(10) Zipeu.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

SERIES DE FOURIER RESPECTO A SISTEMAS ORTOGONALES GENERALES Y PROBLEMAS DE CONVERGENCIA UNIFORME.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

CONSTANCIO HERNANDEZ GARCIA

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Introducción

En el año de 1864, Lipschitz estableció las primeras condiciones de suavidad bajo las cuales la serie de Fourier respecto al sistema trigonométrico de una función continua converge a ella uniformemente. Posteriormente en 1876 du Bois Reymond encontró el primer ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier respecto a este sistema no converge a ella uniformemente. A raíz surge de manera natural la pregunta de que si existe un sistema ortogonal con la propiedad de que la serie de Fourier de cualquier función continua respecto a este sistema converge a ella uniformemente. En 1909, en su tesis doctoral, Alfred Haar dió el primer ejemplo de un sistema con la propiedad mencionada.

El propósito de este trabajo es establecer condiciones necesarias bajo las cuales un sistema tiene la propiedad del sistema de Haar. Una de las diferencias entre el sistema trigonométrico y el sistema de Haar es que el primero consta de funciones continuas mientras que las del segundo solo son continuas a trozos; sin embargo esta diferencia no es esencial; en 1928 Philip Franklin construyó el primer ejemplo de un sistema ortogonal consistente de funciones continuas con la propiedad del sistema de Haar.

En el capítulo I se dan los conceptos elementales y se estudian las propiedades básicas del sistema trigonométrico (se demuestra una generalización del teorema de Lipschitz). En el capítulo II se estudian los sistemas de Haar y de Franklin y se definen las funciones de Lebesgue que nos dan una primer condición necesaria para la convergencia de series de Fourier de funciones continuas. En el Capitulo III se demuestra la desigualdad de Olevskii que es esencial para obtener una estimación de las funciones de Lebesgue de un sistema ortogonal.

Finalmente quiero expresar mi más sincero agradecimiento al M. en C. Manuel Falconi, por haberme dirigido esta tesis sin cuya valiosa ayuda no hubiera sido posible este trabajo

INDICE

2.- Desigualdad de Olevskii.
3.- Crecimiento logarítmico de las funciones de Lebesgue. Divergencia de series de Fourier
4.- Sistema de Walsh y subsucesiones de convergencia.
5.- El conjunto de puntos de crecimiento de las funciones de Lebesgue
6.- La suavidad de funciones con series de Fourier divergentes.

I. Conceptos Elementales y Sistema Trigonométrico

§ 1. Sistemas Ortogonales

Un sistema S de funciones L^2-integrables se dice que es <u>ortogonal</u> en un intervalo $[a,b]$, si

$$\int_a^b \phi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = 0$$

para cualquier pareja ϕ, ψ en S y

$$\int_a^b |\phi(x)|^2 dx \neq 0.$$

para toda $\phi \in S$. El sistema es llamado <u>ortonormal</u>, si además la condición.

$$\int_a^b |\phi(x)|^2 dx = 1$$

se cumple para toda $\phi \in S$. De cualquier sistema ortogonal podemos obtener un sistema ortonormal, multiplicando cada elemento del sistema, por una constante adecuada. (Puesto que $L^2[a,b]$ es <u>separable</u>, cualquier sistema ortogonal es a lo más numerable).

Una serie de la forma $\Sigma c_n \phi_n$ donde $c_n \in \mathbb{C}$ y las funciones $\{\phi_n\}$ forman un sistema ortogonal se llama serie ortogonal. Cuando los coeficientes son calculados al estilo de Fourier.

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\,\phi_n(x)\,dx}{\int_a^b |\phi_n(x)|^2\,dx}$$

decimos que $\sum c_n \phi_n$ es la expansión en series de Fourier de la función f respecto al sistema $\{\phi_n\}$ y la denotaremos por

$$S[f] = \sum c_n \phi_n \qquad (1)$$

En este caso llamamos a los números $c_1, c_2, \ldots$ coeficientes de Fourier de la funcion f respecto al sistema $\{\phi_n\}$.

Sea

$$r_k(x) = (-1)^{j-1}, \quad x \in \left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right), \quad 1 \leq j \leq 2^k, \ k \in \mathbb{N}$$

en los puntos de discontinuidad, sea $r_k(x)$ igual a la media aritmética de los valores tomados por r_k en los intervalos adjuntos. El sistema $\{r_1, r_2, \ldots\}$ se llama sistema de Rademacher, es fácil ver que es un sistema ortogonal, pues si $m < n$, entonces la función r_n en todo -

intervalo donde r_m es constante, toma el valor $+1$ el mismo número de veces que el valor -1 y las longitudes de los intervalos en donde es constante son iguales. Entonces tenemos

$$\int_0^1 r_m(x)\, r_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

es claro que

$$\int_0^1 r_n^2(x)\, dx = 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

entonces r es un sistema ortonormal.

El sistema $\tau = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots\}$ es ortogonal sobre cualquier intervalo de longitud 2π pues para α real se tiene

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos n\, dx = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} dx = 2\pi \ ; \quad \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \pi \qquad m \in \mathbb{N}.$$

El sistema de funciones $\tau' = \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es ortogonal sobre cualquier intervalo de longitud 2π, ya que para cualquier α real.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2\pi & (m = n) \end{cases}$$

con respecto a T' la serie de Fourier de cualquier función f definida, digamos en $[0, 2\pi]$, se escribe en la forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \qquad (2)$$

donde $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt$.

Si definimos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad ; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt$$

con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (entonces $b_0 = 0$) ; tenemos

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad ; \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \qquad (3)$$

juntando en (2) los términos $\pm k$, escribimos la serie en la forma:

$$c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + \cdots + (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) + \cdots$$

y tomando en consideración (3), en la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \cdots \qquad (4)$$

Entonces el sistema T es equivalente al sistema T':

El conjunto de funciones τ es llamado <u>sistema trigonométrico</u> y τ' es llamado <u>sistema trigonométrico complejo</u> y una serie de la forma (2) o de la forma (4) se llamará <u>serie trigonométrica</u>.

§2. Propiedad Mínima de las Sumas Parciales de una Serie de Fourier; Desigualdad de Bessel.

A la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ de una serie ortogonal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k$ se le llamará <u>polinomio ortogonal de orden n respecto al sistema</u> $\{\phi_n\}$. La diferencia entre series ortogonales y series de Fourier es esencial. Por ejemplo, las sumas parciales de la expansión (1) se distinguen de las sumas parciales de cualquier serie ortogonal construida con las funciones ϕ_n por la siguiente propiedad mínima.

TEOREMA. 1. De todos los polinomios de orden n con respecto a un sistema ortogonal $\{\phi_n\}$, la me-por aproximación en la métrica L^2 para $f\in L^2$ está dada por la n-ésima suma parcial de su serie de Fourier respecto a este sistema

Prueba. Sea $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x)$ y c_k el k-ésimo coeficiente de Fourier de f respecto a $\{\phi_n\}$. Como consecuencia de la ortonormalidad tenemos

$$0\leq \int_a^b (f(x)-S_n(x))\overline{(f(x)-S_n(x))}\,dx = \int_a^b |f(x)|^2dx-\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{c}_k-\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k c_k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2=\int_a^b |f(x)|^2dx+\sum_{k=1}^{n}|a_k-c_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$$

la última expresión es mínima si y solo si el término de en medio es cero es decir $a_k=c_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ Q.E.D.

Si sustituimos c_k por a_k en la igualdad anterior obtenemos inmediatamente.

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\leq \|f\|_2^2,$$

si n tiende a ∞ obtenemos la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leq \|f\|_2^2$$

Corolario: Los coeficientes de Fourier de una función L^2-integrable convergen a 0 si n aumenta indefinidamente.

TEOREMA 2. Si el sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ es acotado c.d. (es decir $|\phi_n(x)| < M$ para toda n y para casi toda x) entonces la relación $a_n \to 0$ es una condición necesaria para la convergencia c.d. de la serie ortogonal $\sum a_n \phi_n$.

Prueba: Ya que $\sum a_n \phi_n$ converge c.d. tenemos que $a_n \phi_n(x) \to 0$. Por el teorema de Egoroff esta relación se satisface uniformemente en un conjunto A, cuyo complemento B tiene medida arbitrariamente pequeña. Como resultado de la convergencia uniforme obtenemos.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_A |\phi_n(x)|^2 dx = 0$$

Más aún, puesto que $|\phi_n(x)| \leq M$ c.d.. Para una A tal que su complemento B tenga medida $< \varepsilon$ y si ε es adecuadamente pequeño tenemos

$$\int_A |\phi_n(x)|^2 dx = \int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx - \int_B |\phi_n(x)|^2 dx = 1 - M^2\varepsilon > \frac{1}{2}$$

por lo tanto $\lim a_n = 0$ y obtenemos lo que queríamos Q.E.D.

En este torema la condición de que $\{\phi_n\}$ esté uniformemente acotada es esencial. Para esto consideremos en el intervalo $[0,1]$ el siguiente sistema de funciones

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n(n+1)} & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Evidentemente $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal. Eligiendo los coeficientes de manera arbitraria (aún sin excluir $a_n \to \infty$). La serie $\sum a_n \phi_n$ es convergente en el intervalo $[0,1]$. Para ver ésto, sea $x \in (0,1]$, evidentemente x pertenece a uno y solo uno de los intervalos $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) = a_k \sqrt{k(k+1)}$$

Entonces $\sum a_n \phi_n$ converge en todo $[0,1]$.

§3. Conceptos de Completez y Cerradura de un Sistema

Un importante teorema puede obtenerse inmediatamente de la desigualdad de Bessel

TEOREMA.3: Para cualquier función de cuadrado integrable, la serie de Fourier con respecto a un sistema ortonormal converge en la métrica L^2.

Prueba: Sea $f \in L^2$, denotaremos $S_n(f,x)$ la suma parcial de grado n de la serie de Fourier de f respecto a $\{\phi_n\}$, entonces para $P \geq 1$.

$$\| S_{n+p}(f,x) - S_n(f,x) \|_2^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \phi_k(x) \|_2^2$$

$$= \int_a^b | \sum c_k \phi_k(x) |^2 dx = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2$$

de la desigualdad de Bessel sabemos que si $f \in L^2$, entonces $\sum |c_k|^2 < \infty$, de donde dado $\varepsilon > 0$ es posible encontrar N tal que $\sum_{n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon$ para $n \geq N$. por tanto

$$\| S_{n+p}(f,x) - S_n(f,x) \|_2^2 < \varepsilon \quad \text{para } n \geq N$$

es decir $\{S_n(f)\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2. Q.E.D.

Debe notarse que sólo hemos probado que la serie de Fourier de una función f converge en L^2 y que nó hemos probado que esta suma sea igual a f. De hecho nó siempre es el caso. La pregunta de cuándo la serie de Fourier de una función dada converge a ésta en el sentido de L^2 está relacionado con el concepto de cerradura del sistema en L^2.

Un sistema $\{\phi_n\}$ es <u>cerrado</u> en $L^2[a,b]$ si para cualquier $f \in L^2[a,b]$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible elegir números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que

$$\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x) \|_2 < \varepsilon \tag{5}$$

Es decir $\{\phi_n\}$ es cerrado en $L^2[a,b]$ si y solo si la cerradura del espacio generado por $\{\phi_n\}$ en $L^2[a,b]$ es $L^2[a,b]$. (Obsérvese que no se ha pedido en esta definición que el sistema sea ortogonal).

Podemos ver fácilmente lo siguiente: Sea $f \in L^2$, $\varepsilon > 0$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfacen (5). Si $\{\phi_n\}$ es cerrado por la propiedad mínima de la serie de Fourier de f respecto a L^2, tenemos

$$0 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|f(x) - S_n(f,x)\|_2^2 \leq \|f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x)\|_2^2 < \varepsilon$$

Por tanto $\|S_n(f)-f\|_2 \to 0$ y además

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

Entonces hemos demostrado que en el caso de los sistemas cerrados la igualdad se cumple en la desigualdad de Bessel; En este caso la igualdad se llama <u>igualdad</u> de <u>Parseval</u>

Un sistema de funciones $\{\phi_n\}$, definidas sobre $[a,b]$, se dice que es <u>completo</u> en $L^2[a,b]$ si no existe una sola función $f \in L^2[a,b]$ que sea ortogonal a todas las funciones $\{\phi_n\}$, a menos que $f \equiv 0$. Es decir, que no hay funciones ortogonales al espacio generado por $\{\phi_n\}$. En otras palabras, para un sistema completo las igualdades

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

implican que $f \equiv 0$.

Si dos funciones f y g en $L^2[a,b]$ son diferentes, no pueden poseer series de Fourier idénticas con res –

pecto a un sistema ortonormal completo en $L^2[a,b]$. En efecto si éste fuera el caso, entonces la diferencia $f-g$ sería una función en L^2 y ortogonal a todas las funciones ϕ_n y al mismo tiempo $f-g=0$ no se satisfaría lo que contradice la definición de completez del sistema.

TEOREMA 4. Un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ es cerrado en $L^2[a,b]$ si y solo si es completo en $L^2[a,b]$.

Prueba: Por el teorema anterior, para cualquier $f \in L^2$ su serie de Fourier $S[f]$ converge en $L^2[a,b]$. Denotaremos este límite por F. entonces

$$\|F - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k\|_2 \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

multipliquemos a $F - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ por $\bar{\phi}_m$ e integremos, si $n > m$ obtendremos

$$\int_a^b F(x)\bar{\phi}_m(x)\,dx - C_m = \int_a^b \Big(F(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)\,\bar{\phi}_m(x)\Big)\,dx$$

$$\leq \|F - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k\|_2 \|\phi_m\|_2 = \|F - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k\|_2$$

por lo tanto.

$$C_m = \int_a^b F(x)\,\overline{\phi_m(x)}\,dx$$

es decir, los coeficientes de Fourier de F y f respecto a $\{\phi_n\}$ son idénticos, de donde $f-F$ es ortogonal a todas las funciones de $\{\phi_n\}$. Entonces si $\{\phi_n\}$ es completo ésto implica que

$$f - F = 0 \quad \text{en } L^2$$

es decir $f = F$. Entonces

$$\| f - \sum c_k \phi_k \|_2 \longrightarrow 0$$

de aquí que $\{\phi_n\}$ sea cerrado

Sea ahora, $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal cerrado en L^2. Ahora si f es ortogonal a toda función de $\{\phi_n\}$, entonces

$$C_n = \int_a^b f(x)\,\overline{\phi_n(x)}\,dx = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

Entonces debido a la igualdad de Parseval

$$\| f \|_2^2 = 0$$

entonces $f = 0$ y el sistema es completo. Q.E.D.

El siguiente teorema es considerablemente más fuerte que la desigualdad de Bessel.

TEOREMA 5. (DE RIESZ-FISCHER). Sea $\{C_n\}$ una sucesión de numeros complejos tal que $\sum |C_n|^2 < \infty$ y sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal, entonces existe una función $f \in L^2$ tal que los números C_n son sus coeficientes de Fourier respecto al sistema $\{\phi_n\}$. Si el sistema es completo entonces f es única

§4. Sistema Trigonométrico

Como los elementos de este sistema tienen periodo 2π, es conveniente extender las funciones que en esta sección consideremos de manera periódica a $\mathbb{R}$. Es decir, supondremos que

$$f(x+2\pi) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(Cambiando, si es necesario, los valores de la función en los puntos extremos del intervalo). En particular, cuando hablemos de la serie de Fourier de una función continua entenderemos que la función es continua y periódica en $\mathbb{R}$.

Si f es periódica, la integral de f sobre cualquier intervalo de longitud 2π es la misma

Por medio de un cambio de variable lineal podemos trasformar el sistema trigonométrico en un sistema ortogonal sobre cualquier intervalo $[a,b]$. Por ejemplo las funciones

$$\exp\left\{\frac{2\pi i n x}{b-a}\right\} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

forman un sistema ortogonal en $[a,b]$ y a cualquier f definida sobre este intervalo podemos asociar la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \exp\frac{2\pi i n}{\omega}, \text{ donde } c_n = \frac{1}{\omega}\int_a^b f(x)\, e^{-\frac{2\pi i n t}{\omega}}\, dt \quad \omega = b-a.$$

El sistema trigonométrico es completo, mas aún, satisface la siguiente propiedad ligeramente más fuerte.

TEOREMA 6. Si f es una función integrable cuyos coeficientes de Fourier $a_0, a_1, b_1, \ldots$ son todos cero, entonces $f \equiv 0$.

Prueba: Ya que los coeficientes de Fourier de f son cero, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,dx = 0 \qquad (6)$$

para cualquier polinomio trigonométrico $T(x)$. Supongamos primero que f es continua y no idénticamente cero. Existen entonces un punto x_0 y dos números positivos ε, δ tales que $|f(x)| > \varepsilon$, digamos que $f(x) > \varepsilon$, en el intervalo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Será suficiente demostrar que existe una sucesión T_n de polinomios tales que

(i) $T_n(x) \geq 0$ para $x \in I$;

(ii) T_n tiende uniformemente a ∞ en todo intervalo I' interior a I;

(iii) Los T_n son uniformemente acotados fuera de I.

Luego la integral en (6), con $T=T_n$, puede ser dividida en dos, extendidas respectivamente sobre I y sobre el resto de $[-\pi,\pi]$. Por (i) la primer integral excede

$$\varepsilon\, m(I')\min_{x\in I'} T_n(x)$$

y así por (ii), tiende a ∞ con n. La segunda integral está acotada, en vista de (iii). Entonces (6) es imposible para $T=T_n$ con n suficientemente grande.

Si elegimos

$$T_n(x)=\{t(x)\}^n \qquad t(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta,$$

entonces $t(x)\geq 1$ en I y $T(x)>1$ en I', $|t(x)|\leq 1$ fuera de I, las condiciones (i), (ii) y (iii) están satisfechas y el teorema está probado para f continua.

Suponga ahora que f es sólamente integrable y sea

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dt$$

La condición $a_0=0$ implica $F(x+2\pi)-F(x)=0$, así que $F(x)$ es periódica. Sean $A_0, A_1, B_1, \ldots$, los coeficientes de F e integremos por partes las integrales

$$A_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx \qquad B_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx$$

para $k=1,2,\ldots$ Debido a la periodicidad de F los términos integrados son cero y la hipótesis $a_1 = b_1 = a_2 = \cdots = 0$ implica $A_1 = B_1 = A_2 = \cdots = 0$. Sean A_0', A_1', B_1', ... los coeficientes de $F(x) - A_0$. Obviamente $A_0' = A_1' = B_1' = \cdots = 0$. Entonces $F(x) - A_0$, siendo continua es cero y $f \equiv 0$ Q.E.D.

A continuación demostraremos otra propiedad importante del sistema trigonométrico, el teorema de Dini-Lipschitz, este teorema dice que si f es continua y "suficientemente suave" entonces su serie de Fourier respecto al sistema trigonométrico converge a ella uniformemente. Para simplificar la demostración introduciremos antes algo de notación y algunas fórmulas concernientes a las series de Fourier respecto al sistema trigonométrico

Dada una f integrable y periódica, sea

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,kt\,dt \qquad (7)$$

así que

$$S[f] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx)$$

Las sumas parciales de $S[f]$ se denotarán por $S_n[f]$ o por $S_n(f;x)$ o simplemente por $S_n(x)$. Usando (7) tenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right\}dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt$$

donde

$$D_n(v) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kv = \frac{\mathrm{sen}(n+\frac{1}{2})v}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}v}$$

El polinomio D_n se llama kernel de Dirichlet.

Podemos escribir también

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,D_n(u)\,du. \qquad (8)$$

A veces hay una ligera ventaja al tomar el último término de S_n con factor $\frac{1}{2}$. La nueva expresión se llamará suma parcial modificada y se denotará por $S_n^*[f]$. Entonces

$$S_n^*(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) + \frac{1}{2}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$
$$= \frac{1}{2}(S_n(x) - S_{n-1}(x)).$$

Si definimos

$$D_n^*(v) = D_n(v) - \frac{1}{2}\cos nv = \frac{\operatorname{sen} nv}{2\tan\frac{1}{2}v},$$

procediendo como antes obtenemos

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n^*(t)\,dt$$

Ya que los coeficientes de Fourier tienden a cero si $n \to \infty$ para cualquier funcion f integrable, $S_n - S_n^*$ tiende uniformemente a 0; S_n^* y S_n son equivalentes con respecto a la convergencia, y S_n^* es ligeramente más simple. Llamamos a D_n^* el kernel de Dirichlet modificado.

Definimos la siguiente notación: Para x fija

$$\phi(t) = \phi_x(t) = \phi_x(t,f) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}.$$

$$\psi(t) = \psi_x(t) = \psi_x(t,f) = \frac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\}.$$

El polinomio

$$D_n^*(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cdots + \frac{1}{2}\cos u$$

es par, e integrando término a término vemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(t)\,dt = \pi$$

por tanto

$$S_n^*(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n^*(t)dt - \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(t)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_x(t)\,D_n^*(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\,nt\,dt$$

Para el teorema de Dini-Lipschitz necesitamos la siguiente estimación:

$$\phi(t) = \phi_x(t)\ ,\quad \chi(t) = \phi(t)\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}t\ ,\quad \eta = \frac{\pi}{n}$$

entonces

$$\pi\left[S_n^*(x) - f(x)\right] = 2\int_0^{\pi}\chi(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt = -2\int_{-\eta}^{\pi-\eta}\chi(t+\eta)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}\chi(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt - \int_{-\eta}^{\pi-\eta}\chi(t+\eta)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt$$

$$= \int_{\eta}^{\pi-\eta}\{\chi(t) - \chi(t+\eta)\}\,\mathrm{sen}\,n\,dt + \int_{\pi-\eta}^{\pi}\chi(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt$$

$$+ \int_0^{\eta}\chi(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt - \int_{-\eta}^{\eta}\chi(t+\eta)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt$$

Denotemos las cuatro últimas integrales I_1, I_2, I_3, I_4 respectivamente. Ya que $|\mathrm{sen}\,nt\,\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t| \le n$, tenemos:

$$|I_3|+|I_4| \leq n\int_0^{\eta}|\phi(t)|dt + n\int_{-\eta}^{\eta}|\phi(t+\eta)|dt$$
$$\leq 2n\int_0^{2\eta}|\phi(t)|dt$$

para $n \geq 2$ y $t \in (\pi-\eta, \pi)$

$$|\chi(t)\operatorname{sen} nt| \leq |\phi(t)| \leq \tfrac{1}{2}\{|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|\}$$

Ya que la integral indefinida es una función continua tenemos $I_2 = o(1)$, uniformemente en todo intervalo donde f es acotada. Finalmente $|I_1|$ no excede a

$$\int_{\eta}^{\pi-\eta}|\phi(t)|\left\{\frac{1}{2\tan\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2\tan\frac{1}{2}(t+\eta)}\right\}dt + \int_{\eta}^{\pi-\eta}\frac{|\phi(t)-\phi(t+\eta)|}{2\tan\frac{1}{2}t}dt$$

la diferencia entre llaves es $\dfrac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t+\eta)} < \dfrac{\pi^2\eta}{4t^2}$ juntando los resultados y observando que $2\tan\frac{1}{2}t \geq t$ en $(0,\pi)$ tenemos

TEOREMA 7. Sea $\eta = \frac{\pi}{n}$. Para toda x, $|S_n^*(x) - f(x)|$ está acotada por

$$\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\frac{|\phi(t)-\phi(t+\eta)|}{t}dt + \eta\int_{\eta}^{\pi}\frac{|\phi(t)|}{t^2}dt + 2\eta^{-1}\int_0^{2\eta}|\phi(t)|dt + o(1) \quad (9)$$

la $o(1)$ es uniforme en todo intervalo donde f es acotada.

Como corolario tenemos el siguiente teorema

TEOREMA 8. (DE DINI-LIPSCHITZ). Si f es continua y su módulo de continuidad $\omega(\delta)$ satisface la condición $\omega(\delta)\log\delta \to 0$ si $\delta \to 0$, entonces $S[f]$ converge uniformemente

PRUEBA: Ya que

$$|\phi(t)-\phi(t+\eta)| \leq \tfrac{1}{2}|f(x+t)-f(x+t+\eta)|$$
$$+\tfrac{1}{2}|f(x+t)-f(x-t-\eta)| < \omega(\eta)$$

el primer término en (9) no excede a $\omega(\eta)\log\eta = o(1)$. análogamente, ya que $\phi(t) \to 0$ uniformemente en x, los términos remanentes en (9) tienden uniformemente a 0. Q.E.D.

En el teorema de Dini-Lipschitz no podemos eliminar las condiciones de suavidad, es decir, si f es una función continua su serie de Fourier respecto al sistema trigonométrico puede diverger en algún punto, el primer ejemplo de este tipo de funciones lo dió du-Bois Reymond, nosotros seguiremos el ejemplo dado por Lebesgue para el cual necesitamos los siguientes resultados preliminares.

Lema: Si f es integrable y g es acotada y ambas poseen período 2π, entonces las integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,\operatorname{sen} nt\,dt$$

tienden a cero uniformemente respecto a x si $n \to \infty$.

Prueba: Sea

$$\varphi_x(t) = f(x+t)\,g(t)$$

si x es fijo, entonces φ_x es integrable y además

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(t)\cos nt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x\left(t+\tfrac{\pi}{n}\right)\cos n\left(t+\tfrac{\pi}{n}\right)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x\left(t+\tfrac{\pi}{n}\right)\cos nt\cos\pi\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x\left(t+\tfrac{\pi}{n}\right)\operatorname{sen} nt\,\operatorname{sen}\pi\,dt$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x\left(t+\tfrac{\pi}{n}\right)\cos nt\,dt\,.$$

Por lo tanto

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(t)\cos nt\,dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_x(t+\tfrac{\pi}{n}) - \varphi_x(t)|\,dt$$

similarmente para sen nt. Entonces es suficiente con probar que

$$h_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_x(t+\tfrac{\pi}{n}) - \varphi_x(t)|\,dt$$

tiende a cero uniformemente si $n \to \infty$. Pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_x(t+\tfrac{\pi}{n}) - \varphi_x(t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\tfrac{\pi}{n})\,g(t+\tfrac{\pi}{n}) - f(x+t)\,g(t)|\,dt$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\tfrac{\pi}{n}) - f(x+t)|\,|g(t+\tfrac{\pi}{n})|\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|\,|g(t+\tfrac{\pi}{n}) - g(t)|\,dt$$

Nótese que g es acotada y tiene período 2π, entonces para cualquier t, $|g(t)|$ es menor digamos que M, y recuérdese que f también tiene período 2π, para la primera de las integrales del lado derecho de la desigualdad anterior tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\tfrac{\pi}{n}) - f(x+t)|\,|g(t+\tfrac{\pi}{n})|\,dt$$

$$\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\tfrac{\pi}{n}) - f(x+t)|\,dt \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+\tfrac{\pi}{n}) - f(t)|\,dt$$

$$\leq M\,\omega_1(\tfrac{\pi}{n}, f)$$

donde ω_1 es el módulo integral de continuidad. Sabemos que $\omega_1(\delta, f) \to 0$, si $\delta \to 0$ para cualquier función integrable f. Ya que x no figura en el lado derecho de la desigualdad anterior tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\tfrac{\pi}{n}) - f(x+t)||g(t+\tfrac{\pi}{n})| dt \to 0$$

uniformemente respecto a x si $n \to \infty$.

Para la estimación de la segunda integral, tomemos $\varepsilon > 0$ y dividamos a f en la suma de dos funciones f_1 y f_2 de las cuales la primera es acotada, digamos que $|f_1(x)| \leq K$ y la segunda satisface

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| dt < \varepsilon$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)||g(t+\tfrac{\pi}{n}) - g(t)| dt$$

$$\leq K \int_{-\pi}^{\pi} |g(t+\tfrac{\pi}{n}) - g(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)||g(t+\tfrac{\pi}{n}) - g(t)| dt$$

$$\leq K\omega_1(\tfrac{\pi}{n}, g) + 2M \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)| dt \leq K\omega_1(\tfrac{\pi}{n}, g) + 2M\varepsilon$$

ya que $\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) \to 0$, el número $\varepsilon > 0$ es arbitrario la parte izquierda de la desigualdad anterior tiende a cero uniformemente Q.E.D.

El lema recién demostrado sirve para calcular la siguiente estimación de las sumas parciales $S_n[f]$ de la serie de Fourier de f respecto a T.

TEOREMA 9. Para cualquier función integrable f,

$$S_n[f](x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,\frac{\operatorname{sen} nu}{u}\,du + o(1)$$

donde $o(1)$ es una magnitud que tiende uniformemente a 0.

Prueba: Primero notemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} + \frac{1}{2}\cos nu$$

también nótese que la función

$$g(u) = \frac{1}{2\tan u} - \frac{1}{u}$$

es continua en $[-\pi,\pi]$; y es acotada en $\mathbb{R}$ si la extendemos periódicamente.

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} nu}{u} + g(u)\operatorname{sen} nu + \frac{1}{2}\cos nu$$

entonces de (8) obtenemos

$$S_n[f](x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,\frac{\operatorname{sen} nu}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)g(u)\operatorname{sen} nu\,du$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\cos nu\,du$$

Las dos últimas integrales de la fórmula anterior tienden a cero uniformemente por el lema precedente ya que $g(u)$ es acotada y obtenemos lo que queríamos.

Procederemos ahora a construir la función f continua con serie de Fourier divergente en 0:

Sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ una sucesión de enteros que definiremos después. Suponga que

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_k = n_1 n_2 \cdots n_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

defina

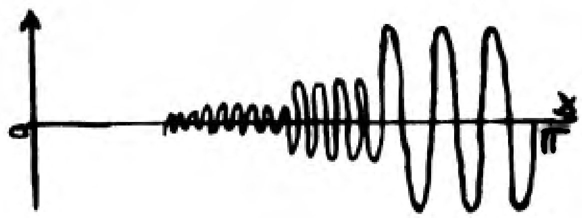
$$I_k = \left(\frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Definiremos después una sucesión de números c_k, por ahora solo supondremos que $c_k \downarrow 0$.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} c_k \operatorname{sen} a_k x & x \in I_k \\ 0 & x = 0 \\ f(-x) & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

es claro que f está definida en todo $[-\pi, \pi]$, es continua en cada I_k y tiende a 0 en los puntos $\frac{a_k}{\pi}$, es decir no tiene discontinuidades allí; finalmente, $f(x) \to 0$ si $x \to 0$ ya que $c_k \to 0$, significa que es continua en todas partes.



Probaremos que su serie de Fourier converge en todas partes en $[-\pi, \pi]$ excepto en $x=0$. Por ser f Lipschitz continua en $[\delta, \pi]$ y en $[-\pi, -\delta]$, se tiene que su serie de Fourier converge en cada punto de $[-\pi, \pi]$ excepto tal vez en $x=0$.

Demostraremos que con una elección apropiada de los números c_k y n_k la serie $S[f]$ diverge en $x=0$.

Como es sabido, para cualquier f tenemos

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt + o(1),$$

y por ser f par, en $x=0$, tenemos que

$$S_n(f,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt + o(1)$$

Demostraremos que para una elección adecuada de c_k y n_k tenemos

$$J_k = \int_0^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\,dt \longrightarrow \infty \qquad \text{si } k \longrightarrow \infty$$

si ésto es así, entonces $S_{a_k}(f,0) \longrightarrow \infty$ si $k \longrightarrow \infty$ y entonces la serie $S[f]$ diverge en $x=0$.

Para evaluar J_k, la dividiremos en tres términos

$$J_k = \int_0^{\pi/a_k} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\,dt + \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\,dt + \int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\,dt$$

$$= J_k' + J_k'' + J_k'''.$$

Tenemos

$$\left|\frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\right| \le a_k .$$

Esto significa que

$$J'_k \leq \max_{0 \leq t \leq \pi/a_k} |f(t)|\, a_k \frac{\pi}{a_k} = \pi \cdot C_{k+1} = o(1) \qquad (10)$$

ya que $C_k \downarrow 0$.

Hasta ahora no hemos definido los números c_k y n_k. Ahora supondremos que $n_1 = 2$, $c_1 = 1$. Si $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ y $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ han sido definidos, entonces $f(t)$ está definida en $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$ es decir en $(\frac{\pi}{a_{k-1}}, \pi]$. f es continua en este intervalo $t \geq \frac{\pi}{a_k}$, entonces $f(t)/t$ está acotada. Consecuentemente, si n es suficientemente grande, entonces

$$\int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} \frac{f(t)}{t} \operatorname{sen} nt\, dt$$

puede ser tan pequeña como se desee.

Ya que $a_k = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ entonces si $n_1, \dots, n_{k-1}$ ya estan fijos, n_k está aún a nuestra disposición, lo que significa que podemos hacer a_k tan grande como para que

$$|J'''_k| \leq \left| \int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\, dt \right| < \frac{1}{k} \qquad (11)$$

por tanto $J'''_k = o(1)$, si $k \to \infty$.

Sólo queda estimar J_k''. Tenemos

$$J_k'' = \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} c_k \operatorname{sen} a_k t \,\frac{\operatorname{sen} a_k t}{t}\, dt = \frac{c_k}{2}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{1-\cos 2a_k t}{t}\, dt$$

$$= \frac{c_k}{2}\ln n_k - \frac{c_k}{2}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos 2a_k t}{t}\, dt$$

De acuerdo con el segundo teorema del valor medio, tomando en cuenta que $\frac{1}{t}$ es positiva y decrece monótonamente en el rango de integración, encontramos que

$$\left|\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos 2a_k t}{t}\, dt\right| \leq \frac{a_k}{\pi}\left|\int_{\pi/a_k}^{\xi} \cos 2a_k t\, dt\right| \leq \frac{a_k}{\pi}\,\frac{2}{2a_k} = \frac{1}{\pi}$$

Entonces de $c_k \to 0$ se sigue que

$$J_k'' = \frac{1}{2} c_k \ln n_k + o(1)$$

por lo tanto de (10) y (11)

$$J_k = \frac{1}{2} c_k \ln n_k + o(1)$$

Podemos ahora suponer, siempre que $c_k = \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}}$ y que $c_k \downarrow 0$, que

$$J_k = \frac{1}{2}\sqrt{\ln n_k} + o(1) \longrightarrow \qquad \text{si } k \to \infty \qquad \text{Q.E.D.}$$

De la figura es evidente que la función f, si x se aproxima a cero, realiza más oscilaciones y mas intesamente.

II Sistema de Haar y Funciones de Lebesgue

§1. Sistema Ortogonal de Haar

Hasta ahora hemos visto que la serie de Fourier de una función $f \in L^2$ respecto a un sistema ortogonal $\{\phi_n\}$, converge a f en la métrica de L^2, siempre que el sistema sea completo, y en el caso del sistema trigonométrico hemos visto que si además de continuidad imponemos a f alguna condición de suavidad, por ejemplo Lipschitz continuidad, entonces su serie de Fourier converge a élla uniformemente, y vimos que continuidad solamente no basta. Ahora quisiéramos saber si existe un sistema ortogonal con la propiedad de que la serie de Fourier de cualquier función continua converge a ella uniformemente. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y el primer ejemplo de este tipo de sistemas fué construido por A. Haar. Una descripción intuitiva de las ideas que condujeron a este sistema puede darse como sigue.

Considere el siguiente conjunto de funciones:

$$f_0(x) \equiv 1 \qquad x \in [0,1]$$

$$f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \qquad f_1^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

. . . .

$$f_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{2^k} < x < \frac{i}{2^k} \\ 0, & 0 \leq x < \frac{i-1}{2^k} \;\; \text{o} \;\; \frac{i}{2^k} < x \leq 1, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3,\ldots,2^k \\ k = 1,2,3,\ldots,\infty \end{array}$$

en los puntos de discontinuidad sea $f_k^{(i)}$ igual a la media aritmética de los valores tomados por $f_k^{(i)}$ en los intervalos adjuntos.

Claramente con las funciones $f_k^{(i)}$ podemos aproximar cualquier función continua en el intervalo $[0,1]$ tánto como deseemos, y por tanto, podemos expander cualquier función continua, en una serie de funciones $f_k^{(i)}$ uniformemente convergente, ya que una función continua f, en $[0,1]$, es uniformemente continua en $[0,1]$ y puede ser aproximada tanto como se desee por combinaciones lineales de las funciones $f_k^{(i)}$, si k se elige suficientemente grande.

El sistema de Haar puede obtenerse ortogonalizando y normalizando el conjunto de funciones $f_k^{(i)}$. El sistema de Haar χ consiste de las siguientes funciones.

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1 \qquad x \in [0,1]$$

$$\chi_0^{1}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & ; \quad x = \frac{1}{2} \\ -1 & ; \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Estas son las dos primeras funciones del sistema de Haar; las otras funciones las definimos para $m \geq 1$ y $1 \leq k \leq 2^m$ como sigue

$$\chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & x \in \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k-\frac{1}{2}}{2^m}\right) \\ -\sqrt{2^m} & x \in \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right) \\ 0 & x \in \left(\frac{l-1}{2^m}, \frac{l}{2^m}\right) \quad \text{con } l \neq k,\ 1 \leq l \leq 2^m \end{cases}$$

la misma convención que utilizamos par $f_k^{(i)}$ en los puntos de discontinuidad, vale para $\chi_m^{(k)}$, y en los puntos 0 y 1, que $\chi_m^{(k)}$ tome el mismo valor que en los intervalos $(0, \frac{1}{2^{m+1}})$ y $(1-\frac{1}{2^m}, 1)$ respectivamente. Es fácil ver que las funciones de Haar forman un sistema ortonormal.

Claramente χ_0^k $(k=0,1)$ son ortogonales a todas las otras. Si $m \geq 1$ y $1 \leq i, j \leq 2^m$ para $i \neq j$, el producto $\chi_m^{(i)}(x)\, \chi_m^{(j)}(x)$ es cero, mientras que para $n > m$, el intervalo donde $\chi_n^{(i)}$ no es cero, está contenido en un intervalo donde $\chi_m^{(j)}(x)$ es constante y entonces

$$\int_0^1 \chi_n^{(i)}(x)\chi_m^{(j)}(x)dx = \pm\sqrt{2^m}\int_0^1 \chi_n^{(i)}(x)dx = 0$$

El sistema de Haar, como en el caso del sistema trigonométrico, no sólo es completo sino que satisface la siguiente propiedad ligeramente más fuerte:

TEOREMA I. Si f es una función integrable cuyos coeficientes de Fourier respecto a χ son todos cero, entonces $f=0$.

Prueba. En efecto, supongamos que

$$\int_0^1 f(t)\, \chi_m^{(k)}(t)dt = 0 \qquad 1 \leq k \leq 2^m,\ m = 1, 2, \ldots, \infty$$

definamos

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

entonces la ecuación

$$\int_0^1 f(t)\chi_0^{(0)}(t)\,dt = 0.$$

es equivalente a $F(1)=0$. Análogamente

$$\int_0^1 f(t)\chi_0^{(1)}(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt$$

implica $F(\frac{1}{2})=0$. Tomando en consideración las relaciones establecidas anteriormente, tenemos

$$\int_0^1 f(t)\chi_1^{(1)}(t)\,dt = \sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{4}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt\right\} = \sqrt{2}\left(2F\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) = 0$$

$$\int_0^1 f(t)\chi_1^{(2)}(t)\,dt = \sqrt{2}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(t)\,dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 f(t)\,dt\right\} = \sqrt{2}\left(2F\left(\tfrac{3}{4}\right)\right) = 0$$

es decir $F(\frac{1}{4}) = F(\frac{3}{4}) = 0$.

Continuando de esta manera, es fácil ver que todo racional diádico satisface la relación.

$$F\left(\tfrac{k}{2^n}\right) = 0 \qquad (n=0,1,\dots\ ;\ k=0,1,\dots,2^n).$$

La función F es, sin embargo, continua, y ya que es cero en un conjunto denso en $[0,1]$, se sigue que $F(x)\equiv 0$. Ya que $f(x)=F'(x)$, casi donde quiera, este resultado implica que $f(x)=0$ también se dá casi en todas partes. Q.E.D.

Sea ahora f una función L-integrable en $[0,1]$, su expansión en funciones de Haar

$$f(x) \sim c_0 \chi_0^{(0)}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} c_m^{(k)} \chi_m^{(k)}(x)$$

tiene una propiedad de convergencia muy buena, pues los siguientes teoremas son ciertos

TEOREMA 2. a) Si f es L-integrable, entonces la expansión de Haar de f converge a f c.d.

b) La expansión de Haar de la función f converge a f en todo punto de continuidad de f, y converge uniformemente en todo intervalo en el cual f es continua.

Prueba: Detengamos la expansión de Haar de la función f en algún término, digamos, en el término con índices k, m; entonces escribiendo

$$K_m^{(k)}(t,x) = \chi_0^{(0)}(t) \cdot \chi_0^{(0)}(x) + \dots + \chi_m^{k}(t) \chi_m^{(k)}(x)$$

obtenemos

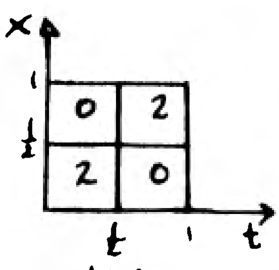
$$S_m^{(k)}[f](x) = \int_0^1 f(t)\, K_m^{(k)}(t,x)\, dt.$$

Los teoremas establecidos se siguen de la naturaleza del kernel $K_m^{(k)}(t,x)$, que ahora investigamos.

Para empezar, es claro que $K_0^{(0)} \equiv 1$ para todo par de valores t, x. Tomando en cuenta que la función $\chi_0^{(1)}(t)\chi_0^{(1)}(x)$ toma el valor 1 en los cuadrados $Q_{11} = \{(t,x)/ 0 \le t < \frac{1}{2},\ 0 \le x < \frac{1}{2}\}$ y $Q_{22} = \{(t,x)/ \frac{1}{2} < t \le 1,\ \frac{1}{2} < x \le 1\}$, el valor -1 en los cuadrados $Q_{21} = \{(t,x)/ 0 \le t < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x \le 1\}$ y $Q_{12} = \{(t,x)/ \frac{1}{2} \le t < 1,\ 0 \le x < \frac{1}{2}\}$ y en el resto toma el valor 0, se sigue que

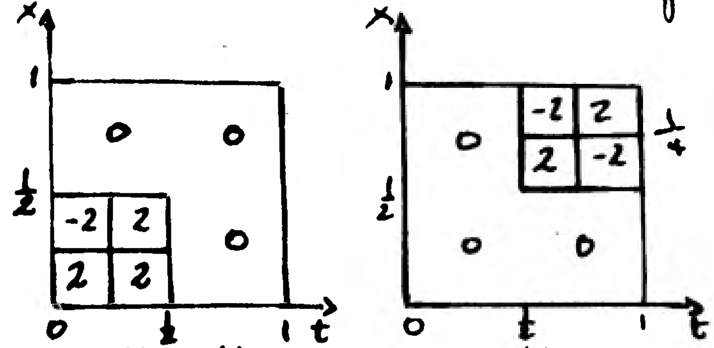
$$K_0^{(1)}(t;x) = K_0^{(0)}(t,x) + \chi_0^{(1)}(t)\,\chi_0^{(1)}(x)$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } (t,x) \in Q_{11} \cup Q_{22} \\ 0 & \text{si } (t,x) \in Q_{21} \cup Q_{12} \\ 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \ \text{ o } \ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



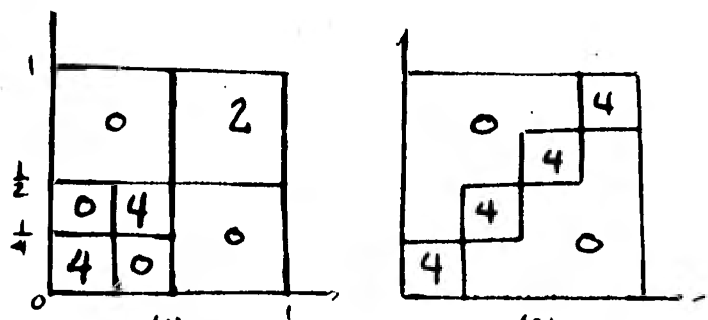
$K_1(t,x)$

Calculemos ahora $K_1^{(1)}$ y $K_1^{(2)}$. Análogamente, toman do en cuenta que las funciones $\chi_1^{(1)}(t)\,\chi_1^{(1)}(x)$ y $\chi_1^{(2)}(t)\,\chi_1^{(2)}(x)$ toman valores como se indica en las gráficas



$\chi_1^{(1)}(t)\,\chi_1^{(1)}(x)$ $\qquad$ $\chi_1^{(2)}(t)\,\chi_1^{(2)}(x)$

se sigue que $K_1^{(1)}(t,x)$ y $K_1^{(2)}(t,x)$ son como se muestra en la gráfica.



$K_1^{(1)}(t,x)$ $\qquad$ $K_1^{(2)}(t,x)$

Procediendo de esta manera, obtenemos por inducción para $K_n^{(2^n)}$ el siguiente resultado: Sea Q el cuadrado unitario dividido por paralelas en 2^{2n+2} subcuadrados iguales: En los subcuadrados $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2^{n+1}}$ que están en la diagonal $t=x$ de Q, tenemos, $K_n^{(2^n)}(t,x)=2^{n+1}$ mientras que en los otros $K_n^{(2^n)}(t,x)=0$, sobre los lados de cuadrados colindantes $K_n^{(2^n)}(t,x)$ es igual a la media aritmética de los valores tomados por ésta en los cuadrados. Para obtener el conjunto de los valores tomados por

$$K_{n+1}^{(P)}(t,x) = K_n^{(2^n)} + \sum_{k=1}^{P} \chi_{n+1}^{(k)}(t)\,\chi_{n+1}^{(k)}(x) \qquad (1 \le P \le 2^{n+1})$$

dividamos los primeros P cuadrados $Q_1, Q_2, \ldots, Q_P$ por paralelas en cuatro cuadrados iguales: Estos cuadrados de Q_k se denotarán por $Q_k^{(1,1)}$, $Q_k^{(1,2)}$, $Q_k^{(2,1)}$, $Q_k^{(2,2)}$. Enton. $K_{n+1}^{(P)}(t,x)=2^{n+2}$ en los cuadrados $Q_k^{(1,1)}$ y $Q_k^{(2,2)}$, que están en la diagonal de Q_k, mientras que en los otros dos cuadrados $K_{n+1}^{(P)}(t,x)=0$. Sobre los lados de cuadrados colindantes $K_{n+1}^{(P)}(t,x)$ es igual a la media aritmética de los valores tomados por ésta en los cuadrados, en los otros puntos del cuadrado unitario Q, tenemos $K_n^{(P)}(t,x)=K_n^{(2^n)}(t,x)$.

Ahora es fácil calcular las sumas parciales

$$S_m^{(k)}(x) = \int_0^1 f(t)\,K_m^{(k)}(t,x)\,dt$$

En efecto, si x no es una fracción binaria finita, entonces $K_m^{(k)}(t,x)$ difiere de cero en un intervalo $I_m^{(k)}$ $(x \in I_m^{(k)})$ de longitud $|I_m^{(k)}| = \frac{1}{2^m}$ o $\frac{1}{2^{m+1}}$, tomando en estos intervalos el valor 2^m o 2^{m+1} respectivamente, entonces

$$S_m^{(k)}(x) = \frac{1}{|I_m^{(k)}|} \int_{I_m^{(k)}} f(t)\, dt .$$

Por el contrario si x es una fracción binaria, entonces tenemos $K_m^{(k)}(t,x) = 2^{m+1}$, 2^m o 2^{m-1} en un intervalo $I_n^{(k)}$ $(x \in I_m^{(k)})$ de longitud $\frac{1}{2^{m+1}}$, $\frac{1}{2^m}$ o $\frac{1}{2^{m-1}}$ respectivamente, y entonces vemos que la fórmula establecida es también cierta en este caso o tenemos $K_m^{(k)}(t,x) = 2^m$ en $I_m^{(k)} = (x - \frac{1}{2^{m-1}}, x]$ y $K_m^{(k)}(t,x) = 2^{m-1}$ en el intervalo $J_m^{(k)} = (x, x+\frac{1}{2^m})$, y en este último caso

$$S_m^{(k)}(x) = \frac{1}{2|I_m^{(k)}|} \int_{I_m^{(k)}} f(t)\,dt + \frac{1}{2|J_m^{(k)}|} \int_{J_m^{(k)}} f(t)\,dt$$

se dá

Si permitimos a m tender a infinito, los intervalos $I_m^{(k)}$, $J_m^{(k)}$ se contraen al punto x por esta razón, poniendo

$$F(u)=\int_0^u f(t)\,dt$$

obtenemos $\lim_{m\to\infty} S_m^{(k)}(x) = F'(x)$, siempre que la derivada de F exista en el punto x.

Ya que, como es bien sabido, $F'(x)$ existe para casi todo valor de x, podemos inferir de ésto, que $S_m^{(k)}(x) \to f(x)$ c.d.

Si f es continua en el punto x, entonces $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ se da, sea $\varepsilon>0$ tan pequeña como sea, siempre que t esté suficientemente cerca de x. En consecuencia de ésto, tenemos para m suficientemente grande

$$|S_m^{(k)}(x)-f(x)| \leq \frac{1}{|I_m^{(k)}|}\int_{I_m^{(k)}}|f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon$$

o

$$|S_m^{(k)}(x)-f(x)| \leq \frac{1}{2|I_m^{(k)}|}\int_{I_m^{(k)}}|f(t)-f(x)|\,dt + \frac{1}{2|J_m^{(k)}|}\int_{J_m^{(k)}}|f(t)-f(x)|\,dt$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

y esta relación se dá uniformemente en todo intervalo en el cual f es uniformemente continua. Q.E.D.

§ 2. El Sistema Ortonormal de Franklin.

Una diferencia entre el sistema trigonométrico y el sistema de Haar es que uno consiste de funciones continuas (el Trigonométrico) y el otro consiste de funciones que son tan sólo continuas a trozos. Pero ésto no constituye una diferencia esencial. Poco después del trabajo de Haar, Ph. Franklin dió una construcción de un sistema ortonormal consistente de funciones continuas que tienen la propiedad de sistema de Haar, el sistema de Franklin es el primer ejemplo de una base ortonormal del espacio C.

El sistema de Franklin no es otra cosa que el sistema de Haar integrado y ortogonalizado. Si integramos una función del sistema de Haar, lo que obtenemos es una función poligonal, entonces si en el sistema de Haar la idea era aproximar una función continua por medio de funciones escalonadas, en el sistema de Franklin la idea será aproximarla por medio de funciones poligonales.

A continuación definiremos el sistema de Franklin y demostraremos que tiene la propiedad mencionada, pero antes introduzcamos alguna notación y unos resultados preliminares:

Sea $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ una partición fija del intervalo $[0,1]$. Entonces una función de la forma

$$\varphi(t) = \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_i) + \xi_{i-1}$$

para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ donde $\{t_i\}$ es la partición dada es llamado n-polígono. Nótese que $\varphi(t_i) = \xi_i$ para t_i en la partición.

Probaremos ahora una desigualdad que implicará el teorema de Franklin.

TEOREMA 3. Sea $\{t_i\}$ una partición fija de $[0,1]$, y sea φ_0 un n-polígono determinado, para una $f \in C[0,1]$

dada, por la condición

$$\|f-\varphi_0\|_2 = \inf_{\xi_i} \|f-\varphi\|_2 \qquad (2)$$

donde φ se define como en (1). Entonces

$$\|\varphi_0\|_\infty \leq 3\|f\|_\infty$$

Prueba: Sea $\varphi_0(t_i) = \xi_i^{(0)}$, $i=0,\dots,n$, obtenemos de (2) que

$$\left(\frac{\partial \|f-\varphi\|_2^2}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_k = \xi_k^{(0)}} = 0 \qquad k=0,\dots,n$$

es decir

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta_1}{3}+\xi_0^{(0)}+\frac{\delta_1}{6}\xi_1^{(0)} = \frac{1}{\delta_1}\int_{t_0}^{t} f(t)(t_1-t)\,dt,\\
&\frac{\delta_k}{6}\xi_{k-1}^{(0)} + \frac{\delta_k+\delta_{k+1}}{3}\xi_k^{(0)} + \frac{\delta_{k+1}}{6}\xi_{k+1}^{(0)}\\
&= \frac{1}{\delta_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)(t-t_{k-1})\,dt + \frac{1}{\delta_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)(t_{k+1}-t)\,dt \quad \text{para } k=1,\dots,n-1\\
&\frac{\delta_n}{6}\xi_{n-1}^{(0)} + \frac{\delta_n}{3}\xi_n^{(0)} = \frac{1}{\delta_n}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)(t-t_{n-1})\,dt
\end{aligned}\right\} (3)$$

donde $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, $i=1,\dots,n$. ahora es fácil ver que las ecuaciones en (3) implican:

$$|2\xi_0^{(0)} + \xi_1^{(0)}| \leq 3\|f\|_\infty$$

$$\left| \frac{\delta_k}{\delta_k+\delta_{k+1}} \xi_{k-1}^{(0)} + \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k+\delta_{k+1}} \xi_{k+1}^{(0)} + 2\xi_k^{(0)} \right| \leq 3\|f\|_\infty, k=1,\dots,n-1$$

$$\left| \xi_{n-1}^{(0)} + 2\xi_n^{(0)} \right| \leq 3\|f\|_\infty$$

Por tanto $2\|\varphi_0\|_\infty \leq 3\|f\|_\infty + \|\varphi_0\|_\infty$ y ésto prueba el teorema Q.E.D.

Ahora regresemos a la definición del sistema de Franklin, y para éllo, simplemente por comodidad, usaremos otra numeración del sistema de Haar un poco más natural:

$$\chi_1 = \chi_0^{(0)} ; \quad \chi_n = \chi_k^{(j)} \qquad (n = 2^k + j, \ 1 \leq j \leq k)$$

Definiremos las funciones de Schauder como sigue:

$$\varphi_0(t) \equiv 1 \qquad , \qquad \varphi_n(t) = \int_0^t \chi(x)\,dx \qquad t \in [0,1], \ n=1,2,\dots$$

El proceso de ortonormalización de Schmidt aplicado a $\{\varphi_n\}$ conduce a las funciones de Franklin.

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{in} \varphi_i(t) \quad \text{con } \lambda_{nn} > 0 \quad n = 0,1,\dots$$

obsérvese que el conjunto $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ y el conjunto $\{f_i\}_{i=0}^n$ generan el mismo subespacio.

Ahora especificaremos las particiones que aparecen en la definición de n-polígonos. En el caso $n=1$ la partición $\{t_0, t_1\}$ está determinada; $t_0=0$ y $t_1=1$. En el caso general $(n>1)$ existe exactamente un entero no negativo m tal que $2^m < n \leq 2^{m+1}$. Sea $n = 2^m + k$. Entonces pondremos

$$t_i = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{m+1}} & \text{para } i = 0, 1, \ldots, 2k \\ \dfrac{i-k}{2^m} & \text{para } i = 2k+1, \ldots, n \end{cases} \qquad (4)$$

Nótese que, con esta partición, los n-polígonos es un espacio vectorial y que una base de este espacio es exactamente $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ donde φ_i es la i-ésima función de Schauder, entonces para estas particiones el Teorema 3 toma la forma:

TEOREMA 4. Sea $f \in C[a,b]$ y sea $S_n[f]$ la n-ésima suma de Fourier-Franklin de la función f. Entonces

$$\|S_n[f]\|_\infty \leq 3\|f\|_\infty \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

El siguiente teorema contiene una propiedad muy útil e interesante de las funciones de Schauder.

TEOREMA 5. Si $f \in C[0,1]$, entonces

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \chi_n(t)\, df(t) \right] \varphi_n(x)$$

donde la serie es uniformemente convergente en $[0,1]$.

Prueba: Sea $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ y $r_{2^n+k} = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$ para $n = 0, 1, \ldots$; $k = 1, \ldots, 2^n$. Para $n \geq 1$, denote por σ_n el n-polígono, definido sobre $[0,1]$ cuyos puntos angulares son exactamente $r_2, \ldots, r_n$ y que satisface las condiciones $\sigma_n(r_i) = f(r_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Hagamos $\sigma_0(x) = f(0)$ $x \in [0,1]$. Es evidente que $\|f - \sigma_n\|_\infty \to 0$ con $n \to \infty$. Por tanto la serie

$$\sigma_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)]$$

converge a f uniformemente en $[0,1]$. Por otro lado existen números c_n, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x) = c_n \varphi_n(x).$$

Entonces

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

puede verse fácilmente que

$$c_1 = f(1) - f(0) = \int_0^1 \chi_1(t)\, df(t)$$

y

$$c_{2^n+k} = \sqrt{2^n}\left[2f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] = \int_0^1 \chi_{2^n+k}(t)\, df(t)$$

para $n = 0, 1, \ldots$; $k = 1, \ldots, 2^n$ Q.E.D

Denotemos por $E_n(f)$ la mejor aproximación de la función continua $f \in C[0,1]$, por n-polígonos, es decir

$$E_n(f) = \inf \|f - \varphi\|_\infty$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las φ definidas en (1), con una partición fija $\{t_i\}$. El siguiente teorema concerniente a la mejor aproximación E_n, es análogo al teorema de Jackson para la mejor aproximación por polinomios trigonométricos.

TEOREMA 6. Sea $f \in C[0,1]$. Entonces

$$E_1(f) \leq \omega(1) \quad ; \quad E_n(f) \leq 2\,\omega(\tfrac{1}{n}) \text{ para } n \geq 1$$

ó

$$E_n(f) \leq \omega(\tfrac{1}{2^m}) \quad \text{para } n \geq 2,\ 2^m < n \leq 2^{m+1}.$$

Prueba: Obviamente

$$E_n(f) \leq \| f - \sigma_n(f) \|$$

donde

$$\sigma_n(f)(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \chi_i(t)\, df(t) \right] \varphi_i(x)$$

y

$$\sigma_n(f)(t_i) = f(t_i)$$

para t_i dado por (4). Q.E.D.

TEOREMA.7. Se $f \in C[0,1]$, $m \geq 0$, $n = 2^m + k$ y $2^m < n \leq 2^{m+1}$. Entonces

$$\| f - S_{2^m+k} \| \leq 4\,\omega(\tfrac{1}{2^m})$$

donde S_{2^m+k} es la 2^m+k suma de Fourier-Franklin.

Prueba: Es suficiente con aplicar los teoremas 4 y 6 para obtener:

$$\|f - S_{2^m+k}\|_\infty \leq \|f - E_{2^m+k}(f)\|_\infty + \|S_{2^m+k}[f - E_{2^m+k}(f)]\|_\infty$$
$$\leq 4\|f - E_{2^m+k}(f)\| \leq 4\,\omega\left(\tfrac{1}{2^m}\right) \qquad \text{Q.E.D.}$$

De este teorema obtenemos inmediatamente como corolario el resultado deseado:

Corolario. Si $f \in C[a,b]$ entonces su serie de Fourier-Franklin converge a ella uniformemente.

§3. Funciones de Lebesgue.

El problema de la convergencia de la serie de Fourier $S[f]$ de una función f respecto a un sistema $\phi = \{\phi_n\}$ en un punto x conduce al concepto de función de Lebesgue. Es fácil ver que $S_n(f;x)$ puede escribirse en la forma

$$
\begin{aligned}
S_n(f;x) &= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f(t)\,\overline{\phi(t)}\,dt\ \phi_k(x) \\
&= \int_a^b f(t) \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x)\,\overline{\phi_k(t)}\,dt \qquad (5) \\
&= \int_a^b f(t)\, D_n^{\phi}(x,t)\,dt
\end{aligned}
$$

donde $D_n^{\phi}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x)\overline{\phi_k(t)}$. Llamaremos a D_n^{ϕ} el kernel de Dirichlet del sistema ϕ.

Fijemos x, y definamos

$$\Lambda_n f = S_n(f;x) \qquad (f \in C[a,b],\ n \in \mathbb{N})$$

y

$$S^*(f;x) = \sup_n |S_n(f;x)|$$

Sabemos que $C[a,b]$ es un espacio de Banach con la norma del supremo $\|f\|_\infty$. Se sigue entonces de (5) que cada Λ_n es una funcional lineal sobre $C[a,b]$, la norma de esta funcional $L_n(x) = \|\Lambda_n\|$ es llamada función de Lebesgue

TEOREMA 8. Para cualquier sistema ortonormal ϕ

$$L_n(x) = \int_a^b |\mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)|\, dt = \|\mathcal{D}_n^{\phi}\|.$$

Prueba: Es claro que

$$L_n(x) \le \int_a^b |\mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)|\, dt$$

Sea

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)}}{|\mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)|} & \text{si } \mathcal{D}_n^{\phi}(x,t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mathcal{D}_n^{\phi}(x,t) = 0. \end{cases}$$

Por el teorema de N.N. Lusin existe $f_j \in C[a,b]$, tal que $\|f_j\|_\infty \le 1$ y que $f_j(t) \to g(t)$ para toda t, si $j \to \infty$ por el teorema de convergencia dominada

$$\lim \Lambda_n(f_j) = \lim \int_a^b f_j(t)\, \mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)\, dt$$
$$= \int_a^b g(t)\, \mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)\, dt = \int_a^b |\mathcal{D}_n^{\phi}(x,t)|\, dt = \|\mathcal{D}_n^{\phi}\|,$$

Q.E.D.

El teorema de Banach-Steinhaus afirma entonces que si $\|\Delta_n\| < M$ no ocurre para alguna M, entonces el $\sup\|\Delta_n f\| = \infty$ para toda f en algún G_δ denso en $C[a,b]$, es decir que $S^*(f;x) = \infty$ para toda f en éste G_δ. Entonces una condición necesaria para que se dé la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad (\forall f \in C[a,b])$$

es que

$$L_n(x) = O_x(1).$$

Para el sistema trigonométrico, tenemos

$$L_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}} \right| dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \right| dt > \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})t| \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\operatorname{sen} t| \frac{dt}{t} > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} t|\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \longrightarrow \infty$$

A cada número real x en $[-\pi,\pi]$ le corresponde un $E_x \subset C[-\pi,\pi]$ que es denso allí, tal que $S_2^*(f;x) = \infty$ para toda $f \in E_x$

Las observaciones anteriores conducen al siguiente Teo_ rema.

TEOREMA 9. Existe un conjunto $E \subset C[-\pi,\pi]$ que es un G_δ denso en $C[-\pi,\pi]$ que tiene la siguiente propiedad: Para cada $f \in E$, el conjunto

$$Q_f = \{ x / S_\tau^*(f:x) = \infty \}$$

es un G_δ en $[-\pi,\pi]$.

Prueba: tomemos una cantidad numerable de puntos x_i en $[-\pi,\pi]$ y sea E la intersección de los conjuntos correspondientes

$$E_{x_i} \subset C[-\pi,\pi].$$

Por el teorema de Baire, E es un G_δ en $C[-\pi,\pi]$. Toda f en E tiene

$$S_\tau^*(f;x) = \infty$$

en todo punto x_i

Para cada f, $S_\tau^*(f;x_i)$ es una función inferiormente semicontinua de x, ya que S_τ^* es el supremo de una colección de funciones continuas. Por tanto $\{x;\ S_\tau^*(f,x) = \infty\}$ es un

G_s en $[-\pi, \pi]$ para cada f. Si los puntos anteriores x_i se toman de tal manera que formen un denso en $[-\pi, \pi]$ obtenemos el resultado deseado Q.E.D.

En el caso del sistema de Haar, podemos ver, de las observaciones hechas en la seccion 1 sobre $K(x,t)$, que $L_x(x) \equiv 1$.

III Desigualdad de Olevskiĭ y Funciones de Lebesgue de Sistemas Acotados

§1. Introducción

Comparando el sistema trigonométrico y el sistema de Haar, la siguiente diferencia llama nuestra atención: las funciones trigonométricas son uniformemente acotadas, mientras que las del sistema de Haar tienen picos cada vez mas altos.

No hace mucho, se descubrió que esta diferencia juega un papel muy importante en las cuestiones que aquí examinamos. Se probó que un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ no puede ser uniformemente acotado y que al mismo tiempo sus funciones de Lebesgue lo sean. Más precisamente, si un sistema ortonormal (S.O.N.) $\{\phi_n\}$ satisface la condición

$$|\phi_n(x)| \leq M$$

entonces para cada x en un conjunto de medida positiva satisface la condición

$$L_n(x) \neq O(1).$$

Esto demuestra que es imposible construir un S.O.N. uniformemente acotado tal que toda función continua tenga una serie de Fourier convergente en todas partes. Entonces el fenómeno de la divergencia local de una serie de Fourier (el teorema de du-Bois Reymond) está relacionado, nó específicamente con el sistema trigonométrico, sino que tiene una naturaleza un poco más general (la de los sistemas ortonormales uniformemente acotados).

La demostración se hace a través de una estimación de las funciones de Lebesgue que determina un orden de crecimiento fijo para sistemas uniformemente acotados. a decir, tales sistemas satisfacen la relación

$$L_n(x) = o(\ln n) \qquad (x \in E,\ \mu E > 0)$$

Este resultado y otros conectados con él, forman el contenido del presente capítulo.

§2. Desigualdad de Olevskiĭ.

Algunos de los resultados de este capítulo valen para espacios (X, μ) en general, aunque aquí sólo estamos interesados en los casos en que $X = [a, b]$ y μ es una medida de Borel finita y de manera muy particular nos interesa el caso en que μ es la medida de Lebesgue.

En esta sección X será un espacio con medida μ y $\{\phi_k\}$ $(1 \le k \le n)$ será una sucesión ortonormal de funciones en el espacio $L^2(X)$. Definimos

$$M = \max_{1 \le k \le n} \|\phi_k\|_\infty \tag{1}$$

y si $c = \{c_k\}$ es una sucesión de números, definimos

$$\|c\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |c_k|.$$

La siguiente desigualdad es fundamental en este trabajo:

TEOREMA 1. (Desigualdad de Olevskiĭ) El siguiente resultado es cierto.

$$\|C\|_\infty \max_{1\le k\le n}\int_X \Big|\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \phi_\nu(t)\Big|\, d\mu \ge \frac{K}{M}\,\frac{\sum_{\nu=1} |c_\nu|^2}{n}\, \ln n \qquad (2)$$

donde $K>0$ es una constante absoluta.

Prueba: Primeramente observemos que la desigualdad (2) es homogénea, en el sentido de que si multiplicamos a C por una constante, la desigualdad no se altera, también es invariante bajo la transformación $\hat{\mu}=\delta\mu$, $\hat{\phi}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\phi$, $\delta>0$. Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que:

$$\|C\|_\infty = M = 1 \qquad (3)$$

Sea ahora $C=\{C_k\}$, $1\le k\le n$ una sucesión fija que satisface (3). Por Δ entendemos un intervalo de números naturales de la forma $[\nu+1, \nu+p^r]\subset[1,n]$ ($r\ge 0$ un entero y $p=34$). Definimos los siguientes índices

La densidad de Δ: $\alpha(\Delta)=\frac{1}{|\Delta|}\sum_{k\in\Delta}|C_k|^2$, $|\Delta|=p^r$

El contenido de Δ: $\gamma(\Delta) = (r+1)\,\alpha(\Delta)$.

Para cada intervalo Δ, $(r>0)$ definimos

$$\Delta = [\nu + (i-1)p^{r-1},\ \nu + ip^{r-1}] \quad (1 \leq i \leq p) \tag{4}$$

Llamamos a Δ normal si

$$\gamma(\Delta) \geq \gamma(\Delta^i) \qquad (\forall i) \tag{5}$$

La siguiente proposición es un lema inductivo en la demostración del teorema

LEMA: Sea f una función tal que

$$\|f\|_\infty \leq p^{r+1} \qquad r \geq 2p \tag{6}$$

y sea $\Delta = [\nu+1, \nu+p^r]$ un intervalo normal. Entonces existen números l, k que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) el intervalo $\delta = [l+1, l+p^k]$ es normal, $\nu < l < l+p^k < \nu+p^r$;

(ii) $\lambda \int_{U_k^l} |f + \sum_{i=\nu+1}^{l} c_i \phi_i|\, d\mu \geq \gamma(\Delta) - \gamma(\delta)$

donde

$$U_k^l = \{t / |f(t) + \sum_{i=\nu+1}^{l} c_i \phi_i(t)| > p^{k+1}\} \quad (k>0);\ U_0^l = X$$

y λ es una constante absoluta.

Prueba: Ya que Δ es normal tenemos

$$\alpha(\Delta^i) \leq \frac{r+r}{r}\alpha(\Delta) \qquad (1\leq i\leq p)$$

Por tanto para cada j fija tenemos

$$\alpha(\Delta) = \frac{1}{p^r}\sum_{k\in\Delta}|c_k|^2 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\alpha(\Delta^i) = \frac{1}{p}\left[\alpha(\Delta^j) + \sum_{i\neq j}\alpha(\Delta^i)\right]$$

$$\leq \frac{\alpha(\Delta^j)}{p} + \frac{p-1}{p}\,\frac{r+1}{r}\,\alpha(\Delta)$$

Esto es

$$\alpha(\Delta^j) \geq \frac{r-p}{r}\alpha(\Delta) \qquad (1\leq j\leq p) \quad (9)$$

Definiremos una sucesión de números $\{r_s\}$ $(1\leq s\leq r)$. Si la desigualdad

$$\int_X |f|^2 d\mu > 9\, p^{r-1}\alpha(\Delta) \qquad (10)$$

se satisface, entonces definiremos $r_1 = r + p^{r-1}$; de otra forma definimos $r_1 = r + (p-1)p^{r-1}$. Los números $r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_r$ se eligen sucesivamente de tal manera que los intervalos $\Delta_s = [r_s + 1, r_s + p^{r-s}]$ satisfagan las relaciones

$$\Delta_s = \Delta_{s-1}^{i_s}, \qquad \alpha(\Delta_s) \geq \frac{r-p}{r}\alpha(\Delta) \qquad (11)$$

Es posible hacer ésto, tomando en cuenta (9), ya que para cada paso al menos un valor $i = i_s$ satisface $\alpha(\Delta_{s-1}^{i_s}) \geq \alpha(\Delta_{s-1})$. Claramente

$$\gamma_r - \gamma_s < p^{r-s}. \qquad (12)$$

Definimos

$$f_s = f + \sum_{i=\gamma+1}^{\gamma_s} c_i \phi_i \qquad (13)$$

$$U_s = \{t / |f_s(t)| > p^{r-s+1}\} \quad (s<r) \quad U_r = X \qquad (14)$$

Nótese la siguiente desigualdad

$$\int_X |f_r|^2 d\mu > p^{r-1}\alpha(\Delta) \qquad (15)$$

En efecto, si (10) se satisface, tomando en cuenta (12) y (8), tenemos

$$\|f_r\|_2 = \|f + \sum_{i=\gamma+1}^{\gamma_r} c_i\phi_i\|_2$$

$$\geq \|f\|_2 - \left(\sum_{i=\gamma+1}^{\gamma_r} |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} > (9p^{r-1}\alpha(\Delta))^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=\gamma+1}^{\gamma+2p^{r-1}} |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3[p^{r-1}\alpha(\Delta)]^{\frac{1}{2}} - (p^{r-1}[\alpha(\Delta') - \alpha(\Delta^2)])^{\frac{1}{2}}$$

$$\geq [p^{r-1}\alpha(\Delta)]^{\frac{1}{2}}\left[3 - \left(2\frac{r+1}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Si la desigualdad (10) no se satisface, hacemos la estimación análogamente teniendo en cuenta (9) y (6):

$$\|f_r\|_2 \geq \Big(\sum_{i=r+1}^{r_{r+1}} |c_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \|f\|_2 \geq \Big(\sum_{i=r+1}^{r_1} |c_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \|f\|_2$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i\in\Delta^j} |c_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \|f\|_2 \geq [p^{r-1}\alpha(\Delta)]^{\frac{1}{2}}\Big[\Big(\frac{(p-1)(r-p)}{r}\Big)^{\frac{1}{2}} - 3\Big]$$

$$> [p^{r-1}\alpha(\Delta)]^{\frac{1}{2}}\Big[\Big(\frac{p-1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} - 3\Big] > [p^{r-1}\alpha(\Delta)]^{\frac{1}{2}}$$

Más aún, notamos la siguiente desigualdad:

$$|f_r(t)| < 2|f_s(t)| \qquad (t\in U_s;\ 1\leq s<r) \tag{16}$$

En efecto, usando en orden (13), (1), (3), (12), (14), tenemos:

$$|f_r(t)| \leq |f_s(t)| + \Big|\sum_{i=r_s+1}^{r_r} c_i\,\phi_i(t)\Big| \leq |f_s(t)| + p^{r-s} < |f_s(t)|\Big(1+\frac{1}{p}\Big)$$

Análogamente, debido a (6)

$$\|f_r\|_\infty < p^{r+2} \tag{17}$$

Definimos

$$\max_{1\leq s\leq r} \frac{1}{s}\int_{U_s} |f_s|\, d\mu = \rho \tag{18}$$

y estimamos $\|f_r\|_2$ de lo de arriba. Sea

$G_s = \{t \,/\, p^{r-s+2} < |f_r(t)| < p^{r-s+3}\}$ $(1\leq s<r)$, $G_r = \{t/|f_r(t)|<p^3\}$

Claramente, para $t\in G_s$ $(s<r)$, tenemos

$$|f_s(t)| \geq |f_r(t)| - p^{r-s} > p^{r-s+2} - p^{r-s} > p^{r-s+1}$$

Esto es, $G_s \subset U_s$ $(1 \leq s \leq r)$. Entonces, debido a (17), (16) y (18), llegamos a la estimación

$$\int_{\mathbb{X}} |f_r|^2 d\mu = \sum_{s=1}^{r} \int_{G_s} |f_r|^2 d\mu \leq \sum_{s=1}^{r} \sup_{t \in G_s} |f_r(t)| \int_{G_s} |f_r(t)| d\mu$$

$$\leq \sum_{s=1}^{r} p^{r-s+3} \int_{U_s} |f_r| d\mu \leq 2p^{r+3} \sum_{s=1}^{r} p^{-s} \int_{U_s} |f_s| d\mu$$

$$\leq 2\, p^{r+3} \rho \sum_{s=1}^{r} p^{-s} s < 2 p^{r+3} \rho .$$

Comparando ésto con (15), concluimos que $\rho > \frac{\alpha(\Delta)}{2\, p^q}$.

Entonces para algún número $s = s_0$ tenemos la desigualdad

$$\int_{U_{s_0}} |f_{s_0}| d\mu > \frac{1}{2p^q} \alpha(\Delta) s_0 \tag{19}$$

Más aún, es fácil ver de la definición de normalidad que se puede encontrar un intervalo normal

$$\delta = [l+1, l+p^k] \subset \Delta_{s_0}, \quad \gamma(\delta) \geq \gamma(\Delta_{s_0}) \geq (r-s_0+1)\frac{r-\rho}{r} \alpha(\Delta) \tag{20}$$

(Lo último es una consecuencia de (11)). Sea

$$F = f + \sum_{i=r+1}^{l} c_i \phi_i \equiv f_{s_0} + \sum_{i=r_{s_0}+1}^{l} c_i \phi_i \tag{21}$$

Entonces tenemos la inclusión

$$U_{s_0} \subset U_k^1 \tag{22}$$

(El último conjunto se define en la ecuación (7)). En efecto, si $k = r - s_0$, esto es, $\delta = \Delta_{s_0}$ entonces los conjuntos coinciden. En el caso $k < r - s_0$ tenemos, para $t \in U_{s_0}$,

$$|F(t)| \geq |f_{s_0}(t)| - (\ell - \gamma_{s_0}) > p^{r-s_0+1} - p^{r-s_0} \geq p^{k+1}$$

por lo tanto obtenemos (22). Más aún, para $t \in U_{s_0}$ la siguiente desigualdad es cierta:

$$|F(t)| > |f_{s_0}(t)| - p^{r-s_0} > |f_{s_0}(t)| \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Entonces, teniendo en mente (22) y (19), obtenemos

$$\int_{U_k^\ell} |F(t)| \, d\mu \geq \frac{1}{2} \int_{U_{s_0}} |f_{s_0}| \, d\mu > \frac{s_0}{4p^4} \alpha(\Delta) \tag{23}$$

Finalmente, haciendo $\lambda = p^6$, debido a (20) y (22) concluimos que

$$\lambda \int_{U_k^\ell} |F| \, d\mu + \gamma(J) > \alpha(\Delta) \left[3ps_0 + (r - s_0 + 1) \frac{r-p}{r} \right]$$

$$= \alpha(\Delta) \left[3ps_0 + (r - s_0 + 1)\left(1 - \frac{p}{r}\right) \right]$$

$$= \alpha(\Delta) \left[r + 1 + \frac{rs_0(p-1) + rp(s_0 - 1) + p(s_0 - 1) + rps_0}{r} \right]$$

$$> (r+1) \alpha(\Delta)$$

Esto completa la prueba del lema.

Ahora regresamos a la prueba de la desigualdad (2). Sea $r_0 = [\log_p n]$. Obsérvese que podemos definir un intervalo $\Delta_0 = [r_0+1, r_0+p^{r_0}] \subset [1,n]$ que satisface la desigualdad

$$\alpha(\Delta_0) \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \qquad (24)$$

En efecto, $\Delta_0 = [r_0+1, r_0+p^{r_0}]$ tal que

$$\alpha(\Delta_0) \geq \alpha(\Delta)$$

para todo $\Delta \subset [1,n]$ de la forma $[r+1, r+p^{r_0}]$.

Sea m un entero tal que

$$mn < p^{r_0+1} \leq (m+1)\, n$$

entonces $n < \frac{p^{r_0+1}}{m} \leq \frac{m+1}{m} n$, es decir, $n < \frac{p}{m} p^{r_0} \leq n(1+\frac{1}{m})$ luego entonces $\frac{m}{p} > \frac{1}{(1+\frac{1}{m})n} \geq \frac{1}{2n}$. Es claro que $[1,n]$ puede expresarse como unión de $[\frac{p}{m}]+1$ intervalos de la forma $[r+1, r+p^{r_0}]$, entonces

$$\alpha(\Delta_0) = \frac{1}{p^{r_0}} \sum_{k\in\Delta_0} |c_k|^2 \geq \frac{m}{p} \frac{1}{p^{r_0}} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

$$\geq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 .$$

También podemos elegir un intervalo normal $\delta_0 = [l_0+1, l_0+p^{k_0}] \subset \Delta_0$ tal que

$$\gamma(\mathcal{S}_0) \geq \gamma(\Delta_0) \tag{25}$$

Supondremos que $k_0 > 2P$; pues de otra forma la la prueba se completa con el cálculo (32), donde $q=0$

Haremos uso de la siguiente notación (donde l_s y k_s, se definen abajo):

$$\left.\begin{aligned} & F_0 \equiv 0 \; ; \; F_s \equiv \sum_{i=l_0+1}^{l_s} c_i \phi_i \quad (s>0) \; ; \; E_s = \{ t / |F_s(t)| > P^{k_s+1} \} \; (k_s>0) \\ & f_s(t) = F_{s-1}(t) \chi(CE_{s-1}, t) + \sum_{i=l_{s-1}+1}^{l_s} c_i \phi_i(t) \\ & U_s = \{ t / |f_s(t)| > P^{k_s+1} \} \; (k_s>0) : E_s = U_s = \Sigma \; (k_s = 0) \end{aligned}\right\} (26)$$

además

$$I_s = \int_{E_s} |F_s(t)| \, d\mu \quad ; \quad J_s = \int_{U_s} |f_s(t)| \, d\mu \tag{27}$$

donde $(CE_{s-1} = \Sigma - E_{s-1})$

Los números l_s, k_s $1 \leq s \leq q$ se eligen de tal manera que:

(a) $l_{s-1} < l_s$; $k_{s-1} > k_s$;

(b) el intervalo $\mathcal{S}_s = [\, l_s+1, l_s + P^{k_s} \,]$ es normal, $\mathcal{S}_s \subset \mathcal{S}_{s-1}$

(c) $\lambda J_s \geq \gamma(\mathcal{S}_{s-1}) - \gamma(\mathcal{S}_s)$

(d) $k_q \leq 2P$.

Esto se hace por inducción de la siguiente manera: sean los números l_s, k_s, $0 \leq s \leq m$ ya definidos, de tal manera que satisfacen (a), (b) y (c). Si $k_m \leq 2p$, entonces sea $q = m$ y el proceso ha terminado. Si $k_m > 2p$, entonces sean $\nu = l_m$, $r = k_m$ y $f = F_m \chi(CE_m)$. Debido a (26) tenemos $\|f\|_\infty \leq p^{r+1}$. La condición (b) para $s = m$ significa que el intervalo $\Delta = [\nu+1, \nu+p^r]$ es normal. Entonces podemos aplicar el lema y definir los números $l = l_{m+1}$, $k = k_{m+1}$ de tal manera que las condiciones (i) y (ii) del lema se satisfacen. Tomando en cuenta (26) y (27) observamos que estas satisfacen las condiciones (a), (b) y (c) cuando $s = m+1$. Entonces el paso inductivo está completo.

Debido a la inclusión estricta de los intervalos δ_s, el proceso se detiene después de un número finito de pasos. Entonces, hemos definido: un número $q \geq 1$ y las sucesiones $\{l_s\}$, $\{k_s\}$, las funciones $\{F_s\}$, $\{f_s\}$, los conjuntos $\{E_s\}$ y $\{U_s\}$ y los números $\{I_s\}$, $\{J_s\}$ $(s\leq q)$ que satisfacen las condiciones (a), (b), (c) y (d).

De (26) se sigue inmediatamente que

$$f(t) = F_s(t) \qquad (t\in CE_{s-1})\,(1\leq s\leq q) \quad (28)$$

Observe las relaciones entre los conjuntos:

$$E_{s-1}\subset E_s \;;\quad E_s - E_{s-1} = U_s\cap CE_{s-1} \qquad (29)$$

La primera se sigue de la siguiente desigualdad:

$$|F_s(t)| \geq |F_{s-1}(t)| - \Big|\sum_{i=l_{s-1}}^{l_s} c_i\phi_i(t)\Big| > p^{k_{s-1}+1} - p^{k_{s-1}} > p^{k_s+1} \quad (t\in E_{s-1}),$$

donde hemos usado las relaciones (26), (1), (3) y (b) (en ese orden). La segunda se sigue de (28) y (26).

Probaremos por inducción la siguiente desigualdad:

$$I_m \geq \sum_{1\leq s<m} J_s\left(1-\frac{2}{p}-\cdots-\frac{2}{p^{m-s}}\right) + J_m \quad (1\leq m\leq q) \quad (30)$$

Cuando $m=1$ es obvia, pues $f_1=F_1$, $U_1=E_1$; esto es $J_1=I_1$. Suponga la desigualdad cierta para $m<q$. Entonces tenemos, tomando en cuenta (26)–(29)

$$I_m = \int_{E_{m+1}} |F_{m+1}|\,d\mu = \int_{E_m} |F_{m+1}|\,d\mu + \int_{E_{m+1}-E_m} |F_{m+1}|\,d\mu$$

$$\geq I_m - \int_{E_m} \left| \sum_{i=l_m+1}^{l_{m+1}} c_i \phi_i \right| d\mu + \int_{E_{m+1} - E_m} |f_{m+1}| d\mu$$

$$\geq I_m - \int_{E_m} \left| \sum_{i=l_m+1}^{l_{m+1}} c_i \phi_i \right| d\mu + \int_{U_{m+1}} |f_{m+1}| d\mu - \int_{E_m} |f_{m+1}| d\mu$$

$$= I_m + J_{m+1} - 2 \int_{E_m} \left| \sum_{i=l_m+1}^{l_{m+1}} c_i \phi_i \right| d\mu$$

Más aún, cuando $t \in E_s$, $s \leq m$, tenemos, debido a (2) y a (26) que

$$\left| \sum_{i=l_m+1}^{l_{m+1}} c_i \phi(t) \right| \leq p^{k_m} = \frac{1}{p^{k_s - k_{m+1}}} p^{k_s+1}$$

$$< \frac{1}{p^{k_s - k_{m+1}}} |F_s(t)| \leq \frac{1}{p^{m-s+1}} |F_s(t)|$$

Entonces debido a (29), (26), (27).

$$\int_{E_m} \left| \sum_{i=l_m+1}^{l_{m+1}} c_i \phi_i \right| d\mu = \sum_{s=1}^{m} \int_{E_s - E_{s-1}} \left| \sum_{i=l_m+1}^{l_m} c_i \phi_i \right| d\mu \leq \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{p^{m-s+1}} \int_{E_s - E_{s-1}} |F_s(t)| dt$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{p^{m-s+1}} \int_{E_s - E_{s-1}} |f_s| d\mu \leq \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{p^{m-s+1}} J_s \, .$$

y por lo tanto, debido a (31) y a la hipótesis inductiva tenemos:

$$I_{m+1} \geq I_m + J_{m+1} - \int_{E_m} \left| \sum_{i=l_m+1}^{l_{m+1}} c_i \phi_i \right| d\mu$$

$$\geq I_m + J_{m+1} - 2 \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{p^{m-s+1}} J_s \, .$$

$$\geq \sum_{1\leq s<m} J_s\left(1-\frac{2}{p}-\cdots-\frac{2}{p^{m-s}}\right)+J_m+J_{m+1}-2\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{p^{m-s+1}}J_s$$

$$\geq \sum_{1\leq s\leq m} J_s\left(1-\frac{2}{p}-\cdots-\frac{2}{p^{m-s+1}}\right)+J_m\left(1-\frac{2}{p}\right)+J_{m+1}$$

Entonces la desigualdad (30) es cierta para todo $1\leq m\leq q$. Haciendo $m=q$ y tomando (c) en consideración obtenemos

$$\int_{E_q}|F_q|\,d\mu \geq \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{q} J_s \geq \frac{1}{2\lambda}\sum_{s=1}^{q}\left[\gamma(\delta_{s-1})-\gamma(\delta_s)\right]=\frac{1}{2\lambda}\left[\gamma(\delta_0)-\gamma(\delta_q)\right]$$

En el caso $\gamma(\delta_q) < \frac{1}{2}\gamma(\delta_0)$, tomando en cuenta (24) y (25) obtenemos

$$\int_X\left|\sum_{i=r_0+1}^{l_q} c_i\phi_i(t)\right|d\mu > \frac{1}{4\lambda}\gamma(\delta_0) \geq \frac{1}{8\lambda n}(r_0+1)\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 > \frac{1}{8\lambda}\frac{\log_p n}{n}\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$$

En el caso $\gamma(\delta_q) \geq \frac{1}{2}\gamma(\delta_0)$, usando la condición (d) tenemos

$$\int_X\left|\sum_{i=l_q}^{l_q+p^{k_q}} c_i\phi_i\right|d\mu \geq \frac{1}{\left\|\sum_{i=l_q}^{l_q+p^{k_q}} c_i\phi_i\right\|_\infty}\sum_{i\in S_q}|c_i|^2 \geq \frac{1}{p^{k_q}}\sum_{i\in S_q}|c_i|^2$$

$$=\frac{1}{k_q+1}\gamma(\delta_q) \geq \frac{1}{4}\,\frac{1}{k_q+1}\gamma(\delta_0) \geq \frac{1}{8}\,\frac{r_0+1}{k_q+1}\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$$

$$\geq \frac{1}{8}\,\frac{\log_p n}{2p+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 > \frac{\log_p n}{p^2}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 .$$

En ambos casos es claro que obtenemos la desigual dad (2) con la constante $K = P^{-5P}$. Y ésto completa la demostración del teorema.

De la desigualdad de Olevskii tenemos dos consecuencias inmediatas:

1. Conjetura de Littlewood. La conjetura concierne al comportamiento de las constantes de Lebesgue del sistema trigonométrico arbitrariamente ordenado. Puede formularse de la siguiente manera: Para cualquier rearreglo $\{\nu_k\}$ de los números naturales, la siguiente relación se satisface

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n} > 0 \quad , \quad \text{donde } I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{i\nu_k t}\Big| dt$$

Esta desigualdad fué motivo de investigación de una serie de autores. En particular R. Salem trató este problema y demostró que bajo condiciones adecuadas sobre el crecimiento de la sucesión $\{\nu_k\}$, la siguiente relación se dá:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\ln n}} > 0$$

Importantes progresos fueron hechos por P. J. Cohen: para cualquier rearreglo $\{\nu_k\}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{I_n}{(\ln n/\ln\ln n)^{\frac{1}{8}}} > 0$$

El resultado de Cohen, en particular, establece que el sistema trigonométrico no forma base en el espacio C para ninguna ordenación.

De la desigualdad de Olevskiĭ se sigue inmediatamente que cualquier sistema ortonormal acotado satisface la relación

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \int_{\Sigma} \left| \sum \phi_k(t) \right| d\mu > 0$$

Entonces la hipótesis de Littlewood se satisface para cualquier sistema ortonormal acotado, pero con límite superior en vez de límite inferior.

Más tarde veremos que tal sustitución es necesaria, dando un ejemplo de un sistema ortonormal acotado ϕ que satisface

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \int_X \left| \sum_{k=1}^{n} \phi_k \right| d\mu = 0$$

2. Se sigue de nuestra desigualdad que si una serie $\sum c_n \phi_n$, donde $\{\phi_n\}$ es un S. O. N. con $\sup_n \|\phi_n\|_\infty < \infty$ y además $\sum c_n \phi_n$ tiene sumas parciales acotadas en el espacio métrico L, entonces sus coeficientes convergen en la media a cero: $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = o(n)$. Uno puede conjeturar que ésto toma lugar, no sólo en la media, si no que $c_k = o(1)$. Para el sistema trigonométrico éste es precisamente el caso. Sin embargo, la prueba depende grandemente de este sistema particular. Resulta que no hay un resultado similar para rearreglos del sistema trigonométrico. La siguiente proposición es cierta: existe una serie $\sum \alpha_k \cos kt$, $\limsup |\alpha_k| > 0$, que después de algún rearreglo de sus términos, es aco-

toda en $L[0,\pi]$.

Para la prueba de esta afirmación, veamos el producto de Riez, $R_n(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{3}\cos 3^k t)$. Vemos que R_n, para cada n es un polinomio trigonométrico de la forma

$$R_n(t) = \sum_{l=0}^{\frac{3}{2}(3^n-1)} \alpha_l \cos lt = R_{n-1}(t) + \sum_{l=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+1}^{\frac{3}{2}(3^n-1)} \alpha_l \cos lt \qquad |\alpha_l| \leq 1$$

En efecto, procediendo por inducción:

1) Para $n=1$ es obvio.

2) $R_{n+1}(t) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + \frac{1}{3}\cos 3^k t) = \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{3}\cos 3^k t)\right)(1 + \frac{1}{3}\cos 3^{n+1} t)$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\frac{3}{2}(3^n-1)} \alpha_l \cos lt\right)\left(1 + \frac{1}{3}\cos 3^{n+1} t\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{3}{2}(3^n-1)} \alpha_l \cos lt + \sum_{l=0}^{\frac{3}{2}(3^n-1)} \frac{1}{3}\alpha_l \cos lt \cos 3^{n+1} t$$

Ahora, tomando en cuenta que $\cos lt \cos 3^{n+1}t = \frac{1}{2}[\cos(3^{n+1}+l)t + \cos(3^{n+1}-l)t]$ y que el valor mínimo para $3^{n+1}-l$ es $3^{n+1} - \frac{3}{2}(3^n-1) = \frac{3}{2}(3^n+1) > \frac{3}{2}(3^n-1)$, obtenemos el resultado.

Definamos por inducción un rearreglo de los términos de este polinomio. Sea R_{n-1} el polinomio ordenado en la forma

$$R_{n-1}(t) = \sum_{\ell=0}^{\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)} \alpha_{\nu_\ell} \cos \nu_\ell t$$

Entonces la ecuación

$$\left.\begin{aligned} R_n(t) &= R_{n-1}(t) + \tfrac{1}{3} R_{n-1}(t) \cos 3^n t = \sum_{\ell=0}^{\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)} \alpha_{\nu_\ell} \cos \nu_\ell t \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{\ell=0}^{\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)} \alpha_{\nu_\ell} \frac{1}{2} \left[\cos(3^n + \nu_\ell)t + \cos(3^n - \nu_\ell)t \right] \\ &\equiv \sum_{\ell=0}^{\frac{1}{2}(3^n-1)} \alpha_{\nu_\ell} \cos \nu_\ell t \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

define un ordenamiento de los términos. Veamos la serie

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\nu_\ell} \cos \nu_\ell t$$

con sumas parciales S_ℓ. Claramente $S_{\frac{1}{2}(3^n-1)}(x) = R_n(x) > 0$. Definiendo $\lambda_n = \max_{0 \le m \le \frac{1}{2}(3^n-1)} \int_0^\pi |S_m| dt$. Es fácil concluir de (34) que

$$\lambda_n \le \max \left\{ \lambda_{n-1}, \int_0^\pi |R_{n-1}| dt + \tfrac{1}{3}\lambda_{n-1} + \tfrac{\pi}{6} \right\} \le \max\left\{ \lambda_n, 4 + \tfrac{\lambda_{n-1}}{3} \right\}$$

Por tanto se sigue que $\sup_n \lambda_n \le 6$. Al mismo tiempo los coeficientes de $\cos 3^n t$ son iguales a $\frac{1}{3}$.

§3. Crecimiento Logarítmico de las Funciones de Lebesgue. Divergencia de las Series de Fourier

La desigualdad de la sección precedente nos permite alcanzar la siguiente conclusión: si un sistema ortonormal es acotado entonces sus funciones de Lebesgue no son acotadas y el orden de magnitud de su crecimiento, no es menor que el logarítmico

TEOREMA 2. Sea $\{\phi_n\}$ un S.O.N. sobre $\mathbb{X}$, $\mu\mathbb{X}<\infty$

$$|\phi_n(x)| \le M \qquad (n=1,2,\dots;\ x\in\mathbb{X}) \quad (35)$$

Entonces las funciones de Lebesgue L_n satisfacen la siguiente condición.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} L_n(x) > 0 \qquad \left(x\in E,\ \mu E \ge \frac{1}{M^2}\right) \quad (36)$$

Prueba: Definimos

$$E=\{x\in\mathbb{X} \ /\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(x)|^2>0\} \qquad (37)$$

Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(x)|^2 = o(1) \qquad x\in CE$$

Por lo tanto después de integrar y usar la suposición (35), obtenemos

$$1-M^2\mu E \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\int_E |\phi_k|^2 dt\right] = \frac{1}{n}\int_{CE}\sum_{k=1}^{n}|\phi_k|^2 dt = o(1)$$

Esto es, $\mu E \ge \frac{1}{M^2}$.

Fijando $x\in E$, tenemos, en base a la desigualdad de Olevskiĭ, (recuérdese que si $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal, entonces $\{\bar{\phi}_n\}$ también lo es) que

$$\max_{1\le k\le n}|\phi_k(x)|\,\max_{1\le k\le n} L_k(x) \ge \frac{K}{M}\;\frac{\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(x)|^2}{n}\ln n$$

Por lo tanto debido a (35) y (37), se sigue que (36) es cierto. Q.E.D.

Una consecuencia básica del teorema 2, es el siguiente

TEOREMA 3. Ningun S.O.N. uniformemente acotado puede formar base en el espacio $C[a,b]$

Es más la siguiente generalización del teorema de du Bois Reymond es cierta

TEOREMA 4. Si el S.O.N. $\{\phi_n\}$ es uniformemente acotado, entonces existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en algún punto

Esto se sigue de la relación

$$L_n(x) \neq O(1) \qquad (x \in E) \qquad (38)$$

que es un resultado de (36). Usando (36) en toda su potencia, es posible fortalecer el resultado, estimando la razón de divergencia de las series de Fourier.

TEOREMA 5. Sea $\{\phi_n\}$ un S.O.N. que satisface la condición (35). Entonces, para cualquier sucesión $a_n = o(\ln n)$ existe una función $f \in C$ tal que en algún punto x, (más aún en un conjunto de la potencia del continuo) la relación

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|S_n(f;x)|}{a_n} = \infty \qquad (39)$$

se satisface

Prueba: Fijamos $x \in E$ y consideremos las funciones lineales

$$\Phi(f) = S_n(f,x)\,\frac{1}{a_n}$$

Claramente $\|\Phi\| = \frac{1}{a_n} L_n(x)$, y así, debido a (36) $\|\Phi\| \neq O(1)$. Por el teorema de Banach-Steinhaus el conjunto $A_x \subset C$ de funciones para las cuales (39) es cierta en el punto x es un G_δ denso en C. Debido a la C-propiedad de Lusin podemos elegir un conjunto perfecto $E' \subset E$, $\mu E' > 0$, sobre el cual toda ϕ_k es continua. Sea $\{x_m\}$ denso en E'. Claramente el conjunto $A = \bigcap_m A_{x_m}$ es un G_δ denso en C. Sea $f \in A$ y sea U_f el conjunto de todos los puntos que satisfacen (39). Es facil ver que es un G_δ y también es denso en E' $(x_m \in U_f)$. Entonces U_f es no numerable. Usamos ahora un teorema de P. S. Alexandrov. Todo Borel no numerable tiene la potencia del continuo.

Q.E.D.

Entonces para la mayoría (en el sentido de la categoría) de las funciones en el espacio C, la serie de Fourier con respecto a un S.O.N. acotado, diverge (en el sentido de la potencia) en un conjunto maximal de puntos.

Para el caso del sistema trigonométrico, resulta que la estimación de la razón de divergencia (39) es la mejor posible. En efecto, para este sistema tenemos la relación

$$\|S_n(f)\| = o(\ln n) \qquad (\forall f \in C)$$

En conexión con los teoremas 1-3 las siguientes preguntas, concernientes a la posibilidad de fortalecer estos resultados en varias direcciones surgen naturalmente.

1. ¿Es posible, en la relación (36) reemplazar lim sup por lim inf?; Esto es ¿es posible dar una cota inferior para casi todas las funciones de Lebesgue y no sólo para una infinidad de ellas, como ocurre para el sistema trigonométrico?

2. ¿Es posible asegurar que (36) (o la condición más débil (38)) se da casi donde quiera (suponiendo desde lue_

go que el sistema es completo)?. En otras palabras ¿es cierto que la divergencia de una serie de Fourier con respecto a un S. O. N. acotado puede ocurrir casi en todo punto?

3. ¿Hay ciertas condiciones de suavidad tal que para cualquier sistema acotado completo existan funciones teniendo esta suavidad y que aún satisfagan la conclusión del Teorema 4?

La solución de estos problemas es el contenido de las siguientes secciones.

§4. Sistema de Walsh y Subsucesiones de Convergencia.

En referencia a la primera pregunta, una respuesta negativa está dada por el sistema de Walsh. A continuación definiremos el sistema de Walsh, y demostraremos que para este sistema $w = \{w_i\}$ tenemos

$$\int_0^1 |\Delta_n^w(x,t)|\,dt = 1 \; ; \; n = 2^k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Para ésto necesitamos una serie de resultados preliminares que a continuación consideraremos:

El sistema de Rademacher es el resultado de reunir las funciones de Haar $\chi_m^{(k)}$, con indice inferior constante, en una sola función. Obsérvese que $r_0(x) = \chi_0^{(0)}$, $r_1(x) = \chi_0^{(1)}(x)$.

$$r_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, 0 < x < 1)$$

Las funciones de Rademacher también pudieron haberse definido como

$$r_n(x) = \text{sig sen } 2^n \pi x ,$$

El sistema es incompleto, ya que para toda n.

$$\int_0^1 r_n(x)\, r_1(x)\, r_2(x)\, dx = 0$$

Esta es una mala propiedad para este sistema, sin embargo, un método de completación sencilla dá origen al sistema de Walsh:

Sea $w_0(x) \equiv 1$ en $[0,1]$; si $n \geq 1$ y $2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\ldots+2^{\nu_p}$, $(\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_p)$ es la representación binaria de n, entonces definimos w_n como

$$w_n(x) = r_{\nu_1+1}(x)\, r_{\nu_2+1}(x) \cdots r_{\nu_p+1}(x).$$

El conjunto de funciones $w = \{w_n\}$ es un sistema ortonormal, en efecto

TEOREMA 6.- $w=\{w_n\}$ como se acaba de definir, forma un sistema ortonormal sobre $[0,1]$

Prueba: Obviamente el conjunto es normado. Supongamos que $w_n = r_{\ell_1} \cdot r_{\ell_2} \cdots r_{\ell_\alpha}$ y $w_m = r_{k_1} \cdot r_{k_2} \cdots r_{k_\beta}$ son diferentes, es decir $(\ell_1, \ldots, \ell_\alpha)$ y $(k_1, \ldots, k_\beta)$ son diferentes, probaremos que

$$\int_0^1 (r_{\ell_1}(x) \cdots r_{\ell_\alpha}(x)) \cdot (r_{k_1}(x) \cdots r_{k_\beta}(x))\, dx = 0$$

Para probar ésto, cancelemos todos los pares de fun_ ciones con indices iguales, ya que toman el valor 1 casi en todas partes; los factores que quedan, los denotaremos por $r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_p}$ $(j_1 < \cdots < j_p)$. Ahora el producto $r_{j_1} \cdot r_{j_2} \cdot \cdots \cdot r_{j_{p-1}}$ es una función escalonada y cada uno de los intervalos I donde es constante, puede ser dividido en un número par de subintervalos iguales en los cuales r_{j_p} toma alternativamente los valores $+1, -1$, debido a ésto, tenemos

$$\int_I r_{j_1}(x)\, r_{j_2}(x) \cdots r_{j_p}(x)\, dx = \text{const.} \int_I r_{j_p}(x)\, dx = 0$$

y entonces la integral es cero sobre $[0,1]$ Q.E.D.

El sistema de Rademacher forma parte del sistema de Walsh, pues

$$w_{2^n}(x) = r_{n+1}(x).$$

Una propiedad interesante del sistema de Walsh es que es una completación natural del sistema de Ra_ demacher $\{r_n\}$, ya que el siguiente teorema es cierto.

TEOREMA 7. El sistema ortogonal de Walsh es completo en L^2.

Prueba: Probaremos algo más fuerte que éso: Supongamos que $f \in L^1[0,1]$ y

$$\int_0^1 f(x) w_n(x) dx = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

definimos

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Se sigue entonces de nuestras suposiciones que

$$\int_0^1 f(x) w_0(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = F(x) - F(0) = F(1) = 0.$$

Además

$$\int_0^1 f(x) w_1(x) dx = \int_0^1 f(x) r_1(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$$

$$= F(\tfrac{1}{2}) - F(0) - [F(1) - F(\tfrac{1}{2})] = 2F(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Tomando en consideración las relaciones establecidas anteriormente, tenemos

$$\int_0^1 f(x) W_2(x)\, dx = \int_0^1 f(x) r_2(x)\, dx = 2\left[F(\tfrac{1}{4}) + F(\tfrac{3}{4})\right] = 0$$

$$\int_0^1 f(x) W_3(x)\, dx = \int_0^1 f(x) r_1(x) r_2(x)\, dx = 2\left[F(\tfrac{1}{4}) - F(\tfrac{3}{4})\right] = 0$$

y consecuentemente $F(\frac{1}{4}) = F(3/4) = 0$. Aprovechando lo que hasta ahora se ha obtenido deducimos de manera muy similar las siguientes ecuaciones:

$$2\left[F(\tfrac{1}{8}) + F(\tfrac{3}{8}) + F(5/8) + F(7/8)\right] = 0$$

$$2\left[F(\tfrac{1}{8}) + F(3/8) - F(5/8) - F(7/8)\right] = 0$$

$$2\left[F(1/8) - F(3/8) + F(5/8) - F(7/8)\right] = 0$$

$$2\left[F(1/8) - F(3/8) - F(5/8) + F(7/8)\right] = 0$$

de ésto inferimos:

$$F(1/8) = F(3/8) = F(5/8) = F(7/8) = 0$$

Continuando de esta manera, es fácil ver que todo racional diádico satisface la relación.

$$F(\tfrac{k}{2^n}) = 0 \qquad (n = 0, 1, \dots ; k = 0, 1, \dots, 2^n)$$

La función F es sin embargo continua y ya que es cero en un conjunto denso en $[0,1]$, se sigue que $F(x)\equiv 0$. Ya que $f(x)=F'(x)$, casi donde quiera, este resultado implica que $f(x)=0$ también se dá casi en todas partes Q.E.D.

Veremos ahora la relación que hay entre el sistema de Haar y el sistema de Walsh: Poniendo

$$\chi_0^{(0)}(x) = w_0(x) \qquad , \qquad \chi_0^{(1)}(x) = w_1(x) .$$

y luego

$$\chi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[w_2(x) + w_3(x)\right] \ , \ \chi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[w_2(x) - w_3(x)\right]$$

definimos $\chi_n^{(k)}$ por inducción. Supongamos que $\chi_{n-1}^{(k)}$ se ha representado ya en la forma

$$\chi_{n-1}^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n-1} a_{k\nu}^{(n-1)} w_\nu(x) \qquad (k=1,2,\dots,2^{n-1})$$

donde $a_{k\nu}^{(n-1)} = \pm 1$. La matriz $(a_{k\nu}^{(n)})$ se construye como sigue: escribimos cada renglón de la matriz $(a_{k,\nu}^{(n-1)})$ dos veces, una debajo de la otra, (formando así la mitad izquierda de la matriz) y luego prolongamos cada renglón escribiéndolo una vez más, primero con el mismo signo, segundo con signo opuesto (formando la parte derecha de la matriz $(a_{k\nu}^{(n)})$). Entonces definimos las funciones $\chi_n^{(k)}$ como sigue

$$\chi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} a_{k\nu}^{(n)} w_\nu(x)$$

El sistema $\{\chi_n^{(k)}\}$ es excepto por los puntos racionales diádicos, idéntico al sistema de Haar, es decir $\{w_i\}$ $0 \le i \le 2^n - 1$ y $\{\chi_i^{(k)}\}$ $1 \le i \le n$ $(\forall k)$ son equivalentes.

Debido al siguiente lema, ésto tiene consecuencias muy interesantes.

Lema 1. Si dos sistemas ortonormales $\alpha = \{\alpha_i\}$ $\beta = \{\beta_i\}$ $(1 \le i \le n)$ son equivalentes, entonces $D_n^{\alpha}(s,t) = D_n^{\beta}(s,t)$ (donde D_n^{ψ} es el kernel de Dirichlet del sistema ψ).

Prueba: Ya que α y β son equivalentes y ortonormales, entonces, podemos pasar de uno al otro por me_ dio de una matriz ortonormal; es decir,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_i$$

donde la matriz (a_{ij}) es ortonormal, por lo tanto

$$\mathcal{D}_n^{\alpha}(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s)\overline{\alpha_i(t)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j(s)\Big)\overline{\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j(t)\Big)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)\beta_i(s)\overline{\beta_i(t)} + \sum_{j\neq k}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{a}_{ik}\Big)\beta_j(s)\overline{\beta_k(t)}$$

por ser (a_{ij}) ortonormal tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ik}} = 0 \text{ si } j\neq k$$

de donde obtenemos

$$\mathcal{D}_n^{\alpha}(s,t) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)\overline{\beta_i(t)} = \mathcal{D}_n^{\beta}(s,t) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Entonces para el sistema de Walsh w tenemos

$$L_{2^k-1}(x) = \int_0^1 |\mathcal{D}_{2^k-1}^{w}(s,t)|\,dt = \int_0^1 |K_k^{(2^k)}(s,t)|\,dt = L_k^{(2^k)}(x) = 1 \quad (40)$$

Resulta, sin embargo, que para un sistema acotado, la relación (40) puede satisfacerse sólo para una sucesión $\{\nu_k\}$ de índices suficientemente espaciada, en otras palabras, sólo para sucesiones lacunarias en el sentido de Hadamard, ésto es, creciendo como una progresión geométrica. Más precisamente el siguiente teorema es cierto:

TEOREMA 8. Si $\{\phi_i\}$ es un S.O.N. que satisface (35), y si $\{\nu_k\}$ es una sucesión de índices que satisface la condición

$$\lim \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k} = 1 \qquad (41)$$

entonces

$$L_{\nu_k}(x) \neq O(1) \qquad (\forall x \in E, \mu E > 0) \quad (42)$$

De esto se infiere que, para alguna $f \in C$ las sumas parciales S_{ν_k} divergen en el punto x. En particular, esto toma lugar para $\nu_k = k^s$ o $\nu_k = [2^{k^\alpha}]$, $\alpha < 1$, (pero no para $\alpha = 1$)

Prueba: Para cada número $l > 1$ (natural) está

asociado un número N_ℓ tal que $\nu_{k+1} < (1+\frac{1}{2\ell})\nu_k$ ($\nu_k > N_\ell$). Probaremos ahora que cada uno de los intervalos semicerrados $(N_\ell(1+\frac{i-1}{\ell}), N_\ell(1+\frac{i}{\ell})]$ $(1\le i\le \ell)$ contiene al menos un elemento $\nu_i^{(\ell)}$ de la sucesión $\{\nu_k\}$.
En efecto; procederemos inductivamente, supongamos que ν_k es tal que:

$$N_\ell(1+\tfrac{i-1}{\ell}) < \nu_k \le N_\ell(1+\tfrac{i}{\ell}) \quad \text{y} \quad N_\ell(1+\tfrac{i}{\ell})\,\nu_k$$

Entonces

$$\begin{aligned} N_\ell(1+\tfrac{i}{\ell}) < \nu_{k+1} < (1+\tfrac{1}{2\ell})\nu_k &= \nu_k + \frac{\nu_k}{2\ell} \\ &< N_\ell(1+\tfrac{i}{\ell}) + \frac{N_\ell}{2\ell} \\ &= N_\ell(1+\tfrac{i}{\ell}+\tfrac{1}{2\ell}) \\ &< N_\ell(1+\tfrac{i+1}{\ell}) \end{aligned}$$

de donde obtenemos lo que queríamos.

Claramente

$$\int_X \frac{1}{\nu_\ell^{(\ell)}-\nu_1^{(\ell)}} \sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x)\,dx = 1 \,; \quad \Big\| \sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x) \Big\|_\infty \le M^2(\nu_\ell^{(\ell)}-\nu_1^{(\ell)})$$

Entonces

$$\sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x) \ge \frac{1}{2\mu(X)}(\nu_\ell^{(\ell)}-\nu_1^{(\ell)}) \qquad (x\in E_\ell,\ \mu E_\ell > \tfrac{1}{2M^2})$$

En efecto, supongamos que el conjunto E_ℓ de todas la x tales que

$$\sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2 \geq \frac{1}{2\mu(\mathfrak{X})}\left(\nu_\ell^{(\ell)} - \nu_1^{(\ell)}\right)$$

tiene medida $< \frac{1}{2M^2}$, entonces

$$1 = \int_{\mathfrak{X}} \frac{1}{\nu_\ell^{(\ell)}-\nu_1^{(\ell)}} \sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x)\,dx = \int_{\mathfrak{X}-E_\ell} \frac{1}{\nu_\ell^{(\ell)}-\nu_1^{(\ell)}} \sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2 dx +$$

$$\int_{E_\ell} \frac{1}{\nu_\ell^{(\ell)}-\nu_1^{(\ell)}} \sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x)\,dx \leq \frac{1}{2\mu(\mathfrak{X})}\left[\mu(\mathfrak{X})-\mu(E_\ell)\right] + M^2\mu(E_\ell)$$

$$\leq \left[\frac{1}{\mu(\mathfrak{X})}\left(\mu(\mathfrak{X})-\mu(E_\ell)\right)\right]\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1 \qquad \nabla$$

Sea $E = \limsup_{\ell\to\infty} E_\ell$. Claramente, $\mu E > 0$. Para cada $x \in E_\ell$ tenemos

$$\sum_{\nu=\nu_1^{(\ell)}+1}^{\nu_\ell^{(\ell)}} \phi(x)\overline{\phi_\nu(t)} = \sum_{i=2}^{\ell}\sum_{\nu=\nu_{i-1}^{(\ell)}+1}^{\nu_i^{(\ell)}} \phi_\nu(x)\,\overline{\phi_\nu(t)} = \sum_{i=2}^{\ell} d_i(x)\,\Phi_i^{(x)}(t)$$

donde

$$d_i(x) = \left[\sum_{\nu=\nu_{i-1}^{(\ell)}+1}^{\nu_i^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \Phi_i^{(x)}(t) = \frac{1}{d_i(x)} \sum_{\nu=\nu_i^{(\ell)}+1}^{\nu_i^{(\ell)}} \phi_\nu(x)\overline{\phi_\nu(t)}$$

obsérvese que las funciones $\{\Phi_i^{(x)}\}$ son ortonormales.

Claramente

$$\|\Phi_i^{(x)}\|_\infty \leq M(\nu_i^{(\ell)}-\nu_{i-1}^{(\ell)})^{\frac12} \quad ; \quad |d_i(x)| \geq M(\nu_i^{(\ell)}-\nu_{i-1}^{(\ell)})^{\frac12}$$

Entonces la desigualdad de Olevskiĭ da

$$\max_{2\leq m\leq \ell} \left\| \sum_{i=2}^{m} d_i \Phi_i^{(x)} \right\|_1 \geq \frac{K}{M^2 \max_i (\nu_i^{(\ell)}-\nu_{i-1}^{(\ell)})} \cdot \frac{1}{\ell-1} \sum_{i=2}^{\ell} |d_i(x)|^2 \ln(\ell-1)$$

$$\geq \frac{K}{M^2 \frac{N}{\ell}} \sum_{\nu=\nu_i^{(\ell)}+1}^{\nu_i^{(\ell)}} |\phi_\nu|^2(x) \frac{1}{\ell-1} \ln(\ell-1)$$

$$\geq \frac{K}{4M^2\mu(E)} \ln(\ell-1)$$

Entonces para cada $x \in E$ y para un número infinito de ℓ's tenemos

$$\max_{\substack{N_1 \leq \mu < \mu' \leq 2N_\ell \\ \mu, \mu' \in \{\nu_k\}}} \int_E \left| \sum_{\nu=\mu+1}^{\mu'} \phi_\nu(x)\, \overline{\phi_\nu(t)} \right| dt \geq \frac{K}{4M^2 \mu E} \ln(\ell-1)$$

Entonces (42) es cierta Q.E.D.

§ 5. El conjunto de Puntos de Crecimiento de las Funciones de Lebesgue.

Pasando a la segunda pregunta, notamos que para cualquier ordenamiento del sistema trigonométrico el conjunto E en la relación (37) tiene la medida del total; esto es, (36) se satisface casi donde quiera (es más, donde quiera). Resulta que es posible construir un sistema ortonormal completo acotado Φ, que tenga mejores propiedades; el crecimiento de las funciones de Lebesgue en este sistema se localiza en una vecindad arbitrariamente pequeña.

TEOREMA 9. Para cualquier δ, $0<\delta<1$ existe un sistema ortonormal uniformemente acotado $\{\Phi_n\}$, cerrado en $C[0,1]$, que satisface

$$L_n^{\phi}(x) < K \qquad (\delta \leq x \leq 1)$$

la K es una constante que solo depende de δ.

Prueba: Sea $\psi^{(0)} = \{\psi_k^{(0)}\}$ $(k \geq 1)$ el sistema ortonormal en $[\delta,1]$ que resulta del sistema de Haar por una sustitución de variables lineal y normalización. Sea $\varphi = \{\varphi_k\}$ el S.O.N sobre $[0,\delta]$ resultante del sistema $\{\cos(k-1)t\}$ $(t \in [0,\pi])$ por un procedimiento análogo. Fuera de los intervalos especificados las funciones son iguales a cero. Las siguientes propiedades son claras:

(i) el sistema $\varphi \cup \varphi^{(0)}$ es ortonormal en $[0,1]$ y cerrado en $C[a,b]$;

(ii) $\|\varphi_k^{(0)}\|_\infty < K_2 k^{\frac{1}{2}}$; $\|\varphi_k^{(0)}\|_1 < K_2 k^{-\frac{1}{2}}$ donde $K_2 > \frac{1}{\sqrt{1-\delta}}$

(iii) $\|\varphi_k\|_\infty < K_3$; donde $K_3 > \frac{2}{\sqrt{\delta}}$

(iv) $\int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{k} \varphi_s^{(0)}(x)\, \varphi_s^{(0)}(t) \right| dt = 1$;

(v) $\int_0^1 \left| \sum_{i=m+1}^{m+p} \varphi_i(t) \right| dt < K_4 \ln(p+1) \qquad (\forall m, p)$

Dividamos el sistema φ en bloques $\{\varphi_k^{(j)}\}$ $(1 \le j \le k^2;\ k = 1, 2, \dots)$ y sea

$$\phi_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{k^2} b_{ij}^{(k^2)} \varphi_k^{(j)} \qquad (43)$$

donde las matrices de transición tienen la forma

$$B_n = \| b_{ij}^{(n)} \| = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 1-\frac{1}{n} & & & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{n} & & & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix} \qquad (44)$$

Estas matrices son ortogonales. Entonces el sistema $\{\phi_k^{(i)}\}$ $(0 \leq i \leq k^2 ; k = 1, 2, \ldots)$ es ortonormal en $[0,1]$ y es equivalente al sistema $\{\varphi_k^{(j)}\}$ $(0 \leq j \leq k^2; k = 1, 2, \ldots)$

Estas matrices son ortogonales. Entonces el sistema $\{\phi_k^{(i)}\}$ $(0 \leq i \leq k^2 ; k=1, 2, \ldots)$ es ortonormal en $[0,1]$ y es equivalente al sistema $\{\varphi_k^{(j)}\}$ $(0 \leq j \leq k^2; k=1,2,\ldots)$.

Dejemos por un momento la demostración del teorema y definamos las siguientes matrices: Sea k un número natural arbitrario. Definimos la matriz cuadrada $A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|$ de la siguiente manera

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \chi_j(t_i) \qquad (1 \leq i, j \leq 2^k)$$

donde $\{\chi_j\}$ es el sistema de Haar y t_i son puntos que pertenecen respectivamente a los intervalos $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$.

Las columnas de esta matriz representan una base del tipo de Haar en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{2k}$. Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar.

(i) La matriz A_k es ortogonal

Este hecho se sigue inmediatamente de la ortonormalidad del sistema de Haar

$$\sum_{i=1}^{2^k} a_{ij}^{(k)} a_{ir}^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} \chi_j(t_i)\chi_r(t_i) = \sum_{i=1}^{2^k} \int_{\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)} \chi_j(t)\chi_r(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \chi_j(t)\chi_r(t)\,dt = \delta_{ij}$$

(ii) La desigualdad

$$\sum_{j=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| < C \qquad (\forall i, k)$$

se satisface para una constante que no depende de i ni de k. Para demostrar esto es suficiente notar que para cada i exactamente una función de s-ésimo bloque del sistema de Haar difiere de cero en el punto t_i y es igual en módulo a $2^{s/2}$. Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2^k}} \sum_{j=0}^{2^k} |\chi_j(t_i)| = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \left[1 + \sum_{s=0}^{k-1} \sqrt{2^s}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^k}} + \sum_{s=0}^{k-1} \sqrt{2^{s-k}} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} + \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2^s}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = C.$$

Más aún la matriz tiene la siguiente propiedad:

(iii) Si $\{\alpha_i\}$ $(1 \le i \le 2^k)$ es un S. O. N. tal que

$\|\tilde{\alpha}_1\|_\infty \leq \lambda\sqrt{2^k}$, y $\|\alpha_j\|_\infty < \lambda$ para $j>1$, entonces $\{\beta_i\}$ $(1\leq i\leq 2^k)$ definido por

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij}\,\alpha_i \qquad (1\leq i\leq 2^k)$$

satisface la siguiente desigualdad

$$\|\beta_i\|_\infty < C(\lambda) \qquad (1\leq i\leq 2^k)$$

donde $C(\lambda)$ es una constante que solo depende de λ.

Como en el razonamiento anterior, recordemos que para cada i exactamente una función de s-ésimo bloque del sistema de Haar difiere de cero en el punto t_i y es igual en módulo a $2^{s/2}$. Entonces

$$\|\beta_i\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{2^k} \|a_{ij}^{(k)}\alpha_j\|_\infty = \sum_{j=1}^{2^k} |a_{ij}|^k \|\alpha_i\|_\infty$$

$$\leq \lambda\left(\frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{2^k}} + \sum_{s=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2^s}}\right) \leq C\lambda$$

donde C es la constante mencionada en el párrafo anterior.

Regresemos a la demostración del teorema. Definamos $\alpha_k = \varphi_k^{(k^2+1)}$, y dividamos al sistema $\{\alpha_k\}$ en bloques $\{\alpha_k^{(j)}\}$ $(2 \leq j \leq 2^k)$ y definamos $\alpha_k^{(1)} = \phi_k^{(0)}$, es claro que $\{\alpha_k^{(j)}\}$ $(1 \leq j \leq 2^k;\ k=1,2,\dots)$ es un S.O.N. que satisface lo siguiente: existe una $\lambda > 0$ tal que

(i) $\|\alpha_k^{(1)}\|_\infty \leq \lambda k \leq \lambda\sqrt{2^k}$

(ii) $\|\alpha_k^{(j)}\|_\infty \leq \lambda$ para $j \geq 2$

Entonces aplicando la matriz A_k al bloque $\{\alpha_k^{(j)}\}$ $(1 \leq j \leq 2^k)$ obtenemos un sistema $\{\beta_k\}$ equivalente a $\{\alpha_k^{(j)}\}$ uniformemente acotado. Definamos $\phi_k^{(k^2+1)} = \beta_k$. Entonces $\phi = \{\phi_k^{(i)}\}$ $(1 \leq i \leq k^2+1;\ k=1,2,\dots)$ es ortonormal en $[0,1]$ y es equivalente a $\psi \cup \psi^{(0)}$ y consecuentemente cerrado en $C[0,1]$. Más aún, de (ii) y (iii) tenemos

$$\sup_{x \in [0,1]} |\phi_k^{(i)}(x)| \leq \frac{1}{k}\|\psi_k^{(0)}\|_\infty + 2K_3 = O(1) \quad (1 \leq i \leq k^2)$$

Entonces ϕ es uniformemente acotado.

Nótense las siguientes relaciones resultantes de (ii), (v) (4.3) y (4.4):

$$\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{\ell} \phi_k^{(i)}\Big| dt = \frac{\ell}{k}\int_0^1 |\psi_k^{(0)}|\, dt + \int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{\ell}\Big[\psi_k^{(i)} - \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k^2}\psi_k^{(j)}\Big]\Big| dt$$

$$\leq K_2 k^{\frac{1}{2}} + 4K_4 \ln(k+1) < K_5 k^{\frac{1}{2}} \qquad (1 \leq i \leq k^2)$$

$$\sum_{i=1}^{s^2+1} \phi_s^{(i)}(x)\phi_s^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{s^2} \phi_s^{(i)}(x)\phi_s^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{s^2} \psi_s^{(i)}(x)\psi_s^{(i)}(t) = \psi_s^{(0)}(x)\psi_s^{(0)}(t)\ (x \geq \delta)$$

(En la última relación se ha usado que $\phi_s^{(0)}(x) = \phi_s^{(s^2+1)}(x) = 0$, y el lema 1 de la sección 4. Entonces considerando (iv), tenemos que para cualquier $k, l \in [1, k^2]$ y $x \in [\delta, 1]$:

$$\int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{s^2+1} \phi_s^{(i)} \phi_s^{(i)}(t) + \sum_{i=1}^{l} \phi_k^{(i)} \phi_k^{(i)}(t) \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{k} \psi_s^{(0)}(x)\psi_s^{(0)}(t) \right| dt + \frac{|\psi_k^{(0)}(x)|}{k} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{l} \phi_k^{(i)}(t) \right| dt$$

$$\leq 1 + \frac{k^{\frac{1}{2}}}{k} \cdot K_5 k^{\frac{1}{2}} = K_1$$

Entonces las funciones de Lebesgue del sistema ϕ son uniformemente acotadas en el intervalo $[\delta, 1]$ y la prueba del teorema está completa Q.E.D.

Se puede ver, de la demostracion de teorema que

$$M(\delta) =: \sup_n P\|\phi_n\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Esto demuestra que la estimación (36) en términos de M, de la medida del conjunto de puntos de creci-miento de las funciones de Lebesgue es exacta.

§6. La Suavidad de Funciones con Series de Fourier Divergentes

De acuerdo con el teorema de Dini-Lipschitz si una función f tiene módulo de continuidad de orden $o\left(\frac{1}{|\ln \delta|}\right)$, entonces su serie de Fourier trigonométrica converge a ella uniformemente. Este resultado no puede ser mejorado: existe una función f con $\omega(\delta, f_0) = O\left(\frac{1}{|\ln \delta|}\right)$, con serie de Fourier divergente en algún punto (ver [Z]). La existencia de tal ejemplo está fuertemente relacionada con el crecimiento logarítmico de las constantes de Lebesgue. Entonces de la desigualdad de Olevskiĭ, es posible anticipar que una situación similar se presenta en el caso general. Resula que, en efecto, así es, solo que con algunas condiciones adicionales. Es importante que las funciones ϕ_n no oscilen demasiado rápido.

TEOREMA 10. Sea ϕ un S.O.N. que satisface la condición (35) y

$$\|\phi\|_V = \mathcal{O}(n^s) \qquad (45)$$

para alguna s. Entonces existe una función f que satisface $\omega(\delta, f) = \mathcal{O}(|\ln\delta|^{-1})$, cuya serie de Fourier diverge en algún punto.

Prueba: Sea $x_0 \in E$ de (37) y sea $d_k(t) = \sum_{i=n_k+1}^{n_k+\nu_k} \phi_i(x_0)\phi_i(t)$, donde los índices n_k, ν_k se eligen por inducción. En cada paso el índice ν_k,

$$\nu_k > \max(n_k, 2^{k^2}) \qquad (46)$$

se elige, en base a (36), de tal manera que

$$\|d_k\|_1 > C \ln \nu_k \qquad C = C(x_0) > 0 \qquad (47)$$

De (35) y (45) se sigue $\|d_k\|_V < K\nu_k^{s+1}$, $\|d_k\|_\infty < K\nu_k$

Entonces, esto nos permite definir una función es_ calonada σ_k que es constante en los intervalos $\{\rho_i^{(k)}\}$ $(1 \leq i \leq i_k < K\nu_k^{s-1})$ tal que σ_k satisface las condiciones

$$\|\sigma_k\|_\infty \leq K\nu_k \quad , \quad \|\sigma_k - d_k\|_\infty < 1. \tag{48}$$

Para cada intervalo $\rho \subset I \equiv [a,b]$, denote por $\Theta_\rho(x)$ la función igual a cero fuera de este intervalo, uno en el centro del intervalo y lineal en cada mitad del intervalo. Definimos

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sig}\sigma_k(x)}{\ln \nu_k} \sum_{i \in J_k} \Theta_{\rho_i^{(k)}}(x) \tag{49}$$

donde $J_k = \{i / |\rho_i^{(k)}| > \frac{1}{\nu_k^{s+2}}\}$. Entonces tenemos que

$$\omega(f_k,\delta) \leq \omega_k(\delta) = \begin{cases} \dfrac{2\nu_k^{s+2}}{\ln \nu_k}\,\delta \ , & \delta \leq \nu_k^{-(s+2)} \\[2ex] \dfrac{2}{\ln \nu_k} \ , & \delta > \nu_k^{-(s+2)} \end{cases} \tag{50}$$

No es difícil verificar que si ν_k crece suficiente - mente rápido, esto es,

$$\frac{\nu_{k+1}^{s+2}}{\ln \nu_{k+1}} > 2\,\frac{\nu_k^{(s+2)}}{\ln \nu_k} \tag{51}$$

entonces

$$\sum_{1}^{\infty} \omega_k(\delta) = \mathcal{O}(\omega_0(\delta)) \qquad (52)$$

Finalmente, el índice n_k se elige de tal manera que satisfaga las condiciones

$$n_{k+1} > 3^{\nu_k} \qquad (53)$$

$$\sup_{n_k < n < m} \left| \sum_{i=n}^{m} c_i(F_k)\,\phi_i(x_0) \right| < \frac{1}{k} \,,\; F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad (54)$$

donde $c_i(F_k)$ es el iésimo coeficiente de Fourier de F_k respecto a ϕ. En referencia a la última condición, notamos que si para alguna k no es posible elegir n_{k+1} tal que la condición se satisface, entonces la función $f = f_j$ para alguna $j \le k$ satisface los requerimientos del teorema debido a (50)

Suponga que $f = \sum_{1}^{\infty} f_k$ (la serie converge en C ya que $\|f_k\|_C \le \frac{1}{\ln \nu_k} < \frac{1}{k^2}$ debido a (49) y (46). Las condiciones (46) y (53) proveen de justificación a (51) y entonces debido a (51) y (52) tenemos que $\omega(f,\delta) = \mathcal{O}(|\ln\delta|^{-1})$, más aún para cada k tenemos

$$\left| \sum_{i=n_k+1}^{n_k+\nu_k} c_i(f)\,\phi_i(x_0) \right| \ge \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_k+\nu_k} c_i(f_k)\,\phi_i(x_0) \right| - \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_k+\nu_k} c_i(F_{k-1})\,\phi_i(x_0) \right|$$

$$-\left|\sum_{i=n_{k+1}}^{n_k} c_i\left(\sum_{l=k+1}^{\infty} f_l\right)\phi_i(x_0)\right|,$$

El segundo sumando de la derecha es estimado por (55). El módulo de la última suma es igual a

$$\left|\int_X \sum_{l=k+1}^{\infty} f_l(t)\, d_k(t)\,dt\right| \leq \|d_k\|_1 \sum_{k+1}^{\infty} \|f_l\|_\infty \leq \left(\sum_{i=n_{k+1}}^{n_k+\nu_k} \phi_i^2(x_0)\right)^{\frac{1}{2}} (\mu(X))^{\frac{1}{2}} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{\ln \nu_l}$$

esto es, $\leq O(\sqrt{\nu_k}) \frac{1}{\ln(\nu_{k+1})} = O(1)$, debido a (35), (48) y (46)

Finalmente, como consecuencia de (48) y (49) tenemos

$$\left|\sum_{i=n_{k+1}}^{n_k+\nu_k} c_i(f_k)\phi_i(x_0)\right| = \left|\int_X f_k \; d_k\, dt\right| \geq \left|\int_X f_k \sigma_k\, dt\right| - \frac{\mu X}{\ln \nu_k}$$

$$= \frac{1}{\ln \nu_k} \sum_{i\in J_k} \int_{\rho_i^{(k)}} \theta_{\rho_i^{(k)}} |\sigma_k|\, dt - \frac{\mu X}{\ln \nu_k} = \frac{1}{2\ln \nu_k}\left[\sum_{i\in J_k} \int_{\rho_i^{(k)}} |\sigma_k|\, dt - 2\mu X\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\ln \nu_k}\left[\|\sigma_k\|_1 - \sum_{i\notin J_k} \int_{\rho_i^{(k)}} |\sigma_k|\, dt - 2\mu X\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\ln \nu_k}\left[\|d_k\|_1 - 4\mu X - \frac{i_k}{\nu_k^{3+2}} \|\sigma_k\|_\infty\right] \geq \frac{1}{2\ln \nu_k}\left[c \ln \nu_k - O(1)\right]$$

(La última es de (47) y (48) y la estimación para i_k).

Finalmente obtenemos

$$\left|\sum_{i=n_{k+1}}^{n_k+\nu_k} c_i(f)\,\phi_i(x_0)\right| > \frac{c}{2} - O(1)$$

y la prueba está completa Q.E.D.

Bibliografía

[A]. Alexits, G.: Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. Budapest: Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften 1960.

[B]. Bary, N.K.: Trigonometric Series. Moscú 1961 Traducción al inglés, Pergamon 1964

[C] Ciesielski, Z.: Properties of the orthonormal Franklin system. Studia Math. 23, 141-157 (1963): 27, 289-323 (1966)

[H] Haar, A.: Über einige Eigenschaften der Orthogonalen Funktionensysteme. Mat. Z. 31 128-137 (1929)

[O] Olevskii, A. Fourier Series with respect to General Orthogonal Sistems. Springer Verlag (1975)

[R] Rudin, W. Real and complex Analysis. New York MacGraw-Hill B.C. (1966)

[W] Walsh, J.L.: A closed set of orthogonal functions. American J. of Math, 45 (1923) 5-24.

[Z] Zygmund, A.: Trigonometric series. 2 vol 2 ed Cambridg: Cambridge U. Pr. 1959.