UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

ANILLOS AUTOINYECTIVOS Y CATEGORIAS ESPECTRALES

TESIS PROFESIONAL

ISMAEL MUÑOZ MAYA

México, D. F.
1979

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

ANILLOS AUTOINYECTIVOS Y CATEGORÍAS ESPECTRALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA:

ISMAEL ANTONIO MUÑOZ MAYA.

-1979-

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN.

INTRODUCCIÓN.

EL PROPÓSITO FUNDAMENTAL DE ESTE TRABAJO ES MOSTRAR ALGUNAS DE LAS PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES DE LOS ANILLOS AUTOINYECTIVOS Y LAS CATEGORÍAS ESPECTRALES, ASÍ COMO LA RELACIÓN EXISTENTE ENTRE UNOS Y OTRAS.

CONTRARIAMENTE A LO QUE EL TÍTULO HACE SUPONER, SE EMPIEZA ESTE TRABAJO ESTUDIANDO LAS PROPIEDADES DE LAS CATEGORÍAS ESPECTRALES PRIMERO Y POSTERIORMENTE SE TRATAN LAS DE LOS ANILLOS AUTOINYECTIVOS. LA RAZÓN DE ESTE PROCEDER RADICA EN QUE EL TÍTULO ORIGINAL HABÍA SIDO YA REGISTRADO ANTES DE LA REDACCIÓN DEFINITIVA DE ESTE MANUSCRITO, QUE EMPIEZA CON CATEGORÍAS ESPECTRALES JUSTAMENTE

PORQUE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN ESE TEMA SE APLICAN DESPUÉS A LA TEORÍA DE ANILLOS AUTOINYECTIVOS.

A CONTINUACIÓN, DESCRIBIRÉ BREVEMENTE EL CONTENIDO DE ESTA TESIS:

EN EL CAPÍTULO I, EMPIEZO POR DEFINIR LO QUE ES UNA CATEGORÍA DE GROTHENDIECK Y ENUNCIO UN TEOREMA DE POPESCU Y GABRIEL SOBRE REPRESENTACIÓN DE CATEGORÍAS DE GROTHENDIECK. DESPUÉS DE DEFINIR QUÉ SON LAS CATEGORÍAS ESPECTRALES Y ENUMERAR ALGUNOS RESULTADOS ACERCA DE ELLAS, DEDICO EL RESTO DEL CAPÍTULO A DEMOSTRAR EL RESULTADO CENTRAL: QUE DADO CUALQUIER ANILLO A, PODEMOS ASOCIAR A LA CATEGORÍA $\mathcal{M}od$-A UNA CATEGORÍA ESPECTRAL, DENOTADA POR $\mathcal{S}pec$-A, DE UNA MANERA NATURAL. LA CONSTRUCCIÓN QUE SE HACE DE $\mathcal{S}pec$-A ES UN CASO PARTICULAR DE UNA CONSTRUCCIÓN MÁS GENERAL, DEBIDA A GABRIEL. PARA TERMINAR EL CAPÍTULO SE INCLUYEN ALGUNOS EJEMPLOS, QUE COMPLEMENTAN LA TEORÍA HASTA AHÍ DESARROLLADA.

EL CAPÍTULO II ES UNA ESPECIE DE "PUENTE DE ENLACE" ENTRE LOS CAPÍTULOS I Y III. EN ÉL SE ESTABLECEN ALGUNOS RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE REPRESENTACIÓN DE CATEGORÍAS ESPECTRALES, Y EN LA PARTE FINAL SE ENCUENTRA UN EJEMPLO DE ANILLO QUE ES AUTOINYECTIVO DERECHO PERO NO IZQUIERDO.

POR ÚLTIMO, EN EL CAPÍTULO III COMIENZO POR ANALIZAR ALGUNAS PROPIEDADES RELEVANTES DE LOS ANILLOS DE ENDOMORFISMOS DE MÓDULOS INYECTIVOS, CON SUS APLICACIONES OBVIAS A LOS ANILLOS AUTOINYECTIVOS. POSTERIORMENTE SE PRUEBAN ALGUNOS RESULTADOS ACERCA DE LA RELACIÓN ENTRE LAS CONDICIONES SOBRE ANULADORES Y ANILLOS AUTOÍNYECTIVOS. EN LOS EJEMPLOS AL TÉRMINO DEL CAPÍTULO SE APLICA LA TEORÍA DESARROLLADA EN ÉL.

APROVECHO ESTA OPORTUNIDAD PARA EXPRESAR MI SINCERO AGRADECIMIENTO A FRANCISCO RAGGI C., QUIEN ADEMÁS DE DIRIGIR LA PRESENTE TESIS TUVO LA PACIENCIA SUFICIENTE

NOTACIONES Y CONVENCIONES.

NOTACIONES Y CONVENCIONES.

1) TODOS LOS ANILLOS TIENEN 1. A REPRESENTA, EN TODOS LOS CASOS, UN ANILLO.
2) M_A SIGNIFICA QUE M ES UN A-MÓDULO DERECHO. TODOS LOS MÓDULOS CONSIDERADOS SON DERECHOS. $\mathcal{M}$ód-A REPRESENTA LA CATEGORÍA DE MÓDULOS DERECHOS SOBRE EL ANILLO A.
3) $X \xrightarrow{\alpha} \!\!\!\!\!\rightarrow Y$: α ES UN EPIMORFISMO DE X EN Y (P.12).
4) $X \hookrightarrow Y$: LA INCLUSIÓN DE X EN Y ; O BIEN, X ES UN SUBMÓDULO DE Y (P.12).
5) $\mathcal{S}$pec-A : LA CATEGORÍA ESPECTRAL ASOCIADA A $\mathcal{M}$ód-A (P.13).
6) $X \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} Y$: X ES UN SUBMÓDULO ESENCIAL DE Y ; MÁS GENERALMENTE, REPRESENTA MONOMORFISMOS ESENCIALES (P.13).
7) E : EL FUNCTOR CANÓNICO $\mathcal{M}$ód-A $\rightarrow$ $\mathcal{S}$pec-A (P.18).

8) $\bar{x}$: LA CLASE DE X RESPECTO A ALGUNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA (P.20).

9) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$: IDEALES DEL ANILLO A (P.26).

10) $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$: DERECHO, IZQUIERDO, RESPECTIVAMENTE (P.26).

11) $\mathrm{An}_A(x.)$: EL ANULADOR DERECHO DE X EN A; SIMILARMENTE, $\mathrm{An}_A(.x)$ ES ANULADOR IZQUIERDO DE X EN A (P.27).

12) $\langle x \rangle$: EL MÓDULO GENERADO POR X (P.27).

13) $X \overset{\alpha}{\rightarrowtail} Y$: α ES UN MONOMORFISMO DE X EN Y (P.27).

14) COPO : ABREVIATURA DE CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO (P.27).

15) $\mathfrak{D}ir(I,\mathcal{C})$: LA CATEGORÍA DE SISTEMAS DIRECTOS EN $\mathcal{C}$, DONDE I ES UN CONJUNTO DIRIGIDO (P.31).

16) $s(X)$: EL SOCLO DE X, I.E., LA SUMA DE TODOS LOS OBJETOS SIMPLES EN X (P.33).

17) $Q_{máx}(A.)$: EL ANILLO MÁXIMO DE COCIENTES DERECHO DE A (P.34).

18) $(\mathfrak{a}:x)=\{b\in A \mid xb\in\mathfrak{a}\}$. (P.34).

19) $C_I(X)$: LA CÁPSULA INYECTIVA DE X (P.36).

20) $Z(A.)$: EL IDEAL SINGULAR DERECHO DE A; POR DEFINICIÓN, $Z(A.)=\{x\in A \mid \mathrm{An}_A(x.) \overset{e}{\rightarrowtail} A\}$ (P.40).

21) $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}od\text{-}(A,\mathcal{E})$: LA TOPOLOGÍA DE IDEALES ESEN-

CIALES EN A Y LA CATEGORÍA DE MÓDULOS DE COCIENTES RESPECTO A LA TOPOLOGÍA $\mathcal{E}$, RESPECTIVAMENTE (P.40).

22) $\mathcal{A}b$: LA CATEGORÍA DE GRUPOS ABELIANOS (P.42).

23) $J(A)$, O SIMPLEMENTE J: EL RADICAL DE JACOBSON DE A (P.55).

24) $i(\alpha) = An_A(.\alpha)$, $d(\alpha) = An_A(\alpha.)$ (P.62).

CAPÍTULO I

CATEGORÍAS ESPECTRALES.

CAP. I CATEGORÍAS ESPECTRALES

LAS CATEGORÍAS ESPECTRALES SON CASOS PARTICULARES DE CATEGORÍAS DE GROTHENDIECK, ASÍ QUE ES CONVENIENTE APUNTAR PRIMERO ALGUNAS PALABRAS ACERCA DE LAS CATEGORÍAS DE GROTHENDIECK.

UNA CATEGORÍA ABELIANA COCOMPLETA $\mathcal{C}$ SE LLAMA UNA <u>CATEGORÍA DE GROTHENDIECK</u> SI LOS LÍMITES DIRECTOS SON EXACTOS EN $\mathcal{C}$ Y ADEMÁS $\mathcal{C}$ TIENE UN GENERADOR. LAS CATEGORÍAS DE MÓDULOS NOS DAN UNA GRAN VARIEDAD DE EJEMPLOS DE CATEGORÍAS DE GROTHENDIECK. ADEMÁS, ESTAS CATEGORÍAS TIENEN UNA GRAN IMPORTANCIA DENTRO DE LA TEORÍA DE ANILLOS DE COCIENTES, DADO QUE SON JUSTAMENTE LAS QUE APARECEN COMO CATEGORÍAS DE MÓDULOS DE COCIENTES. POR ÚLTIMO, ENUNCIAMOS UN TEOREMA,

DEBIDO A POPESCU Y GABRIEL, QUE REDUCE (AL MENOS EN PRINCIPIO) LA TEORÍA DE CATEGORÍAS DE GROTHENDIECK AL ESTUDIO DE LAS CATEGORÍAS DE MÓDULOS DE COCIENTES. LA DEMOSTRACIÓN NO LA INCLUIMOS POR QUEDAR FUERA DE NUESTRO TEMARIO:

1 TEOREMA (POPESCU Y GABRIEL). SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA DE GROTHENDIECK CON UN GENERADOR U. PONGAMOS $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,U)$ Y SEA $T: \mathcal{C} \to \mathcal{M}ód\text{-}A$ EL FUNCTOR $T(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,C)$. ENTONCES:

(i) T ES PLENO Y FIEL.

(ii) T INDUCE UNA EQUIVALENCIA ENTRE $\mathcal{C}$ Y LA CATEGORÍA $\mathcal{M}ód\text{-}(A,\mathcal{F})$, DONDE $\mathcal{F}$ ES LA TOPOLOGÍA DE GABRIEL MÁS FUERTE EN A PARA LA CUAL TODOS LOS MÓDULOS DE LA FORMA $T(C)$ SON $\mathcal{F}$-CERRADOS. ∎

2 DEFINICIÓN. UNA CATEGORÍA DE GROTHENDIECK ES UNA <u>CATEGORÍA ESPECTRAL</u> SI TODA SUCESIÓN EXACTA CORTA EN $\mathcal{C}$ SE ESCINDE.

EN OTRAS PALABRAS, $\mathcal{C}$ ES ESPECTRAL SI TODO OBJETO DE $\mathcal{C}$ ES INYECTIVO (Y PROYECTIVO TAMBIÉN). LA TEORÍA DE CATEGORÍAS ESPECTRALES

ESTÁ RELACIONADA CON LOS ANILLOS REGULARES, COMO SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE

3 PROPOSICIÓN. SI C ES UN OBJETO DE UNA CATEGORÍA ESPECTRAL $\mathscr{C}$, ENTONCES EL ANILLO $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$ ES REGULAR.

PRUEBA: SEA $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$. ENTONCES α INDUCE $\alpha': C \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\,\alpha$ Y SI DENOTAMOS LA INCLUSIÓN $\mathrm{Im}\,\alpha \hookrightarrow C$ POR i, ES CLARO QUE $\alpha = i\alpha'$. AHORA BIEN, $0 \to \mathrm{Im}\,\alpha \xrightarrow{i} C$ Y $C \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Im}\,\alpha \to 0$ SON EXACTAS, Y POR SER $\mathscr{C}$ UNA CATEGORÍA ESPECTRAL SE ESCINDEN, i.e., $\exists\ \beta': \mathrm{Im}\,\alpha \to C$ Y $\beta'': C \to \mathrm{Im}\,\alpha$ TALES QUE $\alpha'\beta' = 1_{\mathrm{Im}\,\alpha}$ Y $\beta'' i = 1_{\mathrm{Im}\,\alpha}$. DEFINIMOS AHORA $\beta = \beta' \circ \beta''$ Y OBTENEMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ C \arrow[r, shift left, "\alpha'"] \arrow[dr, shift right, "\alpha"'] & \mathrm{Im}\,\alpha \arrow[l, shift left, "\beta'"] \arrow[r] \arrow[d, shift left, "i"] & 0 \\ & C \arrow[u, shift left, "\beta''"] \arrow[ul, shift right, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

POR CONSIGUIENTE:

$$\alpha\beta\alpha = i\alpha'\beta\beta'' i\alpha' = i\alpha' = \alpha,$$

DE DONDE $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$ ES REGULAR. ∎

EN EL SIGUIENTE CAPÍTULO ANALIZAREMOS CON MÁS DETALLE LA CONEXIÓN QUE EXISTE ENTRE CATEGORÍAS

ESPECTRALES Y ANILLOS REGULARES. MIENTRAS TANTO, NOS DEDICAREMOS A LA CONSTRUCCIÓN DE UNA CLASE DE CATEGORÍAS ESPECTRALES. SI A ES UN ANILLO CUALQUIERA, ENTONCES PODEMOS ASOCIAR CON LA CATEGORÍA $\mathcal{M}$ód-A UNA CATEGORÍA ESPECTRAL, QUE DENOTAREMOS MEDIANTE $\mathcal{S}$pec-A, LA CUAL DESCRIBE EN CIERTO SENTIDO EL COMPORTAMIENTO DE LOS MÓDULOS INYECTIVOS EN $\mathcal{M}$ód-A.

SEAN LOS OBJETOS DE $\mathcal{S}$pec-A LOS MISMOS QUE LOS DE $\mathcal{M}$ód-A. PARA $M, N \in \mathcal{M}$ód-A, DEFINIMOS

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(M,N) = \varinjlim \mathrm{Hom}_A(M',N),$$

DONDE EL LÍMITE DIRECTO SE TOMA SOBRE LA FAMILIA DIRIGIDA DE SUBMÓDULOS ESENCIALES M' DE M. USAREMOS EL SÍMBOLO $\overset{\varepsilon}{\hookrightarrow}$ PARA DENOTAR ESENCIALIDAD, I.E., $M' \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$ SIGNIFICA QUE M' ES ESENCIAL EN M. NOS SERÁ DE GRAN UTILIDAD RECORDAR EL SIGUIENTE

4 LEMA. SEA M_A UN MÓDULO CON SUBMÓDULOS $K \hookrightarrow N \hookrightarrow M$ Y $L \hookrightarrow M$. ENTONCES:

(i) $K \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$ SI Y SÓLO SI $K \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} N$ Y $N \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$;

(ii) $K \cap L \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$ SI Y SÓLO SI $K \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$ Y $L \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$;

(iii) $K \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M$ SI Y SÓLO SI $\forall\, 0 \neq x \in M$ $\exists\, a \in A$ TAL QUE $0 \neq xa \in K$. ∎

Más generalmente, tenemos:

5 LEMA. Si $M \overset{e}{\hookrightarrow} N$ y $L \xrightarrow{\beta} N$ es un homomorfismo, entonces $\beta^{-1}(M) \overset{e}{\hookrightarrow} L$.

PRUEBA: Sea $L' \hookrightarrow L$ con $L' \cap \beta^{-1}(M) = 0$. Consideremos el submódulo $\beta(L') \cap M$ de N; entonces es claro que $\beta^{-1}(\beta(L') \cap M) \subset L' \cap \beta^{-1}(M) = 0$. Esto significa que $(\beta(L') \cap M) \cap \operatorname{Im}\beta = 0$, o equivalentemente, que $(\beta(L') \cap \operatorname{Im}\beta) \cap M = 0$, lo qual implica que $\beta(L') \cap \operatorname{Im}\beta = 0$, y como $\beta(L') \subset \operatorname{Im}\beta$ se sigue que $\beta(L') = 0$. De donde $L' \subset \operatorname{Ker}\beta = \beta^{-1}(0) \subset \ldots$
$\ldots \subset \beta^{-1}(M)$. Por tanto, $L' = L' \cap \beta^{-1}(M) = 0$ y la conclusión se sigue. ∎

Definiremos ahora la composición en $\mathcal{S}pec$-A: si $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(L, M)$ está representado por $\alpha : L' \to M$, y $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(M, N)$ está representado por $\beta : M' \to N$, entonces $\alpha^{-1}(M')$ es un submódulo esencial de L' y también de L. Definimos $\psi\varphi$ como el morfismo representado por $\beta\alpha'$ en el diagrama (pág. siguiente). Como esta composición está definida por medio de representantes, hace falta demostrar que está bien definida y, además, que

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(M') \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha'"] & & \\
L' \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha"] & M' \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\beta"] & \\
L \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & M \arrow[r, dashed, "\psi"'] & N
\end{tikzcd}$$

$\alpha' = \alpha|_{\alpha^{-1}(M')}$

(LAS $\hookrightarrow$ REPRESENTAN MONOMORFISMOS ESENCIALES.)

...ES ASOCIATIVA.

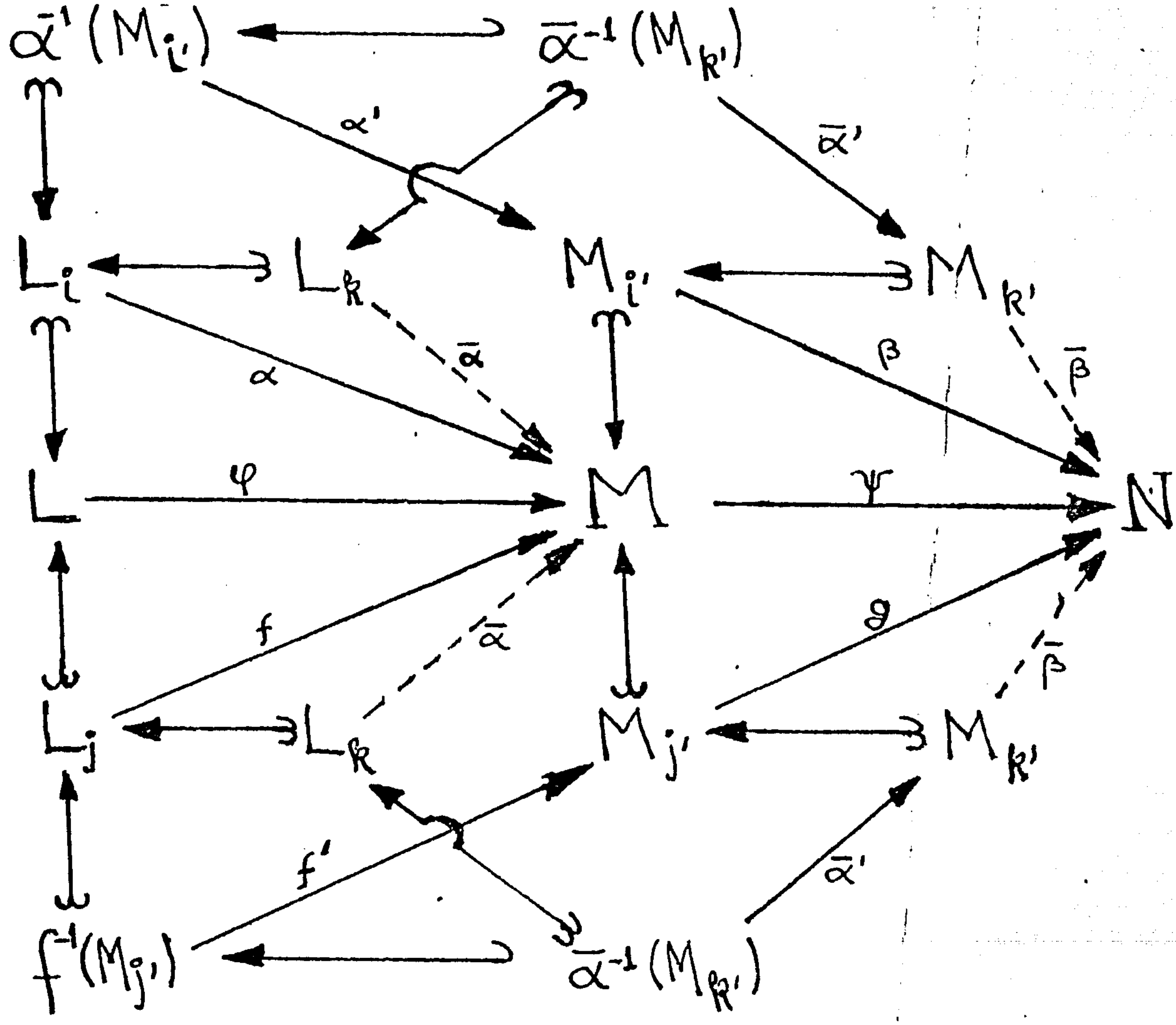
SEAN $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(L, M)$ Y $\psi \in$... ...$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(M, N)$, REPRESENTADOS φ POR $L_i \xrightarrow{\alpha} M$ Y $L_j \xrightarrow{f} M$, Y ψ POR $M_{i'} \xrightarrow{\beta} N$ Y $M_{j'} \xrightarrow{g} N$. ESTO SIGNIFICA, OBVIAMENTE, QUE EXISTEN SUBMÓDULOS ESENCIALES L_k DE L Y $M_{k'}$ DE M TALES QUE:

(i) $L_k \subset L_i \cap L_j$ Y $\bar{\alpha} = \alpha|_{L_k} = f|_{L_k}$

(ii) $M_{k'} \subset M_{i'} \cap M_{j'}$ Y $\bar{\beta} = \beta|_{M_{k'}} = g|_{M_{k'}}$.

PARA PROBAR LA "BUENA DEFINICIÓN" DE LA COMPOSICIÓN BASTA CON DEMOSTRAR QUE $\exists\, L_s \hookrightarrow L$ TAL QUE $L_s \subset \alpha^{-1}(M_{i'}) \cap f^{-1}(M_{j'})$ Y $\beta\alpha'|_{L_s} = gf'|_{L_s}$ (VER DIAGRAMA EN PÁG. SIGUIENTE), I.E., QUE $\beta\alpha'$ Y gf' REPRESENTAN AL MISMO MORFISMO EN $\mathcal{S}pec\text{-}A$.

AHORA, TENEMOS QUE $\bar{\alpha}^{-1}(M_{k'}) \subset \alpha^{-1}(M_{i'}) \cap f^{-1}(M_{j'})$, PORQUE: $x \in \bar{\alpha}^{-1}(M_{k'})$ IMPLICA QUE $f(x) = \alpha(x) \in M_{k'}$, PERO COMO $M_{k'} \subset M_{i'} \cap M_{j'}$, SE SIGUE QUE, EN PAR-



-TICULAR, $f(x)\in M_{j'}$, $\alpha(x)\in M_{i'}$ Y DE ALLÍ NUESTRA AFIRMACIÓN. SEA AHORA $L_s = L_k \cap \bar{\alpha}^{-1}(M_{k'})$ Y DENOTEMOS $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}|_{L_s}$. ENTONCES TENDREMOS $\beta\alpha'|_{L_s} = gf'|_{L_s}$, LO CUAL, JUNTO CON EL HECHO DE QUE $L_s \hookrightarrow L$, DEMUESTRA QUE LA COMPOSICIÓN ESTÁ BIEN DEFINIDA.

A CONTINUACIÓN VEREMOS QUE NUESTRA COMPOSICIÓN EN $\mathcal{S}pec$-A ES ASOCIATIVA. SEAN ... $\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(K,L)$, $\psi\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(L,M)$ Y $\eta\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(M,N)$

REPRESENTADOS RESPECTIVAMENTE POR $K' \xrightarrow{\alpha} L$, $L' \xrightarrow{\beta} M$ Y $M' \xrightarrow{\gamma} N$. CLARAMENTE, $\psi\varphi$ ESTÁ REPRESENTADO POR $\alpha^{-1}(L') \xrightarrow{\beta\alpha'} M$, MIENTRAS QUE $\eta\psi$ LO ESTÁ POR ... $\beta^{-1}(M') \xrightarrow{\gamma\beta'} N$, COMO SE MUESTRA EN EL DIAGRAMA

$$
\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(L') \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha'"] & (\beta\alpha')^{-1}(M') \arrow[dr, "\overline{\beta\alpha'}"] & & \\
K' \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha"] & L' \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\beta"] & M' \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
K \arrow[r, "\varphi"] & L \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r, "\eta"] & N \\
K' \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\alpha"] & L' \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\beta"] & M' \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\gamma"] & \\
\alpha^{-1}(\beta^{-1}(M')) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\alpha''"] & \beta^{-1}(M') \arrow[ur, "\beta'"] & &
\end{tikzcd}
$$

PARA DEMOSTRAR QUE $\eta(\psi\varphi) = (\eta\psi)\varphi$, ES NECESARIO DEMOSTRAR QUE LOS REPRESENTANTES DE $\eta(\psi\varphi)$ Y $(\eta\psi)\varphi$ SON EQUIVALENTES EN EL LÍMITE DIRECTO. ES CLARO QUE $(\eta\psi)\varphi$ ESTÁ REPRESENTADO POR $\gamma\beta'\alpha''$, Y $\eta(\psi\varphi)$, POR

$\gamma\overline{\beta\alpha'}$. Así pues, comoquiera que sea γ, probando la equivalencia entre $\overline{\beta\alpha'}$ y $\beta'\alpha''$ el resultado se sigue. Ahora bien, para probar esto último basta con observar que

$$
\begin{aligned}
(\beta\alpha')^{-1}(M') &= \{x\in\alpha'^{-1}(L') \mid \beta(\alpha'(x))\in M'\}\\
&= \{x\in K' \mid \alpha(x)\in\beta^{-1}(M')\}\\
&= \alpha^{-1}(\beta^{-1}(M')).
\end{aligned}
$$

De aquí se concluye la equivalencia entre $\overline{\beta\alpha'}$ y $\beta'\alpha''$ y, consecuentemente, que la composición en $\mathcal{S}pec$-A es asociativa.

Con lo anterior queda demostrado que $\mathcal{S}pec$-A es una categoría. Hay un functor canónico E: $\mathcal{M}ód$-A $\to$ $\mathcal{S}pec$-A, que deja los módulos fijos y lleva cada morfismo $M\xrightarrow{\alpha}N$ en su imágen canónica en el $\varinjlim \operatorname{Hom}_A(M',N)$.

6 PROPOSICIÓN. E manda cada monomorfismo esencial en $\mathcal{M}ód$-A a un isomorfismo en $\mathcal{S}pec$-A.

PRUEBA: Sea $\alpha: M\to N$ un monomorfismo esencial; entonces $\operatorname{Im}\alpha \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} N$, e $\operatorname{Im}\alpha\cong M$, de donde $\exists!$ $\beta: \operatorname{Im}\alpha\to M$ tal que $\alpha\beta = 1_{\operatorname{Im}\alpha}$ y $\beta\alpha = 1_M$. Además, $E(\alpha)$ es la clase de equivalencia de α en

$\varinjlim \mathrm{Hom}(M',N)$. Si $\varphi : M_i \to N$ es un representante de $E(\alpha)$ entonces $\varphi = \alpha|_{M_i}$. Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(N,M)$ el morfismo representado por β, i.e., $\psi = \overline{\beta}$. Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\varphi'"] & \beta^{-1}(M_i) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\beta'"] & & \\
M_i \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\varphi"] & \mathrm{Im}\,\alpha \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\beta"] & M_i \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
M \arrow[r, "E(\alpha)"] & N \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r, "E(\alpha)"] & N
\end{tikzcd}$$

$\psi E(\alpha)$ está representado por $\beta\varphi'$, y $E(\alpha)\psi$ por $\beta'\varphi$. Ahora, si $x \in \varphi^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha)$, entonces $\beta\varphi'(x) = \beta\alpha(x) = x$, y si $y \in \beta^{-1}(M_i)$, entonces $\varphi\beta'(y) = \varphi\beta(y) = \alpha\beta(y) = y$. Es decir, $\beta\varphi' = 1_{\varphi^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha)}$ y $\varphi\beta' = 1_{\beta^{-1}(M_i)}$, de donde $\psi E(\alpha) = 1_M$, $E(\alpha)\psi = 1_N$ y $E(\alpha)$ es un isomorfismo. ∎

De la proposición anterior se sigue que E identifica cada módulo con su cápsula inyectiva. En lo que resta de este capítulo nos encargaremos de demostrar las propiedades más importantes de E y $\mathcal{S}pec\text{-}A$.

7 LEMA. $\mathcal{S}pec\text{-}A$ es preaditiva.

PRUEBA: Dado que $\mathcal{M}$ód-A es preaditiva, tenemos que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un grupo abeliano y la composición es bilineal. Como $E(\alpha) = \overline{\alpha}$ en el $\varinjlim$ ($\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$), podemos definir $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta}$ y entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}$ es también un grupo abeliano en donde la composición es bilineal, como puede comprobarse fácilmente. ∎

8 LEMA. E es un functor aditivo.

PRUEBA: Es evidente que E es un functor, como habíamos mencionado anteriormente. Que E es aditivo se sigue de la forma en que se ha definido la suma en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(M,N)$. ∎

9 LEMA: E preserva límites directos.

PRUEBA: Sea (M_i, α_{ij}) un sistema directo en $\mathcal{M}$ód-A; entonces $\varinjlim M_i$ es un módulo, y hay una familia $\{\lambda_i\}$ de homomorfismos $M_i \xrightarrow{\lambda_i} \varinjlim M_i$ que es compatible (i.e. tal que $\lambda_j \alpha_{ij} = \lambda_i$) y con la propiedad de que si $\{\gamma_i\}$ es otra fami-

LIA COMPATIBLE DE HOMOMORFISMOS $M_i \xrightarrow{\gamma_i} X$, ENTONCES $\exists!\ \gamma : \varinjlim M_i \to X$ TAL QUE $\gamma \lambda_i = \gamma_i$, COMO SE VE EN EL DIAGRAMA:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\gamma_i"'] & \varinjlim M_i \arrow[d, "\exists!\, \gamma"] \\ & X \end{tikzcd}$$

ES OBVIO QUE $(E(M_i), E(\alpha_{ij}))$ ES UN SISTEMA DIRECTO EN $\mathcal{S}$pec-A; LO QUE VAMOS A PROBAR ES QUE $\varinjlim E(M_i) = E(\varinjlim M_i)$ Y LA FAMILIA COMPATIBLE DE MORFISMOS EN $\mathcal{S}$pec-A ASOCIADA SERÁ $\{E(\lambda_i)\}$. QUE ESTA ÚLTIMA FAMILIA ES COMPATIBLE ES CLARO, Y SÓLO HACE FALTA VER QUE ESTE OBJETO $E(\varinjlim M_i)$ JUNTO CON LA FAMILIA $\{E(\lambda_i)\}$ TIENEN LA PROPIEDAD UNIVERSAL DEL LÍMITE DIRECTO.

SEA $\chi_i : E(M_i) \to X$ UNA FAMILIA COMPATIBLE DE MORFISMOS EN $\mathcal{S}$pec-A, Y DEBEMOS PROBAR QUE $\exists!$ $\chi : E(\varinjlim M_i) \to X$ TAL QUE $\chi E(\lambda_i) = \chi_i$: DADO $x \in E(\varinjlim M_i) = \varinjlim M_i$, DEBEMOS TENER $x = \lambda_i(x_i)$ PARA ALGÚN $x_i \in M_i$, Y TOMEMOS χ_i' REPRESENTANTE DE χ_i TAL QUE $\chi_i'(x_i)$ ESTÁ DEFINIDO. PONGAMOS AHORA $\varphi : E(\varinjlim M_i) \to X$ HOMOMORFISMO EN $\mathcal{M}$ód-A DADO POR:

$\varphi(x) = \chi_i'(x_i)$, SI $x = \lambda_i(x_i)$ Y $\chi_i'(x_i)$ ESTÁ DE-

FINIDO. HAGAMOS AHORA $\chi = E(\varphi)$. ESTE MORFISMO χ ES EL QUE SIRVE PARA NUESTROS PROPÓSITOS. COMO χ ESTÁ DEFINIDO MEDIANTE REPRESENTANTES, HAY QUE COMPROBAR QUE

i) χ ESTÁ BIEN DEFINIDO,

ii) $\chi E(\lambda_i) = \chi_i$, Y

iii) χ ES ÚNICO.

i) SEA $x = \lambda_i(x_i) = \lambda_j(x_j)$, CON $x_i \in M_i$, $x_j \in M_j$; COMO (M_i, α_{ij}) ES SISTEMA DIRECTO, $\exists\, k$ TAL QUE $\alpha_{ik}(x_i) = \alpha_{jk}(x_j)$, DE DONDE $E(\alpha_{ik})(x_i) = E(\alpha_{jk})(x_j)$, Y $\{\chi_i\}$ COMPATIBLE IMPLICA $\chi_k E(\alpha_{ik}) = \chi_i$, $\chi_k E(\alpha_{jk}) = \chi_j$; LUEGO

$$\chi_i(x_i) = \chi_k E(\alpha_{ik})(x_i) = \chi_k E(\alpha_{jk})(x_j) = \chi_j(x_j),$$

Y LA IGUALDAD SE SIGUE TAMBIÉN PARA LOS REPRESENTANTES χ'_i, χ'_j.

ii) CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA:

$$\begin{tikzcd}
M'_i \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\lambda'_i"] \arrow[dr, bend right, "\chi'_i"'] & M_i \arrow[r, "E(\lambda_i)"] \arrow[d, "\chi_i"] & E(\varinjlim M_i) \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[dl, bend left, "\varphi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

(las flechas curvas representan homomorfismos en $\mathcal{M}$ód-A).

DONDE $\varphi\lambda'_i$ REPRESENTA A $\chi E(\lambda_i)$ Y χ'_i A χ_i. TENEMOS PUES QUE $x_i \in M'_i$ IMPLICA QUE $\lambda'_i(x_i) = x \in \varinjlim M_i$, Y $\varphi(x) = \chi'_i(x_i)$ POR DEFINICIÓN, I.E., $\varphi\lambda_i(x_i) = \chi'_i(x_i)$, DE DONDE $\chi E(\lambda_i) = \chi_i$.

iii) Supongamos que $\psi : E(\varinjlim M_i) \to X$ es otro morfismo en $\mathcal{S}pec$-A tal que $\psi E(\lambda_i) = \chi_i$. En términos de representantes, esto significa que en algún $M_i' \hookrightarrow M_i$, los representantes coinciden, i.e., $\psi' \lambda_i' = \chi_i'$; ahora, $x_i \in M_i'$ implica $\lambda_i'(x_i) = x \in \ldots$ $\ldots \varinjlim M_i$, de donde $\psi'(x) = \chi_i'(x_i) = \chi'(x)$, por tanto $\chi = \psi$, lo cual concluye la demostración. ∎

10 LEMA. E preserva monomorfismos.

PRUEBA: Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ un monomorfismo, y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(L,M)$ un morfismo tal que $E(\alpha)\varphi = 0$, como se aprecia en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "E(\alpha)"] & N \\
L' \arrow[u, <->] \arrow[ur, "\beta"] & M' \arrow[u, <->] \arrow[ur, "\alpha'"] & \\
\beta^{-1}(M') \arrow[u, <->] \arrow[ur, "\beta'"] & &
\end{tikzcd}$$

$\alpha'\beta'$ debe estar en la clase del 0, de donde $\exists\, K \hookrightarrow \beta^{-1}(M')$ tal que $\alpha'\beta'(K) = 0$; lo mismo podemos suponer $\alpha'\beta' = 0$. Dado que $\alpha' = \alpha|_{M'}$, α' es también monomorfismo, de donde $\beta' = 0$. Se

SIGUE QUE $\varphi = 0$ Y $E(\alpha)$ ES MONOMORFISMO. ∎

11 LEMA. TODA SUCESIÓN EXACTA CORTA EN $\mathcal{S}pec$-A SE ESCINDE.

PRUEBA: SEA $\varphi : E(M) \to E(N)$ UN MORFISMO ARBITRARIO EN $\mathcal{S}pec$-A, Y SUPONGÁMOSLO REPRESENTADO POR UN HOMOMORFISMO $\alpha : M' \to N$ EN $\mathcal{M}od$-A, PARA ALGÚN $M' \hookrightarrow M$. SEA M'' UN SEUDOCOMPLEMENTO DE $\operatorname{Ker}\alpha$ EN M'; ENTONCES $M'' + \operatorname{Ker}\alpha \hookrightarrow M'$ Y α INDUCE $\alpha' : M'' + \operatorname{Ker}\alpha \to N$. TOMEMOS TAMBIÉN UN SEUDOCOMPLEMENTO N' DE $\operatorname{Im}\alpha'$ EN N; NOS QUEDA ENTONCES EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd}
M'' \oplus \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha''"'] \arrow[drr, "\alpha'"] & M' \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\alpha"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
\operatorname{Im}\alpha' \oplus N' \arrow[rr, hook] & & N
\end{tikzcd}$$

$E(\alpha'')$ ENTONCES DIFIERE DE φ SÓLO POR UN ISOMORFISMO EN $\mathcal{S}pec$-A (POR LA PROP. 6). ADEMÁS, α'' SE DESCOMPONE COMO $M'' \oplus \operatorname{Ker}\alpha \to M'' \cong \operatorname{Im}\alpha' \to \operatorname{Im}\alpha' \oplus N'$,

ES DECIR, COMO UN HOMOMORFISMO INVERTIBLE DERECHO SEGUIDO POR UNO INVERTIBLE IZQUIERDO. TAMBIÉN $E(\alpha'')$ TIENE UNA DESCOMPOSICIÓN CORRESPONDIENTE. SE SIGUE PUES QUE $\varphi = \mu\lambda$, CON $\lambda\lambda' = \mu'\mu = 1_{E(M'')}$.

$$E(M) \underset{\lambda}{\overset{\lambda'}{\rightleftarrows}} E(M'') \underset{\mu}{\overset{\mu'}{\rightleftarrows}} E(N).$$

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE, SI φ ES MONO Ó EPIMORFISMO, ENTONCES SE ESCINDE. ADEMÁS, λ ES EPIMORFISMO, YA QUE λ ES EL CONÚCLEO DE $(1-\lambda'\lambda): E(M) \to E(M)$; μ ES MONOMORFISMO POR SER EL NÚCLEO DE $(\mu\mu'-1): E(N) \to E(N)$, CON LO CUAL QUEDA PROBADA ADEMÁS PARTE DEL SIGUIENTE LEMA. ∎

12 LEMA. TODO MORFISMO EN $\mathcal{S}pec$-A TIENE NÚCLEO Y CONÚCLEO. ADEMÁS, TODO MORFISMO φ TIENE UNA FACTORIZACIÓN $\varphi = \mu\lambda$, CON λ EPIMORFISMO Y μ MONOMORFISMO.

PRUEBA: TENEMOS YA DEMOSTRADA LA SEGUNDA PARTE DE LA AFIRMACIÓN. USANDO LA MISMA NOTACIÓN QUE EN LA ANTERIOR PRUEBA, PODEMOS FACTORIZAR $1-\lambda'\lambda$ COMO UN EPIMORFISMO β SEGUIDO DE UN MONOMORFISMO γ, DE MODO QUE $0 = \lambda(1-\lambda'\lambda) = \lambda\gamma\beta$, LUEGO $\lambda\gamma = 0$, DE

DONDE γ ES EL NÚCLEO DE λ Y, CONSECUENTEMENTE, DE φ. ANÁLOGAMENTE, PODEMOS FACTORIZAR $\mu\mu'-1$ COMO UN EPIMORFISMO θ SEGUIDO DE UN MONOMORFISMO ζ, Y ASÍ $0=(\mu\mu'-1)\mu=\zeta\theta\mu$, LUEGO $\theta\mu=0$ Y θ ES EL CONÚCLEO DE μ, POR TANTO LO ES TAMBIÉN DE φ. ∎

13 LEMA. $\mathcal{S}pec$-A TIENE UN GENERADOR.

PRUEBA: SEA $\{A/\mathfrak{a}_i\}_I$ EL CONJUNTO DE COCIENTES NO ISOMORFOS DE A. EN EL PRÓXIMO LEMA DEMOSTRAREMOS QUE TODO M_A ES UNA EXTENSIÓN ESENCIAL DE UNA SUMA DIRECTA $\bigoplus_J A/\mathfrak{a}_i$ $(J\subset I)$. POR EL MOMENTO, DEMOS POR CIERTO ESTE HECHO: EN ESE CASO, $E(M)=E(\bigoplus_J A/\mathfrak{a}_i)=\bigoplus_J E(A/\mathfrak{a}_i)$, PORQUE E PRESERVA SUMAS DIRECTAS (COMO SE SIGUE DEL LEMA 9), DE MANERA QUE LOS OBJETOS $E(A/\mathfrak{a}_i)$ $(i\in I)$ FORMAN UNA FAMILIA DE GENERADORES PARA $\mathcal{S}pec$-A. O, EQUIVALENTEMENTE, $\bigoplus_I E(A/\mathfrak{a}_i)$ ES UN GENERADOR PARA LA CATEGORÍA $\mathcal{S}pec$-A. ∎

14 LEMA. SEA M UN A-MÓDULO Y $(\mathfrak{a}_i)_I$ LA

FAMILIA DE TODOS LOS IDEALES DE A. ENTONCES $\exists\, J \subset I$ TAL QUE $\bigoplus_J A/\mathfrak{a}_j \hookrightarrow M_A$.

PRUEBA: SEA $P = \{ J \subset I \mid \bigoplus_J A/\mathfrak{a}_j \xrightarrow{f_J} M \}$, I.E., P ES LA FAMILIA DE TODOS LOS CONJUNTOS DE ÍNDICES J TALES QUE LA SUMA DIRECTA SOBRE ELLOS ES ISOMORFA A UN SUBMÓDULO DE M; DICHO DE OTRA MANERA, TAL QUE HAY UN MONOMORFISMO f_J DE LA SUMA EN M. P ES NO VACÍO, PUESTO QUE $\forall\, 0 \neq x \in M$ SE TIENE $A/An_A(x.) \cong \langle x \rangle \hookrightarrow M$. PARA SIMPLIFICAR LA NOTACIÓN, PONGAMOS $\mathfrak{b}_i = A/\mathfrak{a}_i$, Y $\mathfrak{b}_J = \bigoplus_J A/\mathfrak{a}_j = \bigoplus_J \mathfrak{b}_j$ (POR SUPUESTO, $\mathfrak{b}_i$ ES LO MISMO QUE $\mathfrak{b}_{\{i\}}$). DEFINAMOS UN ORDEN PARCIAL EN P DE LA SIGUIENTE MANERA: SI $f_J : \mathfrak{b}_J \rightarrowtail M$ Y $f_K : \mathfrak{b}_K \rightarrowtail M$ SON MONOMORFISMOS, DIREMOS QUE $J \leq K$ SI $\mathfrak{b}_J$ ES SUBMÓDULO DE $\mathfrak{b}_K$ Y ADEMÁS $f_K|_{\mathfrak{b}_J} = f_J$. ES OBVIO QUE DE ESTE MODO HEMOS HECHO DE $(P, \leq)$ UN COPO. AHORA, SEA C UNA CADENA EN P, Y PONGAMOS $\mathfrak{b}_T = \bigoplus_{J \in C} \mathfrak{b}_J = \bigoplus_{J \in C} \left(\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{b}_j \right)$. DEFINIMOS AHORA $f_T : \mathfrak{b}_T \to M$: SI $x \in \mathfrak{b}_T$, ENTONCES $x = x_1 + \dots + x_n$, CON $x_i \in \mathfrak{b}_{J_i}$; PERO COMO $\mathfrak{b}_{J_i} \in C$, ENTONCES ALGUNO DE ELLOS, DIGAMOS $\mathfrak{b}_J$, CONTIENE A TODOS LOS DEMÁS, LUEGO $x \in \mathfrak{b}_J$ Y ENTONCES PONEMOS $f_T(x) = f_J(x)$. DE AQUÍ ES CLARO QUE $J \leq T$ $\forall J \in C$, i, e., T es una cota superior para $\mathcal{C}$. Supongamos que $f_T(x)=0$ para algún $x\in \mathfrak{b}_T$: entonces $x\in\mathfrak{b}_J$ para algún $J\in\mathcal{C}$, luego $f_T(x)=f_J(x)=0$ y como f_J es monomorfismo, se sigue que $x=0$. Consecuentemente, $T\in\mathcal{P}$. Por lema de Zorn, como toda cadena en $\mathcal{P}$ tiene cota superior en $\mathcal{P}$, sabemos que $\mathcal{P}$ tiene un elemento máximo, llamémosle W. Entonces $f_W:\mathfrak{b}_W\to M$ es monomorfismo, y vamos a probar que es esencial:

Supongamos que f_W no es esencial, y sea N un seudocomplemento de $\operatorname{Im} f_W$ en N, y tomemos $0\neq x\in N$. Entonces, como $\langle x\rangle\cong A/An(x.)=\mathfrak{b}_{j_0}$ y como $f_{j_0}:\mathfrak{b}_{j_0}\hookrightarrow N\hookrightarrow M$ es monomorfismo, podemos definir $f_{W'}:\mathfrak{b}_{W'}=\mathfrak{b}_W\oplus\mathfrak{b}_{j_0}\rightarrowtail M$. Aquí tenemos que $f_{W'}$ es monomorfismo, $W'\in\mathcal{P}$ y $W\leq W'$ ¡contradiciendo la maximalidad de W, de donde f_W es un monomorfismo esencial. ∎

15 TEOREMA. $\mathcal{S}pec$-A es una categoría espectral. E es un functor exacto que preserva sumas directas.

PRUEBA: PARA DEMOSTRAR LA AFIRMACIÓN ES NECESARIO PROBAR LOS SIGUIENTES HECHOS, ALGUNOS DE LOS CUALES YA HAN SIDO COMPROBADOS EN LOS LEMAS ANTERIORES:

(i) $\mathcal{S}pec$-A ES PREADITIVA. (LEMA 7) $\blacksquare$

(ii) E ES UN FUNCTOR ADITIVO. (LEMA 8) $\blacksquare$

(iii) $\mathcal{S}pec$-A TIENE PRODUCTOS FINITOS.

(iv) TODO MORFISMO EN $\mathcal{S}pec$-A TIENE NÚCLEO Y CONÚCLEO. (LEMA 12) $\blacksquare$

(v) TODO MORFISMO α EN $\mathcal{S}pec$-A TIENE UNA FACTORIZACIÓN $\alpha = \gamma\beta$, CON β EPIMORFISMO Y γ MONOMORFISMO. (LEMA 12) $\blacksquare$

(vi) TODA SUCESIÓN EXACTA CORTA SE ESCINDE EN $\mathcal{S}pec$-A. (LEMA 11) $\blacksquare$

(vii) $\mathcal{S}pec$-A ES COCOMPLETA.

(viii) LOS LÍMITES DIRECTOS SON EXACTOS EN $\mathcal{S}pec$-A.

(ix) $\mathcal{S}pec$-A TIENE UN GENERADOR (LEMA 13) $\blacksquare$

(x) E ES UN FUNCTOR EXACTO.

(xi) E PRESERVA SUMAS DIRECTAS.

DE MANERA QUE HACE FALTA DEMOSTRAR LAS PROPIEDADES (iii), (vii), (viii), (x) Y (xi). A CONTINUACIÓN PRESENTAMOS LAS RESPECTIVAS PRUEBAS.

(vii): Por el lema 9, E preserva límites directos. Si $(E(M_i), \varphi_{ij})$ es un sistema directo en $\mathcal{S}pec$-A, consideremos representantes α_{ij} de cada φ_{ij}, y el sistema directo (M'_i, α_{ij}) en $\mathcal{M}ód$-A. Entonces $E(\varinjlim M'_i) = \varinjlim E(M'_i) = \varinjlim E(M_i)$, de donde $\mathcal{S}pec$-A es cocompleta. ∎

(xi): También por el lema 9. Dado que las sumas directas son casos particulares de límites directos, E las preserva. ∎

(iii): Si $E(M_1), \ldots, E(M_n)$ son objetos en $\mathcal{S}pec$-A, entonces, como el producto y la suma directa coinciden en el caso finito, y también por el (xi) de arriba, tenemos $E(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i) = \prod_{i=1}^{n} E(M_i)$. ∎

(x): Por el lema 10, E preserva monomorfismos, de donde E preserva núcleos y es por tanto exacto izquierdo. Por otro lado, es un hecho conocido que si $F: I \to \mathcal{C}$ es un functor, donde I es pequeña y $\mathcal{C}$ tiene coproductos y conúcleos, entonces

$$\varinjlim F = \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{\lambda} F(s(\lambda)) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i} F(i)\right),$$

con α inducido por $\alpha_\lambda = u_{t(\lambda)} F(\lambda) - u_{s(\lambda)} : F(s(\lambda)) \to \bigoplus_i F(i)$

CON $\lambda: s(\lambda) \to t(\lambda)$ Y LAS u_j'S SON LAS INYECCIONES CANÓNICAS. DE MANERA QUE, COMO E PRESERVA LÍMITES DIRECTOS (LEMA 9), SE SIGUE QUE E PRESERVA CONÚCLEOS Y ES, POR TANTO, EXACTO DERECHO ∎

(viii): SABEMOS YA QUE LOS LÍMITES DIRECTOS SON EXACTOS EN $\mathcal{M}$ód-A Y QUE E PRESERVA LÍMITES DIRECTOS Y ES EXACTO. ASÍ QUE SI I ES UN CONJUNTO DIRIGIDO, CONSIDEREMOS LA SIGUIENTE SUCESIÓN EXACTA EN $\mathcal{D}ir(I, \mathcal{S}pec\text{-}A)$:

$$0 \to E(L_i) \xrightarrow{\varphi_i} E(M_i) \xrightarrow{\psi_i} E(N_i) \to 0 \quad (i \in I).$$

TOMANDO REPRESENTANTES OBTENEMOS LA SIGUIENTE SUCESIÓN EXACTA EN $\mathcal{D}ir(I, \mathcal{M}ód\text{-}A)$:

$$0 \to \varphi_i'^{-1}(M_i') \xrightarrow{\varphi_i''} M_i' \xrightarrow{\psi_i'} \mathrm{Im}\,\psi_i' \to 0.$$

Y, COMO $\varinjlim$ ES EXACTO EN $\mathcal{M}$ód-A, TENDREMOS, AL APLICARLO:

$$0 \to \varinjlim \varphi_i'^{-1}(M_i') \xrightarrow{\varinjlim \varphi_i''} \varinjlim M_i' \xrightarrow{\varinjlim \psi_i'} \varinjlim \mathrm{Im}\,\psi_i' \to 0.$$

SI APLICAMOS AHORA EL FUNCTOR E:

$$0 \to E(\varinjlim \varphi_i'^{-1}(M_i')) \xrightarrow{E(\varinjlim \varphi_i'')} E(\varinjlim M_i') \xrightarrow{E(\varinjlim \psi_i')} E(\varinjlim \mathrm{Im}\,\psi_i') \to 0.$$

PERO, COMO E PRESERVA LÍMITES DIRECTOS Y ES EXACTO, LA ANTERIOR SUCESIÓN SE CONVIERTE EN:

$$0 \to \varinjlim E(L_i) \xrightarrow{\varinjlim \varphi_i} \varinjlim E(M_i) \xrightarrow{\varinjlim \psi_i} \varinjlim E(N_i) \to 0,$$

PORQUE E MANDA MONOMORFISMOS ESENCIALES EN ISOMORFISMOS Y $E(\varphi_i'') = \varphi_i$, $E(\psi_i') = \psi_i$. ∎

CON ESTO CONCLUYE LA PRUEBA DEL TEOREMA 15. ∎ ∎ ∎

CON LA ANTERIOR DEMOSTRACIÓN HEMOS ALCANZADO EL OBJETIVO DE ESTE CAPÍTULO. EN ESTA PARTE FINAL ENUMERAREMOS ALGUNOS EJEMPLOS IMPORTANTES DE CATEGORÍAS ESPECTRALES JUNTO CON ALGUNOS RESULTADOS RELACIONADOS.

EJEMPLOS

(•) SI A ES UN ANILLO SEMISIMPLE, ENTONCES TODO A-MÓDULO M_A ES SEMISIMPLE Y TODA SUCESIÓN EXACTA CORTA SE ESCINDE, LUEGO $\mathcal{M}od$-A ES ESPECTRAL.

(••) GENERALIZANDO UN POCO EL EJEMPLO ANTERIOR, UNA CATEGORÍA ESPECTRAL $\mathcal{C}$ SE DICE QUE ES DISCRETA CUANDO TODOS SUS OBJETOS SON SEMISIMPLES. POR UN TEOREMA CLÁSICO DE ESTRUCTURA, ES SABIDO QUE $\mathcal{M}od$-A ES ESPECTRAL DISCRETA SI Y SÓLO SI A ES SEMISIMPLE. ADEMÁS, CLARAMENTE, LA ÚNICA MANERA POSIBLE DE QUE $\mathcal{M}od$-A - SEA ESPECTRAL ES QUE SEA DISCRETA.

SI $\mathcal{C}$ ES UNA CATEGORÍA ESPECTRAL, DENOTAMOS POR $\mathcal{C}_{dis}$ (RESPECTIVAMENTE, $\mathcal{C}_{cont}$) LA SUBCATEGORÍA PLENA DE $\mathcal{C}$ CONSISTENTE DE TODOS LOS OBJETOS SEMISIMPLES (TODOS LOS OBJETOS SIN SUBOBJETOS SIMPLES).

$\mathscr{C}_{dis}$ ES UNA CATEGORÍA ESPECTRAL DISCRETA, MIENTRAS - QUE $\mathscr{C}_{cont}$ ES <u>CONTINUA</u>, I.E., NO HAY OBJETOS SIMPLES EN $\mathscr{C}_{cont}$.

PROPOSICIÓN. SI $\mathscr{C}$ ES UNA CATEGORÍA ESPECTRAL; ENTONCES HAY UNA EQUIVALENCIA $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_{dis} \times \mathscr{C}_{cont}$.

PRUEBA: PARA CADA OBJETO C DE $\mathscr{C}$ TOMEMOS .... $s(C)$ = EL SOCLO DE C. EL FUNCTOR $C \mapsto (s(C), C/s(C))$ ES, EVIDENTEMENTE, LA EQUIVALENCIA CITADA EN LA PROPOSICIÓN. ∎

(.·.) LA CATEGORÍA $\mathscr{S}pec$-$\mathbb{Z}$. EL FUNCTOR $E: \mathscr{M}ód\text{-}\mathbb{Z} \to$ $\to \mathscr{S}pec$-$\mathbb{Z}$ IDENTIFICA CADA $\mathbb{Z}$-MÓDULO CON SU CÁPSULA INYECTIVA, COMO YA HABÍAMOS OBSERVADO ANTERIORMENTE. DE MANERA QUE LOS OBJETOS DE $\mathscr{S}pec$-$\mathbb{Z}$ SON LOS $\mathbb{Z}$-MÓDULOS INYECTIVOS. DADO QUE $\mathbb{Z}$ ES DOMINIO ENTERO, $M_{\mathbb{Z}}$ ES INYECTIVO SI Y SÓLO SI ES DIVISIBLE (I.E., $\forall\, 0 \neq a \in \mathbb{Z}$, $x \in M$, $\exists\, y \in M$ TAL QUE $x = ya$). SI M ES UN $\mathbb{Q}$-MÓDULO, ENTONCES COMO $\mathbb{Z}$-MÓDULO ES DIVISIBLE (I.E., INYECTIVO); Y SI $M_{\mathbb{Z}}$ ES DIVISIBLE, ENTONCES PODEMOS CONSIDERARLO COMO $\mathbb{Q}$-MÓDULO DE LA SIGUIENTE MANERA: $m \in M$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ Y M DIVISIBLE IMPLICA QUE $\exists\, y \in M$ TALQUE ...

$ma = yb$ Y ENTONCES DEFINIMOS $m\frac{a}{b} = y$. LA CLASE DE LOS $\mathbb{Z}$-MÓDULOS INYECTIVOS COINCIDE CON LA DE LOS $\mathbb{Q}$-MÓDULOS, DE DONDE PODEMOS ASEGURAR QUE ... $\mathcal{S}pec$-$\mathbb{Z}$ ES EQUIVALENTE A $\mathcal{M}ód$-$\mathbb{Q}$, Y EN ESTE CASO TENEMOS TAMBIÉN QUE $\mathcal{S}pec$-$\mathbb{Z}$ ES DISCRETA.

(∴) EL CASO DEL EJEMPLO ANTERIOR NO ES AISLADO. EN EFECTO, EN MUCHOS CASOS LA CATEGORÍA DE MÓDULOS DE COCIENTES ES ESPECTRAL; POR EJEMPLO, LA CATEGORÍA $\mathcal{M}ód$-$Q_{máx}(A)$ ES ESPECTRAL SIEMPRE QUE A ES UN ANILLO NO SINGULAR. POR OTRO LADO, EL SIGUIENTE TEOREMA ESTABLECE CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE $\mathcal{S}pec$-A SEA DISCRETA:

TEOREMA. LAS SIGUIENTES PROPIEDADES DE UN ANILLO A SON EQUIVALENTES:

(a) $\mathcal{S}pec$-A ES DISCRETA.

(b) TODO A-MÓDULO M_A INYECTIVO ES LA CÁPSULA INYECTIVA DE UNA SUMA DIRECTA DE INYECTIVOS INESCINDIBLES.

(c) PARA CADA IDEAL $\triangleright\ \mathfrak{a}$ DE A, $\exists\, x \in A$ TAL QUE $(\mathfrak{a} : x)$ ES IRREDUCIBLE.

PRUEBA: UN MÓDULO M ES INESCINDIBLE SI NO - PUEDE ESCRIBIRSE COMO SUMA DIRECTA DE DOS SUBMÓDULOS PROPIOS. UN SUBMÓDULO N DE M ES IRREDUCIBLE (EN M) SI NO PUEDE ESCRIBIRSE COMO INTERSECCIÓN DE DOS SUBMÓDULOS DE M QUE CONTENGAN PROPIAMENTE A N. CLARAMENTE, N ES IRREDUCIBLE (EN M) SI Y SÓLO SI M/N ES COIRREDUCIBLE (Ó MÁS FRECUENTEMENTE LLAMADO UNIFORME), I.E., CUALESQUIERA SUBMÓDULOS NO CERO DE M/N TIENEN INTERSECCIÓN NO CERO. PARA LA DEMOSTRACIÓN USAREMOS EL SIGUIENTE LEMA, QUE ES FÁCILMENTE COMPROBABLE:

LEMA. SI E ES UN MÓDULO INYECTIVO, ENTONCES LAS SIGUIENTES CONDICIONES SON EQUIVALENTES:

(i) E ES INESCINDIBLE.

(ii) CADA SUBMÓDULO DE E ES UNIFORME.

(iii) E ES LA CÁPSULA INYECTIVA DE UN UNIFORME.

(iv) E ES LA CÁPSULA INYECTIVA DE CADA SUBMÓDULO $\neq 0$.

(v) CADA SUBMÓDULO $\neq 0$ DE E ES ESENCIAL EN E. ∎

AHORA, SI M ES UN MÓDULO INYECTIVO INESCINDIBLE, ENTONCES $E(M)$ SERÁ SIMPLE, DADO QUE TODO SUBMÓDULO NO CERO DE M ES ESENCIAL Y E MANDA MONOMORFISMOS - ESENCIALES EN ISOMORFISMOS. INVERSAMENTE, SI $E(M)$ ES UN OBJETO SIMPLE EN $\mathcal{S}pec$-A, ENTONCES O BIEN

M ES SIMPLE O CADA SUBMÓDULO DE M ES ESENCIAL, I.E., M ES UNIFORME; ADEMÁS, $E(M)=E(C_I(M))$ Y $C_I(M)$ (LA CÁPSULA INYECTIVA DE M) ES INYECTIVO INESCINDIBLE, POR EL LEMA ANTERIOR.

(a)$\Leftrightarrow$(b): $\mathcal{S}pec$-A ES DISCRETA SI Y SÓLO SI TODO OBJETO $E(M)\in \mathcal{S}pec$-A ES DE LA FORMA $E(M)=\oplus E(S)$, CON $E(S)$ SIMPLE. PERO $E(S)$ ES SIMPLE SI Y SÓLO SI S (O BIEN $C_I(S)$) ES INYECTIVO INESCINDIBLE. AHORA, COMO $\oplus E(S)=E(\oplus S)$, LA EQUIVALENCIA SE SIGUE.

(b)$\Rightarrow$(c): SEA $\mathfrak{a}$ IDEAL DE A, Y CONSIDEREMOS EL MÓDULO $C_I(A/\mathfrak{a})$, QUE POR SER INYECTIVO DEBE SER DE LA FORMA $C_I(\oplus E_\alpha)$, CON E_α INYECTIVO INESCINDIBLE. SEA E_0 UNO DE ESOS INYECTIVOS INESCINDIBLES FIJO; COMO $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow C_I(\oplus E_\alpha)$, PODEMOS TOMAR UN $0\neq \bar{x}\in A/\mathfrak{a}\cap E_0$. AHORA, POR EL LEMA ANTERIOR, $\langle \bar{x}\rangle \cong A/An_A(\bar{x}.)$ ES UNIFORME, LUEGO $An_A(\bar{x}.)$ ES IRREDUCIBLE. POR OTRO LADO, $An_A(\bar{x}.)$ ES PRECISAMENTE EL IDEAL $\{b\in A \mid xb\in \mathfrak{a}\}$, QUE POR DEFINICIÓN ES IGUAL A $(\mathfrak{a}:x)$.

(c)$\Rightarrow$(b): SEA M_A INYECTIVO, Y TOMEMOS $0\neq x\in M$. ENTONCES $\langle x\rangle \cong A/An_A(x.)$; PARA SIMPLIFICAR LA NOTACIÓN, ESCRIBAMOS $An_A(x.)=\mathfrak{a}$. POR HIPÓTESIS, $\exists y\in A$ TAL QUE $(\mathfrak{a}:y)$ ES IRREDUCIBLE. ASÍ PUES, TENEMOS QUE $A/(\mathfrak{a}:y)\hookrightarrow M$, PUESTO QUE $\bar{y}\in A/\mathfrak{a}$, Y ADEMÁS ...

$A/(\mathfrak{a}:y) \cong \langle \bar{y} \rangle \subset \langle x \rangle \hookrightarrow M$, LUEGO $C_I(\langle \bar{y} \rangle) \subset M$.

HEMOS DEMOSTRADO CON ESTO QUE TODO MÓDULO INYECTIVO CONTIENE UN INYECTIVO INESCINDIBLE. PARA COMPLETAR LA DEMOSTRACIÓN, SEA AHORA $\mathcal{F} = \{ S \subset M \mid S = \oplus E_\alpha$, CON E_α INYECTIVO INESCINDIBLE $\}$. POR LO DEMOSTRADO ARRIBA, SI M ES INYECTIVO, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. EL CONJUNTO $\mathcal{F}$ PUEDE ORDENARSE POR INCLUSIÓN, Y NO ES DIFÍCIL VER QUE TODA CADENA EN $\mathcal{F}$ TIENE COTA SUPERIOR EN $\mathcal{F}$, ASÍ QUE POR LEMA DE ZORN $\mathcal{F}$ CONTIENE UN ELEMENTO MÁXIMO, DIGAMOS S_0. ESTE S_0 DEBE SER ESENCIAL EN M, PORQUE SI $S_0 \not\hookrightarrow_{\mathcal{E}} M$ ENTONCES $\exists K \subset M$ SEUDOCOMPLEMENTO DE S_0 EN M, Y TAMBIÉN $C_I(K) \subset M$, POR SUPUESTO; SI SUPONEMOS AHORA QUE $C_I(K) \cap S_0 = L \neq 0$, LLEGAMOS A QUE $0 \neq L \subset C_I(K)$, $L \subset S_0$, LUEGO $K \cap S_0 \supset \ldots K \cap L \neq 0$ ¡ CONTRADICIENDO LA SUPOSICIÓN DE QUE K ES SEUDOCOMPLEMENTO DE S_0. EL CASO $C_I(K) \cap S_0 = 0$ TAMBIÉN NOS LLEVA A CONTRADICCIÓN, ASÍ QUE TENEMOS QUE ADMITIR QUE S_0 ES ESENCIAL EN M, LO CUAL FINALIZA LA DEMOSTRACIÓN. ∎

CAPÍTULO II

REPRESENTACIONES STANDARD DE CATEGORÍAS ESPECTRALES.

CAP. II REPRESENTACIONES STANDARD DE CATEGORÍAS ESPECTRALES.

HAREMOS EN ESTE CAPÍTULO UN ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE LAS CATEGORÍAS ESPECTRALES, EN TÉRMINOS DE SU REPRESENTACIÓN STANDARD COMO UNA SUBCATEGORÍA DE GIRAUD DE UNA CATEGORÍA DE MÓDULOS (TEOREMA DE POPESCU-GABRIEL). ESTA DESCRIPCIÓN DE CATEGORÍAS ESPECTRALES INVOLUCRA LAS TOPOLOGÍAS CANÓNICAS DE ANILLOS REGULARES Y AUTOINYECTIVOS DERECHOS (UN ANILLO ES <u>AUTOINYECTIVO</u> SI ES INYECTIVO COMO MÓDULO SOBRE SÍ MISMO). PARA ENTRAR EN MATERIA, EMPEZAMOS CON EL SIGUIENTE LEMA:

1 LEMA. Todo anillo regular A es no singular.

PRUEBA: Decimos que un anillo A es <u>no singular</u> cuando su ideal singular derecho $Z(A)=\{a\in A \mid An_A(a) \hookrightarrow A\}$ es 0. Para probar que $Z(A)=0$, supongamos que $\mathfrak{a}$ es un ideal ▸ esencial en A y $b\mathfrak{a}=0$ para algún $b\in A$. Como A es regular $\exists x\in A$ tal que $bxb=b$, de donde $xb\neq 0$, y $\exists\, c\in A$ tal que $0\neq xbc\in\mathfrak{a}$, por ser $\mathfrak{a}$ esencial. Pero entonces $bc=bxbc\in b\mathfrak{a}=0$!, contradiciendo el hecho de que $xbc\neq 0$. ∎

Supongamos ahora que A es regular y autoinyectivo ▸. Entonces la topología de ideales densos, correspondiente a la T.T.H. de Lambek, coincide con la topología de Goldie (de ideales esenciales) y con la topología canónica en A; denotamos a esta topología por $\mathcal{E}$. Se sigue que la categoría $\mathcal{M}ód\text{-}(A,\mathcal{E})$ consiste de todos los módulos M_A inyectivos y no singulares ▸, y es por tanto una categoría espectral. Dado que A resulta ser un cogenerador inyectivo para $\mathcal{M}ód\text{-}(A,\mathcal{E})$,

CONCLUIMOS QUE ESTA CATEGORÍA CONSISTE PRECISAMENTE DE TODOS LOS SUMANDOS DIRECTOS DE POTENCIAS DE A. TENEMOS AHORA NUESTRO PRIMER RESULTADO SOBRE REPRESENTACIÓN DE CATEGORÍAS ESPECTRALES:

2 PROPOSICIÓN. SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA ESPECTRAL, C UN OBJETO DE $\mathcal{C}$ Y $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C)$. ENTONCES:

(i) A ES REGULAR Y AUTOINYECTIVO ▶.

(ii) SI D ES ALGÚN OTRO OBJETO DE $\mathcal{C}$, ENTONCES EL A-MÓDULO ▶ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$ ES NO SINGULAR E INYECTIVO.

PRUEBA: YA EN EL CAPÍTULO I HABÍAMOS DEMOSTRADO LA REGULARIDAD DE A (PROP. 3.I), Y EL HECHO DE QUE A ES AUTOINYECTIVO ▶ SE SIGUE DEL CASO MÁS GENERAL (ii) PARA UN A-MÓDULO ▶ CUALQUIERA:
SEA $\mathfrak{a}$ UN IDEAL ▶ DE A; $\mathfrak{a}$ ES LA UNIÓN DIRECTA DE IDEALES ▶ FINITAMENTE GENERADOS Y ÉSTOS ESTÁN GENERADOS POR ELEMENTOS IDEMPOTENTES, POR SER A REGULAR, i.e., $\mathfrak{a} = \varinjlim eA$. CUALQUIER $\phi \in \mathrm{Hom}_A(eA, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D))$ ES DE LA FORMA $\phi(e) = \varphi$, CON LA CONDICIÓN DE QUE $\varphi(1-e) = 0$, PORQUE $\phi(0) = \phi(e(1-e)) = \varphi(1-e)$.
COMO e ES IDEMPOTENTE, TENEMOS QUE $C = \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Im}(1-e)$

PROBAREMOS AHORA QUE $\mathrm{Hom}_A(eA, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Im}\, e, D)$:
SI $\phi \in \mathrm{Hom}_A(eA, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D))$, ENTONCES DEFINIMOS ...
$\psi: \mathrm{Hom}_A(eA, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Im}\, e, D)$ MEDIANTE
$\psi(\phi) = \phi(e) = \varphi$ SIEMPRE QUE $\varphi(1-e) = 0$; DADO QUE
$C = \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Im}(1-e)$, ESTO ES LO MISMO QUE DAR UNA
$\varphi': \mathrm{Im}\, e \to D$, $\varphi' = \varphi|_{\mathrm{Im}\, e}$. ψ ES MONOMORFISMO, YA QUE
$\psi(\phi) = 0$ IMPLICA $\phi(e) = 0$, LUEGO $\phi(ex) = \phi(e)x = 0$
$\forall x \in A$, POR TANTO $\phi = 0$. ADEMÁS, SI $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Im}\, e, D)$,
ENTONCES $\varphi e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$ Y ENTONCES EL HOMOMORFISMO $\phi: eA \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$, DEFINIDO POR $\phi(e) = \varphi e$,
SE MAPEA BAJO ψ EN φ. LUEGO, ψ ES EPIMORFISMO
Y CONSIGUIENTEMENTE ψ ES ISOMORFISMO. DE ESTA
DISCUSIÓN SE SIGUE QUE:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) &= \mathrm{Hom}_A(\varinjlim eA, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \\
&\cong \varprojlim \mathrm{Hom}_A(eA, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \\
&\cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Im}\, e, D) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim \mathrm{Im}\, e, D) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', D),
\end{aligned}
$$

USANDO LA EXACTITUD DE LOS LÍMITES DIRECTOS EN $\mathcal{A}b$,
DONDE $C' = \varinjlim \mathrm{Im}\, e$. COMO C' ES SUMANDO DIRECTO DE
C (POR SER INYECTIVO), EXISTE UN EPIMORFISMO ...

$\gamma : \mathrm{Hom}_A(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C',D) \cong \ldots$
$\cong \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D))$, QUE ES INDUCIDO POR LA INCLUSIÓN $\mathfrak{a} \hookrightarrow A$, PORQUE EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTA:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[rr, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}"'] & & A \arrow[d, "\mathrm{Hom}"] \\
\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & & \mathrm{Hom}_A(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)) \arrow[ll, "\mathrm{Hom}_A(\alpha, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D))"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C',D) & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \arrow[ll, two heads, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

DADO QUE EL ISOMORFISMO DE LA IZQUIERDA ES NATURAL, USANDO LA EXACTITUD DEL $\varinjlim$ EN $\mathcal{Ab}$; EL DE LA DERECHA TAMBIÉN ES CLARAMENTE NATURAL. SE SIGUE ENTONCES QUE $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$ ES INYECTIVO.

PARA PROBAR QUE $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$ ES NO SINGULAR, SUPONGAMOS QUE $\mathfrak{a}$ ES UN IDEAL ESENCIAL DE A Y $\varphi\mathfrak{a} = 0$ PARA ALGÚN $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$. ENTONCES $C = C' \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$ PARA ALGÚN C'. SEA AHORA $e \in A$ LA PROYECCIÓN DE C SOBRE C'. COMO $\mathfrak{a} \hookrightarrow A$, TENEMOS $eA \cap \mathfrak{a} \neq 0$ Y $\forall\, e\alpha \in eA \cap \mathfrak{a}$ OBTENEMOS

$\varphi e \alpha = 0$ ¡ CONTRADICIENDO EL HECHO DE QUE ..... $C' \cap \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im} e \cap \operatorname{Ker}\varphi = 0$, LO CUAL TERMINA LA DEMOSTRACIÓN. ∎

SEA U UN GENERADOR PARA LA CATEGORÍA ESPECTRAL $\mathcal{C}$. COMO TODO MORFISMO SE ESCINDE, ES INMEDIATO QUE U SERÁ TAMBIÉN UN COGENERADOR INYECTIVO PARA $\mathcal{C}$. DE AQUÍ QUE PARA CADA OBJETO C DE $\mathcal{C}$ EXISTE UN CONJUNTO I TAL QUE $U^I = C \oplus D$, I.E., TODO OBJETO DE $\mathcal{C}$ ES SUMANDO DIRECTO DE UN PRODUCTO DIRECTO DE COPIAS DE U. AHORA APLICAREMOS LA PROPOSICIÓN ANTERIOR A LA REPRESENTACIÓN STANDARD DE $\mathcal{C}$ DETERMINADA POR U:

3 TEOREMA. (Gabriel y Oberst.) SEA $\mathcal{C}$ UNA CATEGORÍA ESPECTRAL, U UN GENERADOR PARA $\mathcal{C}$ Y $A = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U,U)$. ENTONCES:

(i) A ES REGULAR Y AUTOINYECTIVO ▶.

(ii) $\mathcal{C}$ ES EQUIVALENTE A LA CATEGORÍA $\mathcal{M}ód\text{-}(A,\mathcal{E})$, DONDE $\mathcal{E}$ ES EL FILTRO

DE IDEALES ESENCIALES DE A.

(iii) UN A-MÓDULO M_A ES $\mathcal{E}$-CERRADO SI Y SÓLO SI $A^I = M \oplus N$ PARA ALGÚN CONJUNTO I Y MÓDULO N_A.

PRUEBA: (i) QUEDÓ DEMOSTRADO EN LA PROPOSICIÓN ANTERIOR.

(ii): TODO A-MÓDULO $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,D)$, CON D UN OBJETO DE $\mathcal{C}$, ES $\mathcal{E}$-CERRADO PARA LA TOPOLOGÍA $\mathcal{E}$ DE IDEALES ESENCIALES DE A, POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR. $\mathcal{E}$ ES LA TOPOLOGÍA MÁS FUERTE CON ESTA PROPIEDAD (MÁS AÚN, ES LA TOPOLOGÍA MÁS FUERTE QUE HACE A A LIBRE DE TORSIÓN). POR TANTO, CONCLUIMOS QUE $\mathcal{C}$ ES EQUIVALENTE A $\mathcal{M}od$-$(A,\mathcal{E})$ POR EL TEOREMA DE POPESCU-GABRIEL.

(iii $\Rightarrow$) TODO A-MÓDULO $\mathcal{E}$-CERRADO ES DE LA FORMA $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,C)$. COMO SEÑALÁBAMOS ANTES, C ES SUMANDO DIRECTO DE ALGUNA POTENCIA U^I. LUEGO,

$$A^I = \prod_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,U^I)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, C\oplus D)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,C) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,D).$$

$\Leftarrow$) Como A es $\mathcal{E}$-cerrado, así lo es también todo sumando directo de A^I. ■

Cuando $\mathcal{C}$ es espectral discreta, todo objeto es semisimple y los endomorfismos toman una forma más especializada. Esto es lo que dice la siguiente:

4 PROPOSICIÓN. (Roos) Sea $\mathcal{C}$ una categoría espectral, U un generador para $\mathcal{C}$ y $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,U)$. Las siguientes aserciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{C}$ es espectral discreta.

(b) A es un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales sobre semicampos.

(c) Todo ideal $\blacktriangleright$ no cero de A contiene un ideal $\blacktriangleright$ mínimo.

PRUEBA: (a)$\Rightarrow$(b): Si $\Omega = \{\omega\}$ es el conjunto de clases de isomorfismo de objetos -

simples de $\mathcal{C}$, entonces U puede escribirse como $\bigoplus_{\Omega} U_\omega$, donde U_ω denota la suma directa de objetos simples pertenecientes a la clase ω.
Entonces tenemos $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,U) = \prod_{\Omega} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U_\omega, U_\omega)$.
Para $\omega \in \Omega$, sea S_ω un objeto simple de la clase ω, y sean $K_\omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_\omega, S_\omega)$, que es un semicampo y $V_\omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_\omega, U_\omega)$. un espacio vectorial $\blacktriangleright$ sobre K_ω. Ahora bien, U_ω está generado por S_ω, i.e., existe un epimorfismo de S_ω^I en U_ω para algún conjunto I. Consideremos ... $T(U_\omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_\omega, U_\omega) = V_\omega$ como espacio vectorial $\blacktriangleright$ sobre K_ω, donde T es el functor mencionado en el teorema de Popescu-Gabriel. Entonces se sigue del hecho de que T es pleno y fiel que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U_\omega, U_\omega) &\cong \mathrm{Hom}_{K_\omega}(T(U_\omega), T(U_\omega)) \\ &= \mathrm{Hom}_{K_\omega}(V_\omega, V_\omega). \end{aligned}$$

Luego, $A \cong \prod_{\Omega} \mathrm{Hom}_{K_\omega}(V_\omega, V_\omega)$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Supongamos $A = \prod_I A_i$, con cada una de las $A_i = \mathrm{End}_{K_i}(V_i)$ y V_i espacio vectorial $\blacktriangleright$ sobre K_i, K_i semicampo. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal $\blacktriangleright$ de A, sea $\mathfrak{a}_i$ la imagen de $\mathfrak{a}$ bajo la proyección π_i sobre A_i.
En ese caso, $\mathfrak{a} \supset \bigoplus_I \mathfrak{a}_i$, y por tanto basta que

CONSIDEREMOS $A = \mathrm{End}_K(V)$ PARA UN ESPACIO VECTORIAL ▶ SOBRE UN SEMICAMPO K. PARA CUALQUIER $e \in \mathrm{End}_K(V)$ IDEMPOTENTE PODEMOS TOMAR $f: V \to V$ COMO LA PROYECCIÓN SOBRE UN SUBESPACIO UNIDIMENSIONAL DE $e(V)$, Y ENTONCES fA ES UN IDEAL ▶ MÍNIMO CONTENIDO EN eA, YA QUE fA NO PUEDE CONTENER OTROS IDEALES ▶. SI ASÍ FUERA, ENTONCES PODRÍAMOS ESCRIBIR $fA = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$ CON $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = 0$, LO CUAL IMPLICARÍA $\mathrm{Im}\, b \cap \mathrm{Im}\, c = 0 \ \forall\, b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{c}$, PERO COMO $f(V) \cong K$, ESTO HACE QUE $\mathfrak{b} = 0$ Ó $\mathfrak{c} = 0$.

(c)$\Rightarrow$(a): LA CONDICIÓN (c) AFIRMA QUE EL SOCLO ▶ DE A, $\mathfrak{s}$, ES ESENCIAL EN A, PORQUE TODO IDEAL ▶ CONTIENE UN IDEAL ▶ MÍNIMO, LO CUAL SIGNIFICA QUE INTERSECTA AL SOCLO, Y $\mathfrak{s}$ ES ENTONCES EL IDEAL ▶ ESENCIAL MÍNIMO DE A. ADEMÁS, $\mathfrak{s}$ ES IDEAL BILÁTERO IDEMPOTENTE; EL CONJUNTO $\mathcal{F} = \{\mathfrak{b} \text{ ideal} \blacktriangleright \text{de } A \mid \mathfrak{b} \supset \mathfrak{s}\}$ RESULTA SER UNA TOPOLOGÍA (A LA CATEGORÍA $\mathcal{M}ód\text{-}(A, \mathcal{F})$ SE LE DENOTA USUALMENTE POR $\mathcal{M}ód\text{-}(A, \mathfrak{s})$, Y EN ESTE CASO ES LO MISMO QUE $\mathcal{M}ód\text{-}(A, \mathcal{E})$, Y CONSISTE DE TODOS LOS M_A TALES QUE EL MAPEO CANÓNICO $M \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{s}, M)$ ES ISOMORFISMO). LA INCLUSIÓN $\mathfrak{s} \hookrightarrow A$ SE HACE ISOMORFISMO EN $\mathcal{M}ód\text{-}(A, \mathfrak{s})$

y se sigue entonces que A es un generador semi-simple de $\mathcal{M}ód\text{-}(A, \varsigma)$, que es equivalente a $\mathcal{C}$. ∎

5 COROLARIO. Las siguientes propiedades de un anillo A son equivalentes:

(a) A es regular, autoinyectivo ▸ y es una extensión esencial de su soclo ▸.

(b) A es producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales ▸ sobre semicampos. ∎

Este último resultado concluye con la parte teórica de este capítulo. Como una aplicación de este último corolario tenemos el siguiente ejemplo:

Sea K un semicampo, $K^{(\mathbb{N})} = V$ un espacio vectorial de dimensión $\aleph_0$ y $A = \mathrm{End}_K(V)$. Entonces, por el anterior corolario, A es regular y autoinyectivo ▸, y es una extensión esencial de su soclo ▸, ¡pero A no es ◂ autoinyectivo!

PRUEBA: SEA $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ UNA BASE PARA V, Y SEAN $e_\alpha \in A$ LOS ENDOMORFISMOS IDEMPOTENTES DE V DADOS POR $e_\alpha(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}x_\beta$. TOMEMOS FIJO UNO DE ESOS ENDOMORFISMOS, DIGAMOS e_γ. DEFINAMOS $\varphi_\alpha : Ae_\alpha \to Ae_\gamma$ MEDIANTE

$$\varphi_\alpha(e_\alpha)(x_\beta)=\begin{cases} x_\alpha, & \text{si } \beta=\gamma \\ 0, & \text{si } \beta\neq\gamma \end{cases}$$

φ_α ES UN HOMOMORFISMO, YA QUE $An_A(\cdot e_\alpha)=(1-e_\alpha)$, Y $(1-e_\alpha)\,\varphi_\alpha(e_\alpha)(x_\gamma)=(1-e_\alpha)(x_\alpha)=0$.

DE ESTE MODO TENEMOS UNA FAMILIA $\varphi_\alpha : Ae_\alpha \to Ae_\gamma$ DE HOMOMORFISMOS. SEA $\varphi : \oplus Ae_\alpha \to Ae_\gamma$ EL HOMOMORFISMO INDUCIDO POR LOS φ_α; ENTONCES φ NO PUEDE EXTENDERSE A TODO A. PORQUE SUPONGAMOS QUE φ SE EXTIENDE A TODO A, I.E., QUE $\exists f\in A$ TAL QUE $\varphi(g)=gfe_\gamma$ $\forall g\in\oplus Ae_\alpha$, Y LLEGAREMOS A UNA CONTRADICCIÓN.

PRIMERO, NOTAMOS QUE SI $x\in V$ ENTONCES x PUEDE ESCRIBIRSE COMO $x=\sum_{i=1}^{n} x_i k_i=\sum_{i=1}^{n} e_{\alpha_i}(x)$, DONDE LOS x_i SON ELEMENTOS BÁSICOS Y $k_i\in K$.

ENTONCES,

$$\varphi(g)(x)=\varphi(g)\Big(\sum_{i=1}^{n} e_{\alpha_i}(x)\Big)=\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} g e_{\alpha_i}(x)\Big)$$

$$\ldots = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha_i}(g e_{\alpha_i})(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g \cdot \varphi_{\alpha_i}(e_{\alpha_i})(x)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i \neq \gamma \ \forall i = 1, \ldots, n \\ g(x_\gamma k_\gamma), & \text{si } \alpha_i = \gamma \text{ para algún } i. \end{cases}$$

POR OTRO LADO,

$$g f e_\gamma(x) = g f e_\gamma\left(\sum_{i=1}^{n} e_{\alpha_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} g f e_\gamma e_{\alpha_i}(x)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i \neq \gamma \ \forall i = 1, \ldots n \\ g(x_\gamma k_\gamma), & \text{si } \alpha_i = \gamma \text{ para algún } i. \end{cases}$$

DE LAS DOS IGUALDADES ANTERIORES SE SIGUE QUE $gf = g \ \forall g \in A$, DE DONDE $f = 1$. O SEA QUE ... $\varphi(g) = g e_\gamma \ \forall \ g \in \oplus A e_\alpha$. AHORA BIEN, SI $g \in \oplus A e_\alpha$, ENTONCES $g = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$, CON $g_i \in A$. PERO ENTONCES

$$\varphi(g) = g e_\gamma = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i e_\gamma$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } e_i \neq e_\gamma \ \forall i = 1, \ldots, n \\ g_i e_i & \text{si } e_i = e_\gamma \text{ para algún } i, \end{cases}$$

MIENTRAS QUE, POR OTRO LADO,

$$\varphi(g) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(g_i e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g_i \varphi_i(e_i) \quad !$$

LAS DOS ÚLTIMAS EXPRESIONES SON DISTINTAS, PUES CALCULÁNDOLAS EN X_γ DAN RESULTADOS COMPLETAMENTE DIFERENTES. ∎

CAPÍTULO III

ANILLOS AUTOINYECTIVOS.

CAP. III ANILLOS AUTOINYECTIVOS

CUANDO A ES UN ANILLO NO SINGULAR SU ANILLO MÁXIMO DE COCIENTES DERECHO SE OBTIENE COMO $A_{\mathcal{E}}$, TAL COMO MENCIONÁBAMOS EN EL CAPÍTULO PRECEDENTE. COMOQUIERA, CUANDO A ES UN ANILLO CON IDEAL SINGULAR NO CERO, HAY POCOS RESULTADOS CONOCIDOS ACERCA DE SU ANILLO MÁXIMO DE COCIENTES. LA MAYORÍA DE ESTOS RESULTADOS TRABAJAN CON EL CASO EN QUE $Q_{máx}(A.)$ ES UN ANILLO AUTOINYECTIVO, Y DE AHÍ LA IMPORTANCIA QUE COBRA ESTE TEMA DENTRO DE LA TEORÍA DE ANILLOS DE COCIENTES. AQUÍ ANALIZAREMOS ALGUNAS DE LAS PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES DE LOS ANILLOS AUTOINYECTIVOS.

SEA A UN ANILLO, Y CONSIDEREMOS EL FUNCTOR CANÓNICO $E: \mathcal{M}\acute{o}d\text{-}A \to \mathcal{S}pec\text{-}A$; ENTONCES PARA CADA MÓDULO M_A HAY UN MAPEO INDUCIDO

$$\mu_M: \mathrm{Hom}_A(M,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(E(M),E(M)),$$

QUE ES HOMOMORFISMO DE ANILLOS. CUANDO M ES INYECTIVO, ESTE MAPEO ES SUPRAYECTIVO, DADO QUE CUALQUIER HOMOMORFISMO $M' \to M$ CON $M' \hookrightarrow M$ PUEDE EXTENDERSE A UN HOMOMORFISMO $M \to M$. EL NÚCLEO DE μ_M ES ENTONCES UN IDEAL, QUE CONSISTE DE TODOS LOS ENDOMORFISMOS DE M QUE SE ANULAN EN UN SUBMÓDULO ESENCIAL DE M. CUANDO M ES INYECTIVO, ESTE IDEAL COINCIDE CON EL RADICAL DE JACOBSON:

1 PROPOSICIÓN. SEAN M_A UN MÓDULO INYECTIVO, $H = \mathrm{End}_A(M)$ Y $N = \{\alpha \in H \mid \mathrm{Ker}\,\alpha \hookrightarrow M\}$. ENTONCES $N = J(H)$.

PRUEBA: POR DEFINICIÓN, EL <u>RADICAL DE JACOBSON</u> DE H, $J(H)$, ES LA INTERSECCIÓN DE TODOS LOS IDEALES MÁXIMOS. UNA CARACTERIZACIÓN DE $J(H)$ ES LA DE SER EL IDEAL BILÁTERO MÁS GRANDE FORMADO POR

ELEMENTOS α TALES QUE $1-\alpha$ ES INVERTIBLE. ESTA CARACTERIZACIÓN ES PRECISAMENTE LA QUE USAREMOS EN LA PRUEBA.

PRIMERO DEMOSTRAREMOS QUE N ES UN ◀IDEAL▶ DE H: SI $\alpha, \beta \in N$, ENTONCES $\alpha+\beta \in N$, YA QUE $\mathrm{Ker}(\alpha+\beta) \supset \mathrm{Ker}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,\beta \hookrightarrow \underline{M}$; SI $\alpha \in \underline{N}$ Y $\gamma \in H$, ENTONCES $\alpha\gamma \in N$ PORQUE $\mathrm{Ker}\,\alpha\gamma = \gamma^{-1}(\mathrm{Ker}\,\alpha)$, QUE ES ESENCIAL EN $\underline{M}$ POR EL LEMA 4.I, Y $\gamma\alpha \in N$ PORQUE $\mathrm{Ker}\,\gamma\alpha \supset \mathrm{Ker}\,\alpha \hookrightarrow \underline{M}$, LUEGO N ES UN ... ◀IDEAL▶. AHORA, SI $\alpha \in N$ ENTONCES, COMO ... $\mathrm{Ker}(1-\alpha) \cap \mathrm{Ker}\,\alpha = 0$, SE SIGUE QUE $\mathrm{Ker}(1-\alpha) = 0$ Y $1-\alpha$ ES MONOMORFISMO. PORTANTO, $\mathrm{Im}(1-\alpha)$ ES UN MÓDULO INYECTIVO, LUEGO ES UN SUMANDO DIRECTO DE $\underline{M}$. PERO TAMBIÉN $\mathrm{Im}(1-\alpha) \hookrightarrow \underline{M}$, PORQUE $\mathrm{Im}(1-\alpha) \supset \mathrm{Ker}\,\alpha$ (DADO QUE $\alpha(x) = 0$ IMPLICA QUE $x = (1-\alpha)x$). CONCLUÍMOS QUE $\mathrm{Im}(1-\alpha) = \underline{M}$, DE MODO QUE $1-\alpha$ ES INVERTIBLE $\forall \alpha \in N$ Y $N \subset J(H)$.

ADEMÁS, COMO CLARAMENTE $J(H)/N = \ldots$ $\ldots = J(H/N)$, Y $H/N \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}pec\text{-}A}(E(M), E(M))$, QUE ES REGULAR, TENEMOS QUE PARA CADA $a \in H/N$ $\exists x \in H/N$ TAL QUE $a = axa$, Y ENTONCES $1-ax$

NO PUEDE SER INVERTIBLE, YA QUE $0 = a - axa = (1-ax)a$, DE DONDE $J(H/N) = 0$, Y $J(H) = N$. ∎

CON AYUDA DEL ANTERIOR RESULTADO Y LA PROPOSICIÓN 2.II LLEGAMOS A LA SIGUIENTE CONSECUENCIA (OSOFSKI, RENAULT, ROOS, UTUMI):

2 TEOREMA. SEA M_A INYECTIVO Y $H = \mathrm{End}_A(M)$. EL ANILLO $H/J(H)$ ES REGULAR Y AUTOINYECTIVO ▶. ∎

3 COROLARIO. SEA A UN ANILLO AUTOINYECTIVO ▶. ENTONCES:

(i) $J(A) = Z(A)$.

(ii) $A/J(A)$ ES UN ANILLO REGULAR Y AUTOINYECTIVO ▶.

LA SIGUIENTE ES OTRA PROPIEDAD IMPORTANTE DE LOS ANILLOS DE ENDOMORFISMOS DE MÓDULOS INYECTIVOS:

4 PROPOSICIÓN. Sea $H = \mathrm{End}_A(M)$, con M inyectivo. Entonces los idempotentes pueden levantarse módulo $J(H)$.

PRUEBA: Cuando $\mathfrak{a}$ es un «ideal» de A, se dice que pueden <u>levantarse los idempotentes módulo $\mathfrak{a}$</u> si $\forall f \in A/\mathfrak{a}$ idempotente $\exists e \in A$ idempotente tal que $\bar{e} = f$.

Supongamos que $\alpha \in H$ y $\alpha - \alpha^2 \in J(H)$, i.e., que $L = \mathrm{Ker}(\alpha - \alpha^2) \hookrightarrow M$; la cápsula inyectiva de $\alpha(L)$ es un sumando directo de M, de donde $\alpha(L) = \mathrm{Im}\,\varepsilon$ para algún idempotente $\varepsilon \in H$. Se sigue entonces que $\varepsilon\alpha = \alpha$ sobre el submódulo esencial L de M, de donde $\varepsilon\alpha - \alpha \in$... ...$J(H)$ (*). Pongamos ahora $\beta = \varepsilon + \varepsilon\alpha(1-\varepsilon)$, y notemos que

$$\begin{aligned}\beta^2 &= (\varepsilon + \varepsilon\alpha(1-\varepsilon))^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^2\alpha(1-\varepsilon) + \varepsilon\alpha(1-\varepsilon)\varepsilon + (\varepsilon\alpha(1-\varepsilon))^2 \\ &= \varepsilon + \varepsilon\alpha(1-\varepsilon) + (\varepsilon\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha\varepsilon^2) + (\varepsilon\alpha - \varepsilon\alpha\varepsilon)^2 \\ &= \varepsilon + \varepsilon\alpha(1-\varepsilon) + (\varepsilon\alpha\varepsilon\alpha - \varepsilon\alpha\varepsilon\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\alpha\varepsilon^2\alpha\varepsilon) \\ &= \beta.\end{aligned}$$

Probaremos a continuación que $\beta - \varepsilon\alpha$ ...$\in J(H)$, de lo cual, junto con (*), se concluye

QUE $\beta-\varepsilon\alpha+\varepsilon\alpha-\alpha=\beta-\alpha\in J(H)$ Y ENTONCES EL IDEMPOTENTE β LEVANTARÁ A α:

SEA $L'=\operatorname{Im}(1-\varepsilon)+\alpha(L)$; ENTONCES $L'\hookrightarrow \operatorname{Im}(1-\varepsilon)+\operatorname{Im}\varepsilon=M$, LUEGO $\beta-\varepsilon\alpha=\varepsilon-\varepsilon\alpha\varepsilon$ SE ANULA EN L' PUESTO QUE $\varepsilon\alpha\varepsilon\alpha|_L=\varepsilon\alpha^2|_L=\varepsilon\alpha|_L$, ES DECIR, $\forall x\in\alpha(L)$ $\varepsilon(x)=\varepsilon\alpha\varepsilon(x)$, ASÍ QUE OBTENEMOS $\beta-\alpha\varepsilon\in J(H)$, TAL COMO SE QUERÍA DEMOSTRAR. ∎

5 COROLARIO. SI A ES UN ANILLO AUTOINYECTIVO ▸, ENTONCES LOS IDEMPOTENTES PUEDEN LEVANTARSE MÓDULO $J(A)$. ∎

PRECISAREMOS AHORA EL SIGNIFICADO DE ALGUNOS TÉRMINOS QUE EMPLEAREMOS EN LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

UN ANILLO SE LLAMA <u>LOCAL</u> SI TODOS LOS ELEMENTOS NO INVERTIBLES FORMAN UN IDEAL PROPIO. TODO ANILLO LOCAL TIENE UN IDEAL MÁXIMO QUE ES ÚNICO. POR TANTO, ES FÁCIL VER QUE:

6 LEMA. El anillo A es local si y sólo si $A/J(A)$ es un anillo con división. ■

Más generalmente, decimos que A es un anillo <u>semilocal</u> cuando $A/J(A)$ es un anillo semisimple. Podemos notar que un anillo semilocal tiene sólo un número finito de ideales máximos, y un anillo conmutativo es semilocal si y sólo si el número de ideales máximos es finito.

Por último, el anillo A se dice que es <u>semiperfecto</u> si A es semilocal y pueden levantarse idempotentes módulo $J(A)$.

Dado que un anillo regular es semisimple si y sólo si no contiene familias infinitas de idempotentes ortogonales, obtenemos a partir de los corolarios 3 y 5:

7 PROPOSICIÓN. Un anillo autoinyectivo es

SEMIPERFECTO SI Y SÓLO SI NO TIENE FAMILIAS INFINITAS DE IDEMPOTENTES ORTOGONALES. ∎

8 PROPOSICIÓN. EL ANILLO DE ENDOMORFISMOS DE UN MÓDULO M ES SEMIPERFECTO SI Y SÓLO SI M TIENE RANGO FINITO.

PRUEBA: UN MÓDULO ES DE RANGO FINITO, POR DEFINICIÓN, SI NO CONTIENE CUALQUIER SUMA DIRECTA INFINITA DE SUBMÓDULOS PROPIOS. ES EVIDENTE ENTONCES QUE UN MÓDULO ES DE RANGO FINITO SI Y SÓLO SI SU ANILLO DE ENDOMORFISMOS NO CONTIENE FAMILIAS INFINITAS DE IDEMPOTENTES ORTOGONALES, DE MANERA QUE POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR EL RESULTADO SE SIGUE. ∎

PARA LA PARTE FINAL DE ESTE CAPÍTULO ESTUDIAMOS ALGUNOS RESULTADOS QUE RELACIONAN LA PROPIEDAD DE LA AUTOINYECTIVIDAD CON CIERTAS CONDICIONES QUE PUEDEN SER IMPUESTAS SOBRE LOS IDEALES ANULADORES.

9 PROPOSICIÓN. (IKEDA, NAKAYAMA) LAS SIGUIENTES PROPIEDADES DE UN ANILLO A SON EQUIVALENTES:

(a) TODO HOMOMORFISMO $\alpha : \mathfrak{a} \to A$, DONDE $\mathfrak{a}$ ES UN IDEAL ▶ FINITAMENTE GENERADO, TIENE LA FORMA $\alpha(a) = ca$ PARA ALGÚN $c \in A$.

(b) A SATISFACE: (i) PARA CUALESQUIERA $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ IDEALES ▶ FINITAMENTE GENERADOS, SE TIENE QUE $An_A(.\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = An_A(.\mathfrak{a}) + An_A(.\mathfrak{b})$, Y:

(ii) $An_A(.\,An_A(a.)) = Aa \ \forall a \in A$.

PRUEBA: (a)$\Rightarrow$(b): (i) SI $\mathfrak{a}$ Y $\mathfrak{b}$ SON COMO EN EL ENUNCIADO, ENTONCES ES CLARO QUE... $An_A(.\mathfrak{a}) + An_A(.\mathfrak{b}) \subset An_A(.\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. PARA SIMPLIFICAR LA NOTACIÓN, PONGAMOS DE AQUÍ EN ADELANTE $i(\mathfrak{a})$ POR $An_A(.\mathfrak{a})$ Y $d(\mathfrak{a})$ POR $An_A(\mathfrak{a}.)$. AHORA, SUPONGAMOS QUE $a \in i(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$; PODEMOS DEFINIR UN HOMOMORFISMO $\alpha : \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to A$ COMO

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \in \mathfrak{a} \\ (1+a)x, \text{ si } x \in \mathfrak{b}, \end{cases}$$

DADO QUE ESTAS DOS EXPRESIONES COINCIDEN EN $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. POR LO QUE DICE (a), $\exists\, c \in A$ TAL QUE $\alpha(x) = cx$. PARA $x \in \mathfrak{a}$ TENEMOS ENTONCES $cx = x$, I.E., $(c-1)x = 0$.

CONSECUENTEMENTE, PODEMOS ESCRIBIR $a=(c-1)+(1+a-c) \in i(\mathfrak{a})+i(\mathfrak{b})$.

(ii): $\forall a\in A$ TENEMOS $Aa\subset i(d(a))$. SI $b\in i(d(a))$, PODEMOS DEFINIR UN HOMOMORFISMO $aA\to bA$ COMO $ax\mapsto bx$. DE NUEVO SEGÚN (a) ESTE HOMOMORFISMO DEBE ESTAR DADO POR MULTIPLICACIÓN IZQUIERDA CON ALGÚN $c\in A$, ASÍ QUE EN PARTICULAR $b=ca$, Y $b\in Aa$.

(b)$\Rightarrow$(a): SEA $\mathfrak{a}$ UN IDEAL FINITAMENTE GENERADO, DIGAMOS $\mathfrak{a}=a_1A+\dots+a_nA$, Y SEA $\alpha:\mathfrak{a}\to A$. PROCEDEREMOS POR INDUCCIÓN: EL CASO $n=1$ ES OBVIO, YA QUE $\alpha(a_1x)=\alpha(a_1)x$ $\forall x\in A$. SUPONGAMOS QUE HAY ALGUNOS $c,c'\in A$ TALES QUE

$$\alpha(a)=\begin{cases} ca & \text{para } a\in\mathfrak{a}'=a_1A+\dots+a_{n-1}A.\\ c'a & \text{para } a\in a_nA.\end{cases}$$

PARA $a\in\mathfrak{a}'\cap a_nA$ DEBEMOS TENER $ca=c'a$, LUEGO $(c-c')a=0$, ASÍ QUE $c-c'\in i(\mathfrak{a}'\cap a_nA)=i(\mathfrak{a}')+i(a_nA)$, POR (i); DE ACUERDO A ESTO, PODEMOS ESCRIBIR $c-c'=b-b'$, CON $b\mathfrak{a}'=0=b'a_n$. ENTONCES LA MULTIPLICACIÓN IZQUIERDA POR $c-b=c'-b'$ COINCIDE CON α EN $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'+a_nA$. ∎

10 PROPOSICIÓN. SI A ES AUTOINYECTIVO ENTONCES:

(i) $i(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = i(\mathfrak{a}) + i(\mathfrak{b})$ $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ IDEALES DE A.

(ii) $i(d(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}$ $\forall \mathfrak{b}$ IDEAL FINITAMENTE GENERADO DE A.

PRUEBA: (i) SE OBTIENE UTILIZANDO EL MISMO ARGUMENTO QUE PARA $(a) \Rightarrow (b)(i)$ DE LA PROPOSICIÓN 9.

(ii): NOTEMOS PRIMERO QUE $d(\sum_{i=1}^{n} Aa_i) = \bigcap_{i=1}^{n} d(Aa_i)$. PARA DEMOSTRAR ESTE HECHO BASTA CON HACERLO PARA $n=2$: SI $x \in d(Aa_1 + Aa_2)$, ENTONCES... $(y_1 a_1 + y_2 a_2)x = y_1 a_1 x + y_2 a_2 x = 0$ $\forall y_1, y_2 \in A$; ESTO IMPLICA QUE $a_1 x = 0$ Y $a_2 x = 0$, I.E., $x \in d(a_1) = d(Aa_1)$ Y $x \in d(a_2) = d(Aa_2)$, I.E., $x \in d(Aa_1) \cap d(Aa_2)$. ESTE ARGUMENTO ES REVERSIBLE.

AHORA, SI $\mathfrak{b}$ ES UN IDEAL FINITAMENTE GENERADO, ESCRIBAMOS $\mathfrak{b} = Aa_1 + \ldots + Aa_n$. ENTONCES

$$i(d(\mathfrak{b})) = i(d(\sum_{i=1}^{n} Aa_i)) = i(\bigcap_{i=1}^{n} d(Aa_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i(d(Aa_i)) = \sum_{i=1}^{n} Aa_i = \mathfrak{b}$$

POR LO DEMOSTRADO EN (i) Y EN 9(ii) ∎

A CONTINUACIÓN CONSIDERAREMOS ANILLOS

AUTOINYECTIVOS▸ QUE SATISFACEN LA CONDICIÓN $d(i(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$ $\forall$ IDEAL▸ $\mathfrak{a}$ DE A, PERO ANTES ENUNCIAMOS UNA DEFINICIÓN Y ESTABLECEMOS UN LEMA.

DECIMOS QUE A ES UN ANILLO <u>KASCH</u>▸ SI NO TIENE IDEALES▸ DENSOS PROPIOS. EN ESTE CASO, SE SIGUE QUE SI A ES KASCH▸ ENTONCES A ES RACIONALMENTE COMPLETO, I.E. $A=Q_{máx}(A.)$.

11 LEMA. LAS SIGUIENTES PROPIEDADES DE UN ANILLO A SON EQUIVALENTES:

(a) A ES UN ANILLO KASCH▸.

(b) $C_I(A)$ ES UN COGENERADOR INYECTIVO PARA $\mathcal{M}$ód-A.

(c) TODO A-MÓDULO▸ SIMPLE ES ISOMORFO A UN IDEAL▸ MÍNIMO DE A.

(d) $\mathrm{Hom}_A(C,A)\neq 0$ $\forall A$-MÓDULO▸ CÍCLICO C.

(e) $i(\mathfrak{a})\neq 0$ $\forall$ IDEAL▸ PROPIO $\mathfrak{a}$ DE A.

PRUEBA: (a)$\Rightarrow$(b): UN IDEAL▸ $\mathfrak{a}$ ES, POR DEFINICIÓN, DENSO SI Y SÓLO SI $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},C_I(A))=0$.

De modo que si no hay ideales ▸ densos propios, entonces $\mathrm{Hom}_A(C, C_I(A)) \neq 0$ $\forall$ módulo ▸ cíclico $C \neq 0$, i.e., $C_I(A)$ es un cogenerador inyectivo.

(b)$\Rightarrow$(c): Si S_A es simple, entonces $\exists\, \alpha : S \rightarrowtail C_I(A)$. Como $A \hookrightarrow C_I(A)$, la imagen de α debe estar dentro de A, dado que si $\mathrm{Im}\,\alpha \cap A \neq \mathrm{Im}\,\alpha$, entonces $\mathrm{Im}\,\alpha \cap A \subset \ldots$
$\ldots \subset \mathrm{Im}\,\alpha \cong S$ ∇.

(c)$\Rightarrow$(d): Es sabido ya que todo M_A finitamente generado contiene un submódulo máximo. C entonces contiene un submódulo máximo C', luego C/C' es un A-módulo ▸ simple isomorfo a un ideal ▸ mínimo de A, y así $\alpha : C \twoheadrightarrow C/C' \hookrightarrow A$ es un elemento no cero de $\mathrm{Hom}_A(C, A) \neq 0$.

(d)$\Rightarrow$(e): Sea $C = \langle x \rangle$ un A-módulo ▸ cíclico tal que $\mathrm{An}_A(x\cdot) = \mathfrak{a}$, y sea $0 \neq \alpha \in \mathrm{Hom}_A(C, A)$. Entonces α debe estar dado en el generador de C, digamos $\alpha(x) = y$, $0 \neq y \in A$. De aquí obtenemos, $\forall a \in \mathfrak{a}$, que $0 = \alpha(0) = \alpha(xa) = \alpha(x)a = ya$, luego $0 \neq y \in i(\mathfrak{a})$.

(e) $\Rightarrow$ (a): SE SIGUE DE LA SIGUIENTE OBSERVACIÓN: UN IDEAL ▸ $\mathfrak{a}$ ES DENSO SI Y SÓLO SI $(\mathfrak{a}:a)$ NO - TIENE ANULADORES IZQUIERDOS $\forall a \in A$.

$\Leftarrow$) SI $\exists\, 0 \neq \alpha : A/\mathfrak{a} \to C_I(A)$, ENTONCES $\exists\, 0 \neq x$ ... $\in C_I(A)$ TAL QUE $x\mathfrak{a} = 0$; SEA $a \in A$ TAL QUE ... $0 \neq xa \in A$. AHORA, SI $b \in (\mathfrak{a}:a)$, ENTONCES $xab = 0$, LUEGO $xa(\mathfrak{a}:a) = 0$ ¡!.

$\Rightarrow$) SUPONGAMOS QUE $\exists\, a, b \in A$ TAL QUE $b(\mathfrak{a}:a) = 0$; TENEMOS UN DIAGRAMA CONMUTATIVO

$$\begin{array}{ccc} A/(\mathfrak{a}:a) & \longrightarrow & A \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A/\mathfrak{a} & \xrightarrow{\mu} & C_I(A) \end{array}$$

DONDE $\alpha(\bar{c}) = bc$, $\lambda(\bar{c}) = ac$ Y μ EXISTE POR SER $C_I(A)$ INYECTIVO. PERO $\mathfrak{a}$ DENSO IMPLICA $\mu = 0$, LUEGO $b = 0$. ∎

12 PROPOSICIÓN. CUANDO A ES UN ANILLO AUTO-INYECTIVO ▸, LAS SIGUIENTES CONDICIONES SON EQUIVALENTES:

(a) A ES UN ANILLO KASCH ▸.

(b) A ES UN COGENERADOR INYECTIVO PARA Mód-A.

(c) $d(i(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$ $\forall$ IDEAL ▸ $\mathfrak{a}$ DE A.

PRUEBA: (a)$\Rightarrow$(b): ES CLARO, POR EL LEMA ANTERIOR Y PORQUE $A=C_I(A)$.

(b)$\Rightarrow$(c): SUPONGAMOS QUE $d(i(\mathfrak{a}))\neq\mathfrak{a}$. ENTONCES $\exists\ 0\neq f: d(i(\mathfrak{a}))/\mathfrak{a}\to A$. COMO A ES INYECTIVO, EL HOMOMORFISMO COMPUESTO $g: d(i(\mathfrak{a}))\to d(i(\mathfrak{a}))/\mathfrak{a}\to A$ DEBE SER DE LA FORMA $g(a)=ba$ PARA ALGÚN $b\in A$. COMO $g(\mathfrak{a})=0$ SE SIGUE QUE $b\mathfrak{a}=0$, I.E., $b\in i(\mathfrak{a})$ PERO ENTONCES $g(a)=0$ $\forall\, a\in d(i(\mathfrak{a}))$ ¡!.

(c)$\Rightarrow$(a): SI $d(i(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$, ENTONCES CIERTAMENTE $i(\mathfrak{a})\neq 0$ $\forall$ IDEAL ▸ PROPIO DE A, Y SEGÚN EL LEMA 11 A ES KASCH ▸. ∎

13 PROPOSICIÓN. SEA A UN ANILLO AUTOINYECTIVO ▸, SEMIPERFECTO Y SUPONGAMOS QUE EL SOCLO ▸ DE A ES UN IDEAL ▸ ESENCIAL EN A. ENTONCES A ES UN ANILLO KASCH ▸.

Prueba: Como A es semiperfecto, podemos escribir 1 como suma de idempotentes ortogonales primitivos, digamos $1 = e_1 + \ldots + e_n$. Cada $e_i A$ es un módulo inyectivo inescindible, y contiene un ideal $\triangleright$ mínimo $\mathfrak{I}_i$ único. Ahora, si S_A es un módulo simple, entonces S es también simple como $A/J(A)$-módulo, luego $S \cong \bar{e}_i A/J$ para algún i. En particular, cada $\mathfrak{I}_i$ debe ser isomorfo a cierto $\bar{e}_{\pi(i)} A/J$, con π una permutación de $\{1, \ldots, n\}$, porque $\mathfrak{I}_i$ es simple. Dado que $e_i A$ es una cápsula inyectiva de $\mathfrak{I}_i$, se tiene que $\mathfrak{I}_i \cong \mathfrak{I}_j$ si y sólo si $e_i A \cong e_j A$. De aquí que el número de ideales $\triangleright$ $\bar{e}_i A/J$ no isomorfos es igual al número de $\mathfrak{I}_i$'s no isomorfos, de donde cada módulo simple es isomorfo a algún ideal $\triangleright$ mínimo $\mathfrak{I}_i$. Esto satisface la condición (c) del Lema 11, luego A es un anillo Kasch $\triangleright$. ∎

Por último, ofrecemos algunos ejemplos de la teoría hasta aquí desarrollada, con lo cual finalizamos este trabajo.

EJEMPLOS

(·) SI $H = End_A(M)$, DONDE M ES UN A-MÓDULO INYECTIVO INESCINDIBLE, ENTONCES $H/J(H)$ ES UN ANILLO CON DIVISIÓN, POR EL LEMA 6, Y PORQUE H ES LOCAL: PARA DEMOSTRAR ESTO ÚLTIMO BASTA HACER VER QUE SI $\alpha, \beta \in H$ SON NO INVERTIBLES ENTONCES ASÍ LO ES $\alpha+\beta$ TAMBIÉN. SI α Ó β ES MONOMORFISMO, ESCINDE A M, COSA QUE NO PUEDE OCURRIR. POR CONSIGUIENTE, ÚNICAMENTE NECESITAMOS PROBAR QUE SI $Ker\alpha \neq 0 \neq Ker\beta$, ENTONCES $Ker(\alpha+\beta) \neq 0$. PERO ESTO ES EVIDENTE, PUESTO QUE $Ker(\alpha+\beta) \supset \ldots$ $Ker\alpha \cap Ker\beta \neq 0$, POR SER M UNIFORME. ∎

(·') ANILLOS AUTOINYECTIVOS NOETHERIANOS. SI A ES UN ANILLO NOETHERIANO ▷, ENTONCES A ES AUTOINYECTIVO ▷ SI Y SÓLO SI:

(i) $i(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = i(\mathfrak{a}_1) + i(\mathfrak{a}_2)$ PARA CUALESQUIERA $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ IDEALES ▷ DE A.

(ii) $i(d(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}$ $\forall\, \mathfrak{b}$ ◁IDEAL FINITAMENTE GENERADO DE A.

ESTE HECHO SE SIGUE INMEDIATAMENTE DE LAS PROPOSICIONES 9 Y 10. ∎

(∴) ANILLOS QUASI FROBENIUS. UN ANILLO ◀ARTINIANO▶ SE DICE QUE ES UN ANILLO <u>QUASI FROBENIUS</u> (Ó MÁS BREVEMENTE, UN ANILLO <u>QF</u>) SI SATISFACE

$$d(i(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a} \quad , \quad i(d(\mathfrak{b}))=\mathfrak{b}$$

PARA TODOS LOS IDEALES▶ $\mathfrak{a}$ E ◀IDEALES $\mathfrak{b}$. APLICANDO LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PARTE FINAL DE ESTE CAPÍTULO, OBTENEMOS SIN DIFICULTAD LA SIGUIENTE

PROPOSICIÓN. UN ANILLO ◀ARTINIANO▶ ES UN ANILLO QF SI Y SÓLO SI ES ◀AUTOINYECTIVO▶

PRUEBA: (⇐) ES CONSECUENCIA INMEDIATA DE LA PROPOSICIÓN 10.

(⇒): SI A ES UN ANILLO QF, ENTONCES LA CONEXIÓN DE GALOIS (d,i) DEFINE UN ANTIISOMORFISMO ENTRE LAS REDES DE IDEALES IZQUIERDOS Y DERECHOS. DE AQUÍ PODEMOS CONCLUIR QUE LAS CONDICIONES PARA ANULADORES DE LA PROPOSICIÓN 9 SE SATISFACEN; COMO A ES ◀ARTINIANO▶, SE SIGUE POR UN RESULTADO CLÁSICO QUE A ES TAMBIÉN ◀NOETHERIANO▶, LUEGO TODOS LOS IDEALES (◀ Ó ▶) SON FINITAMENTE GENERADOS Y A ES ◀AUTOINYECTIVO▶. ∎

OTRO RESULTADO DIGNO DE MENCIÓN SOBRE ESTE

TEMA SE DESPRENDE DIRECTAMENTE DE LA PROPOSI-CIÓN 12:

COROLARIO. TODO ANILLO QF ES UN ANILLO ◀KASCH▶. ∎

LOS ANILLOS QF POSEEN MUCHAS OTRAS PROPIEDADES INTERESANTES, ENTRE LAS QUE CABE SEÑALAR LA DE QUE LAS CONDICIONES QUE LOS DEFINEN PUEDEN HACERSE UNILATERALES, Ó INCLUSO DEBILITARSE HASTA EL GRADO DE PEDIRSE ÚNICAMENTE EL SER AUTOINYECTIVO ◀ó▶ (O SU EQUIVALENTE EN ANULADORES) Y SATISFACER LA C.A.C. EN IDEALES ANULADORES ◀ ó ▶. NO ENTRAREMOS AQUÍ EN MAYORES DETALLES SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE ESTAS PROPIEDADES. ∎

(∴) ÁLGEBRAS DE FROBENIUS. SEA A UN ÁLGEBRA DE DIMENSIÓN FINITA SOBRE UN CAMPO K. ENTONCES A ES UN <u>ÁLGEBRA DE FROBENIUS</u> SI EXISTE UNA FORMA K-BILINEAL $\Phi : A \times A \to K$, QUE SEA NO DEGENERADA Y ASOCIATIVA, EN EL SENTIDO DE QUE $\Phi(ab, c) = \Phi(a, bc)$ $\forall a, b, c \in A$. SEA $\mathfrak{a}$ UN ◀IDEAL DEL ÁLGEBRA DE

Frobenius A. Entonces $\forall\, b \in d(\mathfrak{a})$ obtenemos

$$\Phi(\mathfrak{a},b)=\Phi(\mathfrak{a}b,1)=\Phi(0,1)=0.$$

Inversamente, si $\Phi(\mathfrak{a},b)=0$, entonces...

$0=\Phi(A\mathfrak{a},b)=\Phi(A,\mathfrak{a}b)$ implica $\mathfrak{a}b=0$, por ser Φ no degenerada. Tenemos por consiguiente que $d(\mathfrak{a})=\{b\in A \mid \Phi(\mathfrak{a},b)=0\}$, y similarmente $i(\mathfrak{b})=\{a\in A \mid \Phi(a,\mathfrak{b})=0\}$ para un ideal $\mathfrak{b}$.

Usando las propiedades conocidas de las formas bilineales, encontramos que

$$\dim_K \mathfrak{a}+\dim_K d(\mathfrak{a})=\dim_K A=\dim_K \mathfrak{b}+\dim_K i(\mathfrak{b}),$$

y podemos concluir que $i(d(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$, $d(i(\mathfrak{b}))$, luego toda álgebra de Frobenius es un anillo QF. ∎

BIBLIOGRAFÍA.

BIBLIOGRAFÍA.

1) ANDERSON, FRANK W. y FULLER, KENT R.: Rings and categories of modules _ GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS, Vol. 13, BERLIN-HEIDELBERG-NEW YORK, SPRINGER-VERLAG 1974.

2) FAITH, CARL G.: Lectures on injective modules and quotient rings _ LECTURE NOTES IN MATHEMATICS, Vol. 49, BERLIN-HEIDELBERG-NEW YORK, SPRINGER-VERLAG 1967

3) FREYD, PETER: Abelian categories _ NEW YORK-EVANSTON-LONDON, HARPER & ROW 1966

4) STENSTRÖM, BO _ Rings and Modules of Quotients _ LECTURE NOTES IN MATHEMATICS, Vol. 237, BER-

LIN-HEIDELBERG-NEW YORK, SPRINGER-VERLAG 1971.

5) ________: Rings and Modules of Quotients. GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS, BERLIN-HEIDELBERG-NEW YORK, SPRINGER-VERLAG 1973.