Lejos 27

UNA CLASIFICACION EN VARIEDADES DE ALGEBRAS.

Tesis Profesional

MARIO SOLAY ZIMAN*

FACULTAD DE CIENCIAS

U.N.A.M. 1979

* Becario del Instituto de Matemáticas.

INDICE

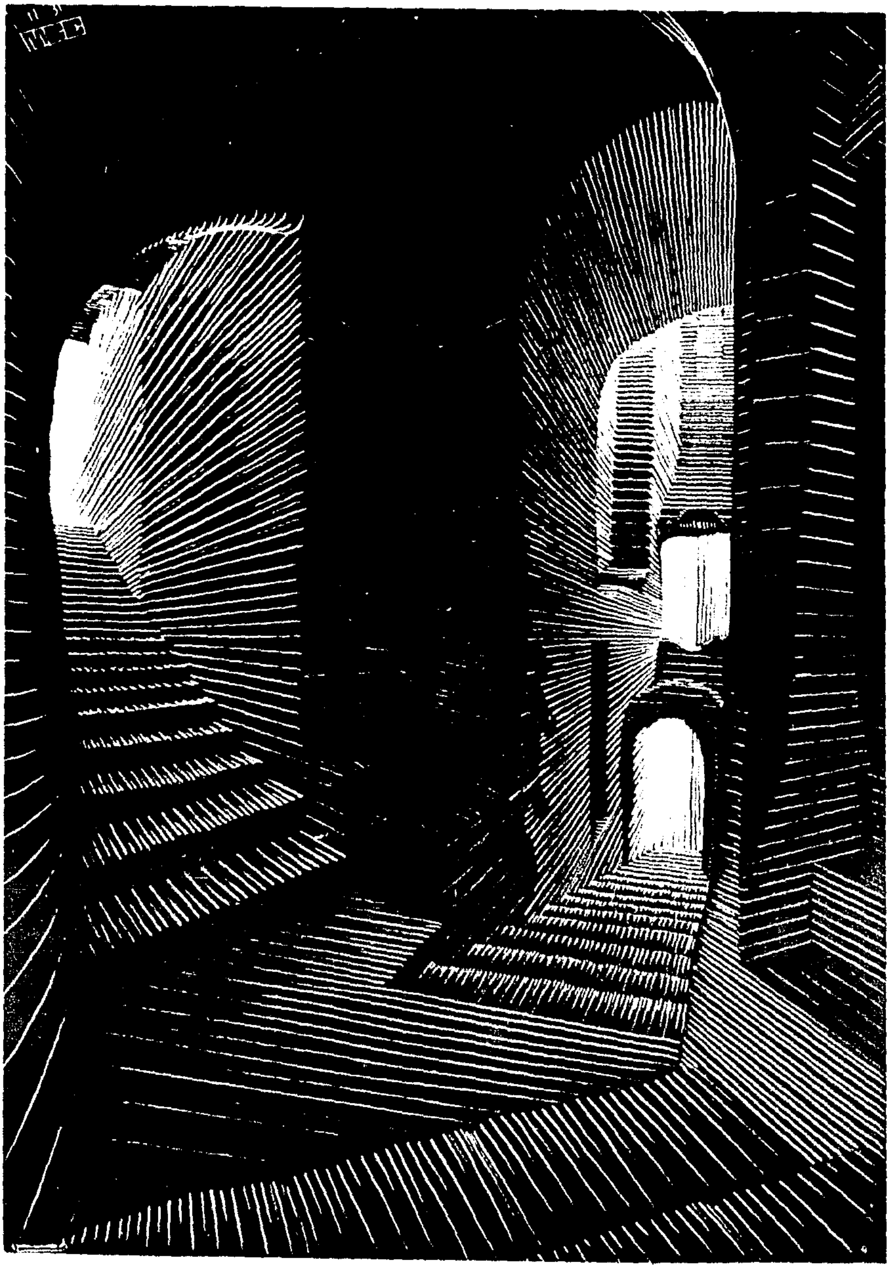
INTRODUCCION

En el capítulo 0 daremos una breve introducción al Algebra Universal y se concentra basicamente en aquellos resultados que usaremos posteriormente.

El capítulo 1 es la parte importante de este reporte. En 1.2 se introducen los conceptos de APROXIMABLE y UNITARIA para variedades de álgebras. La idea que conduce a estos conceptos es la de tratar de obtener información de una variedad al compararla con aquellas variedades que se obtienen al considerar corolarios no triviales de las ecuaciones que definen la variedad dada, es decir, la familia de todas las variedades que contienen en forma estricta la variedad dada. Es interesante notar la similitud que hay entre lo que es para nosotros una variedad no aproximable y el concepto de ser una congruencia irreducible bajo intersecciones. En 1.4 vemos que se obtiene una clasificación de las variedades de álgebras. En 1.7 se da una descripción de las ecuaciones de una variedad en un caso bastante general. Esto nos permite mostrar en 1.10, 1.12 y 1.14 que esta clasificación es no trivial. Finalmente en 1.17 damos una descripción categórica de variedades aproximables.

CAP 0

ALGEBRA UNIVERSAL



Daremos una breve introducción al Algebra Universal. Basicamente tocaremos aquellos puntos que usaremos posteriormente. Por brevedad omitimos demostraciones, éstas se pueden encontrar en [B] y la mayor parte de ellas en [C] y [G] de la bibliografía. Usaremos la terminología de [H.5] en lo referente a categorías.

<u>0.1 DEFINICIONES.</u>-

Un <u>TIPO DE ALGEBRAS</u> es una familia de ordinales $t = (\lambda_i)_{i\in I}$ que supondremos fijo y arbitrario en este capítulo. Una <u>t-ALGEBRA</u> es una pareja $(A, (f_i)_{i\in I})$ donde A es un conjunto y para cada $i\in I$, f_i es <u>OPERACION λ_i-ARIA EN A</u>, es decir, para cada $i\in I$, $f_i : A^{\lambda_i} \longrightarrow A$ es función. Si $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$, $\mathcal{L} = (B, (g_i)_{i\in I})$ son t-álgebras, un <u>HOMOMORFISMO DE t-ALGEBRAS</u> es una terna $(\mathcal{A}, h, \mathcal{L})$ donde $h: A \longrightarrow B$ es función y dados $i\in I$ y $(a_\xi)_{\xi<\lambda_i} \in A^{\lambda_i}$ $h\left(f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i})\right) = g_i\left((h(a_\xi))_{\xi<\lambda_i}\right)$. En este caso $h: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ o bien $h: A \longrightarrow B$ denotarán a $(\mathcal{A}, h, \mathcal{L})$. K_t es la categoría donde $Ob\, K_t$ es la clase de todas las t-álgebras y $Mor\, K_t$ es la clase de los homomorfismos de t-álgebras con la composición de funciones. Si $\mathcal{A}, \mathcal{L} \in K_t$, $\mathcal{L}$ es <u>SUB-ALGEBRA DE $\mathcal{A}$</u> si la inclusión $i: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{L}$ es K_t-morfismo. Si $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i\in I}) \in K_t$ y $M \subseteq A$, M es <u>CERRADO EN $\mathcal{A}$</u> si para toda $i\in I$, $f_i(M^{\lambda_i}) \subseteq A$; diremos que <u>M GENERA A $\mathcal{A}$</u> si A es el mínimo conjunto cerrado en $\mathcal{A}$ que contiene a M. Llamaremos a $Hom_{K_t}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$

<u>CONJUNTO DE ENDOMORFISMOS DE $\mathcal{A}$</u> el cuál denotaremos por $\operatorname{End} \mathcal{A}$.

Una relación de equivalencia θ en A es <u>CONGRUENCIA EN $\mathcal{A}$</u> si para toda $i \in I$ y para cada $(a_\xi)_{\xi<\lambda_i}$, $(b_\xi)_{\xi<\lambda_i} \in A^{\lambda_i}$ en caso de que para toda $\xi<\lambda_i$ $a_\xi \theta b_\xi$ entonces $f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i}) \, \theta \, f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})$. Si además para todo $f \in \operatorname{End} \mathcal{A}$ y $p,q \in A$ $p \theta q$ implica que $f(p) \theta f(q)$ diremos que θ es CONGRUENCIA <u>TOTALMENTE INVARIANTE EN $\mathcal{A}$</u> .

Si θ es congruencia en $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/_\theta$ hereda una estructura natural de t-álgebra $\mathcal{A}/_\theta$ y la proyección natural $\nu_\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/_\theta$ es K_τ -morfismo.

Si $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ es K_τ -morfismo, $\operatorname{Ker} f$ denotara la congruencia donde $b_1 \operatorname{Ker} f \, b_2$ si y solo si $f(b_1) = f(b_2)$. Nótese que f es K_τ -isomorfismo si y solo si f es biyectiva en los conjuntos subyacentes.

<u>0.2 PRIMER TEOREMA DE ISOMORFIA.-</u>

Sea $h : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ K_τ-morfismo. Sea θ congruencia en $\mathcal{L}$ tal que $\theta \leq \operatorname{Ker} h$. Entonces existe un único K_τ -morfismo $\chi : \mathcal{L}/_\theta \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\nu_\theta"'] & \mathcal{A} \\ \mathcal{L}/_\theta \arrow[ur, dashed, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

Además si $\theta = \operatorname{Ker} h$, χ es inyectiva, en particular si $\theta = \operatorname{Ker} h$ y h es suryectiva, χ es isomorfismo. $\triangle$

Si $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ es una familia de t-álgebras, definiendo las operaciones por coordenadas en $\prod_{j\in J} A_j$, la t-álgebra $\prod_{j\in J} \mathcal{A}_j$ que se obtiene con las proyecciones correspondientes es un producto categórico de $(A_j)_{j\in J}$.

Si $A, \mathcal{L} \in K_t$, diremos que $\mathcal{L}$ es IMAGEN HOMOMORFICA DE A si existe $f: A \longrightarrow \mathcal{L}$ K_t-morfismo suryectivo.

0.3 DEFINICIONES.-

Sea K clase de t-álgebras. Denotaremos por SK la clase de sub-álgebras de K, por HK la clase de imágenes homomórficas de K y por PK la clase de productos de familias en K. Diremos que K es VARIEDAD si HK $\subseteq$K, SK $\subseteq$K y PK$\subseteq$K.

0.4 TEOREMA.-

Sea K clase de t-algebras. Entonces HSPK es la mínima variedad que contiene a K. De aquí que K es variedad si y solo si K = HSPK.

0.5 DEFINICIONES.-

Si A es un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq PA$ (conjunto potencia de A) , un OPERADOR DE CERRADURA es una función $\Gamma: PA \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que si $M, N \in PA$, $M \subseteq \Gamma M$, $M \subseteq N$ implica que $\Gamma M \subseteq \Gamma N$ y $\Gamma\Gamma M = M$. Un SISTEMA DE CERRADURA en un conjunto A es una colección $\mathcal{C} \subseteq PA$ donde $\Theta \subseteq \mathcal{C}$ implica que $\bigcap \Theta \in \mathcal{C}$. En este caso se induce un operador de cerradura $\Gamma: PA \longrightarrow \mathcal{C}$ donde si $M \in PA$, $\Gamma M = \bigcap \{ C \in \mathcal{C} \mid M \subseteq C \}$

Si A es un conjunto, $\{ \theta \subseteq A \times A \mid \theta$ es Transitiva (de equivalencia) $\}$ son sistemas de cerradura en $A \times A$. En el caso "transitiva" denotaremos el operador inducido por Γ_T . Nótese que si $\rho \subseteq A \times A$, $(a_1, a_2) \in \Gamma_T\, \rho$ si y solo si existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_m \in A$ tales que

$\{(a_1,x_1),(x_1,x_2),\dots\dots,(x_m,a_2)\} \subseteq \rho$.

Si $A \in K_\tau$, $\{\theta \subseteq A \times A \mid \theta$ es congruencia (totalmente invariante) en $A\}$ y $\{M \subseteq A \mid M$ es cerrado en $A\}$ son sistemas de cerradura en $A \times A$ y A respectivamente. En el caso "cerrado en A" denotaremos por Γ el operador inducido.

$\{K \subseteq K_\tau \mid K$ es variedad$\}$ es un sistema de cerradura en K_τ. Por 0.4, el operador inducido es HSP.

0.6 DEFINICIONES.-

Sea $K \subseteq K_\tau$. Sean M conjunto y $F \in K$. F se llama K-LIBRE GENERADO POR M si $F = \Gamma M$ y para cada $A \in K$ y $f : M \longrightarrow A$ función existe un único K_τ-morfismo $\bar{f} : F \longrightarrow A$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ F \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Si además $K = K_\tau$ diremos que F es ABSOLUTAMENTE LIBRE GENERADO POR M

Sea $K \subseteq K_\tau$. Diremos que K es SUB-VARIEDAD DE K_τ si K es variedad. Diremos que K es NO TRIVIAL si K posee al menos una t-álgebra con mas de un elemento. A continuación enunciaremos un caso particular de un teorema de Birkhoff:

0.7 TEOREMA [Birkhoff] .-

Sea K sub-variedad no trivial de K_τ. Entonces para todo conjunto M existe $F_M \in K$ tal que F_M es K-libre generado por M

Sea $A \in K_\tau$ generada por M. A es ALGEBRA DE PEANO EN M si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1) Para toda $i \in I$ y $a \in A^{\lambda_i}$, $f_i(a) \notin M$.

2) Para toda $i, j \in I$, $a \in A^{\lambda_i}$ y $b \in A^{\lambda_j}$ en caso de que $f_i(a) = f_j(b)$ entonces $i = j$ y $a = b$

0.9 TEOREMA.-

Sea $F \in K_\tau$ generado por M. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1) F es absolutamente libre generado por M.

2) F es álgebra de Peano en M. $\triangle$

0.10 DEFINICIONES.-

Sea $t = (\lambda_i)_{i \in I}$ tipo de álgebras. Denotaremos por α_τ el mínimo ordinal infinito tal que para toda $i \in I$ $|\lambda_i| < |\alpha_\tau|$. V_{α_τ} denotará un conjunto de cardinal $|\alpha_\tau|$ y $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$ una t-álgebra absolutamente libre generada por V_{α_τ}, cuya existencia esta garantizada por 0.7. $(\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$ denotará el producto cartesiano de $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \times \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$. (Nótese que si para cada $i \in I$ λ_i es finito, $\alpha_\tau = \omega$). Si $\Sigma \subseteq (\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$ definimos

$$m\Sigma := \{ A \in K_\tau \mid \text{para todo } \varphi \in \mathrm{Hom}_{K_\tau}(\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau), A) \text{ y } (p,q) \in \Sigma,\ \varphi(p) = \varphi(q) \}$$

y se llama la clase de los MODELOS DE Σ. Si $K \subseteq K_\tau$ definimos

$$eK := \{ (p,q) \in (\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2 \mid \text{para todo } A \in K \text{ y } \varphi \in \mathrm{Hom}_{K_\tau}(\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau), A),\ \varphi(p) = \varphi(q) \}$$

y se llama conjunto de ECUACIONES DE K.

0.11 LEMA.-

Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq (\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$ y $K_1, K_2 \subseteq K_\tau$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) Si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ entonces $m\Sigma_2 \subseteq m\Sigma_1$.

ii) Si $K_1 \subseteq K_2$ entonces $eK_2 \subseteq eK_1$.

iii) $\Sigma_1 \subseteq em\Sigma_1$ y $K_1 \subseteq meK_1$.

iv) $mem\Sigma_1 = m\Sigma_1$ y $emeK_1 = eK_1$.

v) $\Sigma_1 = em\Sigma_1$ si y solo si existe $K \subseteq K_\tau$ tal que $\Sigma_1 = eK$.

vi) $K_1 = meK_1$ si y solo si existe $\Sigma \subseteq (\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$ tal que $K_1 = m\Sigma$.

Sea $\Sigma \subseteq (\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$. Σ se llama CERRADO si $\Sigma = em\Sigma$.

Sea $K \subseteq K_\tau$. K se llama CERRADA si $K = meK$.

0.12 TEOREMA.-

Sean K sub-variedad de K_τ, M conjunto con cardinal $|\alpha_\tau|$ y F K-libre generado por M. Entonces $K = HSP(\{F\})$. $\triangle$

0.13 TEOREMA.-

Sean $K \subseteq K_\tau$ y F K-libre generado por V_{α_τ}. Entonces $F \cong \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK$. $\triangle$

0.14 TEOREMA [Birkhoff] .-

Sea $K \subseteq K_\tau$. Entonces K es variedad si y solo si K es cerrada. $\triangle$

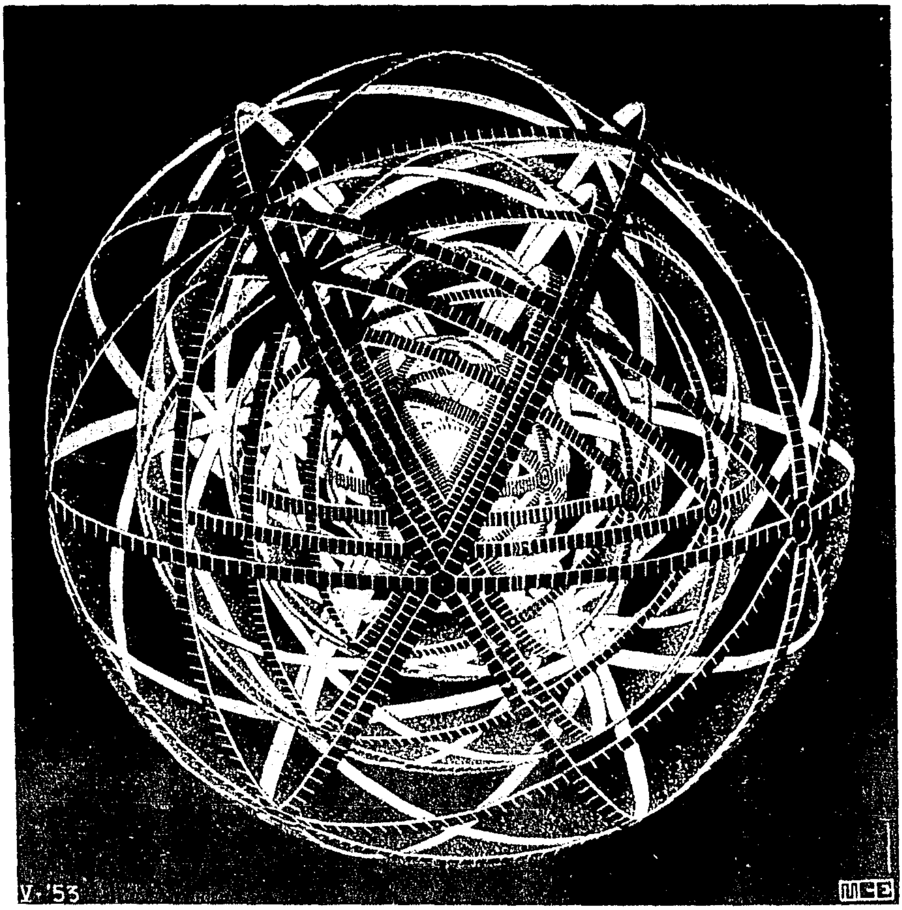
0.15 TEOREMA B.H.Neumann .-

Sea $\Sigma \subseteq (\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$. Entonces Σ es cerrado si y solo si Σ es congruencia totalmente invariante en $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$. $\triangle$

CAP I

VARIEDADES

APROXIMABLES Y UNITARIAS



1.1 NOTACION.-

Si K es sub-variedad de K_τ , $(K_\mu)_{\mu\in M}$ denotará la familia de todas las sub-variedades de K_τ tales que para toda $\mu\in M$, $K \subsetneq K_\mu$.

1.2 DEFINICIONES.-

Sea K sub-variedad de K_τ . Diremos que K es APROXIMABLE si $K=\bigcap_{\mu\in M} K_\mu$; diremos que K es UNITARIA si existe $(p,q)\in eK$ tal que $K=m\{(p,q)\}$.

1.3 OBSERVACION.-

i) Si $x\in \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$, $K_\tau = m\{(x,x)\}$, es decir, K_τ es unitaria.

ii) Como $K_\tau=\bigcap_{\mu\in\emptyset} K_{\tau_\mu}$, K_τ es aproximable.

iii) Sea K sub-variedad de K_τ . Por 0.14 $K=meK$, además es inmediato que $m\left(\bigcup_{(p,q)\in eK}\{(p,q)\}\right)=\bigcap_{(p,q)\in eK} m\{(p,q)\}$. De aquí que $K=\bigcap_{(p,q)\in eK} m\{(p,q)\}$.

1.4 COROLARIO.-

Sea K sub-variedad propia de K_τ . Entonces:

i) Si K no es unitaria, K es aproximable

ii) Si K es aproximable, existe $N\subseteq M$ no vacío tal que $K=\bigcap_{\mu\in N} K_\mu$ y para toda $\mu\in N$, K_μ es unitaria.

Demostración:

" i)" Si K no es unitaria, para toda $(p,q)\in eK$, $K\subsetneq m\{(p,q)\}$ y por 1.3 iii), $K\subseteq\bigcap_{\mu\in M} K_\mu \subseteq \bigcap_{(p,q)\in eK} m\{(p,q)\} = K$.

" ii)" Si K es aproximable, $K=\bigcap_{\mu\in M} K_\mu$. Sea $N:=\{\mu\in M \mid K_\mu$ es unitaria$\}$.

Por 1.3 i) sabemos que K_τ es unitaria y como $K\subsetneq K_\tau$, $N\neq\emptyset$.

Finalmente por definición de N y por 1.3 iii) se obtiene

que $\bigcap_{\mu\in N} K_\mu \subseteq \bigcap_{\mu\in M}\ \bigcap_{(\eta,\xi)\in K_\mu} m\{(\eta,\xi)\} = \bigcap_{\mu\in M} K_\mu = K.$

1.5 EJEMPLOS.-

i) Las siguientes variedades son aproximables:

1) Semigrupos abelianos como sub-variedad de $K_{\langle 2\rangle}$.

2) Monoides como sub-variedad de $K_{\langle 2,0\rangle}$.

3) Grupos como sub-variedad de $K_{\langle 2,1,0\rangle}$.

ii) Las siguientes sub-variedades de $K_{\langle 2\rangle}$ son unitarias:

1) Semigrupos.

2) $\{(A,\cdot)\in K_{\langle 2\rangle} \mid$ para toda $x,y\in A$, $x\cdot y=y\cdot x\}$.

3) $\{(A,\cdot)\in K_{\langle 2\rangle} \mid$ para toda $x,y\in A$, $x\cdot y=y\}$.

4) Para todo $m\in\mathbb{N}$, $\{(A,\cdot)\in K_{\langle 2\rangle} \mid$ para toda $x,y\in A$, $x^m=x\}$.

Demostración:

" i)" Obvio.

" ii)" Sean $\alpha,\beta\in V_\omega$ con $\alpha\neq\beta$. Probaremos a continuación que

$\{(A,\cdot)\in K_{\langle 2\rangle} \mid$ para toda $x,y\in A$, $x\cdot y=y\cdot x\} = m\{(\alpha\cdot\beta,\beta\cdot\alpha)\}$:

"$\subseteq$" Sea $(A,\cdot)\in K_{\langle 2\rangle}$ tal que para toda $x,y\in A$, $x\cdot y=y\cdot x$

Sea $h:\mathcal{T}_{(\omega)}(\omega)\longrightarrow(A,\cdot)$ homomorfismo

$\therefore\ h(\alpha\cdot\beta)=h(\alpha)\cdot h(\beta)=h(\beta)\cdot h(\alpha)=h(\beta\alpha)$. $\therefore (A,\cdot)\in m\{(\alpha\cdot\beta,\beta\alpha)\}$.

"$\supseteq$" Sea $(A,\cdot)\in m\{(\alpha\cdot\beta,\beta\cdot\alpha)\}$. Sean $x,y\in A$

Definimos
$$\begin{aligned}\varphi: V_\omega &\longrightarrow A\\ u &\longmapsto x \quad \text{si } u=\alpha\\ u &\longmapsto y \quad \text{si } u\neq\alpha\end{aligned}$$

como $\mathcal{T}_{(2)}(\omega)$ es $K_{(2)}$-libre generado por V_ω, existe $\bar{\varphi}: \mathcal{T}_{(2)}(\omega)\longrightarrow (A,\cdot)$ homomorfismo tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} V_\omega \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A \\ \mathcal{T}_{(2)}(\omega) \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

finalmente como $\alpha\neq\beta$ y $(A,\cdot)\in m\{(\alpha\cdot\beta,\beta\cdot\alpha)\}$ se obtiene que $x\cdot y=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)=\bar{\varphi}(\alpha\cdot\beta)=\bar{\varphi}(\beta\cdot\alpha)=\varphi(\beta)\cdot\varphi(\alpha)=y\cdot x$.

Los demás ejemplos se resuelven en forma similar.

1.6 OBSERVACION

La siguiente proposición nos será de utilidad para obtener algunos contraejemplos que aparecen mas tarde en este trabajo. En 1.10 probaremos la existencia de variedades no aproximables.

1.7 PROPOSICION.-

Sea $t=(\lambda_i)_{i\in I}$ tipo de álgebras donde para toda $i\in I$, λ_i es finito.

Denotaremos por $(f_i)_{i\in I}$ la familia de operaciones de $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$.

Sea $\Sigma\subseteq(\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2$ tal que $K:=m\Sigma$ es no trivial. Definimos por inducción:

$$\Sigma_0:=\{(x,y)\in(\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2 \mid x=y\}$$

$$\Sigma_1:=\{(r,s)\in(\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau))^2 \mid \text{existen } \varphi\in \operatorname{End}\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \text{ y } (\alpha,\beta)\in\Sigma \text{ tales que } \varphi(\alpha)=r \text{ y } \varphi(\beta)=s \text{ o } \varphi(\beta)=r \text{ y } \varphi(\alpha)=s\}$$

para $m \geq 2$:

$$\Sigma_m := \{(p,q) \in (T_\tau(\alpha_\tau))^2 \mid \text{existen } i \in I,\ (a_\xi)_{\xi<\lambda_i} \text{ y } (b_\xi)_{\xi<\lambda_i} \text{ tales que } p = f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i}),\ q = f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i}) \text{ y para toda } \xi<\lambda_i\ (a_\xi,b_\xi) \in \bigcup_{j=0}^{m-1} \Sigma_j \}.$$

Entonces $eK = \Gamma_T(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$ (cerradura transitiva).

Demostración:

"$\supseteq$" Claramente $\Sigma_0 \subseteq eK$. Sean $(r,s) \in \Sigma_1$, $A \in K$ y $h \in \mathrm{Hom}_{K\tau}(T_\tau(\alpha_\tau), A)$.

Por definición de Σ_1, existen $\varphi \in \mathrm{End}\, T_\tau(\alpha_\tau)$ y $(\alpha,\beta) \in \Sigma$ tales que $\varphi(\alpha)=r$ y $\varphi(\beta)=s$ o $\varphi(\beta)=r$ y $\varphi(\alpha)=s$. Como $(\alpha,\beta)\in\Sigma$, $A \in K = m\Sigma$ y $h\circ\varphi \in \mathrm{Hom}_{K\tau}(T_\tau(\alpha_\tau), A)$, $h\circ\varphi(\alpha) = h\circ\varphi(\beta)$. Por tanto $h(r)=h(s)$. Por tanto $\Sigma_1 \subseteq eK$.

Sea $m \geq 2$ tal que $n<m$ implica que $\Sigma_n \subseteq eK$. Sean $(p,q) \in \Sigma_m$, $A = (A,(g_i)_{i\in I}) \in K$ y $h \in \mathrm{Hom}_{K\tau}(T_\tau(\alpha_\tau), A)$. Por definición de Σ_m existen $i \in I$, $(a_\xi)_{\xi<\lambda_i}$ y $(b_\xi)_{\xi<\lambda_i}$ tales que $p = f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i})$, $q = f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})$ y para toda $\xi<\lambda_i$ $(a_\xi,b_\xi) \in \bigcup_{j=0}^{m-1}\Sigma_j$. Por hipótesis de inducción, para toda $\xi<\lambda_i$ $(a_\xi,b_\xi) \in eK$. Por tanto $h(p) =$

$$h(f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i})) = g_i((h(a_\xi))_{\xi<\lambda_i}) = g_i((h(b_\xi))_{\xi<\lambda_i}) = h(f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})) = h(q)$$

Por tanto $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j \subseteq eK$. Por 0.11 iv) y 0.15 eK es congruencia totalmente invariante en $T_\tau(\alpha_\tau)$; en particular es transitiva, por tanto $\Gamma_T(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j) \subseteq eK$.

"$\subseteq$" Claramente $\Gamma_T(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j)$ es reflexiva y transitiva. Una sencilla inducción muestra que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j$ es simétrica, de aquí que $\Gamma_T(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j)$ es de equivalencia, de hecho es congruencia totalmente invariante: En efecto, Sea θ la relación en $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$ tal que

$Graf\,\theta = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j$. Sean $i\in I$, $(a_\xi)_{\xi<\lambda_i}$ y $(b_\xi)_{\xi<\lambda_i}$ tales que para

toda $\xi<\lambda_i$ $(a_\xi,b_\xi)\in\Gamma_\tau\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j\right)$. Por tanto pata toda $\xi<\lambda_i$

existen $m_\xi\in\mathbb{N}$ y $y_{1\xi},\ldots\ldots,y_{m_\xi}\in\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$ tales que $a_\xi\theta\, y_{1\xi}\theta\cdots\theta\, y_{m_\xi}\theta\, b_\xi$.

Aquí distinguimos 2 casos:

<u>1^{er} CASO</u>: $\{m_\xi \mid \xi<\lambda_i\}=\emptyset$

En este caso $\lambda_i=0$. Por tanto $f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i})$ y $f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})$

representan la i-ésima operación cero-aria en $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$. Por

tanto $\left(f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i}), f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})\right)\in\Sigma_0\subseteq\Gamma_\tau\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j\right)$.

<u>2º CASO</u>: $\{m_\xi\mid\xi<\lambda_i\}\neq\emptyset$

Como λ_i es finito, existe $\gamma<\lambda_i$ tal que $m_\gamma=\max\{m_\xi\mid\xi<\lambda_i\}$

Como $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j$ es reflexiva podemos asumir sin perder generalidad que para toda $\xi<\lambda_i$ $m_\xi=m_\gamma$. De aquí por definición de las Σ_j $(j\geq 2)$ obtenemos que $f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i})\theta\, f_i((y_{1\xi})_{\xi<\lambda_i})\theta$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\theta\, f_i((y_{m_\xi})_{\xi<\lambda_i})\,\theta\, f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})$. Por tanto,

$\left(f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i}), f_i((b_\xi)_{\xi<\lambda_i})\right)\in\Gamma_\tau\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j\right)$.

Por tanto $\Gamma_\tau\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j\right)$ es congruencia. Una sencilla inducción muestra que para todo $m\in\mathbb{N}$ Σ_m es cerrado bajo endomorfismos. Por tanto para todo $\varphi\in End\,\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$ φ preserva θ cadenas finitas. Por tanto $\Gamma_\tau\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Sigma_j\right)$ es congruencia totalmente invariante y de aquí por 0.15 es cerrado lo que por 0.13 implica que si

$A := \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) / \Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$, $A \in m\Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$. (Nótese que como K es no trivial y además por "$\supseteq$" $K \subseteq m\Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$ resulta que $m\Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$ es no trivial, y por 0.7 se cumplen las hipótesis de 0.13).

Claramente $\Sigma \subseteq \Sigma_1$ ($1_{\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)} \in \mathrm{End}\,\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$) por tanto $m\Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j) \subseteq m\Sigma_1 \subseteq m\Sigma = K$.

Por tanto $A \in K$. Sea $\nu : \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) / \Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$ la proyección natural de $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$ en A. Como $A \in K$ para todo $(p,q) \in eK$, $\nu(p) = \nu(q)$. Por tanto $eK \subseteq \Gamma_\tau(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Sigma_j)$. ▲

1.8 OBSERVACION.-

1) Sea $K := \{(A,\cdot) \in K_{\langle 2\rangle} \mid \text{para todo } x,y \in A,\ x\cdot y = y\cdot x\}$. Por 1.5 sabemos que si $\alpha,\beta \in V_\omega$ con $\alpha \neq \beta$, $K = m\{(\alpha\cdot\beta, \beta\cdot\alpha)\}$; de aquí por 0.11 iv) y 0.14 K es sub-variedad de $K_{\langle 2\rangle}$, además es obvio que $K \subsetneq K_{\langle 2\rangle}$. Definimos por inducción:

$\Sigma_0 := \{(x,y) \in (\mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega))^2 \mid x = y\}$

$\Sigma_1 := \{(r,s) \in (\mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega))^2 \mid \text{existen } x,y \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega) \text{ tales que } r = x\cdot y \text{ y } s = y\cdot x\}$

para $m \geq 2$:

$$\Sigma_m := \{(p,q) \in (\mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega))^2 \mid \text{existen } T,T_1,S,S_1 \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega) \text{ tales que } p = T\cdot T_1,\ q = S\cdot S_1 \text{ y } \{(T,S),(T_1,S_1)\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{m-1} \Sigma_i\}$$

Una sencilla aplicación de 1.7 muestra que $eK = \Gamma_\tau(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i)$.

2) Sea $\mathcal{W} := \{(A,\cdot) \in K_{\langle 2\rangle} \mid \text{para todo } x,y,z \in A,\ x\cdot(y\cdot z) = (y\cdot z)\cdot x \text{ y } x\cdot(y\cdot z) = (z\cdot y)\cdot x\}$

Utilizando la misma técnica de 1.5 se prueba que si $\alpha,\beta,\gamma \in V_\omega$ distintos, entonces $\mathcal{W} = m\{(\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma), (\beta\cdot\gamma)\cdot\alpha), (\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma), (\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha)\}$;

de aquí por 0.11 iv) y 0.14 $\mathcal{W}$ es subvariedad de $K_{(2)}$ y obviamente $\mathcal{W}$ es no trivial. Definimos por inducción:

$L_0 := \{(x,y) \in (\mathcal{T}_{(2)}(\omega))^2 \mid x = y\}$

$L_1 := \{(r,s) \in (\mathcal{T}_{(2)}(\omega))^2 \mid$ existen $x,y,z \in \mathcal{T}_{(2)}(\omega)$ tales que:

$$[r = x\cdot(y\cdot z) \text{ y } s = (y\cdot z)\cdot x] \text{ o } [r = (y\cdot z)\cdot x \text{ y } s = x\cdot(y\cdot z)]$$

$$\text{o } [r = x\cdot(y\cdot z) \text{ y } s = (z\cdot y)\cdot x] \text{ o } [r = (z\cdot y)\cdot x \text{ y } s = x\cdot(y\cdot z)]\}$$

para $m \geq 2$:

$L_m := \{(p,q) \in (\mathcal{T}_{(2)}(\omega))^2 \mid$ existen $r, r_1, s, s_1 \in \mathcal{T}_{(2)}(\omega)$ tales que $p = r\cdot r_1$,

$$q = s\cdot s_1 \text{ y } \{(r,s),(r_1,s_1)\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{m-1} L_i\}$$

Una sencilla aplicación de 1.7 muestra que $e\mathcal{W} = \Gamma_T\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i\right)$.

3) Obviamente $K \leq \mathcal{W}$. A continuación mostraremos que $K \lneq \mathcal{W}$:

En efecto, consideremos el sistema algebraico descrito por:

$\cdot$	1	2	3	4
1	4	3	4	4
2	4	4	4	4
3	4	4	4	4
4	4	4	4	4

el cual denotaremos por $(A,\cdot)$

Observemos que para toda $y,z \in A$, $y\cdot z = 3$ o $y\cdot z = 4$, de aquí obtenemos que para toda $x,y,z \in A$, $x\cdot(y\cdot z) = (y\cdot z)\cdot x = (z\cdot y)\cdot x = 4$ por lo que $(A,\cdot) \in \mathcal{W}$, sin embargo $1\cdot 2 = 3$ y $2\cdot 1 = 4$.

4) A continuación vamos a introducir un lema que usaremos para probar que K no es aproximable.

1.9 LEMA.-

Con la notación introducida en 1.8 y definiendo $S := \{(r,s) \in (\mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega))^2 \mid$ existen $x,y \in V_\omega$ tales que $r = x\cdot y$ y $s = y\cdot x\}$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Para todo $x,y \in V_\omega$, $[x\cdot y]_{eK} = [y\cdot x]_{eK} = \{x\cdot y, y\cdot x\}$.

2) Para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x_1,\ldots\ldots,x_m,h,k \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega)$ en caso de que $\{(h,x_1),(x_1,x_2),\ldots\ldots,(x_m,k)\} \cap S \neq \emptyset$ y $\{(h,x_1),(x_1,x_2),\ldots\ldots,(x_m,k)\} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ entonces $(h,k) \in S$ o $h=k$.

3) $\Pi_T\left(\Sigma_0 \cup (\Sigma_1 \setminus S) \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \Sigma_i\right) \subseteq eW$.

Demostración:

"1)" Sean $x,y \in V_\omega$. Por 1.8 1) $(x\cdot y, y\cdot x) \in \Sigma_1 \subseteq \Pi_T\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i\right) = eK$. Además por 0.11 v) y 0.15 eK es de equivalencia. Por tanto $\{x\cdot y, y\cdot x\} \subseteq [x\cdot y]_{eK} = [y\cdot x]_{eK}$. Sea $p \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega)$ tal que $(p, x\cdot y) \in eK$. Por 1.8 1) existe $m \in \mathbb{N}$ y existen $x_1,\ldots\ldots,x_m \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega)$ tales que $\{(p,x_1),(x_1,x_2),\ldots\ldots,(x_m,x\cdot y)\} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$. Probaremos que $x_m \in \{x\cdot y, y\cdot x\}$: En efecto, si $(x_m, x\cdot y) \in \Sigma_0$, $x_m = x\cdot y$. Si $(x_m, x\cdot y) \in \Sigma_1$ existen $a,b \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega)$ tales que $x_m = a\cdot b$ y $x\cdot y = b\cdot a$. Por 0.9 $\mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega)$ es $\langle 2\rangle$-álgebra de Peano generada por V_ω. Por tanto $x=b$ y $y=a$. Por tanto $x_m = y\cdot x$. Si $(x_m, x\cdot y) \in \Sigma_m$ con $m \geq 2$, existen $r, r_1, s, s_1 \in \mathcal{T}_{\langle 2\rangle}(\omega)$ tales que $x_m = r\cdot r_1$, $x\cdot y = s\cdot s_1$ y

$\{(T,S),(T_1,S_1)\} \subseteq \bigcup_{i\in N}\Sigma_i$. Por ser $\mathcal{T}_{(2)}(W)$ (2)- álgebra de Peano generada por V_W, $x=S$ y $y=S_1$. Además como $x \notin V_W$, x no puede ser expresado como un producto de elementos de $\mathcal{T}_{(2)}(W)$. Por tanto $\{(T,x),(T_1,y)\} \subseteq \bigcup_{i\in N}\Sigma_i$ y por definición de las Σ_i, $(T,x)\in\Sigma_0$. Similarmente $(T_1,y)\in\Sigma_0$. Por tanto $T=x$ y $T_1=y$. Por tanto $x_m = TT_1 = x\cdot y$. Repitiendo el mismo argumento a $x_{m-1},\dots,x_1,P$ se obtiene que $P\in\{x\cdot y, y\cdot x\}$ Por tanto $[x\cdot y]_{eK} = [y\cdot x]_{eK} = \{x\cdot y, y\cdot x\}$.

" 2)" Sea $m\in N$. Sean $x_1,\dots,x_m, h,k\in\mathcal{T}_{(2)}(W)$ tales que $\{(h,x_1),\dots,(x_m,k)\}\cap S\neq\emptyset$ y $\{(h,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_m,k)\}\subseteq\bigcup_{i\in N}\Sigma_i$. Por 1.8 1) $\bigcup_{i\in N}\Sigma_i \subseteq \Gamma_T(\bigcup_{i\in N}\Sigma_i) = eK$ y por definición de S existen $x,y\in V_W$ tales que $(x\cdot y, y\cdot x)\in\{(h,x_1),\dots,(x_m,k)\}$. Por tanto obtenemos que $(x\cdot y, y\cdot x)\in\{(h,x_1),\dots,(x_m,k)\}\subseteq eK$. De aquí por 1) se sigue que $\{h,x_1,\dots,x_m,k\} = \{x\cdot y, y\cdot x\}$. Finalmente por definición de S se obtiene que $(h,k)\in S$ o $h=k$.

" 3)" Por 1.8 1) y 2) $\Sigma_0 = L_0 = \Gamma_T(\bigcup_{i\in N} L_i) = eW$. Por tanto $\Sigma_0 \subseteq eW$. Sea $(P,Q)\in\Sigma_1\setminus S$. Por definición de Σ_1 y de S , existen $x,x_1\in\mathcal{T}_{(2)}(W)$ tales que $P=x\cdot x_1$, $Q=x_1\cdot x$ y $\{x,x_1\}\not\subseteq V_W$. Como V_W genera a $\mathcal{T}_{(2)}(W)$ y $\{x,x_1\}\not\subseteq V_W$, por tanto existen $y,z\in\mathcal{T}_{(2)}(W)$ tales que $x_1=y\cdot z$ o $x=y\cdot z$. Por tanto $(P,Q)=(x\cdot(y\cdot z),(y\cdot z)\cdot x)$ o $(P,Q)=((y\cdot z)\cdot x_1, x_1\cdot(y\cdot z))$. Por tanto, por definición de L_1 $(P,Q)\in L_1\subseteq\Gamma_T(\bigcup_{i\in N} L_i) = eW$. Por tanto $\Sigma_1\setminus S\subseteq eW$.

Antes de suponer la hipótesis de inducción conviene

demostrar que $\Sigma_2 \subseteq e\mathcal{W}$:

Sea $(p,q)\in\Sigma_2$. Por definición de Σ_2 existen $T,T_1,S,S_1\in \mathcal{C}_{(2)}(\omega)$

tales que $p=T\cdot T_1$, $q=S\cdot S_1$ y $\{(T,S),(T_1,S_1)\}\subseteq \Sigma_0\cup\Sigma_1$. Aquí

distinguimos 4 casos:

<u>1er CASO</u>: $(T,S)\in\Sigma_0$ y $(T_1,S_1)\in\Sigma_0$.

Por definición de Σ_0, $T=S$ y $T_1=S_1$. Por tanto $p=q$ y

por definición de L_0 y 1.8 1) $(p,q)\in L_0\subseteq \Pi_T(\bigcup_{i\in N} L_i) = e\mathcal{W}$.

<u>2^o CASO</u>: $(T,S)\in\Sigma_0$ y $(T_1,S_1)\in\Sigma_1$.

Por definición de Σ_0 y Σ_1, $T=S$ y existen $x,y\in\mathcal{C}_{(2)}(\omega)$

tales que $T_1=x\cdot y$ y $S_1=y\cdot x$. Por tanto $(p,q)=(T\cdot(x\cdot y),T\cdot(y\cdot x))$

Por definición de L_1 , $\{(T\cdot(x\cdot y),(y\cdot x)\cdot T),((y\cdot x)\cdot T,T\cdot(y\cdot x))\}\subseteq L_1$

Por tanto $(p,q)\in \Pi_T(\bigcup_{i\in N} L_i) = e\mathcal{W}$.

<u>3er CASO</u>: $(T,S)\in\Sigma_1$ y $(T_1,S_1)\in\Sigma_0$.

Similarmente al 2^o caso se obtiene que existen $x,y\in\mathcal{C}_{(2)}(\omega)$

tales que $(p,q)=((x\cdot y)\cdot T_1,(y\cdot x)\cdot T_1)\in \Pi_T(\bigcup_{i\in N} L_i)\subseteq e\mathcal{W}$.

<u>4^o CASO</u>: $(T,S)\in\Sigma_1$ y $(T_1,S_1)\in\Sigma_1$.

Por definición de Σ_1 , existen $x,y,x_1,y_1\in\mathcal{C}_{(2)}(\omega)$ tales

que $T=x\cdot y$, $S=y\cdot x$, $T_1=x_1\cdot y_1$ y $S_1=y_1\cdot x_1$. Por tanto

$(p,q)=((x\cdot y)\cdot(x_1\cdot y_1),(y\cdot x)\cdot(y_1\cdot x_1))$. Por definición de L_1

$\{((x\cdot y)\cdot(x_1\cdot y_1),(y_1\cdot x_1)\cdot(x\cdot y)),((y_1\cdot x_1)\cdot(x\cdot y),(y\cdot x)\cdot(y_1\cdot x_1))\}\subseteq L_1$

por tanto $(p,q)\in \Gamma_1(\bigcup_{i\in N} L_i) = e\mathcal{W}$.

Por tanto $\Sigma_2 \subseteq e\mathcal{W}$. Sea $n \geq 3$ tal que para $2 \leq m < n$, $\Sigma_m \subseteq e\mathcal{W}$.

Sea $(p,q)\in \Sigma_n$. Por definición de Σ_n , existen $r, r_1, s, s_1 \in \mathcal{T}_{(2)}(w)$

tales que $p = r\cdot r_1$, $q = s\cdot s_1$ y $\{(r,s), (r_1,s_1)\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \Sigma_i$

Distinguimos 2 casos:

<u>1^er^ CASO:</u> $\{(r,s),(r_1,s_1)\} \subseteq \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

Por definición de Σ_2 se tiene que $(p,q)\in \Sigma_2$. Como $\Sigma_2 \subseteq e\mathcal{W}$

por tanto $(p,q)\in e\mathcal{W}$.

<u>2^o^ CASO:</u> $(r,s)\notin \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ o $(r_1,s_1)\notin \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

Aquí distinguimos 2 sub-casos:

<u>1^er^ SUB-CASO:</u> $(r,s)\notin \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

Como $(r,s)\in \bigcup_{i=0}^{n-1} \Sigma_i$, por tanto existe $m \in \{2,\ldots,n-1\}$

tal que $(r,s)\in \Sigma_m \subseteq e\mathcal{W}$. (Por hipótesis de inducción).

Por 0.11 v) y 0.15 $e\mathcal{W}$ es congruencia, por lo que

podemos asumir sin perder generalidad que $(r_1,s_1)\notin e\mathcal{W}$.

Como $(r_1,s_1)\in \bigcup_{i=0}^{n-1} \Sigma_i$ y por hipótesis de inducción para

$2 \leq j < n$, $\Sigma_j \subseteq e\mathcal{W}$, por tanto $(r_1,s_1)\in \Sigma_0 \cup \Sigma_1$

pero ya probamos que $\Sigma_0 \subseteq e\mathcal{W}$. Por tanto $(r_1,s_1)\in \Sigma_1$

Por definición de Σ_1 , existen $x,y \in \mathcal{T}_{(2)}(w)$ tales que

$r_1 = x\cdot y$ y $s_1 = y\cdot x$. Como $(r,s)\in e\mathcal{W}$ que es congruencia

y $(y\cdot x, y\cdot x)\in L_0 \subseteq e\mathcal{W}$, por tanto $(r\cdot(y\cdot x), s\cdot(y\cdot x)) \in e\mathcal{W}$.

Pero por definición de L_1, se tiene que

$\{(T\cdot(x\cdot y),\ (y\cdot x)\cdot T),\ ((y\cdot x)\cdot T,\ T\cdot(y\cdot x))\} \subseteq L_1$. De aquí

por 1.8 2) $(T\cdot(x\cdot y), T\cdot(y\cdot x)) \in \Pi_T(\bigcup_{i\in N} L_i) = e\mathcal{W}$

Por tanto como $e\mathcal{W}$ es transitiva $(T\cdot(x\cdot y), S\cdot(y\cdot x)) \in e\mathcal{W}$.

Por tanto $(p,q) \in e\mathcal{W}$.

2º SUB-CASO:

En forma análoga al 1er sub-caso se obtiene que $(p,q)\in e\mathcal{W}$.

Por tanto $\Sigma_0 \cup (\Sigma_1\setminus S) \cup \bigcup_{i\in N\setminus\{0,1\}} \Sigma_i \subseteq e\mathcal{W}$ que es transitiva

Por tanto $\Pi_T(\Sigma_0 \cup (\Sigma_1\setminus S) \cup \bigcup_{i\in N\setminus\{0,1\}} \Sigma_i) \subseteq e\mathcal{W}$. ▲

1.10 PROPOSICION.-

Sea $K := \{(A,\cdot)\in K_{(2)} \mid \text{para todo } x,y\in A,\ x\cdot y = y\cdot x\}$. Entonces K es una variedad no aproximable.

Demostración:

Emplearemos la terminología introducida en 1.8 y 1.9. Recordemos (1.1) que $(K_\mu)_{\mu\in M}$ es la familia de todas las sub-variedades de $K_{(2)}$ tales que para toda $\mu\in M$, $K \subsetneq K_\mu$.

Probaremos que para toda $\mu\in M$, $\mathcal{W} \subseteq K_\mu$: En efecto, si $\mu\in M$ y $(h,k)\in eK_\mu$ por ser $K\subseteq K_\mu$, $(h,k)\in eK$, y por 1.8 1), existe $m\in N$ y existen $x_1,\dots,x_m\in \mathcal{T}_{(2)}(\omega)$ tales que $\{(h,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_m,k)\} \subseteq \bigcup_{i\in N}\Sigma_i$. Si $h=k$ por 1.8 2) $(h,k)\in L_0 \subseteq e\mathcal{W}$. Si $h\neq k$ probaremos que $(h,k)\notin S$:

Supongamos que $(h,k)\in S$. Por definición de S existen $x,y\in V_\omega$ tales que $h=x\cdot y$ y $k=y\cdot x$. Como $h\neq k$, $x\neq y$. Además como $K\subsetneq K_\mu$ existe $(B,\cdot)\in K_\mu$ y existen $b_1,b_2\in B$ tales que $b_1\cdot b_2\neq b_2\cdot b_1$.

Sea
$$\begin{aligned} \varphi : V_\omega &\longrightarrow B \\ \Delta &\longmapsto b_1 \text{ si } \Delta = x \\ \Delta &\longmapsto b_2 \text{ si } \Delta \neq x \end{aligned}$$
. Como $\mathcal{T}_\omega(\omega)$ es K_∞-libre generado por V_ω existe $\bar\varphi : \mathcal{T}_\omega(\omega) \longrightarrow (B,\cdot)$ homomorfismo tal que conmute el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} V_\omega \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & B \\ \mathcal{T}_\omega(\omega) \arrow[ur, "\bar\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Como $(h,k)\in eK_\mu$ y $(B,\cdot)\in K_\mu$, $\bar\varphi(h)=\bar\varphi(k)$. Además como $x\neq y$, por la definición de φ y la conmutatividad del triángulo anterior,

$$b_1\cdot b_2 = \varphi(x)\cdot\varphi(y) = \bar\varphi(x)\cdot\bar\varphi(y) = \bar\varphi(x\cdot y) = \bar\varphi(h) = \bar\varphi(k) = \bar\varphi(y\cdot x) = \bar\varphi(y)\cdot\bar\varphi(x) = b_2\cdot b_1 .$$

lo cuál es una contradicción. Por tanto si $h\neq k$, $(h,k)\notin S$ y como $\{(h,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_n,k)\}\subseteq \bigcup_{i\in N}\Sigma_i$ por 1.9 2) se obtiene que $\{(h,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_n,k)\}\cap S=\emptyset$. Por tanto $(h,k)\in \Pi_T\left(\Sigma_0\cup(\Sigma_1\setminus S)\cup \bigcup_{i\in N\setminus\{0,1\}}\Sigma_i\right)$ que a su vez por 1.9 3) esta contenido en $e\mathcal{W}$. Por tanto $eK_\mu\subseteq e\mathcal{W}$ y por 0.11 i) y 0.14 $\mathcal{W}=me\mathcal{W}\subseteq meK_\mu=K_\mu$. Por tanto para toda $\mu\in M$, $\mathcal{W}\subseteq K_\mu$. Por 1.8 3) sabemos que $K\subsetneq\mathcal{W}$, por tanto existe $\mu_0\in M$ tal que $\mathcal{W}=K_{\mu_0}$. Por tanto $K\subsetneq\mathcal{W}=\bigcap_{\mu\in M}K_\mu$. Por tanto K no es aproximable. ▲

1.11 OBSERVACION.-

1) En 1.10 probamos que $K\subsetneq\mathcal{W}=\bigcap_{\mu\in M}K_\mu$. Además en 1.8 3)

mostramos un sistema algebráico $(A,\cdot)\in \mathcal{U}\setminus K$. Heuristicamente esto nos dice que $(A,\cdot)$ " satisface todos los corolarios no triviales de la ecuación $x\cdot y = y\cdot x$ y sin embargo no satisface la ecuación $x\cdot y = y\cdot x$."

2) La variedad K introducida en 1.10 es una sub-variedad propia de $K_{\langle 2\rangle}$ que es unitaria y no aproximable. Esto nos conduce a plantear el siguiente problema: ¿ Serán todas las sub-variedades propias y unitarias de K_2 no aproximables ? . La respuesta es que no, concretamente tenemos la siguiente proposición :

1.12 PROPOSICION.-

Definimos para cada $m\in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $K_m := \{(A,\cdot)\in K_{\langle 2\rangle} \mid$ para todo $x\in A,\ x^m = x\}$.
Entonces $(K_m)_{m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ es una familia de sub-variedades propias de $K_{\langle 2\rangle}$ tales que para todo $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, K_m es unitaria y aproximable.

Demostración:

Sea $\alpha\in V_\omega$. Con la misma técnica que usamos en 1.5 ii) se obtiene que para todo $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $K_m = m\{(\alpha^m,\alpha)\}$. De aquí por 0.11 vi) y 0.14 para todo $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, K_m es sub-variedad (obviamente propia) de $K_{\langle 2\rangle}$. Además por 1.2 para toda $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, K_m es unitaria. Sea $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Demostraremos a continuación que K_m es aproximable:

1er CASO: $n=2$.

Observemos que $K_2 \subseteq K_3$. (si $x^2=x$, $x^3=x^2.x=x.x=x^2=x$) . Además el sistema algebráico descrito por

$\cdot$	a	b
a	b	a
b	a	b

muestra que $K_1 \subsetneq K_3$. ($a^2 \neq a$ pero $a^3=a$ y $b^3=b$) . Por otro lado $K_2 \subseteq K_4$ (si $x^2=x$, ya vimos que $x^3=x$ de donde $x^4=x^3.x=x.x=x^2=x$) . Además el sistema algebráico descrito por

$\cdot$	a	b	c
a	b	b	b
b	c	b	b
c	a	b	c

muestra que

$K_2 \subsetneq K_4$. ($a^2 \neq a$ pero $a^4=a$, $b^4=b$ y $c^4=c$) . Por tanto

$K_2 \subseteq \bigcap_{\mu \in M} K_{2\mu} \subseteq K_3 \cap K_4$. Pero $K_3 \cap K_4 \subseteq K_2$. (si $x^3=x$ y $x^4=x$, $x^2=x.x=x^3.x=x^4=x$) . Por tanto $K_2 = \bigcap_{\mu \in M} K_{2\mu}$. Por tanto K_2 es aproximable.

2º CASO: $n>2$.

Sea $W := \{ (A,\cdot) \in K_{(2)} \mid$ para todo $x \in A$, $x^{2n-2}=x^{n-1} \}$. Sea $\alpha \in V_\omega$. Con la misma técnica de 1.5 ii) se tiene que $W = m\{ (\alpha^{2n-2}, \alpha^{n-1}) \}$.

De aquí por 0.11 vi) y 0.14 W es variedad. Observemos que $K_n \subseteq W$. (si $x^n=x$ obviamente $x^{2n-2}=x^{n-1}$). De aquí obtenemos que $K_n \subseteq K_{2n-1}$. (si $x^n=x$ y $x^{2n-2}=x^{n-1}$, $x^{2n-1}=x^{2n-2}.x=x^{n-1}.x=x^n=x$).

El sistema algebráico descrito por :

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & \cdots & m \\
\hline
1 & 2 & & & \\
2 & 3 & & & \\
\vdots & \vdots & & 2 & \\
m-2 & m-1 & & & \\
m-1 & m & & & \\
m & 2 & & &
\end{array}
$$

es decir, para $k,\ell\in\{1,\dots,m\}$ $k\cdot\ell := \begin{cases} 2 & \text{si } \ell\neq 1 \\ 2 & \text{si } \ell=1 \text{ y } k=m \\ k+1 & \text{si } \ell=1 \text{ y } k\neq m \end{cases}$

muestra que $K_m \subsetneq \mathcal{V}$. (claramente $m-1 = 1^{m-1} = 1^{2m-2}$. Además si $x\in\{2,\dots,m\}$, $2 = x^{m-1} = x^{2m-2}$. Sin embargo $1^m = m \neq 1$).

Por otro lado el sistema algebráico descrito por :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & & & 2m-2 \\
\hline
1 & 2 & & & & & \\
2 & 3 & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 2 & \\
\vdots & \vdots & & & 4 & & \\
 & & & 2 & & \ddots & \\
2m-3 & 2m-2 & & & & & \\
2m-2 & 1 & & & & & 2m-2
\end{array}
$$

es decir, para $k,\ell\in\{1,\dots,2m-2\}$ $k\cdot\ell := \begin{cases} 2 & \text{si } \ell\neq 1 \text{ y } k\neq \ell \\ k & \text{si } \ell\neq 1 \text{ y } k=\ell \\ 1 & \text{si } \ell=1 \text{ y } k=2m-2 \\ k+1 & \text{si } \ell=1 \text{ y } k\neq 2m-2 \end{cases}$

muestra que $K_m \subsetneq K_{2m-1}$. (claramente $1^{2m-1}=1$. Observemos que si $x\in\{2,\dots,2m-2\}$, $x^2=x$ de donde se obtiene que si $x\in\{2,\dots,2m-2\}$, $x^{2m-1}=x$. Sin embargo como $m>2$, $2m-2>m$, por lo que $1^m = m\neq 1$).

Por tanto $K_m \subseteq \bigcap_{\mu\in M} K_{m_\mu} \subseteq \mathcal{V}\cap K_{2m-1}$. Pero $\mathcal{V}\cap K_{2m-1}\subseteq K_m$. (si $x^{2m-2}=x^{m-1}$ y $x^{2m-1}=x$, $x^m = x^{m-1}\cdot x = x^{2m-2}\cdot x = x^{2m-1}=x$).

Por tanto $K_m = \bigcap_{\mu\in M} K_{m_\mu}$. Por tanto K_m es aproximable. ▲

1.13 OBSERVACION.-

Sea $t = \langle 0,0,0\rangle$. Denotaremos por comodidad las $K_{\langle 0,0,0\rangle}$-álgebras como parejas $(A,(a_1,a_2,a_3))$ donde A es un conjunto y a_1,a_2,a_3 son los tres puntos distinguidos de A . A continuación probaremos la existencia de variedades no unitarias.

1.14 PROPOSICION.-

Sea $K := \{(A,(a_1,a_2,a_3)) \in K_{\langle 0,0,0\rangle} \mid a_1=a_2=a_3\}$. Entonces K es una variedad no unitaria.

Demostración:

Sean $K_1 := \{(A,(a_1,a_2,a_3)) \in K_{\langle 0,0,0\rangle} \mid a_1=a_2\}$, $K_2 := \{(A,(a_1,a_2,a_3)) \in K_{\langle 0,0,0\rangle} \mid a_2=a_3\}$

y $K_3 := \{(A,(a_1,a_2,a_3)) \in K_{\langle 0,0,0\rangle} \mid a_1=a_3\}$.

Sean d_1, d_2, d_3 los tres puntos distinguidos de $\mathcal{T}_{\langle 0,0,0\rangle}(\omega)$. Obviamente

$K = m\{(d_1,d_2),(d_2,d_3)\}$, $K_1 = m\{(d_1,d_2)\}$, $K_2 = m\{(d_2,d_3)\}$ y $K_3 = m\{(d_1,d_3)\}$

Por 0.11 vi) y 0.14 se obtiene que K, K_1, K_2, K_3 son sub-variedades de $K_{\langle 0,0,0\rangle}$. Una sencilla aplicación de 1.7 nos muestra que

$$eK = \{(x,y) \in (\mathcal{T}_{\langle 0,0,0\rangle}(\omega))^2 \mid x=y\} \cup \{(d_1,d_2),(d_2,d_1),(d_2,d_3),(d_3,d_2),(d_1,d_3),(d_3,d_1)\}$$

Obviamente tenemos que:

i) Para todo $x \in \mathcal{T}_{\langle 0,0,0\rangle}(\omega)$, $m\{(x,x)\} = K_{\langle 0,0,0\rangle}$

ii) $K \subsetneq K_{\langle 0,0,0\rangle}$

iii) $m\{(d_2,d_1)\} = m\{(d_1,d_2)\} = K_1 \supsetneq K$, $m\{(d_3,d_2)\} = m\{(d_2,d_3)\} = K_2 \supsetneq K$

y $m\{(d_3,d_1)\} = m\{(d_1,d_3)\} = K_3 \supsetneq K$

Por tanto, para todo $(p,q) \in eK$, $K \neq m\{(p,q)\}$. Por tanto K no es unitaria. ▲

1.15 LEMA.-

Sea $\mathcal{W}$ sub-variedad no trivial de K_τ . Sea $\nu_{e\mathcal{W}}: T_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W}$ la proyección natural. Sea h la composición $V_{\alpha_\tau} \xhookrightarrow{i} T_\tau(\alpha_\tau) \xrightarrow{\nu_{e\mathcal{W}}} T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W}$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) $h^{|\mathrm{Im}\,h}: V_{\alpha_\tau} \longrightarrow \mathrm{Im}\,h$ es biyectiva

2) $T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W}$ es $\mathcal{W}$-libre generado por $\mathrm{Im}\,h$

3) $\mathcal{W} = HSP(\{T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W}\})$.

Demostración:

Como $\mathcal{W}$ es no trivial, por 0.7 existe $F \in \mathcal{W}$ tal que F es $\mathcal{W}$-libre generado por V_{α_τ} . Sea $f: T_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow F$ el único homomorfismo tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\tau} \arrow[r] \arrow[d] & F \\ T_\tau(\alpha_\tau) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Como $F \in \mathcal{W}$, para todo $x, y \in V_{\alpha_\tau}$ si $(x,y) \in e\mathcal{W}$, $f(x) = f(y)$ por lo que la conmutatividad del diagrama anterior implica que $x = y$. y de aquí se obtiene 1). Para probar 2) primero observemos que $e\mathcal{W} = \ker f$: En efecto, como $F \in \mathcal{W}$, $e\mathcal{W} \subseteq \ker f$. Por otro lado si $(p,q) \in \ker f$ y $k: T_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow A$ es homomorfismo con $A \in \mathcal{W}$ por ser F $\mathcal{W}$-libre generado por V_{α_τ} , existe $g: F \longrightarrow A$ homomorfismo tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\tau} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "i"'] & T_\tau(\alpha_\tau) \arrow[r, "k"] & A \\ F \arrow[urr, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Observemos que en el diagrama
$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\tau} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "i"'] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\varphi"] & A \\ & F \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

el triángulo de la izquierda y el diagrama exterior son conmutativos . Por tanto conmuta el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\tau} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[r, "k"] & A \\ \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[urr, "g\circ\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

Por ser $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$ K_τ -libre generado por V_{α_τ} , $g\circ\varphi$ es el único homomorfismo que hace conmutativo el diagrama anterior. Pero obviamente k tiene esta propiedad. Por tanto $k = g\circ\varphi$. Por tanto como $(p,q)\in \ker\varphi$, $k(p)=k(q)$. Por tanto $(p,q)\in e\mathcal{W}$. Por tanto $e\mathcal{W} = \ker\varphi$

Como
$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\tau} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & F \\ \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$
y V_{α_τ} genera a F , φ es suryectiva y como $e\mathcal{W} = \ker\varphi$

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} &\longrightarrow F \\ [x]_{e\mathcal{W}} &\longrightarrow \varphi(x) \end{aligned}$$
es isomorfismo. Claramente $\psi(\mathrm{Im}\,h) = V_{\alpha_\tau}$ que genera a F . Por tanto $\mathrm{Im}\,h$ genera a $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W}$.

Sea $\mathcal{L}\in\mathcal{W}$, sea $\sigma : \mathrm{Im}\,h \longrightarrow \mathcal{L}$ función. Por abuso del lenguaje escribiremos h y h^{-1} en lugar de $h^{|\mathrm{Im}\,h}$ y $(h^{|\mathrm{Im}\,h})^{-1}$ respectivamente. (Por 1) $h^{|\mathrm{Im}\,h}$ es biyectiva). Sea $s : F \longrightarrow \mathcal{L}$ el único homomorfismo tal que conmuta el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\tau} \arrow[r, "\sigma\circ h"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{L} \\ F \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Claramente cada una de las partes del siguiente diagrama es conmutativa:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}\,h \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & V_{\alpha_\tau} \arrow[r, "\sigma\circ h"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathcal{L} \\ \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} \arrow[r, "\psi"'] & F \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Por tanto conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Im} h \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{L} \\ \mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/e\mathcal{U} \arrow[ur, "s\circ\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Observemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_\iota} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & \operatorname{Im} h \arrow[d, "i"] \\ F \arrow[r, "\psi^{-1}"'] & \mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/e\mathcal{U} \end{tikzcd}$$

conmuta.

de donde la unicidad de s implica la unicidad de $s\circ\psi$, lo cuál prueba 2). Finalmente 3) es consecuencia inmediata de 1), 2) y 0.12. ▲

1.16 OBSERVACION.-

En la situación 1.15 diremos por abuso del lenguaje que $\mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/e\mathcal{U}$ es $\mathcal{U}$-libre generado por V_{α_ι} y escribiremos $V_{\alpha_\iota} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/e\mathcal{U}$ en lugar de la inclusión $\operatorname{Im} h \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/e\mathcal{U}$

A continuación probaremos que si K es sub-variedad propia no trivial de K_ι , entonces K es aproximable si y solo si $\mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/eK$ es "colímite" de $\left(\mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/eK_\mu\right)_{\mu\in M}$. Concretamente tenemos el siguiente teorema:

1.17 TEOREMA.-

Sea K sub-variedad propia no trivial de K_ι . Sea Δ la categoría asociada al conjunto parcialmente ordenado $((K_\mu)_{\mu\in M}, \supseteq)$.

Sea $F\colon \Delta \longrightarrow K_\iota$ donde $F(K_\mu) := \mathcal{T}_\iota(\alpha_\iota)/eK_\mu$ y si (μ,j) es el único Δ-morfismo de $K_\mu \longrightarrow K_j$ definimos $F(\mu,j)\colon F(K_\mu) \longrightarrow F(K_j)$ el único K_ι-morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_c} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_j \\ \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_\mu \arrow[ur, "F(\mu,j)"'] & \end{tikzcd}$$

Definimos para cada $\mu \in M$, $\ell_\mu : \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_\mu \longrightarrow \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek$ el único

-morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_c} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek \\ \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_\mu \arrow[ur, "\ell_\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) F es funtor y $\left((\ell_\mu)_{\mu\in M}, \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek\right)$ es pozo natural de F.

ii) K es aproximable si y solo si $\left((\ell_\mu)_{\mu\in M}, \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek\right)$ es colímite de F.

<u>Demostración</u>:

" i)" Por 1.15 1) y 2) y 1.16, $F: \mathrm{Mor}\,\Delta \longrightarrow \mathrm{Mor}\,K_\tau$ es función. (Observese que por ser K no trivial, para toda $\mu \in M$, K_μ es no trivial). Por la unicidad de $F(\mu,j)$, F es funtor. Por otro lado si $K_\mu \longrightarrow K_j$ observemos que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_{\alpha_c} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] \arrow[drr, hook] & & \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek \\ \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_\mu \arrow[rr, "F(\mu,j)"'] & & \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_j \arrow[u, "\ell_j"'] \end{tikzcd}$$

los dos triángulos conmutan. Por tanto conmuta el cuadrado exterior y por la unicidad de ℓ_μ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_\mu \arrow[r, "\ell_\mu"] \arrow[d, "F(\mu,j)"'] & \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek \\ \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek_j \arrow[ur, "\ell_j"'] & \end{tikzcd}$$

Por tanto $\left((\ell_\mu)_{\mu\in M}, \tau_\tau(\alpha_\tau)/ek\right)$ es pozo natural de F.

" ii) " "$\Leftarrow$"

<u>Supongamos</u> que K no es aproximable. Por tanto existe $\omega \in M$ tal que $K_\omega = \bigcap_{\mu \in M} K_\mu$. Definimos para cada $\mu \in M$ $\hat{\ell}_\mu : \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\mu \longrightarrow \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega$ el único K_τ -morfismo tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V_{\alpha_\tau} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega \\
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\mu \arrow[ur, "\hat{\ell}_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

En forma similar a como se hízo en i) se obtiene que $\left((\hat{\ell}_\mu)_{\mu \in M}, \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega\right)$ es pozo natural de F y como $\left((\ell_\mu)_{\mu \in M}, \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK\right)$ es colímite de F ,por tanto existe $h : \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK \longrightarrow \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega$ homomorfismo tal que para toda $\mu \in M$ conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK \arrow[d, "h"'] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\mu \arrow[l, "\ell_\mu"'] \arrow[dl, "\hat{\ell}_\mu"] \\
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega &
\end{tikzcd}$$

En particular como $\omega \in M$, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK \arrow[d, "h"'] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega \arrow[l, "\ell_\omega"'] \arrow[dl, "\hat{\ell}_\omega"] \\
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega &
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de $\hat{\ell}_\omega$, $\hat{\ell}_\omega = 1_{\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega}$. Por tanto h es suryectiva. Como K es variedad por 0.3 K es cerrada bajo la formación de imágenes homomorficas. Por tanto $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega \in K$. Por 1,15 3) $K_\omega = HSP(\{\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega\})$ y como HSP es operador de cerradura $K_\omega = HSP(\{\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\omega\}) \subseteq K$ lo cuál es una contradicción ya que $\omega \in M$. Por tanto K es aproximable.

"$\Rightarrow$"

Sea $((\beta_\mu)_{\mu\in M}, B)$ pozo natural de F . Como K es sub-variedad propia de K_τ , existe $\mu_0 \in M$ tal que $K_\tau = K_{\mu_0}$. Observese que para toda $\mu\in M$, $F(\mu_0,\mu)$ es la proyección natural $\nu_{eK_\mu}: \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\mu$ y que ℓ_{μ_0} es la proyección natural $\nu_{eK}: \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK$.

Como $((\beta_\mu)_{\mu\in M}, B)$ es pozo natural de F , en particular para toda $\mu\in M$ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[r, "\beta_{\mu_0}"] \arrow[d, "\nu_{eK_\mu}"'] & B \\
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK_\mu \arrow[ur, "\beta_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Como para toda $\mu\in M$, ν_{eK_μ} es suryectiva, para toda $\mu\in M$, $\mathrm{Im}\,\beta_{\mu_0} = \mathrm{Im}\,\beta_\mu$. Como para toda $\mu\in M$ K_μ es variedad, por 0.3, para toda $\mu\in M$, K_μ es cerrada bajo la formación de imágenes homomorficas y como K es aproximable, por tanto $\mathrm{Im}\,\beta_{\mu_0} \in \bigcap_{\mu\in M} K_\mu = K$. Como $\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK$ es K -libre generado por V_{α_τ} por tanto existe $h: \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK \longrightarrow \mathrm{Im}\,\beta_{\mu_0}$ homomorfismo tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V_{\alpha_\tau} \arrow[r, "\beta_{\mu_0}|V_{\alpha_\tau}"] \arrow[d] & \mathrm{Im}\,\beta_{\mu_0} \\
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/eK \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Observemos que en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Im}\beta_{\mu_0} & & \\
 & & V_{\alpha_c} \arrow[u, "\beta_{\mu_0}|V_{\alpha_c}"'] \arrow[dll, hook'] \arrow[drr, hook] & & \\
\tau_c(\alpha_c) \arrow[uurr, "\beta_{\mu_0}|^{\operatorname{Im}\beta_{\mu_0}}"] \arrow[rrrr, "\nu_{eK}"'] & & & & \tau_c(\alpha_c)/eK \arrow[uull, "h"']
\end{tikzcd}$$

los tres triángulos interiores son sonmutativos, además $\beta_{\mu_0}|^{\operatorname{Im}\beta_{\mu_0}}$ es el único homomorfismo que hace conmutativo el triángulo de la izquierda, de donde el triángulo exterior conmuta. Denotaremos por ψ la composición $\tau_c(\alpha_c)/eK \xrightarrow{h} \operatorname{Im}\beta_{\mu_0} \xhookrightarrow{i} B$. Por tanto $\psi \circ \nu_{eK} = \beta_{\mu_0}$

En la parte i) probamos que $((\ell_\mu)_{\mu\in M}, \tau_c(\alpha_c)/eK)$ es pozo natural de F, en particular para toda $\mu\in M$ se tiene que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tau_c(\alpha_c) \arrow[r, "\nu_{eK}"] \arrow[d, "\nu_{eK_\mu}"'] & \tau_c(\alpha_c)/eK \\
\tau_c(\alpha_c)/eK_\mu \arrow[ur, "\ell_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado ya sabíamos que para toda $\mu\in M$ conmuta el el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tau_c(\alpha_c) \arrow[r, "\beta_{\mu_0}"] \arrow[d, "\nu_{eK_\mu}"'] & B \\
\tau_c(\alpha_c)/eK_\mu \arrow[ur, "\beta_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto para toda $\mu\in M$, $\psi\circ\ell_\mu\circ\nu_{eK_\mu} = \psi\circ\nu_{eK} = \beta_{\mu_0} = \beta_\mu\circ\nu_{eK_\mu}$

Como para toda $\mu\in M$, ν_{eK_μ} es suryectiva, por tanto para toda $\mu\in M$, $\psi\circ\ell_\mu = \beta_\mu$. Además como ν_{eK} es suryectiva, ψ es el único homomorfismo con esta propiedad.

Por tanto existe un único homomorfismo $\psi : \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/_{eK} \longrightarrow B$

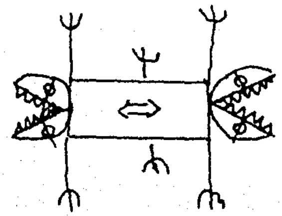
tal que para toda $\mu \in M$ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/_{eK_\mu} \arrow[r, "\ell_\mu"] \arrow[dr, "\beta_\mu"'] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/_{eK} \arrow[d, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Por tanto $\left((\ell_\mu)_{\mu \in M}, \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/_{eK}\right)$ es colímite de F . ▲

1.18 OBSERVACION.-

Finalizamos este trabajo sugiriendo al lector interesado el siguiente problema: Encontrar cuáles son las variedades unitarias que son aproximables y viceversa. En opinión del autor una forma de comenzar a atacar el problema sería intentar resolverlo en algunos casos particulares importantes. Por ejemplo para los siguientes tipos de álgebras: $\langle 2 \rangle$, $\langle 2,0 \rangle$, $\langle 2,1 \rangle$, $\langle 2,1,0 \rangle$.



BIBLIOGRAFIA

[B] Bruns G. Apuntes de Algebra Universal tomados por el Dr. Octavio García en la Universidad de Mc. Master (1971).

[C] Cohn P.M. Universal Algebra. Harper and Row. New York-London (1965).

[G] Grätzer G. Universal Algebra. Van Nostrand. Princeton (1968).

[H.S] Herlich H. Strecker G. Category Theory. Allyn and Bacon. Boston (1973).