(s), U(s') \subset U_{s_1 \dots s_n}$

La distancia entre las curvas  $V(s), V(s')$  está acotada por

$$d(V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \nu^n$$

y aquella entre  $U(s), U(s')$  lo esta por

$$d(U_{s_1 \dots s_n}) \leq \nu^{n-1}$$

De acuerdo a la discusión siguiendo al lema 2

$$|\tau(s) - \tau(s')| \leq (1-\mu)^{-1} (\nu^n + \nu^{n-1})$$

de donde, la continuidad se sigue facilmente

Inyectividad. El hecho de que las bandas verticales  $V_a$  sean disjuntas implica que para las curvas horizontales  $U(s), U(s')$  solo hay dos posibilidades; o bien  $U(s) = U(s')$  en el caso en que  $s_k = s'_k$  para toda  $k \geq 1$ , o bien  $U(s) \cap U(s') = \emptyset$ . Análogamente, las curvas verticales  $V(s), V(s')$  o bien coinciden, en el caso en que  $s_k = s'_k$  para toda  $k \leq 0$ , o bien nunca se intersectan. De estas observaciones se sigue la inyectividad.

Como conclusión de la discusión anterior tenemos que  $f|C$  es topologicamente equivalente al corrimiento  $\sigma$ . Asi, ambos mapeos tienen la misma estructura de órbitas.

e) Como puede observarse, verificar la condición (2) en un caso concreto es una tarea difícil. Por lo tanto es conveniente cambiarla por otra condición, y esto lo haremos dándole a la condición (2) una forma infinitesimal en el caso en que  $f$  es continuamente diferenciable y las fronteras de las bandas  $U_a, V_a$  son diferenciables.

Denotaremos por  $z_1$  a la imagen del punto  $z_0$ :  $z_1 = f(z_0)$

Si  $(\xi_0, \eta_0) \in T_{z_0}(Q)$  usaremos la notación  $(\xi_1, \eta_1) = df(\xi_0, \eta_0)$

Para  $0 < \mu < 1$  llamaremos sector horizontal a

$$S^+(z) = \{(\xi, \eta) \in T_z(Q) \mid |\eta| \leq \mu |\xi|\}$$

y sector vertical a

$$S^-(z) = \{(\xi, \eta) \in T_z(Q) \mid |\xi| \leq \mu |\eta|\}$$

La nueva condición es la siguiente:

(3)  $df$  preserva el haz de sectores horizontales, es decir:

$$df(S^+(z_0)) \subset S^+(z_1) \quad \text{para toda } z_0 \in \bigcup_{a \in A} V_a$$

Más aún, si  $(\xi_0, \eta_0) \in S^+(z_0)$  entonces  $|\xi_1| \geq \mu^{-1} |\xi_0|$

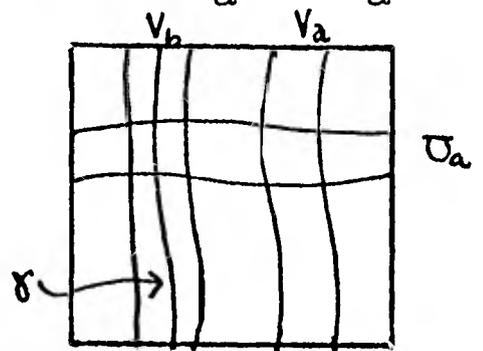
Similarmente,  $df^{-1}$  preserva el haz de sectores verticales, es decir

$$df^{-1}(S^-(z_1)) \subset S^-(z_0) \quad \text{para toda } z_1 \in \bigcup_{a \in A} U_a$$

y si  $(\xi_1, \eta_1) \in S^-(z_1)$  entonces  $|\eta_0| \geq \mu^{-1} |\eta_1|$

TEOREMA 2. Supongamos que  $f$  es continuamente diferenciable y que las fronteras de las bandas  $U_a, V_a$  ( $a \in A$ ) son curvas diferenciables. Si  $f$  satisface las condiciones (1) y (3) para  $0 < \mu < 1/2$  entonces la condición (2) es válida con  $\nu = \mu(1-\mu)^{-1}$  para bandas con fronteras diferenciables (observemos que esto es suficiente para demostrar lo establecido en d)).

Dem. Sea  $\gamma$  una curva vertical diferenciable en la banda  $V_b$  ( $b \in A$ ). Por lo tanto  $\gamma$  intersecta toda curva horizontal y en particular, las fronteras de  $U_a$ . Así  $\hat{\gamma} = \gamma \cap U_a$  conecta las fronteras horizontales de  $U_a$ , y por lo tanto  $f^{-1}(\hat{\gamma})$  es una curva diferenciable conectando las fronteras horizontales de  $f^{-1}(U_a) = V_a$



Supongamos que  $\gamma$  esta dada por  $x=v(y)$  con  $|v'(y)| \leq \mu$   
 Sea  $p_i = (a_i, b_i) \in f^{-1}(\hat{\gamma})$  ( $i=1,2$ ), entonces  $f(p_i) = (v(y_i), y_i) \in U_a$  ( $i=1,2$ )

Sea  $q(y) = (v(y), y)$   $y_1 \leq y \leq y_2$

y definamos  $p(y) = f^{-1}(q(y))$

así  $p_2 - p_1 = \int_{y_1}^{y_2} p'(y) dy$

como  $(v', 1) \in S^-(q(y))$ , entonces

$$p'(y) = \left( df^{-1}(q(y)) \right) \begin{bmatrix} v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(y) \\ \beta(y) \end{bmatrix} \text{ con } |\alpha(y)| \leq \mu |\beta(y)|$$

y ya que  $df^{-1}$  es un isomorfismo,  $\beta$  no cambia de signo. Así,

$$\mu |b_2 - b_1| = \mu \left| \int_{y_1}^{y_2} \beta(y) dy \right| = \int_{y_1}^{y_2} \mu |\beta(y)| dy \geq \int_{y_1}^{y_2} |\alpha(y)| dy \geq \left| \int_{y_1}^{y_2} \alpha(y) dy \right| = |a_2 - a_1|$$

Esto muestra que  $f^{-1}(\hat{\gamma}) = f^{-1}(\gamma) \cap V_a$  es la gráfica de una función  $x=w(y)$  definida para  $0 \leq y \leq 1$  satisfaciendo

$$|w(b_2) - w(b_1)| \leq \mu |b_2 - b_1|$$

Si aplicamos este hecho a las fronteras de  $V \subset V_b$  podemos concluir que la preimagen de  $\hat{V} = V \cap U_a$  y así  $f^{-1}(V) \cap V_a$  es una banda vertical

En seguida verificaremos el enunciado respecto al diametro, para  $0 < \mu < 1/2$  y  $\nu = \frac{\mu}{1-\mu} < 1$

Sean  $p_1, p_2$  dos puntos sobre las fronteras verticales de  $f^{-1}(\hat{V})$  tales que sus coordenadas- $y$  son iguales y  $d(f^{-1}(\hat{V})) = |p_1 - p_2|$

Definamos  $p(t) = (1-t)p_1 + tp_2$   $0 \leq t \leq 1$

así  $p' \in S^+(p(t))$  y por lo tanto la curva imagen  $z(t) = f(p(t))$

tiene tangente  $z' = (df)_p p' \in S^+(z(t))$

Así, podemos extender  $z(t)$  a una curva horizontal. De esta manera los puntos  $z(0)$ ,  $z(1)$  están sobre una misma curva horizontal y dos curvas verticales a una distancia  $d(\hat{V})$ . Por lo tanto

$$|z(0) - z(1)| \leq (1-\mu)^{-1} d(\hat{V})$$

Finalmente, escribiendo  $z(t) = (x(t), y(t))$  tenemos por la segunda hipótesis en (3) que  $|x'| \geq \mu^{-1} |p'| > 0$ . Así  $x'$  no cambia de signo y

$$|p_1 - p_2| = \int_0^1 |p'| dt \leq \mu \int_0^1 |x'| dt = \mu |x(1) - x(0)| \leq \mu |z(1) - z(0)| \leq \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) d(\hat{V}).$$

Para cada  $s \in S$  hemos construido en  $d$ ) una curva horizontal  $U(s)$  y una vertical  $V(s)$ , las cuales están determinadas por la parte derecha o izquierda de  $s$  respectivamente. En el siguiente teorema daremos más información sobre estas curvas.

TEOREMA 3. Supongamos que  $f$  es continuamente diferenciable y pongamos  $J = \det(df)$ . Si  $f$  satisface las condiciones (1) y (3) para

$$(4) \quad 0 < \mu < \frac{1}{2} \min(|J|^{1/2}, |J|^{-1/2})$$

entonces las curvas  $U(s), V(s)$  son continuamente diferenciables.

Dem. Basta probar esto para las curvas horizontales  $U(s)$ . Recordando que dos de estas curvas, distintas, no se intersectan, definamos

$$\mathcal{U} = \bigcup_s U(s)$$

Notemos que  $\mathcal{U}$  es invariante bajo  $df^{-1}$ . En efecto, de la definición de  $U(s)$  tenemos que

$$U(s) = U_{s_1} \cap f(U(\sigma^{-1}(s)))$$

así, aplicando  $f^{-1}$

$$f^{-1}(U(s)) = V_{s_1} \cap U(\sigma^{-1}(s)) \subset U(\sigma^{-1}(s))$$

A cada  $p \in \mathcal{U}$  le asociaremos una colección de rectas  $M_p$  en la siguiente forma. Supongamos que  $p = (\bar{x}, \bar{y}) \in U(s)$ , con  $U(s)$  dada en la forma  $y = u(x)$ . Consideremos ahora las parejas de sucesiones  $x_n, x'_n$  convergentes a  $\bar{x}$  para las que

$$\alpha_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(x_n) - u(x'_n)}{x_n - x'_n}$$

existe;  $M_p$  será la colección de rectas  $\eta = \alpha_p \xi$  con  $\alpha_p$  variando en el conjunto de límites mencionados. De la definición de curva horizontal tenemos que  $|\alpha_p| \leq \mu$  y el conjunto de los  $\alpha_p$  es cerrado ( $p$  fijo).

$$\text{Sea } \omega(M_p) = \max \alpha_p - \min \alpha_p \leq 2\mu$$

Así,  $\omega(M_p) = 0$  implica que  $y = u(x)$  tiene tangente en  $p$ . Puesto que para calcular los  $\alpha_p$  hemos permitidos sucesiones arbitrarias, que  $U(s)$  sea continuamente diferenciable es equivalente a que  $\omega(M_p) = 0$  para todo  $p \in U(s)$ .

En lo que sigue denotaremos  $df_{f^{-1}(p)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   $(df^{-1})_p = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$

Consideremos cualquier recta  $\eta = \alpha \xi$  en  $M_{f^{-1}(p)}$ . Su imagen bajo  $df$  es la línea  $\eta_1 = \alpha^* \xi_1$

$$\text{donde } \alpha^* = \frac{c+d\alpha}{a+b\alpha}$$

La desigualdad  $|\xi_1| \geq \mu^{-1} |\xi|$  es equivalente a  $|a+b\alpha| \geq |\mu|^{-1}$ . Si  $\beta$  define una segunda recta en  $M_{f^{-1}(p)}$  y  $\beta^*$  su imagen, entonces

$$|\alpha^* - \beta^*| \leq \frac{|\beta|}{|a+b\alpha| |a+b\beta|} \quad |\alpha - \beta| \leq \mu^2 |\beta| \quad |\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2} |\alpha - \beta|$$

Por otra parte, para el haz  $M = (M_p)_{p \in U}$ , tenemos que  $M \subset df(M)$ . En efecto, si  $\eta_1 = \alpha^* \xi_1$  es una recta en  $M_p$  entonces, con la notación anterior, hay un par de sucesiones  $x_n \neq x'_n$  convergentes a  $\bar{x}$  tales que

$$\alpha^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(x_n) - u(x'_n)}{x_n - x'_n}$$

Definamos  $(\alpha_n, \beta_n) = f^{-1}(x_n, u(x_n))$  y análogamente para  $x'_n$ . Ya hemos demostrado que  $f^{-1}(p), (\alpha_n, \beta_n), (\alpha'_n, \beta'_n)$  pertenecen a la curva  $U(\sigma^{-1}(s))$ . Utilizando el teorema del valor medio obtenemos que

$$\alpha \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n - \beta'_n}{\alpha_n - \alpha'_n} = \frac{\bar{c} + \bar{d} \alpha^*}{\bar{a} + \bar{b} \alpha^*}$$

y por lo tanto  $\eta_0 = \alpha \xi_0$  es una recta en  $M_{f^{-1}(p)}$ . Despejando  $\alpha^*$

$$\alpha^* = \frac{c+d\alpha}{a+b\alpha}$$

lo que demuestra que la recta  $\eta_1 = \alpha^* \xi_1$  es la imagen de la recta  $\eta_0 = \alpha \xi_0$ .

De esta manera tenemos que

$$\omega(M_p) \leq \omega(df M_{f^{-1}(p)}) \leq \frac{1}{2} \omega(M_{f^{-1}(p)})$$

por lo tanto  $\sup_{p \in U} \omega(M_p) \leq \frac{1}{2} \sup_{p \in U} \omega(M_p)$

y así  $\sup_{p \in U} \omega(M_p) = 0$

### 3.- EL TEOREMA DE SMALE

En esta sección consideraremos un difeomorfismo  $f$  de un dominio plano y demostraremos

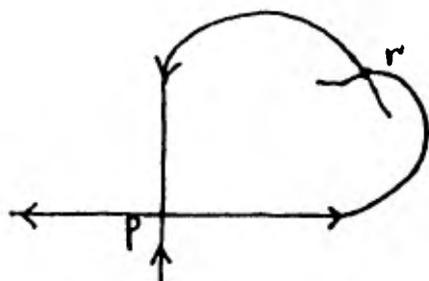
TEOREMA 4. Si  $f \in C^2$  posee un punto homoclínico  $r$ , en el cual las curvas  $W^+(p), W^-(p)$  de un punto fijo hiperbólico  $p$  se intersectan transversalmente, entonces alguna iterada  $f^m$  de  $f$  posee un subconjunto invariante  $C$  tal que,  $f^m|_C$  es topológicamente equivalente al corrimiento de Bernoulli.

Comenzaremos con un estudio local del difeomorfismo  $f$  cerca del punto fijo hiperbólico  $p$ . Supongamos que los eigenvalores de  $df_p$  son

$$\lambda, \mu \text{ donde } 0 < \mu < 1 < \lambda$$

(Si esto no es cierto para  $f$ , lo es para  $f^2$ )

Podemos introducir coordenadas locales, tales que  $p$  corresponde a  $x=y=0$ , y las curvas asintóticas a los ejes coordenados. Sin perder generalidad, supondremos que el punto homoclínico  $r$  está en la intersección de las ramas de las curvas estable e inestable, que son las prolongaciones de los segmentos positivos de los ejes coordenados.



Denotando la imagen de  $(x,y)$  bajo  $f$  por  $(x_1, y_1)$  tenemos, en una vecindad del origen, que

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x,y) \\ y_1 &= \psi(x,y) \end{aligned}$$

donde  $\phi, \psi$  son continuamente diferenciables y

$$(5) \quad \begin{aligned} \phi(0,y) &= \psi(x,0) = 0 \\ \phi_x(0,0) &= \lambda \quad \psi_y(0,0) = \mu \end{aligned}$$

Restringiremos nuestra atención a un pequeño cuadrado  $Q = [0, a]^2$  donde  $a > 0$  tiene que ser elegida. En lo que sigue denotaremos la imagen de  $(x_0, y_0)$  bajo  $f^k$  mediante  $(x_k, y_k)$

Asociado a  $f$  tenemos el mapeo lineal  $df$  dado por

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

La imagen bajo  $df^k$  sera denotada por  $(\xi_k, \eta_k)$

LEMA. Si  $a > 0$  es suficientemente pequeño y la sucesión de iteradas  $(x_k, y_k)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) está en el interior de  $Q$ , la desigualdad

$$\begin{aligned} |\eta_0| &\leq (y_0/x_0)^{1/2} |\xi_0| && \text{implica} \\ |\eta_k| &\leq (y_k/x_k)^{1/2} |\xi_k| && |\xi_k| \geq (x_k/y_k)^{1/2} |\xi_{k-1}| \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Dem. Introduzcamos las coordenadas  $u, v$  mediante  $x=u^2, y=v^2$ . Así nuestro mapeo toma la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= F(u, v) \\ v_1 &= G(u, v) \quad \text{para } 0 \leq u, v \leq \sqrt{a} \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} F(0, v) &= G(u, 0) = 0 \\ F_u(0, 0) &= \sqrt{\lambda} \quad G_v(0, 0) = \sqrt{\mu} \end{aligned}$$

y  $F, G$  son continuamente diferenciables si  $f \in C^2$

Para el mapeo lineal tenemos

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Si suponemos que  $|q_0| \leq |p_0|$ , entonces

$$|p_1| \geq (|F_u| - |F_v|) |p_0| = (\sqrt{\lambda} - O(a)) |p_0|$$

$$|q_1| \leq (|G_u| + |G_v|) |p_0| = (\sqrt{\mu} + O(a)) |p_0|$$

así, si  $a$  es suficientemente pequeño tenemos

$$|p_1| \geq |p_0| \quad , \quad |q_1| \leq |p_1|$$

Por aplicación repetida, concluimos que

$$|q_k| \leq |p_k| \quad , \quad |p_k| \geq |p_{k-1}| \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

siempre y cuando  $|q_0| \leq |p_0|$  y los puntos  $(u_k, v_k) (k=0, 1, \dots, n)$  permanezcan en  $[0, \sqrt{\lambda}]^2$

Diferenciando  $x=u^2, y=v^2$  tenemos que esto es aplicable a

$$p_k = \frac{\xi_k}{2\sqrt{x_k}} \quad , \quad q_k = \frac{\eta_k}{2\sqrt{y_k}}$$

con lo que el lema queda probado.

Lo que este lema afirma, es que en un cuadrado  $Q$  suficientemente pequeño el haz de sectores horizontales

$$|\eta| \leq \sqrt{\frac{y}{x}} |\xi|$$

se preserva bajo  $df$ . Similarmente se demuestra que el haz de sectores verticales

$$|\xi| \leq \sqrt{\frac{x}{y}} |\eta|$$

es preservado por  $df^{-1}$  siempre que los puntos base permanezcan en  $Q$ . También, utilizando las ecuaciones (5) y el teorema del valor medio, se obtiene que si  $a > 0$  es suficientemente pequeño, entonces para

$$(x_0, y_0) \in Q \quad x_1 \geq \lambda^{1/2} x_0, \quad y \leq \mu^{1/2} y_0$$

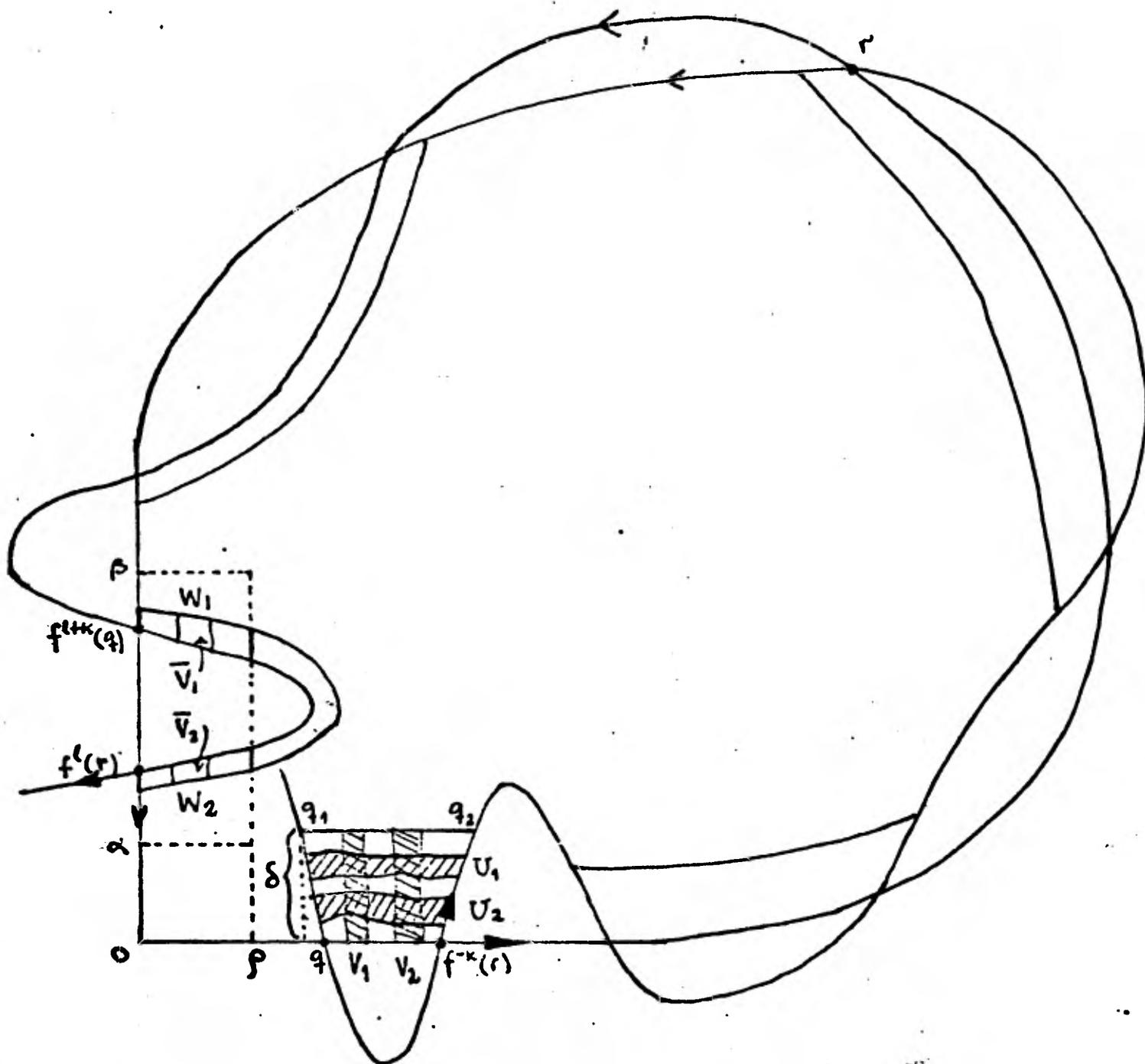
Para demostrar el teorema 4 utilizaremos el teorema 2, y por lo tanto tenemos que construir los conjuntos de bandas horizontales y verticales que satisfagan las condiciones (1) y (3).

Si realizamos la construcción en la vecindad de alguna iterada  $f^{-k}(r)$ , la situación en esa vecindad se puede conjugar con aquella al-rededor de  $r$  mediante  $f^k$ .

Denotemos por  $J$  e  $I$  las intersecciones con el cuadrado  $Q$  de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. Orientando el segmento  $I$  en el sentido de las  $y$ 's decrecientes, obtenemos una orientación de  $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(I)$  (la orientación natural). Analogamente, orientando  $J$  en el sentido de las  $x$ 's crecientes, obtenemos la orientación natural de la rama  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(J)$  de la curva estable.

Para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tenemos que  $f^{-k}(r) \in J$ . Como las curvas asintóticas se intersectan transversalmente, un vector  $T$  tangente a  $W^+(p)$  en  $f^{-k}(r)$  y compatible con la orientación, tiene com-

ponente-y no nula, pongamos por caso que es positiva.



Como el segmento  $S = f^{-(k+1)}(r) f^{-k}(r)$  de la curva estable es compacto y las curvas asintóticas se intersectan transversalmente, solo puede haber un número finito de puntos de intersección de  $S$  con el segmento  $[f^{-(k+1)}(r), f^{-k}(r)] \subset J$ . Escojamos  $q$  de tal manera que

$$q \in f^{-k}(r) \quad [q, f^{-k}(r)] = \{q, f^{-k}(r)\}$$

Como la componente-y de  $T$  no es nula, hay 2 segmentos suficientemente pequeños de la curva inestable, que contienen a  $q$  y  $f^{-k}(r)$  respectivamente, los cuales pueden expresarse en la forma  $x=h_1(y)$  con  $h_1$  de clase  $C^1$ .

Escojamos  $l \in \mathbb{Z}$  de tal manera que  $f^{l-1}(r)$  este en  $I$ , en ese caso  $f^{l+k}(q)$  y  $f^l(r)$  pertenecen al interior de  $I$ . Ya que  $f$  preserva la orientación, un vector tangente a  $W^-(p)$  en  $f^l(r)$  tiene componente-x ne

gativa, o equivalentemente, si denotamos  $df_z^{l+k} = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$

entonces  $A(f^{-k}(r)) < 0$ . Similarmente  $A(q) > 0$ .

Con  $l$  y  $k$  fijos realizaremos la siguiente construcción, que depende de un parámetro  $0 < \delta < a$ , el cual tiene que elegirse. Sean  $b_1, b_2, c_1, c_2 \in ]0, a[$  tales que  $q = (b_1, 0)$ ,  $f^{-k}(r) = (b_2, 0)$ ,  $f^{l+k}(q) = (0, c_1)$ ,  $f^l(r) = (0, c_2)$ . Así,  $b_1 < b_2$  y  $c_1 > c_2$ .

Para  $\delta$  suficientemente pequeña la recta  $y = \delta$  interseca las curvas  $x = h_1(y)$  en dos puntos  $q_1, q_2$ . Consideremos el cuadrilátero  $R$  limitado por las rectas  $y = 0, \delta$  y las curvas de la forma  $x = h_1(y)$ .

Si  $\delta$  es suficientemente pequeña, hay un rectángulo  $R^* = [0, \rho] \times [\alpha, \beta]$  (con  $0 < \rho \leq \delta$ ,  $c_2/2 < \alpha < c_2 < c_1 < \beta < a$ ) y un número  $\bar{A} > 0$ , tales que  $|A(z)| \geq \bar{A}$  para toda  $z \in f^{-k+l}(f^{k+l}(R) \cap R^*)$ . En particular  $f^{k+l}(R) \cap R^* = W_1 \cup W_2$  donde  $W_i (i=1,2)$  es una banda limitada por curvas de la forma  $y = h_2(x)$ , con  $h_2 \in C^1$ , y las rectas  $x = 0, \rho$ .

Ya que para  $(x_0, y_0) \in Q$  se tiene que  $x_1 \geq \lambda^{1/2} x_0$ ,  $y \leq \mu^{1/2} y_0$ ; si  $m$  es suficientemente grande, la imagen bajo  $f^m$  de cada curva  $y = h_2(x)$  interseca  $[0, a] \times [0, \delta]$  en una curva continuamente diferenciable que conecta  $x = 0$  y  $x = a$ . Por lo tanto  $f^m(W_i) \cap R = U_i$  es una banda (horizontal, como probaremos). Para obtener información acerca de los vectores tangentes a las curvas frontera de  $U_i (i=1,2)$ , aplicaremos el lema a dichos vectores. En el conjunto de estos vectores tangentes  $(\xi_0, \eta_0)$ , la cantidad  $|\eta_0/\xi_0|$  permanece acotada y así, si tomamos  $\delta$  suficientemente pequeña se satisfaca la desigualdad

$$(6) \quad |\eta_0| \leq \sqrt{\frac{c_2}{2\delta}} |\xi_0|$$

Ya que en  $W_1 \cup W_2$  tenemos que  $0 \leq x_0 \leq \delta$ ,  $\frac{c_2}{2} \leq y_0$ , la desigualdad (6) implica que

$$(7) \quad |\eta_m| \leq \sqrt{\frac{y_m}{x_m}} |\xi_m| \leq \sqrt{\frac{\delta}{b_1}} |\xi_m|$$

para la imagen bajo  $df^m$ . Por lo tanto las curvas frontera de  $U_i (i=1,2)$  son de la forma  $y = h(x)$  con  $|h'| \leq \sqrt{\delta/b_1}$

Consideraciones análogas muestran que  $\bar{V}_i = f^{-m}(U_i)$  es una banda vertical en  $W_i (i=1,2)$  para la cual las derivadas  $\frac{dx}{dy}$  de las curvas frontera pueden controlarse. Por lo tanto

$$V_i = f^{-(k+l)}(\bar{V}_i) = f^{-(k+l+m)}(U_i) \quad i=1,2$$

es un banda vertical en  $R$ .

Denotemos por  $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  los máximos de  $|B(z)|, |C(z)|, |D(z)|$  en  $R$ .

Si  $\delta$  es suficientemente pequeño, tenemos que  $|A - B\sqrt{\frac{\delta}{b_1}}| > A/2$

$$y \quad \frac{\bar{C} + \bar{D}\sqrt{\delta/b_1}}{A - \bar{B}\sqrt{\delta/b_1}} \leq \sqrt{\frac{c_2}{2\delta}}$$

Por lo tanto, denotando por  $(\xi_0, \eta_0)$  a la imagen de  $(\xi_*, \eta_*)$  bajo  $df^{k+l}$  tenemos que si el punto base esta en  $V_1 \cup V_2$  y  $|\eta_*| \leq \sqrt{\frac{\delta}{b_1}} |\xi_*|$  entonces  $|\xi_0| \geq \frac{A}{2} |\xi_*|$  y  $(\xi_0, \eta_0)$  satisface (6). Así, por el lema tenemos que (7) es válida y

$$|\xi_m| \geq \sqrt{\frac{x_m}{x_0}} |\xi_0| \geq \frac{A}{2} \sqrt{\frac{b_1}{\delta}} |\xi_*|$$

De esta manera tenemos que si  $\delta$  es suficientemente pequeña y tomamos

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta}{b_1}} \max\left(1, \frac{2}{A}\right).$$

entonces  $df^{k+l+m}$  satisface los requerimientos de (3) para el haz de sectores horizontales en  $V_1 \cup V_2$ . Argumentos similares muestran que  $df^{-(k+l+m)}$  satisface los requerimientos para el haz de sectores verticales  $U_1 \cup U_2$ . Así por los teoremas 2 y 1 hay un conjunto  $C \subset \mathbb{R}$  invariante bajo  $f^{k+l+m}$  y tal que  $f^{k+l+m}|_C$  es topológicamente equivalente al corrimiento  $\sigma$  con  $N=2$ .

De acuerdo al lema y la observación final en la sección 1,  $f^{k+l+m}$  y así  $f$ , posee una infinidad de puntos periódicos y puntos homoclinicos.

#### 4.- NO EXISTENCIA DE INTEGRALES

Desde un punto de vista histórico la cuestión de la existencia de integrales para el problema de los 3 cuerpos, y más generalmente para un sistema Hamiltoniano, ha sido de gran interés. De acuerdo a un resultado de Brun, cualquier integral del problema de los 3 cuerpos, dependiendo algebraicamente de las variables del espacio fase, es necesariamente una función de las diez integrales conocidas. Este notable teorema es, sin embargo, de poco valor para la descripción dinámica del flujo, ya que pueden existir integrales  $C^1$  o aún integrales reales analíticas que no sean algebraicas. En lo que sigue, mostraremos que no existe una integral analítica cerca de una orbita homoclinica.

Para un difeomorfismo  $f$  en un dominio plano  $D$ , diremos que una función real  $I$  definida en  $D$  es una integral de  $f$ , si  $I$  no es constante e  $I(f(p)) = I(p)$  para todo  $p \in D$ .

TEOREMA 5. Cualquier difeomorfismo  $f$  que satisface las hipótesis del teorema 3, no posee una integral real analítica en  $Q$ .

Dem. se sigue de la sección 2, que hay un conjunto  $C$  invariante bajo  $f$  y tal que  $f|_C$  es equivalente al corrimiento  $\sigma$ . Más aún, los puntos de  $C$  aparecen como las intersecciones de las curvas horizontales y verticales  $U(s), V(s)$ , las cuales son continuamente diferenciables.

Para cada natural  $k$ , el conjunto de  $k$ -bloques de elementos de  $A$  es decir  $A^k$ , es finito. Así, podemos construir una  $s^* \in S$  que contenga

todos los bloques finitos posibles, y entonces la órbita  $\{\sigma^n(s^*) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  es densa en  $S$ . Escribamos  $p^* = \tau(s^*)$ .

Supongamos que  $I$  es una función real, continua en  $C$  y satisfaciendo  $I(f(p)) = I(p)$  para todo  $p \in C$ . En particular tenemos que  $I(f^n(p^*)) = I(p^*)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Como la órbita  $\{f^n(p^*) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  es densa en  $C$  y por la continuidad de  $I$  tenemos que  $I(p) = I(p^*)$  para toda  $p \in C$ .  
o sea,  $I$  es constante en  $C$ .

Ahora supongamos que  $I \in C^1(Q)$  es una integral de  $f$ . Sea  $p = \tau(s)$  cualquier punto en  $C$ , entonces  $p$  está en la curva horizontal  $U(s)$  y en la curva vertical  $V(s)$ . Modificando la mitad izquierda de la sucesión  $s$ , obtenemos una sucesión de puntos  $q_n \in U(s) \cap C$ ,  $q_n \neq p$  que converge a  $p$ . Así, si parametrizamos  $U(s)$  por  $x$  y  $q_n = (x_n, y_n)$ , entonces para la derivada direccional  $D_1 I$  a lo largo del vector tangente a  $U(s)$  en el punto  $p = (x, y)$  tenemos que

$$D_1 I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(q_n) - I(p)}{x_n - x} = 0$$

ya que  $I(q_n) = I(p)$

Por el mismo argumento, la derivada direccional  $D_2 I$  a lo largo del vector tangente a  $V(s)$  en  $p$  se anula. Ya que esas direcciones son linealmente independientes, concluimos que

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial y} = 0 \quad \text{sobre } C$$

Si  $I \in C^\infty(Q)$ , repetimos este argumento y deducimos que todas las derivadas de  $I$  se anulan en  $C$ . Así, si  $I$  es analítica, es idénticamente igual a una constante.

El teorema 5 implica que si  $f$  es un difeomorfismo que posee un punto homoclínico, entonces alguna iterada  $f^m$  no posee una integral real analítica. Pero si  $I$  fuera una integral para  $f$ , también lo sería para  $f^m$ , y por lo tanto  $f$  tampoco posee tal integral.

APENDICE: PUNTOS HOMOCLINICOS CERCA DE PUNTOS FIJOS ELIPTICOS  
 Presentamos aqui una exposici3n somera del contenido del art3culo de E. Zehender acerca de puntos homoclinicos para difeomorfismos analiticos que preservan 3rea. Estos difeomorfismos aparecen al considerar el mapeo de Poincar3 para 3rbitas peri3dicas de sistemas hamiltonianos analiticos (ver [3]). Zehender estudia el comportamiento de dichos difeomorfismos en la vecindad de un punto fijo el3ptico, el cual corresponde a una 3rbita peri3dica estable del sistema hamiltoniano. Un primer paso en este estudio consiste en llevar el mapeo analitico que preserva 3rea  $f$  a la forma normal de Birkhoff:

Sea  $0$  el punto fijo el3ptico de  $f$ , y sean los eigenvalores de  $df_0$ , si satisface

$$(1) \quad \lambda^n \neq 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq 2l+2$$

entonces hay una carta analitica que preserva 3rea en la cual el mapeo tiene la siguiente forma normal (en notaci3n compleja  $\zeta = \xi + i\eta$ )

$$(2) \quad \zeta_1 = \zeta e^{i w_l(|\zeta|^2)} + P_l(\zeta, \bar{\zeta})$$

donde  $w_l$  es el polinomio  $w_l(|\zeta|^2) = \gamma_0 + \gamma_1|\zeta|^2 + \dots + \gamma_l|\zeta|^{2l}$

y los n3meros reales  $\gamma_i$  son llamados constantes de Birkhoff. Todos los t3rminos de la funci3n analitica  $P_l$  son de grado al menos  $2l+2$ .

Si  $|\zeta|$  es peque1a, esta forma normal podr3a describir posiblemente, una aproximaci3n de  $f$  mediante un difeomorfismo integrable  $T: \zeta_1 = \zeta e^{i w_l}$ .  $T$  es un mapeo de torsi3n (twist) analitico que preserva 3rea (ver [4]) el cual deja invariables todas las circunferencias  $|\zeta| = \text{cte.}$  centradas en el punto fijo  $0$ . Esto podr3a crear la impresi3n de que las iteradas del mapeo se comportan de manera predesible; sin embargo, el comportamiento interesante est3 contenido en el t3rmino restante  $P$ . Con la adici3n de este t3rmino, la mayor3a de las circunferencias invariantes bajo  $T$  sobreviven como curvas invariantes bajo  $f$ . Este hecho es un resultado importante de J3rgen Moser, que dice que si  $\gamma_1 \neq 0$  y  $\lambda^3, \lambda^4 \neq 1$ , entonces hay un conjunto  $D$  de curvas invariantes analiticas cercanas a esas circunferencias al rededor del punto fijo. La restricci3n de  $f$  a esas curvas invariantes es analiticamente equivalente a una rotaci3n con n3mero rotacional fuertemente irracional. M3s a3n, la uni3n de las curvas en  $D$ , tiene medida positiva en toda vecindad del punto fijo.

Por otra parte, Birkhoff demostr3 que en cada vecindad del punto fijo el3ptico hay puntos peri3dicos de periodos arbitrariamente grandes (ver [3] para una demostraci3n). Si tomamos un microscopio y enfocamos la regi3n entre 2 curvas de  $D$  (la llamada zona de inestabilidad) esperaremos encontrar, en general,

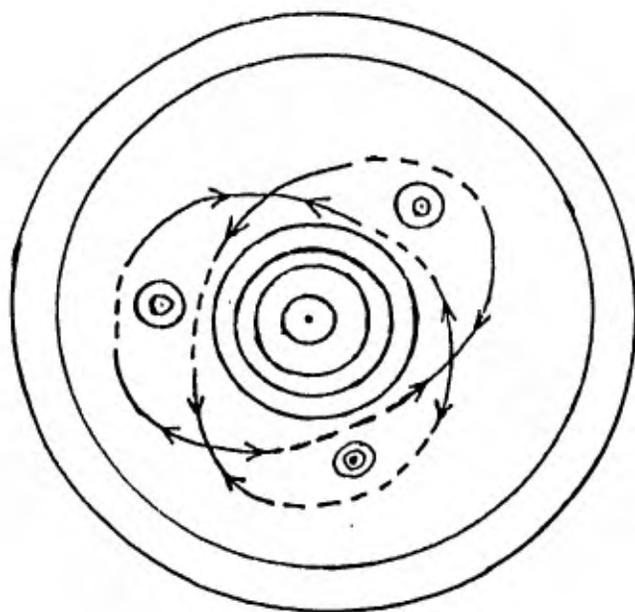


Fig. 1

Alrededor de los puntos periódicos elípticos, generalmente encontraremos otra vez curvas invariantes bajo una iterada superior de  $f$ ; entre esas islas estables hay curvas estables e inestables de los puntos hiperbólicos, Si el sistema fuera integrable esas curvas empalmarían (como se indica en la Fig. 1 por las líneas punteadas). En este **apendice veremos** que por el contrario, esas curvas se intersectan "en general" y de hecho transversalmente, es decir, hay puntos homoclínicos transversales.

### 1.- NOTACION Y ENUNCIADO DEL RESULTADO

a) Cartas de funciones generatrices. Denotaremos por  $\Delta_0$  el conjunto de mapeos locales analíticos que preservan area, los cuales están definidos en alguna vecindad del origen en  $\mathbb{R}^2$ , y que tienen al origen como punto fijo elíptico. Sea  $f \in \Delta_0$ , entonces  $f = df_0 \circ C$  donde  $C$  es un mapeo analítico de la forma

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi &= x + \dots \\ \eta &= y + \dots \end{aligned}$$

y que preserva area. En 3] se demuestra

que para los mapeos con estas propiedades hay una función  $\rho$ , llamada función generatriz de  $C$  y escrita  $C = E(\rho)$ , tal que

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi &= \rho_\eta(x, \eta) \\ y &= \rho_x(x, \eta) \end{aligned}$$

La función  $\rho$  es analítica en una vecindad del origen y tiene la forma

$$\rho(x, \eta) = x\eta + \sum_{i+k \geq 3} \rho_{ik} x^i \eta^k$$

Denotemos por  $G_0$  el conjunto de esas funciones generatrices. Ya que toda transformación lineal elíptica que preserva area  $T$  es similar bajo una transformación que preserva area  $A$  a una rotación  $R_\alpha$ ,  $T=AR_\alpha A^{-1}$ , nos restringimos unicamente a tales partes lineales, y describiremos el conjunto de difeomorfismos  $f=R_\alpha \circ E(\rho) \in \Delta_0$ ,  $R_\alpha=df_0$ , por la siguiente carta:

$$f = R_\alpha E(\rho) \rightarrow (\lambda, \rho) \in S^1 - \{ \pm 1 \} \times G_0$$

donde  $\lambda = e^{i\alpha}$  ( $\alpha$  real), es el eigenvalor de  $R_\alpha = df_0$ . Frecuentemente abreviaremos escribiendo  $f \equiv (\lambda, \rho)$

• Para que una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^2$  quede contenida en el  $\phi$  dominio de definición de todas las funciones generatrices locales en consideración, introduciremos para  $K > 0$  el subconjunto  $G_{0K} \subset G_0$ , definido como

$$(5) \quad G_{0K} = \{ \rho \in G_0 \mid |\rho_{k\ell}| < K^{k+\ell} \quad k+\ell \geq 3 \}$$

Así, si  $D_K$  es el disco abierto de radio  $(2K)^{-1}$  toda  $\rho \in G_{0K}$  es una función analítica en  $D_K$ ,

b) Topología. Definiremos las seminormas  $p_{k\ell}$  en  $G_0$  mediante los coeficientes de la expansión de Taylor en 0:

$$p_{k\ell}(\rho) = |\rho_{k\ell}| \quad k+\ell \geq 3$$

La  $(\varepsilon)$ -bola abierta centrada en  $\rho$  se define por

$$B(\rho, (\varepsilon)) = \{ \sigma \in G_0 \mid p_{k\ell}(\sigma - \rho) < \varepsilon_{k\ell} \quad k+\ell \geq 3 \}$$

donde  $(\varepsilon) = (\varepsilon_{k\ell})$ ,  $k+\ell \geq 3$ ,  $\varepsilon_{k\ell} > 0$ . En  $G_{0K}$  definimos la topología inducida por esas bolas abiertas (o sea que conjuntos abiertos y uniones de bolas abiertas son la misma cosa). Esta topología es muy fina. Es más fina que la topología de la convergencia de sus coeficientes. Mas aún, las inyecciones

$$i_n : G_{0K} \rightarrow C^n(D_K)$$

en los espacios de Banach  $C^n(D_K)$  son continuas para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $K > 0$ . En  $S^1 \times G_{0K}$  introducimos la topología producto. Para darle sentido a la definición de genericidad necesitaremos el siguiente lema, que no es sino una adaptación del teorema de categoría de Baire a la topología definida arriba.

LEMA 1. El espacio  $S^1 \times G_{0K}$  de mapeos locales analíticos que preservan area, con la topología definida arriba, es un espacio de Baire, o sea, cualquier conjunto residual (intersección contable de abiertos densos) es denso.

Diremos que una propiedad es genérica, si es válida para un conjunto que contiene un conjunto residual. Mencionaremos aquí que una tendencia importante en el estudio de sistemas dinámicos es hacia

el punto de vista genérico. Este enfoque consiste, a grandes rasgos en determinar y clasificar las propiedades genéricas de difeomorfismos y flujos, considerándose ejemplos "raros" aquellos difeomorfismos y flujos que no tienen esas propiedades. Observese que aquí influye mucho la topología escogida y que muchos ejemplos importantes pueden considerarse como raros.

c) El resultado principal. Nuestro propósito es bosquejar la demostración del siguiente teorema.

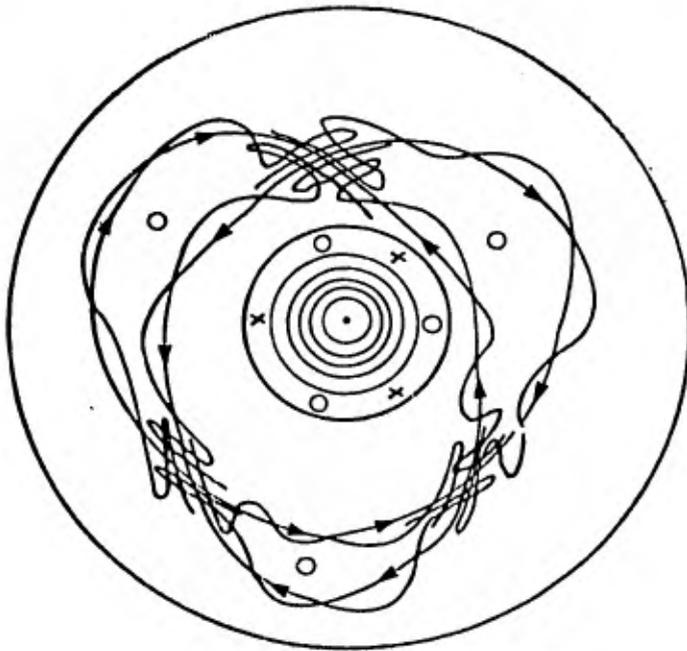
TEOREMA 1. Sea  $K > 0$ , y sea  $M = M(K) = \{ f \equiv (\lambda, \rho) \mid f \text{ es real analítica, preserva area, tiene a } 0 \text{ como punto fijo elíptico y } p_{k+l}(\rho) < K^{k+l}, k+l \geq 3 \}$  con la topología definida arriba.

Sea  $M_H \subset M$  el subconjunto de aquellos difeomorfismos que poseen puntos homoclínicos en toda vecindad del punto fijo elíptico 0.

Entonces  $M_H$  es residual, o sea,  $M_H = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$

donde  $M_n \subset M$  es el conjunto abierto y denso de aquellos difeomorfismos que tienen al menos un punto homoclínico en el disco  $D_n$  centrado en 0 y de radio menor que  $(n+1)^{-1}$ .

Se sigue de nuestras observaciones en 5. capítulo 1 que si  $f \in M_H$ , para cada vecindad de 0 hay una iterada  $f^k$  con una representación como la ilustrada en la siguiente figura.



El teorema 1 es un teorema de existencia y su demostración es constructiva. La estrategia para esta demostración es como sigue.

1.- Primero hay que construir órbitas de puntos periódicos hiperbólicos y elípticos en toda vecindad del origen, las cuales puedan controlarse. Esto se **hace** por aproximación usando la técnica de la forma normal de Birkhoff.

2.- El punto importante consiste en continuar las curvas asintóticas locales de los puntos periódicos hiperbólicos y probar que la curva estable y la inestable de dos puntos hiperbólicos resultan cercanas. Esto se logra estimando las soluciones de ciertas ecuaciones funcionales.

3.- Entonces **se demuestra**, usando la propiedad de preservar área de los mapeos en cuestión, que las curvas asintóticas realmente se intersectan aunque no necesariamente transversalmente.

4.- Usando una teoría de perturbaciones de los encajes de dos curvas asintóticas, **se encuentra** un difeomorfismo que está suficientemente cercano pero que posee puntos homoclinicos transversales.

## 2.- ORBITAS DE PUNTOS PERIÓDICOS ELIPTICOS E HIPERBOLICOS.

Sea  $f=(e^{i\alpha}, \rho) \in M$  y sea  $B=B(f, \varepsilon, (\varepsilon_{kl}))$  cualquier bola con centro en  $f$ .

**Veremos** que, dada cualquier vecindad  $U$  del punto fijo elíptico, hay un difeomorfismo  $g \in B$  que tiene una órbita de puntos elípticos y una de puntos hiperbólicos dentro de  $U$ .

**El primer paso para obtener este resultado es el siguiente lema**

LEMA 2. Sea  $f=(e^{i\alpha}, \rho) \in M$  y sea  $B=B(f, \varepsilon, (\varepsilon_{kl}))$  cualquier bola abierta centrada en  $f$ . Sean  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $q \geq 6$ ,  $(p, q) = 1$  tales que  $|2\pi p/q - \alpha| < \varepsilon/4$ . Entonces hay una familia  $(f_\tau)$   $|\tau| < \sqrt{\varepsilon}/2$  de difeomorfismos  $f_\tau = (e^{i(2\pi p/q - \tau^2)}, \hat{\rho})$  tal que  $(f_\tau) \subset B$ , y una familia  $(C_\tau)$  de transformaciones analíticas de coordenadas con  $C_\tau(0)=0$  y que depende analíticamente de  $\tau$ , tal que

$$(6) \quad C_\tau^{-1} f_\tau C_\tau(\zeta) = \zeta e^{i w(|\zeta|^2)} + c e^{i 2\pi p/q} \bar{\zeta}^{q-1} + P_q(\zeta, \bar{\zeta}), \quad c > 0, \text{ donde}$$

$$(7) \quad w(|\zeta|^2) = 2\pi p/q - \tau^2 + |\zeta|^2 + \dots + \gamma_k |\zeta|^{2k}$$

siendo  $c$  y  $\gamma_i$  funciones analíticas de  $\tau$ .

Para determinar los puntos fijos de  $f_\tau^q$  para las  $f_\tau$  dadas por el lema 2, se introducen coordenadas  $(r, \phi \pmod{2\pi})$  en la forma normal mediante

$$(8) \quad \zeta = r e^{i\phi}$$

Con este cambio de variables y utilizando el teorema de la función implícita se obtiene:

LEMA 3. Sea  $(f_\tau)$  la familia de mapeos analíticos dada por el lema 2. Entonces para toda  $\delta > 0$  existe  $\tau(\delta) > 0$  tal que si  $0 < \tau < \tau(\delta)$ ,  $f_\tau^q$  tiene  $2q$  puntos fijos aislados  $\zeta_m(\tau)$  en  $|\tau| < \delta$   $m=1, 2, \dots, 2q$ . Ellos están dados por

$$(9) \quad \zeta_m(\tau) = \tau r_m(\tau) e^{i\phi_m(\tau)}$$

donde las funciones  $r_m$  y  $\phi_m$  son analíticas y

$$r_m(0) = 1 \quad \phi_m(0) = \pi/q(m-1/2)$$

A continuación se comprueba que los  $q$  puntos fijos  $(e_m)$  con  $m$  impar forman una órbita, lo mismo que los  $q$  puntos fijos  $(h_m)$  con  $m$  par.

Para estudiar el comportamiento del difeomorfismo  $f_\tau^q$  cerca de esos puntos fijos, dilataremos un anillo conteniendo esos puntos fijos mediante una transformación de escala apropiada. Sea  $(r_m(\tau), \phi_m(\tau))$  cualquiera de estos puntos fijos de  $f_\tau^q$ , introduciremos entonces nuevas coordenadas  $(\psi, x)$  definidas por

$$(10) \quad \begin{aligned} \phi &= \phi_m(\tau) + \psi \\ r &= r_m(\tau) + \tau^{q/2-2} x \end{aligned}$$

y restringiremos esas nuevas coordenadas al anillo  $A$  definido por

$$(11) \quad A = \{ (\psi, x) \mid 0 \leq \psi \leq 2\pi, |x| \leq 2\tau, \tau = \sqrt{2c/q} \}$$

LEMA 4. El difeomorfismo  $f_\tau^q$  tiene la siguiente forma en el anillo  $A$

$$(12) \quad \begin{aligned} \psi_q &= \psi + \tau^{q/2} \cdot x + \tau^{q/2+1} h_1(\tau, \psi, x) \\ x_q &= (-1)^m \beta \tau^{q/2} \operatorname{sen} \psi + x + \tau^{q/2+1} h_2(\tau, \psi, x) \\ \alpha &= 2q \quad \beta = cq \end{aligned}$$

Las funciones  $h_i$  ( $i=1, 2$ ) son analíticas en  $\sqrt{\tau}, x$  y  $2\pi$ -periódicas en  $\psi$ . Más aún  $h_i(\tau, 0, 0) = 0$  y para  $|\tau| < \tau_0$ ,  $\tau_0 > 0$ , se tiene que

$$|h_i(\tau, \cdot)|_{C^1(A)} \leq \text{constante}$$

Con esta representación obtenemos, con la notación introducida después del lema 3.

LEMA 5. La órbita  $(e_m) \subset \operatorname{per}(f_\tau, q)$  consiste de puntos elípticos y la órbita  $(h_m) \subset \operatorname{per}(f_\tau, q)$  consiste de puntos hiperbólicos.

Los resultados anteriores nos llevan al siguiente teorema de existencia.

TEOREMA 2. Sea  $M$  el conjunto definido en el teorema 1 y sea  $M_0 \subset M$  el subconjunto de aquellos difeomorfismos que poseen un órbita de puntos periódicos elípticos y una de puntos periódicos hiperbólicos en toda vecindad del punto fijo elíptico 0. Entonces  $M_0$  es residual, o sea,

$$M_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

donde el conjunto abierto y denso  $U_n$  consta de aquellos difeomorfismos que tienen al menos una órbita de puntos periódicos elípticos y una de puntos periódicos hiperbólicos en el disco abierto  $D_n$  centrado en el origen y de radio  $(n+1)^{-1}$

A partir de la ecuación funcional se define un mapeo en un espacio de funciones, tal que la solución de la ecuación funcional corresponde a un punto fijo del mapeo. Este mapeo es de contracción si el espacio de funciones se escoge adecuadamente, en realidad, el espacio consiste de aquellas funciones Lipschitz continuas  $u(\tau, \cdot)$  ( $0 < \tau < \tau_0$ ) que satisfacen  $\|u(\tau, \cdot)\| \leq \bar{C}_1 \tau$ ,  $L(u(\tau, \cdot)) \leq \bar{C}_2 \tau$ ,  $u(\tau, 0) = 0$  donde  $\tau_0, \bar{C}_1, \bar{C}_2$  son constantes positivas y  $L(u)$  denota la constante de Lipschitz de  $u$ .

De manera similar determinamos la curva estable local  $W_{loc}^+$  como la curva inestable del difeomorfismo inverso  $f^{-1}$  en el anillo  $A$ .

En seguida se construyen las curvas asintóticas locales de los otros puntos periódicos hiperbólicos en la órbita. Los puntos fijos de  $f_\tau^q$  en el anillo  $A$  están determinados por la condición

$$(16) \quad \begin{aligned} \alpha x + h_1(\tau, \psi, x) &= 0 \\ \beta \operatorname{sen} q\psi + h_2(\tau, \psi, x) &= 0 \end{aligned}$$

siendo  $h_1, h_2$  analíticas en  $\sqrt{\tau}$ . Así, por el teorema de la función implícita, en  $A$  la órbita de puntos periódicos elípticos  $(e_m)$  de  $f_\tau^q$  tiene la forma

$$e_m = (x_m(\tau), \psi_m(\tau)) = (0(\tau), \frac{\pi}{q}(2m-1) + 0(\tau)) \quad m=1, \dots, q$$

Por otra parte, en  $A$  la órbita de puntos periódicos hiperbólicos está dada por

$$h_m = (x_m(\tau), \psi_m(\tau)) = (0(\tau), \frac{2\pi}{q}m + 0(\tau)) \quad m=0, 1, \dots, q-1$$

Observemos que si tomamos las nuevas coordenadas  $(x', \psi')$ , definidas por  $x = x_\nu(\tau) + x'$  y  $\psi = \psi_\nu(\tau) + \psi'$ , entonces la forma del difeomorfismo  $f_\tau^q$  es exactamente la misma que en el lema 4 con las mismas constantes  $\alpha$  y  $\beta$ . Así, las curvas asintóticas al punto hiperbólico  $h_\nu$  se construyen exactamente de la misma manera que para  $\nu = 0$ . Regresando a las coordenadas originales  $(x, \psi)$  en el anillo, llegamos al resultado final de la sección:

PROPOSICION 1. Sean  $(h_m(\tau))$  y  $(e_m(\tau))$  las órbitas de puntos periódicos hiperbólicos y elípticos de  $f$  en el anillo  $A$ . Denotemos por  $W_m^-$  y  $W_m^+$  las curvas inestable y estable del punto fijo hiperbólico  $h_m$  de  $f_\tau^q$ .

Entonces existen  $C_1, C_2, \tau_0 > 0$  tales que para  $0 < \tau < \tau_0$  las curvas asintóticas locales tienen la forma

$$W_{loc, m}^\pm = \operatorname{graf}(g_m^\pm)$$

con las funciones  $g_m^\pm(\tau, \psi)$  definidas en los intervalos  $D_m = \{\psi \mid |\psi - \frac{2m\pi}{q}| \leq \frac{3\pi}{2q}\}$  mediante

$$g_m^\pm(\tau, \psi) = \mp \delta \operatorname{sen}(q\psi/2) + u_m^\pm(\tau, \psi)$$

Las funciones  $u_m^\pm(\tau, \psi)$  satisfacen  $|u_m^\pm| \leq C_1 \tau$ ,  $L(u_m^\pm) \leq C_2 \tau$  y  $u_m^\pm(\tau, 0) = 0$

Dem. La densidad de  $U_n$  en  $M$  es consecuencia del lema 3.

Sea  $V_n$  el conjunto de difeomorfismos locales  $f \equiv (\lambda, \rho) \in C^1$ , con  $\rho \in C^2(D_K)$ , teniendo al menos una órbita de puntos periódicos elípticos y una de puntos periódicos hiperbólicos. Por el teorema de la función implícita,  $V_n$  es abierto en la topología  $C^2$  en  $C^2(D_K)$ . Como la inyección  $i_2: G_{ok} \rightarrow C^2(D_K)$  es continua, el conjunto  $U_n = V_n \cap M$  es abierto en  $M$ .

### 3.- CONSTRUCCION DE LAS CURVAS ASINTOTICAS LOCALES EN EL ANILLO A

Para demostrar que las curvas asintóticas se intersectan, es necesario conocer cual es la forma de estas curvas. Para esto, utilizaremos la representación de  $f_q^q|A$  dada en el lema 4 e introduciremos la notación  $f_q^q = f = (f_1, f_2)$  mediante

$$(13) \quad \begin{aligned} \Psi_q &= f_1(\Psi, x) = \Psi + \alpha \tau^{q/2} x + \tau^{q/2+1} h_1(\tau, \Psi, x) \\ x_q &= f_2(\Psi, x) = (-1)^m \beta \tau^{q/2} \sin q\Psi + x + \tau^{q/2+1} h_2(\tau, \Psi, x) \end{aligned}$$

Nuestro propósito es representar las curvas asintóticas como gráficas de funciones  $x=g(\Psi)$  y mostrar que tal representación es válida a lo largo de un intervalo de longitud  $3\pi/2q$ . Como es usual, comenzaremos con la construcción de la curva inestable local  $W_{loc}^-$ . Si  $W_{loc}^-$  es la gráfica de  $g^-$ , entonces la condición de invariancia bajo  $f^{-1}$  es

$$f(\text{graf}(g^-)) \subset \text{graf}(g^-)$$

y así,  $g$  tiene que satisfacer la siguiente ecuación funcional

$$(14) \quad g(f_1(\Psi, g(\Psi))) = f_2(\Psi, g(\Psi))$$

o equivalentemente,  $g$  tiene que ser un punto fijo de la transformación

$$v \rightarrow f_2 \circ (\text{id}, v) \circ [f_1(\text{id}, v)]^{-1}$$

en un espacio de funciones apropiado. Sin embargo, esta transformación de gráficas no es muy útil debido a que la atracción del difeomorfismo  $f$  es hacia la curva inestable local y no hacia el eje. Para encontrar una transformación adecuada es necesario tener al menos una idea de la forma de la curva inestable, y para darnos esta idea suprimiremos los términos  $O(\tau^{q/2+1})$  en (13). En ese caso la ecuación funcional (14) resultaría

$$g(\Psi + \alpha \tau^{q/2} g(\Psi)) = \beta \tau^{q/2} \sin(q\Psi) + g(\Psi)$$

aplicando la fórmula de Taylor al miembro izquierdo y suprimiendo los términos  $O(\tau^{q/2+1})$  tenemos que

$$\alpha g'(\Psi) g(\Psi) = \beta \sin q\Psi$$

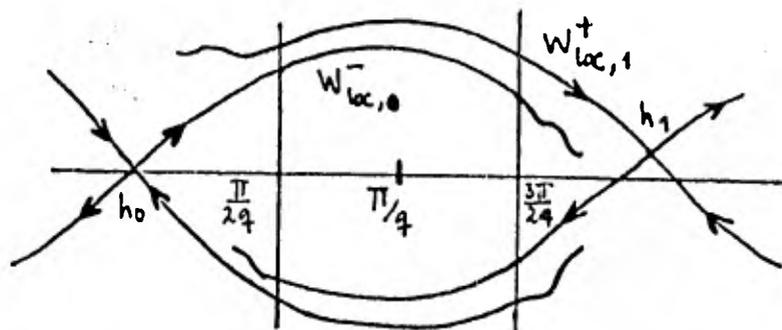
Integrando esta ecuación diferencial obtenemos

$$g(\Psi) = \gamma \sin q\Psi/2 \quad \text{con} \quad \gamma = 2 \sqrt{\frac{\beta}{q\alpha}} = \sqrt{\frac{2c}{q}}$$

De esta manera, se busca la función  $g^-$  en la forma  $g^- = \eta(u)$ , donde

$$(15) \quad g^-(\tau, \Psi) = \eta(u)(\tau, \Psi) = \gamma \sin(q\Psi/2) + u(\tau, \Psi)$$

y se determina una ecuación funcional para  $u(\tau, \Psi)$  con  $u(\tau, 0) = 0$ .



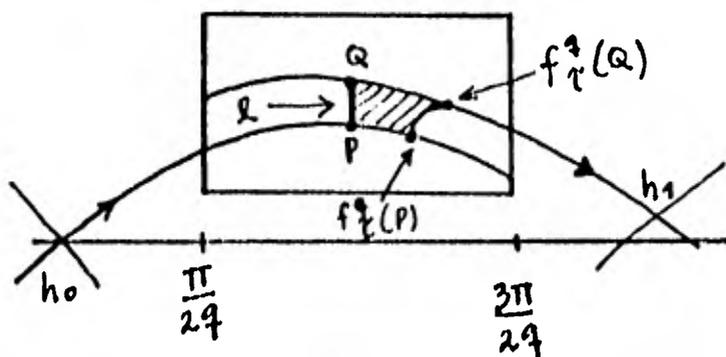
En la región  $\Delta = D_m \cap D_{m+}$  entre dos puntos hiperbólicos, las correspondientes curvas locales estable e inestable resultan cercanas de orden  $\tau$  en norma Lipschitz, es decir

$$\begin{aligned} |g_m^+ - g_{m+1}^-|_{\Delta} &\leq 2C_1 \tau \\ L(g_m^+ - g_{m+1}^-)_{\Delta} &\leq 2C_2 \tau \end{aligned}$$

Mas allá de la región  $\Delta$  perdemos control sobre la forma de las curvas asintóticas. Es importante notar que si hubieramos despreciado los residuos en  $(\cdot)$  (en particular  $c=0$ ) todo el eje  $\Psi$ , que corresponde a una circunferencia cercana a  $r=1$  al rededor del punto fijo original, debería consistir de puntos fijos parabólicos de  $f^q$ . Debido a que  $c \neq 0$  esta circunferencia se rompe en  $2q$  puntos fijos aislados,  $q$  de ellos formando una órbita hiperbólica y los otros  $q$  formando una órbita elíptica.

#### 4.- LA INTERSECCION DE LAS CURVAS ASINTOTICAS LOCALES

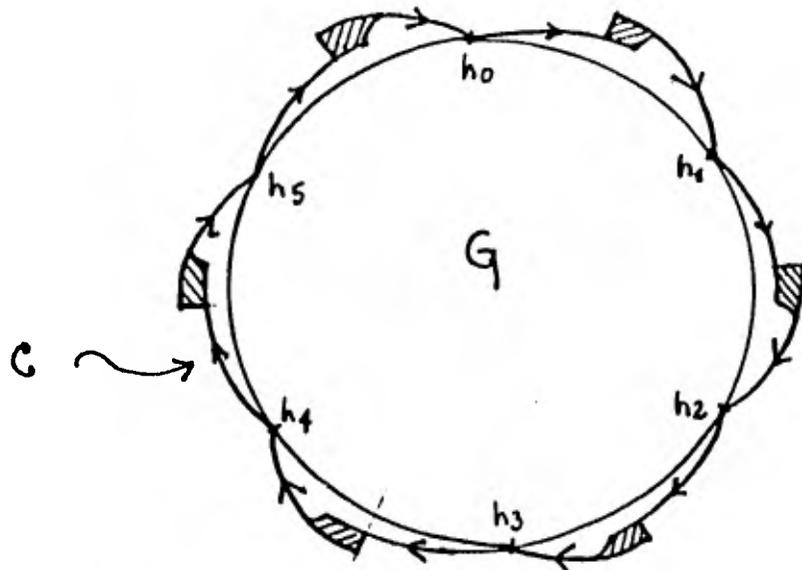
Ahora demostraremos que las curvas asintóticas descritas en la proposición 1, no solo resultan cercanas sino que realmente se intersectan. La demostración, que es una copia de la que dió Poincaré cuando estableció por primera vez la existencia de puntos homoclínicos, depende de una manera esencial de los hechos de que  $f$  preserva area y los puntos periódicos hiperbólicos constituyen una órbita bajo  $f$ . Sea  $C_0$  la curva que en las coordenadas  $(\Psi, x)$  esta constituida por (i) el segmento de la curva inestable  $W_0^-$  desde  $h_0$  hasta el punto  $P$  con coordenada  $\Psi = \frac{\pi}{q}$ , (ii) el segmento rectilíneo  $l$  desde  $P$  hasta el punto  $Q$  de la curva estable  $W_1^+$  con coordenada  $\Psi = \frac{\pi}{q}$ , (iii) el segmento de la curva estable  $W_1^+$  desde  $Q$  hasta  $h_1$ .



Definamos la curva  $C$  por

$$C = \bigcup_{s=0}^{q-1} f_{\tau}^s(C_0)$$

Puesto que los  $(h_m)$  forman una órbita bajo  $f_{\tau}$ ,  $C$  es una curva de Jordan cerrada simple conectando los puntos periódicos hiperbólicos por tramos de las curvas asintóticas con puentes entre ellas. Sea  $G$  el conjunto compacto encerrado por  $C = \partial G$



Nos interesa el conjunto  $f_{\tau}^q(G)$ , cuya frontera es

$$\partial(f_{\tau}^q(G)) = f_{\tau}^q(\partial G) = \bigcup_{s=0}^{q-1} f_{\tau}^s(f_{\tau}^q(C_0))$$

Ya que las curvas asintóticas  $W_0^-$  y  $W_1^+$  son invariantes bajo  $f_{\tau}^q$ , la curva  $f_{\tau}^q(C_0)$  está constituida por: (i) el segmento de la curva inestable  $W_0^-$  desde  $h_0$  hasta  $f_{\tau}^q(P)$ , (ii) el segmento  $f_{\tau}^q(l)$  y (iii) el segmento de la curva estable  $W_1^+$  desde  $f_{\tau}^q(Q)$  hasta  $h_1$ . De la siguiente estimación para  $f_{\tau}^q$  en el rectángulo  $R = \{(\psi, x) \mid |\psi - \pi/4| \leq \pi/4, |x - \delta| \leq \frac{1}{2}\delta\}$  válida para  $\tau$  suficientemente pequeña,

$$2\delta\tau^{q/2} > f_1(\psi, x) - \psi > \alpha \frac{1}{4}\delta\tau^{q/2}$$

concluimos que la curva  $f_{\tau}^q(l)$  está estrictamente a la derecha de  $l$ .

Supongamos que las curvas  $W_{0\text{loc}}^-$  y  $W_{1\text{loc}}^+$  no se intersectan. Entonces existe un conjunto  $V$  tal que, dependiendo de la posición relativa de las curvas  $W_{0\text{loc}}^-$  y  $W_{1\text{loc}}^+$ , o bien  $f_{\tau}^q(G) = G - V$  o bien  $f_{\tau}^q(G) = G \cup V$  con  $V \cap G = \emptyset$ . Ya que  $V \neq \emptyset$  se tiene que  $m(V) \neq 0$  y por lo tanto

$$m(f_{\tau}^q(G)) = m(G) \pm m(V)$$

contradice el hecho de que  $f_{\tau}^q$  preserva área. Así  $W_0^-$  y  $W_1^+$  se intersectan y análogamente se completa la demostración de

PROPOSICION 2. Las curvas asintóticas locales  $W_{m\text{loc}}^{\pm}$  ( $m=0, 1, \dots, q-1$ ) de los puntos periódicos hiperbólicos  $(h_m)$  se intersectan:

$$W_{m\text{loc}}^- \cap W_{m+1\text{loc}}^+ \neq \emptyset$$

Sin embargo, la intersección no es necesariamente transversal. Con argumentos como los dados para demostrar la proposición 2 podemos ver que bajo una perturbación que preserva área, las curvas asintóticas locales se intersectan, y así nuestra tarea es realizar perturbaciones que preservan área de tal manera que la intersección sea transversal.

## 5.- TEORIA DE PERTURBACIONES

a) Sea  $\phi$  un difeomorfismo de clase  $C^n$ ,  $n \geq 2$ , definido en un abierto del plano y que posee 2 puntos fijos hiperbólicos  $h_1$  y  $h_2$ . Supondremos que una curva inestable local  $W_{loc}^-(h_1)$  y una curva estable local  $W_{loc}^+(h_2)$  resultan cercanas en el sentido  $C^1$ . Nos enfrentamos al problema de describir el comportamiento de esas dos curvas en la región donde resultan cercanas, cuando perturbamos el difeomorfismo  $\phi$ . El objetivo es lograr controlar aquellas perturbaciones cuyas curvas asintóticas se intersectan transversalmente.

b) Perturbaciones de la curvas asintóticas. La curva inestable local  $W_{loc}^-$  de  $h_1$  es compacta, permanece invariable bajo  $\phi$ , y es de clase  $C^n$  si  $\phi$  lo es. Es posible encontrar una vecindad tubular  $N$  de  $W_{loc}^- \subset \mathbb{R}^2$  y coordenadas locales  $(x,y)$  dadas por un difeomorfismo  $C^n$  definido en  $N$ , tales que:

$$W_{loc}^-(h_1) = \{ (x,0) \mid x \in I \} \quad \text{y } h_1 = (0,0)$$

En esas coordenadas el difeomorfismo  $\phi$  esta representado por 2 funciones  $C^n$

$$\phi = (\phi_1, \phi_2)$$

ya que  $W_{loc}^-$  es invariable bajo  $\phi$ , tenemos que  $\phi_2(x,0) = 0$  para todo  $x \in I$ . Usando técnicas de punto fijo para resolver ecuaciones funcionales como en la sección 4, es posible demostrar que hay una vecindad  $O^n(\phi)$  del difeomorfismo  $\phi$  en el espacio de Banach  $B^n = C^n(N, \mathbb{R}^2)$ , tal que si  $\psi \in O^n(\phi)$  la correspondiente curva local esta dada como  $W_{loc}^- = \text{graf}(u_\psi^-)$  donde  $u_\psi^- \in C^n(I)$ . Más aún:

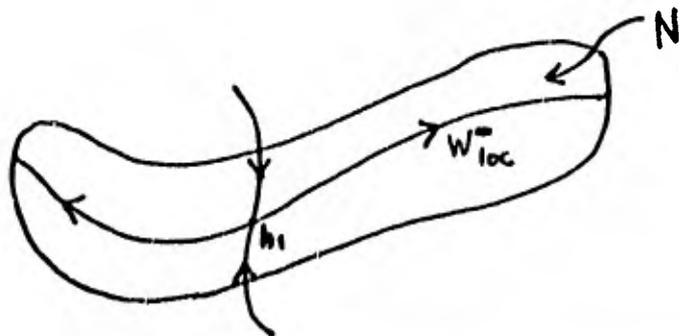
PROPOSICION 3. El mapeo  $\gamma: O^2(\phi) \rightarrow C^0(I) \times C^0(I)$  definido por

$$\gamma(\psi) = (u_\psi^-, D_x u_\psi^-)$$

es Frechet diferenciable.

Si para la perturbación  $f \in B^2$  denotamos  $(v^-, w^-) = d\gamma|_\phi(f)$ , entonces el desplazamiento infinitesimal de la curva inestable en el punto  $p \in W_{loc}^-$  se construye a partir de las perturbaciones  $f(\phi^{-n}(p))$  en los puntos de la sucesión  $\{\phi^{-n}(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $h_1$ .

Todo lo dicho hasta ahora para la curva inestable  $W_{loc}^-$  de  $h_1$ , es válido analogamente para la curva estable  $W_{loc}^+$  de  $h_2$ .



c) Perturbaciones para mapeos que preservan area. Consideremos ahora el caso en el que, tanto el mapeo  $\phi$  como la carta definida en la vecindad  $N$ , preservan area. Definiremos el subconjunto abierto  $E_\theta$  de  $C^3(N)$  mediante

$$E_\theta = \{s \in C^3(N) \mid |s|_3 < \theta\}$$

Para  $s \in E_\theta$  definiremos  $\rho(s)(x,y) = xy + s(x,y)$  y consideraremos las perturbaciones de  $\phi$  de la forma  $\phi \circ E(\rho(s))$  (recordemos que  $\rho$  es la función generatriz de  $E(\rho)$ ). Si  $\theta$  es suficientemente pequeña tenemos que  $\phi \circ E(\rho(s)) \in O^2(\phi)$  para toda  $s \in E_\theta$ . Puede verse que el mapeo  $\chi: E_\theta \rightarrow O^2(\phi)$  definido por  $\chi(s) = \phi \circ E(\rho(s))$ , es diferenciable si  $\phi$  es  $C^3$ , y la diferencial  $d\chi_0$  está dada por

$$(17) \quad d\chi_0 = d\phi(D_2s, -D_1s)$$

A las funciones cuyas gráficas representan las curvas asintóticas perturbadas de  $\phi_s = \phi \circ E(\rho(s))$ , las denotaremos por  $u_s^\pm$ . Los mapeos

$$\hat{\gamma}^\pm: E_\theta \rightarrow C^0(I) \times C^0(I) \quad \text{definidos por}$$

$$\hat{\gamma}^\pm(s) = (u_s^\pm, D_x u_s^\pm)$$

son diferenciables.

d) Relación entre las perturbaciones de ambas curvas asintóticas.

Consideremos las vecindades tubulares  $N^+$  y  $N^-$  de  $W_{loc}^+(h_2)$  y  $W_{loc}^-(h_1)$  respectivamente. Supongamos que  $N^+ \cap N^- = U \neq \emptyset$  y que  $W_{loc}^+(h_2) \cap U$  y  $W_{loc}^-(h_1) \cap U$  son  $C^1$ -cercanas, de tal manera que  $W_{loc}^+(h_2) \cap U = \text{graf}(u_0^+)$ , donde  $u_0^+$  es una función definida en  $W_{loc}^-(h_1) \cap U$ . Definamos  $N = N^+ \cup N^-$ .

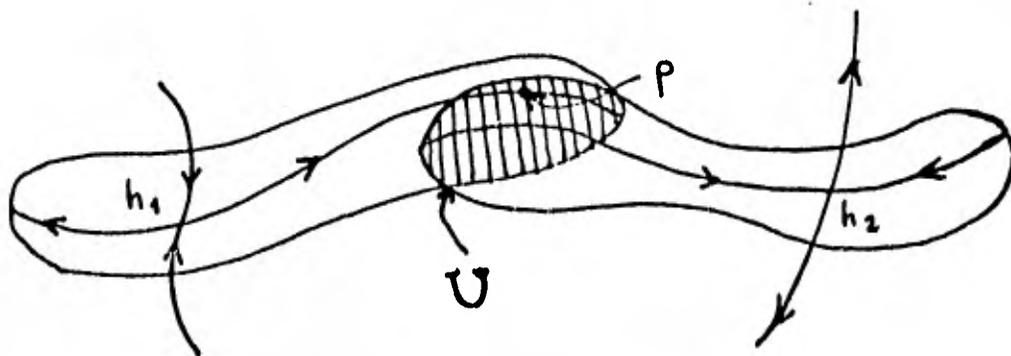
Consideraremos perturbaciones  $\phi \circ E(\rho(s))$  de  $\phi$  para  $s \in C^3(N)$  suficientemente pequeña. Para describir la relación  $C^1$  entre las curvas asintóticas perturbadas en una vecindad de un punto  $p \in W_{loc}^-(h_1) \cap U$ , definiremos el mapeo

$$(18) \quad \Omega_p: C^3(N) \rightarrow R^2$$

$$\Omega_p(s) = (u_s^- - u_s^+, D_x(u_s^- - u_s^+))_p$$

De acuerdo con c)  $\Omega_p$  es  $C^1$  en una vecindad de  $s=0$  en  $C^3(N)$  y además tenemos que

PROPOSICION 4. La restricción de  $(d\Omega_p)_0 \in L(C^3(N), R^2)$  al conjunto  $C_c^\infty(N)$  de funciones  $C^\infty$  con soporte compacto, es sobre.



Veamos ahora como se aplican los resultados anteriores al caso en que  $\phi$  es un difeomorfismo local  $C^3$  que preserve área definido en una vecindad del origen en  $R^2$ , el cual es un punto fijo elíptico. Escribiremos  $\phi = d\phi_0 \cdot E(u)$

donde la función generatriz  $u \in C^4$  y consideraremos las perturbaciones de  $\phi$  de la forma  $d\phi_0 \cdot E(u+v)$  donde  $v \in C^3$

Supongamos que los puntos  $h_1, h_2 \in \text{per}(\phi, q)$  son hiperbólicos y que las curvas asintóticas de esos puntos fijos de  $\phi^q$  satisfacen las suposiciones que preceden a la proposición 4. En una vecindad  $C^3$  de  $v = 0$  se puede definir un mapeo  $C^1: v \mapsto a_u^q(v) \in C^3$ , tal que la perturbación de  $\phi^q$  tiene la forma

$$[d\phi_0 \cdot E(u+v)]^q = \phi^q \cdot E(\rho(a_u^q(v)))$$

Definamos ahora el mapeo  $\hat{\Omega}_p = \Omega_p \cdot a_u^q$  donde  $\Omega_p$  se obtiene de (18) reemplazando  $\phi$  por  $\phi^q$ ; así, utilizando la notación  $s = a_u^q(v)$  tenemos que

$$\Omega_p(v) = (u_s^- - u_s^+, D_x(u_s^- - u_s^+))$$

PROPOSICION 5. Hay una vecindad  $V$  de las curvas asintóticas tal que  $0 \in V$  y la restricción de  $(d_p)_0$  al conjunto  $C_c^\infty(V)$ , de funciones  $C^\infty$  con soporte compacto contenido en  $V$ , es sobre.

#### 6.- DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1

a)  $M_n$  es denso en  $M$ . Supongamos que  $f_0 = (e^{i\alpha_0}, \rho_0) \in M$  y sea

$B = B(f_0, \epsilon, (\frac{\epsilon \kappa_1}{2}))$  cualquier bola abierta centrada en  $f_0$ . Por demostrar que  $B \cap M_n \neq \emptyset$ .

En virtud del lema 3 y las proposiciones 1 y 2, existe un difeomorfismo  $f = (e^{i(2\pi p/4 - \tau^2)}, \rho) \in B_1 = B(f_0, \frac{\epsilon}{2}, (\frac{\epsilon \kappa_1}{2}))$  que posee una órbita de  $q$  puntos periódicos hiperbólicos  $(h_m)$ , de tal manera que las curvas asintóticas locales estable e inestable respectivamente, de estos puntos periódicos están contenidas en un disco de radio menor que  $\frac{1}{2}(n+1)$  y se intersectan, aunque quizá no lo hagan transversalmente. La densidad de  $M_n$  es consecuencia del siguiente lema.

LEMA 6. Sea  $f = (e^{i(2\pi p/4 - \tau^2)}, \rho)$  el difeomorfismo de arriba. Sea  $B_2 = B(f, \frac{\epsilon_0}{2}, (\frac{\epsilon_0 \kappa_1}{2})) \subset B$ . Sea  $U \subset R^2$  cualquier vecindad de las curvas locales asintóticas  $W_{loc}^-(h_m)$  y  $W_{loc}^+(h_m)$ .

Entonces hay un  $\lambda_0 > 0$  (que depende de  $B_2$  y  $U$ ) y una familia de difeomorfismos  $(f_\lambda \mid |\lambda| < \lambda_0)$ ,  $f_\lambda = (e^{i(2\pi/\lambda - \tau^2)}, u + v_\lambda)$ ,  $f_\lambda = f$  si  $\lambda = 0$ , tales que  $(f_\lambda) \subset B_2$ , y todo difeomorfismo  $f_\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ , tiene una órbita de  $q$  puntos periódicos hiperbólicos cuyas curvas asintóticas están contenidas en  $U$  y se intersectan transversalmente.

Dem. Consideremos los puntos fijos hiperbólicos  $h_1, h_2$  de  $f^q$ . De acuerdo con la proposición 2,  $W_{loc}^-(h_1) \cap W_{loc}^+(h_2) \neq \emptyset$ . Debido a la forma particular de estas curvas asintóticas, ellas tienen vecindades tubulares  $N^-, N^+$  que pueden parametrizarse mediante cartas que preservan área. Así, podemos hacer uso de los resultados de la sección 5 o), d).

Consideraremos las perturbaciones  $(df)_0 \cdot E(\rho + v)$  de  $f = (df)_0 \cdot E(\rho)$  donde  $v \in \mathbb{C}^3$  y  $|v|_3$  es suficientemente pequeña. Sea  $p \in W_{loc}^-(h_1) \cap W_{loc}^+(h_2)$  y supongamos que la intersección no es transversal. Esto significa que si definimos

$$\hat{\Omega}_p(v) = (u_s^- - u_s^+, D_x(u_s^- - u_s^+))_p, \quad s = a_u(v)$$

entonces tenemos que  $\hat{\Omega}_p(0) = (0, 0)$

El mapeo  $\hat{\Omega}_p: E_\theta \subset \mathbb{C}^3(D_K) \rightarrow \mathbb{R}^2$  es  $C^1$  si  $\theta$  es suficientemente pequeña, y en virtud de la proposición 5 tenemos que la restricción de  $(d\hat{\Omega}_p)_0 \in L(\mathbb{C}^3(D_K), \mathbb{R}^2)$  a  $C_c^\infty(D_K - 0)$  es sobre. Por lo tanto, existen  $v_1, v_2 \in C_c^\infty(D_K - 0)$  tales que

$$(d\hat{\Omega}_p)_0 v_1 = (1, 0) \text{ y } (d\hat{\Omega}_p)_0 v_2 = (0, 1)$$

Ya que  $(d\hat{\Omega}_p)_0$  es continuo, podemos encontrar dos polinomios  $P_1$  y  $P_2$  que se anulan en el origen junto con sus derivadas hasta de segundo orden y tales que los vectores

$$\ell_1 = (d\hat{\Omega}_p)_0 P_1, \quad \ell_2 = (d\hat{\Omega}_p)_0 P_2$$

son linealmente independientes. Definamos ahora la función  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $A$  es una vecindad suficientemente pequeña de origen en  $\mathbb{R}^3$ , mediante

$$F(C, \lambda) = \hat{\Omega}_p(c_1 P_1 + c_2 P_2) - (0, \lambda) \quad C = (c_1, c_2)$$

Tenemos que  $F$  es  $C^1$ ,  $F(0, 0, 0) = 0$  y

$$(D_C F)_{(0, 0, 0)} = [\ell_1 \quad \ell_2] \text{ no es singular}$$

Por el teorema de la función implícita, hay dos únicas funciones  $C^1$   $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$  tales que  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  y  $F(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \lambda) = 0$ .

Definamos los polinomios  $v_\lambda$  por

$$v_\lambda = f_1(\lambda) P_1 + f_2(\lambda) P_2,$$

entonces  $\hat{\Omega}_\rho(v_\lambda) = (0, \lambda)$ , o sea que, para  $\lambda \neq 0$  tenemos intersección transversal.

Los mapeos  $\gamma^\pm: E_\theta \subset C^3(D_K) \rightarrow C^0(I^\pm)$ , que asocian a cada  $v \in E_\theta$  las funciones  $u_\nu^\pm$  cuyas graficas representan respectivamente la curva estable y la inestable para el difeomorfismo perturbado  $(df)_0 \circ E(\rho+v)$  son de clase  $C^1$ . Por lo tanto, si las funciones  $u_0^\pm$  representan las curvas estable e inestable para el difeomorfismo imperturbado, el teorema del valor medio nos da

$$(19) \quad |u_\nu^\pm - u_0^\pm|_{C^1(I^\pm)} \leq A^\pm |v_\lambda|_{C^3(D_K)}$$

Ya que  $|f_i(\lambda)| \leq C|\lambda|$  ( $i=1,2$ ), para  $\lambda$  suficientemente pequeña tenemos que  $f_\lambda \equiv (e^{i(2\pi\rho/4 - \tau^2)}, \rho+v_\lambda) \in B_2$ . Además, en virtud de (19), si  $\lambda$  es suficientemente pequeña, entonces las curvas asintóticas locales perturbadas del difeomorfismo  $f_\lambda$  están contenidas en  $U$ .

b)  $M_n$  es abierto. El siguiente lema nos será útil (una demostración

de una afirmación más fuerte puede encontrarse en [H-S] Cap. 16)

LEMA 7. Sea  $W \subset \mathbb{R}^n$  una vecindad de 0. Supongamos que  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$ ,  $f(0) = 0$  y  $df_0$  es invertible. Entonces hay una vecindad  $C^1 \mathcal{V}$  de  $f$  tal que para cualquier  $g \in \mathcal{V}$  hay un  $x \in W$  tal que  $g(x) = 0$  y  $dg_x$  es invertible.

Sea  $\phi = (e^{i\alpha_0}, \rho_0) \in M_n$  con la propiedad de que  $\phi^\mp$  tiene dos puntos fijos hiperbólicos  $h_1, h_2$  tales que  $W_{loc}^-(h_1), W_{loc}^+(h_2) \subset U$  y se intersectan transversalmente. Hay una vecindad  $V = J \times V_1$  de  $\phi$ , donde  $J$  es un intervalo abierto al cual pertenece  $\alpha_0$  y  $V_1$  es una vecindad de  $\rho_0$  en  $C^2(D_K)$ , tal que si  $\psi \in V$  entonces  $\psi^\mp$  tiene dos puntos fijos hiperbólicos en  $U$ . Denotemos por  $u_\psi^\pm \in C^1(I^\pm)$  las funciones cuyas graficas representan las correspondientes curvas asintóticas, en una vecindad de las curvas imperturbadas locales. Definamos la función  $f_\psi(x) = (u_\psi^+ - u_\psi^-)(x)$  para  $x$  en algún intervalo  $I \subset I^+ \cap I^-$ , entonces la condición para la intersección transversal en algún punto  $p$  es  $f_\psi(p) = 0, D_x f_\psi(p) \neq 0$ . Puesto que los mapeos  $\gamma^\pm: V \rightarrow C^1(I^\pm)$  definidos por  $\gamma^\pm(\psi) = u_\psi^\pm$  son continuos si  $V$  es suficientemente pequeña; se sigue del lema 7 que si  $V$  es suficientemente pequeña, entonces para cualquier difeomorfismo  $\psi \in V$  las curvas asintóticas correspondientes se intersectan. Si escogemos una bola abierta  $B(\rho_0, (\epsilon)) \subset G_{OK}$  tal que  $B \subset V_1$  entonces  $J \times B \subset M_n$  y así,  $M_n$  es abierto.

## COMENTARIOS FINALES

En este trabajo, hemos considerado el fenómeno homoclínico en relación a puntos periódicos de difeomorfismos y órbitas periódicas de flujos. Obtuvimos una descripción de un difeomorfismo en cierto subconjunto invariante, lo que nos permitió demostrar la no existencia de integrales.

Pasando al mapeo de Poicaré, este resultado se puede extender al caso en que haya órbitas homoclínicas a órbitas periódicas de flujos.

Para nada consideramos la posibilidad de que hubiera órbitas homoclínicas para puntos singulares de campos vectoriales. Este comportamiento es difícil que se presente en un sistema arbitrario ya que la suma de las dimensiones de las variedades asintóticas es a lo más la dimensión del espacio total y en caso de que dichas variedades se intersecten deben hacerlo a lo largo de una órbita completa. En el caso de un sistema hamiltoniano, ya que las variedades asintóticas deben permanecer en la superficie de energía constante en la que se encuentra el punto de equilibrio y dicha superficie tiene codimensión 1, no hay impedimento fuerte para que las variedades se intersecten. Resulta que en tal caso, no siempre se pueden extender nuestros resultados, e incluso se han dado ejemplos de sistemas completamente integrables en los cuales hay órbitas homoclínicas para puntos de equilibrio.

El tema se extendió aún más, al considerarse órbitas homoclínicas a diversos conjuntos invariantes (esferas, toros, ...).

## B I B L I O G R A F I A

- 1 Z. Nitecki, "Diferentiable Dynamics", MIT Press, 1971
- 2 R. Abraham, J. Robbin "Transversal mappings and flows" Benjamin 1967 (Capítulos 5 y 6)
- 3 C. Siegel, J. Moser, "Lectures on Celestial Mechanics" Springer-Verlag 1971 (secciones 22, 23, 24)
- 4 J. Moser, "Stable and Random Motions in Dynamical Systems" Princeton University Press, 1973
- 5 T. Cherry, "Asymtotic solutions of analytic hamiltonian systems" Journal of differential equations (1968) 142-159
- 6 E. Zeh nder. "Homoclinic points near elliptic fixed points" Communications on Pure and Applied Mathematics (1973) 131-182
- 7 S. Smale. "Diffeomorphisms with many periodic points" en "Differential and Combinatorial Topology" Princeton University Press 1965.
- 8 G. D. Birkhoff. "Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques" Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei 1 (1935) 85-216
- 9 H. Poincaré. "Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste" Tomo III, 1899 (Números 395 a 404)
- 10 S. Smale. "Differentiable dynamical systems" Bull. Amer. Math. Soc. (1967) 747-817
- 11 N. Levinson. A second order differential equation with singular solutions, Ann. Math. 50, 127-153 (1949)
- 12 V. M. Alekseev. Quasirandom dynamical systems I, II, III, Math. USSR Sbornik 5, 73-128 (1968); 6, 505-560 (1968); 7, 1-43 (1969)