(9) [illegible]

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"FORMULAS PARA EL CALCULO DE CIERTAS INTEGRALES DEFINIDAS QUE INVOLUCRAN POLINOMIOS ORTOGONALES"

TESIS
que para obtener el
titulo de: MATEMATICO
presenta:
DE OLAIZOLA
ARIZMENDI IÑAQUI.
MEXICO. 1981.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

CAPITULO I

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Una gran parte de los problemas de la física se plantean en términos de la ecuación diferencial

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \qquad \text{(I-1)}$$

donde ∇^2 es el Laplaciano. Cuando $k = 0$, la ecuación corresponde a campos potenciales estáticos; cuando k es una constante real, tenemos la ecuación de onda para la dependencia sinusoidal del tiempo (Ecuación de Helmholtz) o la ecuación de difusión para la dependencia exponencial del tiempo; y cuando k^2 es una función de las coordenadas, tenemos la ecuación de Schroedinger para una partícula con energía constante.

Existe un número infinito de diferentes soluciones para una ecuación del tipo (I-1).

Los diferentes problemas suelen diferir unos de otros en cuanto a las condiciones en la frontera; ya sea que varíe la forma de la frontera o que sea el comportamiento del campo escalar en la frontera lo que cambia.

La ecuación diferencial ordinaria que resulta al aplicar la técnica de separación en la ecuación de Laplace puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dz}\left[p(z)\frac{d\Psi}{dz}\right] + \left[q(z) + \lambda r(z)\right]\Psi = 0$$

(I-2)

A esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación - de Liouville. El parámetro λ es la constante de separación. Cada una de las funciones p, q, r, son características de las coordenadas utilizadas en la separación, y en algunos casos son -- funciones algebraicas simples de z con un número finito de -- ceros. En el caso particular de la ecuación de Schroedinger, la -- función q es más complicada, sin embargo q no tiene singula ridades en el rango de z (aunque puede tener una singularidad en uno o en ambos puntos de la frontera). Los puntos donde $p(z)$ se anula son las singularidades de la ecuación y el rango de z de- be ir de una singularidad a la siguiente evitando las singularida des en medio del intervalo. En otras palabras $p(z)$ no cambia de - signo en el rango de z y por lo tanto puede suponerse positiva. Resulta también que, en los casos de interés, r tampoco cambia- de signo y por ello se asume siempre que es positiva.

El problema de Sturm-Liouville es, esencialmente, el de determinar la dependencia del comportamiento general del campo -- escalar ψ con respecto al parámetro λ y la dependencia de de los eigenvalores de λ con respecto a las condiciones homogé neas en la frontera impuestas a ψ .

El estudio del problema de Sturm-Liouville muestra que existe un eigenvalor mínimo λ_0 y que al ordenar las eigenfun-- ciones en sentido creciente de eigenvalores, las ordena también en sentido creciente de número de nodos en el rango a, b . Estas con-- clusiones dependen de la suposición de que r es positiva en el rango $a < z < b$, que es cierta para la mayoría de las ecuaciones - separadas que resultan en los problemas de la física. Estos resul- tados se desprenden del Primer Teorema de Comparación de Sturm.

Si bien existe un eigenvalor mínimo λ_0 , no existe un eigenvalor máximo, es decir, para cada eigenvalor λ_n con-eigenfunción ψ_n , existe un eigenvalor λ_{n+1} , tal que $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ y la correspondiente eigenfunción ψ_{n+1} tiene un nodo más que ψ_n en a,b . Por lo tanto la secuencia de eigenvalores es in-fínita, extendiendose desde el mínimo λ_0 al infínito.

Una vez que se ha generado una secuencia de eigenfunciones $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfacen (I-2), debido a que dicha se--cuencia es un conjunto completo, es posible expresar cualquier -función continua por pedazos $F(z)$, en términos de $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n \qquad \text{(I-3)}$$

Por otra parte, la ecuación de Sturm-Liouville, puede se factorizada en operadores diferenciales líneales. Es decir, -la ecuación de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dz}\left[p\frac{d\psi}{dz}\right] + [q + \lambda r]\psi = 0$$

se transforma en la llamada ecuación modificada de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left[\lambda - V(x)\right]\Phi = 0$$

con $\Phi = (\rho r)^{1/4}\psi \quad ; \quad x = \int \sqrt{\rho/r}\, dz$

$$-V(x) = \left(\frac{q}{r}\right) + \frac{3}{16}\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right] - \frac{1}{8}\left(\frac{\rho' r'}{\rho r}\right) - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\rho''}{\rho}\right) + \left(\frac{r''}{r}\right)\right]$$

que tiene la forma de la ecuación unidimensional de Schroedinger con potencial V.

La idea es factorizar parte de la ecuación en el par de operadores diferenciales

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^-_{m+1}\Phi_n(m|x) &\equiv \left[\mu_{m+1}(x) - \left(\frac{d}{dx}\right)\right]\Phi_n(m|x) \\ &= \sqrt{\lambda_n - a_{m+1}}\;\Phi_n(m+1|x) \end{aligned} \qquad \text{(I-4)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^+_m\Phi_n(m|x) &\equiv \left[\mu_m(x) + \left(\frac{d}{dx}\right)\right]\Phi_n(m|x) \\ &= \sqrt{\lambda_n - a_m}\;\Phi_n(m-1|x) \end{aligned} \qquad \text{(I-5)}$$

o equivalentemente

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{G}^{+}_{m+1}\,\mathcal{G}^{-}_{m+1}\,\Phi_n(m|x) &= (\lambda_n - a_{m+1})\Phi_n(m|x) \\ \mathcal{G}^{-}_{m}\,\mathcal{G}^{+}_{m}\,\Phi_n(m|x) &= (\lambda_n - a_m)\Phi(m|x) \end{aligned}\right\} \quad (I-6)$$

de tal forma que sean equivalentes a la ecuación modificada de Sturm-Liouville:

$$\left[V_m(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\right]\Phi_n(m|x) = \lambda_n \Phi_n(m|x)$$

Sumando y restando las ecuaciones (I-6) (reduciendo m en la primera a $m-1$) y comparando con la correspondiente diferencia y suma para la ecuación con V_m tenemos que

$$\frac{d\mu_m}{dx} = \frac{1}{2}\left[V_{m-1}(x) - V_m(x)\right] \;;\; \mu_m^2 + a_m = \frac{1}{2}\left[V_{m-1}(x) + V_m(x)\right]$$

si consideramos λ independiente de m . Como a_m se supone independiente de x , podemos diferenciar la segunda ecuación y substituir en la primera, obteniendo

$$\left.\begin{aligned} \mu_m(x) &= \frac{1}{2}\left[(V'_{m-1} + V'_m)/(V_{m-1} - V_m)\right] \\ a_m &= \frac{1}{2}(V_{m-1} + V_m) - \mu_m^2 \end{aligned}\right\} \quad (I-7)$$

De tal manera que la ecuación modificada de Sturm-Liouville es, - efectivamente, equivalente al par de ecuaciones factorizadas (I-6) con μ_m y a_m relacionadas con el potencial V_m por las ecuaciones (I-7).

Es claro que no para cualquier potencial V_m es posible la factorización; cuando V_m permite la factorización, con a_m función de m. pero independiente de X , entonces los eigenvalores son independientes de m .

cuando $a_{m+1} > a_m$; $\lambda_n = a_{n+1}$; $n = m, m+1, m+2, \dots$

$$\Phi_n(n|x) = \int_a^b \left[\exp\left(2\int \mu_{n+1}\,dx\right)dx\right]^{-\frac{1}{2}} e^{\int \mu_{n+1}(x)\,dx}$$

$$\Phi(m|x) = \frac{1}{\sqrt{a_{n+1} - a_{m+1}}}\left[\mu_{m+1}(x) + \left(\frac{d}{dx}\right)\right]\Phi_n(m+1|x)$$

$$\int_a^b \Phi_n(m|x)\,\Phi_{n'}(m|x)\,dx = \delta_{nn'}$$

cuando $a_{m+1} < a_m$; $\lambda_n = a_n$; $n = m, m-1, m-2, \dots$

$$\Phi_n(n|x) = \left[\int_a^b \exp\left(-2\int \mu_n\,dx\right)dx\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\int \mu_n(x)\,dx}$$

$$\Phi_n(m|x) = \frac{1}{\sqrt{a_n - a_m}}\left[\mu_m(x) - \left(\frac{d}{dx}\right)\right]\Phi_n(m-1|x)$$

Φ_n es un conjunto ortonormal.

Los diferentes tipos de funciones V que permiten la factorización se obtienen determinando aquellas funciones u_m que satisfacen,

$$u_{m+1}^2 - u_m^2 + \frac{d}{dx}u_{m+1} + \frac{d}{dx}u_m = a_m - a_{m+1}$$

para las que a_m es independiente de X . La correspondiente función V para la ecuación original es

$$V_m(x) = u_m^2(x) - \frac{d}{dx}u_m(x) + a_m = u_{m+1}^2(x) + \frac{d}{dx}u_{m+1}(x) + a_{m+1}$$

El caso trivial es cuando u_m es independiente de X; entonces $a_m = -u_m^2$ y $V_m = 0$, las eigenfunciones son las funciones trigonométricas.

Otras posibilidades son :

$$u_m = v(x) + m\,w(x)$$

donde, para que a_m sea independiente de X , debemos tener que $v' + vw =$ constante; $w^2 + w' = cte$

$$u_m = \frac{1}{m}y(x) + m\,w(x)$$

donde se debe tener que $y = cte$ y $w^2 + w' = cte.$
Cualquier otra elección de la dependencia de m y x no permite que a_m sea independiente de X .

Resolviendo estas ecuaciones para v, w e y obtenemos las siguientes formas específicas para $u_m(x)$, a_m y $V_m(x)$

(A) $u_m = (m+c)b\cot[b(x+p)] + d\csc[b(x+p)]$; $a_m = b^2(m+c)^2$

$$V_m = \left\{b^2(m+c)(m+c+1)+d^2+2bd(m+c+\tfrac{1}{2})\cos[b(x+p)]\right\}\csc^2[b(x+p)]$$

que por medio de transformación de variables y de acuerdo a la selección de valores de las constantes b, c, d y p se obtienen las funciones esfericas, armónicas y otras eigenfunciones relacionadas con la función hipergeométrica.

(B) $u_m = de^{bx} - m - c$; $a = b^2(m+c)^2$

$$V_m = -d^2e^{2bx} + 2bd(m+c+\tfrac{1}{2})e^{bx}$$

que por transformación se obtienen las funciones de Laguerre y otras eigenfunciones relacionadas con la función hipergeométrica confluyente.

(C) $u_m = (m+c)(1/x) + \frac{1}{2}bx$; $a_m = -2bm + \frac{1}{2}b$

$$V_m = -(m+c)(m+c+1)(1/x)^2 - \tfrac{1}{4}b^2x^2 + b(m-c)$$

también llevando a funciones hipergeométricas confluyentes

(D) $u_m = bx + d$; $a_m = -2bm$

$$V_m = -(bx+d)^2 + b(2m+1)$$

resultando en una generalización de los polinomios de Hermite.

(E) $$u_m = ma\cot[b(x+p)] + (q/m) \; ; \; b^2m^2 - (q^2/m^2) = a_m$$

$$V_m = -m(m+1)b^2\csc^2[b(x+p)] - 2bq\cot[b(x+p)]$$

relacionado con la función hipergeométrica .

(F) $$u_m = (m/x) + (q/m) \; ; \; a_m = -(q/m)^2$$

$$V_m = -(2q/x) - m(m+1)/x^2$$

resultando los polínomios de Laguerre .

Cuando la forma de V no permite la factorización, el problema de hallar los eigenvalores y eigenfunciones de la ecuación modificada de Sturm-Liouville no es soluble analíticamente de manera general y se debe recurrir a alguna de las diversas técnicas empleadas en la solución de la ecuación de Schroedinger en la Mecánica Cuántica si se quiere seguir adelante.

En particular, cuando se desea conocer la energía del estado base (i.e. el eigenvalor más pequeño) el método variacional ha demostrado ser muy poderoso si la elección de la función de prueba es la adecuada. En principio, como ya se mencionó, tomando un conjunto completo de eigenfunciones se puede generar una representación de "mínimos cuadrados" de cualquier función continua por pedazos y con ello el problema quedaría resuelto. Sin embargo, si el método va a ser operativo, la función de prueba elegida no debe contener un número infinito de sumandos. Por ello, dependiendo de la forma específica de V y las condiciones a la frontera, se puede tomar como función de prueba una suma finita de polinomios de alguna de las familias de polinomios ortogonales con diversos parámetros y, aprovechando las propiedades de éstos, obtener una representación aproximada de la solución en términos de un número reducido de fun--

ciones conocidas. Cuando se sigue este procedimiento, el problema al que uno se enfrenta es el de calcular los llamados "elementos - de matriz" y el propósito de esta tesis es el de tratar de generar fórmulas de recurrencia para poder realizar dichos cálculos de forma sistemática y relativamente simple. Para tal fin, en el siguiente capítulo se exponen las propiedades generales de los polinomios ortogonales incluyendo el proceso de su generación. Con ellas, en - el capítulo tres se escriben fórmulas de recurrencia para ciertas - integrales (los elementos de matriz) y se discuten los casos particulares.

Finalmente, en el capítulo 4, se presenta el esquema - general del algoritmo para el cálculo numérico de dichas integra-- les, un ejemplo de su aplicación y las conclusiones generales del- trabajo.

CAPITULO II

PROPIEDADES GENERALES

PROPIEDADES GENERALES

Consideremos el conjunto $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de todos los polinomios de coeficientes y dominio en los $\mathbb{R}$ y definamos el producto interior para dos elementos de dicho conjunto como :

$$(P_n , P_m)_w \equiv \int_a^b w(x) P_n(x) P_m(x) \, dx \qquad \text{(II-1)}$$

Esta relación define, en realidad, una familia de productos interiores de acuerdo a las distintas elecciones de la función de peso $w(x)$ y los parametros a y b .

Sí $(P_n , P_m) = 0$ decimos que P_n y P_m son ortogonales.

Fijémonos ahora, en aquellos conjuntos de polinomios que satisfagan la siguiente condición :

$$(P_n, P_m)_w = C_n \delta_{n,m} \qquad \text{(II-2)}$$

Dónde C_n son las constantes de Normalización y $\delta_{n,m}$ la delta de Kronecker.

Diremos, entonces, que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de polinomios ortogonales con respecto a $w(x)$.

El conjunto de potencias de x, $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ pero no es una familia ortogonal. Sin embargo a partir de él se puede, utilizando el proceso de Gram-Schmidt, generar una familia de polinomios ortogonales. Este proceso se ilustra en el siguiente teorema cuya demostración, aunque es estandar, se incluye por razones de autoconsistencia.

Proceso de Gram-Schmidt

Junto con el proceso de Gram-Schmidt, se demuestran algunas propiedades en el siguiente teorema:

Teorema de la ortogonalización

Sea $x_1, x_2, \ldots$ una secuencia, finita o infinita, de elementos en un espacio Euclideano V y llamémosle $L(x_1, \ldots, x_k)$ al espacio generado por los primeros k elementos. Existe, entonces, una secuencia de elementos $y_1, y_2, \ldots$ en V tal, que para cada k se cumple que :

(a) y_k es ortogonal a cada elemento delsubespacio $L(y_1, \ldots, y_{k-1})$

(b) El subespacio generado por $y_1, \ldots, y_k$ es el mismo que el generado por $x_1, \ldots, x_k$

$$L(y_1, \ldots, y_k) = L(x_1, \ldots, x_k)$$

(c) Sí $y_1', y_2', \ldots$ es una secuencia de elementos de V que satisface (a) y (b) entonces, para cada k existe un escalar C_k tal que :

$$y_k' = C_k y_k$$

Demostración: la construcción de los elementos $y_1, y_2, \ldots$ se hace por inducción.

Hagamos $y_1 = x_1$. Supongamos que hemos construído los ele-- mentos $y_1, y_2, \ldots, y_r$ tales que satisfacen (a) y (b).

Definimos y_{r+1} por la ecuación

$$y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} a_i y_i \qquad \text{(II-3)}$$

donde las $a_1, \ldots, a_r$ son escalares a determinar. Para $j \leq r$ el producto interior de y_{r+1} con y_j viene dado por

$$\begin{aligned}(y_{r+1}, y_j) &= (x_{r+1}, y_j) - \sum_{i=1}^{r} a_i (y_i, y_j) \\ &= (x_{r+1}, y_j) - a_j (y_j, y_j)\end{aligned}$$

Sí $y_j \neq 0$, hacemos que y_{r+1} sea ortogonal a y_j tomando

$$a_j = \frac{(x_{r+1}, y_j)}{(y_j, y_j)} \qquad \text{(II-4)}$$

Sí $y_j = 0$, entonces y_{r+1} es ortogonal a y_j para cualquier j y por lo tanto y_{r+1} es ortogonal a cada elemento del subespacio

$$L(y_1, \ldots, y_r)$$

Esto demuestra el punto (a)

Supongamos ahora como hipotesis de inducción que

$$L(y_1,\dots,y_r) = L(x_1,\dots,x_r)$$

Entonces $y_1,\dots, y_r$ están en $L(x_1,\dots,x_r)$ y por lo tanto están también en $L(x_1,\dots,x_{r+1})$ .Por otro lado y_{r+1} es una combinación lineal de dos elementos de $L(x_1,\dots,x_{r+1})$

Por lo tanto,

$$L(y_1,\dots,y_{r+1}) \subseteq L(x_1,\dots,x_{r+1})$$

En la ecuación (II-3) se ve que X_{r+1} es una combinación lineal de los elementos de $L(y_1,\dots,y_{r+1})$ y concluímos que

$$L(x_1,\dots,x_{r+1}) \subseteq L(y_1,\dots,y_{r+1})$$

que termina la prueba de (b).

Supongamos que, en el inciso c) para k = r se cumple $y'_r = c_r y_r$ (el caso k= 1 es trivial). Consideramos el elemento y'_{r+1}. (b) nos garantiza que este elemento pertenece a $L(y_1,\dots,y_{r+1})$ y por lo tanto podemos escribir :

$$y'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1}$$

donde $z_r \in L(y_1,\dots,y_r)$ .En virtud de (a) y'_{r+1} y $c_{r+1} y_{r+1}$ son ortogonales a z_r y por lo tanto su diferencia también lo es.

Es decir z_r es ortogonal a sí mismo, o equivalentemente $z_r = 0$
Esto completa la prueba.

Substituyendo (II-4) en (II-3) obtenemos la siguiente fórmula recursiva.

$$y_1 = x_1$$

$$y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{II-5}$$

que describe el proceso de Gram-Schmidt.

Así pués, a partir de $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$, siguiendo el proceso de Gram-Schmidt, se construye la familia de polinomios ortogonales $\{P_i\}_{i=0}^{n}$

Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio generado por $\{P_i\}_{i=0}^{n}$. Consideremos el polinomio $xP_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$. Es claro, por la forma como se definió el producto interior, que

$$(P_m, xP_n) = (xP_m, P_n) \tag{II-6}$$

En virtud del inciso (a) del teorema anterior

$$(P_m, xP_n) = 0 \quad \text{para} \quad n > m+1 \tag{II-7}$$

Como $xP_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$ entonces $xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i P_i(x)$

NOMBRE	SIMBOLO	INTERVALO	PESO	NORMALIZACION
JACOBI	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ ,\ \alpha,\beta>-1$	$(-1,1)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$
GEGENBAUER	$C_n^{\gamma}(x)\ ,\ \gamma>-\frac{1}{2}$	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{\pi\,2^{1-2\gamma}\Gamma(n+2\gamma)}{n!\,(n+\gamma)[\Gamma(\gamma)]^2}$ $\gamma\neq 0$ $\dfrac{2\pi}{n^2}$ $\gamma=0$
CHEBYSHEV	$T_n(x)$	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\pi/2$ $n\neq 0$ π $n=0$
LEGENDRE	$P_n(x)$	$(-1,1)$	1	$\dfrac{2}{2n+1}$
LAGUERRE	$L_n^{\alpha}(x)\ ,\ \alpha>-1$	$(0,\infty)$	$x^{\alpha}e^{-x}$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$
HERMITE	$H_n(x)$	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$2^n\,n!\,\sqrt{\pi}$

TABLA II-I Polinomios Ortogonales Clásicos

Haciendo el producto interior con P_j en ambos miembros de la igualdad obtenemos

$$(x P_n, P_j) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i (P_i, P_j) = a_j C_j \qquad \text{(II-8)}$$

Si hacemos que $n > j+1$, es decir, para $j = 0, 1, \ldots, n-2$ y aplicamos el resultado (II-7) en (II-8), se sigue que

$$(x P_n, P_j) = 0$$

y por lo tanto

$$a_j = 0$$

$$\therefore \quad x P_n(x) = \sum_{i=n-1}^{n+1} a_i P_i(x) \qquad \text{(II-9)}$$

Desarrollando y agrupando términos, (II-9) se puede expresar - como :

$$P_{n+1}(x) = (A_n + B_n x) P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) \qquad \text{(II-10)}$$

Esta relación es conocida como la primera fórmula de Christoffel Darboux. Los valores de los parámetros A_n, B_n y C_n

dependen, en general, de n y se muestran en la tabla II-II.

Sea $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios. Decir que se trata de polinomios ortogonales es equivalente a pedir que para $m < n$

$$(x^m, P_n) = 0$$

ya que $P_m \in \mathcal{P}_m$ que es generado por $\{x^l\}_{l=0}^{m}$

Es decir para $m < n$

$$(x^m, P_n) = 0 \iff (P_m, P_n) = 0 \qquad \text{(II-11)}$$

Veamos ahora la cuestión de la ortogonalidad a través de la función de peso.

Consideremos una familia de polinomios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ que cumple con

$$\omega(x) P_n(x) = K_n \frac{d^n}{dx^n} g_n(x) \qquad \text{(II-12)}$$

Para alguna función $g(x)_n$ una constante K_n y una función de peso $\omega(x)$. Entonces,

$$(x^k, P_n) = \int_a^b x^k P_n(x)\, \omega(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x^k \frac{d^n}{dx^n} g_n(x)\, dx$$

	A_n	B_n	C_n	P_0	P_1
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}$	$\dfrac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}$	$-\dfrac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}$	1	$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)x+\frac{\alpha-\beta}{2}$
$C_n^{\gamma}(x)$	0	$\dfrac{2(n+\gamma)}{n+1}$	$-\dfrac{2\gamma+n-1}{n+1}$	1	$2\gamma x$ $C_1^0(x)=2x$
$T_n(x)$	0	2	-1	1	x
$P_n(x)$	0	$\dfrac{2n+1}{n+1}$	$-\dfrac{n}{n+1}$	1	x
$L_n^{\alpha}(x)$	$\dfrac{2n+\alpha+1}{n+1}$	$-\dfrac{1}{n+1}$	$-\dfrac{n+\alpha}{n+1}$	1	$-x+\alpha+1$
$H_n(x)$	0	2	$-2n$	1	$2x$

TABLA II-II Coeficientes de la primera fórmula de Christoffel-Darboux

Integrando por partes

$$\int_a^b x^k \frac{d^n}{dx^n} g_n(x)\,dx = x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_n(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}(x^k)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_n(x)\,dx$$

$$= \\ \vdots$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(x^k)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}} g_n(x)\Big|_a^b +$$

$$+ (-1)^i \int_a^b \frac{d^m}{dx^m}(x^k)\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} g_n(x)\,dx$$

Para $k = m-1 < n$ la integral en el segundo miembro de la ecuación, se anula y si suponemos además que

$$X^{k-i+1}\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} g_n(x)\Big|_a^b = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{II-13}$$

Entonces tendremos que para $k < n$

$$(x^k, P_n) = 0$$

y por (II-11)

$$(P_k, P_n) = 0$$

Por lo tanto $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de polinomios ortogonales.

Para satisfacer (II-13), $g_n(x)$ debe tener raices en $x = a$ y $x = b$ de multiplicidad mayor o igual que n

Escojamos $g_n(x)$ como

$$g_n(x) = h(x)\left[S(x)\right]^n \quad \text{con} \quad S(x) = c(x-a)(b-x) \qquad \text{(II-14)}$$

Si hacemos $n = 0$ en (II-12) obtenemos

$$w(x) P_0 = K_0 h(x)$$

De tal forma que escogemos $h(x) = w(x)$

Si hacemos $n = 1$ en (II-12) tenemos

$$w(x) P_1(x) = K_1 \frac{d}{dx}\left[w(x) S(x)\right] = K_1\left[w'(x) S(x) + w(x) S'(x)\right]$$

$$\therefore \quad P_1(x) = K_1\left[\frac{w'(x)}{w(x)} S(x) + S'(x)\right]$$

Como $P_1(x)$ es un polinomio de primer grado

$$\frac{w'(x)}{w(x)} S(x) + S'(x) = Ax + B \qquad \text{(II-15)}$$

donde A y B son constantes y $A \neq 0$

Despejando $\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}$ de (II-14) obtenemos

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{Ax+B-S'(x)}{S(x)} = \frac{(A+2c)x+B-c(a+b)}{c(x-a)(b-x)} = \frac{\beta}{x-a} - \frac{\alpha}{b-x}$$

con $\beta = \frac{aA+B}{c(b-a)} - 1$, $\alpha = \frac{bA+B}{c(b-a)} - 1$

Resolviendo para $\omega(x)$

$$\omega(x) = \gamma\,(b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}$$

con $\gamma > 0$, $\alpha, \beta > -1$

Cuando $\gamma = 1 = b = -a$ es la función de peso para los polinomios de Jacobi $\left\{ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$

Cuando b es infinito, definimos entonces $S(x)$ en (II-14) como

$$S(x) = d\,(x-a)$$

Analogamente, se sigue a partir de (II-15) que

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{Ax+B-d}{d(x-a)} = \frac{\beta'}{x-a} - \alpha'$$

con $\beta' = \frac{aA+B}{d} - 1$, $\alpha' = -\frac{A}{d}$

Resolviendo para $\omega(x)$

$$\omega(x) = \gamma'(x-a)^{\beta'} e^{-\alpha' x}$$

Para $a=0,\ \alpha'=1=\gamma'$, $\omega(x)$ es la función de peso para los polinomios de Laguerre.

Cuando a y b son infinitos, se define $S(x)$ para (II-14). como

$$S(x) = e$$

Substituyendo en (II-15) y despejando tenemos

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{Ax+B}{e} = -\alpha'' x + \beta''$$

con $\alpha'' = -\dfrac{A}{e}$, $\beta'' = \dfrac{B}{e}$

y resolviendo para $\omega(x)$

$$\omega(x) = \gamma'' e^{-\frac{1}{2}\alpha'' x^2 + \beta'' x}$$

que para $\alpha''=2$, $\beta''=0$ y $\gamma''=1$ es la función de peso para los polinomios de Hermite.

La ecuación (II-12) se conoce como la fórmula de Rodrigues y los coeficientes que involucra se muestran en la tabla II-III.

El desarrollo de la fórmula de Rodrigues nos permite encontrar las formas explicitas de los polinomios ortogonales clásicos que se -- muestran en la tabla II-IV.

Por otro lado, como $S(x) \in \mathcal{P}_2$, $S(x)\frac{d}{dx}P_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$ y por lo tanto

$$S(x) = u + vx + wx^2$$

$$S(x)\frac{d}{dx}P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i P_i(x) \qquad \text{(II-16)}$$

NOMBRE	SIMBOLO	K_n	$w(x)$	$S(x)$
JACOBI	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$1-x^2$
GEGENBAUER	$C_n^{\gamma}(x)$	$\frac{(-1)^n \Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\gamma)}{2^n n!\, \Gamma(2\gamma)\Gamma(\gamma+n+\frac{1}{2})}$	$(1-x^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}$	$1-x^2$
CHEBYSHEV	$T_n(x)$	$\frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})}$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$1-x^2$
LEGENDRE	$P_n(x)$	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	1	$1-x^2$
LAGUERRE	$L_n^{\alpha}(x)$	$\frac{1}{n!}$	$x^\alpha e^{-x}$	x
HERMITE	$H_n(x)$	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1

TABLA II-III Coeficientes de la fórmulo de Rodrígues

NOMBRE	FORMA EXPLICITA
JACOBI	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+\alpha}{i} \binom{n+\beta}{n-i} (x+1)^i (x-1)^{n-i}$
GEGENBAUER	$C_n^{\gamma}(x) = \frac{2^n}{\Gamma(\gamma)} \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i \Gamma(\gamma+n-i)}{4^i \, i! \, (n-2i)!} x^{n-2i}$
CHEBYSHEV	$T_n(x) = 2^{n-1} n \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i (n-i-1)!}{4^i \, i! \, (n-2i)!} x^{n-2i}$
LEGENDRE	$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{n} x^{n-2i}$
LAGUERRE	$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n+\alpha}{n-i} x^i$
HERMITE	$H_n(x) = 2^n n! \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i}{4^i \, i! \, (n-2i)!} x^{n-2i}$

TABLA II-IV Forma explícita de los polinomios ortogonales clásicos.

con $a_i = \frac{1}{C_i}(P_i, SP'_n)$; la prima denota derivada

$$(P_i, SP'_n) = \int_a^b P_i(x) S(x) P'_n(x) \omega(x)\, dx$$

$$= P_i(x) S(x) P_n(x) \omega(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(P_i(x) S(x) \omega(x)\right) P_n(x)\, dx$$

$$= - \int_a^b \left[\frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx}\left(\omega(x) S(x)\right) P_i(x) + S(x) P'_i(x)\right] P_n(x) \omega(x)\, dx$$

para $i < n-1$

$$\frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx}\left(\omega(x) S(x)\right) P_i(x) + S(x) P'_i(x) \in \mathcal{P}_\ell \text{ con } \ell < n$$

y por lo tanto la integral se anula

Para $i = n-1$

$$(P_{n-1}, SP'_n) = - P_{n-1,n-1}\left[\frac{1}{K_1} P_{11} + (n-1)\omega\right](x^n, P_n) \qquad \text{(II-17)}$$

Así pués, para $i < n-1$, las a_i en (II-16) son cero y

$$S(x) \frac{d}{dx} P_n(x) = a_{n-1} P_{n-1}(x) + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x) \qquad \text{(II-18)}$$

Despejando, P_{n-1} y P_{n+1} de la primera fórmula de Christoffel-Darboux (II-10) y substituyendo en (II-17) obtenemos

$$S(x)\frac{d}{dx}P_u(x) = \frac{a_{u-1}}{c_u}\Big[P_{u+1}(x) - (A_u + B_u x)P_u(x)\Big] + a_u P_u(x) + a_{u+1}P_{u+1}(x) \qquad \text{(II-19)}$$

$$S(x)\frac{d}{dx}P_u(x) = a_{u-1}P_{u-1}(x) + a_u P_u(x) + a_{u+1}\Big[(A_u + B_u x)P_u(x) + c_u P_{u-1}(x)\Big] \qquad \text{(II-20)}$$

Reagrupando llegamos a :

$$\left[\alpha_u^{\uparrow} + \beta_u^{\uparrow} - S(x)\frac{d}{dx}\right]P_u(x) = \gamma^{\uparrow}P_{u+1}(x) \qquad \text{(II-21)}$$

$$\left[\alpha_u^{\downarrow} + \beta_u^{\downarrow} + S(x)\frac{d}{dx}\right]P_u(x) = \gamma^{\downarrow}P_{u-1}(x) \qquad \text{(II-22)}$$

Haciendo el producto escalar con P_{u-1} en ambos miembros de la igualdad (II-20)

$$\beta_u^{\uparrow}\left(P_{u-1}, xP_u\right) - \left(P_{u-1}, SP_u'\right) = 0$$

Utilizando el resultado (II-17) llegamos a :

$$\beta_u^{\uparrow}\left(P_{u-1}, xP_u\right) - \left(P_{u-1}, SP_u'\right) = \beta_u^{\uparrow}P_{u-1,u-1}\left(x^u, P_u\right) - P_{u-1,u-1}\left[\frac{1}{K_1}P_{11} + (u-1)\omega\right]\left(x^u, P_u\right)$$

$$\beta_u^{\uparrow} = -\left[\frac{1}{K_1}P_{11} + (u-1)\omega\right]$$

$$= -\left[\frac{P_{11}}{K_1} + \frac{u-1}{2}S''\right] \qquad \text{(II-23)}$$

Por otro lado, equiparando los coeficientes de X^{u+1} en(II-21) se tiene que

$$\beta_u^{\uparrow} P_{u,u} - \omega u P_{u,u} = \gamma_u^{\uparrow} P_{u+1,u+1} \qquad \text{(II-24)}$$

Acoplando (II-23) y (II-24) se llega a :

$$\gamma_u^{\uparrow} = \frac{P_{u,u}}{P_{u+1,u+1}} \left(\beta_u^{\uparrow} - \omega n \right)$$

$$= -\frac{1}{B_u} \left(\frac{P_{11}}{K_1} + \left(u - \tfrac{1}{2}\right) S'' \right) \qquad \text{(II-25)}$$

Igualando los coeficientes de X^u en (II-21) tenemos

$$\alpha_u^{\uparrow} P_{u,u} + \beta_u^{\uparrow} P_{u,u-1} - n v P_{u,u} - (n-1)\omega P_{u,u-1} = \gamma_u^{\uparrow} P_{u+1,u}$$

Utilizando (II-24), (II-25) se llega a

$$\alpha_u^{\uparrow} = -\frac{A_u}{B_u} \left(\frac{P_{11}}{K_1} + \left(u - \tfrac{1}{2}\right) S'' \right) - \frac{P_{u,u-1}}{2 P_{u,u}} S'' + u S'(0) \qquad \text{(II-26)}$$

Analogamente, igualando los coeficientes de X^{u+1} en (II-22) tenemos

$$\beta_u^{\downarrow} P_{u,u} + \omega u P_{u,u} = 0$$

$$\beta_u^{\downarrow} = -\omega u = -\tfrac{1}{2} u S'' \qquad \text{(II-27)}$$

Igualando ahora los coeficientes de la X^u en (II-22)

$$\alpha_u^{\downarrow} P_{u,u} + \beta_u^{\downarrow} P_{u,u-1} + \omega (u-1) P_{u,u-1} + v u P_{u,u} = 0$$

Es decir

$$\alpha_n^{\downarrow} = w \frac{P_{n,n-1}}{P_{n,n}} - vn = \frac{1}{2} S'' \frac{P_{n,n-1}}{P_{n,n}} - n S'(0) \qquad \text{(II-28)}$$

Ahora tomando el producto escalar con $P_{n-1}(x)$ en (II-22) obtenemos

$$\gamma_n^{\downarrow} C_{n-1} = \beta_n^{\downarrow} (P_{n-1}, xP_n) + (P_{n-1}, sP_n')$$

$$= \beta_n^{\downarrow} P_{n-1,n-1} (x^n, P_n) - P_{n-1,n-1} \left[\frac{P_{11}}{K_1} + (n-1) w \right] (x^n, P_n)$$

Y por lo tanto:

$$\gamma^{\downarrow} = - \frac{P_{n-1,n-1}}{P_{n,n}} \frac{C_n}{C_{n-1}} \left[\frac{P_{11}}{K_1} + (2n-1) w \right]$$

$$= \frac{C_n}{B_n} \left[\frac{P_{11}}{K_1} + (n - \tfrac{1}{2}) S'' \right] \qquad \text{(II-29)}$$

Las expresiones correspondientes de $\alpha_n^{\uparrow}$, $\beta_n^{\uparrow}$, $\gamma_n^{\uparrow}$, $\alpha_n^{\downarrow}$, $\beta_n^{\downarrow}$ y $\gamma_n^{\downarrow}$ para los polinomios clásicos se muestran en la tabla II-V.

	$\alpha_n^{\uparrow}$	$\beta_n^{\uparrow}$	$\gamma_n^{\uparrow}$	$\alpha_n^{\downarrow}$	$\beta_n^{\downarrow}$	$\gamma_n^{\downarrow}$
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta} + \frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$n+\alpha+\beta+1$	$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$	$\frac{n(\beta-\alpha)}{2n+\alpha+\beta}$	n	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}$
$C_n^{\gamma}(x)$	0	$n+2\gamma$	$n+1$	0	n	$n-2\gamma-1$
$T_n(x)$	0	n	n	0	n	n
$P_n(x)$	0	$n+1$	$n+1$	0	n	n
$L_n^{\alpha}(x)$	$-n-\alpha-1$	1	$-n-1$	$-n$	0	$-n-\alpha$
$H_n(x)$	0	2	1	0	0	$2n$

TABLA II-V Operadores ascendentes y descendentes

CAPITULO III

FORMULAS DE RECURRENCIA

FORMULAS DE RECURRENCIA

Definimos :

$$I_l(n,m) \equiv \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^l \chi_n \Psi_m \, dx \qquad \text{(III-1)}$$

con

$$\chi_n \equiv N_n P_n(d(x-a_0))\, \omega^*(d(x-a_0)) \qquad \text{(III-2)}$$

$$\Psi_m \equiv M_m P_m(\tau x)\, \omega^*(\tau x) \qquad \text{(III-3)}$$

Donde P_n y P_m pertenecen a alguna de las familias de polinomios orotogonales clásicos. $\omega^*(x)$ se define como

$$\omega^*(x) = [\omega(x)]^{1/2}$$

Siendo $\omega(x)$ la función de peso. N_n y M_m se definen como:

$$N_n = \left[\frac{d}{C_n}\right]^{1/2} \; ; \; M_m = \left[\frac{\tau}{C_m}\right]^{1/2}$$

donde C_n y C_m son los coeficientes de normalización. δ_1 y δ_2 son tales que (δ_1, δ_2) coincida con el intervalo de definición de la familia de polinomios ortogonales en cuestión.

A partir de la primera fórmula de Christoffel-Darboux (II-10), obtenemos las siguientes relaciones recursivas :

$$\chi_n = \frac{N_n}{N_{n-1}}\left(A_{n-1} + B_{n-1} d(x-a_0)\right)\chi_{n-1} + \frac{N_n}{N_{n-2}} C_{n-1} \chi_{n-2} \qquad \text{(III-4)}$$

$$\Psi_m = \frac{M_m}{M_{m-1}}\left(A_{m-1} + B_{m-1} \tau x\right)\Psi_{m-1} + \frac{M_m}{M_{m-2}} C_{m-1} \Psi_{m-2} \qquad \text{(III-5)}$$

$$x\chi_n = \frac{1}{dB_n}\left(\frac{N_n}{N_{n+1}}\chi_{n+1} - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}}\chi_{n-1}\right) + \left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n}\right)\chi_n \qquad \text{(III-6)}$$

$$x\Psi_m = \frac{1}{\xi B_m}\left(\frac{M_m}{M_{m+1}}\Psi_{m+1} - C_m\frac{M_m}{M_{m-1}}\Psi_{m-1} - A_m\Psi_m\right) \qquad \text{(III-7)}$$

A_n, B_n y C_n son los coeficientes de la primera fórmula de Christoffel-Darboux (ver Tabla II-II).

Las relaciones que a continuación se deducen, son el resultado de aplicaciones de las formulas recien escritas (III-4 a III-7)

$$I_\ell(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^\ell \chi_0 \Psi_n\, dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{\ell-1}\chi_0 x\Psi_n\, dx$$

$$= \frac{1}{\xi B_n}\int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{\ell-1}\chi_0\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\Psi_{n+1} - C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}\Psi_{n-1} - A_n\Psi_n\right)dx$$

$$\therefore I_\ell(0,n) = \frac{1}{\xi B_n}\left[\frac{M_n}{M_{n+1}} I_{\ell-1}(0,n+1) - C_n\frac{M_n}{M_{n-1}} I_{\ell-1}(0,n-1) - A_n I_{\ell-1}(0,n)\right] \qquad \text{(III-8a.)}$$

Analogamente:

$$I_\ell(n,0) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^\ell \chi_n \Psi_0\, dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x\chi_n x^{\ell-1}\Psi_0\, dx$$

$$= \frac{1}{dB_n}\int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{\ell-1}\Psi_0\left(\frac{N_n}{N_{n+1}}\chi_{n+1} - C_n\frac{N_n}{N_{n-1}}\chi_{n-1}\right)dx + \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{\ell-1}\Psi_0\left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n}\right)\chi_n\, dx$$

$$\therefore I_\ell(n,0) = \frac{1}{dB_n}\left[\frac{N_n}{N_{n+1}} I_{\ell-1}(n+1,0) - C_n\frac{N_n}{N_{n-1}} I_{\ell-1}(n-1,0)\right] + \left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n}\right) I_{\ell-1}(n,0)$$

(III-8b)

$$\underset{0}{I}(1,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_1 \Psi_n \, dx = N_1 M_n \int_{\delta_1}^{\delta_2} (Ax+B)\, \omega^*(d(x-a_0))\, \Psi_n \, dx$$

$$= \frac{N_1 M_n}{N_0}\left[A \underset{1}{I}(0,n) + B \underset{0}{I}(0,n) \right]$$

Haciendo $l=1$ en la ecuación (III-8a) y substituyendo en la ecuación anterior, tenemos :

$$\underset{0}{I}(1,n) = \frac{N_1 M_n}{N_0}\left[\frac{A}{\xi B_n}\left\{ \frac{M_n}{M_{n+1}} \underset{0}{I}(0,n+1) - C_n \frac{M_n}{M_{n-1}} \underset{0}{I}(0,n-1) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - A_n \underset{0}{I}(0,n) \right\} + B \underset{0}{I}(0,n) \right] \qquad \text{(III-8c)}$$

$$\underset{0}{I}(n,1) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_n \Psi_1 \, dx = N_n M_1 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_n (Ax+B)\, \omega^*(\xi x)\, dx$$

$$= \frac{N_n M_1}{M_0}\left[A \underset{1}{I}(n,0) + B \underset{0}{I}(n,0) \right]$$

Haciendo $l=1$ en la ecuación (III-8b)y substituyendo en la ecuación anterior, tenemos :

$$\underset{0}{I}(n,1) = \frac{N_n M_1}{M_0}\left[\frac{A}{d B_n}\left\{ \frac{N_n}{N_{n+1}} \underset{0}{I}(n+1,0) - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}} \underset{0}{I}(n-1,0) \right\} + \right.$$

$$\left. + \left(a_0 - \frac{A_n}{d B_n}\right) \underset{0}{I}(n,0) + B \underset{0}{I}(n,0) \right] \qquad \text{(III-8d)}$$

$$I_0(n,m) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_n \Psi_m \, dx$$

$$= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\frac{N_n}{N_{n-1}} \left(A_{n-1} + B_{n-1} d(x - a_0) \right) \chi_{n-1} + \frac{N_n}{N_{n-2}} C_{n-1} \chi_{n-2} \right] \Psi_m \, dx$$

$$= \frac{N_n}{N_{n-1}} \left(A_{n-1} - B_{n-1} d\, a_0 \right) I_0(n-1,m) + \frac{N_n}{N_{n-2}} C_{n-1} I_0(n-2,m) + \frac{N_n}{N_{n-1}} B_{n-1} d \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_{n-1} x \Psi_m \, dx$$

Por otro lado :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_{n-1} x \Psi_m \, dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_{n-1} \left[\frac{1}{\xi B_m} \left(\frac{M_m}{M_{m+1}} \Psi_{m+1} - C_m \frac{M_m}{M_{m-1}} \Psi_{m-1} - A_m \Psi_m \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{\xi B_m} \left[\frac{M_m}{M_{m+1}} I_0(n-1,m+1) - C_m \frac{M_m}{M_{m-1}} I_0(n-1,m-1) - A_m I_0(n-1,m) \right]$$

Por lo tanto:

$$I_0(n,m) = \frac{N_n}{N_{n-1}} \left(A_{n-1} - B_{n-1} d\, a_0 \right) I_0(n-1,m) + C_{n-1} \frac{N_n}{N_{n-2}} I_0(n-2,m) +$$

$$+ \frac{N_n B_{n-1} d}{N_{n-1} B_m \xi} \left[\frac{M_m}{M_{m+1}} I_0(n-1,m+1) - C_m \frac{M_m}{M_{m-1}} I_0(n-1,m-1) - A_m I_0(n-1,m) \right]$$

(III-9a.)

Analogamente:

$$I_0(n,m) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_n \Psi_m \, dx$$

$$= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\frac{M_m}{M_{m-1}} \left(A_{m-1} + B_{m-1} \xi x \right) \Psi_{m-1} + \frac{M_m}{M_{m-2}} C_{m-1} \Psi_{m-2} \right] \chi_n \, dx$$

$$I_0(n,m) = \frac{M_m}{M_{m-1}} A_{m-1} I_0(n,m-1) + \frac{M_m}{M_{m-2}} C_{m-1} I_0(n,m-2) + \frac{M_m}{M_{m-1}} B_{m-1} \xi \int_{\delta_1}^{\delta_2} \Psi_{m-1} x \chi_n \, dx$$

Por otro lado :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \Psi_{m-1} x \chi_n \, dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \Psi_{m-1} \left[\frac{1}{dB_n} \left(\frac{N_n}{N_{n+1}} \chi_{n+1} - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}} \chi_{n-1} \right) + \left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n} \right) \chi_n \right] dx$$

$$= \frac{1}{dB_n} \left[\frac{N_n}{N_{n+1}} I_0(n+1,m-1) - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}} I_0(n-1,m-1) \right] + \left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n} \right) I_0(n,m-1)$$

Por lo tanto :

$$I_0(n,m) = \frac{M_m}{M_{m-1}} A_{m-1} I_0(n,m-1) + \frac{M_m}{M_{m-2}} C_{m-1} I_0(n,m-2) +$$

$$+ \frac{M_m B_{m-1} \xi}{M_{m-1} B_n d} \left[\frac{N_n}{N_{n+1}} I_0(n+1,m-1) - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}} I_0(n-1,m-1) + \left(a_0 d B_n - A_n \right) I_0(n,m-1) \right]$$

(III-9b.)

$$\underline{I}_{\ell}(n,m) = \int_{d_1}^{\delta_2} x^{\ell} \chi_n \Psi_m dx = \int_{d_1}^{\delta_2} x^{\ell-1} x \chi_n \Psi_m dx$$

$$= \int_{d_1}^{\delta_2} x^{\ell-1} \Psi_m \left[\frac{1}{dB_n} \left(\frac{N_n}{N_{n+1}} \chi_{n+1} - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}} \chi_{n-1} \right) + \left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n} \right) \chi_n \right] dx$$

$$\underline{I}_{\ell}(n,m) = \frac{1}{dB_n} \left[\frac{N_n}{N_{n+1}} \underline{I}_{\ell-1}(n+1,m) - C_n \frac{N_n}{N_{n-1}} \underline{I}_{\ell-1}(n-1,m) \right] + \left(a_0 - \frac{A_n}{dB_n} \right) \underline{I}_{\ell-1}(n,m) \qquad \text{(III-10a)}$$

Analogamente

$$\underline{I}_{\ell}(n,m) = \int_{d_1}^{\delta_2} x^{\ell} \chi_n \Psi_m dx = \int_{d_1}^{\delta_2} x^{\ell-1} \chi_n x \Psi_m dx$$

$$= \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{\ell-1} \chi_n \left[\frac{1}{\overline{f}B_m} \left(\frac{M_m}{M_{m+1}} \Psi_{m+1} - C_m \frac{M_m}{M_{m-1}} \Psi_{m-1} - A_m \Psi_m \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{\overline{f}B_m} \left[\frac{M_m}{M_{m+1}} \underline{I}_{\ell-1}(n,m+1) - C_m \frac{M_m}{M_{m-1}} \underline{I}_{\ell-1}(n,m-1) - A_m \underline{I}_{\ell-1}(n,m) \right] \qquad \text{(III-10b)}$$

Si pudieramos calcular $\underline{I}_0(0,n)$ para cualquier n , después de m aplicaciones sucesivas de (III-9a) tendríamos:

$$\underline{I}_0(0,n) \longrightarrow \underline{I}_0(1,n-1) \longrightarrow \underline{I}_0(2,n-2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{I}_0(m,n-m) \qquad \text{(III-11)}$$

Y a partir de $I_0(m,n-m)$ generar, despues de ℓ aplicaciones sucesivas de (III-10b)

$$I_0(m,n-m) \rightarrow I_1(m,n-m-1) \rightarrow I_2(m,n-m-2) \rightarrow \cdots \rightarrow I_\ell(m,n-m-\ell) \qquad \text{(III-12)}$$

De tal forma que si se requiere el cálculo de $I_\ell(p,q)$ se debe empezar a partir de $I_0(0,n)$ con n tal que $n = p+q+\ell$

Empezando con $I_0(n,0)$ y aplicando las relaciones (III-9b) y (III-10 a) se llega a lo mismo.

El cálculo de $I_0(0,n)$,o en su caso de $I_0(n,0)$, se hace para cada polinomio en particular.

III-A - Polinomios de Jacobi

Para los polinomios de Jacobi N_n, M_m y $\omega^*(x)$ quedan:

$$N_n = \left[\frac{d\,(2n+\alpha+\beta+1)\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\right]^{1/2}$$

$$M_m = \sqrt{\frac{\xi}{d}}\,N_m$$

$$\omega^*(x) = (1-x)^{\alpha/2}(1+x)^{\beta/2}$$

En este caso no se tiene, en general, una solución analítica de $I_o(o,n)$. Desarrollemos $\omega^*(d(x-a_o))$ y $\omega^*(\xi x)$ en series de Taylor .

$$\omega^*(d(x-a_o)) = (1-d(x-a_o))^{\alpha/2}(1+d(x-a_o))^{\beta/2}$$

$$(1-d(x-a_o))^{\alpha/2} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{\alpha/2}{i}d^i(x-a_o)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}(-1)^{i+r}\binom{\alpha/2}{i}\binom{i}{r}d^i a_o^r x^{i-r} \qquad \text{(III=13)}$$

$$(1+d(x-a_o))^{\beta/2} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\beta/2}{j}d^j(x-a_o)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{j}(-1)^s\binom{\beta/2}{j}\binom{j}{s}d^j a_o^s x^{j-s} \qquad \text{(III-14)}$$

$$\omega^*(\xi x) = (1-\xi x)^{\alpha/2}(1+\xi x)^{\beta/2}$$

$$(1-\xi x)^{\alpha/2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha/2}{k}\xi^k x^k \qquad \text{(III-15)}$$

$$(1+\xi x)^{\beta/2} = \sum_{l=0}^{\infty}\binom{\beta/2}{l}\xi^l x^l \qquad \text{(III=16)}$$

En caso de que $\alpha/2$ sea entero, las series correspondientes llegan sólo hasta $\alpha/2$; lo mismo sucede si $\beta/2$ es entero. En caso de que $\alpha/2$ y/o $\beta/2$ no sean enteros, es necesario, para garantizar la convergencia en las series que :

$$|\xi| < 1 \quad ; \quad |d| < \begin{cases} \dfrac{1}{1-a_0} & \text{si } a_0 < 0 \\ \dfrac{1}{1+a_0} & \text{si } a_0 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(III-17)}$$

Si generamos $I_0(0,n)$ podemos, utilizando las fórmulas recursivas desarrolladas anteriormente, generar $I_\ell(n,m)$

$$I_0(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_0 \Psi_n dx = N_0 M_n \int_{\delta_1}^{\delta_2} P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi x)\, w^*(d(x-a_0))\, w^*(\xi x)\, dx$$

$$= \frac{N_0 M_n}{2^n} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m} (\xi x-1)^{n-m} (\xi x+1)^{m}\right] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{i} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big\{ (-1)^{i+r+s+k} d^{i+j} \cdot$$

$$\cdot\, \xi^{k+\ell} a_0^{r+s} \binom{\alpha/2}{i}\binom{i}{r}\binom{\beta/2}{j}\binom{j}{s}\binom{\alpha/2}{k}\binom{\beta/2}{\ell} x^{Ex} \Big\} dx$$

donde $Ex = i - r + j - s + k + \ell$

$$I_0(0,n) = \frac{N_0 M_n}{2^n} \sum_{m=0}^{n} \sum_{t=0}^{n-m} \sum_{u=0}^{m} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{i} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{i+r+s+k+t} d^{i+j} \xi^{k+\ell+n-t-u} a_0^{r+s} Q_T \frac{X^{ExPO}}{ExPO} \Bigg|_{\delta_1}^{\delta_2}$$

donde $Q_T = \binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}\binom{\alpha/2}{i}\binom{i}{r}\binom{\beta/2}{j}\binom{j}{s}\binom{\alpha/2}{k}\binom{\beta/2}{\ell}$, $ExPO = Ex + n - t - u + 1$

(III-18)

III-b-Polinomios de Gegenbauer

Para los polinomios de Gegenbauer N_n, M_m y $\omega^*(x)$ quedan como:

$$N_n = \left[\frac{d\, n!\,(n+\gamma)\,[\Gamma(\gamma)]^2}{\pi\, 2^{1-2\gamma}\,\Gamma(n+2\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad M_m = \sqrt{\frac{\xi}{d}}\, N_m$$

$$\omega^*(x) = (1-x^2)^{\gamma/2 - 1/4}$$

Al igual que para los polinomios de Jacobi, en general no se tiene una solución analítica para $I_0(0,n)$ .Desarrollando $\omega^*(d(x-a_0))$ y $\omega^*(\xi x)$ en series de Taylor tenemos:

$$\begin{aligned} \omega^*(d(x-a_0)) &= (1-d^2(x-a_0)^2)^{\gamma/2-1/4} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\gamma/2-1/4}{i} d^{2i}(x-a_0)^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{i+j} \binom{\gamma/2-1/4}{i}\binom{2i}{j} d^{2i} a_0^{j} x^{2i-j} \end{aligned} \qquad \text{(III-19)}$$

$$\begin{aligned} \omega^*(\xi x) &= (1-\xi^2 x^2)^{\gamma/2-1/4} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\gamma/2-1/4}{k} \xi^{2k} x^{2k} \end{aligned} \qquad \text{(III-20)}$$

Si $\gamma/2 - 1/4$ es entero, las series correspondientes llegan - hasta $\gamma/2 - 1/4$. En caso contrario, para garantizar la convergencia de las series es necario que se satisfaga (III-17).

Consideremos $I_0(0,n)$ para este caso

$$I_0(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_0 \Psi_n dx = N_0 M_n \int_{\delta_1}^{\delta_2} C_n^{\gamma}(\xi x)\, \omega^{+}(d(x-a_0))\, \omega^{*}(\xi x)\, dx$$

$$= \frac{N_0 M_n 2^n}{\Gamma(\gamma)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m \Gamma(\gamma+n-m)}{4^m\, m!\,(n-2m)!} (\xi X)^{n-2m} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{i+j+k} d^{2i} a_0^{j} \xi^{2k} \cdot$$

$$\cdot \binom{\gamma/2 - 1/4}{i} \binom{2i}{j} \binom{\gamma/2 - 1/4}{k} X^{2i-j+2k} dx$$

$$\therefore I_0(0,n) = \frac{N_0 M_n 2^n}{\Gamma(\gamma)} \sum_{m=0}^{[n/2]} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n-m)(-1)^{m+i+j+k}}{4^m\, m!\,(n-2m)!} d^{2i} a_0^{j} \xi^{n-2m} \binom{\gamma/2 - 1/4}{i} \binom{2i}{j} \binom{\gamma/2 - 1/4}{k} \left. \frac{X^{2(i+k-m)+n-j+1}}{2(i+k-m)+n-j+1} \right|_{\delta_1}^{\delta_2}$$

(III-21)

III-c - Polinomios Chebyshev

En este caso N_n, M_m y $\omega^*(x)$ quedan:

$$N_0 = \sqrt{\frac{d}{\pi}} \quad ; \quad M_0 = \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}$$

$$N_n = \sqrt{\frac{2d}{\pi}} \quad ; \quad M_m = \sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}$$

$$\omega^*(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$$

Estos polinomios son el caso particular de los polinomios de Gegenbauer para $\gamma = 0$ .Haciendo pues , $\gamma = 0$ en (III-21) y substituyendo la expresión explicita para los polinomios de Chebyshev obtenemos :

$$I_0(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_0 \psi_n \, dx = \frac{\sqrt{2d\xi}}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} T_n(\xi x) \left(1 - d^2(x-a_0)^2\right)^{-1/4} (1-\xi^2 x^2)^{-1/4} \, dx$$

$$= \frac{2^{n-1} n \sqrt{2d\xi}}{\pi} \sum_{m=0}^{[n/2]} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+i+j+k} (n-m-1)!}{4^m m! (n-2m)!} d^{2i} a_0^j \xi^{n-2m} \binom{-\frac{1}{4}}{i} \binom{2i}{j} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \left. \frac{x^{Exp}}{Exp} \right|_{\delta_1}^{\delta_2}$$

con $Exp = 2(i+k-m) + n - j + 1$ (III-22)

III-d Polinomios de Legendre

En este caso debido a la simplicidad de la función de peso $\omega^{\gamma}(x) = 1$, se tiene una solución analítica de $I_0(0,n)$

En este caso N_n, M_m son:

$$N_n = \left[\frac{d(2n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad M_m = \left[\frac{\tau(2m+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_0(0,0) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_0 \Psi_0 dx = N_0 M_0 \int_{\delta_1}^{\delta_2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{d\tau}(\delta_2 - \delta_1) \qquad \text{(III-23)}$$

$$I_0(0,1) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_0 \Psi_1 dx = N_0 M_1 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tau x dx = \frac{1}{4}\sqrt{3d\tau}(\delta_2^2 - \delta_1^2) \qquad \text{(III-24)}$$

$$I_1(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x \chi_0 \Psi_n dx = \frac{N_0 M_n}{n\tau} \int_{\delta_1}^{\delta_2} n\tau x P_n(\tau x) dx$$

Utilizando (II-22) para el caso de Legendre tenemos:

$$I_1(0,n) = \frac{N_0 M_n}{n\tau} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(n P_{n-1}(\tau x) - (1 - \tau^2 x^2) P_n'(\tau x)\right) dx$$

$$= \frac{M_n}{\tau M_{n-1}} I_0(0,n-1) - \frac{N_0 M_n}{n\tau} \int_{\delta_1}^{\delta_2} (1 - \tau^2 x^2) P_n'(\tau x) dx$$

Haciendo $u = 1 - \xi^2 x^2$ e integrando por partes tenemos:

$$\frac{N_0 M_n}{n\xi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}(1-\xi^2x^2)P_n'(\xi x)\,dx = \frac{1-\xi^2x^2}{n\xi^2}\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_1}^{\delta_2} + \frac{2N_0M_n}{n}\int_{\delta_1}^{\delta_2} x P_n(\xi x)\,dx$$

$$\therefore\ I_1(0,n) = \frac{M_n}{\xi M_{n-1}} I_0(0,n-1) - \frac{1-\xi^2x^2}{\xi^2 n}\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_1}^{\delta_2} - \frac{2}{n} I_1(0,n)$$

$$\therefore\ I_1(0,n) = \frac{n}{n+2}\left[\frac{1-\xi^2x^2}{\xi^2 n}\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \frac{M_n}{\xi M_{n-1}} I_0(0,n-1)\right]$$

(III-25)

Haciendo $l = 1$ en (III-8a) e igualando en (III-25)

$$\frac{1}{\xi B_n}\left[\frac{M_n}{M_{n+1}}I_0(0,n+1) - C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1) - A_n I_0(0,n)\right] = \frac{n}{n+2}\left[\frac{1-\xi^2x^2}{\xi^2 n}\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \frac{M_n}{\xi M_{n-1}}I_0(0,n-1)\right]$$

Reagrupando y teniendo en cuenta que $A_n = 0$ para los polinomios de Legendre tenemos:

$$I_0(0,n+1) = \frac{M_{n+1}}{M_n}\left[\frac{n\xi B_n}{n+2}\left\{\frac{1-\xi^2x^2}{\xi^2 n}\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \frac{M_n}{\xi M_{n-1}}I_0(0,n-1)\right\} + C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1)\right]$$

(III-26)

III- E- Polinomios de Laguerre

Para estos polinomios N_n, M_m y $\omega^*(x)$ quedan:

$$N_n = \left[\frac{\alpha\, n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad M_m = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\, N_m$$

$$\omega^*(x) = x^{\alpha/2} e^{-\frac{x}{2}}$$

Para $\alpha = 0$ tenemos:

$$I_0(0,0) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \chi_0 \psi_0\, dx = N_0 M_0 \int_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)x - \alpha a_0]}\, dx$$

$$= -\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha+\gamma} e^{z} \Big|_{a_1}^{a_2} \quad ; \quad \text{con } a_i = -\tfrac{1}{2}\left[(\alpha+\gamma)\delta_i - \alpha a_0\right] \qquad \text{(III-27)}$$

$$I_1(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x \chi_0 \psi_n\, dx = N_0 M_n \int_{\delta_1}^{\delta_2} x\, L_n(\gamma x)\, e^{-\frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)x - \alpha a_0]}\, dx$$

Haciendo $u = x L_n(\gamma x)$ e integrando por partes :

$$I_1(0,n) = N_0 M_n \left[\frac{2}{\alpha+\gamma}\left\{ x L_n(\gamma x) e^{-\frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)x - \alpha a_0]}\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(L_n(\gamma x) + \gamma x L_n'(\gamma x)\right) e^{-\frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)x - \alpha a_0]}\, dx \right\}\right]$$

Utilizando (II-22) para el caso de Laguerre tenemos:

$$I_1(0,n) = \frac{2 N_0 M_n}{\alpha+\gamma}\left[x L_n(\gamma x) e^{-\frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)x - \alpha a_0]}\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(L_n(\gamma x) + n L_n(\gamma x) - L_{n-1}(\gamma x)\right) e^{-\frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)x - \alpha a_0]}\, dx \right\}\Bigg]$$

$$I_1(0,n)=\frac{2}{d+\xi}\left[x\chi_0\psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1}+(n+1)I_0(0,n)-n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1)\right] \qquad \text{(III-28)}$$

Haciendo $\ell=1$ en (III-8a) e igualando con (III-28) tenemos :

$$\frac{2}{d+\xi}\left[x\chi_0\psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1}+(n+1)I_0(0,n)-n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1)\right]=\frac{1}{\xi B_n}\left[\frac{M_n}{M_{n+1}}I_0(0,n+1)-C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1)-A_nI_0(0,n)\right]$$

$$\therefore\ I_0(0,n+1)=\frac{M_{n+1}}{M_n}\left[\frac{2\xi B_n}{d+\xi}\left\{x\chi_0\psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1}+(n+1)I_0(0,n)-n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1)\right\}+C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}I_0(0,n-1)+A_nI_0(0,n)\right]$$

para α real

$$I_0(0,n)=\int_{\delta_1}^{\delta_2}\chi_0\psi_n dx=N_0M_n\int_{\delta_1}^{\delta_2}L_n^{\alpha}(\xi x)\,d^{\alpha/2}(x-a_0)^{\alpha/2}\xi^{\alpha/2}x^{\alpha/2}e^{-\frac{1}{2}[(d+\xi)x-da_0]}dx$$

$$=N_0M_n(d\xi a_0)^{\alpha/2}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\binom{n+\alpha}{n-m}x^m\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i+1}\left(\frac{x}{a_0}\right)^i\binom{\alpha/2}{i}x^{\alpha/2}e^{-\frac{1}{2}(d+\xi)x}e^{\frac{1}{2}da_0}dx$$

$$=N_0M_n(d\xi a_0)^{\alpha/2}e^{\frac{1}{2}da_0}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+j+i+1}}{2^j m!\,j!}\binom{n+\alpha}{n-m}\binom{\alpha/2}{i}a_0^{-i}x^{m+i+\frac{\alpha}{2}+j}(d+\xi)^j dx$$

$$=N_0M_n(d\xi a_0)^{\alpha/2}e^{\frac{1}{2}da_0}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+j+i+1}}{2^j m!\,j!}\binom{n+\alpha}{n-m}\binom{\alpha/2}{i}a_0^{-i}(d+\xi)^j\frac{x^{m+i+\frac{\alpha}{2}+j+1}}{m+i+\frac{\alpha}{2}+j+1}\Bigg|_{\delta_1}^{\delta_2}$$

(III-29)

para asegurar la convergencia en (III-29) es necesario que

$$|a_0|>\delta_2>\delta_1$$

III-f-Polinomios de Hermite

Para estos polinomios N_n, M_m y $\omega^*(x)$ quedan:

$$N_n=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{d}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad M_m=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma}{2^m m!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega^*(x)= e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$I_o(o,o)=\int_{\delta_1}^{\delta_2}\chi_o\Psi_o\,dx = N_oM_o\int_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\frac{d^2}{2}(x-a_o)^2}e^{-\frac{\gamma^2}{2}x^2}\,dx$$

$$=N_oM_o\,e^{-\frac{d^2}{2}a_o^2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\frac{d^2+\gamma^2}{2}x^2+d^2a_ox}\,dx$$

$$=N_oM_o\,e^{-\frac{d^2}{2}a_o^2\left(1-\frac{d^2}{d^2+\gamma^2}\right)}\int_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\frac{d^2+\gamma^2}{2}\left(x-\frac{d^2a_o}{d^2+\gamma^2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{2N_oM_o}{\sqrt{2(d^2+\gamma^2)}}\,e^{-\frac{d^2}{2}a_o^2\left(1-\frac{d^2}{d^2+\gamma^2}\right)}\int_{\sqrt{\frac{d^2+\gamma^2}{2}}\left(\delta_1-\frac{d^2a_o^2}{d^2+\gamma^2}\right)}^{\sqrt{\frac{d^2+\gamma^2}{2}}\left(\delta_2-\frac{d^2a_o^2}{d^2+\gamma^2}\right)} e^{-z^2}\,dz$$

$$\underset{0}{I}(0,0) = \frac{N_0 M_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2(d^2+\xi^2)}}\, e^{-\frac{d^2}{2}a_0^2\left(1-\frac{d^2}{d^2+\xi^2}\right)}\left[\operatorname{Erf}\varepsilon_2 - \operatorname{Erf}\varepsilon_1\right] \tag{III-30}$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{d^2+\xi^2}{2}}\left(\delta_i - \frac{d^2 a_0}{d^2+\xi^2}\right) \quad ; \; i = 1,2$$

$$\underset{1}{I}(0,n) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} x\chi_0 \Psi_n\, dx = N_0 M_n \int_{\delta_1}^{\delta_2} x\, e^{-\frac{d^2}{2}(x-a_0)^2} e^{-\frac{\xi^2}{2}x^2} H_n(\xi x)\, dx$$

$$= N_0 M_n \left[\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{H_n(\xi x)}{d^2+\xi^2}\left\{(d^2+\xi^2)x - d^2 a_0\right\} e^{-\frac{1}{2}\left[\xi^2x^2+d^2(x-a_0)^2\right]} dx \;+\right.$$

$$\left. + \frac{d^2 a_0}{d^2+\xi^2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} H_n(\xi x)\, e^{-\frac{1}{2}\left[\xi^2x^2+d^2(x-a_0)^2\right]} dx\right]$$

$$= \frac{1}{d^2+\xi^2}\left[\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \xi\sqrt{2n}\,\underset{0}{I}(0,n-1) + d^2 a_0\,\underset{0}{I}(0,n)\right] \tag{III-31}$$

Haciendo $\ell = 1$ en (III-8a) e igualando con (III-31) tenemos:

$$\frac{1}{d^2+\xi^2}\left[\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \xi\sqrt{2n}\,\underset{0}{I}(0,n-1) + d^2 a_0\,\underset{0}{I}(0,n)\right] = \frac{1}{\xi B_n}\left[\frac{M_n}{M_{n+1}}\underset{0}{I}(0,n+1) - C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}\underset{0}{I}(0,n-1) - A_n\,\underset{0}{I}(0,n)\right]$$

$$\underset{0}{I}(0,n+1) = \frac{M_{n+1}}{M_n}\left[\frac{\xi B_n}{d^2+\xi^2}\left\{\chi_0\Psi_n\Big|_{\delta_2}^{\delta_1} + \xi\sqrt{2n}\,\underset{0}{I}(0,n-1) + d^2 a_0\,\underset{0}{I}(0,n)\right\} + C_n\frac{M_n}{M_{n-1}}\underset{0}{I}(0,n-1)\right] \tag{III-32}$$

CAPITULO IV

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

A continuación se presenta un algoritmo para el cálculo de $I_\ell(n,m)$

Algoritmo 1

1) Leer N, M, L

2) Para i = O, N + M + L calcular utilizando las ecuaciones (III-23), (III-26), $I_0(0,i)$

   $A(1,i+1) \leftarrow I_0(0,i)$

3) Para i = 0, N + M + L-1 calcular utilizando la ecuación (III-8c) $I_0(1,i)$

   $A(2,i+1) \leftarrow I_0(1,i)$

4) Para i = 2, N hacer :

   Para j = 0, N + M + L - i calcular utilizando la ecuación (III-9a) $I_0(i,j)$

   $A(i+1,j+1) \leftarrow I_0(i,j)$

5) Para i = 1, L hacer :

   Para j = 0, M + L - i calcular utilizando la ecuación (III-10b) $I_i(n,j)$

   $A(n,j) \leftarrow I_i(n,j)$

6) Fin.

Este algoritmo se probó para el caso de los polinomios de Legendre, realizando un programa en FORTRAN. Se ejecutó para el caso particular en que $\alpha = 1,\ Q_0 = 0$ y $\gamma = 1$ en el que $I_0(n,m)$ se convierte - en $(P_n, P_m)_\omega$, resultando $A(N,M)$, como era de esperarse la matriz idéntica.

El algoritmo 1 requiere de una matriz de dimensión $n \times (m+n+l)$ y de un arreglo unidimensional de $m+n$ localidades. El tiempo de ejecución depende, evidentemente, de n, m y l, y para el caso particular del programa en FORTRAN que se elaboró para los polinomios de Legendre y que se ejecutó en una Cyber 70/71-16, se vió que para n + m + l del orden de decenas se tenían tiempos de ejecución del orden de décimas de segundo.

Es posible reducir la memoria que se necesita en el algoritmo anterior, pero con un ligero aumento en el tiempo de procesamiento. Como se ve en el punto 5) del algoritmo, para generar $I_\ell(n,m)$ se necesita únicamente el n-ésimo renglón de la matriz $A(n, m+n+l)$ y por lo tanto no es necesario almacenar la matriz A. En el punto 4) del algoritmo 1 se utiliza la fórmula recursiva (III-9a) que es el resultado de dos aplicaciones consecutivas de la primera fórmula de Christoffel-Darboux. La relación (III-9a) puede expresarse en la forma simplificada :

$$I_0(n,m) = X1(n-2) + X2(n-1)$$

donde $X1$ contiene los términos correspondientes a $I_0(n-2,m)$ y $X2$ los términos correspondientes a $I_0(n-1, j)$; $j = 0, \ldots, m+1$. De tal forma que se puede utilizar el siguiente algoritmo.

<u>Algoritmo 2</u>

1) Lee N, M, L

2) Para i = 0, N + M + L calcular utilizando las ecuaciones (III-23), (III-26) $I_0(0,i)$

$$X1(i+1) \leftarrow I_0(0,i)$$

3) Para i = 0, N + M + L - 1 calcular utilizando la ecuación (III-8c) $I_0(1,i)$

$$X2(i+1) \leftarrow I_0(1,i)$$

4) Para i = 2, N hacer :

Para j = 0, N + M + L - i calcular utilizando la ecuación (III-9a) $I_0(i,j)$

$$X3(j+1) \leftarrow I_0(i,j)$$

Para j = 0, N + M + L -i hacer :

$$X1(j+1) \leftarrow X2(j+1)$$
$$X2(j+1) \leftarrow X3(j+1)$$

5) Para i = 1, L hacer :

Para j = 0, M + L- i calcular utilizando la ecuación (III-10b) $I_i(u,j)$

$$X3(j+1) \leftarrow I_i(u,j)$$

Para j = 0, M + L - i hacer:

$$X2(j+1) \leftarrow X3(j+1)$$

6) Fin.

La modificación consiste en retener únicamente los dos renglones de la matriz A que se necesitan para generar el siguiente renglón. Normalmente se requiere que N y M sean del orden de decenas, pero en algunos casos especiales se precisa que sean del orden de millares y entonces el algoritmo 2 representa una disminución importante en la memoria requerida para su ejecución.

En cuanto a la aplicación específica de este tipo de fórmulas cabe señalar que, utilizando funciones de Hermite centradas en distintos puntos, se han obtenido valores muy precisos para los eigenvalores de la ecuación de Smoluchowski para potenciales biestables con una combinación lineal de solamente ocho funciones(ref 5). Es de esperarse que el resto de las fórmulas aqui desarrolladas para las otras familias puedan ser empleadas con igual éxito en ecuaciones cuya forma sugiera su uso.

En conclusión, pues, se han encontrado las expresiones explícitas para $I_0(0,n)$ para las diversas familias de polinomios ortogonales y, utilizando los algoritmos propuestos, se ha demostrado que el cálculo numérico de $I_\ell(n,m)$, además de ser sencillo, es eficiente en cuanto al tiempo de procesamiento. Esto abre la posibilidad de encontrar, de forma sistemática y sencilla, aproximaciones numéricas a la solución de una ecuación del tipo Sturm-Liouville via un método variacional sin el inconveniente de la gran complejidad operacional que implica el método de diferencias finitas.

APENDICE

```
      SUBROUTINE LEGEN
C  LA SUBRUTINA LEGEN CALCULA I(N,M)
C  REQUIERE DEL PROGRAMA PRINCIPAL LOS PARAMETROS:
C    1)D,AO,GI,DELTA2,DELTA1
C    2)NF,MF,LF
C  DONDE NF,MF,LF SE DEFINEN COMO
C    NF=N+1 ; LF=L ;MF=N+M+L+1
C  ESTA SUBRUTINA REQUIERE DE LA FUNCION POLEG
      COMMON/COMCOM/D,AO,GI,DELTA2,DELTA1,NF,MF,LF
      COMMON/LIT/XA(50,50),XP(50)
      ENELE(N,X)=SQRT(X*(2*N+1)/2.)
      XMEN1(N)=SQRT((2*N+1.)/(2*N-1.))
      XMEN2(N)=SQRT((2*N+1.)/(2*N+3.))
      DEL22=DELTA2*DELTA2
      DEL11=DELTA1*DELTA1
      G12=GI*GI
      IAUX=0
C
C     ASIGNACION  PARA  I0(0,0)
C
      XA(1,1)=ENELE(IAUX,D)*ENELE(IAUX,GI)*(DELTA2-DELTA1)
C
C     ASIGNACION  PARA  I0(0,1)
C
      XA(1,2)=ENELE(IAUX,D)*ENELE(IAUX+1,GI)/2*(DEL22-DEL11)
C
C COMIENZA  EL  CICLO  PARA  CALCULAR  I0(0,N)
C
      DO 1 I1=3,MF
      L=I1-2
      CT=1/XMEN2(L)
      COCOR=L*GI*(2*L+1)/(L+2.)/(L+1.)
      CU=-L*XMEN1(L)*L/(L+1.)
      CODCON=XMEN1(L)/GI
      COEF=SQRT(D/2)*ENELE(L,GI)/(G12*L)
      XA(1,I1)=CT*(COCOR*(COEF*( POLEG(L,GI*DELTA1)*(1-G12*DEL11)-
     -POLEG(L,GI*DELTA2)*(1-G12*DEL22))+CODCON*XA(1,L))+CU*
     XXA(1,L))
    1 CONTINUE
C
C     ASIGNACION  PARA  I0(1,0)
C
      XA(2,1)=D/GI*XA(1,2)-D[illegible]XA(1,1)
      PRINT *,XA(2,1)
C
C COMIENZA  EL  CICLO  PARA  EL  CALCULO  DE  I0(1,N)
C
      MFML=MF-1
      DO [illegible]
      L=I2-1
      CT=[illegible]
      COC[illegible](L+1.)/[illegible]/(2[illegible]+1.)
      C2=[illegible](L+1.)[illegible]XMEN1(L)
      XA(2,[illegible])=CT*([illegible]XA(1,[illegible]+1)+[illegible])
    [illegible] CONTINUE
```

```
      C     COMIENZA  EL  CICLO  PARA  L(N,1)
      C
            DO 3 I3=3,NF
            DO 3 I4=1,MF
            L=I3-1
            J=I4-1
            C1=-XMEN1(L)*(2*L-1.)/L*DJ*AJ
            C2=(L-1.)/L*SQRT((2*L+1.)/(2*L-3.))
            C3=XMEN1(L)*D/GI*(2*L-1.)/L*(J+1.)/(2*J+1.)
            XA(I3,I4)=C1*XA(L,I4)-C2*XA(L-1,I4)+C3*XMEN2(J)*XA(L,I4+1)
            IF(J.GT.0) XA(I3,I4)=XA(I3,I4)+C3*J/(J+1.)*XMEN1(J)*XA(L,J)
    3       CONTINUE
      C
      C     COMIENZA  EL  CICLO  PATA  L(N,M)
      C
            DO 4 I5=1,LF
            XF(1)=1/GI*XMEN2(IOA)*XA(NF,2)
            DO 5 I6=2,MFM1
            L=I6-1
            CT=(L+1.)/(GI*(2*L+1.))
            CU=L/(L+1.)*XMEN1(L)
            XF(I6)=CT*(XMEN2(L)*XA(NF,I6+1)+CU*XA(NF,L))
    5       CONTINUE
            DO 6 I7=1,MFM1
            XA(NF,I7)=XP(I7)
    6       CONTINUE
            MFM1=MFM1-1
    4       CONTINUE
            RETURN
            END
```

SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ENTRY POINTS
1 LEGEN

VARIABLES SN TYPE RELOCATION

1	AU	REAL	COMCOM	402	COCOA	REAL		
404	COJCOR	REAL		405	COEF	REAL		
401	CT	REAL		403	CU	REAL		
414	C1	REAL		410	C2	REAL		
415	C3	REAL		0	D	REAL		[illegible]
4	DELTA1	REAL	COMCOM	3	DELTA2	REAL		[illegible]
374	DEL11	REAL		373	DEL22	REAL		
2	GI	REAL	COMCOM	[illegible]	GI2	[illegible]		
376	IAUX	INTEGER		417	IOA	INTEGER	[illegible]	
377	I1	INTEGER		407	I2	INTEGER		
411	I3	INTEGER		[illegible]	I4	[illegible]		
416	I5	INTEGER		420	I6	[illegible]		
421	I7	INTEGER		413	J	[illegible]		
[illegible]	L	INTEGER		7	LF	[illegible]		[illegible]
6	MF	INTEGER	COMCOM	406	MFM1	INTEGER		
5	NF	INTEGER	COMCOM	0	XA	REAL	ARRAY	INTS

```
      FUNCTION POLEG(N,X)
C ESTA FUNCION EVALUA EL POLINOMIO N DE LEGENDRE EN X
C UTILIZANDO LA PRIMERA FORMULA DE CHRISTOFFEL-DARBOUX
      IF(N.GT.1) GO TO 70
      IF(N.EQ.1) GO TO 71
      POLEG=1
      RETURN
   71 POLEG=X
      RETURN
   70 CONTINUE
      P0=1
      P1=X
      DO 1 I=2,N
      L=I-1
      B=(2*L+1)/(L+1.)
      C=-L/(L+1.)
      P=B*X*P1+C*P0
      P0=P1
      P1=P
    1 CONTINUE
      POLEG=P
      RETURN
      END
```

```
SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ENTRY POINTS
    4  POLEG

VARIABLES     SN  TYPE        RELOCATION
   50  B          REAL                           51  C      REAL
   46  I          INTEGER                        47  L      INTEGER
    0  N          INTEGER          F.P.          52  P      REAL
   43  POLEG      REAL                           44  P0     REAL
   45  P1         REAL                            0  X      REAL        F.P.

STATEMENT LABELS
    0  1                       13  70                    11  71

LOOPS  LABEL   INDEX   FROM-TO   LENGTH   PROPERTIES
  24   1       I       13  20    13B      OPT

STATISTICS
  PROGRAM LENGTH               53B      43
      52000B CM USED
```

BIBLIOGRAFIA

1.- APOSTOL TOM M. "Calculs" Volume I
Xerox College Publishing
Waltham, Massachusetts. Toronto 1967.

2.- ARFKEN GEORGE "Mathematical Methods for Physicists"
Academic Press
New York and London, 1970.

3.- ABRAMOWITZ M.y STEGUN I.A. "Handbook of Mathematical functions"
Natl.Bur. Stan Appl Math Series, 55 (1964)

4.- INCE E.L. "Ordinary Differential Equations"
Dover Publications Inc. New York 1956.

5.- LOPEZ DE HARO M."On the High Frequency Dynamics of dilute Polymer Solutions". Tesis doctoral Universidad de Strathclude, Glasgow 1979.

6.- MORSE P.M. y FESHBACH H. "Methods of Theoritical Physics"
Mc Graw-Hill Book Company 1953.

7.- PAULIN L. y WILSON E.B. "Introduction to Quantum Mechanics"
Mc Graw-Hill, New York, 1935

8.- SCHWARTZ L. "Mathematics of the Physical Sciences"
Addison-Wesley, London, 1966.

9.- WOLF B, K. " Polinomios Ortogonales"
Comunicación Interna No. 2
Fac. de Ciencias UNAM ,1979.