# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS


# IRREDUCIBILIDAD EN VARIEDADES DE ALGEBRAS.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :


José Antonio Stephan de la Peña Mena

* Becario del Instituto de Matemáticas



México, D. F. 1981

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**
**Tesis Digitales**
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

## Introducción

Un problema importante en el estudio de las variedades de álgebras es el de la structura del latice de variedades. En el presente trabajo se intenta dar alguna información acerca de la estructura de este latice, así como de su relación con propiedades algebraicas de las variedades que lo constituyen.

Nuestro enfoque en el problema es uno que aparece con frecuencia en álgebra, por ejemplo, en cierto tipo de anillos todo módulo finitamente generado se descompone como suma directa de módulos inescindibles, luego un problema muy importante es conocer bien estos módulos inescindibles. Un resultado sencillo (2.3) es que toda variedad puede obtenerse como supremo de variedades totalmente irreducibles por formación de supremos, luego los bloques constituyentes del latice de variedades son precisamente estas variedades irreducibles y gran parte del trabajo se avoca a la descripción de ellas.

Así, una forma de resolver el problema de la estructura del latice de variedades sería encontrar todos los posibles bloques componentes — variedades completamente irreducibles por disyunción — y descubrir la forma en que se unen para formar las demás variedades. Es decir, tiene uno dos problemas fundamentales a resolver.

Es el primero de estos problemas en el que se centra este trabajo. Para ello, se intenta descubrir las conexiones de las variedades en estudio con las álgebras que las forman. Bajo hipótesis adecuadas, no demasiado restrictivas, obtienen uno que estas variedades son exactamente las generadas por álgebras críticas — ver sección 9 —, que han sido ampliamente estudiadas en casos particulares. En grupos — ver sección 10 — encuentra uno que las variedades generadas por los grupos simétricos $S_n$ son de este tipo y de hecho con estos bloques se puede reintegrar la variedad de todos los grupos.

Otro problema importante en variedades de álgebras, es encontrar sistemas de ecuaciones mínimos que caractericen una variedad dada. En la sección 7 vemos que este problema está íntimamente relacionado con el de saber cuántos "bloques" contiene la variedad dada, burdamente se dirá que contar ecuaciones se reduce a contar bloques.

Algunas palabras acerca de la organización del material: En la primera sección damos una introducción breve a los conceptos de álgebra universal que usaremos a lo largo del trabajo, ahí se aprovecha para introducir alguna notación.

La segunda sección da una visión superficial del problema del trabajo; se introducen las definiciones y algunos resultados elementales.

De las secciones 3 a 6 se cubren diversos temas de los que se obtiene alguna información inmediata respecto al problema y algunos resultados que se usan en secciones posteriores.

En la sección 7 se añaden ciertas hipótesis acerca del latice de variedades y con ellas se dá Información acerca de la composición del mismo. En la sección 8 bajo el mismo tipo de hipótesis se obtienen resultados duales de (2.3) y en la 9 se dá Información acerca de la relación de las variedades estudiadas con las álgebras que las constituyen.

Las secciones 10 y 11 están dedicadas a casos particulares: grupos y latices respectivamente.

Omitimos en general demostraciones que puedan obtenerse en la literatura (al menos en la conocida por el autor), salvo en algunos casos donde se informa claramente.

## §1. ALGEBRA UNIVERSAL

En esta sección daremos una breve introducción al Algebra Universal, concentrándonos en los resultados que nos serán útiles a lo largo del trabajo. Como referencia general citamos [PC].

Un tipo de álgebras es una familia de ordinales finitos $\tau = (\lambda_i)_{i \in I}$, donde $I$ es un conjunto bien ordenado. Una $\tau$-álgebra será una pareja $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$ donde $A$ es un conjunto y para cada $i \in I$, $f_i$ es una operación $\lambda_i$-aria en $A$, es decir, una función $f_i : A^{\lambda_i} \longrightarrow A$.

Si $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$ y $\mathcal{A}' = (A', (f_i')_{i \in I})$ son dos $\tau$-álgebras, un homomorfismo de $\tau$-álgebras $h$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ — denotado por $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — es una función $h : A \longrightarrow A'$ tal que para toda $i \in I$ y $a \in A^{\lambda_i}$

$$h(f_i(a)) = f_i'(h^{\lambda_i}(a)).$$

Por $\mathcal{K}_\tau$ denotaremos entonces la categoría cuyos objetos son las $\tau$-álgebras y cuyos morfismos los homomorfismos de $\tau$-álgebras; la composición dada por la de funciones.

En lo que sigue de la sección mantendremos $\tau$ fijo.

Si $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathcal{K}_\tau$, diremos que $\mathcal{A}'$ es subalgebra de $\mathcal{A}$ si la inclusión $i : \mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ es $\tau$-homomorfismo. Cualquier subconjunto $M \subset A$ genera una subalgebra de $\mathcal{A}$, denotada por $\Gamma M$, tomando la intersección de todas las subálgebras de $\mathcal{A}$ que contienen a $M$.

Una congruencia de $A$ es una relación de equivalencia en $A$ que respeta las operaciones. Si $\theta$ es congruencia en $A$, $A/\theta$ tiene estructura natural de $\tau$-álgebra, que denotaremos por $A/\theta$, de forma que la proyección natural $A \longrightarrow A/\theta$ es $\tau$-homomorfismo. Denotaremos por $\mathrm{Con}(A)$ al latice de congruencias de $A$.

Si $(A_t)_{t\in T}$ es una familia de $\tau$-álgebras, podemos dar al producto cartesiano $\prod_{t\in T} A_t$ estructura de $\tau$-álgebra definiendo las operaciones por coordenadas; a esta álgebra se la denotará $\prod_{t\in T} A_t$ y junto con las proyecciones — que son $\tau$-homomorfismos — es el producto categórico de la familia dada.

Los teoremas clásicos de isomorfía son válidos en $\mathcal{K}_\tau$.

(1.1) Teorema [PC, II.3.8]: Sea $h: A \longrightarrow B$ $\tau$-homomorfismo y $\theta$ congruencia de $A$ con $\theta \subset \mathrm{Ker}\, h$. Entonces, existe un único $\tau$-homomorfismo $g: A/\theta \longrightarrow B$ que hace conmutativo el triángulo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "h"'] & A/\theta \arrow[dl, dashed, "g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

donde $\nu$ es la proyección natural. Si además $\theta = \mathrm{Ker}\, h$, $g$ es inyectiva. //

(1.2) Teorema [PC, II.3.9]: Sea $i: A' \hookrightarrow A$ inclusión y $\theta$ una congruencia de $A$. Definimos $\theta' := \theta \cap A'^2$. Entonces, existe un único $\tau$-homomorfismo inyectivo $j: A'/\theta' \longrightarrow A/\theta$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\nu'"'] & A \arrow[d, "\nu"] \\ A'/\theta' \arrow[r, dashed, "j"] & A/\theta \end{tikzcd}$$

donde $\nu$ y $\nu'$ son las proyecciones naturales. En consecuencia se tiene $\nu A' \cong A'/_{\theta'}$. //

Si $\theta \subset \psi$ son congruencias de $A$, $[a]_\theta \sim [b]_\theta$ si y sólo si $(a,b) \in \psi$ define una congruencia $\sim$ de $A/\theta$ que se denotará $\psi/\theta$.

(1.3) <u>Teorema</u> [PC, II 3.11 y 3.12]: Sea $\theta$ congruencia de $A$, la asociación $\psi \longmapsto \psi/\theta$ es un isomorfismo de latices entre $[\theta, 1]_{Con(A)}$ y $Con(A/\theta)$, donde $[\theta, 1]_{Con(A)}$ son las congruencias de $A$ que contienen a $\theta$. Además, si $\psi \in [\theta, 1]_{Con(A)}$, existe un único isomorfismo $h: A/\psi \to (A/\theta)/(\psi/\theta)$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/\theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\psi & \xrightarrow{h} & (A/\theta)/(\psi/\theta) \end{array}$$

en donde las demás flechas son las proyecciones naturales. //

Sea $K$ una familia de $\tau$-álgebras, denotaremos por $S(K)$ la clase de todas las subalgebras de $K$, por $H(K)$ la clase de todos los cocientes de álgebras en $K$ y por $P(K)$ la clase de todos los productos de familias de álgebras en $K$. Una clase $K$ se llamará variedad (ó clase ecuacional) si $H(K) \subset K$, $S(K) \subset K$ y $P(K) \subset K$.

El siguiente es un teorema de G. Birkhoff:

(1.4) <u>Teorema</u>. [PC. IV 3.5]. Sea $K$ clase de $\tau$-álgebras. Entonces $HSP(K)$ es la mínima variedad que contiene $K$. Así, $K$ es variedad si y sólo si $K = HSP(K)$. //

Por [HS, 23.8], las variedades son categorías completas y cocompletas.

Sea $K$ clase de $\tau$-álgebras, $M$ conjunto y $L \in K$. Se dice que $L$ es álgebra $K$-libre generada por $M$ si $L = \Gamma M$ y para cada $A \in K$ y función $\varphi: M \longrightarrow A$ existe un único $\tau$-homomorfismo $\bar{\varphi}: L \longrightarrow A$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & A \\ L \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Si $K = \mathcal{K}_\tau$, $L$ se llama absolutamente libre generada por $M$.

El siguiente resultado es un caso particular de un Teorema de Birkhoff.

(1.5) <u>Teorema</u>. [PC, III.5.3]. Sea $K$ $\tau$-variedad no trivial, entonces para todo conjunto $M$ existe el álgebra $K$-libre generada por $M$. //

Si $K$ es variedad y $\alpha$ es cardinal, denotaremos por $L_\alpha(K)$ al álgebra $K$-libre en $V_\alpha$ donde $|V_\alpha| = \alpha$ y será $i_\alpha: V_\alpha \hookrightarrow L_\alpha(K)$ la inclusión. Denotaremos sin embargo $L_\omega(K)$ al álgebra libre en $V$ donde $|V| = \aleph_0$, y denotaremos por $i: V \hookrightarrow L_\omega(K)$ la inclusión universal. Si $n \in \mathbb{N}$, supondremos en general que $V_n \subset V$, o sea que los generadores de $L_n(K)$ están contenidos en los de $L_\omega(K)$, y por tanto $L_n(K) \subset L_\omega(K)$.

Las álgebras libres en $\mathcal{K}_\tau$ las denotaremos por $T_\tau(\alpha)$ generadas por $V_\alpha$ con $|V_\alpha| = \alpha$. Para estas álgebras existen funciones de rango, esto es, una clase $\Theta$ de ordinales y una función $\rho: T_\tau(\alpha) \longrightarrow \Theta$ — la función de rango —, que cumple las siguientes propiedades: si $f_i$ es una operación $\lambda_i$-aria en $T_\tau(\alpha)$ y $(a_\mu)_{\mu<\lambda_i} \in T_\tau(\alpha)^{\lambda_i}$, se tiene que $\rho(f_i((a_\mu)_{\mu<\lambda_i})) > \sup\{\rho(a_\mu) \mid \mu < \lambda_i\}$ y $\rho(x) = 0$ si y sólo si $x \in V_\alpha$.

En estas álgebras se dice que $a \in T_2(\alpha)$ depende de $x \in V_\alpha$ si y solo si $a \notin \Gamma(V_\alpha \setminus \{x\})$. El conjunto de elementos de $V_\alpha$ de los cuales depende $a$ es finito y lo llamaremos las variables libres de $a$; esto establece una función de $T_2(\alpha)$ en la potencia finita de $V_\alpha$ que denotaremos por $f$, o sea, $f: T_2(\alpha) \longrightarrow P_f(V_\alpha)$

$$a \longmapsto \{x \in V_\alpha \mid a \text{ depende de } x\}.$$

Tomamos el conjunto numerable $V$ que genera a $T_2(\omega)$ el álgebra absolutamente libre en $V$. Una pareja $(s,t) \in T_2(\omega)^2$ se llamará ecuación. Decimos que una ecuación $(s,t)$ es válida en $A$ si para cualquier función $f: V \longrightarrow A$, el homomorfismo inducido $\bar{f}: T_2(\omega) \longrightarrow A$ es tal que $\bar{f}(s) = \bar{f}(t)$. (ie. si cualquier sustitución de las variables por elementos de $A$ identifica los términos $s$ y $t$).

Si $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$ es una clase de ecuaciones, por $m\Sigma$ entenderemos la clase de los modelos de $\Sigma$, esto es, las $\tau$-álgebras que hacen válidas todas las ecuaciones en $\Sigma$. Similarmente, si $K$ es una clase de $\tau$-álgebras por $eK$ se denotará a la clase de todas las ecuaciones satisfechas por las álgebras en $K$ y se llamará el conjunto de ecuaciones de $K$.

Un hecho muy simple de verificar es que si $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ son sistemas de ecuaciones, entonces $m\Sigma_2 \subset m\Sigma_1$; y si $K_1 \subset K_2$ son clases de $\tau$-álgebras, entonces $eK_2 \subset eK_1$. Luego se tiene.

$me m\Sigma_1 = m\Sigma_1$ y $emeK_1 = eK_1$.

Gran parte de la importancia de las variedades radica en el siguiente teorema de Birkhoff.

(1.6) Teorema [PC, IV.3.1]: Sea $K \subset \mathfrak{X}_\tau$ clase de álgebras. Entonces, $K$ es variedad si y solo si $K = meK$. //

En otras palabras, una variedad es una clase de álgebras que satisface un sistema de ecuaciones dado.

Una congruencia $\Theta \in Con(A)$ se llama totalmente invariante si para cada endomorfismo $\varphi: A \longrightarrow A$ y $(a,b) \in \Theta$ se satisface $(\varphi(a), \varphi(b)) \in \Theta$.

El siguiente Teorema es debido a B. H. Neumann.

(1.7) Teorema [PC, IV.1.2]: Sea $\Sigma \subset T_\tau(\omega)^2$ ecuaciones. Entonces, $\Sigma$ es congruencia totalmente invariante de $T_\tau(\omega)$ si y solo si $\Sigma = em\Sigma$ //

De otra manera, las congruencias totalmente invariantes de $T_\tau(\omega)$ son de la forma $eK$ con $K$ variedad. Esto establece además una biyección entre las $\tau$. variedades y las congruencias totalmente invariantes de $T_\tau(\omega)$, dada por $K \longmapsto eK$ y su inversa por $\Sigma \longmapsto m\Sigma$.

Por $\mathcal{L}$ se denotará al latice de congruencias totalmente invariantes de $T_\tau(\omega)$.

Respecto a esta conexión entre ecuaciones y variedades, también tenemos el siguiente:

(1.8) Teorema [PC, II.3.8]: Sea $K$ $\tau$. variedad. Entonces se tiene que $L_\omega(K) \cong T_\tau(\omega)/eK$ y esta álgebra genera $K$. //

Un concepto importante es de latice algebraico. Un latice se dice algebraico cuando es isomorfo al sistema de subalgebras de algún álgebra — cuyo tipo no está determinado previamente —. Una caracterización importante de estos sistemas de cerradura en [PC, II.1.2], i.e. que la unión de las cadenas no vacías de cerrados está en el sistema y también que la cerradura de un subconjunto del conjunto en el que se define el sistema es igual a la unión de las cerraduras de sus subconjuntos finitos. El latice $\mathcal{L}$ definido antes es algebraico y obviamente completo.

La importancia de los latices algebraicos radica en los siguientes hechos:

Si $L$ es latice completo, $a \in L$ se llama completamente irreducible por conjunción si $a < \wedge \{b \in L \mid a < b\}$. En un latice algebraico completo todo elemento puede obtenerse como ínfimo de elementos completamente irreducibles por conjunción — ver [GB, pag 194] —.

En un latice completo, $a \in L$ se llama compacto si siempre que $a \leq \vee K$ con $K$ cadena en $L$, se tiene $k \in K$ con $a \leq k$. En un latice algebraico completo todo elemento puede obtenerse como supremo de elementos compactos — ver [GB, pag 187] —.

Dada una variedad $\mathcal{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ al latice de subvariedades de $\mathcal{K}$. Por la observación después de (1.7), se sigue que $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ es anti-isomorfo al sublatice de $\mathcal{L}$ cuyos elementos contienen a $e\mathcal{K}$, que es claramente algebraico. Luego, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ es latice completo anti-isomorfo a un latice algebraico. Es claro que las operaciones en $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ están dadas por medio de la intersección y el supremo por la cerradura HSP.

Finalmente, $A \in \mathcal{K}_\tau$ se llama subdirectamente irreducible si siempre que $A \xrightarrow{i} \prod_{t \in T} B_t$, existe $t_0 \in T$ con $A \xrightarrow{i} \prod_{t \in T} B_t \xrightarrow{\pi_{t_0}} B_{t_0}$ inyectiva.

## §2. VARIEDADES IRREDUCIBLES.

**(2.1)** Definiciones y notación.- Dado un latice $L$, un elemento $0 \neq a \in L$ se llama irreducible por disyunción (i.d.) si $a = b \vee c$ siempre implica $a = b$ ó $a = c$. Un elemento i.d. del latice dual de $L$ se llama irreducible por conjunción (i.c.) en $L$. Se puede hablar también de elementos primos por disyunción ($a \leq b \vee c \Rightarrow a \leq b$ ó $a \leq c$) y primos por conjunción ($a \geq b \wedge c \Rightarrow a \geq b$ ó $a \geq c$). En el caso en que $L$ es latice completo, se definen cuatro propiedades más fuertes: un elemento completamente irreducible por disyunción (c.i.d.), $a \in L$, satisface que si $a = \bigvee X \Rightarrow a \in X$; un elemento completamente primo por disyunción (c.p.d.) satisface la propiedad característica: $a \leq \bigvee X$, implica la existencia de $x \in X$ tal que $a \leq x$. Un elemento completamente irreducible por conjunción (c.i.c.), ó completamente primo por conjunción (c.p.c.) satisfacen las propiedades duales respectivamente.

Sea $\mathfrak{k}$ una variedad, como hemos visto en la sección anterior el latice $\mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$ de todas las subvariedades de $\mathfrak{k}$, es completo; la finalidad de este trabajo es estudiar los conceptos arriba definidos en el latice $\mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$. Un elemento $\mathfrak{h} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$ que sea irreducible por conjunción, lo llamaremos irreducible por conjunción relativo a $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k}$-i.c.), similarmente para los conceptos p.c., c.i.c y c.p.c., etc.

Siendo $\mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$ un latice completo, los conceptos que nos serán más útiles son aquellos definidos para ese caso (c.i.d., c.p.d, etc.).

En esta sección nos concentraremos a algunas propiedades elementales de las variedades c.i.d. y c.i.c. en $\mathcal{L}_k$.

(2.2) <u>Observación</u> y <u>definiciones</u>.- Sea $k$ variedad y $(k_\mu)_{\mu\in M}$ la familia de todas las subvariedades propias de $k$. Obviamente, $k$ es c.i.d. si y solamente si $\bigvee_{\mu\in M} k_\mu \subsetneq k$. De donde, $k$ es c.i.d. si y solo si $k$ tiene una subvariedad máxima.

Supongamos $k$ es c.i.d. y sea $h$ su subvariedad máxima, diremos en este caso que $k$ es envolvente de $h$.

Dualmente, $h \subsetneq k$ variedades y $(h_\mu)_{\mu\in M}$ es la familia de todas las subvariedades de $k$ que contienen propiamente a $h$, tendremos que $h$ es $k$- c.i.c si y solo si $h \subsetneq \bigcap_{\mu\in M} h_\mu$.

Sabemos por la sección anterior, que existe un anti isomorfismo de latices entre el latice de variedades (de un tipo $\tau$ fijo) y el latice de congruencias totalmente invariantes de la $\tau$ álgebra libre en $\aleph_0$ generadores, $\mathcal{L}$. De aquí, en particular si $k$ es variedad c.i.d., $e_k$, sus ecuaciones, son c.i.c. en $\mathcal{L}$, y recíprocamente. Obtenemos así, el siguiente resultado que nos será muy útil a lo largo de este trabajo.

(2.3). <u>Proposición</u>: Toda variedad puede obtenerse como supremo de variedades completamente irreducibles por disyunción.

<u>Demostración</u>: Como mencionamos en la primera sección, $\mathcal{L}$ es un latice algebraico. Por [GB pag 194], todo elemento de $\mathcal{L}$ se puede escribir como intersección de c.i.c. elementos de $\mathcal{L}$. Como $e_k \in \mathcal{L}$ existen $(\theta_\mu)_{\mu\in M} \subset \mathcal{L}$, $\theta_\mu$ c.i.c, tal que $e_k = \bigcap_{\mu\in M} \theta_\mu$.

De aquí, $\mathfrak{K} = m e \mathfrak{K} = m \bigwedge_{\mu\in H} \theta_\mu = \bigvee_{\mu\in H} m\theta_\mu$, y por (2.2), $m\theta_\mu$ es variedad c.i.d., $\mu\in H$. //

Obtendremos ahora dos resultados útiles acerca de la generación de variedades c.i.d.

(2.4). Proposición: Sean $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{K}$ variedades, $\mathfrak{K}$ es envolvente de $\mathfrak{h}$ si y solo si $\mathfrak{K}$ puede ser generada por cualquier algebra $A \in \mathfrak{K} - \mathfrak{h}$.

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{K}$ es envolvente de $\mathfrak{h}$ y sea $A\in\mathfrak{K}-\mathfrak{h}$. La variedad generada por $A$, siendo subvariedad de $\mathfrak{K}$ no está contenida en $\mathfrak{h}$, luego debe ser $\mathfrak{K}$. Para el converso, tomemos $\mathfrak{L} \subsetneq \mathfrak{K}$ variedad y $A\in\mathfrak{L}$, como obviamente $A$ no puede generar $\mathfrak{K}$, $A\in\mathfrak{h}$. Luego $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}$ es subvariedad máxima de $\mathfrak{K}$. //

El siguiente resultado es consecuencia directa de [PC pag 114].

(2.5) Proposición: $\mathfrak{K}$ variedad, $A\in\mathfrak{K}_2$. Sea $\{B_i\}_{i\in X}$ familia de subalgebras no vacías de $A$, dirigida superiormente por la inclusión. Supongamos que $A = \bigcup_{i\in X} B_i$ y que $B_i\in\mathfrak{K}$ para toda $i\in X$. Entonces $A\in\mathfrak{K}$. //

(2.6) Proposición: $\mathfrak{K} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} HSP(L_n(\mathfrak{K}))$.

Demostración: Sea $A\in\mathfrak{K}$ y $M$ subconjunto finito de $A$. Existe $n\in\mathbb{N}$ y una función supráyectiva $f: V_n \longrightarrow M$, donde $V_n$ es el conjunto de generadores de $L_n(\mathfrak{K})$. Denotemos por $M \xrightarrow{i} \Gamma M$ la inclusión, existe un homomorfismo $h$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle in}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ L_n(\mathfrak{K}) & \xrightarrow{h} & \Gamma M \end{array}.$$

Tenemos $\mathrm{Im}\, h = h\,\Gamma in(V_n) = \Gamma(h_\circ in)(V_n) = \Gamma(if(V_n)) = \Gamma i M = \Gamma M$, o sea, $h$ es supráyectiva. Por tanto, $\Gamma M \in HSP(\{L_n(\mathfrak{K})\}) \subset \bigvee_{n\in\mathbb{N}} HSP(L_n(\mathfrak{K}))$.

Como $A$ está generada por sus subálgebras finitamente generadas, por (2.5) $A \in \bigvee_{n \in \mathbb{N}} HSP(L_n(\mathfrak{K}))$ y finalmente $\mathfrak{K} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} HSP(L_n(\mathfrak{K}))$ //

(2.7) Corolario: Sea $\mathfrak{K}$ variedad c.i.d., entonces $\mathfrak{K}$ está generada por el álgebra libre en $n$ elementos para alguna $n \in \mathbb{N}$. //

Veremos ahora, que en cierto sentido los resultados anteriores pueden dualizarse para las variedades c.i.c.:

(2.8) Proposición: $\mathfrak{K} \subsetneq \mathfrak{H}$ variedades, $\mathfrak{K}$ es $\mathfrak{H}$-c.i.c. si y solo si para todo conjunto de ecuaciones $\Sigma$ tal que $e\mathfrak{K} = e\mathfrak{H} \vee \Gamma\Sigma$, existe una ecuación $t \in \Sigma$ con la misma propiedad, ie. $e\mathfrak{K} = e\mathfrak{H} \vee \Gamma\{t\}$.

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{K}$ es c.i.c. relativa a $\mathfrak{H}$ y sea $\Sigma$ ecuaciones tales que $e\mathfrak{K} = e\mathfrak{H} \vee \Gamma\Sigma$, por tanto $e\mathfrak{K} = \Gamma(\bigcup_{t \in \Sigma}(e\mathfrak{H} \cup \{t\})) = \bigvee_{t \in \Sigma} \Gamma(e\mathfrak{H} \cup \{t\})$, de donde $\mathfrak{K} = \bigcap_{t \in \Sigma} m(e\mathfrak{H} \cup \{t\})$. Se obtiene así $t \in \Sigma$ con la propiedad deseada.

Para el converso supongamos que $\mathfrak{K}$ es reducible por conjunción en $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ y $\mathfrak{K} = \bigcap_{\mu \in N} \mathfrak{K}_\mu$, donde $\mathfrak{K} \subsetneq \mathfrak{K}_\mu \subset \mathfrak{H}$ cuando $\mu \in N$. Tomamos $\Sigma = \bigcup_{\mu \in N} e\mathfrak{K}_\mu$, claramente tenemos: $e\mathfrak{K} = \bigvee_{\mu \in N} e\mathfrak{K}_\mu = e\mathfrak{H} \vee \Gamma\Sigma$, pero si $t \in e\mathfrak{K}_\mu$ $e\mathfrak{H} \vee \Gamma\{t\} \subset e\mathfrak{K}_\mu \subsetneq e\mathfrak{K}$. //

En [MS] se prueba una caracterización categórica de las variedades c.i.c. relativas a $K_1$ — sin embargo se usa otra notación y terminología —, una observación sencilla es que la prueba allí dada puede adaptarse a variedades c.i.c. relativas a $\mathfrak{K}$, donde $\mathfrak{K}$ es una variedad arbitraria. Enunciamos aquí este resultado.

(2.9) Teorema: Sean $\mathfrak{K} \subsetneq \mathfrak{L}$ variedades y $(\mathfrak{K}_\mu)_{\mu\in M}$ la familia de subvariedades de $\mathfrak{L}$ que contienen propiamente a $\mathfrak{K}$, entonces $\mathfrak{K}$ es c.i.c. relativa a $\mathfrak{K}$ si y solo si $L_\omega(\mathfrak{K})$ es colímite de $(L_\omega(\mathfrak{K}_\mu))_{\mu\in M}$. //

Parte del trabajo que se realizará en secciones posteriores será ver hasta que punto es válido el resultado dual para las variedades c.i.d.

Otra pregunta natural que puede formularse es la validez del dual de (2.3), o sea, si toda variedad se obtiene como intersección de variedades c.i.c. relativas a una variedad dada. Este resultado es falso como se mostrará después en los grupos, sin embargo en algunas situaciones es cierto.

Una cuestión que será resuelta a lo largo de secciones posteriores es la equivalencia ó independencia —dependiendo de las hipótesis presentes— de los conceptos definidos en (2.1).

No hemos incluido ejemplos en esta sección puesto que en las últimas secciones se construirán familias de ellos en grupos y latices fundamentalmente, pero también en otras variedades.

Terminamos la sección mencionando algunas referencias a casos particulares del problema aquí planteado en general:

[AI] estudia las variedades que tienen envolvente cuando las algebras tienen latice de congruencias distributivo

[KM] lo hace en la variedad de todos los latices.

[HN] en algunas variedades de grupos.

## §3. VARIEDADES CON ECUACIONES EN FINITAS VARIABLES

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de variedades cuyas ecuaciones pueden definirse usando sólo un número finito de variables.

Veremos luego la relación entre esta propiedad y la de que la variedad esté generada por un álgebra libre en un número finito de variables, cuando además se tiene información sobre la irreducibilidad de la variedad.

Recordemos que si $p \in L_\omega(\mathcal{K}_2)$ el álgebra absolutamente libre de tipo $\tau$ por $f(p)$ denotamos las variables libres de $p$.

Sea $\mathbb{k}$ variedad y $n \in \mathbb{N}$, $(e\mathbb{k})_n := \{(p,q) \in e\mathbb{k} \mid |f(p) \cup f(q)| \leq n\}$ son las ecuaciones de $\mathbb{k}$ en cuando más $n$ variables.

Siguiendo la notación de [HN], denotaremos por $\mathbb{k}^{(n)} := m(e\mathbb{k})_n$, la variedad generada por las ecuaciones de $\mathbb{k}$ que incluyen cuando más $n$ variables.

Observemos los siguientes hechos:

i). $\mathbb{k} \subset \mathbb{k}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$

ii). $e\mathbb{k}^{(n)} = \Gamma(e\mathbb{k})_n$.

iii). $\mathbb{k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{k}^{(n)}$, esta igualdad se sigue del hecho que toda ecuación sólo tiene un número finito de variables libres.

iv). Si $\mathbb{k}$ es variedad c.i.c., existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{k} = \mathbb{k}^{(n)}$; i.e. las ecuaciones de $\mathbb{k}$ pueden generarse con finitas variables.

Algunos de los resultados presentados aquí son generalización del caso particular de grupos en [HN].

Una ecuación en n variables es equivalente a cualquier otra donde sólo se sustituyen biyectivamente las variables implicadas. Luego, intuitivamente es claro que la variedad $k^{(n)}$ debe poder expresarse por ecuaciones que sólo impliquen n variables, sustituyendo adecuadamente las variables de las ecuaciones de $(ek)_n$. Eso es lo que haremos ahora y obtendremos algunas consecuencias de esta sustitución.

Denotaremos por V un conjunto con $\aleph_0$ variables y $T_\tau(V)$ el álgebra absolutamente libre de tipo $\tau$ sobre V.

(3.1). Proposición: Sea $V_n \subset V$ y $|V_n| = n$, llamamos $\theta = ek \cap (\Gamma V_n)^2$. Entonces $k^{(n)} = m\theta$.

Demostración: Como $\theta \subset (ek)_n$, por tanto $k^{(n)} = m(ek)_n \subset m\theta$.
Sea $A \in m\theta$ y $(p,q) \in (ek)_n$ mostraremos que $A$ satisface la ecuación $(p,q)$. Sea $\alpha: T_\tau(V) \longrightarrow A$ homomorfismo, como $|f(p) \cup f(q)| \leq n$ existe $\varphi: V \longrightarrow V$ función con $\varphi| : f(p) \cup f(q) \longrightarrow V_n$ inyectiva. Extendemos $\varphi$ a un homomorfismo $\bar{\varphi}: T_\tau(V) \longrightarrow T_\tau(V)$ con $\bar{\varphi} u = u\varphi$, donde $V \xrightarrow{u} T_\tau(V)$, y obviamente $\bar{\varphi}| : \Gamma(f(p) \cup f(q)) \longrightarrow \Gamma V_n$ es inyectiva y $(\bar{\varphi}(p), \bar{\varphi}(q)) \in (\Gamma V_n)^2$.
Como $ek$ es congruencia totalmente invariante y $(p,q) \in ek$, $(\bar{\varphi}(p), \bar{\varphi}(q)) \in ek$, de donde $(\bar{\varphi}(p), \bar{\varphi}(q)) \in \theta$.

Tomamos $\rho: V \longrightarrow V$ función tal que $\rho\varphi\Big|^{f(p)\cup f(q)}_{f(p)\cup f(q)} = 1_{f(p)\cup f(q)}$ y extendemos $\rho$ a un homomorfismo $\bar{\rho}$ con $\bar{\rho} u = u\rho$. Luego $\bar{\rho}\bar{\varphi}$ es extensión de $1_{f(p)\cup f(q)}$ en $\Gamma(f(p) \cup f(q))$ y por unicidad tenemos $\bar{\rho}\bar{\varphi}\Big|^{\Gamma(f(p)\cup f(q))}_{\Gamma(f(p)\cup f(q))} = 1_{\Gamma(f(p)\cup f(q))}$.
Por tanto, $\bar{\rho}\bar{\varphi}(p) = p$, $\bar{\rho}\bar{\varphi}(q) = q$ y $\alpha\bar{\rho}: T_\tau(V) \longrightarrow A$ es homomorfismo.
Como $A \in m\theta$, $\alpha(p) = (\alpha\bar{\rho})(\bar{\varphi}(p)) = (\alpha\bar{\rho})(\bar{\varphi}(q)) = \alpha(q)$ y $A \in m(ek)_n = k^{(n)}$ ▮

La Proposición anterior muestra que $(ek)_n$ puede sustituirse por $\theta \subset (\Gamma V_n)^2$. En lo sucesivo supondremos que $(ek)_n$ está definido en sólo $n$ variables — o sea, identificaremos $(ek)_n$ y $\theta$ —.

(3.2) <u>Proposición</u>: Sea $k$ variedad y $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subset V$ con $|V_n| = n$. Llamaremos $L_n$ al álgebra absolutamente libre en $V_n$. Tenemos:

i). $(ek)_n$ es congruencia totalmente invariante de $L_n$.

ii). $L_n/(ek)_n$ es $k$-libre en $V_n$.

<u>Demostración</u>: "i)" $L_n = \Gamma V_n$ es subalgebra de $T_2(\omega)$ y $ek$ es congruencia totalmente invariante de $T_2(\omega)$, por tanto $(ek)_n = ek \cap (\Gamma V_n)^2 = ek \cap L_n^2$ es congruencia totalmente invariante de $L_n$.

"ii)" Sea $i : V_n \hookrightarrow L_n$ la inclusión y $p : L_n \longrightarrow L_n/(ek)_n$ la proyección. Probaremos que $pi : V_n \longrightarrow L_n/(ek)_n$ es inyectiva. Para ello tomamos $(x,y) \in V_n^2$ con $pi(x) = pi(y)$. Claramente $(x,y) \in (ek)_n \subset ek$.

Sea $k$ el morfismo canónico tal que:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, hook, "j"'] & L_\omega(k) = T_2(\omega)/ek \\ T_2(\omega) \arrow[ur, dashed, "k"'] & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $j'(x) = kj(x) = kj(y) = j'(y)$ y $j'$ es inyectiva. Por tanto, $x = y$.

Además, claramente $\Gamma pi(V_n) = L_n/(ek)_n$.

Sea $A \in k$ y $f : V_n \longrightarrow A$ función, existe $h : L_n \longrightarrow A$ único con $hi = f$.

Tomamos $r : V \longrightarrow V_n$ función suprayectiva con $r|_{V_n} = 1_{V_n}$. Existen homomorfismos $\nu$ y $\bar{l}$ que hacen el diagrama conmutar:
$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "l"] \arrow[d, hook, "i"'] & V \arrow[r, "r"] \arrow[d, hook] & V_n \arrow[d, hook, "i"] \\ L_n \arrow[r, dashed, "\bar{l}"] \arrow[rr, bend right, "1_{L_n}"'] & T_2(\omega) \arrow[r, dashed, "\nu"] & L_n \end{tikzcd}$$
y $\nu|_{L_n} = 1_{L_n}$.

Sea $(p,q) \in (ek)_n$, luego $(p,q) \in L_n^2$ y $\nu^2(p,q) = (p,q)$. Como $h\nu : T_2(V) \longrightarrow A$

es homomorfismo y $A \in \mathbb{k} = m\mathbb{k}$, $h(p) = h\nu(p) = h\nu(q) = h(q)$. Hemos mostrado que $(e\mathbb{k})_n \subset \ker h$. Por el 1er teorema de isomorfía, existe un único homomorfismo $\bar{h}$ con

$$\begin{tikzcd} L_n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & A \\ L_n/(e\mathbb{k})_n \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Así, $\bar{h}(pi) = hi = f$; $pi$ satisface la propiedad $\mathbb{k}$-universal, esto es $L_n/(e\mathbb{k})_n$ es $\mathbb{k}$-libre en $V_n$. //

(3.3) <u>Proposición</u>: $\mathbb{k}$ variedad de tipo $\tau$ y $A \in \mathcal{K}_\tau$. Supongamos $A = \Gamma M$ con $|M| = n$. Entonces $A \in \mathbb{k}$ si y solo si $A \in \mathbb{k}^{(n)}$

<u>Demostración</u>: Sea $A \in \mathbb{k}^{(n)}$ y denotamos $L_n$ el álgebra absolutamente libre en $M$. Existe un homomorfismo supraeyectivo $h$ con:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr, "i"] \arrow[dr, phantom, "G"'] & \\ L_n \arrow[r, dashed, two heads, "h"'] & A \end{tikzcd}$$

Probaremos que $(e\mathbb{k})_n \subset \ker h$. Para ello podemos suponer que $M \subset V$ donde $V$ es conjunto numerable de variables y $f: V \to M$ función con $f|_M = 1_M$.

Obtenemos
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & M \arrow[d, "\nu"] \\ T_\tau(V) \arrow[r, dashed, "r"'] & L_n \end{tikzcd}, \quad r|_{L_n} = 1_{L_n}$$

Sea $(p,q) \in (e\mathbb{k})_n$, luego $(p,q) \in L_n$ y $r(p) = p$, $r(q) = q$. Como $A \in m(e\mathbb{k})_n = \mathbb{k}^{(n)}$ y $hr: T_\tau(V) \to A$ es homomorfismo, tenemos $h(p) = hr(p) = hr(q) = h(q)$ ó sea otra forma $(p,q) \in \ker h$. Así, existe $\bar{h}$ homomorfismo con

$$\begin{tikzcd} L_n \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\nu"] \arrow[dr, phantom, "G"'] & \\ L_n/(e\mathbb{k})_n \arrow[r, dashed, "\bar{h}"'] & L_n/\ker h \cong A \end{tikzcd}$$

como $\nu$ es supraeyectivo, $\bar{h}$ es supraeyectivo.

Por tanto, $A \in HSP(L_n/(e\mathbb{k})_n)$ que por (3.2) está contenida en $\mathbb{k}$.

La otra implicación es obvia. //

(3.3) nos dice que para chequear que un álgebra finitamente generada está en una variedad, basta ver si satisface algunas de sus ecuaciones

(3.4) Proposición: Sea $A \in K_2$ y $k$ 2-variedad. $A \in k^{(n)}$ si y sólo si todas las subálgebras de $A$ con cuando más $n$ generadores están en $k$.

Demostración: Supongamos que $A \in k^{(n)}$ y sea $M \subset A$ con $|M| \leq n$. $\Gamma M$ es subálgebra de $A$ y $\Gamma M \in k^{(n)}$, aplicando (3.3) se obtiene $\Gamma M \in k$.

Para el converso tomemos $(p,q) \in (ek)_n$ y $\alpha : T_2(V) \longrightarrow A$ homomorfismo. Sea $M = f(p) \cup f(q)$, de donde $|M| \leq n$ y podemos asumir $M \subset V$, $r : V \to M$ con $r|_M = 1_M$. Definimos $N = \alpha(M) \subset A$, $|N| \leq n$ y $\alpha' = \alpha|_M^{\Gamma N}$.

Existe $\beta$ homomorfismo tal que:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[dr, "\rho"'] & V \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[r, hook, "\rho"] \arrow[drr, "\alpha'"] & T_2(V) \arrow[r, "\alpha"] & A \\
& T_2(V) \arrow[rrr, dashed, "\beta"] & & & \Gamma N \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

Así, $j\beta\rho = j\beta\mu\sigma = j\alpha' r\sigma = j\alpha' = \alpha\rho$ y $j\beta|_{\Gamma M} = \alpha|_{\Gamma M}$.

Como $(p,q) \in (ek)_n$ y $\Gamma N \in k \subset k^{(n)}$ por hipótesis, obtenemos que $\beta(p) = \beta(q)$; como también $(p,q) \in (\Gamma M)^2$, entonces $\alpha(p) = j\beta(p) = j\beta(q) = \alpha(q)$ y $A \in k^{(n)}$. //

Apliquemos ahora estos últimos resultados:

(3.5) Proposición: Sea $k$ envolvente de $h$ y $k = HSP(L_n(k))$, entonces $(eh)_n \not\subset ek$.

Demostración: Supongamos $(eh)_n \subset ek$.

Por tanto, $L_n(k) \in k \subset m(eh)_n = h^{(n)}$, como $L_n(k)$ está generado por $n$ elementos, por (3.3), $L_n(k) \in h$ y esto implica $k = HSP(L_n(k)) \subset h$ lo que es absurdo. //

(3.6) Teorema: Sea $k$ envolvente de $h$, entonces $k = HSP(L_n(k))$ si y sólo si $h = k \cap h^{(n)}$.

Demostración: Asumamos que $k = HSP(L_n(k))$, luego por (3.5)

$\mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{h}^{(n)}$ y tenemos $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}^{(n)} \subsetneq \mathfrak{k}$, pero $\mathfrak{k}$ es envolvente de $\mathfrak{h}$, por tanto $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}^{(n)} \subset \mathfrak{h}$, pero claramente $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}^{(n)}$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}^{(n)}$. Si $L_n(\mathfrak{k})$ no genera $\mathfrak{k}$, ninguna subalgebra de $L_\omega(\mathfrak{k})$ con $n$ generadores puede generar $\mathfrak{k}$ y deben estar por tanto en $\mathfrak{h}$. Por (3.4), $L_\omega(\mathfrak{k}) \in \mathfrak{h}^{(n)}$ y por hipótesis $L_\omega(\mathfrak{k}) \in \mathfrak{h}$ lo cuál es absurdo ya que genera $\mathfrak{k}$. //

## §4. CONGRUENCIAS TOTALMENTE INVARIANTES.

En esta sección introducimos el concepto de congruencia verbal y estudiamos su relación con el de congruencia totalmente invariante. Los resultados aquí obtenidos nos serán de utilidad en la siguiente sección para resolver el problema planteado en la sección 2 respecto al dual de (2.9)

(4.1) <u>Definición</u>: Sea $\Sigma \subset T_\tau(\omega)^2$, $A \in K_\tau$. Denotamos por $\theta_\Sigma^A$ la congruencia de $A$ generada por $\{(f(s), f(t)) \mid (s,t) \in \Sigma$ y $f: T_\tau(\omega) \longrightarrow A$ hom.$\}$. Dicemos que $\theta_\Sigma^A$ es una congruencia verbal.

El siguiente resultado aparece en [FL]:

(4.2). <u>Proposición</u>: $A \in K_\tau$, $\mathfrak{h}$ variedad. Entonces:

i). $A/\theta_{e\mathfrak{h}}^A \in \mathfrak{h}$ y es la mínima congruencia de $A$ con esta propiedad.

ii). Si $g: A \longrightarrow A'$ homomorfismo y $p: A \to A/\theta_{e\mathfrak{h}}^A$, $p': A' \longrightarrow A'/\theta_{e\mathfrak{h}}^{A'}$ cocientes existe un único morfismo $\bar{g}$ con:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & A' \arrow[d, "p'"] \\ A/\theta_{e\mathfrak{h}}^A \arrow[r, dashed, "\bar{g}"] & A'/\theta_{e\mathfrak{h}}^{A'} \end{tikzcd}$$ //

Un hecho importante aunque sencillo es el siguiente:

(4.3). <u>Lema</u>: $\Sigma \subset T_\tau(\omega)^2$, $A \in K_\tau$ entonces $\theta_\Sigma^A$ es congruencia totalmente invariante de $A$.

<u>Demostración</u>: Sea $h: A \longrightarrow A$ homomorfismo, $(s,t) \in \Sigma$ y $f: T_\tau(\omega) \longrightarrow A$ homomorfismo. Por tanto $hf: T_\tau(\omega) \longrightarrow A$ hom. y por definición, $(h(f(s)), h(f(t))) \in \theta_\Sigma^A$. Luego $h^2(\theta_\Sigma^A) \subset \theta_\Sigma^A$. //

Parte del trabajo de esta sección será mostrar que en un caso importante se tiene la conversa de (4.3), a saber si $A$ es libre en alguna variedad — y por tanto en $HSP(A)$ —.

(4.4) <u>Proposición</u>: Sea $A \in \mathcal{K}_2$ y $\mathcal{H}$ 2-variedad. Sea $\psi \in \mathrm{Con}\, A$ totalmente invariante y $\theta \in \mathrm{Con}\, A/\psi$ también totalmente invariante. Entonces la congruencia de $A$, $\varphi$, con la propiedad $\varphi/\psi = \theta$ es totalmente invariante.

<u>Demostración</u>: Por el 2º teorema de isomorfía, hay una congruencia $\varphi \in \mathrm{Con}\, A$ con $\varphi/\psi = \theta$. Mostraremos que $\varphi$ es totalmente invariante.
Sea $h: A \longrightarrow A$ homomorfismo, $(x,y) \in \varphi$.

Consideremos
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "p"] \\ A/\psi & A/\psi \end{tikzcd}$$

Si tomamos $(a,b) \in \psi$, siendo $\psi$ totalmente invariante $(h(a), h(b)) \in \psi$; de aquí $p(h(a)) = p(h(b))$ y $(a,b) \in \ker ph$. O sea, $\ker p \subset \ker ph$. Existe por tanto un homomorfismo $\bar{h}: A/\psi \longrightarrow A/\psi$ con $\bar{h}p = ph$. Como $(p(x), p(y)) \in \varphi/\psi = \theta$ totalmente invariante en $A/\psi$, tenemos que $(p(h(x)), p(h(y))) =$
$= (\bar{h}(p(x)), \bar{h}(p(y))) \in \theta = \varphi/\psi$, de donde $(h(x), h(y)) \in \varphi$ y $\varphi$ es congruencia totalmente invariante. //

(4.5) <u>Proposición</u>: $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$, $A \in \mathcal{K}_2$ y $\varphi \in \mathrm{Con}\, A$. Tenemos entonces
$$\theta_\Sigma^A/\varphi = \theta_\Sigma^{A/\varphi}.$$

<u>Demostración</u>: Sea $p: A \longrightarrow A/\varphi$ la proyección canónica.
"$\subset$" Sea $(f(s), f(t)) \in \theta_\Sigma^A$ con $(s,t) \in \Sigma$ y $f: T_2(\omega) \longrightarrow A$ homomorfismo. Como $pf: T_2(\omega) \longrightarrow A/\varphi$ homomorfismo, $(pf(s), pf(t)) \in \theta_\Sigma^{A/\varphi}$. Por tanto
$$\theta_\Sigma^A/\varphi = p^2(\theta_\Sigma^A) = p^2(\Gamma\{(f(s), f(t)) \mid (s,t) \in \Sigma,\ f: T_2(\omega) \to A \text{ hom.}\}) =$$
$$= \Gamma p^2\{(f(s), f(t)) \mid (s,t) \in \Sigma,\ f: T_2(\omega) \to A \text{ hom.}\} \subset \theta_\Sigma^{A/\varphi}.$$
"$\supset$" Sea $(g(s), g(t)) \in \theta_\Sigma^{A/\varphi}$ con $(s,t) \in \Sigma$ y $g: T_2(\omega) \longrightarrow A/\varphi$ hom.
Sea $f: A/\varphi \longrightarrow A$ función con $pf = 1_{A/\varphi}$. Existe $h$ homomorfismo con:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & T_2(\omega) \arrow[r, "g"] & A/\varphi \arrow[r, "f"] & A \\ T_2(\omega) \arrow[urrr, dashed, "h"'] & & & \end{tikzcd}$$

Y por tanto, $(h(s), h(t)) \in \theta_\Sigma^A$. Como además $phi = pfgi = gi$ e $i$ es morfismo universal, $ph = g$. De aquí $(g(s), g(t)) = p^2(h(s), h(t)) \in p^2(\theta_\Sigma^A) = \theta_\Sigma^A/\varphi$
Y finalmente $\theta_\Sigma^{A/\varphi} = \theta_\Sigma^A/\varphi$. //

(4.6) Proposición: $\alpha$ cardinal, $\theta \in \operatorname{Con} T_2(\alpha)$. Entonces $\theta$ es totalmente invariante si y solo si existe $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$ con $\theta = \theta_\Sigma^{T_2(\alpha)}$.

Demostración: Una implicación es inmediata de (4.3).

Supongamos que $\theta$ es totalmente invariante.

Definimos $\Sigma := \{(\bar{j}(a), \bar{j}(b)) \mid (a,b) \in \theta,\ j : V_\alpha \to V$ función y
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "i"] \\ T_2(\alpha) \arrow[r, "\bar{j}"] & T_2(\omega) \end{tikzcd}$$
$\}$.
donde $V$ genera $T_2(\omega)$ y $V_\alpha$ a $T_2(\alpha)$.

Probaremos que $\theta = \theta_\Sigma^{T_2(\alpha)}$.

"$\supset$" Sea $(\bar{j}(a), \bar{j}(b)) \in \Sigma$ con $(a,b) \in \theta$, $j : V_\alpha \to V$ función y
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "i"] \\ T_2(\alpha) \arrow[r, "\bar{j}"] & T_2(\omega) \end{tikzcd}$$

Sea $h : T_2(\omega) \longrightarrow T_2(\alpha)$ homomorfismo.

Existe $g$ homomorfismo tal que:
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & V \arrow[r, "i"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & T_2(\omega) \arrow[r, "h"] & T_2(\alpha) \\ T_2(\alpha) \arrow[urrr, dashed, "g"'] & & & \end{tikzcd}$$

y se tiene $gi_\alpha = hij = h\bar{j}i_\alpha$ y siendo $i_\alpha$ universal, $g = h\bar{j}$.

como $\theta$ es totalmente invariante, $(h\bar{j}(a), h\bar{j}(b)) = (g(a), g(b)) \in \theta$.

Por tanto $\theta_\Sigma^{T_2(\alpha)} \subset \theta$.

"$\subset$" Sea $(a,b) \in \theta$. Def. $j : V_\alpha \longrightarrow V$ función tal que $j|_{f(a) \cup f(b)}$ es inyectiva.

Sea $\bar{j}$ la extensión con $\bar{j}i_\alpha = ij$, luego $(\bar{j}(a), \bar{j}(b)) \in \Sigma$.

Sea $g : V \longrightarrow V_\alpha$ función con la propiedad $gj\,\Big|_{f(a)\cup f(b)}^{f(a)\cup f(b)} = 1_{f(a)\cup f(b)}$.

Y tomamos la extensión $\bar{g}$ tal que $\bar{g}i = i_\alpha g$, claramente se tiene
$\bar{g}\bar{j}\,\Big|_{Tf(a)\cup f(b)}^{Tf(a)\cup f(b)} = 1_{Tf(a)\cup f(b)}$. Por tanto, $(a,b) = (\bar{g}(\bar{j}(a)), \bar{g}(\bar{j}(b))) \in \theta_\Sigma^{T_2(\alpha)}$. //

(4.7) <u>Proposición</u>: Sean $k$ variedad, $A$ $k$-libre en $V_\alpha$ y
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, hook, "\vartheta"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & A \\ T_2(\alpha) \arrow[ur, dashed, "p"'] \end{tikzcd}$$
Entonces $\ker p = \theta^{T_2(\alpha)}_{e(\{A\})}$.

<u>Demostración</u>: Como $T_2(\alpha)/\ker p \cong A \in HSP(A)$, por (4.2), $\theta^{T_2(\alpha)}_{e(\{A\})} \subset \ker p$.
Sea $(x,y) \in \ker p$ y $M = f(x) \cup f(y)$. Sabemos $|M| < \aleph_0$.
Sea $j: V_\alpha \longrightarrow V$ función con $j_{|M}$ inyectiva —recordar que $|V| = \aleph_0$—.
Sea $\bar{j}$ la extensión tal que
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & V \arrow[d, "i"] \\ T_2(\alpha) \arrow[r, "\bar{j}"] & T_2(\omega) \end{tikzcd}$$
Probaremos que $(\bar{j}(x), \bar{j}(y)) \in e(\{A\})$. Sea $k: T_2(\omega) \longrightarrow A$ hom.
Siendo $A$ $k$-libre en $V_\alpha$, existe $g$ hom. tal que:
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, hook, "i_\alpha"] \arrow[d, "\vartheta"'] & T_2(\alpha) \arrow[r, "\bar{j}"] & T_2(\omega) \arrow[r, "k"] & A \\ A \arrow[rrru, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Aquí, $gp\, i_\alpha = g\vartheta = k\bar{j}\, i_\alpha$ y por tanto, $gp = k\bar{j}$.
Como $p(x) = p(y)$, se sigue que $k(\bar{j}(x)) = g(p(x)) = g(p(y)) = k(\bar{j}(y))$
y $(\bar{j}(x), \bar{j}(y)) \in e(\{A\})$. Sea $\rho: V \longrightarrow V_\alpha$ función con $\rho j|^M_M = 1_M$
luego la extensión $\bar{\rho}: T_2(\omega) \longrightarrow T_2(\alpha)$ cumple $\bar{\rho}\bar{j}|^{TM}_{TM} = 1_{TM}$.
Por tanto, $(x,y) = (\bar{\rho}(\bar{j}(x)), \bar{\rho}(\bar{j}(y))) \in \theta^{T_2(\alpha)}_{e(\{A\})}$ //

Todos los resultados anteriores se usan en el siguiente:

(4.8) <u>Teorema</u>: Sean $k$ variedad, $A$ $k$-libre y $\theta \in \mathrm{Con}\, A$.
Entonces $\theta$ es verbal si y sólo si $\theta$ es totalmente invariante.

<u>Demostración</u>: Una implicación se sigue de (4.3).
Supongamos que $\theta$ es totalmente invariante y $A$ es $k$-libre en $V_\alpha$.
Sea $p$ el morfismo con
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, hook, "\vartheta"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & A \\ T_2(\alpha) \arrow[ur, dashed, "p"'] \end{tikzcd}$$
y $A = T_2(\alpha)/\ker p$

Por (4.7), $\ker p$ es totalmente invariante y si $\theta = \Psi/\ker p$ tenemos por (4.4) que $\varphi$ es totalmente invariante. Usando (4.6) concluimos que existe $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$ tal que $\varphi = \theta_\Sigma^{T_2(\omega)}$ y finalmente por (4.5) que

$$\theta = \theta_\Sigma^{T_2(\omega)} / \ker\varphi = \theta_\Sigma^A \text{ verbal. //}$$

También tenemos el siguiente útil resultado.

(4.9) <u>Proposición</u>: Sea $k$ variedad y $\theta \in Con(L\omega(k))$ no trivial. Si $\theta$ es totalmente invariante, $L\omega(k)/\theta$ no genera $k$.

<u>Demostración</u>: Como $L\omega(k) = T_2(\omega)/ek$, hay una congruencia $\psi \in Con(T_2(\omega))$ con $\theta = \psi/ek$, por (4.4), $\psi$ es totalmente invariante. Luego hay una variedad tal que $\theta = eh/ek$ y $L\omega(k)/\theta = (T_2(\omega)/ek)/(eh/ek) \cong L\omega(h)$ pero como $\theta$ no es trivial, $ek \subsetneq eh$ y $h \subsetneq k$. //

Mostraremos un ejemplo donde la conclusión de (4.8) es falsa.

(4.10) <u>Ejemplo</u>: Sea $G$ grupo abeliano con $x \in G$, de orden finito $k > 1$ y $y \in G$ libre de torsión. Definimos $H := \Gamma_G\{a \in G \mid a^k = e_G\}$ y $\theta$ relación en $G$ tal que $(a,b) \in \theta$ si y solo si $ab^{-1} \in H$. Entonces $\theta$ es congruencia totalmente invariante en $G$ y no es verbal.

<u>Demostración</u>: Sea $h: G \longrightarrow G$ hom. $(a,b) \in \theta$. Por tanto $ab^{-1} \in H$ y existen $x_1, \dots, x_n \in G$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z}$ tales que $ab^{-1} = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$ y $x_i^k = e_G$ si $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $G$ es abeliano $[h(a)h(b)^{-1}]^k = h((ab^{-1})^k) = h(e) = e$, de donde $(h(a), h(b)) \in \theta$ y $\theta$ es totalmente invariante.

Sea $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$ y supongamos $\theta = \theta_\Sigma^G$. Como $x \in H$, tenemos

$(x,e) \in \theta = \theta_\Sigma^G = \Gamma\{(h(s), h(t)) \mid (s,t) \in \Sigma,\ h: T_2(\omega) \longrightarrow G \text{ hom.}\}$. Por tanto, existen $(s_1,t_1), \dots, (s_n,t_n) \in \Sigma$ y $h_1, \dots, h_n: T_2(\omega) \longrightarrow G$ homs. con

$(x,e) = (h_1(s_1)^{\mu_1} \dots h_n(s_n)^{\mu_n}, h_1(t_1)^{\mu_1} \dots h_n(t_n)^{\mu_n})$. Usando que $G$ es abeliano

se obtiene, $x = xe^{-1} = h_1(s_1t_1^{-1})^{r_1} \cdots h_n(s_nt_n^{-1})^{r_n}$,
como $x \neq e$, existe $j \in \{1,\dots,n\}$ con $h_j(s_jt_j^{-1}) \neq e$.

Sea $p$ hom. tal que
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "u"] & \\ Z_2(\omega) \arrow[r, dashed, "p"'] & L_\omega(G_u) \end{tikzcd}$$
y $k_j$ hom. con
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "u"] & \\ Z_2(\omega) \arrow[d, "h_j"'] & L_\omega(G_u) \arrow[dl, "k_j"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Se sigue que $h_j = k_j p$.

como $L_\omega(G_u) = \Gamma pi(V)$ grupo, se obtienen $x_1,\dots,x_m \in V$ y $\nu_1,\dots,\nu_m \in \mathbb{Z}$ con $p(s_jt_j^{-1}) = pi(x_1)^{\nu_1} \cdots pi(x_m)^{\nu_m} = u(x_1)^{\nu_1} \cdots u(x_m)^{\nu_m}$.

Sea $A := \{k_j(u(x_t)) \mid t \in \{1,\dots,m\}\}$ y $A = \{y_1,\dots,y_\ell\}$ elementos distintos
definimos $\alpha_t = \sum_{k_j(u(x_p)) = y_t} \nu_p$ para $t \in \{1,\dots,\ell\}$.

De aquí, $e \neq h_j(s_jt_j^{-1}) = k_jp(s_jt_j^{-1}) = k_j(u(x_1))^{\nu_1} \cdots k_j(u(x_m))^{\nu_m} = \prod_{t=1}^{\ell} y_t^{\alpha_t}$.
Y existe $t_0 \in \{1,\dots,\ell\}$ con $\alpha_{t_0} \neq 0$. Definimos $f: V \longrightarrow G$ función con $f(x_t) = y$ si $k_j(u(x_t)) = y_{t_0}$ y $f(x_t) = e$ si $k_j(u(x_t)) \neq y_{t_0}$ para $t \in \{1,\dots,m\}$.

Sea $\bar{f}: L_\omega(G_u) \longrightarrow G$ hom. tal que $\bar{f}u = f$. De donde $\bar{f}p: Z_2(\omega) \longrightarrow G$ hom. y $(\bar{f}p(s_j), \bar{f}p(t_j)) \in \theta_\Sigma^G = \theta$. Tenemos:
$$y^{\alpha_{t_0}} = \prod_{k_j(u(x_t)) = y_{t_0}} f(x_t)^{\nu_t} = \prod_{\ell=1}^{m} f(x_\ell)^{\nu_\ell} = \prod_{\ell=1}^{m} \bar{f}u(x_\ell)^{\nu_\ell} = \bar{f}\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(x_\ell)^{\nu_\ell}\right) =$$
$$= \bar{f}p(s_jt_j^{-1}) = \bar{f}p(s_j)(\bar{f}p(t_j))^{-1} \in H, \quad y^{\alpha_{t_0}k} = e,$$ lo que es absurdo //

Un caso concreto del ejemplo (4.10) son los grupos $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{N}$.

## §5. UNA CARACTERIZACION DE LAS VARIEDADES C.I.D.

La finalidad de esta sección es obtener un resultado similar a (2.9) para las variedades c.i.d., es decir, una caracterización categórica de las mismas. Incluiremos también algunas relaciones entre el concepto de irreducibilidad para variedades y el de irreducibilidad subdirecta para álgebras.

(5.1) <u>Teorema</u>: Sea $\mathcal{K}$ variedad y $L$ $\mathcal{K}$-libre en $V$ variables donde $V$ es numerable. Sean $(\mathcal{K}_\mu)_{\mu\in M}$ variedades contenidas propiamente en $\mathcal{K}$. Entonces $\mathcal{K} = \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu$ si y solo si $L \in IS(\{\lim_{\mu\in M} L_\omega(\mathcal{K}_\mu)\})$.

<u>Demostración</u>: Si $\mu\in M$, llamaremos $L_\mu$ a la $\mathcal{K}_\mu$-álgebra libre en $V$. Sea $\Delta$ la categoría asociada a $((\mathcal{K}_\mu)_{\mu\in M}, \supset)$ y definimos $F: \Delta \longrightarrow \mathcal{K}_2$ funtor tal que $F(\mathcal{K}_\mu) = L_\mu$ y si $\mathcal{K}_\mu \supset \mathcal{K}_j$ entonces $F(\mu,j): L_\mu \longrightarrow L_j$ es el único morfismo que hace conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "i_\mu"'] \arrow[dr, "i_j"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "C"] & \\ L_\mu \arrow[r, dashed, "F(\mu,j)"'] & L_j \end{tikzcd}.$$

Si además $\mu\in M$, definimos $h_\mu: L \longrightarrow L_\mu$ el único morfismo con

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "i_\mu"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "C"] & \\ L \arrow[r, "h_\mu"'] & L_\mu \end{tikzcd}.$$

Afirmamos que $(L, (h_\mu)_{\mu\in M})$ es fuente natural de $F$.

Sea $\mathcal{K}_\mu \supset \mathcal{K}_j$, por tanto:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "i_j"] \arrow[dr, "i_\mu"] \arrow[dd, "i"'] & & L_j \\ & L_\mu \arrow[ur, "F(\mu,j)"] & \\ L \arrow[ur, "h_\mu"] \arrow[uurr, "h_j"'] & & \end{tikzcd}$$

y el triángulo exterior conmuta

por unicidad de $h_j$, tenemos que $h_j = F(\mu,j)\,h_\mu$ y $(L, (h_\mu)_{\mu\in M})$ es fuente natural de $F$.

Supongamos que $L \in IS(\{\lim F\})$. Como se mencionó en la sección 1, $\bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu$ es categoría completa y por definición de $F$, $\lim F \in \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu$

luego $L \in \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu$ y $\mathcal{K} = HSP(L) \subset \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu \subset \mathcal{K}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{K} = \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu$. Llamaremos $p: \mathcal{T}_1(V) \longrightarrow L = \mathcal{T}_1(V)/e\mathcal{K}$ la proyección. Fijamos $\mu\in M$, luego sabemos que
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_\mu"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "i"] & L_\mu \\ \mathcal{T}_1(V) \arrow[r, "p"'] & L \arrow[u, "h_\mu"'] \end{tikzcd}$$
es el cociente canónico, o sea, $e\mathcal{K}_\mu = \ker h_\mu p$.

Siendo $p$ suprayectiva, $\ker h_\mu = p^2(e\mathcal{K}_\mu)$ que es congruencia totalmente invariante de $L$ por (4.5). Así, $\theta = \bigcap_{\mu\in M} p^2(e\mathcal{K}_\mu)$ es congruencia totalmente invariante de $L$. Tomamos $\nu: L \longrightarrow L/\theta$ el cociente natural.

Para $\mu\in M$, $\theta \subset p^2(e\mathcal{K}_\mu) = \ker h_\mu$, lo que asegura la existencia de un morfismo $k_\mu$ con
$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr, "h_\mu"] & \\ L/\theta \arrow[r, dashed, "k_\mu"'] & L_\mu \end{tikzcd}.$$

Como por definición $h_\mu$ es suprayectiva, $k_\mu$ es suprayectiva. Esto implica que $\mathcal{K}_\mu = HSP(L_\mu) \subset HSP(L/\theta)$ y $\mathcal{K} = \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{K}_\mu \subset HSP(L/\theta) \subset \mathcal{K}$ y por tanto $L/\theta$ genera $\mathcal{K}$. Por (4.9), $\theta = \Delta_L$ la congruencia trivial, y $\bigcap_{\mu\in M} \ker h_\mu = \Delta_L$.

Sea $(\mathcal{L}, (t_\mu)_{\mu\in M})$ el límite de $F$ —ya que $\mathbb{K}_2$ es completa—. Como $(L, (h_\mu)_{\mu\in M})$ es fuente natural de $F$, existe un único morfismo $\bar{h}: L \longrightarrow \mathcal{L}$ con $t_\mu \bar{h} = h_\mu$ para cada $\mu\in M$. De aquí, $\ker \bar{h} \subset \bigcap_{\mu\in M} \ker t_\mu \bar{h} = \bigcap_{\mu\in M} \ker h_\mu = \Delta_L$, o sea, $\bar{h}$ es inyectiva y $L \in IS(\{\mathcal{L}\})$. //

Conservando la notación de (5.1) es en general falso que $(L, (h_\mu)_{\mu\in M})$ sea exactamente el límite de $F$. Consideremos el siguiente ejemplo.

Sea $M$ un conjunto infinito de enteros primos positivos. Probaremos primeramente que $\bigvee_{p\in M} HSP(\mathbb{Z}_p) = Ab$ la variedad de grupos abelianos. Definimos $A = \prod_{p\in M} \mathbb{Z}_p$ elemento de la variedad $\bigvee_{p\in M} HSP(\mathbb{Z}_p)$. Y denotamos por $\bar{1}$ la identidad de $A$ —multiplicativa—.

Si $n \in \mathbb{N}$, hay un $p \in M$ con $n < p$. Como $\mathrm{ord}(1_{\mathbb{Z}_p}) = p$, $n(1_{\mathbb{Z}_p}) \neq 0_{\mathbb{Z}_p}$ y $n\bar{1} \neq 0_A$ ó en otras palabras $\mathrm{ord}(\bar{1})$ es infinito. El subgrupo de $A$ generado por $\bar{1}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, luego $\mathbb{Z} \in \bigvee_{p \in M} HSP(\mathbb{Z}_p)$. Como además $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ es Ab. libre de rango $\omega$ y $\mathbb{Z}^{(\omega)} \in \bigvee_{p \in M} HSP(\mathbb{Z}_p)$, tenemos que $Ab = \bigvee_{p \in M} HSP(\mathbb{Z}_p)$

Además, $L_p = \mathbb{Z}_p^{(\omega)}$ para $p \in M$.

Es claro que $HSP(\mathbb{Z}_p)$ es variedad minimal, de donde $\Delta$ es variedad indiscreta y $(\prod_{p \in M} \mathbb{Z}_p^{(\omega)}, (\pi_p)_{p \in M})$ es el límite de $F$. Pero todos los elementos de $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ tienen orden infinito, mientras que en $\prod_{p \in M} \mathbb{Z}_p^{(\omega)}$ hay elementos de orden $p \in M$, finito. Por tanto, $L \not\cong \prod_{p \in M} \mathbb{Z}_p^{(\omega)}$.

Concluimos esta sección haciendo algunas observaciones que nos serán de utilidad posteriormente.

(5.2) <u>Proposición</u>: Sea $k$ variedad c.i.d., entonces $k$ está generada por un álgebra subdirectamente irreducible.

<u>Demostración</u>. Directo por el teorema de descomposición de Birkhoff [GB pag 193] //

(5.3) <u>Proposición</u>: Sea $k$ variedad con $L_\omega(k)$ subdirectamente irreducible entonces $k$ es variedad c.i.d.

<u>Demostración</u>. Como $L_\omega(k) = T_\tau(\omega)/e_k$ es subdirectamente irreducible, $[e_k, 1]_{\mathrm{Con}\, T_\tau(\omega)}$ tiene elemento mínimo, lo cual implica que $e_k$ es c.i.c. en $\mathcal{L}$ el latice de congruencias totalmente invariantes de $T_\tau(\omega)$. Como vimos en la sección 2, esto produce $k$ c.i.d. //

El converso de (5.3) es falso como lo muestra $k = HSP(\mathbb{Z}_2)$ que es variedad c.i.d. y sin embargo $\mathbb{Z}_2^{(\omega)}$ no es subdirectamente irreducible.

## §6. COMPACIDAD.

En esta sección nos ocuparemos del importante problema de cuando las ecuaciones de una variedad pueden generarse con sólo un número finito de ellas. Este caso se presenta en las variedades más familiares como grupos, latices, anillos, etc. Nos concretamos a plantear el problema, dar algunos ejemplos y probar algunos resultados de utilidad posterior.

(6.1) Definición: Sea $L$ latice completo, $a \in L$. $a$ se llama compacto en $L$ si siempre que $a \leq \bigvee M$, existe un subconjunto finito $F$ de $M$ con $a \leq \bigvee F$.

Llamaremos compacta a una variedad $\mathfrak{k}$ donde $e\mathfrak{k}$ sean compacto en $\mathcal{L}$.

(6.2) Proposición: Para una variedad $\mathfrak{k}$ son equivalentes:

1). $\mathfrak{k}$ es compacta

2). Para cada $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$ con $e\mathfrak{k} = \Gamma\Sigma$, existe $F \subset \Sigma$ finito con $e\mathfrak{k} = \Gamma F$.

3). Existe $F \subset T_2(\omega)^2$ finito tal que $e\mathfrak{k} = \Gamma F$.

Demostración: "1) ⇒ 2)" Supongamos que $\mathfrak{k}$ es compacta y $e\mathfrak{k} = \Gamma\Sigma$ con $\Sigma \subset T_2(\omega)^2$, luego $e\mathfrak{k} = \Gamma\Sigma = \bigcup\{\Gamma F \mid F \subset \Sigma \text{ finito}\} = \bigvee\{\Gamma F \mid F \subset \Sigma \text{ finito}\}$.
Como $e\mathfrak{k}$ es compacto en $\mathcal{L}$, existen $F_1, \dots, F_n \subset \Sigma$ finitos y $e\mathfrak{k} \subset \bigvee_{i=1}^{n} \Gamma F_i$.
Tomamos $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subset \Sigma$ finito y $\Gamma F \subset \Gamma\Sigma = e\mathfrak{k} \subset \bigvee_{i=1}^{n} \Gamma F_i = \Gamma F$.

"2) ⇒ 3)" Es trivial ya que $e\mathfrak{k} = \Gamma e\mathfrak{k}$.

"3) ⇒ 1)" Supongamos que $\emptyset \neq K \subset \mathcal{L}$ cadena y $e\mathfrak{k} \subset \bigvee_{\mathcal{L}} K = \bigcup K$ como $F \subset e\mathfrak{k} \subset \bigcup K$, $F$ finito y $K$ cadena tenemos que existe $k_0 \in K$ con $F \subset k_0$ y $e\mathfrak{k} = \Gamma F \subset k_0$. Esto dice que $e\mathfrak{k}$ es compacto //.

Una pregunta natural es si todas las variedades con finitas operaciones finitarias son compactas ó no. Mostraremos ahora un ejemplo.

(6.3) Ejemplo: Construiremos una variedad no compacta en $\mathcal{K}_\tau$ con $\tau=\langle 2\rangle$.

Definimos $k := m\{(x.y)^n = (y.x)^n \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 2\}$

luego $ek = \Gamma\{(x.y)^n = (y.x)^n \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 2\}$. Por (6.2) bastará probar que ningún subconjunto de la forma $\{(x.y)^i = (y.x)^i \mid i\in\{2,\dots,n\}\}$ genera $ek$.

Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ y $\Sigma := \{(x.y)^i = (y.x)^i \mid i\in\{2,\dots,n\}\}$.

Probaremos que $\Gamma\Sigma \subsetneq ek$ y para ello bastará mostrar que $k \subsetneq m\Sigma$.

Sea $A = (A,*)$ el álgebra con $A = \{1,\dots,n,n+1\}$ y con tabla:

| $*$ | 1 | 2 | ... | $n-2$ | $n-1$ | $n$ | $n+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 3 | 3 |
| ⋮ | | | | | | | |
| $n-2$ | 1 | 1 | | 1 | 1 | $n-1$ | $n-1$ |
| $n-1$ | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | $n$ |
| $n$ | 2 | 3 | | $n-1$ | 1 | 1 | $n$ |
| $n+1$ | 2 | 3 | | $n-1$ | $n$ | $n+1$ | 1 |

En la parte de la tabla marcada el resultado de aplicar $*$ siempre es 1 y en la parte se tiene $n*i = i+1 = i*n$ y $(n+1)*i = i+1 = i*(n+1)$.

Observar que si $k\in\{1,\dots,n\}$, $l\in\{1,\dots,n\}$, $r\in\{1,\dots,n-1\}$ se tiene $k*l = l*k$ y por tanto $(k*l)^i = (l*k)^i$, $i\in\{1,\dots,n\}$ y $r*(n+1) = (n+1)*r$ por tanto $[r*(n+1)]^i = [(n+1)*r]^i$.

Pero $n*(n+1) = n$ y $(n+1)*n = n+1$, como además tenemos

$n^2 = 1$ y $(n+1)^2 = 1$

$n^3 = n^2*n = 1*n = 2$ y $(n+1)^3 = (n+1)^2*(n+1) = 2$

y así sucesivamente hasta $n^n = n^{n-1} * n = (n-2) * n = n-1$ y también $(n+1)^n = (n+1)^{n-1} * (n+1) = (n-2) * (n+1) = n-1$.

Esto nos permite concluir que $A \in m\Sigma$.

Pero $n^{n+1} = n^n * n = (n-1) * n = 1$ y $(n+1)^{n+1} = (n-1) * (n+1) = n$, y se sigue que $A$ no satisface $(x\cdot y)^{n+1} = (y.x)^{n+1}$, $A \notin k$. Así $k \subsetneq m\Sigma$. //

(6.4) Observación.

i). Si definimos $k_n := m\{(x\cdot y)^i = (y.x)^i \mid i \in \{2, \ldots, n\}\}$, tenemos $k \subsetneq k_{n+1} \subsetneq k_n$ cadena descendente no estacionaria de variedades. En una sección posterior veremos que esta situación es característica.

ii). $h = m\{x.y = y.x\}$ es una variedad compacta que satisface $(x.y)^n = (y.x)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Luego $h \subsetneq k$ del ejemplo (6.3).

Observar el siguiente ejemplo explícito:

$A = (A, *)$ . $\langle 2 \rangle$-álgebra, con $A = \mathbb{N} \dot{\cup} \{\omega, \omega+1\}$ y definimos:

$n * m = 1$ si $n, m \in \mathbb{N}$, además si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n * \omega = 1 = \omega * n$ y $n * (\omega+1) = 1 = (\omega+1) * n$. Finalmente, $\omega * \omega = 1 = (\omega+1) * (\omega+1)$ $\omega * (\omega+1) = 1$ y $(\omega+1) * \omega = 2$. Obviamente $A \notin h$, pero si $n \in \mathbb{N}$ $[\omega * (\omega+1)]^n = 1^n = 1 = 2^n = [(\omega+1) * \omega]^n$ y $A \in k$. //

(6.5) Proposición. $L$ latice completo y $a \in L$ compacto. Supongamos $b < a$, existe $c \in L$ con $b \leq c < a$, donde $c < a$ es un salto (ie. si $c \leq d \leq a$ se tiene $c = d$ ó $d = a$).

Demostración. Definimos $R = \{x \in L \mid b \leq x < a\}$, obviamente $R \neq \emptyset$. Sea $\emptyset \neq K$ cadena en $R$, por tanto $\vee_L K \in L$ tal que $b \leq \vee_L K \leq a$. Si fuera $\vee_L K = a$, siendo $a$ compacto y $K$ cadena se tendría un $k \in K$ con $k = a$, lo que es absurdo. Luego $\vee_L K < a$ y $\vee_L K \in R$. Así, $R$ está inductivamente ordenado. Por el Lema de Zorn, hay $c \in L$ maximal en $R$ //

(6.6) <u>Corolario</u>: Sea $k$ variedad compacta y $k \subsetneq h$ variedad. Entonces existe $E$ variedad, $k \subsetneq E \subset h$ y $k$ maximal en $E$.

<u>Demostración</u>: Es aplicación de (6.5) al caso $eh \subsetneq ek$ en $\mathcal{L}$. //

Dada una variedad compacta $k$, dado que cada ecuación requiere solo un número finito de variables libres, se tiene $k = k^{(n)}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. El converso es falso en general como lo muestra el ejemplo (6.3). Sin embargo el Teorema siguiente dá un converso parcial para el caso en que $k$ sea variedad localmente finita. Recordamos que $k$ es localmente finita cuando sus álgebras finitamente generadas son finitas.

(6.7) <u>Teorema</u>. $\tau = (\lambda_i)_{i \in I}$ con $|I| < \aleph_0$ y sea $k$ $\tau$-variedad localmente finita, entonces $k^{(n)}$ es variedad compacta, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>: $ek^{(n)} = \Gamma(ek)_n$ la cerradura totalmente invariante en $\mathcal{L}$. Por (3.2), $(ek)_n$ es congruencia totalmente invariante de $L_n$ tal que $L_n(k) = L_n/(ek)_n = \{[a]_{(ek)_n} \mid a \in L_n\}$. Como además, $L_n(k)$ es finita ya que $k$ es localmente finita, existen $a_1, \ldots, a_m \in L_n$ con $L_n(k) = \{[a_i]_{(ek)_n} \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Podemos asumir que si $V_n \cap [a_i]_{(ek)_n} \neq \phi$ entonces $a_i \in V_n$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$, donde $V_n$ es el conjunto generador de $L_n$.

Sea $p: L_n \longrightarrow L_n(k)$ la proyección y definimos:

$$\Sigma := \{ (f_i^{L_n}((a_\mu)_{\mu < \lambda_i}), a_{\mu_0}) \mid i \in I,\ f_i^{L_n(k)}((p(a_\mu))_{\mu < \lambda_i}) = p(a_{\mu_0}) \}$$

Como se asumió que $|I| < \aleph_0$, $\Sigma$ es finito. Definimos por $\varphi$ a la cerradura totalmente invariante de $\Sigma$ en $L_n$.

Probaremos que $\varphi = (ek)_n$.

"$\subset$": como $(f_i^{L_n}((a_\mu)_{\mu < \lambda}), a_{\mu_0}) \in \Sigma$, tenemos

$p\,(f_i^{L_n}((a_\mu)_{\mu<\lambda_i})) = f_i^{L_n(k)}((p(a_\mu))_{\mu<\lambda_i}) = p(a_{\mu_0})$. Luego $(f_i^{L_n}((a_\mu)_{\mu<\lambda_i}), a_{\mu_0}) \in \ker p =$ $= (ek)_n$ y $\varphi = \Gamma\Sigma \subset (ek)_n$.

"$\supset$" Sea $p : L_n \longrightarrow \theta$ función de rango tal que $p(x) = 0$ si y sólo si $x \in V_n$.

Sea $(r,s) \in (ek)_n$, tomamos $i \in \{1, \dots, n\}$ con la propiedad $p(r) = p(a_i)$.

Inducción sobre $p(r)$ para probar $(r, a_i) \in \varphi$

Supongamos que $p(r) = 0$, luego $r \in V_n \cap [a_i]_{(ek)_n}$. Por la forma en que se eligieron $a_i \in V_n$.

Sea ahora $\nu$ homomorfismo con

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "i"'] & L_\omega(k) = T_\tau(\omega)/ek \\ T_\tau(\omega) \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i, i'$ son las universales.

Como $(r, a_i) \in (ek)_n \subset ek$, $r = i'(r) = \nu i(r) = \nu(r) = \nu(a_i) = i'(a_i) = a_i$, por tanto $(r, a_i) \in \varphi$ en este caso.

Supongamos $p(r) > 0$, como $r \in L_n$ absolutamente libre, existen únicos $i \in I$, $(r_\mu)_{\mu<\lambda_i} \in L_n^{\lambda_i}$ con $r = f_i((r_\mu)_{\mu<\lambda_i})$. Así $p(r) > p(r_\mu)$, si $\mu < \lambda_i$.

y para toda $\mu < \lambda_i$ hay alguna $a_\mu \in \{a_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$ donde se tiene $p(r_\mu) = p(a_\mu)$.

Por hip. de inducción, $(r_\mu, a_\mu) \in \varphi$ cuando $\mu < \lambda_i$.

Por tanto, $(r, f_i((a_\mu)_{\mu<\lambda_i})) = (f_i((r_\mu)_{\mu<\lambda_i}), f_i((a_\mu)_{\mu<\lambda_i})) \in \varphi$.

Como $f_i^{L_n(k)}(p(a_\mu)_{\mu<\lambda_i}) = f_i^{L_n(k)}((p(r_\mu))_{\mu<\lambda_i}) = p\,(f_i^{L_n}((r_\mu)_{\mu<\lambda_i})) = p(r) = p(a_i)$, por definición de $\varphi$, $(f_i^{L_n}((a_\mu)_{\mu<\lambda_i}), a_i) \in \varphi$. Por transitividad, $(r, a_i) \in \varphi$.

Ahora, como $(r,s) \in (ek)_n$, $p(r) = p(s)$, también entonces $(s, a_i) \in \varphi$ y finalmente $(r,s) \in \varphi$ y se tiene la igualdad.

$ek^{(n)} = \Gamma(ek)_n = \Gamma\varphi = \Gamma\Sigma$ en $\mathcal{I}$, de donde $k^{(n)}$ es compacto. //

La prueba anterior da un algoritmo para construir al conjunto $\Sigma$ generador de $ek^{(n)}$. Además, con la notación de la prueba se tiene:

$$|\Sigma| < \sum_{i \in I} m^{\lambda_i + 1}.$$

## §7. MODULARIDAD Y DISTRIBUTIVIDAD EN LATICES DE SUBVARIEDADES.

En esta sección estudiaremos algunas consecuencias de tener datos más fuertes para el latice de subvariedades de alguna variedad. En particular veremos conexiones entre las propiedades estudiadas en las secciones anteriores y la condición de modularidad ó distributividad para un latice de subvariedades.

(7.1) <u>Proposición</u>: Sea $\mathfrak{K}$ variedad y supongamos que $Con(L_\omega(\mathfrak{K}))$ es latice modular, entonces $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ es latice modular. Similarmente si $Con(L_\omega(\mathfrak{K}))$ es distributivo, $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ es también distributivo.

<u>Demostración</u>: como $e\mathfrak{K} \in Con(L_\omega(\mathfrak{K}_2))$, por el 2º teorema de isomorfía tenemos que $[e\mathfrak{K}, 1]_{Con(L_\omega(\mathfrak{K}_2))} \cong Con(L_\omega(\mathfrak{K}_2)/e\mathfrak{K})$, como este último es justamente $Con(L_\omega(\mathfrak{K}))$ que es modular, $[e\mathfrak{K}, 1]_{Con(L_\omega(\mathfrak{K}_2))}$ es modular; como $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ el latice de subvariedades de $\mathfrak{K}$ es anti-isomorfo al sublatice de congruencias totalmente invariantes de $[e\mathfrak{K}, 1]_{Con(L_\omega(\mathfrak{K}))}$, concluimos que $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ es modular ya que la modularidad es una propiedad dual de sí misma. La misma prueba funciona para la distributividad //

(7.1) indica que la condición de que el latice de subvariedades de una variedad sea modular se verifica en cuanto se tiene la misma condición para el latice de congruencias de sus álgebras, por ejemplo en el caso de grupos, anillos ó módulos, ver [GB pag 162]. Por la misma razón el latice de variedades de latices es distributivo ver [GB, pag 138]. Veremos aquí algunas consecuencias de pedir esta hipótesis a $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$.

El siguiente lema que es bien conocido nos será de utilidad.

(7.2) Lema. Sea $L$ latice modular, $a,b \in L$. Entonces existe $h$ isomorfismo de latices, $h: [a, a\vee b] \longrightarrow [a\wedge b, b]$.

Demostración: Definimos $\varphi: [a, a\vee b] \longrightarrow [a\wedge b, b]$, $\theta \longmapsto \theta\wedge b$ y $\psi: [a\wedge b, b] \longrightarrow [a, a\vee b]$, $\theta \longmapsto a\vee\theta$.

Siempre que $\theta_1 \leq \theta_2$, tendremos $\theta_1\wedge b \leq \theta_2\wedge b$ y $\theta_1\vee a \leq \theta_2\vee a$ luego $\varphi$ y $\psi$ preservan el orden. Además, si $\theta \in [a, a\vee b]$ tenemos $\psi\varphi(\theta) = \psi(\theta\wedge b) = a\vee(\theta\wedge b)$. Como $a\leq\theta$ y $L$ es modular, $a\vee(\theta\wedge b) = (a\vee b)\wedge\theta$, como también $\theta\leq a\vee b$ concluimos $\psi\varphi(\theta) = \theta$. O sea, $\psi\varphi = id$ y similarmente $\varphi\psi = id$. Por tanto, $\varphi$ es función isótona biyectiva, lo que implica $\varphi$ isomorfismo de latices. //

Veamos primeramente algunas consecuencias de que $\mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$ sea modular.

(7.3) Proposición: Sea $\mathfrak{k}$ variedad con $\mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$ modular. Supongamos que $\mathfrak{k} = \bigvee_{\mu\in M} \mathfrak{h}_\mu$, donde si $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}_\mu$ con $\mu \in M$, existe una variedad $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_\mu$ que satisface $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h}$ es maximal en $\mathfrak{t}$. Entonces $\mathfrak{k}$ satisface la misma propiedad.

Demostración: Sea $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{k}$ variedad, por tanto existe $\mu_0 \in M$ tal que $\mathfrak{h}_{\mu_0} \not\subset \mathfrak{h}$. De aquí $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}_{\mu_0}\vee\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}_{\mu_0} \subsetneq \mathfrak{h}_{\mu_0}$, como por (7.2) existe $g$ isomorfismo de latices, $g: [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{\mu_0}\vee\mathfrak{h}] \longrightarrow [\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}_{\mu_0}, \mathfrak{h}_{\mu_0}]$. Por hipótesis, existe $\mathfrak{t}' \in (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}_{\mu_0}, \mathfrak{h}_{\mu_0}]$ donde $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}_{\mu_0}$ es maximal en $\mathfrak{t}'$. Definimos $\mathfrak{t} = g^{-1}(\mathfrak{t}') \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{\mu_0}\vee\mathfrak{h}]$. Siendo $g$ isomorfismo se tiene $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h}$ maximal en $\mathfrak{t}$. //

(7.4) Corolario. Sea $\mathfrak{k}$ variedad con $\mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$ modular y $\mathfrak{k}$ generada por sus subvariedades minimales. Entonces toda subvariedad propia de $\mathfrak{k}$, es maximal en alguna subvariedad de $\mathfrak{k}$. //

(7.5) Proposición. Sea $\mathfrak{K}$ variedad con $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ distributivo y generada por sus subvariedades minimales. Entonces toda subvariedad c.i.c. relativa a $\mathfrak{K}$ es maximal en $\mathfrak{K}$.

Demostración: Sean $(\mathfrak{H}_\mu)_{\mu\in M}$ subvariedades minimales de $\mathfrak{K}$ con $\mathfrak{K}=\bigvee_{\mu\in M}\mathfrak{H}_\mu$. Sea $\mathfrak{H}\subsetneq\mathfrak{K}$ variedad c.i.c. relativa a $\mathfrak{K}$, luego existe $\mu_0\in M$ con $\mathfrak{H}_{\mu_0}\not\subset\mathfrak{H}$. Supongamos que $\mathfrak{H}_{\mu_1}\not\subset\mathfrak{H}$, por (7.3) y (7.4) tendríamos que $\mathfrak{H}$ es maximal en $\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}$ y en $\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_1}$. Como $\mathfrak{H}$ es c.i.c. relativa a $\mathfrak{K}$, hay sólo una subvariedad de $\mathfrak{K}$ en la que $\mathfrak{H}$ es maximal, luego $\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_1}$. Por tanto:
$\mathfrak{H}_{\mu_0}=\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap(\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0})=\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap(\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_1})=(\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap\mathfrak{H})\vee(\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap\mathfrak{H}_{\mu_1})=\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap\mathfrak{H}_{\mu_1}\subset\mathfrak{H}_{\mu_1}$ ya que $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ es distributivo y que $\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap\mathfrak{H}$ es trivial. Se sigue que $\mathfrak{H}_{\mu_0}=\mathfrak{H}_{\mu_1}$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{L}\subsetneq\mathfrak{K}$ variedad. Por lo anterior, si $\mu\in M-\{\mu_0\}$, $\mathfrak{H}_\mu\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{L}$, de donde también $\mathfrak{H}_{\mu_0}\not\subset\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{H}_{\mu_0}\cap\mathfrak{L}$ es la variedad trivial. Por tanto, $\mathfrak{K}=\bigvee_{\mu\in M}\mathfrak{H}_\mu=\left(\bigvee_{\mu\in M-\{\mu_0\}}\mathfrak{H}_\mu\right)\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}\subset\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}\subset\mathfrak{L}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}\subset\mathfrak{K}$. O sea, $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}=\mathfrak{L}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0}$. Y finalmente, $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{L}\cap(\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_{\mu_0})=(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L})\vee(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}_{\mu_0})=\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{H}$ es maximal en $\mathfrak{K}$. //

La Proposición (7.5) puede aplicarse en muchas ocasiones, no sólo para variedades con álgebras con látice de congruencias distributivo. Por ejemplo, para los grupos abelianos Ab, $\mathcal{L}_{Ab}$ es isomorfo al látice de subgrupos de $\mathbb{Z}$ que es distributivo, luego $\mathcal{L}_{Ab}$ es distributivo (ver [HN]). Sin embargo, Ab no tiene subvariedades maximales y por tanto no tiene subvariedades c.i.c. relativas a Ab — recordar que en la sección 5 se probó que Ab estaba generada por sus variedades $HSP(\mathbb{Z}_p)$ con $p$ primo que son claramente minimales —.

A partir del siguiente resultado, nuestro propósito es contar cuántas subvariedades irreducibles tiene una variedad dada.

(7.6) Proposición: Sea $k$ variedad compacta y $\Sigma \subset \mathbb{Z}_2(\omega)^2$ finito con $ek = \Gamma\Sigma$. Se tiene: $\min\{|T| \mid T\subset\Sigma,\ ek = \Gamma T\} \leq |\{h \text{ variedad} \mid k \text{ es maximal en } h\}|$.

Demostración: Sea $n = \min\{|T| \mid T\subset\Sigma,\ ek = \Gamma T\}$ y $T = \{t_1,\dots,t_n\}\subset\Sigma$ con $ek = \Gamma T$. Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, definimos $h_i := m\{t_1,\dots,\hat{t}_i,\dots,t_n\}$.

Sea $j\in\{1,\dots,n\}$, luego $eh_j = \Gamma\{t_1,\dots,\hat{t}_j,\dots,t_n\}\subset\Gamma T = ek$, y por definición de $T$, $eh_j \subsetneq ek$ o de otra manera, $k\subsetneq h_j$. Por (6.6), existe $f_j$ variedad $k\subsetneq f_j\subset h_j$ y $k$ maximal en $f_j$. Sea ahora $i\in\{1,\dots,n\}-\{j\}$, probaremos que $f_j\neq f_i$. Supongamos que $f_i = f_j$, por tanto $t_i\in\{t_1,\dots,\hat{t}_j,\dots,t_n\}\subset eh_j\subset$ $\subset ef_j = ef_i$. Como $\{t_1,\dots,\hat{t}_i,\dots,t_n\}\subset eh_i\subset ef_i$, se sigue que $\{t_1,\dots,t_n\}\subset ef_i\subsetneq ek = \Gamma\{t_1,\dots,t_n\}$ lo que es absurdo. O sea, $f_j\neq f_i$.

Y $n\leq|\{f \text{ var} \mid k \text{ es maximal en } f\}|$. //

Con las modificaciones obvias puede obtenerse el siguiente resultado:

(7.7). Proposición: Sean $h\subsetneq k$ variedades, $h$ compacta. Sea $\Sigma\subset\mathbb{Z}_2(\omega)^2$ finito con $eh = ek\vee\Gamma\Sigma$, entonces $\min\{|T| \mid T\subset\Sigma, eh = ek\vee\Gamma\Sigma\}\leq|\{f \text{ var.} \mid h\subsetneq f\subset k, h \text{ max en } f\}|$ //

Los resultados anteriores relacionan en forma natural los subsistemas generadores de un sistema $\Sigma$ fijo y ciertas variedades que contienen a $k$. Sin embargo, puede haber distintos $\Sigma$, veremos que pasa cuando se consideran todos los posibles. Antes haremos una sencilla observación:

(7.8) Lema: $h\subsetneq k$ variedades con $h$ compacta. Entonces $h$ es c.i.c. relativa a $k$ si y sólo si existe una única subvariedad $f$ de $k$ con $h$ maximal en $f$.

Demostración: Una implicación es obvia. Supongamos $f\subset k$ es la única subvariedad de $k$ donde $h$ es maximal. Sea $p$ variedad con $h\subsetneq p\subset k$.

Siendo $H$ compacta, por (6.6) existe $G$ variedad, $H \subsetneq G \subset F$ con $H$ maximal en $G$. Como $G \subset E$ se sigue que $G = E$ y $E \subset F$. Por tanto,
$H \subsetneq E \subset \bigcap\{F \text{ variedad} \mid H \subsetneq F \subset K\}$ ó lo que es lo mismo $H$ es c.i.c. relativa a $K$.//

(7.9) Proposición: Sean $K \subsetneq H$ variedades con $K$ compacta y supongamos que $\mathcal{L}_H$ es distributivo. Entonces se tiene:

$$\sup_{\Sigma:\, eK = eH \vee \Gamma\Sigma} \min\{|T| \mid T \subset \Sigma \text{ y } eK = eH \vee \Gamma T\} = |\{E \text{ variedad} \mid K \subsetneq E \subset H,\ K \text{ maximal en } E\}|$$

cuando este número es finito.

Demostración: Por (7.7) se tiene $\leq$. Probaremos la otra desigualdad. Denotemos $n := |\{E \text{ variedad} \mid K \subsetneq E \subset H \text{ y } K \text{ es maximal en } E\}| \in \mathbb{N}$.
Sean $E_1, \dots, E_n$ las variedades tales que $K \subsetneq E_i \subset H$ y $K$ maximal en $E_i$.

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$ y supongamos $E_j \subset \bigvee_{i \neq j} E_i$ este supremo está bien definido en caso de que $n > 1$, cosa que podemos asumir dado que el caso $n = 1$ ha sido resuelto en (7.8) y (2.8).

Como $\mathcal{L}_H$ es distributivo, $E_j = (\bigvee_{i \neq j} E_i) \wedge E_j = \bigvee_{i \neq j} (E_i \wedge E_j) = K$ que es absurdo.
Luego $E_j \not\subset \bigvee_{i \neq j} E_i$ y $\bigcap_{i \neq j} eE_i \not\subset eE_j$. Por tanto, existe una ecuación $t_j \in \bigcap_{i \neq j} eE_i$ con $t_j \notin eE_j$; como $n > 1$, existe $i_0 \neq j$ tal que $t_j \in eE_{i_0} \subset eK$.
Obtenemos, $eH \subset \Theta := \Gamma\{t_1, \dots, t_n\} \vee eH \subset eK$. Supongamos que $\Theta \subsetneq eK$, o sea, $K \subsetneq m\Theta \subset H$. Siendo $K$ compacta, por (6.6) existe $F$ variedad $K \subsetneq F \subset m\Theta$ tal que $K$ es maximal en $F$. Por definición $F = E_j$ para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$. Luego $E_j \subset m\Theta$ y $t_j \in \Theta \subset eE_j$ que contradice la forma en que se eligió $t_j$. Por tanto $\Theta = eK$. Mostraremos que no se puede extraer un subsistema generador más chico de $\{t_1, \dots, t_n\}$.

Sea $T \subsetneq \{t_1,\dots,t_n\}$, probemos que $eh \vee \Gamma T \subsetneq ek$. Podemos obviamente suponer que $T \neq \emptyset$ y tomamos $j \in \{1,\dots,n\}$ con $t_j \notin T$. Sea $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $t_i \in T$, como $i \neq j$ sabemos que $t_i \in \bigcap_{\ell \neq i} et_\ell \subset et_j$, o sea $T \subset et_j$. Por tanto, $\Gamma T \subset et_j \subsetneq ek$ y como $eh \subset et_j$, tenemos $eh \vee \Gamma T \subset et_j \subsetneq ek$.
Hemos probado $\min\{|T| \mid T \subset \{t_1,\dots,t_n\}$ y $eh \vee \Gamma T = ek\} = n$. //

El número de la conclusión de (7.9) es claramente importante, veremos como puede relacionarse con los conceptos antes estudiados.

(7.10). <u>Proposición</u>: Supongamos $k \subsetneq h$ variedades con $\mathcal{L}_h$ distributivo y que $k$ es maximal en $\mathcal{E} \subset h$. Entonces existe una única subvariedad de $h$ c.i.d. $\mathcal{P}$, con $k \vee \mathcal{P} = \mathcal{E}$ que además satisface que $k \wedge \mathcal{P}$ es máxima en $\mathcal{P}$.

<u>Demostración</u>. Por (2.3), $\mathcal{E} = \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{E}_\mu$ donde $(\mathcal{E}_\mu)_{\mu \in M}$ es familia de variedades c.i.d. Como $k \subsetneq \mathcal{E}$, existe $\mu_0 \in M$ con $\mathcal{E}_{\mu_0} \not\subset k$. Por tanto, $k \subsetneq k \vee \mathcal{E}_{\mu_0} \subset \mathcal{E}$ y $k$ es maximal en $\mathcal{E}$. Se sigue que $k \vee \mathcal{E}_{\mu_0} = \mathcal{E}$.
Si tenemos $\mathcal{P}$ variedad c.i.d. con $k \vee \mathcal{P} = \mathcal{E}$, obtenemos:
$\mathcal{E}_{\mu_0} = \mathcal{E}_{\mu_0} \wedge \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mu_0} \wedge (k \vee \mathcal{P}) = (\mathcal{E}_{\mu_0} \wedge k) \vee (\mathcal{E}_{\mu_0} \wedge \mathcal{P})$, como $\mathcal{E}_{\mu_0}$ es c.i.d. y $\mathcal{E}_{\mu_0} \not\subset k$, $\mathcal{E}_{\mu_0} = \mathcal{E}_{\mu_0} \wedge \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ y similarmente $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_{\mu_0}$. Finalmente $\mathcal{P} = \mathcal{E}_{\mu_0}$.
Probamos ahora que $k \wedge \mathcal{E}_{\mu_0}$ es subvariedad máxima de $\mathcal{E}_{\mu_0}$.
Como $\mathcal{E}_{\mu_0} \not\subset k$, $\mathcal{E}_{\mu_0} \wedge k \subsetneq \mathcal{E}_{\mu_0}$ y supongamos que $\mathcal{G}$ es la subvariedad máxima de $\mathcal{E}_{\mu_0}$. Si asumimos que $\mathcal{G} \not\subset k$, tendríamos como antes una subvariedad c.i.d. $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ con $\mathcal{G}' \not\subset k$ y $k \subsetneq k \vee \mathcal{G}' \subset \mathcal{E}$. De aquí se seguirá, $k \vee \mathcal{G}' = \mathcal{E}$ y por la unicidad $\mathcal{G}' = \mathcal{E}_{\mu_0}$ lo que es absurdo.
Por tanto, $\mathcal{G} \subset k$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}_{\mu_0} \wedge k \subsetneq \mathcal{E}_{\mu_0}$, finalmente $\mathcal{G} = \mathcal{E}_{\mu_0} \wedge k$. //

(7.11) <u>Proposición</u>: Sean $k \subset h$ variedades con $\mathcal{L}_h$ distributivo. Entonces
$|\{\mathcal{E} \subset h \mid k$ es maximal en $\mathcal{E}\}| = |\{\mathcal{P} \subset h \mid \mathcal{P}$ es c.i.d. y $\mathcal{P} \wedge k$ es máximo en $\mathcal{P}\}|$

Demostración: Definimos $H$ la siguiente función:

$$H : \{p \subset h \mid p \text{ es c.i.d. y } p \wedge k \text{ es máxima en } p\} \longrightarrow \{t \subset h \mid k \text{ maximal en } t\}$$
$$p \longmapsto k \vee p$$

Probaremos que $H$ es en efecto función.

Sea $t$ variedad con $k \subsetneq t \subset k \vee p$. Por (2.3), $t = \bigvee_{\mu \in M} t_\mu$ donde $(t_\mu)_{\mu \in M}$ es familia de variedades c.i.d.. Como $k \subsetneq t$, existe $\mu_0 \in M$ con $t_{\mu_0} \not\subset k$.
Supongamos que $p \not\subset t_{\mu_0}$; como $t_{\mu_0} \subset t \subset k \vee p$, tendríamos que $t_{\mu_0} = t_{\mu_0} \wedge (k \vee p) = (t_{\mu_0} \wedge k) \vee (t_{\mu_0} \wedge p)$ y siendo $t_{\mu_0}$ c.i.d. y $t_{\mu_0} \not\subset k$, obtendríamos $t_{\mu_0} = t_{\mu_0} \wedge p \subset p$; como $p \not\subset t_{\mu_0}$, $t_{\mu_0} \subsetneq p$ y por hipótesis $k \wedge p$ es máxima en $p$, de donde $t_{\mu_0} \subset k \wedge p \subset k$ lo que es absurdo.
Por tanto, $p \subset t_{\mu_0} \subset t$ y $k \vee p \subset t$, o sea, $k$ es maximal en $k \vee p$.
Y $H$ es función. Directamente de (7.10) concluimos que $H$ es inyectiva y suprayectiva. //

En otras palabras, (7.9) y (7.11) nos permiten "contar ecuaciones" "contando variedades c.i.d."

Usando el mismo tipo de argumentos obtendremos ahora otro tipo de información.

(7.12) Teorema: Sea $h$ variedad con $\mathcal{L}_h$ distributiva, entonces.

$$|\{k \subset h \mid k \text{ es c.i.c. relativo a } h\}| \leq |\{p \subset h \mid p \text{ es variedad c.i.d.}\}|.$$

Demostración: Consideremos

$$H : \{k \subset h \mid k \text{ es c.i.c. relativo a } h\} \longrightarrow \{p \subset h \mid p \text{ es c.i.d.}\}$$
$$k \longmapsto p \text{ tal que } k \wedge p \text{ es máxima en } p$$

Por (7.8) y (7.11), $H$ es función. Bastaría probar que es inyectiva.

Sean $k_1, k_2$ c.i.c relativa a $h$. Supongamos $k_1 \neq k_2$ y $p_1 = H(k_1) =$

$p_1 = H(k_1) = H(k_2) = p_2$. Sea $b_i$ la única subvariedad de $h_i$ donde $k_i$ es maximal, $i \in \{1,2\}$. Como en (7.11), $b_i = k_i \vee p_i$, $i \in \{1,2\}$. Y sabemos $k_1 \cap p_1 = k_2 \cap p_2$

$k_1 = k_1 \vee (k_2 \cap p_2) = (k_1 \vee k_2) \cap (k_1 \vee p_2) = (k_1 \vee k_2) \cap b_1$, siendo $k_1$ c.i.c. relativa a $h_1$, $k_1 = k_1 \vee k_2 \supset k_2$; como también $k_1 \neq k_2$, se sigue $k_2 \subsetneq k_1$. Por tanto $b_2 \subset k_1$, pero $p_1 = p_2 \subset b_2$, de donde $p_1 \subset k_1$ que es imposible. Tenemos ahora que $H$ es inyectiva. //

En otra sección probaremos que en ocasiones la desigualdad de (7.12) es igualdad. Sin embargo, también puede ser estricta: en la observación posterior a (7.5) mostramos que en Ab no hay subvariedades c.i.c., pero todas las variedades HSP $(\mathbb{Z}_p)$ con $p$ primo son c.i.d.

## §8. CONDICIONES DE CADENA EN EL LATICE DE SUBVARIEDADES.

En esta sección, dada una variedad estudiaremos las condiciones de cadena de sus subvariedades, veremos como la condición de cadena ascendente y descendente están estrechamente ligadas con los conceptos estudiados previamente. Veremos también que en ciertos casos la propiedad c.i.c. para una variedad es equivalente a i.c. y con ello obtendremos un teorema dual a (2.3) para algunos casos particulares.

Diremos que una variedad $\mathcal{K}$ satisface la condición de cadena ascendente (C.C.A.) en subvariedades, cuando toda cadena $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subvariedades de $\mathcal{K}$, donde $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}$ si $n\in\mathbb{N}$, satisface que existe $m\in\mathbb{N}$, tal que $\mathcal{H}_n=\mathcal{H}_{n+1}$ para $n\geq m$. Y dualmente la C.C.D.

(8.1). Proposición. Sea $\mathcal{K}$ variedad, son equivalentes:

1). $\mathcal{K}$ satisface C.C.A. en subvariedades

2). Para todo $\emptyset \neq S \subset \{\mathcal{H}\subset\mathcal{K} \mid \mathcal{H} \text{ variedad}\}$, $S$ tiene elemento maximal.

3). Para toda clase $\mathcal{H}\subset\mathcal{K}$, existe $A\subset\mathcal{H}$ conjunto finito con $HSP(\mathcal{H}) = HSP(A)$.

Demostración: "1) ⇒ 2)" Sea $\emptyset \neq S \subset \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ sin elementos maximales sea $\mathcal{H}_1\in S$, luego existe $\mathcal{H}_2\in S$ con $\mathcal{H}_1 \subsetneq \mathcal{H}_2$, por inducción se construye una cadena ascendente no estacionaria.

"2) ⇒ 3)" Sea $\mathcal{H}\subset\mathcal{K}$ clase y definimos $S=\{HSP(A) \mid A\subset\mathcal{H} \text{ finito}\}$ Obviamente, $\emptyset \neq S \subset \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ y sea $\mathcal{C}=HSP(A)$ maximal en S con $A\subset\mathcal{H}$ finito

Supongamos que $\mathcal{E} \subsetneq HSP(\mathcal{G})$, existirá entonces $\mathcal{L} \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{L} \notin \mathcal{E}$. Definimos $A' = A \cup \{\mathcal{L}\} \subset \mathcal{G}$ finito que satisface $HSP(A') \in S$ y $\mathcal{E} \subsetneq HSP(A')$ lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{E}$.

"3) → 1)" Sea $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena ascendente de subvariedades de $\mathcal{K}$. $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n \subset \mathcal{K}$, y por hipótesis existe un conjunto finito $A$ con $HSP(A) = HSP(\mathcal{G})$. Siendo $A$ finito y $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ascendente, existe $m\in\mathbb{N}$ donde $A \subset \mathcal{G}_m$; por tanto, $HSP(\mathcal{G}) = HSP(A) \subset \mathcal{G}_m$. Y obviamente en $m$ se estaciona la cadena. //

(8.2) <u>Lema</u>: Sea $\mathcal{K}$ variedad, $\mathcal{K}$ satisface C.C.A. en subvariedades. Para toda subvariedad $\mathcal{G}$ de $\mathcal{K}$, existe $n\in\mathbb{N}$ con $\mathcal{G} = HSP(L_n(\mathcal{G}))$.

<u>Demostración</u>: Claramente $(HSP(L_n(\mathcal{G})))_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena ascendente de subvariedades de $\mathcal{K}$. Existe $m\in\mathbb{N}$, donde si $n \geq m$ se tiene que $HSP(L_n(\mathcal{G})) = HSP(L_m(\mathcal{G}))$. Por (2.6), $\mathcal{G} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} HSP(L_n(\mathcal{G})) = HSP(L_m(\mathcal{G}))$. //

Observar que el converso de (8.2) es en general falso, como lo muestra el latice de subvariedades de Ab.

En la sección 6 hemos definido en general lo que se entiende por un elemento compacto en un latice, tenemos el siguiente resultado:

(8.3) <u>Lema</u>: Sea $L$ latice completo. Entonces $L$ satisface C.C.A. si y solo si todos sus elementos son compactos.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $L$ satisface C.C.A. y sea $a\in L$. Sea $M \subset L$ con $a \leq \bigvee M$; podemos asumir que $M \neq \emptyset$ y por el argumento usual concluir que existe $F \subset M$ finito con $\bigvee M = \bigvee F$ y luego $a \leq \bigvee F$, o sea, $a$ es compacto. Para el converso, tomemos una cadena $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ascendente en $L$, como $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} k_n \in L$ es compacto,

existe $m \in \mathbb{N}$ con $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} k_n = k_m$, ahí se estaciona la cadena. //

Obtenemos ahora el dual de (8.1):

(8.4) Proposición: Sea $k$ variedad, son equivalentes:

1). $k$ satisface C.C.D. en subvariedades.

2). Todo subconjunto no vacío de $\mathcal{L}_k$ tiene un elemento minimal.

3). Para toda subvariedad $h$ de $k$, existe un subconjunto finito $\Sigma \subset eh$ que satisface $eh = ek \vee \Gamma\Sigma$.

Demostración: "1) $\Leftrightarrow$ 2)" como en (8.1).

"1) $\Rightarrow$ 3)" Si $k$ satisface C.C.D. en subvariedades, $[ek, 1]_{t.i.}$ el sublatice de consecuencias totalmente invariantes de $T_r(\omega)$ que contienen $ek$ satisface la C.C.A. Tomamos $h$ subvariedad de $k$, luego $eh \in [ek, 1]_{t.i.}$ y por (8.3). $eh$ es compacto en este latice. Como $eh = \bigvee_{t \in eh} ek \vee \Gamma\{t\}$ con $ek \vee \Gamma\{t\} \in [ek, 1]_{t.i.}$ si $t \in eh$, obtenemos $\Sigma \subset eh$ subconjunto finito con $eh = ek \vee \Gamma\Sigma$. Todos los pasos se pueden regresar de 3) a 1). //

(8.5). Corolario: Sea $k$ variedad compacta. Entonces $k$ satisface la C.C.D. en subvariedades si y solo si todas sus subvariedades son compactas.

Demostración: Directo de (8.4). 1) $\Leftrightarrow$ 3). //

Este último resultado nos da una forma práctica de checar la compacidad de variedades conociendo el latice que estas forman.

Ahora veremos que en algunos casos la condición de una variedad de ser c.i.c. relativa a otra es simplemente equivalente a ser E.C. relativa a la misma.

(8.6) <u>Lema</u>: Supongamos $K \subsetneq H$ variedades y $K$ compacta. Entonces $K$ es c.i.c. relativa a $H$ si y solo si $K$ es i.c. relativa a $H$

<u>Demostración</u>: Supongamos que $K$ es i.c. relativa a $H$ y sea $(K_\mu)_{\mu\in M}$ familia de subvariedades de $H$ con $K = \bigcap_{\mu\in M} K_\mu$. Luego, $eK = \bigvee_{\mu\in M} eK_\mu$ que es elemento compacto de $\mathcal{L}$, lo que nos dá un subconjunto finito $F$ de $M$ con $eK = \bigvee_{\mu\in F} eK_\mu$, ó equivalentemente $K = \bigcap_{\mu\in F} K_\mu$ y siendo $K$ i.c. relativa a $H$, $K = K_{\mu_0}$ para alguna $\mu_0 \in F \subset M$. //

(8.7) <u>Lema</u>: Supongamos $K \subsetneq H$ variedades donde $H$ satisface la C.C.D. en subvariedades. Entonces $K$ es c.i.c. relativa a $H$ si y solo si $K$ es i.c. relativa a $H$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $K$ es i.c. relativa a $H$ y $K = \bigcap_{\mu\in M} K_\mu$ para alguna familia de subvariedades de $H$. Luego $eK = \bigvee_{\mu\in M} eK_\mu = \Gamma(\bigcup_{\mu\in M} eK_\mu) \vee eH$, y por (8.3), existe $\Sigma \subset \bigcup_{\mu\in M} eK_\mu$ finito con $eK = \Gamma\Sigma \vee eH$.
Escogemos $\mu_1, \dots, \mu_n \in M$ tal que $\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^{n} eK_{\mu_i}$, así $eK = \bigvee_{i=1}^{n} eK_{\mu_i} \vee eH$ ó lo que es lo mismo, $K = \bigcap_{i=1}^{n} K_{\mu_i} \cap H = \bigcap_{i=1}^{n} K_{\mu_i}$ y siendo $K$ i.c. relativa a $H$ se sigue el resultado. //

En ciertos casos puede obtenerse un dual de (2.3) como lo indican los siguientes resultados.

(8.8) <u>Proposición</u>: Sea $K$ variedad que satisface la C.C.A. en subvariedades. Entonces toda subvariedad de $K$ puede obtenerse como intersección finita de subvariedades i.c. relativas a $K$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que el resultado es falso, luego $\mathcal{S} := \{ H \subset K \text{ variedad} \mid H \neq \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, para toda familia $(H_i)_{i=1}^{n}$ de variedades i.c. relativas a $K \}$ es un conjunto no vacío.

Como $k$ satisface la C.C.A. en subvariedades, existe $E_0 \subset k$ variedad tal que $E_0$ es maximal en $\mathcal{S}$. En particular $E_0$ no es i.c. relativo a $k$ y pueden obtenerse $E_1, E_2 \subset k$ variedades con $E_0 = E_1 \cap E_2$ y $E_0 \subsetneq E_1, E_2$. Como $E_0$ es maximal en $\mathcal{S}$, $E_1, E_2 \notin \mathcal{S}$. Por definición de $\mathcal{S}$, existen dos familias $(h_i)_{i=1}^{n}$, $(h_i)_{i=n+1}^{m}$ de subvariedades i.c. relativas a $k$ que satisfacen $E_1 = \bigcap_{i=1}^{n} h_i$ y $E_2 = \bigcap_{i=n+1}^{m} h_i$. Luego $E_0 = E_1 \cap E_2 = \bigcap_{i=1}^{m} h_i$ lo que contradice la elección de $E_0$. //.

(8.9). <u>Corolario</u>: Sea $k$ variedad con ambas condiciones de cadena. Entonces toda subvariedad de $k$ puede obtenerse como intersección finita de subvariedades c.i.c. relativas a $k$.

<u>Demostración</u>: Directo por (8.8) y (8.7). //

Sea $A$ un anillo y $k$ una subvariedad de Mod $A$, por definición de suma directa es claro que $L_1(k)^{(\omega)}$ es $k$. libre en $\aleph_0$ generadores, luego $L_1(k)$ genera $k$. Siendo además $L_1(k)$ cociente de $L_1(\mathrm{Mod}\,A) = A$, es claro que el latice de subvariedades de Mod $A$ es anti isomorfo a un sublatice de submódulos de $A$. — el de totalmente invariantes —. De donde si $A$ es noetheriano, Mod $A$ satisface la C.C.D. en subvariedades y si $A$ es artiniano, Mod $A$ satisface ambas condiciones de cadena y en particular se aplica (8.9).

## §9. IRREDUCIBILIDAD EN VARIEDADES LOCALMENTE FINITAS.

En esta sección introduciremos algunos nuevos conceptos que nos servirán para studiar con mayor profundidad la irreducibilidad de variedades localmente finitas. Recordamos que una variedad se llama localmente finita cuando sus álgebras finitamente generadas son finitas. Un ejemplo muy importante de ste tipo de variedades son las generadas por un álgebra finita [PC, pag 177].

(9.1) <u>Definiciones</u>:

i). $A \in K_\tau$, $B$ subalgebra de $A$ y $\theta \in \operatorname{Con} B$, entonces $B/\theta$ se llama factor de $A$ y se llama factor propio cuando $B \subsetneq A$ ó $B = A$ y $\theta \neq \Delta_B$.

ii). $A \in K_\tau$ álgebra finita se llama crítica cuando no stá generada por sus factores propios — ie $A \notin HSP(\{K \mid K$ s factor propio de $A\})$.—

iii). $A \in k$ variedad, diremos que $A$ scinde debilmente a $k$ cuando la clase $B(A,k) := \{B \in k \mid A \notin HSP(B)\}$ sea variedad.

Diremos que $A$ scinde a $k$ cuando $C(A,k) := \{B \in k \mid A \notin HSP_f(B)\}$ sea variedad, donde $P_f$ denota productos finitos.

Y que $A$ scinde fuertemente a $k$ cuando $D(A,k) := \{B \in k \mid A \in HS(B)\}$ sea variedad.

De la definición anterior los últimos dos conceptos aparecen en [AI]; algunos de los resultados obtenidos allí se incluirán en sta sección aún con demostraciones, por razones de completez. Algunos de stos conceptos stán también relacionados con otros definidos en [KM] para el caso particular de latices.

(9.2) Lema: Sean $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{K}$ variedades, entonces $\mathcal{H}$ es c.p.d. relativa a $\mathcal{K}$ si y sólo si existe $\mathcal{H}^*$ subvariedad de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{H} \not\subset \mathcal{H}^*$ y para toda subvariedad $\mathcal{E}$ de $\mathcal{K}$ se satisface $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^*$ ó $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{H}$ es c.p.d. relativa a $\mathcal{K}$, la variedad $\mathcal{H}^* = \bigvee_{\mathcal{H} \not\subset \mathcal{E} \subset \mathcal{K}} \mathcal{E}$ satisface trivialmente las condiciones deseadas. Para el converso, supongamos que $\mathcal{H}^*$ satisface estas condiciones, y sea $(\mathcal{H}_\mu)_{\mu \in M}$ familia de subvariedades de $\mathcal{K}$ con $\mathcal{H} \subset \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{H}_\mu$. Si tuviéramos que $\mathcal{H} \not\subset \mathcal{H}_\mu$ para toda $\mu \in M$, por hipótesis $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{H}^*$, $\mu \in M$; y $\mathcal{H} \subset \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{H}^*$ lo que es absurdo. //

Hay dos hechos que son triviales de verificar: la variedad $\mathcal{H}^*$ está determinada por $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^*$ es c.p.c. relativa a $\mathcal{K}$. Esto determina claramente una biyección entre las variedades c.p.d. relativas a $\mathcal{K}$ y las c.p.c. relativas a $\mathcal{K}$. Dada $\mathcal{H}$ c.p.d. relativa a $\mathcal{K}$, denotaremos siempre por $\mathcal{H}^*$ a la variedad c.p.c. relativa a $\mathcal{K}$ asociada y la llamaremos "dual de $\mathcal{H}$". En [RM] a una pareja de la forma $(e\mathcal{H}, e\mathcal{H}^*)$ se le llama "splitting pair".

(9.3) Lema: Supongamos que $\mathcal{H}$ es c.p.d. relativa a $\mathcal{K}$. Tenemos:

i). $\mathcal{H}$ es c.i.d. y $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^*$ es subvariedad máxima de $\mathcal{H}$

ii). $\mathcal{H}^*$ es c.i.c. y $\mathcal{H} \vee \mathcal{H}^*$ es la única subvariedad de $\mathcal{K}$ en la que $\mathcal{H}^*$ es maximal.

Demostración: Como $\mathcal{H} \not\subset \mathcal{H}^*$, tenemos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^* \subsetneq \mathcal{H}$. Si tomamos $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{H}$ variedad, por (9.2), $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^*$ y $\mathcal{E} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^*$; luego $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^*$ es subvariedad máxima de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ es c.i.d.

ii). es dual de i). //

Veremos ahora que estos conceptos pueden caracterizarse de una forma más algebraica a través de (9.1).

(9.4). Proposición: Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{k}$ variedad y definimos $\mathfrak{h} = HSP(\mathcal{A})$ la subvariedad de $\mathfrak{k}$ generada por $\mathcal{A}$. Entonces $\mathfrak{h}$ es c.p.d. relativa a $\mathfrak{k}$ si y solo si $\mathcal{A}$ escinde debilmente a $\mathfrak{k}$.

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{h}$ es c.p.d. relativa a $\mathfrak{k}$ y sea $\mathfrak{h}^*$ el dual de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{k}$. Probaremos que $\mathfrak{h}^* = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$.

Sea $\mathcal{L} \in \mathfrak{h}^*$, como $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{h}^*$ y $\mathcal{A}$ genera $\mathfrak{h}$ tenemos que $\mathcal{A} \notin HSP(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{h}^*$. Por tanto $\mathcal{L} \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$. Si tomamos $\mathcal{L} \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$, como $\mathcal{A} \notin HSP(\mathcal{L})$, tenemos que $\mathfrak{h} \not\subset HSP(\mathcal{L})$ y por (9.2), $\mathcal{L} \in HSP(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{h}^*$. Luego $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$ es variedad y $\mathcal{A}$ escinde debilmente a $\mathfrak{k}$.

Para el converso, supongamos que $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$ es variedad. Como $\mathcal{A} \notin \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$ tenemos que $\mathfrak{h} \not\subset \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$. Si tomamos $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ variedad tal que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{t}$, ningún álgebra en $\mathfrak{t}$ puede generar $\mathcal{A}$, o sea $\mathfrak{t} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$. Por (9.2) se sigue que $\mathfrak{h}$ es c.p.d. relativa a $\mathfrak{k}$. //

En vista de (9.3) y (9.4), si $\mathcal{A}$ escinde debilmente a $HSP(\mathcal{A})$, entonces $HSP(\mathcal{A})$ es c.i.d. y su subvariedad máxima es $\mathcal{B}(\mathcal{A}, HSP(\mathcal{A}))$.

Veremos ahora que los concepto definidos en (9.1) iii). están realmente en el orden que su nombre indica.

(9.5) Lema: Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{k}$ variedad. Entonces:

i). $\mathcal{A}$ escinde fuertemente a $\mathfrak{k}$ implica que $\mathcal{A}$ escinde a $\mathfrak{k}$ y $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathfrak{k}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$.

ii). $\mathcal{A}$ escinde a $\mathfrak{k}$ implica que $\mathcal{A}$ escinde debilmente a $\mathfrak{k}$ y $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathfrak{k}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$.

Demostración: "i)" Obviamente $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathfrak{k}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$. Sea $\mathcal{L} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$, como $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$ es variedad, $P_f(\mathcal{L}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathfrak{k})$ y $\mathcal{A} \notin HSP_f(\mathcal{L})$.

Esto es, $L \in C(A,k)$ y $C(A,k) = \mathcal{D}(A,k)$ es variedad.

"ii)" Supongamos que $A$ escinde a $k$. Probaremos que $C(A,k)$ es el dual de $HSP(A)$ en $k$. Sea $h \subset k$ variedad tal que $h \not\subset C(A,k)$, luego existe $L \in h$ con $L \notin C(A,k)$. Entonces $A \in HSP_f(L) \subset h$ y $HSP(A) \subset h$. Como además $HSP(A) \not\subset C(A,k)$, tenemos que $C(A,k) = (HSP(A))^*$ y en (9.4) mostramos que entonces $(HSP(A))^* = B(A,k)$. //

Los conversos de las implicaciones probadas en (9.5) son en general falsos. Sea $A$ un álgebra finita con $k = HSP(A)$ c.i.d. Por (9.4), $A^\omega$ el producto de $\aleph_0$ copias iguales de $A$ escinde debilmente a $k$, o sea $B(A^\omega, k)$ es variedad. Si $A^\omega$ escindiese a $k$, tendríamos por (9.5) $C(A^\omega, k) = B(A^\omega, k)$. Sin embargo, siendo $A$ finita también lo son todos los elementos de $HSP_f(A)$ y por tanto $A^\omega \notin HSP_f(A)$; por definición $A \in C(A^\omega, k)$, pero esto contradice (9.2). Que el otro converso sea falso se sigue del siguiente hecho más general:

(9.6). <u>Proposición</u>: Sea $A \in k$ álgebra finita que escinde fuertemente a $k$, entonces $A$ es crítica.

<u>Demostración</u>: Sea $K$ factor propio de $A$. Como es finita el álgebra $A$, tenemos $|K| < |A|$ y obviamente $A \notin HS(K)$. Por tanto, $K \in \mathcal{D}(A,k)$ y $HSP(\{K \mid K \text{ factor propio de } A\}) \subset \mathcal{D}(A,k)$ y $A \notin \mathcal{D}(A,k)$. //

El ejemplo que nos faltaba se obtiene observando que $A$ escinde a $k$ si y solo si $A^2$ también escinde a $k$, pero obviamente $A^2$ no es un álgebra crítica.

Otra observación es que el converso de (9.6) es falso también: en la siguiente sección mostraremos que no existen grupos que escindan la variedad $\underline{Gr}$ de todos los grupos y sin embargo los grupos críticos generan $\underline{Gr}$.

Parte del trabajo que realizaremos a continuación es ver bajo que hipótesis son ciertos los conversos de (9.5) y (9.6). Una observación general es que la hipótesis de finitud en las álgebras ó de finitud local en las variedades es de gran utilidad como lo indican los siguientes resultados.

(9.7) <u>Lema</u>: Sea $A$ álgebra crítica, entonces $A$ es subdirectamente irreducible.

<u>Demostración</u>: Por el Tma. de descomposición de Birkhoff [GB, pag 193], existen $(\theta_j)_{j\in J} \subset Con(A)$ con $A \longrightarrow \prod_{j\in J} A/\theta_j$ de forma que $A/\theta_j$ es subdirectamente irreducible, $j\in J$. Siendo $A$ crítica, en particular $A \notin HSP(\{A/\theta \mid \theta \neq \Delta_A\})$, luego existe $j_0\in J$ con $\theta_{j_0} = \Delta_A$ y $A = A/\theta_{j_0}$ es subdirectamente irreducible. //

El converso del anterior es falso también como se muestra en [HN, 51.33]: tómense dos copias de un grupo finito no abeliano nilpotente $B$ cuyo centro es cíclico de orden primo y fórmese el producto de estos dos grupos isomorfos amalgamando sus centros. El resultado es un grupo subdirectamente irreducible que es cociente de $B\times B$ y por tanto no es crítico.

Por el mismo teorema de Birkhoff usado anteriormente es claro que una variedad generada por sus álgebras finitas está generada por sus álgebras subdirectamente irreducibles finitas. Tenemos de hecho el siguiente resultado más fuerte.

(9.8) Lema. Sea $\mathcal{K}$ variedad generada por sus álgebras finitas, entonces $\mathcal{K}$ está generada por sus álgebras críticas.

Demostración: Sea $N := \{\mathcal{A}\in\mathcal{K} \mid \mathcal{A} \text{ crítica}\}$ y supongamos que $\bigvee_{\mathcal{A}\in N} HSP(\mathcal{A}) \subsetneq \mathcal{K}$. Existe por tanto un álgebra finita $\mathcal{B}$ con $\mathcal{B}\notin \bigvee_{\mathcal{A}\in N} HSP(\mathcal{A})$, podemos suponer a $\mathcal{B}$ de cardinalidad mínima con esta propiedad. Sea $K$ factor propio de $\mathcal{B}$, por tanto $|K|<|\mathcal{B}|$ y por hipótesis, $K\in \bigvee_{\mathcal{A}\in N} HSP(\mathcal{A})$, luego $\mathcal{B}$ no puede ser generado por sus factores propios, o sea, $\mathcal{B}\in N$ lo que es absurdo. //

Continuamos con dos Lemas más bien técnicos inspirados en algunas demostraciones de [AI].

(9.9) Lema: Sea $\mathcal{A}$ álgebra finita y $\mathcal{A}\in HSP(\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J})$ variedad localmente finita, entonces existe $J'\subset J$ subconjunto finito tal que $\mathcal{A}\in HSP_f(\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J'})$.

Demostración: Como $\mathcal{A}\in HSP(\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J})$, existe una familia de álgebras $\{\mathcal{E}_j\}_{j\in J_0}$ posiblemente repetidas con $\mathcal{E}_j\in\{\mathcal{B}_i\}_{i\in J}$, $j\in J_0$; una subalgebra $\mathcal{D}$ de $\prod_{j\in J_0}\mathcal{E}_j$ y una congruencia $\varphi$ de $\mathcal{D}$ de forma que $\mathcal{A}\cong \mathcal{D}/\varphi$. Sea $h:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{A}$ epimorfismo con $\mathrm{Ker}\,h=\varphi$. Tomamos $K\subset\mathcal{D}$ tal que $h(K)=\mathcal{A}$ y $|K|=|\mathcal{A}|$ finito. Y llamamos $\bar{K}$ a la cerradura de $K$ como subalgebra de $\mathcal{D}\subset\prod_{j\in J_0}\mathcal{E}_j$.

Como $\bar{K}$ es finitamente generada en $HSP(\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J})$ localmente finita, $\bar{K}$ es subalgebra finita de $\mathcal{D}$ y de $\prod_{j\in J_0}\mathcal{E}_j$. Llamamos ahora $\bar{h}=hi:\bar{K}\xhookrightarrow{i}\mathcal{D}\xrightarrow{h}\mathcal{A}$ epimorfismo y $\bar{\varphi}=\mathrm{Ker}\,\bar{h}$, obteniendo $\mathcal{A}\cong\bar{K}/\bar{\varphi}$.

Como $\bar{K}$ es subalgebra finita de $\prod_{j\in J_0}\mathcal{E}_j$, podemos tomar

$J_0' \subset J_0$ subconjunto finito, de forma que dados dos elementos diferentes a, b de $\bar{K}$ exista $j \in J_0'$ tal que $\pi_j(a) \neq \pi_j(b)$.

Definimos $\sigma : \prod_{j\in J_0} \mathcal{E}_j \longrightarrow \prod_{j\in J_0'} \mathcal{E}_j$ la proyección. Por definición
$a \longmapsto (\pi_j(a))_{j\in J_0'}$

de $J_0'$ obtenemos $\sigma(\bar{K}) \cong \bar{K}$. Y definimos $\psi = \sigma^2(\bar{\psi})$ congruencia de $\sigma(\bar{K})$ tal que $A \cong \sigma(\bar{K})/\psi$, además $\sigma(\bar{K})$ es subalgebra de $\prod_{j\in J_0'} \mathcal{E}_j$. //

(9.10) <u>Lema</u>: Sea $A$ álgebra subdirectamente irreducible finita y $A \in HSP(\{\mathcal{L}_j\}_{j\in J})$ variedad localmente finita donde todas las álgebras tienen látice de congruencias distributivo. Entonces $A$ es isomorfa a un factor de $\mathcal{L}_j$ para alguna $j \in J$.

<u>Demostración</u>: Por (9.9), existe una familia de álgebras $\{\mathcal{E}_j\}_{j\in J_0}$ posiblemente repetidas con $\mathcal{E}_j \in \{\mathcal{L}_i\}_{i\in J}$, $j \in J_0$; $J_0$ finito, una subalgebra $\mathcal{D}$ de $\prod_{j\in J_0} \mathcal{E}_j$ y una congruencia $\psi$ de $\mathcal{D}$ de forma que $A \cong \mathcal{D}/\psi$.
Llamamos $k : \mathcal{D} \hookrightarrow \prod_{j\in J_0} \mathcal{E}_j$ la inclusión, observemos que $\operatorname{Im}(\pi_j k)$ es subalgebra de $\mathcal{E}_j$ y que $\operatorname{Im}(\pi_j k) \cong \mathcal{D}/\theta_j$ para alguna congruencia $\theta_j$ de $\mathcal{D}$.

Tomamos $\mathcal{D} \xrightarrow{\nu_j} \mathcal{D}/(\theta_j \vee \psi)$ el cociente natural para cada $j\in J_0$. Por tanto existe un morfismo $\bar{k}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\nu_j"] \arrow[d, dashed, "\bar{k}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "G"] & \mathcal{D}/(\theta_j \vee \psi) \\ \prod_{j\in J_0} \mathcal{D}/(\psi \vee \theta_j) \arrow[ur, "p_j"'] & \end{tikzcd}$$

, para cada $j\in J_0$.

Como $\operatorname{Con}(\mathcal{D})$ es distributivo y $J_0$ es finito:

$$\operatorname{Ker} \bar{k} = \bigcap_{j\in J_0} \operatorname{Ker} p_j \bar{k} = \bigcap_{j\in J_0} \operatorname{Ker} \nu_j = \bigcap_{j\in J_0} (\theta_j \vee \psi) = \psi \vee \left(\bigcap_{j\in J_0} \theta_j\right) =$$
$$= \psi \vee \left(\bigcap_{j\in J_0} \operatorname{Ker}(\pi_j k)\right) = \psi \vee \operatorname{Ker} k = \psi \vee \Delta_{\mathcal{D}} = \psi.$$ De donde existe un morfismo $\bar{\bar{k}}$ inyectivo que hace el siguiente diagrama conmutar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\bar{k}"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & \prod_{j\in J} \mathcal{D}/(\psi\vee\theta_j) \\
\mathcal{D}/\psi \arrow[ur, dashed, "\bar{\bar{k}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $A \cong \mathcal{D}/\psi$ es subdirectamente irreducible, existe $j_0\in J$ de forma que $\mathcal{D}/\psi \xrightarrow{p_{j_0}\bar{\bar{k}}} \mathcal{D}/(\psi\vee\theta_{j_0})$ es inyectiva.

Además, $\mathrm{Im}(p_{j_0}\bar{\bar{k}}) = \mathrm{Im}(p_{j_0}\bar{\bar{k}}\,p) = \mathrm{Im}(p_{j_0}\bar{k}) = \mathrm{Im}\,\nu_{j_0} = \mathcal{D}/(\psi\vee\theta_{j_0})$. Y por tanto $A \cong \mathcal{D}/(\psi\vee\theta_{j_0})$, que es cociente de $\mathcal{D}/\theta_{j_0} \cong \mathrm{Im}(\pi_{j_0}k)$ subalgebra de $E_{j_0}$. //

La condición de que el latice de congruencias de toda álgebra de una variedad sea distributivo, se expresará diciendo que la variedad tiene congruencias distributivas, (similarmente para modulares). Un ejemplo importante son las variedades de latices.

Obtendremos ahora algunos de los resultados anunciados después de (9.6) y algunos de los obtenidos en [AI] en ciertos casos con otras pruebas.

(9.11) Proposición: Sea $A$ álgebra finita. $A\in K$ variedad localmente finita. Entonces $A$ escinde a $K$ si y solo si $A$ escinde débilmente a $K$.

Demostración: En (9.5) se probó en general una implicación. Supongamos ahora que $A$ escinde débilmente a $K$. Llamamos $H = HSP(A)$ y por (9.2) tomamos su variedad dual $H^*$. Probaremos que $H^* = C(A,K)$. Sea $B\in C(A,K)$ y supongamos que $H \subset HSP(B)$, directamente de (9.9) obtenemos $A\in HSP_f(B)$ que es contradicción; $H \not\subset HSP(B)$ y entonces $B\in HSP(B) \subset H^*$, $C(A,K)\subset H^*$. Sea $B\in H^*$, luego $B\in C(A,K)$ ya que no es posible $A\in HSP_f(B) \subset H^*$. //

(9.12) Teorema [AI]: Sea $K$ variedad con congruencias distributivas y $A\in K$ algebra finita. Son equivalentes.

i). $A$ es subdirectamente irreducible

ii). $A$ es crítica

iii). Existe $h \subset k$ variedad y $A$ escinde fuertemente a $h$.

iv). $A$ escinde fuertemente a toda subvariedad localmente finita de $k$ donde se encuentre.

<u>Demostración</u>: "i) implica iv)" Sea $h \subset k$ variedad localmente finita con $A \in h$. Sea $\mathcal{B} \in HSP(\mathcal{D}(A,h)) \subset h$ y supongamos que $A \in HS(\mathcal{B})$, por tanto $A \in HSP(\mathcal{D}(A,h))$ y por (9.10), existe $\mathcal{E} \in \mathcal{D}(A,h)$ tal que $A \in HS(\mathcal{E})$ lo que es una contradicción. Luego $\mathcal{B} \in \mathcal{D}(A,h)$ que es variedad. Las otras implicaciones ya han sido probadas. //

Asimismo se tiene la siguiente información más precisa respecto a las variedades c.i.d.

(9.13) <u>Proposición</u> [AI]: Sea $A$ algebra finita, entonces $HSP(A)$ es envolvente de $h$ si y solo si $A$ escinde a $HSP(A)$ y $h = C(A, HSP(A))$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $HSP(A)$ es envolvente de $h$. Claramente $h \subset C(A, HSP(A)) \subsetneq HSP(A)$. Sea $\mathcal{B} \in HSP(A)$ con $\mathcal{B} \notin h$. Por (2.4) $HSP(A) = HSP(\mathcal{B})$ y por (9.9), $A \in HSP_f(\mathcal{B})$. Por tanto, $\mathcal{B} \notin C(A, HSP(A))$ y $h = C(A, HSP(A))$ variedad. El converso es directo de (9.5), (9.4) y (9.3) //

(9.14) <u>Proposición</u> [AI]: Sea $k$ variedad localmente finita, entonces $k$ es c.i.d. si y solo si $k$ está generada por un álgebra crítica que escinde a $k$.

<u>Demostración</u>: Supongamos $k$ es c.i.d., por (9.8) $k$ está generada por sus algebras críticas y por tanto por alguna de ellas que por (9.13) escinde a $k$. El converso es parte de (9.13) //

(9.15) Proposición [AI]: Sea $k$ variedad c.r.d. localmente finita y con congruencias distributivas entonces $k$ tiene solo un número finito de subvariedades.

Demostración: Por (9.14), $k = HSP(A)$ con $A$ crítica. Sea $h \subsetneq k$ variedad, obviamente $h$ es localmente finita y por (9.8) generada por sus álgebras críticas. Sea $B \in h$ álgebra crítica, por (9.7) $B$ es subdirectamente irreducible y por (9.10) $B$ es factor de $A$. Pero por ser finita $A$ solo tiene un número finito de factores no isomorfos, las finitas combinaciones de ellos dan todas las subvariedades de $k$. //

(9.16) Proposición: Sea $k$ variedad con congruencias distributivas y localmente finita. $A, B \in k$ álgebras subdirectamente irreducibles finitas. Son equivalentes:

i). $A \cong B$

ii). $HSP(A) = HSP(B)$

iii). $\mathcal{D}(A,k) = \mathcal{D}(B,k)$.

Demostración: "ii) implica i)" Por (9.10) $A$ es isomorfo a un factor de $B$, que no puede ser propio ya que por (9.12) $B$ es crítica.

"ii) si y solo si iii)" Por (9.5) y (9.4) $\mathcal{D}(A,k) = (HSP(A))^*$ y $\mathcal{D}(B,k) = (HSP(B))^*$ y la correspondencia es biunívoca. //

Otra consecuencia sencilla de los anteriores:

(9.17) Proposición: Sea $k$ variedad localmente finita con congruencias distributivas. Y sea $h$ subvariedad de $k$. Entonces

i). $h$ es c.i.d. si y solo si $h$ es c.p.d. relativa a $k$

ii). $h$ es c.i.c. relativa a $k$ si y solo si $h$ es c.p.c. relativa a $k$.

Demostración: "i)" Supongamos que $\mathcal{H}$ es c.i.d., por ser localmente finita y (5.2), $\mathcal{H}$ está generada por un álgebra subdirectamente irreducible finita. Por (9.12), (9.5) y (9.4) $\mathcal{H}$ es c.p.d. relativa a $\mathcal{K}$.

"ii)" Supongamos que $\mathcal{H}$ es c.i.c. relativa a $\mathcal{K}$. En (7.12) se probó que existe una única subvariedad de $\mathcal{K}$, $\mathcal{P}$ c.i.d. con $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ máxima en $\mathcal{P}$ y esta asociación siendo inyectiva. Por (9.14), $\mathcal{P} = HSP(A)$ con $A$ crítica, por (9.12), $A$ escinde fuertemente a $\mathcal{K}$ y por (9.5) y (9.3) $\mathcal{D}(A,\mathcal{K})$ es c.i.c. relativa a $\mathcal{K}$ con $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(A,\mathcal{K})$ subvariedad máxima de $\mathcal{P}$. Luego, por inyectividad $\mathcal{H} = \mathcal{D}(A,\mathcal{K})$ c.p.c. relativa a $\mathcal{K}$ por la observación posterior a (9.2). //

Hemos obtenido así el siguiente teorema de estructura:

(9.18) Teorema: Sea $\mathcal{K}$ variedad localmente finita con congruencias distributivas. Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ variedad. Se tiene:

i). $\mathcal{H}$ es c.i.d. si y solo si existe $A \in \mathcal{K}$ crítica con $\mathcal{H} = HSP(A)$.

ii). $\mathcal{H}$ es c.i.c. relativa a $\mathcal{K}$ si y solo si existe $A \in \mathcal{K}$ crítica con $\mathcal{H} = \mathcal{D}(A,\mathcal{K})$.

Demostración: ver la prueba de (9.17) //

Como habíamos anunciado en la sección 2, podemos en esta situación obtener un dual para (2.3).

(9.19). Teorema: Sea $\mathcal{K}$ variedad localmente finita con congruencias distributivas. Toda subvariedad propia de $\mathcal{K}$ puede obtenerse como intersección de variedades c.i.c. relativas a $\mathcal{K}$.

Demostración: Sea $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{K}$ variedad, y sea $M = \{A \in \mathcal{K} \mid A \text{ crítica}\}$ como $\mathcal{H}$ está generada por sus álgebras finitas, por (9.8) $\mathcal{H} = \bigvee_{A \in M \cap \mathcal{H}} HSP(A)$. Sea $A \in M$, como ya hemos observado antes

$\mathcal{B}(A,k)$ es variedad c.i.c. relativa a $k$.

Definimos $h' := \bigcap \{\mathcal{B}(A,k) \mid A\in M,\ A\notin h\}$ subvariedad de $k$.
Probaremos que $h=h'$.

"$\subset$" Sea $A\in M\cap h$ y $B\in M$ con $B\notin h$, por tanto $B\notin HSP(A)\subset h$ y $A\in\mathcal{B}(B,k)$. Luego $A\in h'$ y $h=\bigvee_{A\in M\cap h} HSP(A)\subset h'$.

"$\supset$" Sea $A\in k$ tal que $A\notin h$. Por (9.8), existe $B\in M\cap HSP(A)$ con $B\notin h$. Luego $A\notin\mathcal{B}(B,k)$ con $B\in M$ y $B\notin h$, o sea, $A\notin h'$.

Se sigue $h=h'$ intersección de c.i.c. relativas a $k$. //

Esta situación — $k$ localmente finita con congruencias distributivas — es particularmente buena; mostraremos algunas aplicaciones en la sección 11. Antes en la 10 analizaremos la situación en el caso de variedades de grupos que no tienen congruencias distributivas, solo modulares.

## §10. IRREDUCIBILIDAD EN VARIEDADES DE GRUPOS.

En esta sección se dará alguna información acerca de la irreducibilidad de variedades de grupos.

La referencia general para las variedades de grupos es [HN], para los resultados en teoría clásica de grupos usaremos [JR] y [MH]. En algunos casos enunciaremos explícitamente los resultados a usarse en otros solo se indicará el lugar donde pueden localizarse.

Comenzaremos fijando alguna notación de variedades de grupos. Por $\underline{Gr}$ denotaremos la variedad de todos los grupos considerada como de tipo $\tau = \langle 2,1,0 \rangle$. Por Ab denotaremos la variedad de todos los grupos abelianos, definida por la palabra $[x,y]$, el conmutador de $x,y$. — Observemos que en grupos podemos indicar solo una palabra de la ecuación, debido a que la ecuación $(p,q)$ es equivalente a $(pq^{-1},1)$ —.

Por $A_n$ denotaremos la variedad de grupos abelianos que satisface la palabra $x^n$. Y por $B_n$ la variedad de todos los grupos satisfaciendo $x^n$, o sea, los grupos de exponente $n$. Diremos que una variedad de grupos $\mathcal{V}$ tiene exponente $n$ si $\mathcal{V} \subset B_n$.

Obviamente, tenemos $A_n = Ab \cap B_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Si $c \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_c$ denotará la variedad de los grupos nilpotentes de clase $c$ (ó menos), definida por la palabra $[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}]$ — donde se define $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$. —. Una variedad de grupos $\mathcal{V}$ será de clase $c$ cuando $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}_c$ pero $\mathcal{V} \not\subset \mathcal{N}_{c-1}$.

Si $l \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{S}_l$ denotará la variedad de grupos solubles de longitud de solubilidad $l$ (o menor), definida por la palabra $s_l(x_1, \dots, x_{2^l})$ que se define inductivamente como sigue: $s_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ y $s_{l+1}(x_1, \dots, x_{2^{l+1}}) = [s_l(x_1, \dots, x_{2^l}), s_l(x_{2^l+1}, \dots, x_{2^{l+1}})]$. Una variedad de grupos $\mathfrak{V}$ se dirá de longitud de solubilidad $l$ cuando $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{S}_l$ y $\mathfrak{V} \not\subset \mathfrak{S}_{l-1}$.

La variedad de grupos trivial se denotará $\mathfrak{T}$.

Los conceptos clásicos de grupo nilpotente y soluble están claramente en acuerdo con la notación que acabamos de introducir.

Si $\mathfrak{U} \subset \underline{\mathrm{Gr}}$ variedad, por $\mathfrak{U}^{(n)}$ denotaremos a la variedad generada por las ecuaciones de $\mathfrak{U}$ en $n$ variables además de las ecuaciones de grupo. Con esta modificación los resultados de la sección 3 siguen siendo válidos — de hecho, sin ninguna alteración ni en enunciados ni demostraciones —.

Comenzamos con algunos resultados aislados que darán una visión superficial de la situación en subvariedades de $\underline{\mathrm{Gr}}$.

(10.1) <u>Lema</u>: Sea $\mathfrak{V}$ variedad de grupos abelianos, entonces $\mathfrak{V}$ es c.i.d. si y solo si existe $p$ primo y $k \in \mathbb{N}$ con $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_{p^k}$.

<u>Demostración</u>: Supongamos $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_{p^k}$. Obviamente, $\mathfrak{A}_{p^{k-1}} \subsetneq \mathfrak{V}$. Sea $G \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{A}_{p^{k-1}}$, luego existe $x_0 \in G$ con $x_0^{p^{k-1}} \neq 1$ y $x_0^{p^k} = 1$. Por tanto, $\mathrm{ord}_G(x_0) = p^k$ y $\mathbb{Z}_{p^k} \cong (x_0) \subset G$. Como por [HN, 14.62] $\mathbb{Z}_{p^k}$ genera $\mathfrak{A}_{p^k} = \mathfrak{V}$, $HSP(G) = \mathfrak{V}$. Por (2.4) $\mathfrak{V}$ es sucediente de $\mathfrak{A}_{p^{k-1}}$.

En la sección 5 probamos que $\mathrm{Ab}$ es reducible, luego si $\mathfrak{V}$ es c.i.d., $\mathfrak{V} \subsetneq \mathrm{Ab}$ y por [HN, 14.62], existe $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_n = HSP(\mathbb{Z}_n)$.

Supongamos $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ es factorización prima de $n$, tenemos entonces:
$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}}$ y $\mathcal{V} = HSP(\mathbb{Z}_n) = HSP(\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}) \vee \cdots \vee HSP(\mathbb{Z}_{p_m^{k_m}})$.
Por ser $\mathcal{V}$ c.i.d. $\mathcal{V} = HSP(\mathbb{Z}_{p_j^{k_j}})$ para alguna $j \in \{1, \dots, m\}$. //

(10.2) Lema: Sea $\mathcal{V}$ variedad c.i.d. de exponente finito $m_\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ envolvente de $\mathcal{U}$ con exponente $m_\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{V}$ es variedad no abeliana si y solo si $m_\mathcal{V} = m_\mathcal{U}$.

Demostración: Como $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, claramente $m_\mathcal{U} \leq m_\mathcal{V}$.
Supongamos que $\mathcal{V}$ es abeliana, por (10.1) existe $p$ primo y $k \in \mathbb{N}$ con $\mathcal{V} = A_{p^{k+1}}$ envolvente de $A_{p^k}$, luego $m_\mathcal{U} = p^k < p^{k+1} = m_\mathcal{V}$.
Supongamos que $\mathcal{V}$ no es abeliana, como $L_1(\mathcal{V})$ es cíclico se tiene que $\mathcal{V} \neq HSP(L_1(\mathcal{V}))$. Por (3.6), $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(1)} \subset \mathcal{V}$ y siendo $\mathcal{U}$ máxima en $\mathcal{V}$ tenemos $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(1)} \subset \mathcal{U}^{(1)}$, ó equivalentemente, $e\mathcal{U}^{(1)} \subset e\mathcal{V}$.
Esto implica que $x^{m_\mathcal{U}}$ es ecuación de $\mathcal{V}$ y como $m_\mathcal{V} = \exp \mathcal{V}$. $m_\mathcal{V} \mid m_\mathcal{U}$ por tanto, $m_\mathcal{V} \leq m_\mathcal{U}$ que es la desigualdad que se necesitaba. //

(10.3). Proposición: Toda subvariedad propia de $\mathcal{G}m$ es reducible por conjunción.

Demostración: Sea $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{G}m$ variedad. Como $(2,3) = 1$ se tiene que $B_2 \cap B_3 = \mathcal{T}$ y el producto de variedades es distributivo por la derecha [HN, 21.22], $(B_2 \cap B_3)\mathcal{V} = B_2\mathcal{V} \cap B_3\mathcal{V}$ y también por [HN, 21.23], $\mathcal{T}\mathcal{V} = \mathcal{V}$, de donde $\mathcal{V} = B_2\mathcal{V} \cap B_3\mathcal{V}$. Si tuviésemos que $B_2\mathcal{V} = \mathcal{V}$ por [HN, 21.21], $B_2 = \mathcal{T}$ lo que es falso, por tanto $\mathcal{V} \subsetneq B_2\mathcal{V}$ y similarmente $\mathcal{V} \subsetneq B_3\mathcal{V}$ que da una reducción de $\mathcal{V}$. //

(10.4) Corolario: No hay grupos que se escinden débilmente en $\mathcal{G}m$.

Demostración: Directo de (9.4) //

Esto muestra que aunque $\mathcal{G}m$ tiene congruencias modulares, la situación es radicalmente distinta del caso de congruencias distributivas —en particular ver la sección 11—.

Antes de continuar, diremos algunas palabras acerca del producto de variedades de grupos, del cual ya hemos hecho uso en la prueba de (10.3). Si $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset \mathcal{G}m$ variedades, $\mathcal{V}\mathcal{W}$ el producto de ellas es la variedad de todos los grupos que son extensión de un grupo de $\mathcal{V}$ por un grupo de $\mathcal{W}$. Diremos que una variedad $\mathcal{V}$ es inescindible si solo admite la descomposición $\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{V}$ como producto de variedades. Dos de los hechos más importantes respecto a este producto es en primer lugar que es asociativo [HN, 21.51] y que cualquier subvariedad propia de $\mathcal{G}m$ no trivial se descompone en forma única como producto de variedades inescindibles. [HN, 23.32]. Observemos que si $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ son variedades de grupos de exponentes finitos $m$ y $n$ respectivamente, entonces $\mathcal{V}\mathcal{W}$ es de exponente $mn$.

Como notamos en la sección 9, un hecho importante para una variedad es saber si está generada por sus álgebras finitas.

(10.5). Teorema: $\mathcal{G}m$ está generada por sus álgebras finitas.

Demostración: Sea $G_0$ grupo finito no trivial. Definimos $\mathcal{V}_0 := HSP(G_0)$ que es variedad no trivial, localmente finita. Luego, si $k \in \mathbb{N}$, $L_k(\mathcal{V}_0)$ es finito y por [HN, 21.14], $L_k(\mathcal{V}_0^2)$ es finito, donde $\mathcal{V}_0^2 = \mathcal{V}_0\mathcal{V}_0$, y $\mathcal{V}_0^2$ está generada por sus grupos finitos; por inducción $\mathcal{V}_0^n$ está generada por sus grupos finitos, $n \in \mathbb{N}$. Pero por [HN, 21.71], como $\mathcal{V}_0$ no es trivial

$\underline{Gu} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{V}_0''$ generada por grupos finitos. //

Como $L_1(\underline{Gu}) = \mathbb{Z}$ infinito, $\underline{Gu}$ no es c.i.d. —úsese (10.5)—, sin embargo en [HN, 21.35] se prueba que $\underline{Gu}$ es i.d.

Lo que se hará ahora es tratar de obtener información de las variedades de grupos c.i.d. localmente finitas, o sea las generadas por grupos finitos.

(10.6). Lema: $\{\mathfrak{V}_i \mid i\in\{1,\dots,n\}\}$ variedades de grupos localmente finitas. Si $n\geq 3$ entonces $\mathfrak{V}_1.\mathfrak{V}_2.\mathfrak{V}_3\dots\mathfrak{V}_n$ es reducible por disyunción.

Demostración: como $L_k(\mathfrak{V}_i)$ es finito, $i\in\{1,\dots,n\}$, $k\in\mathbb{N}$; por [HN, 21.14] $L_k(\mathfrak{V}_1\dots\mathfrak{V}_n)$ es finito, $k\in\mathbb{N}$. Pero por [HN, 24.62] $\mathfrak{V}_1\dots\mathfrak{V}_n$ no puede generarse por un grupo finito, luego $\mathfrak{V}_1\dots\mathfrak{V}_n$ no es c.i.d. //

(10.7). Teorema: Sea $\mathfrak{V}$ variedad de grupos c.i.d. y localmente finita. Entonces $\mathfrak{V}$ es inescindible ó $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ descomposición en variedades no triviales que satisfacen:

i). $\mathfrak{U}_i$ es localmente finita inescindible, $i\in\{1,2\}$.

ii). $\mathfrak{U}_1$ es c.i.d.

iii). $\mathfrak{U}_1$ es nilpotente y $\mathfrak{U}_2$ es abeliana

iv). $\mathfrak{U}_1 \wedge \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{I}$.

Demostración: Por [HN, 21.72], $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\dots\mathfrak{U}_n$ descomposición en inescindibles y por (10.6), $n\leq 2$. Supongamos que $\mathfrak{V}$ es escindible.

Luego $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ son inescindibles y localmente finitas.

Supongamos $\mathfrak{U}_1 = \bigvee_{\mu\in M} \mathfrak{W}_\mu$, $\mathfrak{W}_\mu \subsetneq \mathfrak{U}_1$, $\mu\in M$. Usando [HN, 21.23]

$\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \left(\bigvee_{\mu\in M}\mathfrak{W}_\mu\right)\mathfrak{U}_2 = \bigvee_{\mu\in M}\mathfrak{W}_\mu.\mathfrak{U}_2$ y siendo $\mathfrak{V}$ c.i.d., $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}_{\mu_0}\mathfrak{U}_2$ para alguna $\mu_0\in M$. Así, $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{W}_{\mu_0}\mathfrak{U}_2$ y por [HN, 21.21], $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{W}_{\mu_0}$

que contradice $\mathcal{W}_{p_0} \subsetneq \mathcal{U}_1$. Luego $\mathcal{U}_1$ es c.i.d.

Como $\mathcal{O}$ es c.i.d., $\mathcal{O} = HSP(L_k(\mathcal{O}))$ para alguna $k \in \mathbb{N}$; además hemos visto que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ están generados por sus grupos finitos, puede usarse entonces [HN, 24.61] para concluir que $\mathcal{U}_1$ es nilpotente y $\mathcal{U}_2$ es abeliana. Como además, $L_k(\mathcal{V})$ es grupo finito, por [HN, 24.65] los exponentes de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son primos relativos y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathcal{T}$. //

Mostraremos que los dos casos de (10.7) se presentan. Daremos primero algunos ejemplos de variedades c.i.d. escindibles.

(10.8) <u>Lema</u>: Sean $p, q$ primos diferentes, $A_pA_q$ es variedad c.i.d.

<u>Demostración</u>: Por [HN, 54.41], $A_pA_q$ tiene únicamente dos subvariedades propias $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ que contienen propiamente a $A_{pq}$, a saber:

$$\mathcal{U}_1 = m(eA_pA_q \cup \{[x^q, y]\}) \quad y \quad \mathcal{U}_2 = m(eA_pA_q \cup \{[x^q, y^q]\}).$$

Probaremos primero que $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$. Sea $G \in \mathcal{U}_1$, $\alpha: L_\omega(G_{\underline{u}}) \longrightarrow G$ homomorfismo. Sea $\beta: L_\omega(G_{\underline{u}}) \longrightarrow G$ homomorfismo con $\beta(x) = \alpha(x)$ y $\beta(y) = \alpha(y)^q$. Se sigue: $[\alpha(x)^q, \alpha(y)^q] = [\beta(x)^q, \beta(y)] = 1_G$ y $G \in \mathcal{U}_2$.

Tomamos ahora $\mathcal{U} \subsetneq A_pA_q$ variedad no trivial. Por [HN, 54.42], existen $r, s \in \mathbb{N}$ con $r | p$, $s | q$ y tales que $A_{rs} \subset \mathcal{U} \subset A_rA_s$.

Si $r = p$, $s = q$, $A_{pq} \subset \mathcal{U}$ y por tanto $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_2$

Si $r = 1$, $s = q$, $A_q \subset \mathcal{U} \subset A_q$ y $\mathcal{U} = A_q \subset A_{pq} \subset \mathcal{U}_2$, sim. los otros casos.

Luego, $\mathcal{U}_2$ es subvariedad máxima de $A_pA_q$. //

Lo que hicimos en (10.8) fué determinar el latice de subvariedades de $A_pA_q$ qué resultó ser:

Sabemos que si $\mathcal{V}$ es variedad c.i.d. localmente finita y se escinde, $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2$ con $\mathcal{U}_1$ nilpotente c.i.d. Obtendremos alguna información para este tipo de variedades.

Recordemos que dado un grupo G, el subgrupo de Fratini de G, $\Phi$, es la intersección de todos los subgrupos maximales de G. Y es también el conjunto de todos los elementos no-generadores de G — $x \in G$ es no-generador si siempre que $T \cup \{x\}$ genere G entonces también T lo genera —. Recordamos que $\Phi$ es nilpotente [HH, 10.4.2]. Si además, G es p-grupo finito, se tiene el Teorema de las bases de Burnside [HH, 12.2.1]: $G/\Phi(G)$ es $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial con ord $G/\Phi(G) = p^{\dim_{\mathbb{Z}_p}(G/\Phi(G))}$; si $r = \dim_{\mathbb{Z}_p}(G/\Phi(G))$, todo conjunto generador de G tiene un subconjunto generador con r elementos que bajo la proyección se mapean en una base de $G/\Phi(G)$ y conversamente todo levantamiento de una base de $G/\Phi(G)$ es conjunto generador de G.

(10.9) <u>Proposición</u>: Sea $\mathcal{V}$ var. de grupos c.i.d. localmente finita y nilpotente de clase c. Entonces existe un grupo crítico que genera $\mathcal{V}$ y satisface:
- i). G es p-grupo con centro cíclico, p primo.
- ii). Si H es el monolito de G, $H \cong \mathbb{Z}_p$.
- iii). G puede generarse con c elementos
- iv). Si ord $G = p^n$, entonces ord $\Phi(G) > p^{n-c}$.

<u>Demostración</u>: Por (9.14), existe G grupo crítico con $\mathcal{V} = HSP(G)$. Como G es nilpotente, por [HH, 10.3.4], G es producto directo de sus subgrupos de Sylow y siendo crítico debe ser igual a uno de ellos; luego, G es p-grupo para algún primo p. Por (9.7), G es subdirectamente irreducible y sea H el subgrupo normal mínimo, observamos que es a este subgrupo

al que se llama el monolito de $G$. Como $G$ es $p$-grupo, $(1_G) \neq Z(G)$ el centro de $G$ que es normal en $G$, luego $H \subset Z(G)$ y como todo subgrupo de $Z(G)$ es normal en $G$, $Z(G)$ es monolítico con monolito $H$. Siendo $Z(G)$ abeliano por (10.1) $Z(G)$ es cíclico. Supongamos $ord(Z(G)) = p^k$, por el Tma. de Cauchy, $Z(G)$ tiene un subgrupo $K$ de orden $p$, luego $K \triangleleft G$ y $H \subset K$. Por tanto $ord\, H = p$ y $H \cong \mathbb{Z}_p$.

Por [HN, 35.12], $\mathcal{V}$ está generada por $L_c(\mathcal{V})$ que es subgrupo de $G^T$ con $T$ conjunto, luego las proyecciones de la inclusión de $L_c(\mathcal{V})$ en $G^T$ también generan $\mathcal{V}$ pero estos son subgrupos de $G$ con $c$ generadores. Como $G$ es crítico, una de estas proyecciones es $G$ que tiene $c$ generadores y de hecho no por menos si $L_{c-1}(\mathcal{V})$ no genera $\mathcal{V}$.

Finalmente, sea $r = \dim_{\mathbb{Z}_p} (G/\phi(G))$ y $\varphi : G \longrightarrow G/\phi(G)$ la proyección. Tomamos $\{a_1, \ldots, a_c\}$ conjunto generador de $G$, luego $\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_c)\}$ genera $G/\phi(G)$ y $r \leq c$. Por tanto, $ord\, G/\phi(G) = p^r \leq p^c$ y $ord\, \phi(G) =$
$= ord\, G / ord\, G/\phi(G) \geq p^{n-c}$, si $ord\, G = p^n$. //

(10.10) <u>Proposición</u>: Sea $B$ $p$-grupo crítico de orden $p^n$ y supongamos que $\mathcal{V} = HSP(B)$ es variedad c.i.d. envolvente de $\mathcal{U}$. Tenemos:

i). $ord\, \phi(B) = p^{n-r}$ implica que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(r)}$ y $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^{(r-1)}$

ii). $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(r)} \cap \mathcal{V}$ implica que $ord\, \phi(B) \geq p^{n-r}$

iii). $r = \min\{t \in \mathbb{N} \mid \mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(t)}\}$ entonces $ord\, \phi(B) = p^{n-r}$.

<u>Demostración</u>: "i)" Supongamos que $ord\, \phi(B) = p^{n-r}$, por el Tma. de las bases de Burnside, $r = \dim_{\mathbb{Z}_p} B/\phi(B)$. Sea $\{a_1, \ldots, a_r\}$ base de $B/\phi(B)$, luego existen $\{b_1, \ldots, b_r\} \subset B$ que generan $B$, o sea, $\mathcal{V} = HSP(L_r(\mathcal{V}))$. Por (3.i), $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(r)}$. Supongamos además que $\mathcal{V} \not\subset \mathcal{U}^{(r-1)}$, tendríamos

$\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(r-1)} \subsetneq \mathcal{V}$ y por tanto $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(r-1)}$. Por el mismo (3.6), $\mathcal{V} = HSP(L_{r-1}(\mathcal{V}))$; como $L_{r-1}(\mathcal{V})$ es proyectivo, es subgrupo de $B^T$ con T conjunto y $\mathcal{V}$ está generado por las proyecciones sobre B de la inclusión de $L_{r-1}(\mathcal{V})$ en $B^T$ que son subgrupos de B con r-1 generadores. Como B es crítico, es igual a uno de estos subgrupos y tiene por tanto r-1 generadores. Luego $B/\phi(B)$ tiene también r-1 generadores que es absurdo ya que $r = \dim_{\mathbb{Z}_p}(B/\phi(B))$. Así, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^{(r-1)}$.

"ii)" Supongamos $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(r)}$, por el mismo razonamiento que en i).

$\dim_{\mathbb{Z}_p}(B/\phi(B)) \leq r$ y también $\operatorname{ord} \phi(B) \geq p^{n-r}$.

"iii)" Si $\operatorname{ord} \phi(B) = p^k$ con $k > n-r$, por i). $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}^{(n-k)}$ con $n-k < r$. //

Obtendremos ahora alguna información acerca de los generadores de variedades c.i.d. localmente finitas y que se scinden. Recordamos que un H grupo se llama abeliano elemental, si $pH = \{0\}$ para algún primo p.

(10.11) <u>Proposición</u>: Sea $\mathcal{V}$ variedad de grupos c.i.d. localmente finitas y $\mathcal{V}$ se escinde. Tenemos entonces que $\mathcal{V}$ es variedad soluble y los grupos críticos que la generan tienen monolito abeliano elemental.

<u>Demostración</u>: Por (10.7), $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ con $\mathcal{U}_1$ nilpotente y $\mathcal{U}_2$ abeliana. Luego $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son solubles. Por [JR, 6.13], $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 = \mathcal{V}$ es soluble. Por (9.14), $\mathcal{V} = HSP(G)$ para algún grupo crítico G. Sea H el monolito de G, luego $H' \triangleleft G$ y como H es soluble y $H' \subset H$ se tiene que $H' = (1_G)$, o sea que H es abeliano. H es entonces producto de sus p-grupos de Sylow que son totalmente invariantes en H y luego normales en G, entonces H debe ser p-grupo. Como también $H[p]$ el subgrupo de H de todos los elementos de orden $\leq p$ es totalmente invariante en H y no trivial, se debe tener $H = H[p]$ y H es abeliano elemental //

(10.12). Proposición. Sea $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ variedad c.i.d. localmente finita y escindible. Sea $B$ grupo crítico que genera $\mathfrak{V}$. y $M$ el monolito de $B$. Entonces.

1). $pM = 0$ si y solo si $\exp \mathfrak{U}_1 = p^n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.

2) Supongamos $\operatorname{ord} B = p^m q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}$ descomposición prima con $pM = 0$ entonces $\exp \mathfrak{U}_2 = q_1^{n_1} \cdots q_s^{n_s}$ con $1 \leq n_i \leq m_i$, $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Demostración: "1)" Supongamos que $pM = 0$, como $\mathfrak{U}_1$ es nilpotente c.i.d. y localmente finita, aplicando (10.9), $\mathfrak{U}_1 = HSP(Q)$ con $Q$ $q$-grupo crítico. Luego $\exp \mathfrak{U}_1 = q^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Como $B \in \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$, existen $B_1 \in \mathfrak{U}_1$, $B_2 \in \mathfrak{U}_2$ con $B_1 \triangleleft B$ y $B/B_1 \cong B_2$, como $B \notin \mathfrak{U}_2$, $B_1$ no es trivial y entonces $M \subset B_1 \in \mathfrak{U}_1$. Estando $M \in \mathfrak{U}_1$, tenemos $p = \exp M \mid \exp \mathfrak{U}_1 = q^n$ y se sigue $p = q$.

"2)" Por (10.7), $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{I}$ y entonces $p \nmid \exp \mathfrak{U}_2$. Si $q^k \mid \exp \mathfrak{U}_2$ con $q$ primo como $e\mathfrak{V} \subset e\mathfrak{U}_2$, $\exp \mathfrak{U}_2 \mid \exp \mathfrak{V} = \exp B$ y $q^k \mid \operatorname{ord} B$. Luego $\exp \mathfrak{U}_2 = q_1^{n_1} \cdots q_s^{n_s}$ con $0 \leq n_i \leq m_i$. Tomamos $j \in \{1, \ldots, s\}$, como $q_j \mid \operatorname{ord} B$, por el Tma. de Cauchy $B$ tiene un elemento de orden $q_j$. Se obtiene así $\mathbb{Z}_{q_j} \in \mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ y como $\exp \mathbb{Z}_{q_j} = q_j \nmid p^n$, $\mathbb{Z}_{q_j} \notin \mathfrak{U}_1$. Pero existe $A_1 \triangleleft \mathbb{Z}_{q_j}$ con $A_1 \in \mathfrak{U}_1$ y $\mathbb{Z}_{q_j}/A_1 \in \mathfrak{U}_2$, siendo $\mathbb{Z}_{q_j}$ simple, $A_1$ es trivial y $\mathbb{Z}_{q_j} \in \mathfrak{U}_2$. Se concluye que $n_j \geq 1$. //

(10.13). Teorema: Sea $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ variedad c.i.d., localmente finita y escindible. Sea $B$ grupo crítico que genera $\mathfrak{V}$ con monolito $M$. Supongamos que $n = \exp B = p^m q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}$ factorización prima y $M$ $p$-abeliano elemental. Entonces:

1). $\exp \mathfrak{U}_1 = p^m$

2). $\mathfrak{U}_2 = HSP(\mathbb{Z}_{q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}})$.

Demostración: "1)" Por (10.12) $\exp \mathfrak{U}_1 = p^k$, $k \in \mathbb{N}$. Como $e\mathfrak{V} \subset e\mathfrak{U}_1$, se tiene $p^k = \exp \mathfrak{U}_1 \mid \exp \mathfrak{V} = \exp B$ y $1 \leq k \leq m$. Además, $\mathbb{Z}_n \in \mathfrak{V}$ y también $\mathbb{Z}_{p^m} \in \mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$. Si $A \triangleleft \mathbb{Z}_{p^m}$ tal que $A \in \mathfrak{U}_1$ y $\mathbb{Z}_{p^m}/A \in \mathfrak{U}_2$

como antes, $p \nmid \exp \mathcal{U}_2$ y entonces $\mathbb{Z}_{p^m} \cong A \in \mathcal{U}_1$. Se sigue que $\exp \mathcal{U}_1 = p^{m}$.

"2)" Como en 1)., $\mathbb{Z}_{q_j^{m_j}} \in \mathcal{U}_2$, luego $\mathbb{Z}_{q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}} \in \mathcal{U}_2$ y $\exp \mathcal{U}_2 = q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}$, como $\mathcal{U}_2$ es abeliana, $\mathcal{U}_2 = HSP(\mathbb{Z}_{q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}})$.

(10.14). <u>Corolario</u>. Bajo las hipótesis de (10.13), $\mathcal{U}_2$ es c.i.d. si y solo si $s=1$ //

El resultado (10.13) determina casi totalmente $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$. Enunciamos ahora un complemento.

(10.15). <u>Proposición</u>: Sea $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2$ variedad c.i.d. localmente finita y escindible. Sea $B$ grupo crítico generador de $\mathcal{V}$ con $k$ generadores pero no menos. Si $\mathcal{U}_1$ no es abeliana tiene clase de nilpotencia $k$.

<u>Demostración</u>: Sea $c$ la clase de nilpotencia de $\mathcal{U}_1$. Por [HN, 53.63], $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 A_r$ está generada por sus grupos $c$-generados pero no por los de $c-1$ generadores; teniendo $B$ $k$ generadores, $k \geq c$. Pero también $L_c(\mathcal{V})$ genera $\mathcal{V}$ y como en (10.10) puede probarse que $B$ tiene $c$ generadores, luego se tiene $c \geq k$. //

Hasta el momento las variedades c.i.d. estudiadas han sido solubles, obviamente también hay c.i.d. no solubles. Veremos algunos ejemplos.

(10.16) <u>Observación</u>:

i). Si $G$ es grupo finito monolítico con monolito no abeliano, entonces $G$ es crítico.

<u>Demostración</u>. El centralizador de $M$ en $G$, $C_G(M) \triangleleft G$ donde $M$ es el monolito no abeliano, por esta razón $M \not\subset C_G(M)$ y entonces $C_G(M)$ es trivial. Por [HN, 53.44], $G$ es crítico //

ii). Describimos enseguida una construcción que aparece en [HN, sección 53]. Sea $\mathcal{D}$ un conjunto finito de grupos finitos cerrado bajo formación de factores. Sea $G \in HSP(\mathcal{D})$ grupo finito, por (9.9), $G$ es factor de un producto directo finito de grupos en $\mathcal{D}$. Se escoge una representación minimal de $G$ en $HSP(\mathcal{D})$ como sigue: toda representación de $G$ como producto directo finito de grupos en $\mathcal{D}$ determina una sucesión no decreciente de enteros consistente en el orden de los factores del producto. Se ordena lexicográficamente al conjunto de representaciones y se escoge una minimal.

Supóngase que $G = H/K$ con $K \triangleleft H \subset P = \prod_{i=1}^{n} D_i$ y $D_i \in \mathcal{D}$ es una representación minimal. Se tiene:

[HN, 53.25] $D_i$ es crítico y $G$ contiene un subgrupo minimal normal $N_i$, que en $G$ es similar al monolito $M_i$ de $D_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

[HN, 53.26] Si $G$ es monolítico, con monolito $M$, entonces $M$ es similar en $G$ al monolito $M_i$ de $D_i$ y $G/M \in HSP(\{D_i/M_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\})$.

Recordamos [HN, 53.11] que si $M \triangleleft A$, $N \triangleleft B$ entonces $M$ en $A$ es similar a $N$ en $B$, implica que $M \cong N$ y que $A/C_A(M) \cong B/C_B(N)$.

iii). Observemos que si $C$ es factor de $B$ y $B$ factor de $A$, entonces $C$ es factor de $A$. Ya que si $A_1 \subset A_0$ y $B_1 \triangleleft A_1$, $A_1/B_1$ es factor de $A_0$.

$A_2 \subset A_1/B_1$, $B_2 \triangleleft A_2$, $A_2/B_2$ es factor de $A_1/B_1$. Pero, existen $\bar{A}_2 \subset A_1$ y $\bar{B}_2 \subset A_1$ tales que $A_2 = \bar{A}_2/B_1$, $B_2 = \bar{B}_2/B_1$ y $\bar{B}_2 \triangleleft \bar{A}_2$, luego se obtiene

$$A_2/B_2 = (\bar{A}_2/B_1)/(\bar{B}_2/B_1) = \bar{A}_2/\bar{B}_2 \quad \text{factor de } A_0.$$

Veremos que si un grupo es monolítico con monolito no abeliano se puede dar información precisa de la variedad que genera. Un grupo con estas características no es soluble.

(10.17). Teorema: Sea $G$ grupo con monolito $M$ no abeliano, $G$ finito. Entonces $\mathcal{V} := HSP(G)$ es variedad c.i.d.

Demostración: Supongamos $\mathcal{V} = \bigvee_{\mu\in\Lambda} \mathcal{U}_\mu$ con $\mathcal{U}_\mu$ c.i.d, $\mu\in\Lambda$, (2.3). Como $\mathcal{V}$ es localmente finita, para toda $\mu\in\Lambda$ existe un grupo finito $H_\mu$ con $\mathcal{U}_\mu = HSP(H_\mu)$. Luego, $G\in HSP(\{H_\mu \mid \mu\in\Lambda\})$ y por (9.9) existe $\Lambda_0\subset\Lambda$ finito con $G\in HSP(\{H_\mu \mid \mu\in\Lambda_0\})$.

Definimos $\mathcal{D} := \{K\in\mathcal{V} \mid K$ es factor de $H_\mu$ para alguna $\mu\in\Lambda_0\}$, por (10.16) $\mathcal{D}$ es conjunto finito de grupos finitos cerrado bajo factores y $G\in HSP(\mathcal{D})$. Sea $G = H/K$ con $K \triangleleft H \subset \prod_{i=1}^{n} D_i$, $D_i\in\mathcal{D}$ representación minimal de $G$ en $HSP(\mathcal{D})$. Por los resultados mencionados en (10.16), [HN, 53.25 y 53.26], para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, existe $\mu_i\in\Lambda_0$ tal que $D_i$ es factor crítico de $H_{\mu_i}$ con monolito $M_i$ similar en $D_i$ al monolito $M$ en $G$.

Como $M$ no es abeliano, $M \not\subset C_G(M) \triangleleft G$ y $C_G(M) = (1_G)$, luego $G = G/C_G(M) \cong D_i/C_{D_i}(M_i)$ para $i\in\{1,\dots,n\}$. Pero también $M_i \cong M$ que es entonces monolito no abeliano de $D_i$ y $C_{D_i}(M_i) = (1_{D_i})$ y obtenemos $G \cong D_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$. Pero por ser minimal la representación, $n=1$ y $G$ es factor crítico de $H_{\mu_0}$ para alguna $\mu_0\in\Lambda_0$. Se sigue que $G\in HSP(H_{\mu_0}) = \mathcal{U}_{\mu_0} \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{\mu_0}$ c.i.d. //

(10.18) Proposición: Sea $G$ grupo finito con monolito $M$ no abeliano. Entonces $\mathcal{V} := HSP(G)$ es envolvente de $\mathcal{U} := HSP(\{L\in\mathcal{V} \mid L$ es factor propio de $G\})$.

Demostración: Por (10.16), $G$ es crítico y $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$. Sea $A$ grupo crítico en $\mathcal{V}$ que no genera $\mathcal{V}$, probaremos que $A\in\mathcal{U}$. Sea $N$ el monolito de $A$. Definimos $\mathcal{F} := \{K\in\mathcal{V} \mid K$ es factor de $G\}$ conjunto finito de grupos finitos cerrado bajo factores. Tomamos $A = H/K$ con $H \subset \prod_{i=1}^{n} D_i$ representación minimal de $A$ en $HSP(\mathcal{F})$. Por [HN, 53.26], para toda $i\in\{1,\dots,n\}$

$D_i$ es crítico y $N$ es similar en $A$ al monolito $M_i$ de $D_i$.

Supongamos que $N$ es abeliano. Luego si $i\in\{1,\dots,n\}$, $M_i$ es monolito abeliano de $D_i \in \mathcal{F}$ y $D_i$ es factor propio de $G$ ya que $M$ es no abeliano. De aquí, $A \in HSP(\{D_i \mid i\in\{1,\dots,n\}\}) \subset \mathcal{U}$.

Supongamos que $N$ es no abeliano. Como en la prueba de (10.17), $A\in \mathcal{F}$, pero como $A$ no genera $\mathcal{V}$, $A$ es factor propio de $G$ y $A\in\mathcal{U}$. //

Ejemplos importantes de grupos con monolitos no abelianos son los grupos simétricos $S_n$ con $n\geq 5$. Por (10.17), $HSP(S_n)$ es c.i.d.

Los grupos con monolito no abeliano de hecho satisfacen la siguiente propiedad mucho más fuerte.

(10.19) Proposición: Sea $G$ grupo finito con monolito no abeliano y $\mathcal{V}$ variedad localmente finita con $G\in\mathcal{V}$. Entonces $G$ escinde fuertemente a $\mathcal{V}$.

Demostración: Sea $\mathcal{U} := HSP(G) \subset \mathcal{V}$, y supongamos $\mathcal{U} \subset \bigvee_{\mu\in M} \mathcal{W}_\mu \subset \mathcal{V}$. Por (2.3), podemos asumir $\mathcal{W}_\mu$ es c.i.d. generada por $G_\mu$ crítico. Como $\mathcal{V}$ es localmente finita, por (9.9) existe $N\subset M$ finito con $G\in HSP(\{G_\mu \mid \mu\in N\})$ procediendo como en (10.17), existe $\mu_0\in N$ tal que $G$ es factor crítico de $G_{\mu_0}$. Así, $\mathcal{U} = HSP(G) \subset \mathcal{W}_{\mu_0}$ y $\mathcal{U}$ es c.p.d. relativa a $\mathcal{V}$. Probaremos ahora que $\mathcal{U}^* = \mathcal{D}(G,\mathcal{V})$. Siempre se tiene $\mathcal{U}^*\subset \mathcal{D}(G,\mathcal{V})$. Supongamos que $K\notin \mathcal{U}^*$, luego $G\in HSP(K) = HSP(\{F \mid F \hookrightarrow K \text{ finito}\})$ ya que $K$ es límite de sus subgrupos finitamente generados y $\mathcal{V}$ es localmente finita. Por el argumento estándar, $G$ es factor de $F$ para algún subgrupo finito $F$ de $K$. O sea, $G$ es cociente de un subgrupo de $K$ y $K\notin \mathcal{D}(G,\mathcal{V})$. //

Aunque por (10.3) no hay variedad c.p.d. relativas a <u>Gru</u>, por (10.19) sí las hay relativas a subvariedades de <u>Gru</u> localmente finitas.

Concluimos con un resultado que permite construir variedades c.p.d. relativas a otra comenzando con variedades c.i.d.

(10.20). Proposición: Sea $\mathcal{V}$ variedad localmente finita c.i.d. y sea $\mathcal{U}$ variedad localmente finita con exponente coprimo con el de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es subvariedad c.p.d. relativa a $\mathcal{U}\mathcal{V}$.

Demostración: Sean $\mathcal{V} \subset \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{W}_\mu \subset \mathcal{U}\mathcal{V}$. Sea $G$ grupo crítico que genera a $\mathcal{V}$ y asumamos por (2.3) que $\mathcal{W}_\mu$ es c.i.d. generada por $K_\mu$. Por (9.9), $G \in HSP(\{K_\mu \mid \mu \in N\})$ para algún $N \subset M$ finito. Luego $\mathcal{V} \subset \bigvee_{\mu \in N} \mathcal{W}_\mu \subset \mathcal{U}\mathcal{V}$.
Por tanto, $\mathcal{V} = \mathcal{V} \wedge (\bigvee_{\mu \in N} \mathcal{W}_\mu)$ y probaremos que $\mathcal{V} \wedge (\bigvee_{\mu \in N} \mathcal{W}_\mu) = \bigvee_{\mu \in N} (\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}_\mu)$.

Sea $L \in \mathcal{V} \wedge (\bigvee_{\mu \in N} \mathcal{W}_\mu)$ grupo libre finitamente generado. Siendo $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ localmente finitas, $\mathcal{U}\mathcal{V}$ es localmente finita y $L$ es finito.

Sea $L = H/K$ con $H \subset H_1 \times \ldots \times H_r$, $H_i$ factor de $K_{\mu_i}$ con $\mu_i \in N$ representación minimal de $L$ en $\{F \mid F \text{ factor de } K_\mu, \mu \in N\}$. Por [HN, 53.25] para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$, $H_i$ es crítico con monolito $M_i$ similar a $N_i \trianglelefteq L$ minimal.

Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$, $M_i \cong N_i \in \mathcal{V}$, luego $\exp M_i \mid \exp \mathcal{V}$. Como $H_i \in \mathcal{U}\mathcal{V}$, existe $A \trianglelefteq H_i$ con $A \in \mathcal{U}$ y $H_i/A \in \mathcal{V}$; si $A$ no es trivial, $M_i \subset A$ y entonces $1 \neq \exp M_i \mid \exp \mathcal{U}$ que contradice $(\exp \mathcal{U}, \exp \mathcal{V}) = 1$. Así, $A$ es trivial y $H_i \in \mathcal{V}$; obteniéndose $H_i \in \mathcal{V} \wedge \mathcal{W}_{\mu_i}$ y $L \in \bigvee_{\mu \in N} (\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}_\mu)$.

Finalmente, $\mathcal{V} \wedge (\bigvee_{\mu \in N} \mathcal{W}_\mu) \subset \bigvee_{\mu \in N} (\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}_\mu)$ y la otra contención es trivial.

Como $\mathcal{V}$ es c.i.d., existe $\mu_0 \in N \subset M$ con $\mathcal{V} = \mathcal{V} \wedge \mathcal{W}_{\mu_0} \subset \mathcal{W}_{\mu_0}$ y $\mathcal{V}$ es c.p.d. relativa a $\mathcal{U}\mathcal{V}$. //

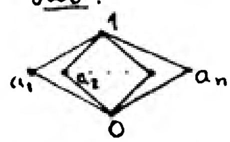
## §11. IRREDUCIBILIDAD EN VARIEDADES DE LATICES.

En esta sección construiremos algunos ejemplos de variedades c.i.d. en el latice de subvariedades de $\underline{\mathcal{L}at}$, la variedad de todos los latices. Aplicaremos algunos de los resultados de la sección 9.

Muchos de los ejemplos dados son bien conocidos aunque las pruebas no aparecen en la literatura. Usaremos también [BJ] y [RH].

(11.1) <u>Observación</u>: En [GB, pag 138], se prueba que el latice de congruencias de un latice es distributivo. Por (7.1) si $\mathcal{V}$ es variedad de latices, el latice de subvariedades de $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ es distributivo.

Por [GB, pag 141], el único latice distributivo subdirectamente irreducible es D:= . Llamaremos $\mathbb{D}$ a la variedad de latices distributivos, que está claramente generada por cualquiera de sus elementos no trivial. Luego, $\mathbb{D}$ es variedad minimal. Pero D es sublatice de cualquier latice no trivial y $\mathbb{D}$ es entonces subvariedad mínima en el latice de variedades de $\underline{\mathcal{L}at}$.

Llamaremos $M_n$ al latice 

y $\mathbb{M}_n := HSP(M_n)$.

(11.2) <u>Lema</u>. Si $n \geq 3$, $M_n$ es simple.

<u>Demostración</u>. Sea $\theta \in Con(M_n)$ no trivial. Si $(1,0) \in \theta$, claramente $\theta = 1_{M_n}$.

Sean $(a,b) \in \theta$ con $a \neq b$, y podemos asumir $a = a_i$.

Si $b = a_j$ con $j \neq i$, entonces $(0, a_j) = (a_i \wedge a_j, a_j \wedge a_j) \in \theta$ y $(1, a_j) =$
$= (a_i \vee a_j, a_j \vee a_j) \in \theta$, luego $(0,1) \in \theta$.

Si $b = 1$, tomamos $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ con $j \neq k \neq i \neq j$, y tenemos.

$(a_k,0)=(a_k\wedge 1, a_k\wedge a_i)\in\theta$ , similarmente $(a_j,0)\in\theta$
y $(a_k,1)=(a_k\vee 0, a_k\vee a_j)\in\theta$ y $(1,0)\in\theta$. Luego, $\theta = 1_{M_n}$ y $M_n$ es simple //

(11.3) Corolario: $M_n$ es subdirectamente irreducible si $n\geq 3$.

$\mathbb{M}_n$ es variedad c.i.d. si $n\in\mathbb{N}$.

Demostración: Si $n\geq 3$, $\mathbb{M}_n$ está generada por $M_n$ subdirectamente irreducible por (9.12). $\mathbb{M}_n$ es variedad c.i.d. Si $n\in\{1,2\}$, $M_n$ es distributivo y entonces $\mathbb{M}_n=\mathbb{D}$ que es c.i.d. //

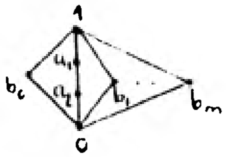
(11.4). Para $n\geq 3$, $\mathbb{M}_n$ es envolvente de $\mathbb{M}_{n-1}$.

Demostración: Sea $n\geq 3$, como $M_{n-1}$ es sublatice de $M_n$, $\mathbb{M}_{n-1}\subset\mathbb{M}_n$. Siendo las algebras críticas que los generan no isomorfas, por (9.16) $\mathbb{M}_{n-1}\subsetneq\mathbb{M}_n$. Sea $L\in\mathbb{M}_n$ y $L\notin\mathbb{M}_{n-1}$, definimos $\mathcal{V}=HSP(L)$. Por tanto, $\mathcal{V}\subset\mathbb{M}_n$ y $\mathcal{V}\not\subset\mathbb{M}_{n-1}$, mostraremos que $\mathcal{V}=\mathbb{M}_n$.

Por (9.8), $\mathcal{V}$ está generada por sus latices críticos y existe $L_i\in\mathcal{V}$ crítico con $L_i\notin\mathbb{M}_{n-1}$. Por (9.10), $L_i$ es factor de $M_n$, y se tiene un sublatice $K$ de $M_n$ junto con $\theta\in \mathrm{Con}\,K$ tales que $L_i\cong K/\theta$. Pero todo sublatice de $M_n$ es de la forma $M_k$ con $k\leq n$, y como $L_i\notin\mathbb{M}_{n-1}$ se tiene $K=M_n$. Siendo $M_n$ simple y $L_i$ no trivial, $L_i\cong M_n$ y $\mathcal{V}=\mathbb{M}_n$. //

Observemos que como $\mathbb{M}_2=\mathbb{D}$, $\mathbb{M}_3$ es envolvente de $\mathbb{D}$.

Sea $m\in\mathbb{N}$, llamaremos $N_{5,m}$ al latice:




Y $\mathbb{N}_{5,m}=HSP(N_{5,m})$.

Al latice $N_{5,0}$ le llamaremos $N_5$ como es usual.

(11.5) Lema: $N_5$ es envolvente de $\mathbb{D}$.

Demostración: Como $N_5 \notin \mathbb{D}$, $\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{N}_5$. Sea $L \in \mathbb{N}_5$ con $L \notin \mathbb{D}$.
Por [PC, pag 69], ó $M_3$ es sublattice de $L$ ó $N_5$ lo es. Pero si $M_3$ es sublattice de $L$, entonces $M_3 \in \mathbb{N}_5$ y por (9.10) $M_3$ es factor de $N_5$ lo que es falso.
Luego $L$ genera como sublattice a $N_5$ y $HSP(L) = \mathbb{N}_5$. //

Claramente los factores propios de $N_5$ son distributivos, luego $N_5$ es crítico.
Por [PC, pag 69] es claro que $\mathbb{M}_3$ y $\mathbb{N}_5$ son las únicas envolventes de $\mathbb{D}$.

(11.6). Proposición: i). $\mathbb{N}_{5,m}$ es variedad c.i.d.

ii). $\mathbb{N}_{5,m}$ es envolvente de $\mathbb{N}_{5,m-1} \vee \mathbb{M}_{m+2}$, $m \geq 1$.

Demostración: "i)" Sea $\theta := \Delta_{N_{5,m}} \cup \{(a_1,a_2),(a_2,a_1)\}$, probaremos que $\theta$ es congruencia mínima de $N_{5,m}$.

Si $i \in \{1,\dots,m\}$, $(a_1 \wedge b_i, a_2 \wedge b_i) = (0,0) \in \theta$ y $(a_1 \vee b_i, a_2 \vee b_i) = (1,1) \in \theta$, luego $\theta$ es congruencia. Sea $\varphi \in Con(N_{5,m})$ no trivial, mostraremos que $\theta \subset \varphi$.
Sean $x \neq y$ con $(x,y) \in \varphi$.

Si $x = 0$, $y = b_i$ se tiene: $(a_1,1) = (a_1 \vee 0, a_1 \vee b_i) \in \varphi$ y $(a_2,1) = (a_2 \vee 0, a_2 \vee b_i) \in \varphi$ entonces $(a_1,a_2) \in \varphi$ y $\theta \subset \varphi$. Similarmente si $x = 1$, $y = b_i$.

Si $x = 1$, $y = a_1$, se tiene. $(0, b_c) = (a_1 \wedge b_c, 1 \wedge b_c) \in \varphi$ y se sigue del primer caso. Similarmente si $x \in \{0,1\}$, $y \in \{a_1,a_2\}$.

Si $x = b_i$, $y = b_j$, claramente $\varphi = 1_{N_{5,m}}$. Similarmente los otros casos.
Luego, $N_{5,m}$ es subdirectamente irreducible y por (9.12), $\mathbb{N}_{5,m}$ es c.i.d.

"ii)" Sea $m \geq 1$, $N_{5,m-1}$ es sublattice propio de $N_{5,m}$ y $M_{m+2} = N_{5,m}/\theta$ cociente propio de $N_{5,m}$. Por (9.16), $\mathbb{N}_{5,m-1} \vee \mathbb{M}_{m+2} \subsetneq \mathbb{N}_{5,m}$.

Sea $L \in \mathbb{N}_{5,m}$ con $L \notin \mathbb{N}_{5,m-1} \vee \mathbb{M}_{m+2}$, podemos suponer que $L$ es crítico. Luego, por (9.10) $L$ es factor de $N_{5,m}$; $L = K/\varphi$ con

$K$ sublattice de $N_{5,m}$. Si $K = N_{5,m}$ y $\varphi \neq \Delta_{N_{5,m}}$, tendríamos $\theta \subset \varphi$ y $L$ cociente de $K/\theta = M_{m+2}$ lo que no es posible.

Si $K \subsetneq N_{5,m}$, claramente ó $K \cong N_{5,k}$ con $k \in \{0,\dots,m-1\}$ ó $K \cong$  ó $K \cong$  ó $K \cong D$ ó $K \cong M_j$ con $j \in \{2,\dots,m+2\}$.

En los cuatro primeros casos, $K \in \mathbf{N}_{5,m-1}$ y en el último $K \in \mathbf{M}_{m+2}$. Luego, esto tampoco es posible y $L$ no es factor propio de $N_{5,m}$. //

(11.7) Lema: Sea $\mathfrak{K}$ variedad con $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}$ distributivo. Supongamos que $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ son subvariedades de $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}_1$ subvariedad maximal de $\mathfrak{H}_1$ con $\mathfrak{H}_1 \not\subset \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{H}_2$. Entonces $\mathfrak{H}_2$ es maximal en $\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$.

Demostración: Como $\mathfrak{H}_1 \not\subset \mathfrak{H}_2$, se tiene $\mathfrak{H}_2 \subsetneq \mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$. Sea $\mathfrak{A}$ variedad tal que $\mathfrak{H}_2 \subsetneq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$, por tanto $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_1$. Supongamos que $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{H}_1$, así, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2 \vee \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{H}_2 \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{H}_1) = (\mathfrak{H}_2 \vee \mathfrak{A}) \wedge (\mathfrak{H}_2 \vee \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{A}$ lo que contradice $\mathfrak{H}_2 \subsetneq \mathfrak{A}$. Por tanto $\mathfrak{E}_1 \subsetneq \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{H}_1$ y siendo $\mathfrak{E}_1$ maximal en $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$ contenida en $\mathfrak{A}$, luego $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$ //

(11.8). Corolario: i). Si $m > 1$, $\mathbf{N}_{5,m}$ es subvariedad maximal de $\mathbf{M}_{m+3} \vee \mathbf{N}_{5,m}$.

ii). Si $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0,\dots,m\}$, $\mathbf{M}_{m+4} \vee \mathbf{N}_{5,k}$ es maximal en $\mathbf{M}_{m+4} \vee \mathbf{N}_{5,k+1}$.

iii). Si $k, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq k+3$, $\mathbf{N}_{5,k} \vee \mathbf{M}_m$ es maximal en $\mathbf{N}_{5,k} \vee \mathbf{M}_{m+1}$.

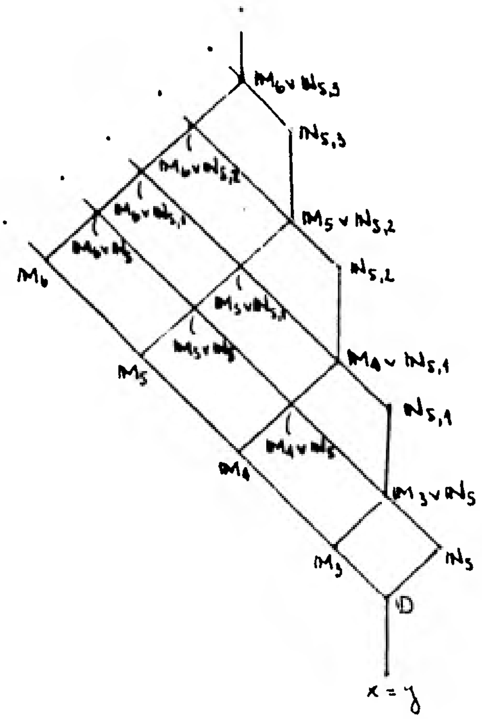
Demostración: Por (11.1), podemos aplicar (11.7).

"i)" $\mathfrak{H}_1 = \mathbf{M}_{m+3}$, $\mathfrak{H}_2 = \mathbf{N}_{5,m}$, $\mathfrak{E}_1 = \mathbf{M}_{m+2}$. Se tiene, $\mathfrak{H}_1$ es envolvente de $\mathfrak{E}_1$ y $\mathfrak{E}_1 \subset \mathbf{M}_{m+2} \vee \mathbf{N}_{5,m-1} \subsetneq \mathfrak{H}_2$. Supongamos que $\mathbf{M}_{m+3} \subset \mathbf{N}_{5,m}$, como $M_{m+3}$ es subdirectamente irreducible, por (9.10), $M_{m+3}$ es factor de $N_{5,m}$. Pero teniendo ambos $m+5$ elementos deberían ser isomorfos. Luego, $\mathfrak{H}_1 = \mathbf{M}_{m+3} \not\subset \mathbf{N}_{5,m} = \mathfrak{H}_2$ y por (11.7), $\mathbf{N}_{5,m} = \mathfrak{H}_2$ es maximal en $\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2 = \mathbf{M}_{m+3} \vee \mathbf{N}_{5,m}$.

"ii)" $h_1 = N_{5,k+1}$, $h_2 = M_{m+4} \vee N_{5,k}$ y $E_1 = M_{k+3} \vee N_{5,k}$; $h_1$ es envolvente de $E_1$. y como $m+4 > k+3$, $E_1 \subset h_2$. Supongamos que $h_1 \subset h_2$, luego por (9.10) $N_{5,k+1} \in N_{5,k}$ ó $N_{5,k+1} \in M_{m+4}$, lo primero no es posible y $N_{5,k+1}$ no es modular mientras $M_{m+4}$ si lo es. Se sigue que $h_1 \not\subset h_2$. Por (11.7), $h_2 = M_{m+4} \vee N_{5,k}$ es maximal en $h_1 \vee h_2 = M_{m+4} \vee N_{5,k+1}$.

"iii)" $h_1 = M_{m+1}$, $h_2 = N_{5,k} \vee M_m$, $E_1 = M_m$; $h_1$ es envolvente de $E_1$ y $E_1 \subset h_2$. Si $h_1 \subset h_2$, $M_{m+1}$ será factor de $N_{5,k}$ ó de $M_m$ ninguna es posible. Luego, $h_1 \not\subset h_2$ y $N_{5,k} \vee M_m = h_2$ es maximal en $h_1 \vee h_2 = N_{5,k} \vee M_{m+1}$. //

La información hasta aquí obtenida puede resumirse en el siguiente diagrama, donde si $U \subsetneq V$ están unidos por línea directa, entonces $U$ es maximal en $V$ ó $U$ es máxima en $V$ — dependiendo sólo si $U$ es ó no la única subvariedad maximal en $V$ —.



## Bibliografía.


[GB] Garret Birkhoff. Lattice Theory. American Mathematical Society. Colloquium Publications. Vol XXV. 3ª ed (1967).

[PC] P. M. Cohn. Universal Algebra. Harper and Row (1965)

[HS]. H. Herrlich, G. Strecker. Category theory. Allyn and Bacon (1973).

[MH] Marshall Hall, Jr. Teoría de los Grupos. Ed. Trillas (1973).

[AI] A. Iskander. Coverings in the lattice of varieties. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. 17. Contributions to Universal Algebra., Szeged (1975)

[BJ] Bjarni Jónsson. Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scandinava 21, 110-121. (1967).

[RM] Ralph Mc Kenzie. Equational bases and non modular lattice varieties. Transactions of the Am. Math. Soc. 174 (1972).

[HN] Hanna Neumann. Varieties of Groups. Springer-Verlag. Vol 37 (1967).

[JR] Joseph Rotman The theory of Groups Allyn and Bacon 2ª ed. (1973).

[FL] Francisco Larrión. Inyectividad en variedades de grupos Tesis de licenciatura (1979)

[MS] Mario Sclay. Una clasificación en variedades de Algebras. Tesis de licenciatura (1979)