1 ejem.

31

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

BIBLIOTECA CENTRAL

1 ejem.

31

"CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN JUEGOS EXTENSIVOS n-PERSONALES INFINITOS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

6717

MARÍA DE LA PALOMA ZAPATA LILLO

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1 ejem.

31

Introducción

Al presentar un trabajo sobre Teoría de Juegos es conveniente tratar de delimitar el campo de estudio de esta rama de la matematica, pero, dada la dificultad de la cuestión, sólo mostraremos algunos aspectos del asunto.

Desde luego, nuestro campo abarca a los juegos de salón como el ajedrez, go, damas, los diversos juegos con naipes, etc. en los cuales se enfrentan entre sí dos o más jugadores de tal modo que cada quien persigue algún objetivo y que, para lograr este objetivo, debe tomar una serie de decisiones, pero donde el resultado final depende de las decisiones tomadas por <u>todos</u> los jugadores. De hecho, la Teoría de Juegos nace precisamente del estudio matemático de los juegos de salón, pero muy pronto se amplió su campo hasta abarcar numerosas cuestiones de la producción, de la economía, de la política, de la guerra y, en general de las diversas clases de conflictos sociales.

Los conflictos sociales, los económicos, los políticos, los bélicos, tienen mucho en común con los juegos de salón.

En una de sus obras, Federico Engels argumenta del siguiente modo: "La historia del desarrollo de la sociedad difiere sustancialmente, en un punto, de la historia del desarrollo de la naturaleza. En ésta si prescindimos de la acción inversa ejercida por los hombres sobre la naturaleza, los factores que actúan los unos sobre los otros y en cuyo juego mutuo se impone la ley general, son todos agentes inconcientes y ciegos. En cambio, en la historia de la sociedad, los agentes son todos hombres dotados de conciencia, que actúan movidos por la reflexión o la pasión, persiguiendo determinados fines; aquí nada acaece sin una intención consciente, sin un fin propuesto..."

"Los hombres hacen su historia cualesquiera que sean los rumbos de ésta al perseguir cada cual sus fines propios propuestos conscientemente, y la resultante de estas numerosas voluntades proyectadas en diversas direcciones y de su múltiple influencia sobre el mundo exterior, es precisamente la historia."

A nosotros que compartimos esta concepción de Engels, nos parece que la teoría de juegos puede ser un instrumento útil para estudiar los conflictos sociales.

En general, quienes cultivan la Teoría de Juegos suelen abordar la problemática con un enfoque "subjetivo", situándose en el lugar de uno de los jugadores o cómo consejero suyo. Aquí se plantean cuestiones como: ¿Qué quiere decir jugar óptimamente?

Otro enfoque más acorde, a nuestro modo de ver, con la concepción de Engels antes citada, es el "objetivo" que consiste en situarse "desde fuera del conflicto" y plantearse cuestiones como ¿Cuál es la resultanta del juego? ¿Qué concordancia tiene la resutante con los objetivos de los jugadores? ¿Cuáles son las leyes del fenómeno? ¿Que es una ley social? ¿como transformar un juego para que se racionalice, a fin de que la resultante concuerde con los objetivos de los jugadores? ¿Cómo se transforma un juego en otro? El concepto de punto de equilibrio se puede colocar dentro de éste segundo enfoque como un intento de responder a la cuestión de "¿Cuál es la ley del juego?"

En este trabajo estudiamos algunas condiciones suficientes para asegurar la existencia de puntos de equilibrio en los juegos infinitos.

La presente tesis está basada en un seminario dirigido por Sergio Hernández y en los cursos que este mismo profesor imparte en la Facultad de Ciencias.

Los resultados más importantes del seminario están desarrollados en el capítulo III y los capítulos I y II constituyen las notas del curso de teoría de Juegos I

A continuación resumimos el contenido de cada capítulo.

En el primer capítulo definimos axiomaticamente el concepto de juego extensivo que describe el desarrollo del juego "paso a paso", de una posición a otra, por medio de las decisiones de los jugadores o como resultado del azar hasta llegar a una posición final (o quedar determinado un camino infinito que seguirá el juego) en donde cada jugador reciba un pago.

Para hacer sentir más naturales los axiomas de Kuhn de juego extensivo introducimos los juegos de posiciones.

El capítulo II desarrolla nuestra problemática en los juegos finitos.

Definimos primero el concepto de estrategia pura para cada jugador y con ésta podemos construir la forma normal del juego, es decir, pasamos del esquema extensivo de un juego a otro donde los jugadores simultáneamente toman una sola decisión, es decir, eligen una de sus estrategias para que, después de esto, cada uno de ellos reciba un pago dependiente de <u>todas</u> las decisiones tomadas.

Una vez hecho lo anterior, nos preguntamos por la existencia de estrategias para un jugador que le permitan obtener la máxima ganancia posible independientemente de cómo actúan los demás.

Esta ganancia, llamada el máximo asegurable en estrategias puras, puede mejorarse si consideramos que el juego va a realizarse en numerosas ocasiones y que los conjuntos de decisiones de los jugadores constan ahora de estrategias mixtas ("tómbolas" que les permitan escoger una estrategia pura en cada ocasión). En los juegos bipersonales de suma cero, es decir en aquellos juegos en los cuales lo que gana un jugador es igual a lo que pierde el otro, se demuestra que lo máximo que puede asegurar un jugador en estrategias mixtas es igual al mínimo tope que el otro jugador pueda imponerle al primero. Y que éste valor común es la ley del juego.

Pasamos enseguida a definir el concepto de punto de equilibrio en juegos n-personales, hacemos ver que en algunas ocasiones los puntos de equilibrio constituyen la ley de la "actuación" y establecemos la demostración de que, en los juegos finitos, siempre existe por lo menos un punto de equilibrio.

El parágrafo 4 consta de una serie de corolarios para los juegos exhaustivos y bipersonales de suma cero.

En el capítulo III, intentamos repetir todo el esquema desarrollado en el capítulo anterior, pero ahora en juegos infinitos.

Sin embargo, para construir la forma normal del juego basándonos en el concepto de estrategia pura como en el capítulo II, necesitamos determinar un semianillo en el conjunto de partidas para que, si todos los jugadores han elegido una estrategia pura, quede determinada una distribución de probabilidad en el conjunto de partidas. Igualmente, es necesario que la función que asocia un vector de pago a cada partida sea integrable con respecto a esas distribuciones de probabilidad.

Todo lo anterior, lo resolvemos en el parágrafo 1 del capítulo III, pero no se reduce a eso ese parágrafo, sino que resolvemos varios problemas para poder seguir el enfoque del capítulo II:

Introducimos topologías en los espacios de partidas y de estrategias puras y demostramos que dichos espacios son compactos. Además, estudiamos condiciones suficientes para que la función de pago medio (forma normal del juego) sea continua.

Esto último es necesario porque el teorema de existencia de puntos de equilibrio que usamos (T. Parthasarathy) lo exige.

En los parágrafos 2, 3 y 4 ya estamos preparados para ajustarnos al capítulo II. e incluso la numeración de las definiciones, teoremas etc. corresponde a la numeración del capítulo anterior. Incluso algunas de las demostraciones de II son válidas en III; sin embargo, otras son mucho más complicadas.

Por ejemplo, la demostración de que el espacio de estrategias mixtas es compacto se desprende de un teorema de Varadarajan (tomado de Parthasaraty) y la demostración de que la función de pago E es continua requiere de algunos resultados previos que también es necesario probar.

El teorema más general a que se llega en los parágrafos 3 y 4, pusimos algunos ejemplos de tipos de juegos que cumplen con las condiciones para que existan puntos de equilibrio, y que generalizan algunos resultados clásicos sobre juegos estocásticos.

Los conceptos de topología y teoría de la medida, que se utilizan en el capítulo III se compendian en el apéndice final y han sido tomados del libro de Dugunji sobre topología y del Kolmogorov y Formin sobre análisis funcional.

Por último, en lo personal, quiero agradecer a quienes colaboraron conmigo para la realización de esta tésis:

A Sergio Hernández sin cuya ayuda no hubiera sido posible la elaboración de éste trabajo.

A los profesores Gonzalo Zubieta y Francisco González Acuña por el tiempo que me dedicaron y las sugerencias que me hicieron.

A Alicia, a Javier y a Paloma que descifraron mis garabatos y se encargaron de la mecanografía.

A Antonio por haberse encargado de la impresión de la Tesis.

CAPÍTULO I

LAS NOCIONES BÁSICAS.

Capítulo I . Las Nociones básicas

En este capítulo, se define el concepto de juego de Kuhn, un esquema matemático que describe tanto numerosos juegos de salón como diversos conflictos sociales .

Sin embargo, para no empezar con toda la herramienta formal necesaria, excesivamente abstracta, definimos en el primer parágrafo lo que llamamos juegos de posiciones a fin de sugerir una forma de interpretar los axiomas de Kuhn partiendo lo más directamente posible de los juegos concretos de salón .

La diferencia esencial del esquema de Kuhn[2] y del de juego de posiciones, consiste en que en el "gráfico" del segundo cada vértice representa una posición del juego, sin importar- cómo se ha llegado a ésta, mientras que, en el esquema de --- Kuhn, cada vértice representa, además de una posición, la forma concreta como se llegó a ella .

Por ejemplo en el ajedrez, supongamos dos posibles desarrollos del juego en donde las blancas han tirado dos veces y las negras una :

1) Blancas — Negras

P4AR — P3AD

C3AD

2) Blancas — Negras

C3AD — P3AD

P4AR

Aquí no obstante que los desarrollos son distintos, por los dos caminos se llega a la misma distribución de piezas en el tablero en condiciones de que juegan las negras.

En un juego de posiciones, los dos desarrollos anteriores conducen a un sólo vértice, mientras que, en los juegos de Kuhn, cada uno de ellos es un vértice distinto.

Técnicamente, es más conveniente trabajar con los juegos de Kuhn que con los "juegos de posiciones", ya que, en los primeros, las gráficas son más simples. Por esta razón, solo se introduce el parágrafo 1 como una forma de hacer sentir más naturales los axiomas de Kuhn.

En el parágrafo 3 , se establece la relación natural entre los dos esquemas .

§1 - Juegos de posiciones .

Empecemos por considerar a los juegos de salón como el póker, el bridge, el go, el dominó, etc.

Cada uno de estos juegos consiste de multitud de posiciones . En algunas de éstas uno de los jugadores debe tomar una decisión, en otras entra en acción algún mecanismo de azar como "tirar unos dados", "revolver las cartas de la baraja", etc., por último, otras posiciones corresponden al final del juego .

Si un juego ha llegado a una posición X y puede pasar a otra Y, ya sea por una decisión de uno de los jugadores o debido al funcionamiento de un mecanismo de azar, diremos que la posición Y sucede inmediatamente a la posición X y podemos simbolizar esto como $X \dashv Y$.

Una sucesión finita o infinita de posiciones $X_0, X_1, X_2, \ldots$ es una historia posible a partir de X_0 o simplemente una historia a partir de X_0 si $X_{i-1} \dashv X_i$ para $i=1, 2, \ldots$

La posición X conduce a Y (en símbolos $X \leq Y$) si existe una historia finita $X_0, X_1, \ldots, X_n$ con $X_0 = X$ y $X_n = Y$.

En la gran mayoría de los juegos de salón existen reglas para impedir que se pase más de una vez por una misma posición. Por ello, admitiremos que si $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y $\overline{Y} \leq \overline{X}$, entonces

$$\overline{X} = \overline{Y}$$

Llegamos así a nuestros primeros requerimientos para definir un juego :

En primer lugar un juego consta de un conjunto P llamado de posiciones en el cual se encuentra definida una relación " $\dashv$ " (que leeremos " seguida inmediatamente de ") tal que se cumplen los siguientes axiomas :

Axioma 1 Si $\overline{X} \dashv \overline{Y}$, entonces $\overline{X} \neq \overline{Y}$.

Axioma 2 Si $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y $\overline{Y} \leq \overline{X}$, entonces $\overline{X} = \overline{Y}$ (En don de la relación "$\leq$" está definida como arriba) .

Es fácil demostrar de la definición que la relación "$\leq$" es reflexiva y transitiva y, por el axioma 2, es también antisimétrica. Por tanto constituye un orden parcial para P.

Si $\bar{X}$ es una posición del juego, el conjunto de las alternativas correspondientes a esa posición se denotará $\omega(\bar{X})$ y se define como

$$\omega(\bar{X}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\bar{Y} \in P \mid \bar{X} \dashv \bar{Y}\}$$

Nos limitaremos al caso en que para toda posición $\bar{X}$, el conjunto $\omega(\bar{X})$ ó tiene un número finito y mayor que uno de elementos, ó es vacío.

Diremos que una posición Z es final si $\mathcal{G}(Z)$ es vacío.

Esta condición es equivalente a decir que $Z \leq X$ implica $X \leq Z$

El conjunto de todas las posiciones finales será denotado con la letra F.

A las posiciones que no están en F las llamaremos disyuntivas y denotaremos como $D = P - F$ al conjunto de todas las disyuntivas.

Como decíamos antes, al llegar el juego a algunas de las disyuntivas X se pone en funcionamiento un mecanismo de azar que determina a cual de las posiciones del conjunto $\mathcal{G}(X)$ pasará el juego.

Esto nos conduce a nuestro:

<u>Axioma 3. Existe un subconjunto $R_0 \subset D$ tal que para cada X en R_0 se tiene una distribución de probabilidad positiva</u>

en $G(\underline{X})$.

Ahora, si $\underline{X} \in D - R_0$, $\underline{X}$ es una disyuntiva para alguno de los jugadores.

<u>Axioma 4 Existe una partición del conjunto $D - R_0$ en n subconjuntos $R_1, R_2, \ldots, R_n$.</u>

El subconjunto R_i será llamado el conjunto de las disyuntivas del jugador i.

Discutiremos el problema de la información de los jugadores.

En los juegos de salón suelen existir posiciones distintas $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ en R_i, tales que al llegar el juego a una de ellas, el jugador i no es capaz de distinguir en cual de las dos está, pues los datos que ha recibido del desarrollo del juego -

no se lo permiten. En este caso escribiremos $X \sim Y$ y leeremos "i confunde la posición X con la Y ". La relación "$\sim$" es claramente de equivalencia. Además, si $X \sim Y$ el jugador i debe identificar cada alternativa de $\mathcal{A}(X)$ con una alternativa de $\mathcal{A}(Y)$.

Es decir establece una correspondencia entre los elementos de $\mathcal{A}(X)$ y los de $\mathcal{A}(Y)$.

Los juegos que discutiremos tendrán la siguiente característica : cada <u>jugador</u> i es un individuo ó un equipo formado por varios individuos. En el último caso, cada posición de R_i se considerará asignada a uno solo de los componentes del equipo .

Por esta razón si X y Y están en R_i con $X \neq Y$, no puede ocurrir simultáneamente que $X \leq Y$ y que $X \sim Y$.

Todas estas consideraciones nos conducen a los siguientes axiomas adicionales :

Axioma 5 Para cada jugador i, se tiene una relación de equivalencia "$\sim$" en el conjunto R_i. Para cada clase de equivalencia R_i^j correspondiente a la relación "$\sim$", se tiene un conjunto I_i^j tal que para cada X en R_i^j existe una correspondencia biunívoca tal que a cada Y de $G(X)$ le asocia un elemento de I_i^j.

Axioma 6 Si X y Y son dos posiciones distintas de R_i, no pueden cumplirse simultáneamente las relaciones $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y $\overline{X} \sim \overline{Y}$.

Finalmente consideramos la cuestión de los pagos:

Axioma 7 Se tiene una función de pago $\rho : P \to R^n$ llamada la función de pago

Para cada $\overline{X}$ en P, la componente i-ésima $\rho_i(\overline{X})$ del vector $\rho(\overline{X})$ se llama el pago que recibe el jugador si el juego llega a la posición $\overline{X}$.

Un juego J tiene una posición inicial ó inicio, si se cumple el siguiente axioma adicional

Axioma 8 Existe ∂ en P tal que para toda $\overline{X}$ en P, $\partial \leq \overline{X}$

En este caso, ∂, se llamará la posición inicial que, claramente, es única. Consideraremos juegos en que $P \neq \{\partial\}$.

A las historias desde la posición inicial las llamaremos simplemente historias .

Una historia ζ_1 es una partida si es infinita o conduce a una posición final.

De aquí en adelante cuando hablemos de un juego de posiciones supondremos que en él se cumplen los axiomas 1 - 8 .

§2 - Arboles con raíz . Juegos de Kuhn

Sea V un conjunto y U en V, $V \neq \{U\}$

Definición 1.* 2. 1

Un árbol Γ, con vértices en V y raíz en U, es una función Γ de $V-\{U\}$ en V tal que para toda A en $V-\{U\}$ existe n tal que $\Gamma^n(A)=U$.

Si para alguna B en $V-\{U\}$ se cumpliera que $\Gamma(B)=B$, entonces para toda n se tendría $\Gamma^n(B)=B$; Por lo que tenemos la siguiente

---

* Es claro que la definición 1 no es precisa pues Γ no se compone consigo misma sino con restricciones de Γ .

Proposición 1.2.2

Γ no tiene puntos fijos

También es clara la

Proposición 1.2.3

n es único

Dado A en $V-\{U\}$ si n es tal que $\Gamma^n(A)=U$, diremos que A está en el piso n ó pertenece a la n-ésima generación .

Definición 1.2.4

A y B contiguos si $\Gamma(A)=B$ ó $\Gamma(B)=A$.

Si N es el conjunto de los naturales, consideraremos conjuntos $W=\{i\in N$ tal que $0\leq i\leq n\}$ .Diremos que N y los —

conjuntos ω son segmentos de naturales y que la longitud de ω - es n y la de N es infinita.

Definición 1. 2. 5.

Una trayectoria admisible es una función α de un segmento de naturales en V que cumple con las dos condiciones siguientes:

a) $\alpha(i-1)$ y $\alpha(i)$ son contiguos para toda $i \geq 1$

b) $\alpha(i) \neq \alpha(j)$ si $i \neq j$.

Las trayectorias admisibles que tienen como dominio a N son infinitas y decimos que una trayectoria admisible finita tiene longitud n, si n es la longitud de su dominio.

Consideraremos dos trayectorias admisibles α_1 y α_2 tales que $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)=U$, decimos que α_1 está contenida en α_2 si el dominio de α_1 está contenido en el de α_2 y la función α_1 resulta una restricción de α_2.

Supongamos que para cada i en el dominio de α denotamos a $\alpha(i)$ como A_i, entonces usaremos frecuentemente la notación $\alpha = \{A_0, \ldots A_n, \ldots\}$ para referirnos a una trayectoria admisible.

Decimos que A está en α si existe k tal que $\alpha(k) = A$

Teorema 1.2.6

Si A y B son dos vértices distintos, existe una trayectoria admisible $\alpha = \{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ donde $\alpha(i) = A_i$ $\alpha(0) = A_0 = A$ y $\alpha(n) = A_n = B$

Demostración :

Sean A y B vértices distintos .

Existen enteros k y s tales que $\Gamma^{k}(A) = \Gamma^{s}(B)$. Si $\bar{k}$ es -

el entero menor tal que $r^{\bar{k}}(A) = r^{s}(B)$ para algún $s \geq 0$.

Entonces la trayectoria buscada será $\alpha = \{A_0, A_1, \ldots A_{s+\bar{k}}\}$,-

donde
$$
\begin{array}{lll}
A_i = A & \text{si} & i = 0 \\
A_i = r^{i}(A) & \text{si} & 1 \leq i < \bar{k} \\
A_{\bar{k}} = r^{\bar{k}}(A) & = & r^{s}(B) \\
A_i = r^{s-(i-\bar{k})}(B) & \text{si} & \bar{k} < i < s+\bar{k}. \\
A_{s+\bar{k}} = B. & &
\end{array}
$$

Teorema 1. 2. 7

Si A y B son dos vértices distintos existe una trayectoria admisible única que une A con B.

Lema 1. 2. 8

Si $\alpha = \{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ es una trayectoria admisible con $n \geq 1$ y tal que A_0 es el de generación menor de todos los vér tices de $\alpha^{(i)}$, entonces $\Gamma(A_i) = A_{i-1}$ para toda i mayor ó i- gual que 1 .

Demostración

$\Gamma(A_1) = A_0$ pues si esto no fuera cierto, entonces $\Gamma(A_0) = A_1$ y A_1 sería de una generación menor que A_0 en contra de nuestra hipótesis .

Supongamos que existe i_0 mayor ó igual que 1 y menor ó igual que n tal que $\Gamma(A_{i_0}) \neq A_{i_0-1}$. Sea m el menor con la propiedad $\Gamma(A_m) \neq A_{m-1}$, como vimos arriba $m>1$ por lo que $m-1 \geq 1$, $\Gamma(A_{m-1}) = A_m$ pero $\Gamma(A_{m-1}) = A_{m-2}$ por lo que $A_m = A_{m-2}$ absurdo .

dominio de α_1 está contenido en el de α_2 y la función α_1 resulta una restricción de α_2.

Supongamos que para cada i en el dominio de α denotamos a $\alpha(i)$ como A_i, entonces usaremos frecuentemente la notación —

$\alpha = \{A_0, \ldots A_n, \ldots\}$ para referirnos a una trayectoria admisible.

Decimos que A está en α si existe k tal que $\alpha(k) = A$

<u>Teorema 1.2.6</u>

<u>Si A y B son dos vértices distintos, existe una trayectoria admisible $\alpha = \{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ donde $\alpha(i) = A_i$ $\alpha(0) = A_0 = A$ y</u> $\alpha(n) = A_n = B$.

Demostración :

Sean A y B vértices distintos .

Existen enteros k y s tales que $\Gamma^k(A) = \Gamma^s(B)$. Si $\bar{k}$ es —

Observaciones .

Si A es un vértice distinto que ., tal que $\Gamma^n(A)=U$

La trayectoria α tal que $\alpha(0)=U=\Gamma^n(A)$, $\alpha(i)=\Gamma^{n-i}(A)$, $\alpha(n)=A$

une a U con A. A α la denotamos como $W(A)$. Para redondear, definamos $W(U)=\{U\}$

Decimos que A antecede a B (y escribimos $A<B$) si $A\neq B$

y A pertenece a $W(B)$. El símbolo "$\leq$" tiene un significado obvio. Decimos que B es sucesor inmediato de A si $A<B$ y A y B contiguos o, lo que es lo mismo si $\Gamma(B)=A$. Es claro que "$\leq$" es un orden parcial sobre los vértices de V.

Si $\Gamma^{-1}(A)=\phi$ decimos que A es terminal .

$T = \{A$ en V, tal que A es terminal$\}$.

Evidentemente, $Im(\Gamma) = V - T$.

De ahora en adelante sólo consideramos las trayectorias α tales que $\alpha(0)=U$. Una trayectoria es una partida si es infinita o es igual a $W(A)$ para alguna A terminal.

Al conjunto de partidas lo denotaremos con la letra Π.

A partir del concepto de árbol con raíz, se establece la definición de Kuhn de juego extensivo.

Para esta definición nos restringiremos a árboles tales que el conjunto $\Gamma^{-1}(A)$ es finito y mayor que uno para cada vértice A no terminal.

Definición 1.2.10.

Un juego extensivo n-personal consta de;

(1) Un árbol Γ con raíz U.

(2) Una partición de los vértices no terminales de Γ en $n+1$ subconjuntos $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ llamados los conjuntos de alternativa de cada jugador.

(3) Para cada vértice A de S_0, una distribución de probabilidad positiva entre los elementos de $\Gamma^{-1}(A)$. Si B está en $\Gamma^{-1}(A)$ denotamos como $P(B|A)$ a la probabilidad asociada a B.

(4) Para cada conjunto S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, una partición en conjuntos $S_i^1, S_i^2, \ldots$ llamados los conjuntos de información para el jugador i de tal modo que se cumplen

Observaciones .

Si A es un vértice distinto que , tal que $\Gamma^{n}(A)=U$

La trayectoria α tal que $\alpha(0)=U=\Gamma^{n}(A)$, $\alpha(i)=\Gamma^{n-i}(A)$, $\alpha(n)=A$

une a U con A. A la denotamos como $W(A)$. Para redondear, definamos $W(U)=\{U\}$

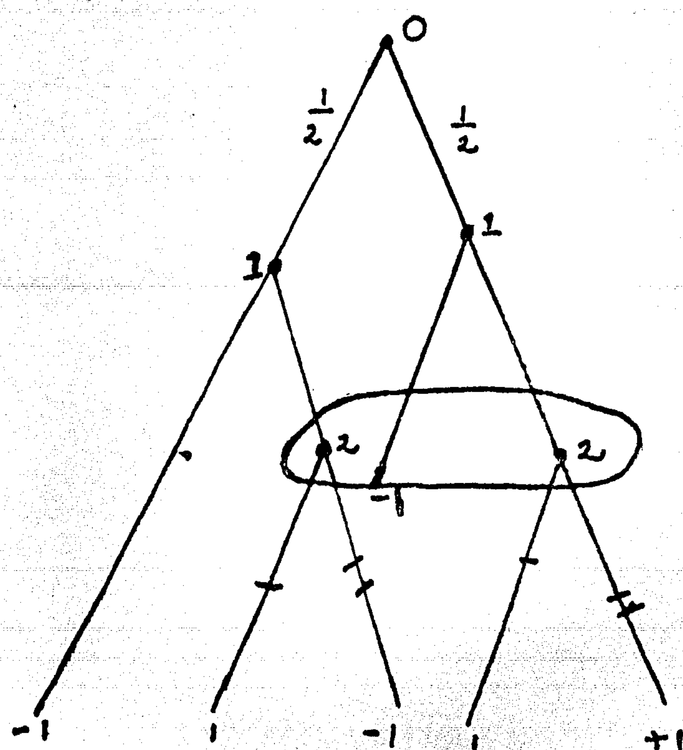
Decimos que A antecede a B (y escribimos $A<B$) si $A\neq B$

y A pertenece a $W(B)$. El símbolo "$\leq$" tiene un significado obvio. Decimos que B es sucesor inmediato de A si $A<B$ y A y B contiguos o, lo que es lo mismo si $\Gamma(B)=A$. Es claro que "$\leq$" es un orden parcial sobre los vértices de V

Si $\Gamma^{-1}(A)=\phi$ decimos que A es terminal .

tar otro peso . En este último caso el jugador 2 puede no aceptar y perder el peso del principio o aceptar la apuesta en cuyo - caso 1 enseña la carta, si tiene la más grande gana los dos - pesos sino los pierde.

El esquema de Kuhn de ese juego es :



3 - Los juegos de posiciones y los juegos de Kuhn .

Vamos ahora a relacionar los juegos de posiciones del paragrafo 1 con los juegos de Kuhn .

Sea J un juego de posiciones con inicio ∂ . Sea V el conjunto de historias finitas de J y en particular, sea

$$U = \{ \partial = \overline{X}_0 \}$$

A las historias finitas las llamaremos vértices .

Si A es un vértice distinto que U , entonces

$$A = \{ \partial = \overline{X}_0 \dashv \overline{X}_1 \dashv \overline{X}_2 \dashv \cdots \dashv \overline{X}_n \} \text{ con } n \geq 1 .$$

Definamos entonces

$$\Gamma(A) = \{ \partial = \overline{X}_0 \dashv \overline{X}_1 \dashv \cdots \dashv \overline{X}_{n-1} \} .$$

Γ es una función de

$$V - \{U\} \text{ en } V$$

Es claro que para cada vértice A distinto que U existe un número n tal que $\Gamma^n(A) = \{U\}$.

Consideremos el árbol radicado (Γ, U), podemos definir los conjuntos de alternativa S_i del jugador i como sigue:

$$S_i = \{A \text{ en } V \text{ tal que } A = \{\mathcal{O} = \mathfrak{X}_0 \dashv \mathfrak{X}_1 \dashv \ldots \dashv \mathfrak{X}_m\} \text{ con } \mathfrak{X}_m \text{ en } R_i\}$$

Si $i \neq j$ entonces S_i y S_j son ajenos.

Ahora bien, A está en S_0 si:

$$A = \{\mathcal{O} = \mathfrak{X}_0 \dashv \mathfrak{X}_1 \dashv \ldots \dashv \mathfrak{X}_m\} \text{ con } \mathfrak{X}_m \text{ en } R_0 \text{ y}$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \{B \text{ en } V \text{ tal que } B = \{\mathcal{O} = \mathfrak{X}_0 \dashv \mathfrak{X}_1 \dashv \ldots \mathfrak{X}_m \dashv \mathfrak{X}_{m+1}\} \text{ con } \mathfrak{X}_{m+1} \text{ en } \mathcal{G}(\mathfrak{X}_m)\}$$

Existe un encaje natural de $\mathcal{G}(\mathfrak{X}_m)$ sobre $\Gamma^{-1}(A)$. Para $\mathfrak{X}_m$ en R_0 hay una distribución de probabilidad positiva entre los elementos de $\mathcal{G}(\mathfrak{X}_m)$, obviamente el encaje $\mathcal{G}(\mathfrak{X}_m)$ -

sobre $\Gamma^{-1}(A)$ induce una distribución de probabilidad entre los elementos de este último .

Para $i \neq 0$, se tiene una partición de R_i en la familia $\{R_i^j\}$ en virtud del axioma 5 del $\mathcal{J}_1$. Esta partición induce una partición de S_i en la familia $\{S_i^j\}$ en donde

$$S_i^j = \{A \text{ en } V \text{ Tal que } A = \{0 = \underline{X}_0 \to \underline{X}_1 \to \ldots \underline{X}_m\}$$
$$\text{con } \underline{X}_m \text{ en } R_i^j\}$$

Es claro que si A está en S_i^j queda inducida una correspondencia entre $\Gamma^{-1}(A)$ e I_i^j y se cumplen $ii)$, e $iii)$ del axioma 4 de los juegos de Kuhn .

En Γ las trayectorias α son de la forma

$$\alpha(0) = A_0 = \left\{ \vartheta = \bar{\underline{X}}_0 \right\}$$

y si

$$\alpha(k) = A_k = \left\{ \vartheta = \bar{\underline{X}}_0 \dashv \bar{\underline{X}}_1 \dashv \ldots \dashv \bar{\underline{X}}_k \right\}$$

entonces

$$\alpha(k+1) = A_{k+1} = \left\{ \vartheta = \bar{\underline{X}}_0 \dashv \bar{\underline{X}}_1 \dashv \ldots \dashv \bar{\underline{X}}_k \dashv \bar{\underline{X}}_{k+1} \right\}$$

Si ahora suponemos que en nuestro juego $\mathcal{J}$ cada partida

$$\tau = \left\{ \vartheta = \underline{X}_0, \underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_m, \ldots \right\}$$

tiene la propiedad de que la serie $\sum \varrho(\underline{X}_n)$ es convergente y

si $\alpha = \left\{ V = A_0, A_1, \ldots A_m, \ldots \right\}$ con

$$A_k = \left\{ \vartheta = \bar{\underline{X}}_0 \dashv \bar{\underline{X}}_1 \dashv \ldots \dashv \bar{\underline{X}}_k \right\}$$

entonces podemos definir

$$\Pi(\alpha) = \sum \varrho(\bar{\underline{X}}_n)$$

Tenemos demostrada la afirmación siguiente:

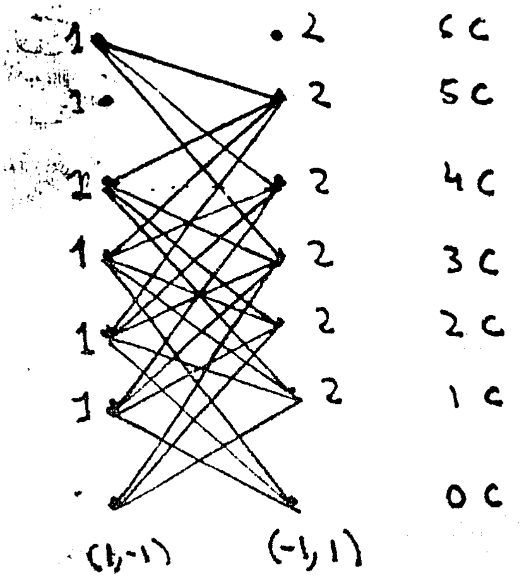
Si J es un juego de posiciones con inicio, tal que para cada partida $\tau = \{\delta_0, \dots, \delta_m, \dots\}$ la serie $\sum \rho(\delta_n)$ converge, entonces queda inducido un juego extensivo de Kuhn.

De aquí en adelante, todos los juegos de los cuáles hablaremos serán de Kuhn. Por último veamos los esquemas "Juego de posiciones" y de Kuhn de un ejemplo: Son dos jugadores el 1 y el 2. Originalmente se tiene un montón de 6 cerillos. El jugador 1 toma uno dos o tres cerillos según lo desee. En seguida hace lo mismo el jugador 2.

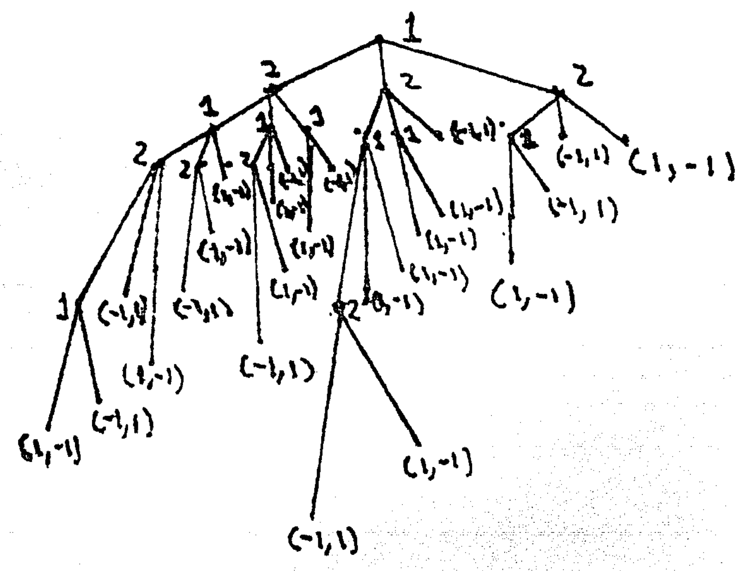
De esta manera los dos jugadores se van turnando hasta agotar los cerillos.

Pierde el jugador que levante el último cerillo.

Juego de posiciones



Juego extensivo



CAPÍTULO II

LOS JUEGOS FINITOS.

En este capítulo se desarrolla la Teoría de los Juegos - Finitos .

Definimos los conceptos principales como son el de estrategia y el de punto de equilibrio y demostramos el Teorema - Fundamental que es el de la existencia de puntos de equilibrio.

La técnica cental que se usa para trabajar los puntos de equilibrio de un juego es la reducción de éste a su forma - normal .

§1- REDUCCION DE LOS JUEGOS DE KUHN A SU FORMA NORMAL

Primero que nada estableceremos una importante definición.

Definición 2.1.1

En un juego Γ con raíz U, una estrategia pura para el jugador i es una función σ_i con dominio en la familia $\{ S_i^j \}$ de conjuntos de información del jugador i y contradominio en $\bigcup_j I_i^j$ y tal que para toda j $\sigma_i(S_i^j)$ está en I_i^j.

Es decir, una estrategia pura para el jugador i es un elemento del producto cartesiano $\prod I_i^j$. Al conjunto de todas las estrategias puras para el jugador i lo denotamos con la letra Σ_i, al producto cartesiano de los conjuntos Σ_i con Σ y a los elementos de Σ con σ. Podemos definir $\sigma(S_i^j) = \sigma_i(S_i^j)$ donde σ_i es la

Decimos que un juego es finito, si el número de sus vértices es finito. En este capítulo expondremos los resultados principales relativos a estos juegos.

En el caso de un juego finito Γ es claro que, para cada-jugador i, el conjunto Σ_i de sus estrategias puras es finito .

Basándonos en el concepto de estrategia pasaremos a la forma normal del juego, es decir construiremos una función que a cada elemento σ de Σ le asocie un pago para cada jugador. El problema resulta esencialmente distinto en los juegos en que interviene el azar que en los que esto no ocurre .

Consideremos primero un juego Γ en el cual no interviene el azar, vamos a demostrar que si cada jugador escoge una estrategia pura queda determinada una partida .

Teorema 2. 1. 2 Sea Γ un juego tal que $S_0 = \phi$.

$\forall \sigma \in \Sigma$ existen r natural mayor que cero y una partida $\alpha = \{U = A_0, A_1, \ldots A_r\}$ tal que para toda k menor que r y mayor que cero $\epsilon(A_{k+1}) = \sigma_i(S_i^j)$ en donde A_k está en S_i^j. Además r y α son únicos.

Demostración:

Supngamos que no existe r con la propiedad deseada, sea $A_0 = U$ y supngamos construída la sucesión $\{A_0, A_1, \ldots A_{k_1}\}$ con $A_0 = U$ tal que para toda $k < k_1$ $\epsilon(A_{k+1}) = \sigma_i(S_i^j)$, en donde A_k está en S_i^j, A_{k_1} no es terminal, entonces construyamos A_{k_1+1} de tal manera que si A_{k_1} está en $S_{i_0}^j$,

$$\epsilon(A_{k_1+1}) = \sigma_{i_0}(S_{i_0}^j)$$

Pero como esto lo podemos hacer para toda k_1, la sucesión resulta infinita y también el juego, por lo que 2.1.2 queda demostrado.

Observemos que si en un juego Γ <u>no interviene el azar,</u> cada σ determina una partida y por tanto un pago para cada jugador, es decir podemos asociar a cada elemento de $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$ un vector de R^n.

Pero si en Γ interviene el azar nos tropezamos con el obstáculo de que al escoger cada jugador una de sus estrategias no queda determinada una partida. El problema se resuelve considerando que el juego se realizará en una multitud de-ocasiones y que cada jugador i usará en todas ellas la estra tegia σ_i. De esta manera queda determinado, para cada jugador, un pago medio que recibe a la larga y no en cada ocasión que se realiza el juego.

Para entender cual es ese pago medio, observemos que al elegirse $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, a cada par de vértices A y B con B en $\Gamma^{-1}(A)$ se le puede asociar un número $P(B|A, \sigma)$ llamado <u>la probabilidad de B supuesto que se ha llegado a la posición A y se ha elegido el sistema σ de estrategias puras</u>.

Definimos este número como sigue: i) Si A está en S_0, entonces

$$P(B|A, \sigma) = P(B|A) \quad .$$

ii) Si A está en S_i^j , entonces

$$P(B|A,\sigma)=1 \quad \text{si} \quad \sigma_i(S_i^j)=\epsilon(B)$$

y $$P(B|A,\sigma)=0 \quad \text{si} \quad \sigma_i(S_i^J)\neq\epsilon(B)$$

Finalmente, hacemos

$$P(A|A,\sigma)=1 \quad \text{para toda } A \text{ en } \Gamma$$

Ahora, si $A<B$ sabemos que existe una trayectoria única $\alpha=\{A=A_0,A_1,\ldots,A_m=B\}$ y definimos ----

$$P(B|A,\sigma)=P(A_m|A_{m-1},\sigma)\times\ldots\times P(A_1|A_0,\sigma)$$

En el caso de que $A=U$ escribimos simplemente $P(B|\sigma)$ en lugar de $P(B|U,\sigma)$.

Si $\alpha\in T$ con $\alpha=W(B)$, definimos $P(\alpha|\sigma)=P(B|\sigma)$.

Proposición 2. 1. 3

Si T es el conjunto de todos los puntos terminales de Γ, entonces $\sum_{A \in T} P(A|\sigma) = 1$.

Es decir σ induce una distribución de probabilidad sobre los puntos terminales de Γ.

Demostración :

Dado un vértice arbitrario A, denotamos $\langle A \rangle$ al conjunto de partidas que pasan por A y $T(A)$ al conjunto de puntos terminales de las partidas de $\langle A \rangle$.

Demostraremos que para cualquier vértice A no terminal -

se cumple : $\sum_{B \in T(A)} P(B \mid A, \sigma) = 1$

La demostración será por inducción sobre la longitud de la

mas larga de las trayectorias $\{A = A_0, \ldots, A_n\}$ con A_n en $T(A)$. ①

(Nos referiremos a esa trayectoria como la que tiene la propiedad ①)

Si $T(A) = \Gamma^{-1}(A)$, hay 2 casos posibles

1- A está en S_0 , entonces

$$\sum_{B \in T(A)} P(B \mid A, \sigma) = \sum_{B \in \Gamma^{-1}(A)} P(B \mid A) = 1$$

2- A está en algún conjunto de información S_i^{α} para al--

gún jugador i , entonces únicamente para B en $\Gamma^{-1}(A)$, tal que

$\sigma_i(S_i^{\alpha}) = \mathcal{E}(B)$, ocurre que $P(B \mid A, \sigma) = 1$.

Para los demás elementos de $\Gamma^{-1}(A)$

$P(B|A,\sigma)=0$ por lo que $\sum_{B\in T(A)} P(B|A,\sigma)=\sum_{B\in\Gamma^{-1}(A)} P(B|A,\sigma)=1$

Supongamos ahora que la trayectoria que tiene la propiedad① tiene longitud menor que k, entonces se cumple

$$\sum_{B\in T(A)} P(B|A,\sigma)=1$$

y veamos que ocurre cuando la trayectoria con la propiedad① tiene longitud k

$$\sum_{B\in T(A)} P(B|A,\sigma)=\sum_{C\in\Gamma^{-1}(A)}\ \sum_{B\in T(C)} P(C|A,\sigma)\,P(B|C,\sigma)=$$

$$=\sum_{C\in\Gamma^{-1}(A)} P(C|A,\sigma)\ \sum_{B\in T(C)} P(B|C,\sigma).$$

Pero como las trayectorias que parten de alguna $C \in \Gamma^{-1}(A)$ tienen longitud menor que K, tenemos que

$$\sum_{B \in T(C)} P(B \mid C, \sigma) = 1 \quad y$$

$$\sum_{B \in T(A)} P(B \mid A, \sigma) = \sum_{C \in \Gamma^{-1}(A)} P(C \mid A, \sigma) = 1$$

Si $A = U$ la proposición 2. 1. 3. está demostrada y con ella que

$$\sum_{\alpha \in T} P(\alpha, \sigma) = 1$$

Definición 2. 1. 4

Definimos el pago medio $M(\sigma)$ por ocasión que se celebra el juego ó simplemente el pago medio correspondiente a σ, como $M(\sigma) = \sum_{\alpha \in T} P(\alpha | \sigma) \, \pi(\alpha)$. Y llamaremos pago medio para el jugador i a la i-ésima componente $M_i(\sigma)$ del vector $M(\sigma)$.

Logramos con este concepto de pago medio, asociar a cada σ un pago para cada jugador sin tener que distinguir, desde el punto de vista teórico, los juegos en que interviene el azar de los que no . En la práctica, sin embargo, las cosas son --

distintas, mientras en un juego sin azar los jugadores obtienen el pago medio cada vez que realizan el juego, en los juegos con azar lo obtienen después de un número enorme de veces, -- como una " ganancia media " .

Establecemos ahora una nueva definición

Definición 2. 1. 5 Sean $D_1, \ldots, D_n$ conjuntos .

Un juego rectangular n- personal en donde el jugador i tiene el conjunto de decisiones D_i es una función

$$\varphi : D_1 \times \ldots \times D_n \longrightarrow R^n .$$

Si $D_1, \ldots, D_n$ son conjuntos finitos, φ es llamado un juego finito .

Con ayuda de esta nueva terminología podemos resumir los razonamientos anteriores como sigue :

<u>A cada juego finito de Kuhn Γ se le puede asociar un juego rectangular finito</u> .

$$M : \Sigma_1 X \ldots X\ \Sigma_n \longrightarrow R^n$$

donde M está definido en 2.1.4.

El juego $M : \Sigma_1 X \ldots X\ \Sigma_n \longrightarrow R^n$ se llama la <u>forma normal de Γ</u> .

La forma normal de un juego bipersonal con $\Sigma_1 = \{1, \ldots, m\}$ y $\Sigma_2 = \{1, \ldots, n\}$, se puede representar con una matriz $m \times n$ cuya entrada i , j es el vector $M(i, j)$.

§2- EL PROBIEMA DEL MAXIMO ASEGURABIE. EXTRATEGIAS MIXTAS:

Consideremos un juego finito n-personal Γ *.

Sea Σ_i el conjunto de estrategias puras para el jugador i.

Diremos que el real X es una <u>cantidad asegurable</u> para i -- si existe una estrategia $\hat{\sigma}_i$ en Σ_i tal que para toda ---

$$\sigma \in \Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$$
$$M_i(\sigma \mid \hat{\sigma}_i) \geq X$$

Es claro que $\overline{M}_i = \max\limits_{\sigma} M_i(\sigma)$ es una cota superior para el conjunto de las cantidades asegurables para i.

* Usaremos frecuentemente el símbolo "$(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$". Indicando con él, la estrategia σ cuya i-ésima componente es $\hat{\sigma}_i$, o más rigurosamente "$(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$" es la función de $\Sigma \times \Sigma_i \rightarrow \Sigma$ que asocia a (σ, σ_i), con $\sigma = (\sigma_1, \ldots \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$, la estrategia $(\sigma_1 \ldots, \hat{\sigma}_i, \ldots \sigma_n)$

En tanto que $m_i = \min\limits_{\sigma} M_i(\sigma)$ es obviamente asegurable para i.

Por lo que existe el número $\sup\{x \mid x$ asegurable para $i\}$ a quién llamaremos v_i'.

Probaremos ahora la siguiente

Proposición 2. 2. 1

$$v_i' = \max_{\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i} \min_{\sigma \in \Sigma} M_i(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$$

Demostración :

Hagamos momentáneamente

$$W_i' = \max_{\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i} \min_{\sigma \in \Sigma} M_i(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$$

Sea x asegurable para i.

Entonces existe $\hat{\sigma}_i$ en Σ_i tal que para toda σ en Σ

$$x \leq M(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$$

Por lo tanto $x \leq \min_{\sigma} M(\sigma | \hat{\sigma}_i) \leq w_i'$

w_i' es una cota superior de las cantidades asegurables

y $v_i' \leq w_i'$ ①

Por otro lado claramente existe $\bar{\bar{\sigma}}$ tal que :

$$w_i' = \min_{\sigma \in \Sigma} M_i(\sigma | \bar{\bar{\sigma}}_i)$$

Por lo que para toda σ en Σ

$$w_i' \leq M_i(\sigma | \bar{\sigma}_i)$$

y w_i' es asegurable para i, de lo que se concluye que

$$w_i \leq v_i' \quad ②$$

y nuestra proposición se desprende de ① y ② .

Entonces si el juego va a realizarse una sola vez, lo máximo que puede asegurar i es v_i'

Supongamos que el juego Γ va a realizarse, un gran número de ocasiones. Nos preguntamos ahora ¿ Habrá forma de --- ampliar nuestro conjunto de decisiones ξ_i para obtener como -- promedio un máximo asegurable aún mayor que v_i'? .

Para contestar a esta cuestión, introducimos el concepto de estrategia mixta .

Recordemos que para establecer la forma normal del juego extensivo consideramos que se realizaba en multitud de ocasiones, ahora estamos hablando de Γ cómo un juego rectangular y es el juego rectangular el que va a repetirse muchas veces.

Definición 2. 2. 2

Una estrategia mixta X_i para el jugador i es una distribución de probabilidad entre las estrategias puras Σ_i. Más precisamente, una estrategia mixta es una función con valores en los reales y con dominio en Σ_i.

$(X_i : \Sigma_i \longrightarrow R)$ tal que :

i) $X_i(\sigma_i) \geq 0 \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i$

ii) $\sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} X_i(\sigma_i) = 1$

Denotaremos con M_i el conjunto de las estrategias mixtas para el jugador i y definimos

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$$

Una n-ada $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ en M será denotada por $\underline{X} = (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_n)$ y , finalmente, si $\hat{Y}_i \in \mathcal{M}_i$ hacemos $: (\underline{X} \mid \hat{Y}_i) = (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_{i-1}, \hat{Y}_i, \underline{X}_{i+1} \ldots \underline{X}_n)$.

Dado un sistema de estrategias mixtas $\underline{X} \in \mathcal{M}$, podemos suponer que cada jugador i tiene a la mano un mecanismo de azar (por ejemplo, una " tómbola") que asigna a cada estrategia pura σ_i una probabilidad $\underline{X}_i(\sigma_i)$.

Y que antes de celebrarse el juego, el jugador i pone a funcionar secretamente el mecanismo de azar para escoger la estrategia pura con la que jugará . Si suponemos que esta operación se repetirá un número N muy grande de veces . ¿ Cuál es la ganancia media que logrará el jugador i ?

Esta se obtiene como la esperanza matemática:

$$E_i(\mathfrak{X}) \stackrel{def.}{=} \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in\Sigma} \mathfrak{X}_1(\sigma_1)\,\mathfrak{X}_2(\sigma_2)\cdots\mathfrak{X}_n(\sigma_n)\,M_i(\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{X}(\sigma)\; M_i(\sigma)$$

donde

$$\mathfrak{X}(\sigma) \stackrel{def.}{=} \mathfrak{X}_1(\sigma_1)\,\mathfrak{X}_2(\sigma_2)\ldots\mathfrak{X}_n(\sigma_n)$$

es claro que $\sum_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{X}(\sigma) = 1$

En lo que sigue escribiremos $E(\mathfrak{X}) = (E_1(\mathfrak{X}),\ldots E_n(\mathfrak{X}))$

y llamaremos a <u>$E(\mathfrak{X})$ el vector de ganancia esperada</u> y a <u>$E_i(\mathfrak{X})$ la ganancia esperada por el jugador i</u>.

Una estrategia pura $\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ puede ser <u>identificada</u> con la estrategia mixta $\hat{\mathfrak{X}}_i$ tal que $\hat{\mathfrak{X}}_i(\hat{\sigma}_i) = 1$ y

$$\mathfrak{X}_i(\sigma_i) = 0 \quad \text{si } \sigma_i \neq \hat{\sigma}_i$$

Desde este momento, escribiremos $\hat{\sigma}_i$ en lugar de $\hat{\mathfrak{X}}_i$ y del contexto desprenderemos si $\hat{\sigma}_i$ es una estrategia pura o mixta.

. . .

<u>Observaciones</u> :

Como hemos dicho $\mathcal{M}_j$ es un subconjunto de las funciones - definidas en el conjunto Σ_j y con valores reales. Es claro que $\mathcal{M}_j$ no resulta cerrado bajo la suma y el producto por escalares usuales entre las funciones, sin embargo, si $\underline{X}_j^1, \ldots, \underline{X}_j^n$ estan en $\mathcal{M}_j$ y $a_1, \ldots, a_n$ son reales no negativos tales que- $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ podemos considerar la función $\underline{X}: \Sigma_j \to R$ definida como $\underline{X}(\sigma_j) = a_1 \underline{X}_j^1(\sigma_j) + \ldots + a_n \underline{X}_j^n(\sigma_j)$

Es claro que $\underline{X}(\sigma_j)$ es no negativo ademas

$$\sum_{\sigma_j \in \Sigma_j} \underline{X}(\sigma_j) = \sum_{\sigma_j \in \Sigma_j} \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{X}_j^i(\sigma_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_j \in \Sigma_j} a_i \underline{X}_j^i(\sigma_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{\sigma_j \in \Sigma_j} \underline{X}_j^i(\sigma_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Por lo que $\underline{X}$ está en M_j y podemos decir que $\underline{X}$ es la —

combinación convexa de $\underline{X}_j^1, \ldots, \underline{X}_j^n$

y denotarla como $\sum_{i=1}^{n} a_i \underline{X}_j^i$

Por lo que ha quedado establecida la

__Proposición 2.2.3.__

__M_i es convexo__

Por otro lado podemos identificar a M_i (si Σ_i tiene n elementos) con la intersección del hiperplano Π de R^n, cuya ecuación es $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, y el 1er "2n-tante" de R^n. Por lo que es claro que M_i es acotado. Además dos conjuntos son cerrado y por lo tanto M_i también lo es y tenemos:

__Proposición 2.2.4. M_i es compacto__

__Proposición 2.2.5 $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ es compacto.__

En cuanto a la esperanza de pago tenemos:

Proposición 2.26. Si $(\alpha \Sigma_i + \beta \Sigma_i')$ es una estrategia mixta para i, entonces

$$E_i(\Sigma \mid (\alpha \Sigma_i + \beta \Sigma_i')) = \alpha E_i(\Sigma \mid \hat{\Sigma}_i) + \beta E_i(\Sigma \mid \hat{\Sigma}_i').$$

Es decir la función $E_i : \mathcal{M} \times \mathcal{M}_i \rightarrow R$ es lineal en el argumento $\hat{\Sigma}$ y continua.

Observación:

Para cada jugador i hemos construído un nuevo conjunto de decisiones $\mathcal{M}_i$, en el cual está incluído el antiguo conjunto de decisiones Σ_i, y una función de pago de tal manera que, si todos los jugadores hacen una decisión queda determinado un pago para cada uno de ellos. Por tanto, nos encontramos con un nuevo juego rectangular, ahora infinito. Para justificar la introducción de estos nuevos conceptos, haremos ver que "la máxima ganancia asegurable" puede incrementarseen esta nueva situación. Repetiremos entonces, para estrategias mixtas las consideraciones que hicimos al principio de este inciso :

Diremos que el real X es una cantidad asegurable <u>en estrategias mixtas</u> para i ,si existe una estrategia $\hat{X}_i$ en $\mathcal{M}_i$ tal que para toda X en $\mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_n$, $E_i(X|\hat{X}_i) \geq X$.

$\overline{M}_i = \max\limits_{\sigma} M_i(\sigma)$ es una cota superior de todas las cantidades asegurables en estrategias mixtas para i , pues para toda X en $\mathcal{M}$.

$$E_i(X) = \sum_{\sigma \in \Sigma} X(\sigma) M_i(\sigma) \leq \sum_{\sigma \in \Sigma} X(\sigma) \max_{\sigma} M_i(\sigma) =$$

$$= \max_{\sigma} M_i(\sigma) \sum_{\sigma \in \Sigma} X(\sigma) = \overline{M}_i$$

Al mismo tiempo, $\overline{m}_i = \min_{\sigma} M_i(\sigma)$ es una ---

cantidad asegurable para el jugador i en estrategias mixtas,

pues para cualquier $\hat{\delta}_i$ en $\mathcal{M}_i$ se tiene que, para toda δ en $\mathcal{M}$

$$E_i(\delta|\hat{\delta}_i)=\sum_{\sigma\in\Sigma} \delta(\sigma) M_i(\sigma) \geqslant \sum_{\sigma\in\Sigma} \delta(\sigma)\overline{m}_2 = \overline{m}_i$$

Entonces existe el supremo de las cantidades asegurables

para i en estrategias mixtas, al cual llamaremos v_i .

Teorema 2.2.7

$$v_i = \max_{\delta_i\in\mathcal{M}_i} \min_{\delta\in\mathcal{M}} E_i(\delta|\delta_i).$$

El número v_i es asegurable en estrategias mixtas para el jugador i.

Primero demostraremos el siguiente

Lema

Sea f una función continua de $D_1 \times D_2$ en R, con D_1 y D_2 subconjuntos compactos de un espacio métrico. Entonces la función $h: D_1 \to R$ definida como $h(X) = \min\limits_{Y \in D_2} f(X, Y)$ es continua.

Demostración:

Puesto que $f(X,Y)$ es continua en $D_1 \times D_2$ también es uniformemente continua y dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(X_1, X_2) < \delta$ y $d(Y_1, Y_2) < \delta$ entonces $f(X_2, Y_2) - \varepsilon < f(X_1, Y_1) < f(X_2, Y_2) + \varepsilon$

Por lo tanto si $d(X_1, X_2) < \delta$ y Y arbitratio se tiene que:

$f(X_2, Y) - \varepsilon < f(X_1, Y) < f(X_2, Y) + \varepsilon$.

Por lo que

$$\min_{Y\in D_2} f(X_2,Y)-\varepsilon < \min_{Y\in D_2} f(X_1,Y) < \min_{\bar{Y}\in D_2} f(X_2,\bar{Y})+\varepsilon$$

y $|h(X_1)-h(X_2)|\leq\varepsilon$ con lo que el lema que da probado.

Por lo tanto la función $F_i: \mathcal{M}_i \to R$ definida como $F_i(X_i)=\min_{X\in\mathcal{M}} E_i(X|X_i)$ es continua y el número

W_i del Teorema 2.2.7. existe, y más aún, existe $\hat{X}_i$ en $\mathcal{M}_i$

tal que $$W_i = \min_{X\in\mathcal{M}} E_i(X/\hat{X}_i)$$

Ahora ya, la demostración de que $V_i=W_i$ y que el número V_i es asegurable en estrategias mixtas es enteramente análoga a la de 2.2.1.

La siguiente proposición resulta de particular interés en los problemas de cómputo.

Proposición 2.2.8

$$v_i = \max_{\bar{X}_i \in \mathcal{M}_i} \min_{\sigma \in \Sigma} E_i(\sigma | \bar{X}_i)$$

. Para demostrarla establecemos primero el siguiente lema .

Lema

Si $F_i(\hat{\bar{X}}_i) = \min_{\bar{X} \in \mathcal{M}} E_i(\bar{X} | \hat{\bar{X}}_i)$, entonces

$$F_i(\hat{\bar{X}}_i) = \min_{\sigma \in \Sigma} E_i(\sigma | \hat{\bar{X}}_i).$$

Demostración :

Obviamente

$$F_i(\hat{\bar{X}}_i) \leq \min_{\sigma \in \Sigma} E_i(\sigma | \hat{\bar{X}}_i).$$

Por otro lado, consideremos $\hat{\bar{X}}_i$ en $\mathcal{M}_i$ y $\bar{X}$ en $\mathcal{M}$ arbitrarias .

Entonces $E_i(X|\hat{X}_i) = \sum_{\sigma\in\Sigma} (X|\hat{X}_i)(\sigma) M_i(\sigma) =$

$$\sum_{\sigma_1,\ldots\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\sigma_n} X_1(\sigma_1)\ldots X_{i-1}(\sigma_{i-1}) X_{i+1}(\sigma_{i+1})\ldots X_n(\sigma_n) \sum_{\hat{\sigma}_i\Sigma_i} (\hat{X}_i(\hat{\sigma}_i) M_i(\sigma|\hat{\sigma}_i) \ldots \text{①}$$

Ademas

$$E_i(\sigma|\hat{X}_i) = \sum_{\tau\in\Sigma} \sigma_1(\tau_1)\ldots\sigma_{i-1}(\tau_{i-1})\hat{X}_i(\tau_i)\,\sigma_{i+1}(\tau_{i+1})\ldots\sigma_n(\tau_n) M_i(\tau) =$$

$$= \sum_{\tau_i\in\Sigma_i} \hat{X}_i(\tau_i)\, M_i(\sigma|\tau_i) \qquad \text{②}$$

De ① y ② obtenemos

$$E_i(X|\hat{X}_i) = \sum_{\sigma_1,\ldots\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n} X_1(\sigma_1)\ldots X_{i-1}(\sigma_{i-1}) X_{i+1}(\sigma_{i+1})\ldots X_n(\sigma_n) E_i(\sigma|\hat{X}_i) \quad \text{③}$$

$$E_i(X|\hat{X}_i) \geq \sum_{\sigma_1,\ldots\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n} X_1(\sigma_1)\ldots X_{i-1}(\sigma_{i-1}) X_{i+1}(\sigma_{i+1})\ldots X_n(\sigma_n) \min_{\sigma\in\Sigma} E_i(\sigma|\hat{X}_i)$$

De donde $E_i(X|\hat{X}_i) \geq \min_{\sigma\in\Sigma} E_i(\sigma|\hat{X}_i)$ para toda X en $\mathcal{M}$.

Por lo que $F(\hat{X}_i) \geq \min_{\sigma\in\Sigma} E_i(\sigma|\hat{X}_i)$.

como queríamos demostrar .

La proposición 2. 2. 8 es una consecuencia inmediata del lema.

Ahora resulta claro que

$v_i \geq \min_{\sigma} E_i(\sigma \setminus \hat{X}_i)$ para toda $\hat{X}_i$ en $\mathcal{M}_i$,

en particular para $\hat{X}_i = \hat{\sigma}_i$.

De donde

$v_i \geq \min_{\sigma} E_i(\sigma \mid \hat{\sigma}_i) = \min_{\sigma} M_i(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$ para toda $\hat{\sigma}_i$ en Σ_i y

$$v_i \geq \max_{\sigma_i} \min_{\sigma} M_i(\sigma \setminus \sigma_i) = v_i' .$$

Por lo que tenemos como un corolario de 2. 2. 8. la proposición siguiente :

Proposición 2. 2. 9

$v_i' \leq v_i$

A pesar de la proposición anterior no tendría sentido introducir el concepto de estrategia mixta si no existieran casos en los cuales .

$$v_i' < v_i$$

Sin embargo, resulta muy " poco probable" que ocurra la igualdad. En particular en el juego del volado, cuya forma normal es $\begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix}$

se tiene que $v_1' = v_2' = -1$ mientras que $v_1 = v_2 = 0$.

§3 Puntos de Equilibrio

Una de las preguntas centrales que se plantea la teoría de juegos es la siguiente : ¿ Cuál es la ley de un juego?, dicho de otra forma ¿ tienden los participantes a escoger un tipo especial de estrategias, llegando con esto a una situación estable del juego? . Pensemos, por ejemplo, en el problema del tránsito en la ciudad de México.

Supongamos un crucero de avenidas importantes en donde el semáforo está descompuesto. Cada automovilista tiene como objetivo llegar a su meta en el menor tiempo posible y ante cada hueco que se abre se le presentan dos alternativas :

aprovecha el hueco que se abre para avanzar su auto ó permite que pasen coches por la otra avenida. Si todos los automovi-- listas que se mueven por una avenida tomaran la decisión de - dejar pasar a los de la otra en el momento oportuno, el tránsito se racionalizaría y todos llegarían más rápido a su destino. Sin embargo, cada automovilista sabe que si el toma por su cuenta la decisión de dejar pasar, él será el único que -- no avanzará. Es claro que en este conflicto, el resultado que se puede prever es el del embotellamiento .

Un intento de responder a la pregunta planteada es el -- concepto de punto de equilibrio .

Consiste en una n- ada de estrategias, (una para cada-jugador) tales que si el jugador i cambia de estrategia mientras que los demás continúan con las de equilibrio, entonces-la máxima ganancia que puede obtener i es la que obtuvo en el punto de equilibrio .

En los juegos bipersonales de suma cero, donde los jugadores tienen intereses antagónicos pues lo que gana uno lo a--pierde el otro, el concepto de punto de equilibrio resulta --muy satisfactorio. En los puntos de equilibrio cada jugador--obtiene la máxima ganancia asegurable que le corresponde, y -para los jugadores ningún punto de equilibrio resulta más a--tractivo que otro. Por lo que si el juego llega a un punto de equilibrio, no hay una razón para salir de él .

Otro argumento para hacer ver cómo en los juegos bipersonales de suma cero hay una tendencia "objetiva" a caer en un punto de equilibrio es el Teorema del "juego ficticio", según el cual si los jugadores empiezan escogiendo una de sus estrategias puras al azar y si en las "jugadas" siguientes van maximizando su ganancia suponiendo cada quién que su contrario jugará de acuerdo con la "experiencia", entonces se tiende en cierto sentido a una <u>forma</u> de jugar de los dos jugadores. Esta es un punto de equilibrio.

Los juegos exhaustivos o inesenciales, es decir, aquellos en los cuales la suma de las <u>máximas cantidades asegurables</u>

para cada jugador es igual a la máxima ganancia posible que pueden obtener todos los jugadores juntos, resultan una generalización de los juegos bipersonales de suma cero al caso de n jugadores. Aquí, la ley del juego se obtiene en aquellos puntos de equilibrio en los cuales cada jugador se comporta en forma "paranoica", es decir, suponiendo que todos los demás se aliarán contra él.

Hay otro tipo de conflictos, no exhaustivos, para los cuales también la ley del juego es un punto de equilibrio.

Ejemplificaremos esto con el llamado "dilema del prisionero".

Dos hombres que han cometido un crimen, son detenidos y, en el momento de la detención sólo se encuentran en su poder armas prohibidas. Los encierran en celdas separadas y cada uno de los prisioneros tiene que tomar o bien la decisión de confesar o bien la de permanecer silencioso sin saber la actitud de su cómplice. Cada quién sabe que el castigo que recibirá depende tanto de su decisión como de la de su compañero y que la tabla de sentencias en años de cárcel es como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C. & N.C. \end{array} \\ \begin{array}{c} C. \\ N.C. \end{array} & \begin{pmatrix} (5,5) & (0,20) \\ (20,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es decir si los dos confiesan, cada uno de ellos recibe la pena de 5 años de cárcel; si uno de ellos confiesa y el --

otro no, el que confiesa recibe la libertad como premio a su colaboración, mientras que al otro se le sentencia a 20 años de cárcel, por último si ninguno de los dos confiesa, no puede ser probado el crimen y sólo se impone 1 año de cárcel a cada uno por poseer armas prohibidas .

Situémonos, un momento en la óptica de uno de los prisioneros al que llamaremos I .

(I) no pretende perjudicar a su cómplice (II), pero tiene que actuar sin saber lo que II hará. Si éste último no confiesa, I podría elegir no confesar, aunque tuviera que pasar 1 año en la cárcel, en lugar de elegir la libertad a costa de hundir 20 años en la cárcel a su compañero, sin embargo no tiene ninguna seguridad de que II no confesará y el riesgo que implica que él no confiese es pasar 20 años en la cárcel, si II confesó. Al pensar así I se verá fuertemente inclinado a confesar. Los mismos razonamientos llevará también a II a confesar.

La tendencia objetiva es pues que los dos prisioneros confiesen. Este es el punto de equilibrio.

Lo anterior ocurre a pesar de que los dos saldrían mejor parados si no confesasen.

Una situación muy parecida, no exhaustiva y con un punto de equilibrio que representa una estabilidad real es el del embotellamiento del tránsito que describimos más arriba.

En cambio en otros juegos no exhaustivos, en los cuales hay más de un punto de equilibrio, alguno de estos puntos puede ser más atractivo para 2 ó más jugadores y nada nos garantiza que no cambien al mismo tiempo varios de los jugadores de estrategia. Por eso en estos juegos se han desarrollado otros conceptos además del de punto de equilibrio para poder definir la ley del juego.

3 PUNTOS DE EQUILIBRIO

Definición 2. 3. 1

Una n-ada $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$ de $\mathcal{M}$ es un punto de equilibrio para el juego n-personal Γ, si para toda i se tiene que $E_i(X^* | X_i) \leq E_i(X^*)$ para toda X_i en $\mathcal{M}_i$.

Una n-ada $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ de Σ es un punto de equilibrio en estrategias puras si para toda i se tiene que $M_i(\sigma^* | \sigma_i) \leq M_i(\sigma^*)$ para cualquier σ_i de Σ_i.

Proposición 2. 3. 2

Todo punto de equilibrio en estrategias puras es un punto de equilibrio .

Demostración:

Consideremos alguna $i = 1, 2, \ldots, n$

Sea $\underline{X}_i \in \mathcal{M}_i$

Entonces :

$$E_i(\sigma^* | \underline{X}_i) = \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \underline{X}_i(\sigma_i) M_i(\sigma^* | \sigma_i)$$

$$\leq \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \underline{X}_i(\sigma_i) M_i(\sigma^*) = M_i(\sigma^*) = E_i(\sigma^*).$$

Proposición 2. 3. 3.

Sea $\bar{X}^*$ un punto de equilibrio.

Entonces para toda $i = 1, \ldots, n$ se cumple que --

$$v_i \leq E_i(\bar{X}^*)$$

Demostración:

Sea $\hat{\bar{X}}_i$ en $\mathcal{M}_i$ tal que $F_i(\hat{\bar{X}}_i) = v_i = \min_{\bar{X} \in \mathcal{M}} E_i(\bar{X} | \hat{\bar{X}}_i)$

Entonces $v_i \leq E_i(\bar{X}^* | \hat{\bar{X}}_i) \leq E_i(\bar{X}^*)$

Como queríamos demostrar .

Existencia de Puntos de Equilibrio .

Estableceremos ahora uno de los teoremos fundamentales de los juegos finitos .

Teorema 2.3.4. Para cada juego finito existe al menos un punto de equilibrio.

2.3.4. Es un corolario de

Teorema 2. 3. 5

Sean $D_1, D_2, \ldots, D_n$ subconjuntos compactos y convexos de espacios euclidianos .

Sean $H_i : D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ con $i = 1, \ldots, n$ continuas y cóncavas*, entonces existe

$$\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n) \text{ en } D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$$

tal que para toda i $H_i(\bar{X} | X_i) \leq H_i(\bar{X})$ cualquiera que sea la X_i de D_i .

Demostraremos primero el teorema cuando n vale 2 .

* Referencia en el apéndice
función cóncava $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda (f(x) + (1-\lambda) f(y))$

Demostración:

Sea $\Delta : (D_1 \times D_2) \times (D_1 \times D_2) \longrightarrow R$ dada por

$$\Delta(X_1, X_2; X_1', X_2') = H_1(X_1, X_2') + H_2(X_1', X_2)$$

Demostraremos que existe un punto $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ en $D_1 \times D_2$

tal que $$\max_{(X_1,X_2)\in D_1\times D_2} \Delta(X_1, X_2, \bar{X}_1, \bar{X}_2) = \Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2; \bar{X}_1, \bar{X}_2). \quad (1)$$

Para demostrar la existencia de $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ tal que cumple (1)

Supongamos que no existe, entonces para toda (X_1, X_2)

existe $(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2)$ tal que $\Delta(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2; X_1, X_2) > \Delta(X_1, X_2; X_1, X_2)$ (2)

Para cada par $(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2)$, construímos el conjunto

$$G(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2) = \left\{(X_1, X_2) \mid \Delta(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2; X_1, X_2) > \Delta(X_1, X_2; X_1, X_2)\right\}$$

2.3.4. Es un corolario de

Teorema 2. 3. 5

Sean $D_1, D_2, \ldots, D_n$ subconjuntos compactos y convexos de espacios euclidianos .

Sean $H_i : D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ con $i = 1, \ldots, n$ continuas y cóncavas*, entonces existe

$$\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n) \text{ en } D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$$

tal que para toda i $H_i(\bar{X} | X_i) \leq H_i(\bar{X})$ cualquiera que sea la X_i de D_i .

Demostraremos primero el teorema cuando n vale 2 .

* Referencia en el apéndice
función cóncava $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda (f(x) + (1-\lambda) f(y))$

Por (2), tenemos obviamente que

$$\{ G(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2) \mid (\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2 \in D_1 \times D_2 \}$$

forma una cubierta de $D_1 \times D_2$

Además, cada $G(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2)$ es abierto.

Para hacer ver esto, consideremos (X_1^*, X_2^*) en $G(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2)$.

La función $f(X_1, X_2) = \Delta(\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2; X_1, X_2) - \Delta(X_1, X_2; X_1, X_2)$

es continua ya que Δ lo es y, si hacemos $\mathcal{E} = f(X_1^*, X_2^*) > 0$,

existe una vecindad $U(X_1^*, X_2^*)$ de (X_1^*, X_2^*)

tal que (X_1, X_2) en $U(X_1^*, X_2^*)$ implica que

$$F(X_1, X_2) > f(X_1^*, X_2^*) - \mathcal{E} = 0$$

Es decir, si (X_1, X_2) esta en $U(X_1^*, X_2^*)$ también está en

$G(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2)$ y, por lo tanto, $G(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2)$ es abierto.

Ahora, puesto que $D_1 \times D_2$ es compacto, consideremos una subcubierta finita de la familia

$$\{G(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2) \mid (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2 \in D_1 \times D_2\}$$

y sea $G(x_1^1, x_2^1), G(x_1^2, x_2^2), \ldots, G(x_1^k, x_2^k)$. ésta cubierta finita de $D_1 \times D_2$.

Definamos ahora las funciones

$$\varphi_j : D_1 \times D_2 \longrightarrow R \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

del modo siguiente :

$$\varphi_j(x_1, x_2) = \max\{\Delta(x_1^j, x_2^j; x_1, x_2) - \Delta(x_0, x_2; x_1, x_2), 0\}$$

Es claro que, para toda j y toda

(x_1, x_2) en $D_1 \times D_2$, $\quad \varphi_j(x_1, x_2) \geq 0$

Además, dada cualquier $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ existe alguna j_0 tal que

$$\varphi_{j_0}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$$

Por lo que $\sum_j \varphi_j(x_1,x_2) > 0$

para cada (x_1,x_2) en $D_1 \times D_2$.

Sea $T: D_1 \times D_2 \longrightarrow D_1 \times D_2$ definida de la manera siguiente:

$$T(x_1,x_2) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_1,x_2)(x_1^i,x_2^i)}{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_1,x_2)}$$

Cómo T es continua, tiene un punto fijo $(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2)$, en virtud del Teorema de Browder.

Entonces
$$T(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)(x_1^i,x_2^i)}{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)} = (\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)$$

y

$$\Delta(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2;\mathring{x}_1,\mathring{x}_2) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)(x_1^i,x_2^i)}{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)};\mathring{x}_1,\mathring{x}_2\right)$$

Cómo Δ es cóncava, pues H_1, H_2 lo son, entonces

$$\Delta(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2;\mathring{x}_1,\mathring{x}_2) = \Delta\left(\frac{\sum \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)(x_1^i,x_2^i)}{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)};\mathring{x}_1,\mathring{x}_2\right) \geq$$

$$\geq \frac{\sum \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)\,\Delta(x_1^i,x_2^i;\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)}{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2)} \qquad (1)$$

Pero, por otro lado, $\varphi_{i_0}(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)$ es estrictamente mayor que cero para alguna i_0, ó lo que es lo mismo para alguna i_0 se cumple que $\Delta(X_1^{i_0}, X_2^{i_0}; \overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)$ es mayor que $\Delta(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2; \overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)$.

Al mismo tiempo, cuando $\varphi_i(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2) = 0$, se cumple que

$$\varphi_i(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)\,\Delta(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2; \overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2) = \varphi_i(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)\,\Delta(X_1^i, X_2^i; \overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)$$

Por lo que

$$\Delta(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2; \overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2) < \frac{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)\,\Delta(X_1^i, X_2^i; \overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)}{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)} \qquad (2)$$

Pero en 1 habíamos demostrado la negación de 2. Concluímos entonces que existe $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ en $D_1 \times D_2$ tal que

$$\max_{(X_1, X_2) \in D_1 \times D_2} \Delta(X_1, X_2; \bar{X}_1, \bar{X}_2) = \Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2; \bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

ó lo que es lo mismo

$$\max_{(X_1, X_2) \in D_1 \times D_2} (H_1(X_1, \bar{X}_2) + H_2(\bar{X}_1, X_2)) = H_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2) + H_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

En particular para cualquier $(\bar{X}_1, X_2)$ en $D_1 \times D_2$

tenemos $H_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2) + H_2(\bar{X}_1, X_2) \leq H_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2) + H_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$

lo que implica $H_2(\bar{X}_1, X_2) \leq H_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$

para toda X_2 en D_2 .

Análogamente podemos ver cue $H_1(X_1, \bar{X}_2) \leq H_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$

para toda X_1 en D_1 .

y nuestro Teorema ha quedado demostrado para $n = 2$.

La demostración del Teorema 2. 3. 5 en el caso general - sería esencialmente la misma .

Definimos la función $\Delta : D \times D \longrightarrow R$

con $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, dada por

$$\Delta(X, \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{X} \mid X_i) .$$

De nuevo la demostración se reduce a probar la existencia de un punto $\overset{*}{X}$ en D tal que

$$\max_{x\in D} \Delta(x, \overset{*}{x}) = \Delta(\overset{*}{x}, \overset{*}{x})$$

y esto se hace exactamente como se hizo para el caso $n=2$

El Teorema 2. 3. 4 resulta un corolario del 2. 3. 5. - pues los conjuntos de estrategias mixtas M_i de cada jugador son subconjuntos compactos y convexos de R^n y las funciones E_i - son lineales en cada argumento δ_i y por lo tanto continuas y cóncavas.

§4 JUEGOS EXHAUSTIVOS. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO.

Sea Γ un juego n-personal .

Para cada $\bar{X}$ en $\mathcal{M}$ consideremos $\sum_{i=1}^{n} E_i(\bar{X})$

y hagamos $M = \sup_{\bar{X} \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^{n} E_i(\bar{X})$

En otras palabras, M es la máxima ganancia global que -- pueden obtener los n-jugadores .

Para cada $i = 1, \ldots, n$ sea $\hat{\bar{X}}_i$ en $\mathcal{M}_i$

tal que $v_i = \max_{\bar{X}_i} \min_{\bar{X}} E_i(\bar{X} \mid \bar{X}_i) = \min_{\bar{X}} E_i(\bar{X} \mid \hat{\bar{X}}_i)$.

Es decir que para cada $i=1,\ldots,n$ existe $\hat{\bar{X}}_i$ en $\mathcal{M}_i$ tal que $v_i \leq E(\bar{X} \mid \hat{\bar{X}}_i)$ para toda $\bar{X}$ en $\mathcal{M}$; a las estrategias $\hat{\bar{X}}_i$ que tienen esa propiedad las llamaremos conservadoras para i

Definición 2. 4. 1 .

Decimos que $\hat{X}_i$ es una estrategia conservadora para i si para toda X en $\mathcal{M}$ $v_i \leq E_i(X \mid \hat{X}_i)$.

Es claro que si $\hat{X} = (\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n)$ es una n-ada de estrategias conservadoras, entoces, para toda

$$i : v_i \leq E_i(\hat{X} \mid \hat{X}_i) = E_i(\hat{X}).$$

Por lo que $\sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{X}) \leq M$

Hemos demostrado la siguiente :

Proposición 2. 4. 2.

En todo juego n-personal $\sum_{i=1}^{n} v_i \leq M$.

Existen dos posibilidades:

i) $\sum_{i=1}^{n} v_i = M$

ii) $\sum_{i=1}^{n} v_i < M$

Definición 2. 4. 3.

Si Γ cumple la condición (i) x diremos que Γ es un juego exhaustivo.

Más adelante probaremos que:

Todos los juegos bipersonales de suma cero son exhaustivos.

Un ejemplo de un juego bipersonal exhaustivo que no es de suma cero es el juego $\begin{pmatrix} (4, 7/2) & (3, 4) \\ (5, 3) & (6, 3/2) \end{pmatrix}$

Pues $v_1 = 5$, $v_2 = 3$ y $M = 8$.

Proposición 2. 4. 4.

En un juego exhaustivo Γ, una n-ada de estrategias conservadoras $\hat{X}=(\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_n)$ en $\mathcal{M}$ es punto de equilibrio .

Demostración :

$\forall\, i_0=1\ldots,n$ consideremos $E_{i_0}(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})$

Si $i\neq i_0$, $E_i(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})\geq v_i$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})-E_{i_0}(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})=$

$$=\sum_{i\neq i_0} E_i(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})\geq\sum_{i\neq i_0} v_i=\sum_{i=1} v_i-v_{i_0}$$

Y, puesto que

$$M\geq\sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})$$

Tenemos que

$$M-E_{i_0}(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})\geq\sum_{i=1}^{n} v_i-v_{i_0}=M-v_{i_0}.$$

De aquí que $v_{i_0}\geq E_{i_0}(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})$ y como $\hat{X}_{i_0}$ es conservadora.

$$E_{i_0}(\hat{X}\,|\,\bar{X}_{i_0})\leq v_{i_0}\leq E_{i_0}(\hat{X})\quad\forall\, i_0.$$

Proposición 2. 4. 5 .

Si Γ es un juego exhaustivo y $\bar{X}^* \in \mathcal{M}$ es un punto-de equilibrio para Γ, entonces $v_i = E_i(\bar{X}^*)$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Demostración

Si para alguna i se diese la desigualdad $v_i < E_i(\bar{X}^*)$,

entonces $M = \sum_{i=1}^{n} v_i < \sum_{i=1}^{n} E_i(\bar{X}^*)$

lo que contradice a la definición de M

Observaciones

Al llevarse a cabo una partida de un juego exhaustivo, el jugador i obtiene una ganancia g_i.

Si suponemos que los jugadores son prudentes, ninguno --

aceptará jugar de tal modo que su ganancia sea menor que v_i ya que está en sus manos obtener por lo menos esa cantidad.

Podemos suponer entonces que $g_i \geq v_i$ para todos los jugadores y $\sum_{i=1}^{n} g_i \geq \sum_{i=1}^{n} v_i = M$

Pero por otro lado $M \geq \sum_{i=1}^{n} g_i$

por lo que $\sum_{i=1}^{n} g_i = M$

Finalmente, si $g_i > v_i$ para alguna i, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} g_i > \sum_{i=1}^{n} v_i = M$$

De donde resulta que

$$g_i = v_i$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Este razonamiento "intuitivo", nos lleva a considerar como una Ley de los juegos exhaustivos que cada jugador i gana precisamente la cantidad v_i.

Por ello, en el caso de un juego exhaustivo, llamamos el vector valor del juego a $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y valor del juego para el jugador i al número v_i. Y diremos que una estrategia mixta conservadora X_i de M_i es una solución para i, ya que con ésta estrategia el jugador i asegura ganar v_i.

Sin embargo otra observación importante es que un juego exhaustivo puede tener puntos de equilibrio que no están ---

compuestos por estrategias conservadoras para cada jugador.

Consideremos el juego exhaustivo siguiente

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (a_{12},0) \\ (0,b_{21}) & (0,0) \end{pmatrix}$$

con a_{12} y b_{21} negativos.

En este juego $v_1 = v_2 = 0$.

Si $\Sigma_1 = \{\sigma_1^1, \sigma_1^2\}$

y $\Sigma_2 = \{\sigma_2^1, \sigma_2^2\}$, entonces las parejas de estrategias mixtas $X = (\sigma_1^1, \sigma_2^1)$

y $Y = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ son puntos de equilibrio; pero mientras que Y consta de dos estrategias, σ_1^2 y σ_2^2, que son conservadoras para 1 y 2 respectivamente, no sucede lo mismo con Σ pues, por ejemplo $E_1(\sigma_1^1, \sigma_2^2) = a_{12} < 0$, es decir $E_1(\sigma_1^1, \sigma_2^2) < v_1$; por lo que σ_1^1 no es conservadora para 1 .

Consideremos ahora a los <u>juegos de suma cero</u> .

<u>Definición 2. 4. 6.</u>

<u>Un juego Γ n-personal es de suma cero, si para cada $\sigma \in \Sigma$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} M_i(\sigma) = 0$</u> .

Dicho en otras palabras, un juego es de suma cero <u>si la suma de los recursos totales de los jugadores</u> es la misma antes y después de celebrarse el juego .

La siguiente proposición es clara.

<u>Proposición 2. 4. 7</u>.

<u>Un juego Γ n-personal es de suma cero. Si y sólo si para cada $\overline{X}$ en $\mathcal{M}$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} E_i(\overline{X}) = 0$</u>.

Como consecuencia de lo anterior, es obvio que en el caso de los juegos de suma cero $M=0$.

Para el importantísimo caso de los juegos bipersonales-- de suma cero, tenemos el <u>fundamental</u>

TEOREMA 2. 4. 8. (VON NEUMANN)

Todo juego Γ bipersonal de suma cero es exhaustivo .

La demostración es " trivial " si partimos del Teorema - 2. 3. 4.

Demostración

Sea $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*)$ punto de equilibrio para Γ.

Entonces para toda i con $j \neq i$, y cualquier δ en $\mathcal{M}$

$$E_i(\delta^*) = -E_j(\delta^*) \leq -E_j(\delta^* \mid \delta_j) = E_i(\delta \mid \delta_i^*)$$

De donde concluímos que

$$E_i(\delta^*) = \min_{\delta} E_i(\delta \mid \delta_i^*) \leq \max_{\delta_i} \min_{\delta} E_i(\delta \mid \delta_i) = v_i$$

y por tanto $0 = \sum_{i=1}^{2} E_i(\delta^*) \leq v_1 + v_2$

pero por 2. 4. 2. $v_1 + v_2 = 0$.

Al número $v = v_1 = -v_2$ se le llama <u>el valor</u> del juego .

Una observación que vale la pena hacer en el caso de los juegos bipersonales de suma cero consiste en que, si $\hat{\bar{\delta}}_i$ es--tal que existe un punto de equilibrio $\bar{\delta}^* = (\delta^* | \hat{\delta}_i)$,entonces $\hat{\bar{\delta}}_i$ es una solución para i y recíprocamente .

Algunas palabras sobre el problema de computar estrategias conservadoras.

En este parágrafo definimos el concepto de estrategia conservadora para un jugador como aquella que le permite lograr por lo menos el máximo asegurable.

Y vimos que, en el caso de los juegos exhaustivos, una estrategia conservadora para un jugador resulta una solución del juego. Además, mostramos que para esos juegos, una n-ada de estrategias conservadoras es un punto de equilibrio del juego.

Por todo esto es de gran importancia tener métodos ade--

cuados para <u>la computación de las estrategias conservadoras</u>.

Es fácil ver que en un juego n-personal Γ, a cada jugador i se le puede asociar un juego bipersonal de suma cero Γ_i de tal modo que i tiene las mismas estrategias puras (y mixtas) en Γ y en Γ_i y además una estrategia $\hat{\bar{\Delta}}_i$ es <u>conservadora para i en Γ si y sólo si es solución para i en Γ_i</u>. Por tanto, el problema de la computación de estrategias conservadoras se reduce al de computar soluciones para los juegos bipersonales de suma cero y aquí se han desarrollado numerosos métodos, algunos de los cuales se basan en particularidades del juego, pero, aunque tienen interés, no los consideraremos aquí. Tampoco consideraremos el importante y sugerente método llamado "del juego ficticio" y sólo expondremos cómo se reduce nuestro problema a uno de programación lineal

Teorema 2.4. 10

Sea Γ un juego bipersonal de suma cero, numeremos los elementos de Σ_1 y Σ_2 con $1, 2, \ldots, m$ y $1, 2, \ldots n$ respectivamente.

Hagamos $M_1(i, j) = a_{ij}$ y $\delta_1(i) = X_i$.

En R^{m+1} consideremos el conjunto D de las $(m+1)$-adas $(X_1, \ldots, X_m, \lambda)$ que satisfacen las restricciones lineales.

i) $-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + \lambda \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n$

ii) $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

iii) $X_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$

y definamos $f : D \to R$ como la función lineal $f(X_1, X_2, \ldots X_m, \lambda) = \lambda$.

Entonces el programa lineal consistente en maximizar f sujeto a las restricciones (i), (ii) y (iii) es soluble y $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*, \lambda^*)$ es una solución de dicho programa si y sólo si $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$ es una solución para el jugador 1 en Γ y $\lambda^* = v$.

Demostración

"$\Longleftarrow$"

Sea $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*) = \bar{x}^*$ una solución para 1 en Γ y v como siempre.

Entonces, por definición de solución, $(\bar{x}^*, v) \in R^{m+1}$ satisface claramente las condiciones (i), (ii) y (iii).

Si $(\mathfrak{X},\lambda)$ satisface las condiciones (i), (ii), (iii) - con $\mathfrak{X}$ en R^m, tendremos que $\mathfrak{X}$ está en $\mathcal{M}_1$, y claramente λ es una cantidad asegurable.

Y puesto que $v_1 = \sup\limits_{\lambda \text{ asegurable}} \lambda$,

entonces $\lambda \leq v_1$ y, por tanto $(\mathfrak{X}^*, v_1)$ es una solución para el programa lineal.

"$\Longrightarrow$"

Supongamos ahora que $(\mathfrak{X}^*, \lambda^*)$ es una solución para el programa lineal, entonces claramente $\mathfrak{X}^*$ está en $\mathcal{M}_1$ y λ^* es asegurable.

Pero, si λ es asegurable, existe $\hat{\mathfrak{X}}_t$ en $\mathcal{M}_1$ tal que --

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\hat{x}_i \geq \lambda \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

y, por tanto, $(\hat{X}, \lambda)$ está en D y $\lambda \leq \lambda^*$.

Entonces ya que λ^* es asegurable, $\lambda^* = \sup_{\lambda \text{ asegurable}} \lambda$.

Entonces $\lambda^* = v_\Gamma$ y X^* es una solución para 1 en Γ.

5- Descomposición de un juego

Consideremos σ en Σ, decimos (con Kuhn) que un vértice B es posible para σ si $p(B\|\sigma)>0$ y escribimos que B está en poss (σ) ó bien que σ está en P (B). Al mismo tiempo, si τ_i pertenece a Σ_i, diremos que B es posible para τ_i si existe σ en Σ tal que B está en poss$(\sigma \backslash \tau_i)$. En este caso escribiremos B está en poss(τ_i) o bien τ_i está en $P_i(B)$.

Proposición 2.5.1.

Sea B un vértice y consideremos la trayectoria $W(B)=\{U=A_0,\ldots,A_m=B\}$. Entonces B está en poss (τ_{i_0}) si y sólo si para cada A_j en S_{i_0} con $j<m$ se tiene que, si A_j está en $S_{i_0}^k$, $\tau_{i_0}(S_{i_0}^k)=\epsilon(A_{j+1})$.

Demostracion:

Supongamos que para cada A_j en S_{i_0} con $j<m$, si A_j está en $S_{i_0}^k$, entonces $\tau_{i_0}(S_{i_0}^k)=\epsilon(A_{j+1})$.

Para toda A_l en S_i es claro que existe $\hat{\sigma}_i$ tal que si A_l está en S_i^k entonces $\tau_{i_0}(S_{i_0}^k)=\epsilon(A_{j+1})$.

Consideremos σ en Σ tal que $\sigma_i = \hat{\sigma}_i$ si $i \neq i_0$ y existe algún A_ℓ en S_i

$\sigma_{i_0} = \tau_{i_0}$ y

σ_k arbitraria, $k \neq i_0$ y además ningún A_ℓ está en S_k

Es claro que $P(B \| \sigma | \tau_{i_0}) > 0$ y B está en poss (τ_{i_0})

Por otro lado si B está en poss (τ_{i_0}) existe σ en Σ tal que $P(B \| \sigma | \tau_{i_0}) > 0$ y por lo tanto dado A_j en Sio con $j < m$, es claro que $P(A_{j+1} | \sigma | \tau_{i_0}) > 0$ y $\tau_{i_0}(A_j) = \epsilon(A_{j+1})$ con lo que queda demostrada la proposición.

Los dos corolarios siguientes se desprenden facilmente.

Proposicion 2.5.2.

B está en poss (σ) si y sólo si para toda A_j que no está en So con $j < n$ se tiene que si A_j está en S_i^k entonces $\sigma_i(S_i^k) = \epsilon(A_{j+1})$.

Proposición 2.5.3.

$P(B) = P_1(B) \times P_2(B) \times \ldots \times P_n(B)$.

Ahora, si B es una vértice cualquiera y $W(B) = \{U \supset A_0, \ldots, A_m = B\}$, definimos cómo Kuhn.

$$c(B) = \prod \{ P(A_{j+1} \mid A_j) \mid A_j \in S_0 \text{ con } j < m \}$$

Con esto podemos establecer una fórmula para calcular la probabilidad de un vértice B cuando se tiene una estrategia mixta $\mathfrak{X}$.

Proposición 2.5.4.

Sea $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{M}$ y B y W(B) cómo antes, entonces $P(B \mid \mathfrak{X}) = C(B) \sum_{\sigma \in P(B)} \mathfrak{X}(\sigma) =$

$$= C(B) \prod_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_i \in P_i(B)} \mathfrak{X}_i(\sigma_i).$$

Demostración:

$$P(B \mid \mathfrak{X}) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathfrak{X}(\sigma)\, p(B \mid \sigma) = \sum_{\sigma \in P(B)} \mathfrak{X}(\sigma)\, p(B \mid \sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma \in P(B)} \mathfrak{X}(\sigma)\, C(B) = C(B) \sum_{\sigma \in P(B)} \mathfrak{X}(\sigma) =$$

$$= C(B) \sum_{\sigma \in P_1(B) \times \dots \times P_n(B)} \mathfrak{X}_1(\sigma) \dots \mathfrak{X}_n(\sigma_n) = C(B) \sum_{\sigma_1 \in P_1(B)} \dots \sum_{\sigma_n \in P_n(B)} \mathfrak{X}_1(\sigma_1) \dots \mathfrak{X}_n(\sigma_n)$$

$$= C(B) \prod_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_i \in P_i(B)} \mathfrak{X}_i(\sigma_i).$$

Pasaremos ahora a estudiar el problema de cuando un -- juego se puede descomponer.

Sea B un vértice, denotamos por $V_B = \{C \in V \mid C \geq B\}$ y denotamos por $V \setminus B = \{C \in V \mid C \not\geq B\}$.

Definición 2.5.5

Sea B un vértice. Decimos que el jugador i recuerda la posición B si todo conjunto de información S_i^j de i tal que $S_i^j \cap V_B \neq \phi$ está contenido en V_B.

Definición 2.5.6

El juego Γ se descompone en B si cada jugador i recuerda - la posición B.

En este caso, queda inducido un juego cuyos vértices - son los de V_B y cuya raíz es B, la función Γ_B es la restricción de Γ a $V_B - \{B\}$, los conjuntos de jugador, los de información, la función de pago etc se inducen en forma natural.

Para denotar a dicho juego se utilizará el símbolo Γ_B.

Toda estategia σ_i en Σ_i, si se restringe a los con-- juntos S_i^j contenidos en V_B induce una estrategia pura $\sigma_{B,i}$ en $\Sigma_{B,i}$ para Γ_B.

y toda $\sigma_{B,i}$ puede inducirse de alguna σ_i en Σ_i

Podemos definir en forma natural

$$\sigma_B=(\sigma_{B,1},\ldots,\sigma_{B,n}) \text{ en } \Sigma_B \text{ y } M_B(\sigma_B)=\sum_{\alpha\in\langle B\rangle}\Pi(\alpha)\,p(\alpha|B,\sigma_B).$$

Consideremos las estrategias mixtas de Γ_B para el jugador i, las denotaremos como $\mathfrak{X}_{B,i}$. Si $\mathfrak{X}_B=(\mathfrak{X}_{B,1},\ldots,\mathfrak{X}_{B,n})$ tendremos que $E_{B,i}(\mathfrak{X}_B)=\sum_{\sigma}\mathfrak{X}_{B,1}(\sigma_{B,1})\ldots\mathfrak{X}_{B,n}(\sigma_{B,n})M_{B,i}(\sigma_B)$.

En el vértice B podemos adjuntar el pago $E_B(\mathfrak{X}_B)$, entonces podemos inducir un nuevo juego cuyos vértices serán los de $V\backslash B$ cuya raíz es U y $\Gamma\backslash B$ es Γ restringida a $V\backslash B-\{U\}$.

Denotaremos a dicho juego como $\Gamma\backslash B\,(\mathfrak{X}_B)$ ó si no hay ambiguedad, simplemente como $\Gamma\backslash B$ Aquí, como en el caso de Γ_B una estrategia pura $\sigma\backslash B_i$ para $\Gamma\backslash B$ y los símbolos $\sigma\backslash B$, $\Sigma\backslash B$, $M\backslash B(\sigma\backslash B)$, $\mathfrak{X}\backslash B$, $\mathcal{M}\backslash B$ y $E\backslash B(\mathfrak{X}\backslash B)$ adquieren un significado natural si no es necesario -- considerar con que $\mathfrak{X}_B$ de $\mathcal{M}_B$ se juega Γ_B, cuando la situación sea distinta, escribiremos $M\backslash B(\sigma\backslash B,\mathfrak{X}_B)$ y $E\backslash B(\mathfrak{X}\backslash B,\mathfrak{X}_B)$, pues estos son los conceptos que dependen del pago asociado a B como vértices de $\Gamma\backslash B$.

Es claro igualmente que un par de estrategias puras, - $\sigma_{B,i}$ y $\sigma\backslash B_i$ para Γ_B y $\Gamma\backslash B$ inducen una n-ada

$(\sigma | B_i, \sigma_{Bi})$ para i en Γ y que un par de estrategias puras, σ_B y $\sigma | B$ inducen una n-ada $(\sigma | B, \sigma_B)$ en Γ.

Consideremos ahora dos estategias mixtas $X_{B,i}$ en $\mathcal{M}_{Bi}$ y $X | B_i$ en $\mathcal{M} | B_i$ para el jugador i en los juegos Γ_B y $\Gamma | B$. Para inducir una estrategia mixta X_i en Γ, definimos la probabilidad de $\sigma_i \in \Sigma_i$ bajo X_i de la siguiente manera.

$$X_i(\sigma_i) = (X | B_i, X_{B,i})(\sigma_i) \overset{\text{def}}{=\!=} [(X | B_i)(\sigma | B_i)][X_{Bi}(\sigma_{Bi})].$$

Claramente para toda σ_i en Σ_i

$X_i(\sigma_i) \geq 0$, además

$$\sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} X_i(\sigma_i) = \sum_{\sigma | B_i} \sum_{\sigma_{B,i}} [(X | B_i)(\sigma | B_i)][X_{B,i}(\sigma_{B,i})] =$$

$$= \sum_{\sigma | B_i} [X | B_i)(\sigma | B_i)] \sum_{\sigma_{B,i}} X_{B,i}(\sigma_{B,i}) =$$

$$= \sum_{\sigma | B_i} [(X | B_i)(\sigma | B_i)] = 1.$$

Por tanto la función $\delta_i : \Sigma_i \to R$ así definida es una estrategia mixta para el jugador i.

Llamaremos a dicha función la composición de $\delta | B_i$ y de δ_{Bi}.

Para poder hablar de la descomposición de uan estrategia mixta.

Definición 2.5.7

Supongamos que Γ se descompone en B. δ_i en $\mathcal{M}_i$ se descompone en las estrategias $\delta | B_i$ para $\Gamma | B$ y $\delta_{B,i}$ para Γ_B en donde:

(a) $\delta | B_i(\sigma | B_i = \sum_{\sigma_{B,i}} \delta_i(\sigma | B_i, \sigma_{Bi})$.

(b) Si B está en poss (δ_i)

$$\delta_{B,i} = \sum_{\substack{\sigma | B_i, \\ B \in \text{poss}\, \sigma | B_i}} \delta_i(\sigma | B_i, \sigma_{B,i}) \Big/ \sum_{\sigma_i \in P_i(B)} \delta_i(\sigma_i)$$

Si B no está en poss (δ_i)

$$\delta_{B,i}(\sigma_{B,i}) = \sum_{\sigma | B_i} \delta_i(\sigma | B_i, \sigma_{B,i}).$$

Sean $\hat{\hat{\mathfrak{X}}}_i$ en $\mathcal{M}\backslash B_i$ y $\hat{\hat{\hat{\mathfrak{X}}}}_i$ en $\mathcal{M}_{B_i}$ y consideremos $\hat{\mathfrak{X}}_i = (\hat{\hat{\mathfrak{X}}}_i, \hat{\hat{\hat{\mathfrak{X}}}}_i)$.

Ahora,

$$\hat{\mathfrak{X}}\backslash B_i(\sigma\backslash B_i) = \sum_{\sigma_{B,i}} \hat{\mathfrak{X}}_i(\sigma\backslash B_i, \sigma_{B,i}) =$$

$$= \sum_{\sigma_{B,i}} \hat{\hat{\mathfrak{X}}}_i(\sigma\backslash B_i)\, \hat{\hat{\hat{\mathfrak{X}}}}(\sigma_{B,i}) = \hat{\hat{\mathfrak{X}}}_i(\sigma\backslash B_i)$$

Por lo que $\hat{\mathfrak{X}}\backslash B_i = \hat{\hat{\mathfrak{X}}}_i$.

Al mismo tiempo, dado que si $\mathfrak{X}$ está en $\mathcal{M}$

$$p(B\|\mathfrak{X}\backslash\hat{\mathfrak{X}}_i) = c(B) \sum_{\sigma\in P(B)} (\mathfrak{X}\backslash\hat{\mathfrak{X}}_i)(\sigma) =$$

$$= c(B)\left(\sum_{\sigma_1\in P_1(B)} \mathfrak{X}_1(\sigma_1)\right)\cdots\left(\sum_{\sigma_i\in P_i(B)} \hat{\mathfrak{X}}_i(\sigma_i)\right)\cdots\left(\sum_{\sigma_n\in P_n(B)} \mathfrak{X}_n(\sigma_n)\right);$$

Entonces tenemos que si $B \in \mathrm{poss}(\hat{\mathfrak{X}}_i)$

$$0 < \sum_{\sigma_i\in P_i(B)} \hat{\mathfrak{X}}_i(\sigma_i) = \sum_{\substack{\sigma\backslash B_i \\ B\in \mathrm{poss}(\sigma\backslash B_i)}} \sum_{\sigma_{B,i}} \hat{\mathfrak{X}}_i(\sigma\backslash B_i, \sigma_{B,i}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma\backslash B_i\, \lambda \\ B\, \mathrm{en}\, \mathrm{poss}(\sigma\backslash B_i)}} \hat{\hat{\mathfrak{X}}}_i(\sigma\backslash B_i).$$

$$y\ \hat{X}_{B,i}(\sigma_{B,i}) = \sum_{\substack{\sigma|B_i \\ B\in poss(\sigma|B_i)}} \hat{X}_i(\sigma|B_i)\,\hat{\hat{X}}_i(\sigma_{B,i}) \quad \cancel{\sum_{\sigma_i\in P_i(B)} \hat{X}_i(\sigma_i)} =$$

$$= \hat{\hat{\hat{X}}}_i(\sigma_{B,i})$$

Y si B no está en poss $(\hat{X}_i)$.

$$\hat{X}_{B,i}(\sigma_{B,i}) = \sum_{\sigma|B_i} \hat{\hat{X}}_i(\sigma|B_i)\,\hat{\hat{X}}_i(\sigma_{B,i}) =$$

$$= \hat{\hat{\hat{X}}}(\sigma_{B,i}).$$

Por lo que concluímos la siguiente

Proposición 2.5.8.

Sea Γ que se descompone en B si $\hat{\hat{X}}_i$ está en $\mathcal{M}|B_i$ y $\hat{\hat{\hat{X}}}_i$ está en $\mathcal{M}_{B,i}$ y si $\hat{X}_i = (\hat{\hat{X}}_i, \hat{\hat{\hat{X}}}_i)$, entonces $X|B_i = \hat{\hat{X}}_i$ y $X_{B,i} = \hat{\hat{\hat{X}}}_i$.

Establecemos ahora el siguiente.

Teorema 2.5.9 (Kuhn)

Supongamos que Γ se descompone en $\mathcal{B}$.

Entonces para cada $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{M}$, si $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{B} = (\mathfrak{X}\setminus B_1, \ldots \mathfrak{X}\setminus B_n)$ y $\mathfrak{X}_{\mathcal{B}} = (\mathfrak{X}_{B,1}, \ldots \mathfrak{X}_{B,n})$, entonces $E(\mathfrak{X}) = E\setminus\mathcal{B}(\mathfrak{X}\setminus\mathcal{B}, \mathfrak{X}_{\mathcal{B}})$.

Demostración:

(1) $$E(\mathfrak{X}) = \sum_{\alpha \in T} \Pi(\alpha)\, p(\alpha \mid \mathfrak{X}) = \sum_{\alpha \notin \langle B \rangle} \Pi(\alpha)\, p(\alpha \mid \mathfrak{X})$$

$$+ \sum_{\alpha \in \langle B \rangle} \Pi(\alpha)\, p(\alpha \mid \mathfrak{X})$$

y

(2) $$E \setminus B(\mathfrak{X}\setminus B, \mathfrak{X}_B) = \sum_{\alpha \notin \langle B \rangle} \Pi(\alpha)\, p(\alpha \| \mathfrak{X} \setminus B) +$$

$$+ E_B(\mathfrak{X}_B)\, p(B \| \mathfrak{X} \setminus B).$$

Pero si $\alpha \notin \langle B \rangle$

$$P(\alpha | \delta) = \sum_{\sigma} \delta_1(\sigma_1) \cdots \delta_n(\sigma_n)\, p(\alpha|\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma|B} \sum_{\sigma_B} \delta_1(\sigma|B_1, \sigma_{B,1}) \cdots \delta_n(\sigma|B_n, \sigma_{B,n})\, p(\alpha|\sigma|B,$$

$$= \sum_{\sigma|B} \Big(\sum_{\sigma_B} \delta_1(\sigma|B_1, \sigma_{B,i}) \cdots \delta_n(\sigma|B_n, \sigma_{B,n})\, p(\alpha|$$

$$= \sum_{\sigma|B} \Big(\prod_{i=1}^{n} \big(\sum_{\sigma_{B,i}} \bar{\delta}_i(\sigma|B_i, \sigma_{B,i}) \big) \Big) p(\alpha \| \sigma|B) =$$

$$= \sum_{\sigma|B} (\delta|B)(\sigma|B)\, p(\alpha\|\sigma|B) = p(\alpha \| \delta|B$$

Comparando ① y ② sólo resta probar que

$$\sum_{\alpha \in \langle B \rangle} \pi(\alpha)\, p(\alpha|\delta) = E_B(\delta_B)\, p(B\|\delta|B) ..$$

Pero $E_B(\delta_B) = \sum_{\alpha \in \langle B \rangle} p(\alpha \| B, \delta_B)\, \pi(\alpha$

Entonces, solo necesitamos probar que $P(\alpha \mid \mathcal{X}) =$

$$= P(B \| \mathcal{X} \mid B)\; P(\alpha \| B, \mathcal{X}_B). \quad (5)$$

pero, por la proposición 2.5.4.

$$P(B \| \mathcal{X} \mid B) = C(B) \prod_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \mid B_i \\ \text{tal que} \\ B \in poss(\sigma \mid B_i)}} (\mathcal{X} \mid B_i)(\sigma \mid B_i) =$$

$$= C(B) \prod_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \mid B_i \text{ tal} \\ \text{que } B \in poss(\sigma \mid B_i)}} \sum_{\sigma_{B_i}} \mathcal{X}_i(\sigma_i) = C(B) \prod_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_i \in P_i(B)} \mathcal{X}_i(\sigma_i)$$

y también por 2.5.4 concluímos que

$$P(B \| \mathcal{X} \mid B) = P(B \| \mathcal{X}).$$

Entonces hay dos alternativas

i) $P(B \| \mathcal{X} \mid B) = 0$

ii) $P(B \| \mathcal{X} \mid B) > 0$

En el caso i) dado que la ocurrencia de α implica la de B, tenemos que $p(\alpha \mid \mathcal{X}) = 0$ y la igualdad (5) vale.

$$= \sum_{\sigma} \delta(\alpha)\, p(\alpha\backslash\sigma) = P(\alpha \| \delta).$$

Nuestra demostración está ahora completa.

Demostremos por último un teorema de Kuhn.

Teorema 2.5.10.

Supongamos que Γ se descompone en B y sea δ_B^* punto de equilibrio para Γ_B y $\delta^*\backslash B$ punto de equilibrio para $\Gamma\backslash B(\delta_B^*)$ Entonces si $\delta^* = (\delta\backslash B^*, \delta_B^*)$, δ^* es punto de equilibrio para Γ.

Demostración:

Sea δ_i en $\mathcal{M}_i$ arbitrario, entonces

$$E_i(\delta^* | \delta_i) = E\backslash B_i((\delta^*\backslash B) | (\delta\backslash B_i), \delta_B^* \,|\, \delta_{B,i})$$

$$= \sum_{\alpha \notin \langle B\rangle} P(\alpha \| (\delta^*\backslash B) \,|\, \delta\backslash B_i)\, \pi_i(\alpha) + E_{B,i}(\delta_B^* | \delta_{B\,i})\, P(B\|$$

$$\leq \sum_{\alpha \notin B} p(\alpha \| (\delta^*\backslash B)(\delta\backslash B_i))\, \pi_i(\alpha) + P(B\|\delta^*\backslash B) | \delta\backslash B_i) E_{B,i}$$

$$= E\backslash B_i((\delta^*\backslash B) \backslash (\delta\backslash B_i), \delta_B^*) \leq E\backslash B_i(\delta^*\backslash B, \delta_B^*) = E$$

Y el teorema está demostrado.

CAPÍTULO III

LOS JUEGOS INFINITOS.

LOS JUEGOS INFINITOS

Nuestro problema es ahora proceder con los juegos infinitos como lo hicimos con los finitos, es decir partir de un juego extensivo infinito reducirlo a su forma normal y entonces estudiar la existencia de puntos de equilibrio .

El primer obstáculo se presenta al tratar de reducir el juego a su forma normal . En el caso finito bastaba el concepto de estrategia pura para lograr ese objetivo. En el caso infinito tenemos que determinar en el conjunto de partidas un semianillo adecuado para que cada estrategia pura resulte una distribución de probabilidad en este semianillo. Además es necesario exigir condiciones a la función de pago $\pi : T \to \mathbb{R}^N$ para poder definir la función $H : \Sigma \to \mathbb{R}^N$ de "pago medio".

Como sucede en juegos finitos no existen siempre "puntos de equilibrio" en estrategias puras y tendremos que definir las estrategias mixtas que serán distribuciones de probabilidad en el conjunto Σ de estrategias puras y de nuevo será necesario determinar un semianillo ahora en Σ .

Para seguir el enfoque del capítulo II necesitamos que los espacios de partidas $\mathcal{T}$ y de estrategias puras Σ sean compactos y que la función de pago medio M sea continua .

La compacidad de los espacios $\mathcal{T}$ y Σ está asegurada por que los juegos que estamos considerando tienen la restricción de que para cada vértice A el conjunto $\Gamma^{-1}(A)$ es finito y entonces podemos encajar $\mathcal{T}$ y Σ , como subespacios compactos de $[0,1]$.

En cambio para construir la función de pago medio y asegurar su continuidad es necesario hacer algunas exigencias a la función de pago π .

Todos estos problemas los resolveremos en el primer parágrafo de este capítulo, cuyas conclusiones proncipales son la reducción de un juego a su forma normal o lo que es lo mismo la construcción de la función de"pago medio" y el establecimiento de algunas condiciones para que resulte continua .

En los parágrafos posteriores calcamos las definiciones y resultados del capítulo II usando una técnica mucho más complicada .

Podemos decir que el resultado más importante de este capítulo es el establecimiento de condiciones sobre la función de pago π que son suficientes para que un juego Γ tenga -- punto de equilibrio .

§1-REDUCCION DE UN JUEGO EXTENSIVO N-PERSONAL INFINITO A UN JUEGO RECTANGULAR .

a.- El espacio de partidas de un juego infinito .

Si Γ es un juego extensivo arbitrario . Siguiendo a Gale y a Stewart, llamaremos al conjunto T de todas las partidas de Γ el espacio de Γ.

Sea A un vértice no terminal. Si A pertenece a S_0 numeramos los vértices de $\Gamma^{-1}(A)$ desde o hasta h_A .

Si A está en S_i con $i>0$, entonces A está en S_i^j para alguna j y numeramos los elementos de I_i^j desde o hasta N_i^j y , aprovechando que I_i^j y $\Gamma^{-1}(A)$ están en correspondencia biunívoca, numeramos también a los elementos de $\Gamma^{-1}(A)$

desde o hasta N_i^j . Ahora tenemos que para A no terminal, $\Gamma^{-1}(A)$ está numerado . Llamamos índice de B, para $B \in \Gamma^{-1}(A)$ al numero asociado a B.

Sea α una partida con dominio ω .

Escribamos $\alpha(i) = A_i$ para i en ω .

Si $i>0$ está en ω , hagamos un cambio de notación para que la numeración arriba definida del conjunto $\Gamma^{-1}(A_{i-1})$ corra desde o hasta η_i^α .

Si ω es finito, definamos $\varphi(\alpha)$ como

$$\sum_{\alpha_i \in \omega} \frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_1^\alpha+1)(2\eta_2^\alpha+1)\cdots(2\eta_i^\alpha+1)} \quad (1)$$

Si ω es infinito (1) se transforma en una serie infinita y definamos también $\varphi(\alpha)$ mediante esta expresión, sólo que debemos probar la convergencia de esa serie .

Hagamos entonces para $k>0$ en ω,

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_1^\alpha+1)(2\eta_2^\alpha+1)\cdots(2\eta_i^\alpha+1)}.$$

Probaremos que

$$S_k \le 1 - \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+1)}$$

para toda k, de lo que se desprende que la serie (1) converge - si ω es infinito.

En primer lugar

$$S_1 = \frac{2\epsilon(A_1)}{2\eta_1^\alpha+1} \le \frac{2\eta_1^\alpha}{2\eta_1^\alpha+1} = \frac{2\eta_1^\alpha+1-1}{2\eta_1^\alpha+1} = 1 - \frac{1}{2\eta_1^\alpha+1}.$$

Supongamos ahora que si $1<k\in\omega$ se tiene que

$$S_{k-1} \le 1 - \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_{k-1}^\alpha+1)}$$

Entonces

$$S_k = S_{k-1} + \frac{2\epsilon(A_k)}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+1)} \le 1 - \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_{k-1}^\alpha+1)} + \frac{2\eta_k^\alpha}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta}$$

$$= 1 - \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_{k-1}^\alpha+1)} + \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_{k-1}^\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2\eta_k^\alpha+1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_{k-1}^\alpha+1)} \left(-1+1-\frac{1}{2\eta_k^\alpha+1}\right) = 1 - \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+}$$

Por tanto 1 es cota superior de los números S_k y la serie (1) converge a un número en el intervalo $[0,1]$.

Hemos logrado definir entonces una función φ de T en $[0,1]$.

Ahora probemos la

<u>Proposición 3.1.1.</u>

<u>$\varphi: T \longrightarrow [0,1]$ es inyectiva</u>.

Demostración:

Sean $\alpha_1: \omega_1 \longrightarrow V$ y $\alpha_2: \omega_2 \longrightarrow V$ dos partidas distintas y escribamos $A_i = \alpha_1(i)$ para i en ω_1, $B_j = \alpha_2(j)$ para j en ω_2. Supongamos que, para $0<i\in\omega_1$, los vértices de $\Gamma^{-1}(A_{i-1})$ están numerados desde 0 hasta $\eta_i^{\alpha_1}$ y que, para $0<j\in\omega_2$, los vértices de $\Gamma^{-1}(B_{j-1})$ están nume-

rados desde O hasta $\eta_j^{\alpha_2}$.

Existen dos posibilidades $\omega_1 \subset \omega_2$ ó $\omega_2 \subset \omega_1$.

Supongamos que $\omega_1 \subset \omega_2$.

Entonces existe i en ω_1 tal que $A_i \neq B_i$, pues, de otro modo, $\alpha_1 \subset \alpha_2$ lo que implica que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Análogamente, si $\omega_2 \subset \omega_1$, existe j en ω_2 tal que $A_j \neq B_j$

En cualquier caso, sea k el menor índice en $\omega_1 \cap \omega_2$ tal que $A_k \neq B_k$

Supongamos que $\epsilon(A_k) < \epsilon(B_k)$,

entonces

$$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{2\epsilon(B_i)}{(2\eta_1^{\alpha_2}+1)\cdots(2\eta_i^{\alpha_2}+1)} - \sum_{0<i\in\omega_1} \frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_i^{\alpha_1}+1)}$$

$$= \frac{2[\epsilon(B_k)-\epsilon(A_k)]}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_k^{\alpha_1}+1)} - \sum_{k<i<\omega_1} \frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_i^{\alpha_1}+1)}$$

$$\geq \frac{2}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_k^{\alpha_1}+1)} - \frac{1}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_k^{\alpha_1}+1)} \sum_{k<i\in\omega_1} \frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_{k+1}^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_i^{\alpha_1}+1)}$$

Ahora bien, de modo análogo al utilizado para probar la convergencia de (1), se prueba que

$$0 \leq \sum_{k<i\leq\omega_1} \frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_{k+1}^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_i^{\alpha_1}+1)} \leq 1$$

De donde

$$\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1) \geq \frac{2}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_k^{\alpha_1}+1)} - \frac{1}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_k^{\alpha_1}+1)} = \frac{1}{(2\eta_1^{\alpha_1}+1)\cdots(2\eta_k^{\alpha_1}+1)} > 0$$

Por lo que φ es inyectiva .

Proposición 3.1.2.

$\varphi(T)$ es un compacto .

Demostración

Sea $G \subset \varphi(T)$ un conjunto infinito. Entonces $\varphi^{-1}(G)$ es infinito .

Sea $A_0 = \mho$ y A_1 un vértice de $\Gamma^{-1}(A_0)$ tal que $\langle A_1 \rangle \cap \varphi^{-1}(G)$ es infinito (la existencia de A_1 está garantizada en virtud de que $\Gamma^{-1}(A_0)$ es finito).

Supongamos construída la trayectoria $A_0, A_1, \dots A_k$. de tal modo que

$\langle A_i \rangle \cap \varphi^{-1}(G)$ es un conjunto infinito para $i=0,1,\dots,k$.

Entonces sea A_{k+1} un vértice de $\Gamma^{-1}(A_k)$ tal que $\langle A_{k+1} \rangle \cap \varphi^{-1}(G)$ infinito.

Es claro que la sucesión $\alpha = \{A_0, A_1, \dots\}$ es un elemento de T .

Probaremos que $x = \varphi(\alpha)$ es un punto de acumulación de G .

Para éllo, supongamos que η_i^α tiene el mismo significado que en la prueba anterior y consideremos $\varepsilon > 0$. Sea r tal que

$$\frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)(2\eta_2^\alpha+1)\cdots(2\eta_r^\alpha+1)} < \varepsilon$$

y sea β una partida de la intersección $\langle A_r \rangle \cap \varphi^{-1}(G)$ (hagamos, como es costumbre, $\beta(i) = B_i$ para i en ω). Entonces, si k es el menor índice en $\omega \cap N$ tal que $A_k \neq B_k$, tendremos que $k > r$ y existirán dos posibilidades:

(1) $\epsilon(A_k) < \varepsilon(B_k)$

(2) $\epsilon(B_k) < \varepsilon(A_k)$

Probaremos en el caso (1) que $|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|<\varepsilon$

En el caso (2) la prueba es parecida.

Si (1) se cumple, en virtud de la prueba anterior

$$0<\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\sum_{0<i\in\omega}\frac{2\epsilon(B_i)}{(2\eta_1^\beta+1)\cdots(2\eta_i^\beta+1)}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_i^\alpha+1)}=$$

$$=\sum_{k\le i\in\omega}\frac{2\epsilon(B_i)}{(2\eta_1^\beta+1)\cdots(2\eta_i^\beta+1)}-\sum_{i=k}^{\infty}\frac{2\epsilon(A_i)}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_i^\alpha+1)}\le$$

$$\le\sum_{k\le i\in\omega}\frac{2\epsilon(B_i)}{(2\eta_1^\beta+1)\cdots(2\eta_i^\beta+1)}-\frac{2\epsilon(A_k)}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+1)}=$$

$$=\frac{2[\epsilon(B_k)-\epsilon(A_k)]}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+1)}+\frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+1)}\sum_{k<i\in\omega}\frac{2\epsilon(B_i)}{(2\eta_{k+1}^\beta+1)\cdots(2\eta_i^\beta+1)}$$

y como

$$\sum_{k<i\in\omega}\frac{2\epsilon(B_i)}{(2\eta_{k+1}^\beta+1)\cdots(2\eta_i^\beta+1)}\le 1$$

tendremos que

$$0 < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \leq \frac{2\eta_k^\alpha + 1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_k^\alpha+1)} = \frac{1}{(2\eta_1^\alpha+1)\cdots(2\eta_{k-1}^\alpha+1)} = \varepsilon$$

por tanto X es punto de acumulación de G y $\varphi(T)$ es compacto.*

La función $\varphi: T$ resulta de gran importancia para nosotros ya que, mediante ella, podemos identificar a cadapartida α con el real $\varphi(\alpha)$ y, por tanto, podemos identificar a T con el compacto $\varphi(T)$.

De aquí en adelante, diremos que $\alpha < \beta$ si $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, diremos que $G \subset T$ es abierto si $\varphi(G)$ es abierto en $\varphi(T)$ y, en general cuando hablemos de las propiedades de T pensarems siempre en las de $\varphi(T)$ bien conocidas por nosotros. A la topología inducida en T por la topología de $\varphi(T)$, la denotaremps cómo $\mathcal{T}$ y a la base inducida cómo $\mathcal{B}$

Si la partida α es tal que $\epsilon[\alpha(i)] = 0$ para toda i en el dominio de α, llamaremos a α $\bar{0}$. Observemos además que todo conjunto G de T está acotado tanto superiormente como inferiormente y podemos hablar de inf de G y de sup de G. Denotemos como γ

al sup $\mathcal{T}$. Claramente $\bar{o}$ = inf $\mathcal{T}$.

Gale y Stewart* proceden de otro modo para introducir una topología en $\mathcal{T}$. En primer lugar, para cada vértice A consideran $\langle A \rangle$ y luego prueban que la familia $\{\langle A \rangle \mid A$ es un vértice$\}$ es base para una topología τ' de $\mathcal{T}$. Nosotros debemos entonces probar que $\tau = \tau'$.

Para esto establezcamos el lema:

LEMA 3.1.3.

Sea A un vértice de Γ , entonces $A^+ = \sup \langle A \rangle$ y $A^- = \inf \langle A \rangle$ están en $\langle A \rangle$.

Demostración:

Sea $\omega(A) = \{U = B_0, \ldots, B_L = A\}$. Si A es terminal, el conjunto $\langle A \rangle$ consta únicamente de $\omega(A)$ y A^+ es igual a $\omega(A)$ y está en $\langle A \rangle$. Ahora si A no es terminal, llamemos B_{L+1} al vértice de $\Gamma^{-1}(A)$

con índice mayor.

De nuevo si B_{L+1} es terminal $A^+ = \omega(B_{L+1})$ y A^+ está en $\langle A \rangle$.

Ahora bien si B_{L+1} no es terminal, supongamos que hemos definido los vértices $B_{L+2}, \dots, B_{L+N}$ de tal modo que se cumplen:

1) B_{L+i} no es terminal para $i = 0, \dots, N$ y

ii) B_{L+i} es el vértice de mayor índice en $\Gamma^{-1}(B_{L+i-1})$ para $i = 1, 2, \dots, N$.

Definamos ahora B_{L+N+1} como el vértice de mayor índice en $\Gamma^{-1}(B_{L+N})$.

Como antes si B_{L+N+1} fuera terminal A^+ estaría en $\langle A \rangle$ y si B_{L+N+1} es terminal, cumple con i) y con ii).

Consideremos la partida β tal que $\beta(i) = B_i$. Es claro que β está en $\langle A \rangle$ y que para cualquier otra partida α en $\langle A \rangle$, se tiene que $\alpha \leq \beta$, luego $\beta = \sup \langle A \rangle = A^+$ y $A^+ \in \langle A \rangle$ como queríamos probar.

En forma análoga se prueba que A^- está en A.

LEMA 3.1.4.

Supongamos que $A \notin \gamma = \sup T$ y sea $\mathbb{C} = \{\beta \in T \mid \alpha < \beta$ para toda $\alpha \in \langle A \rangle\}$

entonces:

1) $A^+ < \inf \mathbb{C}$

ii) $(A^+, \inf \mathbb{C}) = \emptyset$.

Un resultado análogo relativo a A^- se obtiene si A no está en $\bar{O}$

Demostración:

Puesto que A no está en γ, es claro que $\gamma \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \neq \emptyset$. Además, ya que $A^+ \in \langle A \rangle$, tenemos que para toda $c \in \mathbb{C}$, $A^+ < c$ y, por tanto

$A^+ \leq \inf \mathbb{C}$.

Sea $\omega(A) = \{ \upsilon = B_0, \dots, B_L = A \}$. Como A no pertenece a γ existe un S máximo con $S < L$ tal que B_{S+1} no tiene índice máximo en $\Gamma^{-1}(B_S)$.

Sea D el vértice en $\Gamma^{-1}(B_S)$ con índice $\epsilon(B_{S+1}) + 1$ y hagamos $\lambda = D^-$. Es fácil ver que $\lambda \leq \alpha$ para toda α en $\mathbb{C}$, pero que, también $A^+ < \lambda$. Por tanto $\lambda = \inf \mathcal{C}$ y la afirmación i) queda establecida.

Si $\beta' > A^+$, entonces β' está en $\mathcal{C}$ y $\lambda \leq \beta'$ por lo que $(\langle A^+\rangle, \lambda) = \phi$.

Establezcamos ahora lo que nos proponíamos como un nuevo

TEOREMA 3.1.5.

Las topologías τ y τ' para T son iguales

Demostración:

Supongamos que A no está en γ ni en $\bar{o}$, (γ y $\bar{o}$ son el sup T y el inf T respectivamente) Sea $\mu = \sup \{\rho \in T \mid \rho < \alpha$ para toda α en $\langle A\rangle\}$ y sea $\nu = \inf \{\beta \in T \mid \alpha < \beta$ para todo α en $\langle A\rangle\}$.

Es claro por el lema anterior que $\langle A\rangle = [A^-, A^+] - (\mu, \nu)$ y por tanto $\langle A\rangle$ en τ.

Análogamente se prueba que $\langle A\rangle$ es un elemento de la base $\mathcal{B}$ en los otros casos. Entonces $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$.

Consideremos ahora $U < V$ y sea α tal que $U < \alpha < V$.

Supongamos que $\alpha = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ sea A_L el máximo elemento de $U \cap \alpha$ y A_M el máximo elemento de $V \cap \alpha$.

Sea ahora $N = \max(L, M)$. A_N no es terminal pues de otro modo $\alpha = U$ ó $\alpha = V$. Podemos considerar entonces A_{N+1} y, por tanto $\langle A_{N+1} \rangle$. Entonces es fácil ver que $\alpha \in \langle A_{N+1} \rangle \subset (U, V)$. De aquí tenemos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ y nuestra demostración está ahora completa.

b) FLUJOS

Los temas vistos en el subparágrafo anterior como los que veremos enseguida son independientes de la estructura de juego dada a un árbol Γ con raíz U y sólo dependen de que, para cada vértice no terminal A , se numeren los vértices de $\Gamma^{-1}(A)$.

DEFINICIÓN 3.1.6.

Se dice que se tiene un flujo γ en Γ si para cada vértice A no terminal se tiene una distribución de probabilidad que asigna a cada vértice B de $\Gamma^{-1}(A)$ el número $P_\gamma(B|A)$ de tal modo que $P_\gamma(B|A) \geq 0$ y $\sum_{B \in \Gamma^{-1}(A)} P_\gamma(B|A) = 1$.

En todo lo que sigue, Γ es un árbol ordenado en cada disyuntiva y en el cual se tiene un flujo γ. En estas condiciones, definimos $P_\gamma(U) = 1$.

Sea $A \neq U$ un vértice y consideremos $\omega(A) = \{U = A_0 < A_1 < \dots < A_N = A\}$ definimos:

$$P_\gamma(A) = P_\gamma(A_1|A_0)\, P_\gamma(A_2|A_1) \cdots P_\gamma(A_N|A_{N-1}).$$

Por último, si A es un vértice, definimos $P_\gamma(\langle A\rangle) = P_\gamma(A)$.

Ahora bien, es fácil ver que, la familia $\mathcal{Q} = \{\langle A\rangle \mid A \in V\} \cup \{\emptyset\}$ es un semianillo con unidad T por lo cual tenemos una función de conjunto $P_\gamma : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$. (En donde, desde luego $P_\gamma(\emptyset) = 0$)

Claramente no negativa y sólo nos resta probar la aditividad de $P_{\mathcal{T}}$

para que tengamos una medida no negativa definida en el semianillo

$\mathcal{G}$ con unidad T .

TEOREMA 3.1.7.

$P_{\mathcal{T}} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ es aditiva

Es decir, si $\langle A \rangle = \bigcup_{i=0}^{N} G_i$ en donde G_i está en $\mathcal{G}$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$

si $i \neq j$; entonces $P_{\mathcal{T}}(\langle A \rangle) = \sum_{i=0}^{N} P_{\mathcal{T}}(G_i) \ldots$ (1)

Muchos de los sumandos de (1) son cero pues para toda i ó $G_i = \langle B \rangle$ para

algún vértice B ó $G_i = \emptyset$. Podemos eliminar las $G_i = \emptyset$ y reordenar, entonces

(1) puede escribirse como $P_{\mathcal{T}}(\langle A \rangle) = \sum_{j=0}^{M} P_{\mathcal{T}}(\langle A_j \rangle) \ldots\ldots$ (1')

donde $\langle A_j \rangle = G_{e_j}$ y $\langle A \rangle = \bigcup_{j=0}^{M} G_{e_j} \ldots\ldots\ldots$ (2)

Entonces la demostración de 3.1.7. se reduce a probar que si

$\langle A \rangle = \bigcup_{i=0}^{N} \langle A_i \rangle$ con $\langle A_i \rangle \cap \langle A_j \rangle = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $P_{\mathcal{T}}(\langle A \rangle) = \sum_{i=0}^{N} P_{\mathcal{T}}(\langle A_i \rangle) \ldots$ (1')

Demostración:

Nuestra demostración es por inducción sobre ν.

Si $\nu=0$, no hay nada que probar.

Supongamos que la fórmula (1) vale si $\nu<\mu$ y asumamos que $\langle A\rangle=\bigcup_{i=0}^{\mu}\langle A_i\rangle$ ... (3)

con $\langle A_i\rangle\cap\langle A_j\rangle=\emptyset$ si $i\neq j$. Es claro que $A_i>A$ para cada i, además, como $B\geq C$ implica que $\langle B\rangle\subset\langle C\rangle$, es fácil ver que la partición de $\langle A\rangle$ en subconjuntos $\langle A_0\rangle,\dots,\langle A_\mu\rangle$ es un refinamiento de la partición de $\langle A\rangle$ dada por $\{\langle B\rangle \mid B\in\Gamma^{-1}(A)\}$.

Por tanto, o bien $\mu=n_A$ en cuyo caso la fórmula (1') vale obviamente para $\nu=\mu$ o bien $n_A<\mu$.

Pero en el último caso, existe $B\in\Gamma^{-1}(A)$ tal que $\langle B\rangle$ es la unión de al menos dos miembros de la familia $\langle A_0\rangle,\dots,\langle A_\mu\rangle$ y si, en (2), eliminamos esos miembros cuya unión es $\langle B\rangle$ y ponemos $\langle B\rangle$ en lugar de su unión, habremos expresado a $\langle A\rangle$ como la unión ajena de menos que

M términos en cuyo caso la fórmula (1) vale por la hipótesis de inducción. Tendremos entonces que $P_{\mathfrak{X}}(\langle A\rangle) = \sum_{\substack{i \text{ tales} \\ \text{que } A_i \not\supset B}} P_{\mathfrak{X}}(\langle A_i\rangle) + P_{\mathfrak{X}}(\langle B\rangle)$

pero también por la hipótesis de inducción $P_{\mathfrak{X}}(\langle B\rangle) = \sum_{\substack{i \text{ tales} \\ \text{que } A_i \supset B}} P_{\mathfrak{X}}(\langle A_i\rangle)$.

Combinando estas dos igualdades obtenemos que $P_{\mathfrak{X}}(\langle A\rangle) = \sum_{i=0}^{M} P_{\mathfrak{X}}(\langle A_i\rangle)$.

y nuestro teorema está ahora probado.

Ahora establecemos otro importante hecho:

TEOREMA 3.1.8.

$P_{\mathfrak{X}} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ es σ-aditiva

Es decir, si $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ en donde $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y si $G, G_0, G_1, \ldots$ son elementos de $\mathcal{G}$, entonces $P_{\mathfrak{X}}(G) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{\mathfrak{X}}(G_i)$.

Demostración:

Si todos los G_i excepto un número finito son vacíos, la igualdad por probar se reduce a la igualdad (1') del teorema anterior.

Demostraremos que siempre ocurre que todos los G_i excepto un número finito son vacíos.

Supongamos que existen **vértices** $A, A_0, A_1, \ldots$ tales que

$\langle A \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} \langle A_i \rangle$ y que $\langle A_i \rangle \cap \langle A_j \rangle = \emptyset$ si $i \neq j$.

Hagamos primero $\omega(A) = \{ U = C_0 < C_1 < \cdots < C_r = A \}$.

Del mismo modo que se hizo en el teorema anterior, puede demostrarse que la familia $\{\langle A_0 \rangle, \langle A_1 \rangle, \ldots\}$ forma un refinamiento de la familia $\{ \langle B^0 \rangle \mid B^0 \in \Gamma^{-1}(A) \}$.

Definamos ahora C_{r+1} como un vértice de $\Gamma^{-1}(A)$ con la propiedad de que $\langle C_{r+1} \rangle$ es la unión de una <u>colección infinita</u> de conjuntos de la forma $\langle A_i \rangle$. Entonces $\{ \langle A_i \rangle \mid A_i > C_{r+1} \}$ es un refinamiento de la familia $\{ \langle B' \rangle \mid B' \in \Gamma^{-1}(C_{r+1}) \}$

Supongamos construídos los vértices $C_{r+1}, C_{r+2}, \ldots, C_{r+k}$ de tal modo que, para $l = 1, 2, \ldots, k$ $\{ \langle A_i \rangle \mid A_i > C_{r+l} \}$ es una <u>familia infinita</u>. Definamos C_{r+k+1} como uno de los vértices de $\Gamma^{-1}(C_{r+k})$ con la propiedad de que $\{ \langle A_i \rangle \mid A_i > C_{r+k+1} \}$ es una <u>familia infinita</u>.

Consideremos ahora la partida infinita $\alpha=\{c_0,c_1,c_2,\dots\}$. Para cada A_{i_0}, si $\alpha\in\langle A_{i_0}\rangle$ exisitiría un vértice $C_\ell > A_{i_0}$ y entonces la familia $\{\langle A_i\rangle \mid A_i > C_\ell\}$ sería obviamente vacía lo cual es contrario a la definición de los vértices C_ℓ .

Por tanto, para cada A_{i_0}, α no está en $\langle A_{i_0}\rangle$. Pero, obviamente, $\alpha\in\langle A\rangle$.

Luego $\langle A\rangle \neq \bigcup_{i=0}^{\infty}\langle A_i\rangle$.

Nuestra prueba está ahora completa.

Observemos que $P_\gamma(T)=1$ para toda γ.

Para cada γ, hemos construído entonces una medida no negativa P_γ σ-aditiva en el semianillo $\mathcal{G}$ con unidad T . En estas condiciones, siguiendo el método de Lebesgue, se puede extender, como medida σ-aditiva a la σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ (de los borelianos), en forma única. Llamaremos μ_γ a la extensión de P_γ a $\mathcal{M}_\gamma$.

Es fácil ver que todos los conjuntos de la forma $[a,b]\cap T$, con $a<b$ reales, pertenecen a la familia $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ y si definimos $\Phi_\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ por medio de $\Phi_\gamma(0)=0$ y $\Phi_\gamma(x)=\mu_\gamma([0,x]\cap T)$ si $0<x\leq 1$,

tendremos entonces una función de distribución de probabilidad típica, es decir, una función real no negativa con dominio en $[0,1]$ que se anula en el punto 0, vale 1 en el punto 1, es monótona no decreciente y continua por la derecha en cada x no nula. Finalmente resulta fácil demostrar que si $\alpha = \{0 = A_0 < A_1 < \cdots < \cdots\}$ es una partida infinita, entonces $\{\alpha\} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ y vale la fórmula $P_{\mathcal{F}}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} P_{\mathcal{F}}(\{\alpha\}) =$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} P_{\mathcal{F}}(A_i \mid A_{i-1})$$

C)-REDUCCION DE UN JUEGO EXTENSIVO N-PERSONAL INFINITO A UN JUEGO RECTANGULAR

Hemos visto que cuando se tiene un flujo $\mathcal{F}$ en un árbol Γ automáticamente se obtiene una medida $\mu_{\mathcal{F}}$ en la σ-álgebra generada por el semianillo $\mathcal{G}$. Ahora bien cada n-ada de estrategias puras $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma$ en un juego extensivo Γ n-personal, determina claramente un flujo para Γ. Llamaremos μ_σ a la medida inducida por ese flujo. Sea $\Pi : T \to R^n$ la función de pago de Γ.

Si, para todo $\sigma \in \Sigma_i \; \Pi \in \mathcal{f}(\mathcal{M}_\sigma)$ sobre T, podemos establecer una nueva función:

$\mathcal{M}: \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\mathcal{M}(\sigma) = \int_T \Pi(\alpha)\, d\mathcal{M}_\sigma$

Para cada σ en $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N$, $\mathcal{M}(\sigma)$ será llamado el vector de pago medio correspondiente a σ y la función $\mathcal{M}$ será llamada la forma normal del Juego Γ.

A fin de estudiar las propiedades de $\mathcal{M}$, tenemos que estudiar que estructura se le puede dar a los conjuntos Σ_i y Σ.

d) ESTRUCTURA DEL ESPACIO DE ESTRATEGIAS PURAS PARA EL JUGADOR i EN UN JUEGO EXTENSIVO INFINITO N-PERSONAL.

Consideremos ahora un juego extensivo n-personal y sea $S_i = \{S_i^1, S_i^2, \ldots, S_i^M, \ldots\}$ la familia de los conjuntos de información para el jugador i. S_i es numerable ya que el conjunto de vértices de Γ lo es. A fin de dar al conjunto Σ_i una estructura topológica adecuada a nuestros fines, procederemos de un modo análogo a lo hecho en el caso del conjunto T. En todo lo que sigue, supondremos que la familia $\{S_i^1, S_i^2, \ldots\}$ de conjuntos de información para el jugador i es <u>infinita</u>.

Todos los resultados que obtendremos en este subparágrafo, a menos de que explícitamente se diga lo contrario, serán trivialmente válidos en el caso de que la familia de conjuntos de información para el jugador i sea finita.

Para σ_i en Σ_i, definamos $\varphi_i(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\sigma_i(S_i^j)}{(1+2w_i^1)(1+2w_i^2)\cdots(1+2w_i^j)}$

Aquí podemos probar la convergencia de la serie en el lado derecho de la igualdad anterior de modo parecido a la prueba de convergencia de la serie (1) en el subparágrafo (a). Además, siguiendo los pasos de aquella prueba, podemos establecer que $0 \leq \varphi_i(\sigma_i) < 1$ si la familia de conjuntos de información para el jugador i es infinita y que, si dicha familia es $\{S_i^1, S_i^2, \ldots, S_i^{r_i}\}$, entonces φ_i (que se define de un modo obvio) es tal que, para todo $\sigma_i \in \Sigma_i$,

$$0 \leq \varphi_i(\sigma_i) \leq 1 - \frac{1}{(1+2N_i^1)(1+2N_i^2)\cdots(1+2N_i^{k_i})}$$

Las pruebas de las siguientes dos proposiciones son también parecidas a las de las proposiciones análogas en el subparágrafo (a).

Proposición 3.1.9.

$\varphi_i : \Sigma_i \to \mathbb{R}$ es inyectiva.

Proposición 3.1.10.

$\varphi_i(\Sigma_i)$ es un subconjunto compacto de $[0,1]$.

Entonces, como en el subparágrafo (a), podemos identificar a cada σ_i con el real $\varphi_i(\sigma_i)$, al conjunto Σ_i con el compacto $\varphi_i(\Sigma_i)$, a cada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N) \in \Sigma$ con un punto del $[0,1]^N$ y al conjunto Σ con un subconjunto compacto de $[0,1]^N$. Podemos como en (a) inducir una topologia en Σ, por medio de la topología usual en $[0,1]$. Además podemos establecer una base equivalente a la determinada por la base usual. La base equivalente, análologa a los conjuntos $\langle A \rangle$ usados en T, está formada por conjuntos de estrategias puras de Σ_i que coincidan en los primeros m conjuntos de información para el jugador i.

Es decir consideremos $S_i^1, \ldots, S_i^m$ y $n_i^1, \ldots n_i^m$ números tales que n_i^j está en I_i^j. Los conjuntos $V(n_i^1, \ldots, n_i^m) = \{\sigma_i \in \Sigma_i \mid \sigma_i(S_i^j) = n_i^j \; \forall j=1,\ldots,n\}$. forman la base de que se habló.

Si consideramos colecciones finitas arbitrarias de conjuntos de información para el jugador i: $S_i^{j_1}, S_i^{j_2}, \ldots, S_i^{j_r}$ y números $n_i^{j_1}, n_i^{j_2}, \ldots, n_i^{j_r}$ tales que $n_i^{j_s} \in I_i^{j_s}$. Los conjuntos $V(n_i^{j_1}, \ldots n_i^{j_r}) = \{\sigma_i \in \Sigma_i \mid \sigma_i(S_i^{j_r}) = n_i^{j_R} \; \forall R=1,\ldots r\}$ forman una base equivalente a la anterior y que tambien usaremos.

Estamos ahora preparados para estudiar las propiedades de la función $M: \Sigma \to R^N$ en términos de las propiedades de la función $\Pi: T \to R^N$.

§ F- Continuidad de la función $M: \Sigma \to R^N$

Nuestra preocupación ahora consiste en tener condiciones suficientes y adecuadamente flexibles para la función $\Pi: T \to \mathbb{R}^N$ tales que hagan que

la función $M: \Sigma \to \mathbb{R}^N$ sea <u>continua</u> ya que, como veremos más

adelante, la continuidad de M es condición suficiente para que existan

puntos de equilibrio para Γ en estrategias mixtas.

Como M es una función vectorial podemos reducirnos a investigar

condiciones que hagan continuas a sus componentes. Es decir veremos

algunas condiciones suficientes para una función $f: T \to \mathbb{R}$ que haga que

la función $H_f: \Sigma \to \mathbb{R}$ definida como $H_f(\sigma) = \int_T f \, d\mu_\sigma$ sea continua

Establezcamos entonces un primer

<u>TEOREMA 3.1.11.</u>

<u>Sea $f: T \to \mathbb{R}$ una función acotada y B-medible, $D \subset T$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f y σ^* en Σ.</u>

<u>Si $\mu_{\sigma^*}(D) = 0$, entonces $H_f: \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $H_f(\sigma) = \int_T f \, d\mu_\sigma$ es continua en σ^*.</u>

Observación:

Puesto que f es acotada y $\mathcal{B}$-medible, $H_f(\sigma)$ existe para cada σ en Σ.

Con el objeto de preparamnos para la demostración de nuestro teorema, convengamos de aquí en adelante en llamar partición $\mathcal{P}$ de $\mathcal{T}$. a aquellas que son una familia finita de conjuntos de la forma $\langle A\rangle$ con A un vértice. Si $\mathcal{P}$ es una partición de $\mathcal{T}$ y $\delta(\langle A_i\rangle)$ es el diámetro del conjunto $\langle A_i\rangle$, diremos que la norma$(\mathcal{P})$ es el máximo de los diámetros de los conjuntos $\langle A_i\rangle$.

En segundo lugar, si $\mathcal{P}=\{\langle A_1\rangle,\dots,\langle A_n\rangle\}$ y $\overset{*}{\mathcal{P}}=\{\langle B_1\rangle,\dots,\langle B_n\rangle\}$ son dos particiones de $\mathcal{T}$, diremos que $\overset{*}{\mathcal{P}}$ refina a $\mathcal{P}$ (en símbolos, $\overset{*}{\mathcal{P}}\succ\mathcal{P}$) si $\langle B_j\rangle\cap\langle A_i\rangle\neq\phi$ implica que $\langle B_j\rangle\subset\langle A_i\rangle$.

Es fácil probar que la relación "$\succ$" constituye un orden parcial entre las particiones de $\mathcal{T}$.

Continuando con las ideas acostumbradas al definir la integral de

Riemann-Stieljes, consideramos μ en $D(T)$ y $P = \{\langle A_1\rangle, \ldots, \langle A_N\rangle\}$ una

partición de T y escribimos $U(P, f, \mu) = \sum_{i=1}^{N} M_i \mu(\langle A_i\rangle)$,

$L(P, f, \mu) = \sum_{i=1}^{N} m_i \mu(\langle A_i\rangle)$ en donde $M_i = \sup_{x\in\langle A_i\rangle} f(x)$ y $m_i = \inf_{x\in\langle A_i\rangle} f(x)$

Puede probarse sin dificultad que $\overset{*}{P} \geq P$ implica $U(\overset{*}{P}, f, \mu) \leq U(P, f, \mu)$

y $L(\overset{*}{P}, f, \mu) \geq L(P, f, \mu)$

Con ayuda de esto, puede establecerse que $L(P_1, f, \mu) \leq U(P_2, f, \mu)$

si P_1 y P_2 son particiones de T.

Además se prueba fácilmente que existe una sucesión $P_1, P_2, \ldots, P_N, \ldots$

de particiones de T tal que

i) norma $(P_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ii) $P_{N+1} \geq P$ para toda $N = 1, 2, \ldots$

<u>Demostración del Teorema</u>

Sea $\{P_N\}$ una sucesión de particiones que satisfacen las condiciones

arriba enunciadas.

si $P_N = \{\langle A_1^N\rangle, \ldots, \langle A_M^N\rangle\}$, definamos $U_N : T \to R$ y $L_N : T \to R$

del siguiente modo: si x está en $\langle A_i^N\rangle$, hacemos $U_N(x) = M_i$ si $M_i = \sup_{Y \in \langle A_i^N\rangle} f(Y)$

$L_N(x) = m_i$ si $m_i = \inf_{Y \in \langle A_i^N\rangle} f(Y)$.

Entonces, para cada x en T y para toda $N = 1, 2, \ldots$

$U_N(x) \geq U_{N+1}(x) \geq f(x) \geq L_{N+1}(x) \geq L_N(x)$ .... ①

podemos entonces hacer $U(x) = \lim_{N\to\infty} U_N(x)$ y $L(x) = \lim_{N\to\infty} L_N(x)$.

obviamente, para cada x $L(x) \leq f(x) \leq U(x)$ .... ②

Como un primer paso para la demostración, probaremos:

<u>Si f continua en X^* de T, entonces $U(x^*) = f(x^*) = L(x^*)$</u>.

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que f es continua en X^*, existe $\delta > 0$ tal que

$|x - \overset{*}{x}| < \delta$ implica que $f(\overset{*}{x}) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(\overset{*}{x}) + \frac{\varepsilon}{2}$ .... ③

Sea $\overset{\circ}{N}$ tal que la norma de $P_{\overset{\circ}{N}}$ es menor que δ.

Supongamos que $P_{\overset{\circ}{N}} = \{\langle A_1^{\overset{\circ}{N}}\rangle, \ldots, \langle A_M^{\overset{\circ}{N}}\rangle\}$ y que $\overset{*}{X}$ en $\langle A_{i_0}^{\overset{\circ}{N}}\rangle$.

Entonces, si X está en $\langle A_{i_0}^{\overset{\circ}{N}}\rangle$, ③ se cumple y, por tanto,

$f(\overset{*}{x})-\frac{\varepsilon}{2}\leq m_{i_0}\leq f(\overset{*}{x})\leq M_{i_0}\leq f(\overset{*}{x})+\frac{\varepsilon}{2}$ y por la definición de U_n

y de L_n $\quad f(\overset{*}{x})-\frac{\varepsilon}{2}\leq L_n(\overset{*}{x})\leq f(\overset{*}{x})\leq U_n(\overset{*}{x})\leq f(\overset{*}{x})+\frac{\varepsilon}{2}$.

por tanto $\quad f(\overset{*}{x})-\frac{\varepsilon}{2}\leq L(\overset{*}{x})\leq f(\overset{*}{x})\leq U(\overset{*}{x})\leq f(\overset{*}{x})+\frac{\varepsilon}{2}$

y, haciendo tender ε a cero, tenemos que $L(\overset{*}{x})=f(\overset{*}{x})=U(\overset{*}{x})$.

Podemos establecer ya como último paso de la demostración que

H_f es continua en $\overset{*}{\sigma}$.

Obviamente, para cada natural n y para σ en Σ se tiene que

$\int_T U_n\, d\mu_\sigma = U(P_n, f, \mu_\sigma)$ y también $\int_T L_n\, d\mu_\sigma = L(P_n, f, \mu_\sigma)$

Por tanto, en virtud del teorema de la convergencia monótoma de

Lebesgue, para cada σ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T U_n\, d\mu_\sigma = \int_T U\, d\mu_\sigma$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\int L_n\, d\mu_\sigma = \int_T L\, d\mu_\sigma$ 4

y también, por 2, para cada σ en Σ

$\int_T U\, d\mu_\sigma \geq \int_T f\, d\mu_\sigma \geq \int_T L\, d\mu_\sigma$ 5

En particular, ya que $\mu_{\overset{*}{\sigma}}(D)=0$, por el primer paso U, f, L

sólo difieren en un conjunto de $\mu_{\overset{*}{\sigma}}$-medida nula y, para $\overset{*}{\sigma}$, 5 se convierte en $\int_T U\, d\mu_{\sigma^*} = \int_T f\, d\mu_{\sigma^*} = \int_T L\, d\mu_{\sigma^*}$ .... (6) sea ahora $\varepsilon > 0$.

Por (4) , existe una partición $P_{\bar{N}}$ de nuestra sucesión tal que

$$\int_T U_{\bar{N}}\, d\mu_{\sigma^*} - \int_T U\, d\mu_{\sigma^*} < \varepsilon \qquad y \qquad \int_T L\, d\mu_{\sigma^*} - \int_T L_{\bar{N}}\, d\mu_{\sigma^*} < \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Supongamos que $P_{\bar{N}} = \{\langle A_1^{\bar{N}}\rangle, \langle A_2^{\bar{N}}\rangle, \ldots, \langle A_m^{\bar{N}}\rangle\}$. Sean $S_{i_1}^{j_1}, S_{i_2}^{j_2}, \ldots, S_{i_r}^{j_r}$

los conjuntos de información de Γ con vértices por arriba de los

vértices $A_1^{\bar{N}}, \ldots, A_m^{\bar{N}}$. Estos conjuntos forman

claramente una familia finita.

Hagamos ahora $G(\sigma^*) = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(S_{i_R}^{j_R}) = \sigma^*(S_{i_R}^{j_R}) \quad R = 1, \ldots, r\}$

$G(\sigma^*)$ es un abierto de Σ que contiene a σ^* .

Ahora bien, si σ en $G(\sigma^*)$

$$\mu_\sigma(\langle A_i^{\bar{N}}\rangle) = \mu_{\sigma^*}(\langle A_i^{\bar{N}}\rangle) \quad \text{PARA } i = 1, \ldots, m$$

Por tanto, si σ en $G(\sigma^*)$

$$\int_T U_{\bar{N}}\, d\mu_\sigma = U(P_{\bar{N}}, f, \mu_\sigma) = U(P_{\bar{N}}, f, \mu_{\sigma^*}) = \int_T U_{\bar{N}}\, d\mu_{\sigma^*}$$

y, también, $\int_T L_{\bar{\nu}}\, d\mu_\sigma = L(P_{\bar{\nu}}, f, \mu_\sigma) = L(P_{\bar{\nu}}, f, \mu_{\sigma^*}) = \int_T L_{\bar{\nu}}\, d\mu_{\sigma^*}$

y combinando lo anterior con (5), (6) y (7), si σ en $G(\sigma^*)$, tenemos que

$$\int_T f\, d\mu_{\sigma^*} - \varepsilon < \int_T L_{\bar{\nu}}\, d\mu_{\sigma^*} = \int_T L_{\bar{\nu}}\, d\mu_\sigma \leq \int_T L\, d\mu_\sigma \leq \int_T f\, d\mu_\sigma \leq \int_T U\, d\mu_\sigma \leq$$

$$\leq \int_T U_{\bar{\nu}}\, d\mu_\sigma = \int_T U_{\bar{\nu}}\, d\mu_{\sigma^*} < \int_T f\, d\mu_{\sigma^*} + \varepsilon. \quad \text{Y}$$

$$|H_f(\sigma) - H_f(\sigma^*)| < \varepsilon.$$

Nuestra prueba está ahora completa.

Sin embargo, como veremos más adelante, en muchas stuaciones ocurre que se requiere de condiciones suficientes para la continuidad de la H_f del teorema anterior aún cuando f no es una función acotada. Por esta razón estableceremos el siguiente teorema, pero antes de enunciarlo y demostrarlo debemos preparar algo de terminología.

Sea $f: T \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$-medible y μ en $\mathcal{D}(T)$. Para cada γ está en $\mathbb{R}$, hacemos $E_\gamma = \{x \in T \mid |f(x)| \geq \gamma\}$. Entonces E_γ en $\mathcal{B}_T$ y definimos $\Phi_\mu(\gamma) = \mu(E_\gamma)$. Claramente, si $\gamma_1 < \gamma_2$, $E_{\gamma_2} \subset E_{\gamma_1}$

Por tanto Φ_μ es una función monótoma no creciente para $y \geq 0$ y por ello es Riemann-integrable para $0 \leq y \leq b$ con b un real positivo arbitrario.

Además es conocido que si $(X, \mathcal{G}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son dos espacios de medida y si A está contenido en $X \times Y$ con $(\mu \otimes \nu)(A)$ finito y para toda $\hat{x}$ en X, $A_{\hat{x}} = \{y \in Y \mid (\hat{x}, y) \in A\}$ y para toda $\hat{y}$ en Y, $A_{\hat{y}} = \{x \in X \mid (x, \hat{y}) \in A\}$, entonces

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int_Y \mu(A_y)\, d\nu = \int_X \nu(A_x)\, d\mu .$$

Por esta razón, si hacemos, para $b > 0$, $g = \min(|f|, b)$ y

$$A = \{(x,y) \in T \times R \mid 0 \leq y \leq g(x)\}. \text{ Para } \hat{x} \in X$$
$$A_{\hat{x}} = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq g(\hat{x})\}$$

entonces, para $0 \leq y \leq b$

$$A_{\hat{y}} = \{x \in T \mid (x, \hat{y}) \in A\} = \{x \in T \mid \hat{y} \leq g(x)\} = \{x \in T \mid \hat{y} \leq |f(x)|\} = E_{\hat{y}}.$$

Por tanto, aplicando el teorema anteriormente citado a los espacios

$(T,\mathcal{B}_T,\mu)$ y $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},m)$ (con la medida de Lebesgue), obtenemos que

$$\int_T m(A_x)\,d\mu = \int_0^b \mu(E_y)\,dy \qquad \text{y puesto que}$$

$$m(A_x) = m\left(\{y\in\mathbb{R} \mid 0\leq y\leq g(x)\}\right) = g(x)$$

la igualdad anterior se transforma en

$$\int_0^b \Phi_\mu(y)\,dy = \int_T g(x)\,d\mu = \int_{T-E_b} |f|\,d\mu + b\,\mu(E_b) \quad \text{.................} \quad (8)$$

Por tanto, si f está en $\mathcal{L}_1(\mu)$, entonces $0\leq \int_T |f|\,d\mu - \int_0^b \Phi_\mu(y)\,dy =$

$$= \int_{E_b} |f|\,d\mu - b\,\mu(E_b) \leq \int_{E_b} |f|\,d\mu .$$

Ahora bien si $b\to\infty$, $\mu(E_b)\to 0$ ya que f es sumable y, por el teorema de la continuidad absoluta de la integral, cuando $b\to\infty$, $\int_{E_b} |f|\,d\mu \to 0$

de donde deducimos que la integral impropia $\int_0^\infty \Phi_\mu(y)\,dy$ existe y, además,

$$\int_T |f|\,d\mu = \int_0^\infty \Phi_\mu(y)\,dy \quad \text{.....................} \quad (9)$$

Estamos preparados para enunciar el

TEOREMA 3.1.12

Sea $f: T\to\mathbb{R}$ tal que f está en $\mathcal{L}(\mu_\sigma)$ para toda σ en Σ (pero tal vez no acotada). Sea D el conjunto de puntos de discontinuidad de f y supongamos que:

i) $\mu_{\sigma^*}(D)=0$.

ii) Existe una vecindad $U(\sigma^*)$ y una función $\Phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi_\sigma \geq \Phi_{\mu_\sigma}$ para toda σ en $U(\sigma^*)$ y Φ Lebesgue-sumable en $[0,\infty)$. Entonces $H_f : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada como en el teorema anterior es contimua en σ^*.

Demostración:

Si hacemos $f^+ = max(f,0)$ y $f^- = -min(f,0)$ es fácil probar que si f cumple con i) y ii) entonces también f^+ y f^- cumplen con estas condiciones y, puesto que, obviamente, $H_f = H_{f^+} - H_{f^-}$, no se pierde generalidad si probamos nuestro teorema sólo para funciones $f \geq 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe M Tal que $\int_M^\infty \Phi \, dy < \frac{\varepsilon}{3}$ .... (10)

Hagamos $h = min(f, M)$. Es fácil probar que h cumple con las condiciones del teorema 3.1.11. y existe $U_1(\sigma^*)$ tal que

σ está en $U_1(\sigma^*)$ implica que $|H_h(\sigma)-H_h(\sigma^*)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sea $V(\sigma^*) = U(\sigma^*) \cap U_1(\sigma^*)$ si σ está en $V(\sigma^*)$

$$|H_f(\sigma)-H_f(\sigma^*)| = \left|\int_T f\,d\mu_\sigma - \int_T f\,d\mu_{\sigma^*}\right| = \left|\int_0^\infty \Phi_{\mu_\sigma}(\gamma)\,d\gamma - \int_0^\infty \Phi_{\mu_{\sigma^*}}(\gamma)\,d\gamma\right| =$$

$$= \left|\int_0^M \Phi_{\mu_\sigma}(\gamma)\,d\gamma - \int_0^M \Phi_{\mu_{\sigma^*}}(\gamma)\,d\gamma + \int_M^\infty \Phi_{\mu_\sigma}(\gamma)\,d\gamma + \int_M^\infty \Phi_{\mu_{\sigma^*}}(\gamma)\,d\gamma\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^M \Phi_{\mu_\sigma}(\gamma)\,d\gamma - \int_0^M \Phi_{\mu_{\sigma^*}}(\gamma)\,d\gamma\right| + \left|\int_M^\infty \Phi_{\mu_\sigma}(\gamma)\,d\gamma\right| + \left|\int_M^\infty \Phi_{\mu_{\sigma^*}}(\gamma)\,d\gamma\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_T h(x)\,d\mu_\sigma - \int_T h(x)\,d\mu_{\sigma^*}\right| + 2\int_M^\infty \Phi(\gamma)\,d\gamma <$$

$$< |H_h(\sigma)-H_h(\sigma^*)| + \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

En donde la segunda igualdad se establece en virtud de 9 y la segunda desigualdad se establece como consecuencia de 8 y de 11).

Nuestro teorema está ahora probado.

Observación:

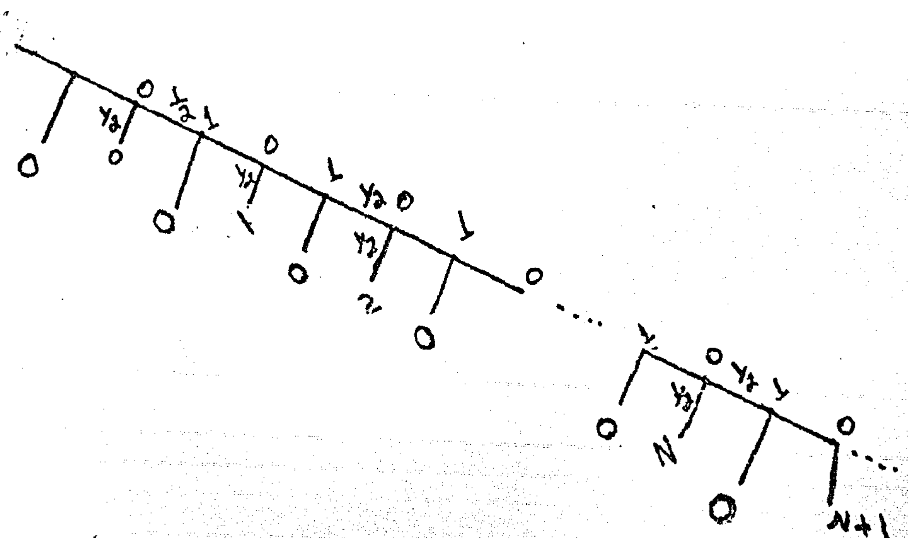
La desigualdad de Chébishev establece que, si $f \geq 0$ y $\gamma > 0$ entonces para toda μ en $D(T)$ $\mu(E_\gamma) \leq \frac{1}{\gamma}\int_T f\,d\mu$

De modo que, si para todo μ en $D(T)$. $\int_T f\,d\mu < R$, entonces $\Phi_\mu(\gamma) < \frac{1}{\gamma}R$

lo, cual nos da una estimación para $\Phi_\mu(\gamma)$ independiente de μ. Sin embargo, es sabido que $\int_0^\infty \frac{1}{\gamma} R\, d\gamma$ no converge y por tanto, la hipótesis ii) nos dice que requerimos la existencia de una "mayorante" Φ_U "más pequeña" que la que se desprende de la desigualdad de Chebishev.

Podría sospecharse que si las integrales $\int_T f\, d\sigma$, como funciones de σ, están acotadas por algún real R en una vecindad de σ^* puede desprenderse la existencia de una "mayorante" "suficientemente pequeña".

Examinemos, sin embargo, el siguiente ejemplo:



Aquí sólo intervienen un jugador y el azar, los números en cada vértice terminal son los pagos que recibe dicho jugador en cada partida finita y los quebrados en las aristas que parten de las "decisiones" del azar representan las probabilidades condicionales obvias.

Existe solamente una partida infinita α, pero, obviamente para toda σ en Σ, $\eta_\sigma(\{\alpha\})=0$ y, por tanto, si f está dada por los pagos en cada partida, $\int_T f\,d\eta_\sigma$ no depende del pago $f(\alpha)$ que se le asigna a la única partida infinita y podemos definir $f(\alpha)$ arbitrariamente.

Entonces se puede ver que, si σ es una estrategia según la cual el jugador decide abandonar el juego en algún momento, $\int_T f\,d\eta_\sigma = \sum_{i=0}^{N} i\frac{1}{2^{i+1}}$.

en donde N es el "primer momento" en el cual el jugador decide abandonar el juego.

Por otro lado, si $\overset{*}{\sigma}$ es la estrategia según la cual el jugador <u>no</u> abandona nunca el juego, tendremos que $\int_T f\,d\eta_{\sigma^*}=0$.

Ahora bien, si hacemos $R=\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{1}{2^i}$, tenemos que para toda σ en Σ

$\int_T f\,d\eta_\sigma < R$. Además se cumple la hipótesis 1) de nuestro teorema 3.1.12. para toda σ y, sin embargo, H_f es <u>discontinua</u> en la estrategia $\overset{*}{\sigma}$.

Nos queda todavía una cuestión por contestar:

¿ Qué tanto podemos debilitar nuestras hipótesis sobre f en los teoremas anteriores a fin de que H_f resulte continua?

Una idea de la respuesta a esta cuestión nos la da nuetro siguiente

TEOREMA 3.1.13.

Sea Γ un juego en el cual no interviene el azar ($S_0 = \phi$) y en donde cada conjunto de información es finito.

Si f está en $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_0)$ para cada σ en Σ y H_f está definida como en los teoremas anteriores, entonces la continuidad de H_f en σ^* de Σ es equivalente a la de f en $t(\sigma^*)$ (en donde $t(\sigma^*)$ es la partida determinada por el sistema σ^*).

Demostración:

La continuidad de f implica la de H_f :

Sea A un vértice arbitrario de $t(\sigma^*)$ y sea $\{ S_{i_1}^{j_1}, S_{i_2}^{j_2}, \ldots, S_{i_m}^{j_m} \} = \mathcal{F}$

la familia de conjuntos de información que intersectan a $t(\sigma^*)$ en puntos anteriores a A.

Sea $U(\overset{*}{\sigma}) = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(S_{i_k}^{j_k}) = \overset{*}{\sigma}(S_{i_k}^{j_k})$ para todo $S_{i_k}^{j_k}$ en $\mathcal{F}\}$

Entonces σ en $U(\overset{*}{\sigma})$ implica $t(\sigma)$ está en $\langle A\rangle$ y la función f es continua en $\overset{*}{\sigma}$.

Ahora bien $H_f(\overset{*}{\sigma}) = f(t(\overset{*}{\sigma}))$. Por tanto, H_f es continua en $\overset{*}{\sigma}$.

<u>La continuidad de H_f implica la de f.</u>

Si $t(\overset{*}{\sigma})$ es una partida finita no hay nada que probar. Supongamos que $t(\overset{*}{\sigma})$ es una partida infinita y que $\mathcal{U}$ es una vecindad de $H_f(\overset{*}{\sigma}) = f[t(\overset{*}{\sigma})]$

Como H_f es continua en $\overset{*}{\sigma}$, existe una familia finita $\{S_{i_1}^{j_1}, S_{i_2}^{j_2}, \ldots, S_{i_m}^{j_m}\} = \mathcal{F}$ (no confundirla con la $\mathcal{F}$ de la demostración de la primera parte) de conjuntos de información tal que $\sigma(S_{i_k}^{j_k}) = \overset{*}{\sigma}(S_{i_k}^{j_k})$ para toda $S_{i_k}^{j_k}$ en $\mathcal{F}$ implica que $H_f(\sigma)$ en $\mathcal{U}$.

Sea A un vértice de $t(\overset{*}{\sigma})$ tal que $\{B \in V \mid B \geq A\} \cap \bigcup_{S_{i_k}^{j_k} \in \mathcal{F}} S_{i_k}^{j_k} = \phi$

Tomemos t en $\langle A\rangle$.

Existe $\hat{\sigma}$ tal que $t(\hat{\sigma})=t$. si $S_{i_k}^{j_k} \cap \omega(A) \neq \emptyset$ con $S_{i_k}^{j_k}$ en $\mathcal{F}$

entonces, claramente, $\hat{\sigma}(S_{i_k}^{j_k}) = \overset{*}{\sigma}(S_{i_k}^{j_k})$.

Definamos ahora σ del siguiente modo:

$\sigma(S_i^j) = \hat{\sigma}(S_i^j)$ si S_i^j no está en $\mathcal{F}$ o si S_i^j está en $\mathcal{F}$ con $S_i^j \cap \omega(A) \neq \emptyset$, $\sigma(S_i^j) = \overset{*}{\sigma}(S_i^j)$ si S_i^j está en $\mathcal{F}$ y $S_i^j \cap \omega(A) = \emptyset$

Entonces $\sigma(S_{i_k}^{j_k}) = \overset{*}{\sigma}(S_{i_k}^{j_k})$ para todo $S_{i_k}^{j_k}$ en $\mathcal{F}$ y $t(\sigma) = t(\hat{\sigma}) = t$.

Por tanto $f(t) = f[t(\sigma)]$ está en $\mathcal{U}$ y f es continua en $t(\overset{*}{\sigma})$ y el teorema está probado.

Como hemos dicho antes nos interesa la continuidad de la función M pues en este trabajo desprendemos la existencia de puntos de equilibrio de un teorema que exige esta continuidad. Los dos primeros teoremas de este subparágrafo nos proporciona condiciones sobre la función de pago $\Pi: T \to \mathbb{R}^N$ suficientes para que M sea continua, resolver completamente el problema, en esta dirección, sería encontrar condiciones necesarias y suficientes, sin embargo nuestro último teorema hace pensar que si queremos resultados aplicables a cualquier juego, sea cual sea la situación en cuanto información y la participación del azar, habrá que imponer condiciones más o menos fuertes a la función de pago Π a fin de que M sea continua.

Por los demás no es necesario que la función M sea continua para que existan puntos de equilibrio. Gale, Stewart, Morton Davis y otros han demostrado la existencia de puntos de equilibrio en algunos tipos de juegos extensivos infinitos cuya función M no es continua.

A partir de este momento seguimos lo más estrechamente posible los pasos del capítulo 2 .

Algunas de las demostraciones las omitimos porque resultarían simple repetición. Otra observación importante es que todos los juegos que consideraremos son con función de pago medio continua .

§ 2- ESTRATEGIAS MIXTAS EN JUEGOS EXTENSIVOS INFINITOS .

Sea Γ un juego extensivo n- personal infinito, podemos decir que el real X es asegurable en estrategias puras para el jugador i si existe $\hat{\sigma}_i$ en Σ_i tal que para toda σ en Σ se tiene que $M_i(\sigma | \hat{\sigma}_i) \geq X$ en donde el símbolo "$\sigma | \hat{\sigma}_i$" tiene un significado obvio .

Como los espacios Σ_j son compactos y la función de "pago medio" M_i es continua podemos hablar del $\max_{\sigma} M_i(\sigma)$ y del $\min_{\sigma} M_i(\sigma)$ a los que denotaremos como $\overline{M_i}$ y $\underline{M_i}$ respectivamente .

$\overline{M_i}$ es cota superior para el conjunto de las cantidades asegurables y $\underline{M_i}$ es asegurable, entonces podemos hablar de v_i el $\sup\{ x \mid x$ asegurable en estrategias puras para el jugador $i\}$.

El número $\omega_i = \max_{\hat{\sigma}\in\Sigma_i} \min_{\sigma\in\Sigma} M_i(\sigma \mid \hat{\sigma}_i)$ existe; como probamos en el lema de 2.2.7., la función $\min_{\sigma\in\Sigma} M_i(\sigma\mid\hat{\sigma}_i)$ es continua en Σ_i y por lo tanto alcanza su máximo.

Establecemos la siguiente

Proposición 3. 2. 1

$$v_i' = \max_{\hat{\sigma}_i \in \Sigma} \min_{\sigma \in \Sigma} M_i(\sigma | \hat{\sigma}_i)$$ y v_i' es asegurable en estrategias puras para el jugador i.

La demostración es igual que en 2. 2. 1

Definimos ahora el concepto de estrategia mixta para i en el juego Γ. De nuevo será una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras del jugador i.

Para esto necesitamos determinar un semianillo adecuado en Σ_i

Consideraremos en el intervalo $[0,1]$ todos los subconjuntos de la forma $[a,b) \cap \Sigma_i$, es claro que forman un semianillo con unidad Σ_i denotémosle con la letra $\mathfrak{A}_{\Sigma_i}$.

La σ-álgebra generada por $\mathfrak{A}_{\Sigma_i}$ coincide con la σ-álgebra $\mathcal{B}_{\Sigma_i}$

de los borelianos de Σ_i. Sea $I_a = (a, b) \cap \Sigma_i$. Consideremos una sucesión de racionales $\{r_j\}$ que tiendan crecientemente a a. Los conjuntos $(r_j, b) \cap \Sigma_i = I_{r_j}$ contienen a I_a por lo que $I_a \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} (r_j, b) \cap \Sigma_i$, además $I_{r_{i+1}} \subset I_{r_i}$ para toda i. Entonces $I_a = \bigcap_{i=1}^{\infty} (r_j, b) \cap \Sigma$. Es decir I_a es boreliano.

Por otro lado sea (a,b) un intervalo abierto, para todo x en $(a,b) \cap \Sigma_i$ existe un racional r_x en $(a,x) \cap \Sigma_i$.

Sea $A = \bigcup_{\forall x \in (a,b) \cap \Sigma_i} [r_x, b) \cap \Sigma_i$

Es claro que $(a,b) \cap \Sigma_i$ es igual a A. Y por lo tanto está en el álgebra generada por $\mathcal{B}_{\Sigma_i}$.

Podemos ahora definir el concepto de estrategia mixta.

Definición 3. 2. 2

Una estrategia mixta para el jugador i es una medida no - negativa m_i σ-aditiva sobre el semianillo $\mathcal{Q}_{\Sigma_i}$ y tal que $m_i(\Sigma_i)=1$, es decir es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras de i.

Observaciones

La medida m_i puede extenderse a una σ-álgebra con unidad Σ_i que contiene a $\mathcal{B}_{\Sigma_i}$, sin embargo nos restringiremos a trabajar con $\mathcal{B}_{\Sigma_i}$.

Otra observación útil es que basta que dos medidas m_1 y m_2 coincidan en los conjuntos cerrados para que sean iguales.

Consideremos un elemento de $\mathcal{Q}_{\Sigma_i}$, sea un conjunto de la - forma $[a,b) \cap \Sigma_i$ y sea $x_n = b - \frac{1}{n}$

Llamemos I_n a $[a, x_n] \cap \Sigma$, es claro que

$$[a,b) \cap \Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Como $I_n \subset I_{n+1}$ entonces $m_1(I_n) \to m_1([a,b) \cap \Sigma)$

igualmente $m_2\, I_n \to m_2\, ([a,b) \cap \Sigma)$.

Pero I_n es cerrado y $m_1(I_n) = m_2(I_n)$ por lo que $m_1([a,b) \cap \Sigma) = m_2([a,b) \cap \Sigma)$ y $m_1 = m_2$.

Otra vez denotaremos con $\mathcal{M}_i$ al conjunto de las estrategias mixtas para el jugador i ,

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_n$ y si m en $\mathcal{M}$

$m = (m_1, \dots, m_n)$ y $\hat{m}_i$ en $\mathcal{M}_i$

el símbolo "$m|\hat{m}_i$" tiene el significado acostumbrado .

Definimos entonces el pago esperado $E : \mathcal{M} \to R^n$ como

$$E(m) = \int_{\Sigma_m} \int_{\Sigma_{m-1}} \dots \int_{\Sigma_1} M(\sigma)\, dm_1\, dm_2 \cdots dm_m .$$ Ó más brevemente

$$E(m) = \int_{\Sigma} M(\sigma)\, dm \quad y \quad E_i(m) = \int_{\Sigma} M_i(\sigma)\, dm.$$

Como antes podemos encajar a Σ_i en $\mathcal{M}_i$

si $\hat{\sigma}_i$ está en Σ_i definimos $m_{\hat{\sigma}_i}$ para cada I en $\mathcal{R}_{\Sigma_i}$ del modo siguiente :

$m_{\hat{\sigma}_i}(I) = 0$ si $\hat{\sigma}_i$ NO ESTÁ EN I

$m_{\hat{\sigma}_i}(I) = 1$ si $\hat{\sigma}_i$ ESTÁ EN I.

$m_{\hat{\sigma}_i}$ es una medida σ-aditiva en $\mathcal{R}_{\Sigma_i}$. Podemos establecer la identificación $\hat{\sigma}_i \rightarrow m_{\hat{\sigma}_i}$; es fácil ver que

$E(\sigma) = M(\sigma)$ para toda σ en Σ.

Cómo en el capítulo 2 pasaremos ahora a establecer algunas propiedades de los conjuntos $\mathcal{M}_i$.

Proposición 3. 2. 3

$\mathcal{M}_i$ es convexo .

Esta proposición es válida por los mismos argumentos que 2. 2. 3 .

Estudiaremos los conjuntos de estrategias mixtas con una cierta topología y algunas de sus propiedades con respecto a ella.

Consideremos X un subespacio compacto de R^n.

En $\mathbb{R}^m$ consideremos $\mathcal{S}$ el semianillo de los bloques de la forma $\{x=(x_1,\ldots,x_m)$ en $\mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i < b_i,\ i=1,2,\ldots,m\}$ en donde $a_i \leq b_i$ para toda $i=1,2,\ldots,n$.

Si llamamos $\mathcal{S}_X$ a la familia de subconjuntos A de X tales que $A=B\cap X$ para algún B de $\mathcal{S}$; es fácil comprobar que $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ es un semianillo con unidad $\mathfrak{X}$.

Podemos establecer, además, como hicimos para el espacio Σ , que la σ-álgebra generada por $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ coincide con $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ (σ-álgebra de los borelianos).

Llamaremos $\mathfrak{D}(\mathfrak{X})$ al conjunto de medidas no negativas σ-aditivas definidas sobre $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ y tales que la medida de $\mathfrak{X}$ es 1 .

Como en el espacio Σ , dos elementos de $\mathfrak{D}(\mathfrak{X})$ coinciden si - coinciden en los conjuntos cerrados de $\mathfrak{X}$.

Describiremos ahora una topología para $\mathfrak{D}(\mathfrak{X})$ definiendo una base de vecindades para cualquier medida μ en $\mathfrak{D}(\mathfrak{X})$.

Si $\mathbb{C}(\mathfrak{X})$ es el espacio de funciones reales continuas con dominio en $\mathfrak{X}$, sean $F_1, F_2, \dots, F_k$ elementos de $\mathbb{C}(\mathfrak{X})$, un número positivo ε y consideremos el conjunto $V_\mu(F_1, \dots, F_k, \varepsilon) =$

$\{\nu : \nu \in \mathfrak{D}(\mathfrak{X}),\ |\int_{\mathfrak{X}} F_i\, d\nu - \int_{\mathfrak{X}} F_i\, d\mu| < \varepsilon$ para toda $i = 1, \dots k.\}$.

La familia de conjuntos que se obtienen al variar k, $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ y ε forman una base para una topología a la que se llama topología $*$-débil.

Los conjuntos $V_y(F, \varepsilon)$ con F en $\mathbb{C}(X)$ y ε positivo forman una subbase de la topología $*$-débil.

Es fácil probar que $\mathbb{C}(X)$ es un espacio de Banach con un subconjunto D denso numerable (los polinomios en m variables con coeficientes racionales). Además $D(X)$ es primero contable, como haremos ver enseguida para cada $\mathring{y}$ en $D(X)$ consideremos $\{V_{\mathring{y}}(F_1, \ldots, F_m; \varepsilon)$ donde F_i ESTÁ EN D Y ε ES RACIONAL$\} = \mathcal{V}(\mathring{y})$, Es claro que $V_{\mathring{\mu}}(F_1,\dots F_m;\varepsilon) = V_{\mathring{\mu}}(F_1,\varepsilon)\cap V_{\mathring{\mu}}(F_2,\varepsilon)\cap\cdots\cap V_{\mathring{\mu}}(F_m,\varepsilon)$

y que $\mathcal{U}(\mathring{\mu})$ es numerable

Sea $G(\mathring{\mu})$ un abierto con $\mathring{\mu}$ en $G(\mathring{\mu})$ y $V_{\mathring{\mu}}(g_1,\dots,g_m,\varepsilon)$ contenido en G un básico arbitrario.

Consideremos $V_{\mathring{\mu}}(g_1,\varepsilon)$ y sea ε' un número racional menor que ε; existe F_1 tal que $\|F_1-g_1\|<\frac{\varepsilon'}{3}$ si μ está en $V_{\mathring{\mu}}(F_1,\frac{\varepsilon'}{3})$ entonces $\left|\int_X F_1\,d\mu-\int_X F_1\,d\mathring{\mu}\right|<\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ y

$$\left|\int_X g_1\,d\mu-\int_X g_1\,d\mathring{\mu}\right| = \left|\int_X g_1\,d\mu-\int_X F_1\,d\mu+\int_X F_1\,d\mu+\int_X F_1\,d\mathring{\mu}-\int_X F_1\,d\mathring{\mu}-\int_X g_1\,d\mathring{\mu}\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_X g_1\,d\mu-\int F_1\,d\mu\right|+\left|\int_X F_1\,d\mu-\int_X F_1\,d\mathring{\mu}\right|+\left|\int_X F_1\,d\mathring{\mu}-\int_X g_1\,d\mathring{\mu}\right| \leq$$

$$\leq \int\|g_1-F_1\|\,d\mu+\frac{\varepsilon'}{3}+\int\|F_1-g_1\|\,d\mathring{\mu} =$$

$$= 2\|g_1-F_1\|+\frac{\varepsilon'}{3}<\varepsilon'<\varepsilon.$$

Por lo que $V_{\mathcal{Y}}^{\circ}(F_1;\frac{\varepsilon'}{3}) \subset V_{\mathcal{Y}}^{\circ}(g_1;\varepsilon)$

y $V_{\mathcal{Y}}^{\circ}(F_1,\dots,F_m;\frac{\varepsilon'}{3}) \subset V_{\mathcal{Y}}^{\circ}(g_1,\dots,g_m;\varepsilon)$

$V_{\mathcal{Y}}^{\circ}(F_1,\dots,F_m;\frac{\varepsilon'}{3})$ ESTÁ EN $\mathcal{V}(\mathcal{Y}^{\circ})$ es decir -

$D(\mathfrak{X})$ es primero contable .

Es claro que en esta topología una sucesión $\{\mathcal{Y}_k\} \subset D(\mathfrak{X})$ converge a $\mathcal{Y}$ si y sólo si $\int_{\mathfrak{X}} F \, d\mathcal{Y}_k$ converge a $\int_{\mathfrak{X}} F \, d\mathcal{Y}$ para toda F en $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$.

Con la topología $*$-débil los espacios $\mathcal{M}_i$ $= D(\Sigma_i)$ de estrategias - mixtas resultan métricos y compactos, esta afirmación análoga a la proposición 2. 2. 4 se desprende del siguiente Teorema

Teorema 3. 2. 4. (Varadarajan)

Si X es un subespacio compacto de $\mathbb{R}^n$ entonces $D(X)$ es un espacio métrico y compacto .

Demostración

Como dijimos anteriormente existe D contenido en $C(X)$ denso y numerable . Consideremos, entonces, $g_1, g_2, \dots$ elementos de $C(X)$ tales que $g_1 \equiv 1$, $\|g_n\| \leq 1$ para toda $n = 1, 2, \dots$ y $\{g_n\}$ denso en $\overline{S_0}$ la esfera unitaria de $C(X)$ alrededor de 0 .

Sea T una función de $D(X)$ en $\mathbb{R}^{\infty}$ definida cómo $T(\mu) = \{\int_X g_1 d\mu, \int_X g_2 d\mu, \dots\}$ es claro que $T(\mu)$ está en $\prod_1^{\infty} [-1, 1]$, (al conjunto $\prod_1^{\infty} [-1, 1]$ lo denotaremos cómo I^{∞}) .

Lo primero que demostraremos es que T es un homeomorfismo

Supongamos μ y ν en $\mathcal{D}(X)$ tales que $T(\mu) = T(\nu)$,

entonces para toda $r = 1, 2, \ldots$ $\int_X g_r \, d\mu = \int_X g_r \, d\nu$

como $\{g_n\}$ es denso en $\overline{S_0}$, para cualquier g de $\overline{S_0}$ y para ε

positivo existe g_r en $\{g_n\}$ tal que $\| g_r - g \| < \frac{\varepsilon}{2}$

Entonces

$$\left| \int_X g \, d\mu - \int_X g \, d\nu \right| = \int_X g \, d\mu - \int_X g_r \, d\mu + \int_X g_r \, d\nu - \int_X g \, d\nu \, \Big| \leq$$

$$\leq \left| \int_X g \, d\mu - \int_X g_r \, d\mu \right| + \left| \int_X g \, d\nu - \int_X g_r \, d\nu \right| < \varepsilon$$

POR LO QUE $\int_X g \, d\mu = \int_X g \, d\nu$.

Sea C un conjunto cerrado de X y sea

$$G_n = \left\{ x \mid d(x, C) < \frac{1}{n} \right\}$$

Para toda n, G_n es abierto, además C está contenido en G_n y G_{n+1} está contenido en G_n por lo que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = C$

Para cada n, G'_n y C son conjuntos cerrados ajenos por lo que existe una F_n en $\bar{S}_0$ que vale 1 en C y 0 en G'_n y

$$\mu(C) = \int_C F_n \, d\mu \leq \int_X F_n \, d\mu = \int_X F_n \, d\nu = \int_{G_n} F_n \, d\nu \leq \int_{G_n} d\nu = \nu(G_n)$$

Como podíamos haber empezado por $\nu(C)$, también se cumple $\nu(C) \leq \mu(G_n)$. Por lo que para todo cerrado C

$\mu(C) = \nu(C)$.

Concluimos que $\mu = \nu$ y T es inyectiva.

Supongamos ahora una sucesión $\{\mu_k\}$ que converge a μ, entonces $\int_X g_r \, d\mu_k$ converge a $\int_X g_r \, d\mu$ para toda

$r=1,\ldots$ y $T(\mu_k)$ converge a $T(\mu)$ es decir T es con-

tinua pues $D(X)$ es primero contable .

Sea $\{\mu_k\}$ una sucesión en $D(X)$ tal que $T(\mu_k)$ conver-

ge a $T(\mu)$ es decir $\int_X g_r d\mu_k$ converge a $\int_X g_r \, d\mu$

para $r=1,2,\ldots$ entonces para g en $\tilde{S_0}$.

$$\left|\int_X g \, d\mu_k - \int_X g \, d\mu\right| = \left| \int_X g \, d\mu_k - \int_X g_r \, d\mu_k + \int_X g_r \, d\mu_k - \int_X g_r \, d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_X g_r \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right| \leq \left|\int_X (g-g_r) \, d\mu_k\right| + \left|\int_X (g-g_r) \, d\mu\right| +$$

$$+ \left| \int_X g_r \, d\mu_k - \int_X g_r \, d\mu \right| \leq 2\|g-g_r\| + \left|\int_X g_r \, d\mu_k - \int_X g_r \, d\mu\right| \ldots (1)$$

$$\lim_{\alpha} \left|\int_X g \, d\mu_k - \int_X g \, d\mu\right| \leq 2\|g-g_r\|$$

Para cada g en $\overline{S_0}$ existe $\{g_{n_k}\}$ tal que $\{g_{n_k}\}$ converge

a g, entonces $\lim_k \left| \int_X g\, d\mu_k - \int_X g\, d\mu \right| = 0$.

Si $g \neq 0$ ESTÁ EN $C(X)$, $h = \frac{g}{\|g\|}$ está en $\overline{S_0}$

y $\lim_k \left| \int_X g\, d\mu_k - \int_X g\, d\mu \right| = \lim_\alpha \left| \int_X \|g\| h\, d\mu_k - \int_X \|g\| h\, d\mu \right| =$

$= \|g\| \lim_k \left| \int_X h\, d\mu_k - \int_X h\, d\mu \right| = 0.$

Hemos demostrado que $\int_X g\, d\mu_k$ CONVERGE A $\int_X g\, d\mu$ y

por lo tanto $\{\mu_k\}$ converge a μ ó lo que es lo mismo T^{-1} es

continua pues I^∞ es primero contable .

Es decir T es un homeomorfismo .

I^∞ es un espacio métrico y compacto . Y T es un homeomorfismo de $\mathcal{D}(X)$ en I^∞, falta probar que la imagen de $\mathcal{D}(X)$ bajo T es cerrado para que quede demostrado que $\mathcal{D}(X)$ es métrico y compacto .

Supongamos una sucesión $\{\mu_k\}$ de medidas tal que $T(\mu_k) \to (a_1, a_2, \dots)$

y sea g en $\overline{S_0}$, existe $\{g_{n_s}\}$ tal que $\| g_{n_s} - g \|$ converge a cero.

La desigualdad $\left| \int_X g \, d\mu_n - \int_X g \, d\mu_m \right| \leq$

$$\leq 2\| g - g_{n_s} \| + \left| \int_X g_{n_s} \, d\mu_n - \int_X g_{n_s} \, d\mu_m \right| \dots (2)$$

se demuestra de manera análoga a la desigualdad (1).

De (2) concluímos que el $\lim \int_X g \, d\mu_n$ existe.

Construyamos una función L de $C(X)$ en $\mathbb{R}$ de la manera siguiente. Si g ESTÁ EN $\overline{S_0}$, $L(g) = \lim_{n \to \infty} \int_X g \, d\mu_n$;

Si g es una función arbitraria de $C(X)$ distinta de cero,

$L(g) = \|g\| L \dfrac{(g)}{\|g\|}$.

Es fácil ver que la función L es lineal $L(1) = 1$ y $L(F) \geq 0$ si $F \geq 0$

y del Teorema de Reisz se desprende que, existe una medida única

$\hat{\eta}$ en $\mathcal{D}(X)$ tal que $L(F)=\int_X F\,d\hat{\eta}$ para toda F en $C(X)$ en particular $L(g_r)=\int_X g_r\,d\hat{\eta}$.

pero $L(g_r)=\lim_{n\to\infty}\int_X g_r\,d\eta_n = a_r$

entonces $T(\hat{\eta})=\left(\int_X g_1 d\hat{\eta}, \int_X g_2 d\hat{\eta}, \dots\right)=(a_1, a_2, \dots)$

y $T(\mathcal{D}(X))$ es cerrado y por lo tanto compacto. El Teorema está completamente probado.

Ahora bien cada conjunto Σ_i es un subespacio compacto de R y $\mathcal{M}_i$ es el espacio $\mathcal{D}(\Sigma_i)$ y por lo tanto $\mathcal{M}_i$ es métrico y compacto.

Corolario 3.2.5

$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\times\cdots\times\mathcal{M}_n$ es compacto, métrico y convexo.

En cuanto a la función E establecemos su continuidad como una proposición que se desprende de un teorema más general.

Proposición 3. 2. 6

Si $M : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces la función

$E(m) = \int_{\Sigma} M(\sigma)\, d\, m$ es continua en $\mathcal{M}$

y lineal en cada factor de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_n$.

3. 2. 6. , es corolario del Teorema

Teorema 1

Si $K_1, K_2, \ldots, K_m$ son funciones reales continuas definidas

en $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \cdots \times \mathbb{X}_m$ donde $\mathbb{X}_i$, para $i = 1, \ldots, m$,

es un subespacio compacto de $\mathbb{R}^{m_i}$, entonces las funciones - -

$\overline{K}_i : D(\mathbb{X}_1) \times D(\mathbb{X}_2) \times \cdots \times D(\mathbb{X}_m) \to \mathbb{R}$ definidas -

como $\overline{K}_i(\mu_1, \ldots, \mu_m) = \int_{\mathbb{X}} K_i \, d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m)$ son continuas .

Demostración: Para $n = 2$,

Como K_i es continua en $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$, induce una funcional $\Theta_{K_i} : D(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2) \to \mathbb{R}$ definida como

$\Theta_{K_i}(m) = \int_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2} K_i \, dm$ con m en $D(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)$. Θ_{K_i} es continua en la topología $*$-débil.

Si $J : D(\mathbb{X}_1) \times D(\mathbb{X}_2) \to D(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)$ es tal que $J(\mu, \nu) = \mu \otimes \nu$

entonces $\overline{K}_i = \Theta_{K_i} \circ J$.

Entonces basta demostrar que $\mathfrak{J}$ es continua para que $\bar{\pi}_i$ lo sea.

Teorema 2

La función $\mathfrak{J}: \mathcal{D}(\mathfrak{X}_1) \times \cdots \times \mathcal{D}(\mathfrak{X}_m) \to \mathcal{D}(\mathfrak{X}_1 \times \cdots \times \mathfrak{X}_m)$ definida como $\mathfrak{J}(\mu_1, \ldots, \mu_m) = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m$ es continua.

Demostración:

Haremos la demostración para $m=2$ para simplificar la notación.

Sean μ en $\mathcal{D}(\mathfrak{X}_1)$ y ν en $\mathcal{D}(\mathfrak{X}_2)$ y sean F en $\mathbb{C}(\mathfrak{X}_1)$ y g en $\mathbb{C}(\mathfrak{X}_2)$.

Denotemos como

$$A = 1 + \left|\int_{\mathfrak{X}_1} F\,d\mu\right| \text{ con } \mu \text{ en } \mathcal{D}(\mathfrak{X}_1)$$

y como M a la cota superior de $\left|\int_{\mathfrak{X}_2} g\,d\nu\right|$ y para cada $\varepsilon > 0$ consideremos los conjuntos

$$V_\mu\left(F, \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \left\{\mu' \text{ en } \mathcal{D}(\mathfrak{X}_1) \,\middle|\, \left|\int_{\mathfrak{X}_1} F\,d\mu' - \int_{\mathfrak{X}_1} F\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$$

$$V_\nu\left(g, \frac{\varepsilon}{2A}\right) = \left\{\nu' \text{ en } \mathcal{D}(\mathfrak{X}_2) \,\middle|\, \left|\int_{\mathfrak{X}_2} g\,d\nu' - \int_{\mathfrak{X}_2} g\,d\nu\right| < \frac{\varepsilon}{2A}\right\}$$

Lema 2. 1

Si μ' está en $V_\mu(F, \frac{\varepsilon}{2M})$ y ν' EN $V_\nu(g, \frac{\varepsilon}{2A})$,

entonces $\mu' \otimes \nu'$ ESTÁ EN $V_{(\mu\otimes\nu)}(\overline{F}, \varepsilon)$, donde $\overline{F}$ es una función con dominio $X_1 \times X_2$, definida cómo $\overline{F}(x_1, x_2) = F(x_1)\, g(x_2)$.

Demostración:

Las siguientes desigualdades se cumplen

$$M \left| \int_{X_1} F\, d(\mu' - \mu) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

$$A \left| \int_{X_2} g\, d(\nu' - \nu) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

DE (1) TENEMOS

$$\left| \int_{X_2} g\, d\nu' \right| \left| \int_{X_1} F\, d\mu' - \int_{X_1} F\, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De (2) $\left| \int_{X_1} F\, d\mu' \right| \left| \int_{X_2} g\, d\nu' - \int_{X_2} g\, d\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces es válido que

$$\left| \left(\int_{X_2} g\, d\nu'\right)\left(\int_{X_1} F\, d\mu' - \int_{X_1} F\, d\mu\right) \right| + \left| \left(\int_{X_1} F\, d\mu\right)\left(\int_{X_2} g\, d\nu' - \int_{X_2} g\, d\nu\right) \right| < \varepsilon \quad \text{Y}$$

$$\left| \int_{X_2} g\, d\nu' \int_{X_1} F\, d\mu' - \int_{X_2} g\, d\nu' \int_{X_1} F\, d\mu + \int_{X_1} F\, d\mu \int_{X_2} g\, d\nu' - \int_{X_1} F\, d\mu \int_{X_2} g\, d\nu \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_{X_2} g\, d\nu' \int_{X_1} F\, d\mu' - \int_{X_1} F\, d\mu \int_{X_2} g\, d\nu \right| < \varepsilon \quad \text{Y por último}$$

$$\left| \int_{X_1} \int_{X_2} F g\, d\nu'\, d\mu' - \int_{X_1} \int_{X_2} F g\, d\nu\, d\mu \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_{X_1 \times X_2} F g\, d(\mu' \otimes \nu') - \int_{X_1 \times X_2} F g\, d(\mu \otimes \nu) \right| < \varepsilon$$

Es decir $\gamma' \otimes \nu'$ está en $V_{\gamma\otimes\nu}(F, \varepsilon)$.

Lema 2. 2

Sean $F_1, \dots, F_n$ de $C(\mathfrak{X}_1)$, $g_1, \dots, g_n$ de $C(\mathfrak{X}_2)$

y $\bar{F} = F_1 g_1 + F_2 g_2 + \cdots + F_n g_n$. Llamemos M

al $\max_i \{ M_i = \sup_{\nu \in D(\mathfrak{X}_2)} | \int_{\mathfrak{X}_2} g_i \, d\nu | \text{ con } \nu \text{ en } D(\mathfrak{X}_2) \}$ y A

al $\max_i \{ A_i = 1 + | \int_{\mathfrak{X}_1} F_i \, d\gamma | \ \gamma \text{ en } D(\mathfrak{X}_1) \}$.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ sean γ' en $V_\gamma(F_1, F_2, \dots, F_n, \frac{\varepsilon}{2M_n})$

y ν' en $V_\nu(g_1, g_2, \dots, g_n, \frac{\varepsilon}{2A_n})$

entonces $\gamma' \otimes \nu'$ está en $V_{\gamma\otimes\nu}(\bar{F}, \varepsilon)$.

Demostración Si γ' está en $V_\gamma(F_1, F_2, \dots, F_n, \frac{\varepsilon}{2M_n})$ entonces γ' está en $V_\gamma(F_1, \frac{\varepsilon}{2M_n}) \cap V_\gamma(F_2, \frac{\varepsilon}{2M_n}) \cap \cdots \cap V_\gamma(F_n, \frac{\varepsilon}{2M_n})$ y si ν está en $V_\nu(g_1, \dots, g_n, \frac{\varepsilon}{2A_n})$ entonces ν' está en $V_\nu(g_1, \frac{\varepsilon}{2A_n}) \cap \cdots \cap V_\nu(g_n, \frac{\varepsilon}{2A_n})$.

Entonces, por el primer lema para toda $i = 1, 2, \ldots, m$

$\mu' \otimes \nu'$ está en $V_{\mu \otimes \nu}\left(F_i g_i, \frac{\varepsilon}{m}\right)$

Es decir $\left| \int_{X_1 \times X_2} F_i g_i \, d(\mu' \otimes \nu') - \int_{X_1 \times X_2} F_i g_i \, d(\mu \otimes \nu) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

lo que implica que $\left| \int_{X_1 \times X_2} \bar{F} \, d(\mu' \otimes \nu') - \int_{X_1 \times X_2} \bar{F} \, d(\mu \otimes \nu) \right| < \varepsilon$

es decir $\mu' \otimes \nu'$ ESTÁ EN $V_{\mu \otimes \nu}(\bar{F}, \varepsilon)$

Para pasar a la demostración del Teorema 2 observemos que

$$\mathcal{A} = \{ \bar{F} \text{ en } \mathbb{C}(X_1 \times X_2) \mid \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \cdots + \bar{F}_m \text{ con } \bar{F}_i = F_i \cdot g_i \}$$

es un álgebra que separa puntos y que no se anula en ningún punto y por el Teorema de Stone Weierstrass la cerradura de $\mathcal{A}$ es igual a $\mathbb{C}(X_1 \times X_2)$.

Consideremos entonces una función F en $\mathbb{C}(X_1 \times X_2)$ y un número positivo ε y sea $\bar{F}'$ en $\mathcal{A}$ tal que

$$\bar{F}'(x_1, x_2) - \frac{\varepsilon}{3} < F(x_1, x_2) < \bar{F}'(x_1, x_2) + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

para todo (x_1, x_2) en $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$.

Si $\bar{F}' = F_1 g_1 + F_2 g_2 + \cdots + F_n g_n$, sean μ' en $V_\mu(F_1, \frac{\varepsilon}{6Mn}) \cap V_\mu(F_2, \frac{\varepsilon}{6Mn}) \cap \cdots \cap V_\mu(F_n, \frac{\varepsilon}{6Mn})$

y ν' en $V_\nu(g_1, \frac{\varepsilon}{6An}) \cap V_\nu(g_2, \frac{\varepsilon}{6An}) \cap \cdots \cap V_\nu(g_n, \frac{\varepsilon}{6An})$.

Por el lema 2

$\mu' \otimes \nu'$ está en $V_{\mu \otimes \nu}(\bar{F}', \frac{\varepsilon}{3})$, por lo que

$$\int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu \otimes \nu) - \frac{\varepsilon}{3} < \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu' \otimes \nu') < \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu \otimes \nu) + \frac{\varepsilon}{3}$$

De esta desigualdad y la 1 tenemos

$$\int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} F \, d(\mu \otimes \nu) - \varepsilon < \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu \otimes \nu) - \frac{2\varepsilon}{3} < \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu' \otimes \nu') - \frac{\varepsilon}{3} <$$

$$\int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} F \, d(\mu' \otimes \nu') < \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu' \otimes \nu') + \frac{\varepsilon}{3} < \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} \bar{F}' \, d(\mu \otimes \nu) + \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$< \int_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} F \, d(\mu \otimes \nu) + \varepsilon.$$ Por lo que $\mu' \otimes \nu' \in V_{(\mu \otimes \nu)}(F, \varepsilon)$

y el teorema 2 queda demostrado y con esto también el 1

Podemos ahora como en el capítulo 2 decir que el real X es asegurable en estrategias mixtas para el jugador i si existe $\hat{m}_i$ en $\mathfrak{M}_i$ tal que para toda m en $\mathfrak{M}$ $E_i(m \backslash \hat{m}_i) \geq X$

$\underline{M_i}$ que definimos como $\min_{\sigma} M_i(\sigma)$ es claramente asegurable en estrategias mixtas para el jugador i en tanto que $\overline{M}_i = \max_{\sigma} M_i(\sigma)$ es cota superior para todas las cantidades asegurables en estrategias mixtas.

Por el axioma de Dedekind, en todo juego Γ existe el -- sup de $\{x \in R \backslash x$ asegurable en estrategias mixtas para el jugador $i\}$ al que denotamos como v_i .

Ahora tenemos que probar que el número

$$w_i = \max_{\hat{m}_i \in \mathfrak{M}_i} \min_{m \in \mathfrak{M}} E_i(m|\hat{m}_i) \text{ existe .}$$

Sabemos que $E(m)$ es continua y también es continua la función con dominio $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_i$ $(m, m_i) \to (m|m_i)$ de aquí que la función $E_i(m|\hat{m}_i)$ es continua en $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_i$

y, por tanto para cada $\hat{m}_i$ el número $\min\limits_{m} E_i(m|\hat{m}_i)$

existe ya que $\mathfrak{M}$ es un compacto .

Además la función $G_i(\hat{m}_i) = \min\limits_{m} E_i(m|\hat{m}_i)$

es continua en $\mathfrak{M}_i$, como se demostró en el lema del Teorema 2.2.7.

y por tanto w_i existe .

<u>Teorema 2. 2. 7</u>

$$v_i = \max_{\hat{m}_i \in \mathfrak{M}_i} \min_{m \in \mathfrak{M}} E_i(m|\hat{m}_i).$$

<u>El número v_i es asegurable en estrategias mixtas.</u>

La demostración de que $w_i = v_i$ se hace como en 2.2.1

La función $G_i(\hat{m}_i) = \min\limits_{m} E_i(m,\hat{m}_i)$

es continua en $\mathfrak{M}_i$ compacto, entonces existe $\bar{m}_i$ en $\mathfrak{M}_i$

tal que $v_i = \max\limits_{\hat{m}_i} \min\limits_{m} E_i(m|\hat{m}_i) = \min\limits_{m} E(m|\bar{m}_i)$

es decir existe $\bar{m}_i$ en $\mathfrak{M}_i$ tal que para todo m en $\mathfrak{M}$

$E_i(m|\bar{m}_i) \geq v_i$ y v_i es asegurable.

Proposición 7. 2.8

$$v_i = \max_{\hat{m}_i \in \mathfrak{M}_i} \min_{\sigma \in \Sigma} E_i(\sigma|\hat{m}_i)$$

Demostración:

Si $\hat{m}_i$ está en $\mathfrak{M}_i$ y σ en Σ, tenemos que

$$E_i(\sigma|\hat{m}_i) = \int_{\Sigma} M_i(\hat{\sigma})\, dm_{\sigma_1} \cdots d\hat{m}_i \cdots dm_{\sigma_n} =$$

$$= \int_{\Sigma_i} M_i(\sigma|\hat{\sigma}_i)\, d\hat{m}_i \quad (1)$$

Si por otro lado calculamos $E_i(m|\hat{m}_i)$,

obtenemos

$$E_i(m|\hat{m}_i) = \int_{\Sigma} M_i(\sigma)\, dm_1 \cdots d\hat{m}_i \cdots dm_n =$$

$$= \int_{\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i} dm_i \int_{\sigma \in \Sigma} M_i(\sigma)\, dm_1 \cdots d\hat{m}_i \cdots dm_n =$$

$$= \int_{(\sigma, \hat{\sigma}_i) \in \Sigma \times \Sigma_i} M_i(\sigma)\, dm\, d\hat{m}_i = \int_{(\sigma, \hat{\sigma}_i) \in \Sigma \times \Sigma_i} M_i(\sigma | \hat{\sigma}_i)\, dm\, d\hat{m}_i =$$

$$= \int_{\sigma \in \Sigma} \left(\int_{\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i} M_i(\sigma | \hat{\sigma}_i)\, d\hat{m}_i \right) dm =$$

$$= \int_{\sigma \in \Sigma} E_i(\sigma | \hat{m}_i)\, dm \geq \int_{\sigma \in \Sigma} (\min_\sigma E_i(\sigma | \hat{m}_i)\, dm =$$

$$= \min_\sigma E_i(\sigma | \hat{m}_i) \quad ②$$

La existencia del $\min_{\sigma} E_i(\sigma|\hat{m}_i)$

se desprende de la continuidad (fácil de establecer) del encaje

$$\sigma \longleftrightarrow (m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, \dots, m_{\sigma_n}).$$

En conclusión obtenemos que

$$\min_{\sigma} E_i(\sigma|\hat{m}_i) \leq \min_{m} E_i(m|\hat{m}_i).$$

Pero, por otro lado, se cumple

$$\min_{m} E_i(m|\hat{m}_i) \leq \min_{\sigma} E_i(\sigma|\hat{m}_i).$$

y la igualdad por lo tanto se da

$$\max_{\hat{m}_i} \min_{m} E_i(m|\hat{m}_i) = \max_{\hat{m}_i} \min_{\sigma} E_i(\sigma|\hat{m}_i)$$

y 3.2.8 está probada .

<u>Proposición 3. 2. 9</u>

<u>$v_i' \leq v_i$</u>

Demostración:

Es clara la desigualdad

$$\max_{\hat{m}_i} \min_{\sigma} E_i(\sigma \backslash \hat{m}_i) \geq \max_{\hat{\sigma}_i} \min_{\sigma} E_i(\sigma \backslash \hat{\sigma}_i)$$

De ella y de 3. 2. 8, se desprende que $v_i \geq v_i'$,como queríamos probar .

§ 3 - PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA JUEGOS INFINITOS .

Teniendo los espacios de estrategias mixtas para juegos infinitos y la función $E : \mathfrak{M} \rightarrow R^n$,la definición 2.3.1,sigue siendo válida para juegos infinitos. La escribimos para tenerla presente.

Definición 3.3.1

Una n-ada $m^* = (m_1^*, m_2^*, \ldots, m_n^*)$ de $\mathfrak{M}$ es un punto de equilibrio para el juego infinito n-personal Γ, si para toda $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $E_i(m^* \backslash \hat{m}_i) \leq E_i(m^*)$ para toda m_i en $\mathfrak{M}_i$.

Es claro que podemos definir como en § 3 de 2 punto de equili-- brio en estrategias puras y que un punto de equilibrio en estrategias puras es punto de equilibrio.

Igualmente es válido que:

Proposición 3. 7. 3

$E_i(m^*) \geq v_i$ para toda $i=1,\dots,n$.

Donde m^* es un punto de equilibrio .

Pasemos ahora a la existencia de puntos de equilibrio en jue- gos infinitos.

Como hemos dicho en varias ocasiones el Teorema que estableceremos exige la continuidad de la función M .

Teorema 3. 7. 4

Todo juego infinito n-personal con función de "pago medio" continua tiene punto de equilibrio.

Para demostrarlo, estableceremos el

Teorema 3. 3. 5

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ subespacios compactos de R^{n_i} y las funciones $K_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to R$ continuas, entonces existe m^* en $D(X_1) \times D(X_2) \ldots \times D(X$ tal que

$$\int_{X_1 \times \cdots \times X_n} K_i(x_1, \ldots, x_n)\, d\, m^* \geq \int_{X_1 \times \cdots \times X_n} K_i(x_1, \ldots x_n)\, d$$

para toda $i = 1, \ldots, n$.

La demostración es casi idéntica a la de 2.3.5.

Denotemos como D a $D(X_1) \times \cdots \times D(X_n)$, y X a $X_1 \times \cdots$

Para cada pareja m y $\bar{m}$ de elementos de D se construye

$$\Delta(m, \bar{m}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{X} K_i(x)\, d(\bar{m} \mid m_i).$$

La demostración se reduce a probar que existe m^* en D tal

que $\Delta(m^*, m^*) = \max_m \Delta(m, m^*)$.

m^* será el punto de equilibrio buscado.

Supongamos que m^* no existe, entonces para cada $\bar{m}$ se puede

encontrar una m tal que $\Delta(m, \bar{m}) > \Delta(\bar{m}, \bar{m})$.

Y por la compacidad de D existen $m^1, m^2, \ldots, m^k$

tales que los conjuntos $G_{m^i} = \{\bar{m} \mid \Delta(m^i, \bar{m}) > \Delta(\bar{m}, \bar{m})\}$

forman una cubierta finita de D.

Definimos en D la función ψ de la manera siguiente, para $\bar{m}$

en D.

$$\psi(\bar{m}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \max(\Delta(m^j, \bar{m}) - \Delta(\bar{m}, \bar{m}), 0)} \sum_{j=1}^{k} \max(\Delta(m^j, \bar{m}) - \Delta(\bar{m}, \bar{m}), 0)\, m^j .$$

Es claro que $\sum_{j=1}^{k} \max(\Delta(m^j, \bar{m}) - \Delta(\bar{m}, \bar{m}), 0)$

es distinto de cero, y que $\psi(\bar{m})$ está de nuevo en D puesto que

D es convexo. Además ψ es continua porque $\Delta(m^j, m)$

es continua en D.

En resumen hemos construído una función $\Psi : D \to D$

continua, donde D es un subespacio compacto, y convexo

de $\mathbb{C}^*(\Sigma_1) \times \mathbb{C}^*(\Sigma_2) \ldots \times \mathbb{C}^*(\Sigma_n)$ que es un espacio real localmente convexo y aplicando el Teorema de Shauder, concluímos que existe un punto fijo de Ψ, lo que siguiendo los mismos razonamientos que en 2.3.5 y tomando en cuenta que Δ es lineal en cada argumento, nos conduce a una contradicción. Y por lo tanto existe m^* tal que

$$\max_m \Delta(m, m^*) = \Delta(m^*, m^*).$$

El Teorema 3.3.4 se desprende de 3.3.5 pues $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ son subespacios compactos de F, y las funciones $M_i : \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n \to R$ son continuas entonces existe m^* en $O(\Sigma_n) = \Omega$

tal que

$$E_i(m^*) = \int_\Sigma M_i(\sigma)\, dm^* \geq \int_\Sigma M_i(\sigma)\, d(m^*|m_i) = E_i(m^*|m_i)$$

es decir existe un punto de equilibrio.

Relacionando esto con los resultados del parágrafo 1 tenemos:

Teorema 3. 7. 6

Todo juego Γ extensivo n-personal y con funciones $\Pi_i : T \to R$ que cumplen las condiciones del Teorema 3.1.1.2 tienen al menos un punto de equilibrio.

Algunos ejemplos

a) Ejemplos de juegos Γ en los cuáles $\Pi : T \to R^n$ es una función continua .

Gale y Stewart han demostrado que si Γ es un juego bipersonal infinito de información perfecta y sin azar en el cual $\Pi : T \to R^2$ es tal que $\Pi_1(\alpha) + \Pi_2(\alpha) = 0$ para cada α en T y, además, Π es continua, entonces existe un par $\sigma = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ de estrategias puras que es un punto de equilibrio del juego .

De los Teoremas que hemos establecido anteriormente, se desprende que si el juego considerado es tal que en cada vértice -- A, $\Gamma^{-1}(A)$ es finito. Entonces puede eliminarse la exigencia de que Γ sea bipersonal y considerar un juego n-personal, pueden eliminarse también las exigencias de que Γ sea de información perfecta, de que no intervenga el azar y de que Γ es de -- suma cero y, si mantenemos solamente la hipótesis de que -- $\pi : T \to R^n$ es continua, entonces podemos asegurar la existencia de una n-ada $m^* = (m_1^*, \dots, m_n^*)$ de estrategias mixtas que resulta ser un punto de equilibrio de Γ.

Otro ejemplo que podría resultar interesante es el siguiente: Sea Γ un árbol infinito (con $\Gamma^{-1}(X)$) finito para cada vértice y definamos la generación G_0 por medio de $G_0 = \{u\}$.

Si la k-ésima generación $G_k \subset V$ está definida, definamos $G_{k+1} = \Gamma^{-1}(G_k)$.

En estas condiciones, los conjuntos $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots$ forman una partición del conjunto V .

Supongamos ahora que tenemos definidos en el árbol Γ todos los elementos a fin de que Γ sea un juego n-personal con excepción hecha de la función de pago $\pi : T \to R^n$.

Para definir esta función de pago π, supongamos definida una función $\rho : V \to R^n$ y supongamos que existe una serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ de términos no negativos tal que, si x está en G_k , entonces $|\rho(x)| \leq M_k$.

Entonces, si α es una partida con

$\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots\}$, obviamente tendremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \rho(A_k)$

es absolutamente convergente y podemos definir $\pi : \mathcal{T} \to R^n$

por medio de $\pi(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho(A_k)$.

Ahora bien, si α^* en $\mathcal{T}$ y $\varepsilon > 0$, existe N

tal que $\sum_{k=N}^{\infty} M_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Supongamos ahora α en $\langle A^*_N \rangle$

(en donde $\alpha^* = \{A^*_0, A^*_1, \ldots, A^*_N\}$ y $\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots\}$)

Entonces

$$|\pi(\alpha) - \pi(\alpha^*)| = \left| \sum_{k=N}^{\infty} \rho(A_k) - \sum_{k=N}^{\infty} \rho(A^*_k) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N}^{\infty} |\rho(A_k)| + \sum_{k=N}^{\infty} |\rho(A^*_k)| \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

Por tanto, en ese caso $\pi : \mathcal{T} \to R^k$ resulta

ser una función continua y nuestros Teoremas nos dicen que existe

una n-ada $m^* = (m^*_1, m^*_2, \ldots, m^*_n)$ de estrategias mixtas que

es un punto de equilibrio de Γ.

b) Juegos estocásticos

Un juego estocástico consta de :

1.- Un conjunto finito $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ a quien le llamaremos el conjunto de estados .

2.- Para cada $i=1,\ldots,m,$, una n-ada de conjuntos finitos $\{A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^n\}$. A cada A_i^j lo llamaremos el conjunto de alternativas del jugador j cuando se ha realizado el estado E_i .

Denotemos como A_i a $A_i^1 \times A_i^2 \times \cdots \times A_i^n$.

3- Para cada $a_i = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n)$ de A_i y para cada E_k se tiene un real $p(E_k|a_i)$ de tal modo que $p(E_k|a_i) \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{m} p(E_k|a_i) < 1$

Llamaremos a $p(E_k \backslash a_i)$ la probabilidad condicional de que se llegue al estado E_k bajo la suposición de que los jugadores eligieron el sistema a_i de A_i cuando se pasó por el estado E_i

4.- Por último, para cada $i=1,\ldots,m$, una función $\pi^i : A_i \rightarrow R^n$ llamada la función de pago correspondiente al i-ésimo estado.

Introduzcamos E_0 distinto de cada E_i y definamos, para cada a_i de A_i $p(E_0 \backslash a_i) = 1 - \sum_{k=1}^{m} p(E_k \backslash a_i)$ que es un real positivo.

Podemos, ahora, definir un juego extensivo Γ_{i_0} n-personal cuyas reglas describiremos en forma gruesa:

1.- El jugador j elige sin conocer las elecciones de sus oponentes (y sin que éstos conozcan su propia elección) un elemento - $a^j_{i_0}$ del conjunto $A^j_{i_0}$. De este modo, se determina un sistema $a_{i_0} = (a^1_{i_0}, \dots, a^n_{i_0})$ de A_{i_0} .

2.- Se paga al jugador j la cantidad $\pi_j^{i_0}(a_{i_0})$ y se pone en funcionamiento un mecanismo de azar tal que con probabilidad $p(E_0 \backslash a_{i_0})$ conduce al fin del juego, y con probabilidad $p(E_R \backslash a_{i_0})$ llega el juego al estado $E_R \; (R \neq 0)$.

3.- Si el juego llega a E_R , se repite el movimiento descrito en 1 solo que, en este caso, j elije un elemento de a^j_R del conjunto A^j_R para que se determine un sistema $a_R = (a^1_R, \dots, a^n_R)$ en A^R

4.- Ahora se paga al jugador j la cantidad $\pi^R(a_R)$ y nuevamente se pone en funcionamiento un mecanismo de azar que con probabilidad $p(E_0 \backslash a_R)$ conduce al final del juego y con probabilidad $p(E_1 \backslash a_R)$ al estado E_1.

Estos ciclos se repiten indefinidamente, los pagos se van acumulando hasta que el juego llegue a su fin.

Dejando a Γ_{i_0} así, sin establecer con mucha precisión, establecemos nuestro Teorema siguiente:

<u>Teorema 7. 3. 7</u>

<u>Para cada juego Γ_{i_0} existe al menos un punto de equilibrio en estrategias mixtas</u> .

Demostración:

Para cada $s = 0, 1, 2, 3, \cdots,$ sea T_s el conjunto de todas las partidas que terminan precisamente al finalizar el ciclo número s y sea T_∞ el conjunto de todas las partidas infinitas. Como siempre sea T el conjunto de todas las partidas y $\pi : T \to R^n$ la función de pago correspondientes a Γ_{i_0} .

Si $j = 1, \ldots, n,$ Denotemos cómo M_j al máximo de todos los números de la forma $|\pi_j^k(a_k)|$ y para cada real positivo y, sea $E_{j,y} = \{\alpha \in T \mid y \leq |\pi_j(\alpha)|\}$.

Supongamos ahora que α está en T_s con s menor que $\left[\frac{y}{M_j}\right]$ (en donde el símbolo $[x]$ quiere decir "la parte entera del real x"). Entonces, al fin de α, el jugador j habrá recibido exactamente s pagos no mayores que M_j y tendremos que

$$\pi_j(\alpha) \leq s M_j < M_j \left[\frac{y}{M_j}\right] \leq M_j \frac{y}{M_j} = y$$

Por tanto, si α está en $E_{j,y}$, entonces ó α es infinita ó está en algún T_s con s mayor o igual que $\left[\frac{y}{M_j}\right]$. Y por tanto

$$E_{j,y} \subset T_\infty \cup \bigcup_{s \geq \left[\frac{y}{M_j}\right]} T_s \overset{\text{def}}{=} L_{j,y} \quad (1).$$

Sea ahora $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ un sistema arbitrario de estrategias puras para el juego Γ_{i_0}. Trataremos de acotar $\mu_\sigma(E_{j,y})$.

Para esto, hagamos q el máximo de todos los números de la forma $P(E_0 \mid a_i)$ con i arbitrario y p el máximo de todos los números de la forma $\sum_{k=1}^{m} P(E_k \mid a_i)$ con i arbitrario.

Entonces $0 \leq p < 1$ y $0 < q \leq 1$

(aquí se está utilizando el hecho de que los estados forman un conjunto finito y el de que A_i es finito para cada $i = 1, 2, \ldots, m$

Ahora, fácilmente vemos que para $s = 1, 2, \ldots$

$$\mu_\sigma(T_s) \leq q p^{s-1},$$
$$\mu_\sigma(T_\infty) = 0$$
$$\mu_\sigma(T_0) = \mu_\sigma(\phi) = 0$$

Por otro lado, si π_j tiene a D_j como el conjunto de sus discontinuidades, entonces $D_j \subset T_\infty$ y, por tanto, $\mu_\sigma(D_j) = 0$ y se cumple la primera hipótesis de 7.1.12 .

Ahora bien, si $\Phi_{\mu_\sigma} : R^+ \to R$ es como en el Teorema citado y si $I(y) = \max\left(\left[\frac{y}{M_j}\right], 1\right)$,

obtenemos $\Phi_{\mu_\sigma}(y) = \mu_\sigma(E_j, y) \leq \mu_\sigma(T_\infty) +$

$$+ \sum_{s=\left[\frac{y}{M_j}\right]}^{\infty} \mu_\sigma(T_s) \leq \sum_{s=\left[\frac{y}{M_j}\right]}^{\infty} q\rho^{s-1} = q\left(\sum_{s=1}^{\infty} \rho^{s-1} - \sum_{s=1}^{I(y)-1} \rho^{s-1}\right) =$$

$$= q\left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{1-\rho^{I(y)-1}}{1-\rho}\right) = q\,\frac{\rho^{I(y)-1}}{1-\rho} = \frac{q}{1-\rho}\,\rho^{I(y)-1} \quad \ldots \text{②}$$

Hagamos $\Phi(y) = \frac{q}{1-\rho}\,\rho^{I(y)-1}$

y es fácil ver que

$$\int_0^\infty \Phi(y)\,dy = \frac{qM_j}{1-\rho}\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k\right) = qM_j\,\frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Por tanto, se cumple también la segunda hipótesis 3.1.12.

Entonces la función

$$M_j(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T \pi_j(\alpha)\,d\mu_\sigma$$

es continua y Γ_{i0} tiene al menos un punto de equilibrio en estrategias mixtas cómo queríamos demostrar.

§ 4-JUEGOS EXHAUSTIVOS. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO.

De nuevo como en el capítulo II parágrafo 4, podemos hablar de la máxima ganancia global M que es el $\sup_{m \in \mathfrak{M}} \sum_{i=1}^{n} E_i(m)$

Todas las definiciones y proposiciones que establecimos son válidas para el caso infinito, si consideramos juegos con función $M : \Sigma \to R^n$ continua .

Definición 3.4.1

Decimos que $\hat{m}_i$ es una estrategia conservadora para i si para toda m en $\mathfrak{M}$. $v_i \leq E_i(m|\hat{m}_i)$

Proposición 3. 4.2

$\sum_{i=1}^{n} v_i \leq M$.

Definición 3. 4. 3

Γ es exhaustivo si $\sum_{i=1}^{n} v_i = M$.

Proposición 3. 4. 4

Una n-ada de estrategias conservadoras es punto de equilibrio.

Proposición 3. 4. 5

En todo juego exhaustivo, si m^* es punto de equilibrio

$v_i = E_i(m^*)$.

Podemos hacer las mismas observaciones que para los juegos finitos exhaustivos y hablar del vector valor del juego $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y llamar solución para el jugador i a una estrategia m_i de $\mathcal{M}_i$ que sea conservadora.

Pasando a los juegos de suma cero .

Definición 3. 4.6

Un juego n-personal es de suma cero, si para cada σ en Σ.
se tiene que $\sum_{i=1}^{n} M_i(\sigma) = 0$.

Proposición 3. 4. 7

Un juego n-personal es de suma cero si y sólo si para cada m en $\mathfrak{M}$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} E_i(m) = 0$

En cuanto a los juegos bipersonales de suma cero, la generalización del Teorema de Von-Neumann para el caso infinito lo podemos enunciar del modo siguiente:

Teorema 3.4.8

Si Γ es un juego bipersonal de suma cero con función de pago M continua, entonces Γ es exhaustivo .

La demostración de este Teorema se desprende de 7.7.4, siguiendo los mismos pasos que para desprender el Teorema 2.4.7 de 2.7.4.

Como un ejemplo de juegos infinitos bipersonales de suma cero, consideremos ahora un tipo de juegos ampliamente estudiados por Milnor y Shapley: los juegos estocásticos bipersonales de suma cero, es decir, los juegos estocásticos bipersonales en los cuales, para cada estado E_i, la función de pago $\pi^i : A_i \rightarrow R^2$ es tal que $\pi_1^i(a_i) + \pi_2^i(a_i) = 0$ para todo a_i en A_i.

Si los estados que definen a un juego estocástico del tipo anterior son $E_1, E_2, \ldots, E_m$, Milnor y Shapley definen, para cada vector $(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m) = \omega$ en R^m y para cada $i = 1, \ldots, m$ el juego rectangular bipersonal de suma cero $\varphi_\omega^i : A_i^1 \times A_i^2 \rightarrow R^2$ dado por

$$\varphi_\omega^i(a_i) = \varphi_\omega^i(a_i^1, a_i^2) =$$

$$= \left(\pi_1^i(a_i) + \sum_{R=1}^{m} P(E_R \mid a_i)\,\omega^R,\ \pi_2^i(a_i) + \sum_{R=1}^{m} P(E_R \mid a_i)(-\omega_R)\right).$$

Si $\hat{\omega}^i$ es el valor del juego φ_ω^i para el jugador 1, se puede definir la función $T: R^m \longrightarrow R^m$ dada por ---

$$T(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m) = (\hat{\omega}^1, \hat{\omega}^2, \ldots, \hat{\omega}^m).$$

Entonces, Milnor y Shapley demuestran que esta función tiene un único punto fijo $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$ al cual llaman el vector valor del juego estocástico. A partir de esto, es fácil probar que cada solución $(\overset{*}{x}{}^i, \overset{*}{y}{}^i)$ para el juego rectangular finito de suma cero φ_v^i induce un tipo de estrategias llamadas estrategias de comportamiento para cada juego Γ_i y Milnor y Shapley llaman a esta estrategia una solución del juego estocástico.

Ahora bien, por lo anteriormente establecido por nosotros en relación a los juegos bipersonales infinitos de suma cero, en cada juego Γ_i de un juego estocástico bipersonal de suma cero puede definirse un vector bidimensional (v_1^i, v_2^i) cómo el valor del juego Γ_i y en virtud del Teorema de <u>Kuhn</u> 2.5.10 relativo a juegos que pueden descomponerse (y que obviamente puede extenderse a juegos infinitos) tendremos que Γ_{i_0} se descompone en cada vértice X no terminal después de efectuar los pasos 1 y 2 -- que definen a Γ_{i_0}(veáse página) y como en este vértice -- se inicia de nuevo algún juego de la forma Γ_R , podemos truncar Γ_{i_0} en X y situar en X el pago (v_1^R, v_2^R). De este modo el juego Γ_{i_0} se convierte en un juego finito bipersonal de suma-cero cuya <u>forma normal</u> $\varphi^{i_0} : A_{i_0}^1 \times A_{i_0}^2 \to R^2$

es el juego rectangular $\varphi^{io}(v_1^1, v_1^2 \ldots v_1^m)$

considerado por Milnor y Sharley y por el Teorema de Kuhn ya citado v_j^{io} = valor de $\varphi^{io}(v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^m)$.

para el jugador j .

Por tanto $(v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^m)$ es el punto fijo de la función T de Milnor y Sharley y nuestra definición de solución coincide con la de esos autores .

"A P E N D I C E "

I.- Sistemas de conjuntos .

En lo que sigue entenderemos por sistemas de conjuntos a una familia de subconjuntos de un conjunto fijo X .

Un sistema de conjuntos R es un anillo si es cerrado bajo intersecciones finitas y bajo la operación de diferencia simétrica. Se prueba que todo anillo es cerrado bajo uniones finitas, bajo restas y, por tanto, $\phi \in R$ para todo anillo R .

Si G es un sistema de conjuntos, $E \in G$ es unidad de G si para todo $A \in G$, $A \cap E = A$.

Un anillo de conjuntos con unidad se llama un álgebra de conjuntos.

Es fácil probar que la intersección de una familia arbitraria de anillos es un anillo.

Un hecho importante, que también se prueba facilmente es que cualquier sistema no vacío de conjuntos G determina un anillo

$R(G)$ que lo contiene y que está contenido en cualquier otro anillo que contenga a G.

$R(G)$ se llama el anillo mínimo sobre el sistema G o anillo generado por G.

Un sistema de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, contenidos en un conjunto A, ajenos 2 a 2 y cuya unión es igual a A se llama una descomposición finita de A.

Decimos que el sistema de conjuntos G es un semianillo, si contiene al vacío, es cerrado bajo intersecciones finitas y además si para cualesquiera dos conjuntos A y A_1 de G con A_1 contenido en A existe una colección finita $A_2, \ldots, A_n$ de G que forman junto con A_1 una descomposición finita de A.

En R^n el sistema de los pseudobloques, es decir el de los con--

juntos de la forma $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n$ tales que $a_i \leq x_i < b_i$

con $i = 1, 2, \ldots n$ y $a_i \leq b_i$ para toda $i\}$.

Es fácil construir el anillo minimal sobre un semianillo G pues se puede probar que coincide con el sistema de las uniones finitas de conjuntos de G.

Si $G_1, G_2, \ldots G_n$ son sistemas de subconjuntos de $X_1, \ldots, X_n$ respectivamente el producto cartesiano $G_1 \times \ldots \times G_n$ es el sistema de los subconjuntos del producto cartesiano $X_1 \times \ldots \times X_n$ que se pueden escribir como $A_1 \times \ldots \times A_n$ con A_i en G_i.

El producto cartesiano de un número finito de semianillos es un semianillo.

En teoría de la medida es importante considerar anillos cerrados bajo uniones e intersecciones numerables. A los primeros se les llama σ-anillos y a los segundos δ-anillos.

Un σ-anillo con unidad es un δ-anillo con unidad y recíprocamente.

A este tipo de anillos se les llama algebras de Borel ó β-álgebras

Si G es un sistema de conjuntos arbitrario y $X = \bigcup_{A \in G} A$, el sistema de todos los subconjuntos de X es un álgebra de Borel que contiene a G. Un álgebra de Borel es irreducible respecto a un sistema G si la unidad E del álgebra es la unión de todos los conjuntos de G.

Para cada sistema G está determinada un álgebra de Borel irreducible sobre G que contiene a G y está a su vez contenida en cualquier álgebra de Borel que contenga a G.

A esta álgebra se le llama el álgebra minimal determinada por G.

Los conjuntos de Borel son los elementos del álgebra de Borel-minimal, determinada en un espacio topológico, por el sistema τ de los conjuntos abiertos.

En R^n con la topología usual τ, la B-álgebra minimal determinada por τ coincide con la determinada por el semianillo de los pseudobloques.

Consideremos una función f definida en un conjunto X y que toma valores en el conjunto Y, si G es un sistema de subconjuntos de X y G' un sistema de subconjuntos de Y, designaremos como $f(G)$ al sistema de conjuntos de la forma $f(A)$ con A en G y como $f^{-1}(G')$ a los conjuntos $f^{-1}(B)$ con B en G'; entonces si G' es un anillo $f^{-1}(G')$ también lo es, lo mismo se cumple si G' es un álgebra ó una σ-álgebra, también lo será $f^{-1}(G')$.

Además se cumple que $R(f^{-1}(G'))$ es igual que $f^{-1}(R(G'))$ y

Un σ-anillo con unidad es un δ-anillo con unidad y recíprocamente.

A este tipo de anillos se les llama algebras de Borel ó β-álgebras

Si G es un sistema de conjuntos arbitrario y $X = \bigcup_{A \in G} A$,el sistema de todos los subconjuntos de X es un álgebra de Borel que contiene a G. Un álgebra de Borel es irreducible respecto a un sistema G si la unidad E del álgebra es la unión de todos los conjuntos de G.

Para cada sistema G está determinada un álgebra de Borel irreducible sobre G que contiene a G y está a su vez contenida en cualquier álgebra de Borel que contenga a G .

A esta álgebra se le llama el álgebra minimal determinada por G.

Los conjuntos de Borel son los elementos del álgebra de Borel-lo mismo para el σ-álgebra generada por $f^{-1}(G')$.

II- Algunos Conceptos de Topología .

Un espacio topológico (X, τ) es un conjunto X y un sistema τ de subconjuntos de X cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas y que además X y el vacío pertenecen a τ . A los conjuntos que están en τ se les llama abiertos y se dice que τ es una topología de X . A los conjuntos que son complementos de abiertos se les llama cerrados .

Si un elemento o punto x de X está en un abierto U decimos que U es una vecindad de x. Un espacio (X, τ) es de Hausdorff. Si cada dos puntos tienen vecindades ajenas.

Si A es un subconjunto de X decimos que un elemento x de X es punto de contacto de A, si cada vecindad de x contiene puntos de A.

La cerradura de A es el conjunto de sus puntos de contacto . Decimos que un conjunto **D** es denso en **X** si todo punto de **X** es de contacto de **D**. A los puntos de contacto de **X** que tienen la propiedad de que cada vecindad tiene infinitos puntos de **X** se les llama puntos de acumulación.

A menudo es más cómodo trabajar con sólo una parte de los conjuntos de la topología que permitan definir unívocamente a la totalidad de los abiertos. A este sistema determinante se le llama una base del espacio topológico.

Más precisamente unabase de un espacio es una colección P de conjuntos abiertos, que tienen la propiedad que cualquier abierto es la unión de miembros de P. Para que un sistema $\{U\alpha\}$ de conjuntos abiertos sea base del espacio topológico es necesario y suficiente que para todo punto **x** que pertenezca a un abierto **U**, exis ta un conjunto U_α del sistema tal que x pertenezca a U_α y U_α esté contenido en $\mathcal{U}$.

Una familia arbitraria $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathfrak{X}$, es base para una topología de $\mathfrak{X}$ si tiene la propiedad de que para cada x en la intersección de dos conjuntos arbitrarios U_α y U_β pertenecientes a $\mathcal{B}$, existe un conjunto $\mathcal{U}$ también de $\mathcal{B}$ contenido en la intersección de U_α y U_β y que contiene a x. La familia $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ consistente de ϕ, $\mathfrak{X}$ y todas las uniones de B es una topología para $\mathfrak{X}$ cuya base es $\mathcal{B}$. $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es única y es la más pequeña que contiene a $\mathcal{B}$.

Dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ son equivalentes si las topologias que generan son iguales. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{B} = \{U\}$ y $\mathcal{B}' = \{U'\}$ sean equivalentes es que para cada punto x que esté en algún abierto $\mathcal{U}$ perteneciente al sistema $\mathcal{B}$, exista un abierto $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{B}'$ tal que x esté en $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{U}'$ esté contenido en $\mathcal{U}$.

Análogamente para cada punto x' de cualquier abierto U' de B'.

La intersección de todas las topologías de X que contengan a un sistema G de conjuntos dado es a su vez una topología $\tau(G)$ y se le llama la topología generada por G. A G se le llama una subbase de $\tau(G)$.

$\tau(G)$ consiste de todas intersecciones finitas de elementos de G, las uniones arbitrarias de esas intersecciones, del vacío y de X.
Un espacio es segundo contable, si tiene una base numerable.

Un espacio Y es primero contable si para cada uno de sus puntos hay una familia numerable de vecindades del punto, tales que para cada abierto G que contiene al punto existe una de las vecindades de Y contenido en G.

Si $\{X_\alpha\}$ es una familia de conjuntos, consideramos el producto directo de ellos $\prod_\alpha X_\alpha$ y las funciones proyección sobre la componente X_α.

La proyección P_α es la función que asocia a cada elemento de $\prod_\alpha X_\alpha$ su componente x_α.

Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ es una colección de espacios topológicos, la topología del producto cartesiano $\prod_\alpha X_\alpha$ es la - que tiene como subbase a los conjuntos :

$< U_\alpha > = P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ con U_α abierto en la topología de - X_α; si el producto es finito la familia $\prod_{i=1}^{n} U_i$ con U_i abierto en X_i es una base del producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que (Y, τ_Y) con Y contenido en X, es un subespacio si la topología τ_Y es la inducida por τ ; es decir si cada abierto de τ_Y es la intersec - ción de un miembro de τ con Y.

Una función f del espacio (X, τ_X) en el espacio (Y, τ_Y) es continua en el punto x_0 de X si para todo abierto $V_{f(x_0)}$ en -

Y que contenga a $f(x_0)$, existe un abierto U_{x_0} que contenga a x_0 y tal que $f(U_{x_0})$ está contenido en $V_{f(x_0)}$.

Una función de (X, τ_X) en (Y, τ_Y) es continua si para cualquier abierto V en Y $f^{-1}(V)$ es abierto en X . f es continua en X si y sólo si es continua en cada punto de X .

Una función f biyectiva de un espacio X en otro Y continua y tal que f^{-1} de Y en X es continua se llama un homeomorfismo.

Decimos que una propiedad es un invariante topológico si se conserva bajo homeomorfismos

Una función definida en un intervalo $[a,b]$ se llama absolutamente continua, si para cualquier ε positivo existe δ positivo tal que cualquiera que sea el sistema finito de intervalos $[a_k, b_k]$ que descomponga a $[a,b]$ cont: 1 que la suma de las diferencias --

$b_k - a_k$ sea menor que δ, entonces la suma de los valores absolutos de $f(b_k) - f(a_k)$ es menor que ϵ.

(II-b)

Una cubierta del conjunto X es un sistema de subconjuntos de X de manera que cada punto de X está en alguno de los subconjuntos del sistema. La cubierta se dice que es abierta si los subconjuntos que la componen lo son. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cubiertas de X tales que, cualquier conjunto U perteneciente a $\mathcal{B}$ también pertenece a $\mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{B}$ es una subcubierta.

Un espacio de Hausdorff es un compacto si cada cubierta abierta contiene una subcubierta finita.

Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto.

La imagen continua de un compacto es compacto.

En un espacio compacto todo subconjunto infinito tiene al menos un punto de acumulación.

Cuando un espacio tiene la propiedad de que todo subconjunto infinito tiene al menos un punto de acumulación, se dice que es un espacio compacto numerable y es equivalente a que el espacio tenga la propiedad de que de cada cubierta numerable se pueda extraer una subcubierta finita.

Los conceptos de compacidad y compacidad numerable no coinciden, en general, sin embargo en los espacios segundo contables si coinciden.

El producto cartesiano de una familia arbitraria de espacios e-compactos es compacto si y sólo si cada factor es compacto.

Un subespacio de un espacio compacto es compacto si y sólo si es cerrado.

En R^n un subespacio es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

(II-c)

En los espacios métricos, es decir los conjuntos que tienen una métrica definida, la topología se deriva de la noción de distancia. Una métrica de un conjunto X es una función d definida en el producto cartesiano $X \times X$ y con valores reales no negativos que sólo valen cero en las parejas (x, y) con x igual a y, es simétrica y cumple con la desigualdad del triángulo. El real $d(x, y)$ es la distancia entre los puntos x y y.

Cada métrica de un conjunto X determina una topología. La base de esta son las d-bolas con centro en un punto a y radio r y que constan de los puntos que distan del punto a menos que r.

Cada espacio métrico es primero contable.

Un espacio (X , Z) es metrizable si su topología está inducida por una métrica para X . La propiedad de ser metrizable es un invariante topológico .

En un espacio métrico Y la distancia de un punto y_0 a un subconjunto no vacío A de Y se define como el inf. de las distancias de y_0 a cada uno de los puntos de A . La función que asocia a cada punto de un espacio Y su distancia a un subconjunto A de Y es continua. El diámetro de un subconjunto A no vacío de Y es el sup. de las distancias entre puntos de A .

Una sucesión en un espacio Y es una función φ, de los enteros positivos a Y ; llamamos y_n a $\varphi(n)$. Decimos que φ converge a y_0 de Y, si para toda vecindad U de y_0 existe un entero positivo N tal que para toda n mayor o igual que N, $\varphi(n)$ está en U .

En un espacio Y primero contable, en particular en uno metrizable, una función f es continua en y_o si y sólo si para cada sucesión $\varphi(n)$ en Y que converge a y_o la sucesión $f(\varphi(n))$ converge a $f(y_o)$.

Una sucesión de puntos en un espacio métrico es de Cauchy si para cada número positivo ε existe un natural N de tal manera que dos puntos de la sucesión con índices mayores que N distan menos que ε.

En un espacio métrico cada sucesión convergente es de Cauchy, si toda sucesión de Cauchy es convergente el espacio se llama completo.

Si Y es completo, entonces cualquier subespacio metrizable cerrado es completo.

La propiedad de ser completo es un invariante topológico.

Si Y es un espacio métrico y A y B son dos subconjuntos de Y cerrados y ajenos, entonces existe una función continua de Y en R no negativa, menor ó igual que uno y que vale cero en los puntos de A y uno en los de B.

El producto cartesiano de una familia numerable de espacios es métrico si y sólo si cada factor lo es, una afirmación similar es cierta para espacios completos.

(II-d)

Si X es un espacio compacto llamaremos $\mathbb{C}(X)$ al conjunto de las funciones continuas definidas en X y con valor real.

En $\mathbb{C}(X)$ consideremos la topología τ inducida por la métrica siguiente:

$$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \; x \in X\}.$$

En $(\mathbb{C}(X), \tau)$ la suma, la multiplicación son funciones continuas de $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ en $\mathcal{C}(X)$ y la multiplicación por escalares es una función continua de $R \times \mathcal{C}(X)$ en $\mathcal{C}(X)$.

Un subconjunto A de $(\mathcal{C}(X), Z)$ es un álgebra si es cerrado bajo las operaciones de suma, multiplicación y producto por escalares. Si D es un subconjunto cualquiera de $(\mathcal{C}(X), Z)$, existe un álgebra única A(D) que contiene a D y que está contenida en cualquier otra álgebra que lo contenga. A (D) coincide con el conjunto de todos los polinomios, $P(f_1, \ldots, f_n)$ sin término constante con las f_i pertenecientes a D.

D, un subconjunto de $(\mathcal{C}(X), Z)$, se dice que separa puntos, si para cada pareja de puntos (x,y), distintos, de X existe una función de D cuyo valor en x es distinto que en y; y decimos que D no se anula en un punto x, si existe f en D tal que $f(x) \neq 0$.

El Teorema de Stone Weirstrass dice que si X es compacto y $(\mathcal{C}(X), Z)$ contiene un álgebra $\mathcal{U}$ que separa puntos y no se anula en ningún punto entonces $\mathfrak{A}$ es denso en $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$.

(II-e)

Un espacio topológico $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ es lineal; si $\mathfrak{X}$ forma un espacio vectorial con respecto a algún campo de escalares, aquí tomaremos el campo de los reales y si las operaciones de espacio vectorial son continuas en la topología de $\mathfrak{X}$.

En un espacio vectorial la topología queda totalmente determinada al dar el sistema de vecindades del cero.

Un conjunto A contenido en un espacio vectorial es convexo, si para cada dos puntos de A, el segmento que los une está contenido en A. $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ lineal es localmente convexo si para cada punto x y cada vecindad $U(x)$, existe una vecindad convexa de x contenida en $U(x)$. El espacio $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$ es localmente convexo también lo es el de las funciones lineales continuas de $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$ en los reales, al que se denota cómo $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{X})$.

Una funcional de un espacio lineal f es convexa si ---

$F(\lambda x + (1-\lambda)y)$ menor o igual que $\lambda F(x) + (1-\lambda) F(y)$

para todo x, y de X y λ real no negativo, si la funcional es tal que su valor en $\lambda x + (1-\lambda) y$ es mayor o igual que $\lambda F(x) + (1-\lambda) F(y)$ se llama cóncava.

Un espacio vectorial es normado si existe una funcional convexa (a la que se llama la norma) no negativa que únicamente toma el valor cero en el punto cero y tal que la norma de αX es igual al valor absoluto de α por la norma de X.

Todo espacio topológico normado es metrizable, pues se puede definir la distancia entre dos puntos x y y como la norma de $(x-y)$.

En los espacios normados un conjunto M es acotado si existe -- una bola con centro en cero que contenga a M, cuando hay una topología en el espacio lineal se puede definir el concepto de conjunto acotado sin recurrir a la norma . M es acotado si para toda vecindad del cero existe un número positivo $n > 0$ de tal modo que nU contiene a M.

Para los espacios vectoriales es esencial el concepto de funcional lineal. En el caso de los espacios topológicos lineales este papel lo juegan las funcionales lineales continuas .

Si X es un espacio topológico lineal de dimensión finita, las funcionales lineales resultan continuas, pero esto no es cierto en el caso general .

Para que una funcional lineal sea continua en un espacio topológico lineal, basta con que sea continua en un punto o que esté acotada en alguna vecindad. En lo sucesivo se hablará de funcional lineal entendiendo con ello a las continuas .

El conjunto de funcionales lineales de un espacio topológico lineal X forma un espacio vectorial sobre el campo de escalares que se llama -

el espacio dual X^*. En X^* se pueden introducir diferentes topologías.

(II-F)

Teoremas de punto fijo.

El Teorema de Brouwer dice que cualquier función continua definida en un subconjunto S de R^n compacto y convexo y con valores en S deja un punto fijo, es decir existe un punto y cuya imagen bajo f es de nuevo y.

Shauder generalizó este Teorema a cualquier subconjunto compacto y convexo contenido en un espacio real localmente convexo.

III-Teoría de la medida.

El concepto de medida $(\mu(A))$ de un conjunto A es una generalización de conceptos como: longitud de un segmento, área de una figura plana, volumen de una figura del espacio

Al construir la medida de conjuntos planos se toma la medida --

de un rectángulo (al que le pueden faltar orillas) como su área y con base en ésta se define el concepto de medida en una clase más amplia de conjuntos (uniones finitas de rectángulos ajenos dos a dos y después a los conjuntos que se pueden aproximar por estas uniones de rectángulos) .

Lo esencial en la construcción de la medida de conjuntos planos no es la expresión concreta del área de un rectángulo sino dos hechos generales . Primero que el conjunto de los rectángulos cumple con :

1.- La intersección de un número finito de rectángulos es un rectángulo (ó el vacío) .

2.- Si tenemos dos rectángulos A y A_1 con A_1 contenido en A entonces existen una colección de rectángulos $A_2, \ldots, A_n$ tales que la colección que resulta agregando A_1 son ajenos dos a dos --

y la unión de todos es A. Es decir los rectángulos forman un semianillo.

Además el otro hecho importante se refiere a que el área de un rectángulo es una función que asocia a cada rectángulo un real no negativo y que el área de la unión de un número finito de rectángulos ajenos entre sí es igual a la suma de las áreas de los rectángulos.

A la construcción de la medida de conjuntos planos se le puede dar una forma totalmente abstracta y general. Con ello se amplía sustancialmente la posibilidad de aplicar estas construcciones.

(III-a)

Una función de conjunto $\mu(A)$ definida de un semianillo de conjuntos a los reales no negativos es una medida si es aditiva.

Es decir si $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, para toda descomposición finita de A.

La medida del conjunto vacío ($\mu(\emptyset)$) es cero.

Una medida es σ-aditiva si se cumple la aditividad en uniones [illegible].

[illegible] la medida μ es la prolongación de una medida m de [illegible] otro G que lo contiene si las medidas coinciden en todos los conjuntos de G.

Para cada medida definida en un semianillo G existe una prolongación y sólo una definida en el anillo generado por G. La prolongación de una medida σ-aditiva definida en G es también σ-aditiva en $R(G)$.

Se usa la medida σ-aditiva definida en un semianillo G de conjuntos con unidad X para definir las medidas superior μ^* e inferior μ_* de cualquier conjunto A contenido en X.

$\mu^*(A)$ es el inf de las sumas de las medidas de cada cubierta finita o numerable de A con elementos de G.

La medida inferior de un conjunto $A \subset X$ es igual a la medida de X menos la medida superior de A. Un conjunto $A \subset X$ es medible, según Lebesgue, si sus medidas superior e inferior son iguales y a este valor común se le llama la medida de Lebesgue.

Los conjuntos A de un anillo generado por un semianillo G, en el que está definida una medida μ, son medibles con respecto a la prolongación $\bar{\mu}$ (σ-aditiva) a $R(G)$.

Un conjunto $A \in G$ semianillo es medible, si existe un conjunto B de $R(G)$ tal que la medida superior de $A \Delta B$ es menor que un $\varepsilon > 0$ dado.

El sistema $\mathfrak{M}$ de todo los conjuntos medibles es un álgebra de Borel con unidad X.

La función que asocia a cada conjunto de $\mathfrak{M}$ su medida según Lebesgue es σ-aditiva y se llama la prolongación $\bar{\mu}$ de Lebesgue de la medida μ definida en el semianillo original al sistema de los conjuntos medibles.

Una medida μ definida en un semianillo G se llama completa cuando los subconjuntos de conjuntos de medida cero están en G (7).

La prolongación de Lebesgue de cualquier medida es completa.

Una distribución de probabilidad o función de distribución sobre K (relativa a un semianillo S' con unidad K) es una μ-medida σ-aditiva en S' que vale 1 en K.

(III-b)

Consideremos dos conjuntos arbitrarios X y Y y dos sistemas G y G' de subconjuntos de X y Y respectivamente, una función de X en Y es (G, G') medible, si la imagen inversa de todo subconjunto A de G' está en G. En los espacios topologicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y), las funciones continuas son (τ_X, τ_Y) medibles . Si $X = Y = R^n$ y G y G' son ambos sistemas de conjuntos borelianos a lasfunciones (G, G') medibles se les llama B-medible . Si en el conjunto X hay definida una medida μ y X es la unidad del sistema de los conjuntos μ-medibles, una función real es μ-medible si la imagen inversa de cada conjunto boreliano de R es μ-medible .

El límite de una sucesión convergente para cada $x \in X$, de funciones μ-medibles es μ-medible. La composición de una función B-medible con otra μ-medible es μ-medible

En la teoría de la integral de funciones medibles juegan un papel importante las funciones simples es decir las funciones μ-medibles que toman a lo más un número numerable de valores .

Una función con rango numerable es simple si y sólo si las imágenes inversas de cada punto del rango son conjuntos $\mathcal{M}$-medibles .

Las funciones $\mathcal{M}$-medibles se caracterizan por que pueden representarse como límite de una sucesión iniformemente convergente de funciones simples .

La suma, la diferencia y el producto de dos funciones medibles son funciones medibles . El cociente de dos funciones medibles es también medible si el denominador no se anula .

Una propiedad se cumple casi dondequiera, en un conjunto medible E , cuando el subconjunto de puntos de E que no cumple la propiedad tiene medida cero . Dos funciones f y g definidas en E , son equivalentes en E $(f \sim g)$ si coinciden casi donde quiera .

El comportamiento de las funciones medibles en los conjuntos de medida cero no tiene importancia . Una función equivalente en E a una función medible es medible.

Una sucesión de funciones $f^{\prime}(x)$ converge a f casi dondequiera si el conjunto de puntos de X donde el límite de $f_n(x)$ es distinto del valor de f en X es de medida cero. Si una sucesión de funciones medibles converge a f casi dondequiera, la función f es medible.

(III-c)

La integral de Lebesgue condujo a que el conjunto de funciones integrables fuera mucho más amplio que el conjunto de funciones integrables según Riemann.

En lo que sigue se considera, siempre que no se diga lo contrario, una medida σ-aditiva μ definida en un álgebra boreliana con unidad X, los conjuntos $A \subset X$ que se consideren se supondrán μ-medibles y las funciones $f(x)$ estarán definidas en todo

$\mathcal{B}$ y serán μ-medibles.

Una función simple con valores distintos $y_1, \dots, y_n$ es integrable, respecto a una medida μ, en un conjunto A cuando converge absolutamente la serie formada por los productos de cada uno de los valores y_i de la función por la medida del conjunto de puntos x de A tales que $f(x) = y_i$.

El límite de la serie es la integral de f en A respecto a μ, $\int_A f \, d\mu$. Si f y g son funciones simples e integrables en un conjunto A con respecto a la medida μ se cumplen las siguientes propiedades.

1.-Considerando a la integral como una funcional definida de las funciones simples integrables a los reales, es una funcional ---

2.-Una función simple f acotada en A es integrable en A.

Si M es cota del valor absoluto de $f(x)$ en A, el valor absoluto de la integral de f es menor o igual que M por la medida de A.

Una función f es integrable en A si existe una sucesión de funciones simples f_n integrables en A que converge uniformemente a f. El límite de la sucesión de integrales $\int_A f_n\, d\gamma$ es la integral de f en A.

La integral de una función está bien definida pues existe el límite de las integrales de f_n sea cual sea la sucesión de funciones f_n que converge uniformemente a f y su valor no depende de la selección de la sucesión $\{f_n\}$ además las dos definiciones de integral de una función simple coinciden.

Las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue :

1.- La integral de la función constante uno en A es igual a la medida de A.

2.- La integral es una función lineal del espacio de las funciones integrables en los reales.

3.- Una función f acotada en A es integrable en A.

4.- La integral en A de una función no negativa es no negativa. la integral cumple la propiedad de monotonía.

5.- Si la medida de A es cero la integral en A de cualquier función integrable es cero.

6.- Si una función f está dominada por otra función φ que es integrable, f también es integrable.

7.- Una función $f(x)$ es integrable si y sólo si $|f(x)|$ es integrable.

Usando el concepto de integral de Lebesgue construímos una función de conjunto definida en la clase de los conjuntos medibles

$F(A) = \int_A f \, d\mu$ donde f es una función fija integrable en A

Si A es la unión numerable de conjuntos $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, ajenos dos a dos, la existencia de la integral de f en A implica la existencia de las integrales de f en A_n y la convergencia absoluta de la serie de estas integrales. F resulta σ-aditiva es decir. $F(A) = \sum^{\infty} F(A_n)$. Recíprocamente si existen las integrales en los conjuntos $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ y la serie de ellas converge absolutamente entonces la integral de f en A existe y es igual al límite de la serie mencionada. Si f es integrable en A es integrable en todo conjunto medible contenido en A.

Si $\varphi(x)$ es una función no negativa e integrable en A y c un real arbitrario, la integral de φ en A no es menor que c veces la medida del conjunto de puntos de A que bajo φ son mayores o iguales que (desigualdad de Chébisher) de aquí se desprende que si la integral en A del valor absoluto de una fun---

ción es cero, entonces la función vale cero en casi todo A .

En resumen, la integral de Lebesgue, resulta una medida σ-aditiva en el sistema de los conjuntos medibles según la medida original, y todos los conjuntos de medida cero según μ son de medida cero según F .

Las condiciones para integrar término a término una serie son más débiles para la teoría de Lebesgue que en el Análisis Clásico.-

En este último basta que la serie converja uniformemente. Según Lebesgue si la sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables converge a f en A y para toda x en A cada término de la sucesión está acotado por una función integrable en A, entonces f es integrable en A y la sucesión de las integrales de f_n tiende a la integral de f .

El Teorema de Beppo Levi o de la convergencia monótona establece que una sucesión de funciones integrables monótona no decreciente en A y tales que cada integral de las f_n está acotada por una constante, entonces existe en casi todo A el límite $f(x)$ de la sucesión $\{f_n(x)\}$, f es integrable y su integral es el límite de la sucesión de las integrales de f_n.

Además si una sucesión de funciones medibles no negativas, converge a f y las integrales de las f_n en A están acotadas por K, entonces f es integrable en A y su integral está acotada también por K.

(III-d)

Si hemos definido medidas $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en los semianillos $G_1, \ldots G_n$ y queremos construir una medida del producto cartesiano $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ consideremos $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ con $A_i \in G_i$. definimos $\mu(A)$ igual al producto de las $\mu_i(A_i)$ μ resulta una medida de G. Si las μ_i son σ-aditivas ----

también μ lo es.

A la prolongación lebesguiana de μ, se le llama el producto de las medidas y se denota con $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k$

Si A esta contenido en el producto cartesiano de X y Y, al subconjunto de A tal que X es fija lo denotaremos como A_x, análogamente A_y denotará el subconjunto en que y permanece fija. Si las medidas μ_x y μ_y están definidas en álgebras borelianas, de X y Y respectivamente, son σ-aditivas y completas, entonces la medida $\mu_x \otimes \mu_y$ de un subconjunto A medible es igual a la integral en X de $\mu_y(A_x)$ con respecto a μ_x y también a la integral en Y de $\mu_x(A)$ con respecto a μ_y.

Si además la función f definida en $X \times Y$ es integrable en un subconjunto A con respecto al producto μ de las medidas μ_x y μ_y

entonces el teorema de Fubini establece que la integral de f en A respecto a μ es igual a la integral en X de $H(x)$ respecto a μ_x y también es igual a la integral de $L(y)$ en Y respecto a μ_y, donde $H(x)$ es la integral de f en A_x respecto a μ_y y $L(y)$ es la integral de f en A_y respecto a μ_x

(III-e)

Si X es un subespacio compacto de R^n. Consideremos el semianillo S' que consiste de las intersecciones de los bloques de R^n con X. Llamaremos B_X a la σ-álgebra generada por S'.

Si llamamos $D(X)$ al conjunto de medidas sobre B_X, σ-aditivas no negativas y tales que la medida de X es uno, diremos que μ es una medida signada sobre B_X si existen μ_1 y μ_2 elementos de $D(X)$ tales que μ es igual a $\mu_1 - \mu_2$.

Si f pertenece a $\mathbb{C}(\mathfrak{X})$ y μ es una medida signa

la integral de f en un subconjunto A de $\mathfrak{X}$ con respect

fine como la diferencia de las integrales de f en A r

y a μ_2.

Sea F_μ la función de $\mathbb{C}(\mathfrak{X})$ en R que asocia a cada

gral en $\mathfrak{X}$ con respecto a μ, F_μ pertenece a $C^*(\mathfrak{X})$

El Teorema de Riesz establece que la función que a

medida signada su correspondiente F_μ es una biyección

Además si L es una función lineal no

L en $C^*(\mathfrak{X})$, es decir si $f(x) \geq 0$ para toda x en $\mathfrak{X}$, L(

entonces la medida que corresponde a L

ción de Riesz está en $D(\mathfrak{X})$.

serán μ -medibles.

Una función simple con valores distintos $y_1, \ldots, y_n$

integrable, respecto a una medida μ, en un conjunto A cuando

nverge absolutamente la serie formada por los productos de cada -

o de los valores y_i de la función por la medida del conjunto -

(puntos x de A tales que $f(x) = y_i$

El límite de la serie es la integral de f en A respecto a μ,

$f\,d\mu$. Si f y g son funciones simples e integrables en un -

njunto A con respecto a la medida μ se cumplen las siguientes -

opiedades.

1.-Considerando a la integral como una funcional definida de --

as funciones simples integrables a los reales, es una funcional -

2.-Una función simple f acotada en A es integrable en A.

Si M es cota del valor absoluto de $f(x)$ en A, el valor absoluto de la integral de f es menor o igual que M por la medida de A.

Una función f es integrable en A si existe una sucesión de funciones simples f_n integrables en A que converge uniformemente a f. El límite de la sucesión de integrales $\int_A f_n\,d\mu$ es la integral de f en A.

La integral de una función está bien definida pues existe el límite de las integrales de f_n sea cual sea la sucesión de funciones f_n que converge uniformemente a f y su valor no depende de la selección de la sucesión $\{f_n\}$ además las dos definiciones de integral de una función simple coinciden.

Las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue:

1.- La integral de la función constante uno en A es igual a la medida de A.

2.- La integral es una función lineal del espacio de las funciones integrables en los reales.

3.- Una función f acotada en A es integrable en A.

4.- La integral en A de una función no negativa es no negativa. la integral cumple la propiedad de monotonía.

5.- Si la medida de A es cero la integral en A de cualquier función integrable es cero.

6.- Si una función f está dominada por otra función φ que es integrable, f también es integrable.

7.- Una función $f(x)$ es integrable si y sólo si $|f(x)|$ es integrable.

Usando el concepto de integral de Lebesgue construimos una función de conjunto definida en la clase de los conjuntos medibles

$F(A) = \int_A f \, d\mu$ donde f es una función fija integrable en A

Si A es la unión numerable de conjuntos $A_1, \dots, A_n, \dots$, ajenos dos a dos, la existencia de la integral de f en A implica la existencia de las integrales de f en A_n y la convergencia absoluta de la serie de estas integrales. F resulta σ-aditiva es decir $F(A) = \sum^{\infty} F(A_n)$. Recíprocamente si existen las integrales en los conjuntos $A_1, \dots, A_n, \dots$ y la serie de ellas converge absolutamente entonces la integral de f en A existe y es igual al límite de la serie mencionada. Si f es integrable en A es integrable en todo conjunto medible contenido en A.

Si $\varphi(x)$ es una función no negativa e integrable en A y c un real arbitrario, la integral de φ en A no es menor que c veces la medida del conjunto de puntos de A que bajo φ son mayores o iguales que (desigualdad de Chébisher) de aquí se desprende que si la integral en A del valor absoluto de una fun---

ción es cero, entonces la función vale cero en casi todo A.

En resumen, la integral de Lebesgue, resulta una medida σ-aditiva en el sistema de los conjuntos medibles según la medida original y todos los conjuntos de medida cero según μ son de medida cero según F.

Las condiciones para integrar término a término una serie son más débiles para la teoría de Lebesgue que en el Análisis Clásico.-

En este último basta que la serie converja uniformemente. Según Lebesgue si la sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables converge a f en A y para toda x en A cada término de la sucesión está acotado por una función integrable en A, entonces f es integrable en A y la sucesión de las integrales de f_n tiende a la integral de f.

El Teorema de Beppo Levi o de la convergencia monótona establece que una sucesión de funciones integrables monótona no decreciente en A y tales que cada integral de las f_n está acotada por una - constante, entonces existe en casi todo A el límite $f(x)$ de la sucesión $\{f_n(x)\}$, f es integrable y su integral es - el límite de la sucesión de las integrales de f_n.

Además si una sucesión de funciones medibles no negativas, converge a f y las integrales de las f_n en A están acotadas por K, entonces f es integrable en A y su integral está acotada también - por K.

(III-d)

Si hemos definido medidas $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en los semianillos - $G_1, \ldots G_n$ y queremos construir una medida del producto cartesiano $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ consideremos $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ con $A_i \in G_i$. definimos $\mu(A)$ igual al producto de las $\mu_i(A_i)$ μ resulta una medida de G. Si las μ_i son σ-aditivas ----

también μ lo es.

A la prolongación Lebesguiana de μ, se le llama el producto -- de las medidas y se denota con $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k$

Si A esta contenido en el producto cartesiano de X y Y, al - subconjunto de A tal que X es fija lo denotaremos como A_x, análogamente A_y denotará el subconjunto en que y permanece fija. Si las - medidas μ_x y μ_y están definidas en álgebras borelianas, de X y Y - respectivamente, son σ-aditivas y completas, entonces la medida $\mu_x \otimes \mu_y$ de un subconjunto A medible es igual a la integral en X de $\mu_y(A_x)$ con respecto a μ_x y también a la integral en Y de - $\mu_x(A)$ con respecto a μ_y.

Si además la función f definida en $X \times Y$ es integrable en un subconjunto A con respecto al producto μ de las medidas μ_x y μ_y

entonces el teorema de Fubini establece que la integral de f en A respecto a μ es igual a la integral en X de $H(x)$ respecto a μ_x y también es igual a la integral de $L(y)$ en Y respecto a μ_y, donde $H(x)$ es la integral de f en A_x respecto a μ_y y $L(y)$ es la integral de f en A_y respecto a μ_x.

(III-e)

Si X es un subespacio compacto de R^n. Consideremos el semianillo S' que consiste de las intersecciones de los bloques de R^n con X. Llamaremos B_X a la σ-álgebra generada por S'.

Si llamamos $D(X)$ al conjunto de medidas sobre B_X, σ-aditivas no negativas y tales que la medida de X es uno, diremos que μ es una medida signada sobre B_X si existen μ_1 y μ_2 elementos de $D(X)$ tales que μ es igual a $\mu_1 - \mu_2$.

Si f pertenece a $\mathbb{C}(X)$ y μ es una medida signada sobre $\mathcal{B}_X$ la integral de f en un subconjunto A de X con respecto a μ se define como la diferencia de las integrales de f en A respecto a μ_1 y a μ_2.

Sea F_μ la función de $\mathbb{C}(X)$ en R que asocia a cada f su integral en X con respecto a μ, F_μ pertenece a $C^*(X)$.

El Teorema de Riesz establece que la función que asocia a cada medida signada su correspondiente F_μ es una biyección.

Además si L es una función lineal no negativa, L en $C^*(X)$, es decir si $f(x) \geq 0$ para toda x en X, $L(f) \geq 0$, entonces la edida que corresponde a L bajo la biyección de Riesz está en $D(X)$.

B I B L I O G R A F I A

1.- Dugunji, J.: "Topology", Allyn and Bacon, Inc, Boston, 1965.

2.- Gale, D. and Stewart, F.M.: "Infinite Games with Perfect Information", Contributions to the Theory of Games, II, Princeton, 1953.

3.- Kolmogorov, A.N. y Fomin, F.V.:"Análisis Funcional", Editorial Mir -Moscú.

4.- Kuhn, H.W.: "Extensive Games and the Problem of Information", Contributions to the Theory of Games, II, Princeton, 1953.

5.- Mc Kinsey, J.C.: "Introducción a la Teoría de los Juegos", Aguilar -1967.

6.- Owen, G.: "Game Theory", W.B.Sauders Company, 1968.

7.- Parthasarathy, T. and Raghavan, T.E.S.: "Some Topics in Two-Person Games", American Elsevier Publishing Company, Inc, New York, 1971.

8.- Parthasarathy, K.R.: "Probability Measures on Metric Spaces", Academic Press, New York and London, 1967

9.- Shapley, L.S.: "Stochastic Games", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 39. -1953.