UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS DE LUDWIG WITTGENSTEIN

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

RENE CUARENOS MATA

1 9 7 9

CONTENIDO

CAPITULO PAGINA

CAPITULO I

INTRODUCCION

El presente trabajo intenta, dentro de las limitaciones del tema, exponer y explicar las ideas de Ludwig Wittgenstein acreca de las Matemáticas y su fundamentación, así como resaltar sus afinidades o diferencias con las tres principales corrientes fundacionistas, a saber, Logicismo, Formalismo e Intuicionismo.

Matemáticos renombrados se han ocupado también de este tema, cuya importancia no puede soslayarse. Muchos de ellos han dedicado su genio y sus esfuerzos para fundamentar las Matemáticas, empresa cuyo inicio puede situarse a principios del presente siglo.

Una de las dificultades que se encuentra a lo largo del estudio de las ideas de Wittgenstein es la difícil forma de expresión que dicho filósofo utiliza, que es evidente en el Tractatus Logico-Philosophicus, única obra publicada en vida. El resto de sus obras, incluyendo la fuente principal de este trabajo; Bemerkungen uber die Grundlagen der Mathematik (Remarks on the foundations of Mathematics), son obras póstumas. Alan Ross Anderson[5] afirma que las notas y afirmaciones contenidas en dicha obra desafían el resumen y son en muchos casos secretas, fragmentarias e incompletas. Michael Dummett[14] a su vez, reconoce que son imprecisas u obscuras, que algunos pasajes contradicen otros, algunos son poco concluyentes; otros levantan objeciones a ideas que Wittgenstein mantenía o había mantenido, que no estan expresadas claramente en el libro, y concluye: "Una de las tareas del lector es, por lo tanto, extraer el oro". Finalmente citaremos a R.L. Goodstein quien dice que las afirmaciones de Wittgenstein son: "exasperantemente misteriosas e incompletas." Pero pese a esta limitación, la lectura de sus afirmaciones no deja de ser una experiencia provechosa. En ellas encontramos una original concepción de las Matemáticas (no exenta de objeciones) que nos proporciona una perspectiva distinta de las de las tres corrientes antes mencionadas. Esta perspectiva es opuesta a todas las corrientes fundacionistas, pues Ludwig Wittgenstein no considera necesaria la fundamentación de las Matemáticas.

Es necesario aclarar que, salvo algunas excepciones, a lo largo del Remarks on the Foundations of Mathematics, Wittgenstein no parece interesado en proponer soluciones a los problemas, sino tan solo mencionarlos, hacernos ver cierto aspecto y llamar nuestra atención hacia ellos desde un punto de vista distinto al tradicional.

Antes de iniciar el estudio de las afirmaciones de Wittgenstein, proporcionamos una breve descripción de las corrientes fundacionistas así como de las paradojas, ya ya que a lo largo de este trabajo se hacen constantes referencias a dichas corrientes. También es pertinente hacer algunas aclaraciones con respecto a la forma de este trabajo:

La fuente principal de este estudio, Remarks on the Foundations of Mathematics, es una obra póstuma en la cual se hallan recopiladas y numeradas las afirmaciones de Wittgenstein de acuerdo al criterio de los editores G.H. von Wright, R. Rhees y G.E.M. Anscombe quienes las numeraron y ordenaron en orden cronológico. Es por ello que afirmaciones con numeración muy distinta se refieran al mismo tema ya que Wittgenstein , pasado algún tiempo, volvía a ocuparse de temas ya abordados por él.

Los editores mencionados dividieron las afirmaciones de Wittgenstein en cinco partes numeradas con números romanos y dos apéndices; cada afirmación fue numerada con número arábigos. Así, por ejemplo, la afirmación II-14 es la catorceava afirmación de la segunda parte. En este trabajo, cada afirmación conserva la numeración que tiene en el ya mencionado libro. Las afirmaciones provenientes de algún apéndice se indican con la abreviatura Ap. antes del número.

Las citas de Wittgenstein aparecen aquí con caracteres más separados y fueron traducidas por el autor de este trabajo de la versión inglesa, la cual fue a su vez traducida del texto original en alemán por G.E.M. Anscombe. En algunas citas en la que la traducción literal es imposible se introduce entre paréntesis la frase en inglés.

Finalmente se aclara que las llamadas se refieren a la bibliografía que se incluye al final de este trabajo, las notas al pie de página se indican con un asterísco.

CAPITULO II

LAS CORRIENTES FUNDACIONISTAS

La necesidad de fundamentar las Matemáticas surge con el descubrimiento de las paradojas, especialmente en la teoría de conjuntos, algunas de las cuales mencionaremos brevemente en la siguiente sección. Uno de los supuestos tácitos a lo largo del desarrollo de las Matemáticas es que en ella no deben poder deducirse contradicciones. Esto es, dada una proposición P, no puede ocurrir que P y no-P sean ambas verdaderas. Sobre esta base resulta natural afirmar que si la suposición de inexistencia de algún ente matemático lleva a una contradicción, entonces ese ente debe existir; o bien, que si suponer P y no-Q lleva a una contradicción, entonces P implica Q debe ser verdadera.

El descubrimiento de las paradojas, es decir, la posibilidad de deducir contradicciones, perturbó poderosamente la tranquilidad de los matemáticos. Se llegó a hablar incluso de la crisis de los fundamentos de las Matemáticas. A la luz de las paradojas, no era posible suponer sin ninguna justificación la consistencia de la Teoría de Conjuntos y en general, la consistencia de toda teoría matemática.

Ante esta situación, muchos matemáticos dirigieron sus esfuerzos para eliminar las paradojas y, como meta final, proporcionar una demostración de consistencia de la aritmética.

A continuación exponemos brevemente algunas paradojas.

LAS PARADOJAS

Solo mencionaremos aquí las paradojas de Bertrand Russell, Georg Cantor y Burali-Forti.

Sea C el conjunto definido por la proposición

$x \notin x$ tal que x es un conjunto. C es entonces el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Dado cualquier otro conjunto 'y' , podemos preguntarnos si 'y' pertenece o no a C. Solo puede darse dos casos, a saber, 'y' pertenece a C o bien, 'y' no pertenece a C. Analogamente, podemos hacer la misma pregunta con respecto a C, pues es un conjunto. Pero si C pertenece a C, entonces se contiene a sí mismo y por la definición de C no debería pertenecer a él, ahora bien, si C no pertenece a C, por no contenerse a sí mismo debería pertenecer a C. Conclusión: C pertenece a C si y solo si no pertenece a C. A este argumento se le conoce como la paradoja de Russell que puede expresarse tambien informalmente de la siguiente manera:

En un cierto estado A hay A_1, A_2, ... A_n municipios; cada uno posee un presidente municipal P_1, P_2, ...P_n respectivamente. Resulta que algunos presidentes municipales no viven en el municipio que presiden, así que se crea un lugar especial A_{n+1} en donde deben vivir los presidentes municipales que se encuentren en esa situación. Como son tantos, A_{n+1} se convierte en un municipio con necesidad de presidente municipal, pero ¿dónde debe vivir P_{n+1}? Si vive en A_{n+1} esta viviendo en el municipio que preside pero por definición dicho lugar es solo para los presidentes municipales que no viven en su municipio, por lo tanto, no debe vivir ahí. Pero si no vive en A_{n+1} está en la situación que lo obliga a vivir ahí, a saber, que no esta viviendo en su municipio.

La paradoja de Cantor, encontrada por él mismo en 1899, esta relacionada con la cardinalidad de los conjuntos y es como sigue:

Sea A el conjunto de todos los conjuntos. Consideremos su conjunto potencia P(A), que es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Por la definición de A y P(A), resulta que todo elemento de P(A) tambien es elemento de A y, por lo tanto, P(A) es subconjunto de A. Debido a esta contención y a la definición de $\prec$ para números cardinales, se debe tener que card(P(A)) $\prec$ card(A) , sin embargo es bien sabido que el número cardinal de un conjunto no puede ser mayor que el de su conjunto potencia.

Finalmente, la paradoja de Cesare Burali-Forti que se refiere a los números ordinales:

Consideremos la sucesión de todos los números ordinales. Esta sucesión es bien ordenada y por lo tanto debe tener un número ordinal que será mayor que todos los números ordinales. Pero éste tambien es un número ordinal y, en conclusión, será mayor que sí mismo.

Russell, observando que la definición de conjunto dada por Georg Cantor es demasiado permisiva[8] (permite la consideración de conjuntos de conjuntos), llegó a la conclusión de que restringiendo esta definición mediante la teoría de los tipos, se evitaría la aparición de las paradojas.

A continuación damos una breve descripción de cada una de las tres corrientes fundacionistas que han tratado de resolver este problema y que en vista de los resultados de Kurt Gödel, la solución propuesta por formalistas y logicistas no ha sido del todo satisfactoria.

EL LOGICISMO

Esta corriente fue iniciada por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead quienes pensaban que las Matemáticas pueden reducirse a la Lógica. Esto es, que haciendo uso solamente de principios lógicos se puede reconstruir la Matemática evitando las paradojas. Esta tarea culminó en la obra Principia Mathematica, en la cual basados en la teoría de tipos desarrollan detalladamente las ideas que Russell expusiera en The Principles of Mathematics en donde afirma: "La tesis fundamental de las páginas siguientes, que las Matemáticas y la Lógica son identicas, es una idea que nunca he visto razón para modificar". En Principia Mathematica, Whitehead y Russell afirman:

> Una gran parte de la labor relacionada con la escritura de la presente obra ha sido dirigida contra las contradicciones y paradojas que infectan la Lógica y la Teoría de Conjuntos... gradualmente se nos hizo evidente que alguna forma de la doctrina de los tipos debía ser adoptada si debíamos evitar contradicciones....Se ha probado (puesto que afirmamos haberlo probado) que es <u>posible</u> construir una lógica matemática que no conduce a contradicciones.

Pero el hecho de que no puedan aparecer las paradojas ya conocidas (viz. la paradoja de Russell) no asegura que no ocurrirán otro tipo de paradojas, esto es, debe probarse la consistencia del sistema formal contenido en Principia Mathematica.

La teoría de los tipos es utilizada precisamente para asegurar que cualquier cosa relacionada con todos los miembros de un conjunto no sea también miembro de ese conjunto. Así, si los elemento de un conjunto son objetos, las funciones proposicionales que se aplican a estos objetos son de tipo 0, si los elementos de un conjunto son a su vez funciones proposicionales, las funciones proposicionales aplicadas a estos elementos (funciones proposicionales) son de tipo 1, etc.

Mencionaremos a continuación algunos de los axiomas utilizados en Principia Mathematica, llamados en dicha obra Proposiciones primitivas (Pp).

1) Todo lo implicado por una premisa verdadera es verdadero. (Pp)

2) $(p \vee p) \supset p$

i.e. si p o p es verdadera, entonces p es verdadera.

3) $q \supset (p \vee q)$

i.e. si q es verdera, entonces p o q es verdera (Pp)

Axioma de reducibilidad: para cualquier función proposicional de cualquier tipo existe una equivalente de tipo 0. Este axioma ha recibido bastantes objeciones pues como reconocen Russell y Whitehead: "tiene una justificación puramente pragmática: nos lleva a los resultados deseados y no a otros".[41]

Algunos de los temas desarrollados en esta obra son: teoría de conjuntos, aritmética, inducción matemática, números cardinales finitos e infinitos, series y su convergencia o divergencia, derivadas, límites y continuidad de funciones, series bien ordenadas, números ordinales, racionales y reales, vectores, etc.

Muchas son las objeciones a la corriente logicista, las cuales no se mencionaran aquí, pero es importante mencionar el efecto que sobre el trabajo de Whitehead, Russell y Hilbert tuvieron los resultados de Kurt Gödel (que veremos en detalle más adelante). Basta decir por el momento que Gödel demostró que si el sistema de Russell y Whitehead es consistente, entonces en él es posible construir una proposición indecidible, esto es, una proposición que no puede deducirse de los axiomas iniciales. En otras palabras, no todas las cuestiones que pueden plantearse en dicho sistema pueden ser resueltas en él.

EL INTUICIONISMO

Esta corriente iniciada por Kronecker y continuada por Brower rehusa aceptar ciertos procedimientos matemáticos como válidos, a saber, las demostraciones que afirman la existencia de algún ente matemático pero que no lo construyen o no proporcionan un método para construirlo en un número finito de pasos, también rechazan el principio del tercero excluído en el contexto de totalidades infinitas.

Brower considera a las Matemáticas como un proceso de construcción, sujeto a la obligación de notar cuales tesis son aceptables a la intuición y cuales no, y que solo en este proceso de construcción radica la fundamentación de las Matemáticas[10]. No acepta que deba partirse de principios lógicos y por ello Herman Weyl, conocido intuicionista, afirma que de acuerdo al punto de vista de Brower, despues de leer la historia de las Matemáticas se llega a la conclusión de que la lógica clásica fue abstraída de las matemáticas de los conjuntos finitos y sus subconjuntos, y posteriormente aplicada sin justificación a las matemáticas de los conjuntos infinitos. "He aquí -afirma Weyl- la caída y pecado original de la teoría de conjuntos, por lo cual se ve, justamente, castigada por las antinomias".[50]

La exigencia de un método mediante el cual, en un número finito de pasos se puede resolver todo problema matemático, implica el abandono de cuestiones tales como la convergencia de la sucesión:

$$S(n) = \begin{cases} 1 \text{ para toda } n \geq i & \text{si 777 aparece en el i-ésimo lugar de la expansión decimal de } \pi . \\ 0 & \text{si 777 no aparece en la expansión decimal de } \pi . \end{cases}$$

Los conjuntos infinitos son, para los intuicionistas, potencialmente y no realmente infinitos, coincidiendo así con la concepción aristotélica del infinito. Las demostraciones de existencia de un objeto mediante el argumento de que la no existencia de dicho objeto lleva a una contradicción no son aceptadas como tales por el intuicionismo. A propósito de estas demostraciones, Herman Weyl afirma que ellas informan de la existencia de un tesoro sin decirnos donde se encuentra.[49]

Así pues, la manera intuicionista de fundamentar las Matemáticas es recontruyendolas, partiendo de los números naturales atendiendo a procedimientos finitos y constructivos.

EL FORMALISMO

Iniciada por David Hilbert, esta corriente intenta dar una base para la aritmética sin usar la teoría de conjuntos y establecer su consistencia. Para llevar a cabo este propósito, es necesario axiomatizar las Matemáticas y en esta tarea el papel de la lógica es muy importante.

La axiomatización, por su parte, requiere del establecimiento de signos y reglas para operar con ellos pero que carecen de significado por sí mismos. El que pueda o no atribuirseles un significado matemático no es parte del desarrollo axiomático. Así pues, una teoría axiomatizada no es sino un conjunto de signos y reglas para operar con ellos, es un sistema formal (sin significado) de ahí deriva el nombre de esta corriente.

Para ejemplificar la axiomatización se reproduce a continuación un breve fragmento de la obra de Hilbert llamada Grundlagen der Geometrie:

> Definición: Consideremos tres conjuntos de objetos. Llamemos a los objetos del primero puntos, a los del segundo líneas y a los del tercero planos, denotados respectivamente por mayúsculas, minúsculas y letras

griegas. Se considera que los puntos, líneas y planos tienen ciertas relaciones mutuas que denotamos por palabras como "estar entre", "estar sobre" y "congruente". La descripción precisa y matemáticamente completa de estas relaciones se sigue de los axiomas de la geometría.

Algunos de estos axiomas son los siguientes:

I.1 Para cualesquiera dos puntos A y B, existe una línea que los contiene.

I.4 Para cualesquiera tres puntos A, B y C que no estan en la misma línea, existe un plano α que los contiene. Para todo plano existe un punto que dicho plano contiene.

I.8 Existen al menos cuatro puntos que no estan en el mismo plano.

En un sistema tal, una demostración es una sucesión finita de fórmulas tales que son axiomas o consecuencia de axiomas mediante la o las reglas de inferencia, y un teorema es la última fórmula de una demostración.

Si fuera posible construir un sistema axiomático que represente a la aritmética y demostrar su consistencia, la fundamentación de las Matemáticas estaría resuelta, pero he aquí que los resultados obtenidos por Gödel hechan por tierra estas aspiraciones ya que para demostrar la consistencia de un sistema formal que represente a la aritmética es necesario construir otra teoría formal cuya consistencia esta en tela de juicio. Nagel y Newman[35] en su conocida exposición del teorema de Gödel resumen esta situación así:

> ...él (Gödel) demostró que es imposible establecer una demostración metamatemática de la consistencia de un sistema suficiente amplio como para contener a la aritmética, a menos de que en esta demostración se usen reglas de transformación más poderosas que las reglas de transformación empleadas para derivar teoremas dentro del sistema.
>
> En suma, un dragón es eliminado solo para crear otro.

CAPITULO III

LA ARITMETICA

Introducción

En este capítulo iniciamos el estudio de las afirmaciones de Ludwig Wittgenstein contenidas en el libro Remarks on the Foundations of Mathematics. Debe notarse que en muchas de sus afirmaciones, Wittgenstein parece mantener un dialogo con un interlocutor que jamás es identificado, a ello se debe la constante aparición de comillas y preguntas, lo cual dificulta en cierto modo la lectura. Debido a que Wittgenstein a sido interpretado de muy diversas maneras y frecuentemente incomprendido, se ha evitado en todo momento alterar, en beneficio del estilo, sus afirmaciones.

No hacemos un estudio exhaustivo de todas sus afirmaciones, sino solo de aquellas que son más relevantes para nuestro fines: exponer sus líneas principales de pensamiento con respecto a la fundamentación y naturaleza de las Matemáticas así como hacer resaltar sus afinidades y diferencias con las tres corrientes fundacionistas ya mencionadas.

LA CONSISTENCIA DE LA ARITMETICA

El matemático, a lo largo del estudio y desarrollo de cualquier teoría matemática, requiere un cierto grado de certeza para continuar tal desarrollo o estudio, esto es, necesita demostrar las afirmaciones que utiliza para estar seguro de que tanto dichas afirmaciones como las consecuencias de ellas sean válidas. Acepta de antemano que el sistema que le ocupa posee la siguiente propiedad: dada una proposición P, solo es posible que P o no-P sea verdadera pero no ambas o equivalentemente, supone que el sistema es consistente.

Hasta ahora, la demostración de la consistencia de la aritmética es un problema abierto y ello permite hacer las siguientes consideraciones:

Si la consistencia de la aritmética fuera demostrada, lo que era una suposición (P o no-P es verdadera pero no ambas) se convierte en una afirmación demostrada y exenta de toda duda, no queda entonces nada que discutir.

Si se demostrara que la aritmética no es consistente, i.e. si se encontrara en ella una contradicción, el matemático estaría tentado a desecharla puesto que poder derivar en ella una contradicción implicaría que todo aquello que se basó en la suposición de consistencia deja de tener validez.

Tomando una posición totalmente diferente, Wittgenstein afirma:

V-28 Quiero decir: si se encontrara ahora una contradicción en la aritmética, eso solo probaría que una aritmética con tal contradicción puede brindar un muy buen servicio, y sería mejor para nosotros modificar nuestro concepto de certeza requerida, que decir que esa no era una aritmética apropiada.

Hay dos aspectos importantes de esta afirmación que deben hacerse notar.

Primero, que la importancia de la aritmética no radica -según Wittgenstein- en la consistencia, sino en que a lo largo de los milenios en que ha sido utilizada por el hombre, no solo no ha ocasionado problemas sino que ha demostrado su gran utilidad. Con respecto a esto, Wittgenstein afirma que:

I-5 ...Lo que llamamos contar es una parte importante de las actividades de nuestra vida. Contar y calcular no son, por ejemplo, simplemente un pasatiempo. Contar (y esto significa contar así) es una técnica empleada diariamente en las más variadas operaciones de nustra vida. Y es por ello que aprendemos a contar como lo hacemos: con interminable práctica, con exactitud inmisericorde: es por ello que se insiste inexorablemente en que digamos "dos" despues de "uno", "tres" despues de "dos" y así sucesivamente. -"¿Pero contar es solo un uso? ¿no hay acaso alguna verdad correspondiente a esta sucesión?". La verdad es que contar es útil. (The truth is that counting has proved to pay). "¿Entonces quieres decir que ser verdadero significa ser útil?". No, eso no, sino que no se puede decir de la serie de los números naturales -como tampoco del lenguaje- que es verdadera, sino que es útil y sobre todo que es usada.

Se podría objetar que este es un punto de vista pragmático que basa la importancia de las Matemáticas en su utilidad pero, en realidad, Wittgenstein hace énfasis en que la utilidad demostrada no solo de la aritmética sino de amplias ramas de las Matemáticas le impiden creer que todo su sentido, toda su importancia radica en la demostración de su consistencia.

Los matemáticos que bajo el seudónimo de Nicolás Bourbaki afirman que "durante veinticinco siglos los matemáticos han corregido sus errores y por lo tanto han visto su ciencia enriquecida, no empobrecida, eso les da el derecho de ver el futuro con serenidad"[8], no tendrían necesidad de hablar de corregir errores o ver el futuro con serenidad si pensaran -como Wittgenstein- que la solución del problema de la fundamentación de las Matemáticas no reside en garantizar su consistencia, sino en la disolución del problema. Esto es, que la ausencia de dicha demostración no sea más una difícil carga que llevar sobre los hombros. Como afirma Wittgenstein en el Tractatus Logico-Philosophicus:

> 6.52 Nosotros sentimos que incluso si todas las posibles cuestiones científicas puedieran responderse, el problema de nustra vida no habría sido más penetrado. Desde luego que no queda ya ninguna pregunta, y precisamente ésta es la respuesta.
>
> 6.521 La solución del problema de la vida está en la desaparición del problema.

La paráfrasis es inmediata:

La solución del problema de la fundamentación de las Matemáticas está en la desaparición del problema.

El otro aspecto que debe enfatizarse de la afirmación V-28 es que Wittgenstein recomienda modificar nuestro concepto de certeza requerida que decir que la aritmética, en caso de ser inconsistente, no era la apropiada. Este concepto de certeza ciertamente se ha modificado debido a los resultados de Kurt Gödel[18] quien ha demostrado que no puede proporcionarse una demostración metamatemática de la consistencia de la aritmética, a menos que en el sistema empleado se haga uso de herramientas más poderosas que las de la aritmética misma y con la necesidad ulterior de garantizar también la consistencia de dicho sistema. Si bien no se ha encontrado una contradicción en la aritmética, las esperanzas de encontrar una demostración de su consistencia se han visto considerablemente reducidas. El matemático, sin haber garantizado que dada una proposición P, tan solo P es verdadera o no-P es verdadera pero no ambas, continúa confiando en la aritmética y en las Matemáticas y en sus métodos de demostración. Esto muestra que ha cambiado su concepto de certeza.

CAPITULO IV

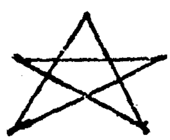
LAS MATEMATICAS COMO CREACION HUMANA

En este capítulo se analizan las afirmaciones de Wittgenstein mediante las cuales muestra su concepción de las Matemáticas como creación humana en oposición a la consideración de que las Matemáticas son un descubrimiento del hombre.

I-25 ¿Qué pasa cuando aseguro que el patrón de líneas:

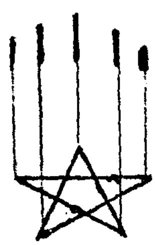
(a)

está semejantemente numerado con este patrón de ángulos



(b)

(he hecho los patrones memorables a propósito) correlacionandolos?:



(c)

Ahora, ¿qué aseguro cuando veo esta figura?

I-27 Puedo, sin embargo, concebir la figura (c) como una demostración matemática. Demos nombres a las formas de (a) y (b) llamando a (a) una mano M y a (b) un pentángulo H. He demostrado que M tiene tantas líneas como H tiene ángulos.*

I-30 La proposición demostrada por (c) sirve ahora como una nueva prescripción para asegurar igualdad numérica: si un conjunto de objetos ha sido arreglado en la forma de una mano y otro como los ángulos de un pentángulo, decimos que los dos conjuntos son iguales en número.

I-31 "¿Pero no es esto simplemente porque hemos correlacionado M y H y visto que tienen el mismo número de elementos?" -Sí, pero si lo tienen en un caso, ¿cómo sé que lo tendrán siempre? "Pues porque es la <u>esencia</u> de M y H tener el mismo número de elementos" -¿Pero cómo es posible darse cuenta de ello por haberlos relacionado? (Yo pensaba que contar o correlacionar simplemente me decía que esos dos grupos tienen -o no- el mismo número de elementos).

---

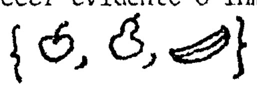
* En efecto, la manera de demostrar matemáticamente que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos (la misma cardinalidad) es mediante el establecimiento de una función biyectiva (correspondencia biunívoca) de un conjunto en el otro.

I-32 Podría decir también como resultado de la demostración: De ahora en adelante un M y un H tienen el mismo número de elementos.
O: la demostración no explora la esencia de las dos figuras sino que expresa lo que yo estoy contando como la esencia de las figuras de ahora en adelante. Yo deposito lo que pertenece a la esencia entre los paradigmas del lenguaje.
El matemático crea la esencia
Der Mathematiker erzeugt Wessen.

He aquí la concepción de Wittgenstein de las Matemáticas, radicalmente opuesta al platonismo, que afirma la existencia de los entes matemáticos independientemente de la mente que los piensa.[42]

Para Wittgenstein, afirmar que hay tantas líneas en M como ángulos en H no es algo que se descubra sino que se impone como criterio de similaridad entre M y H, y en general entre todo conjunto que tenga tantas ξ como líneas tiene M.

Puede parecer evidente o inmediata la relación entre:

A=  y

B= $\{\square, \triangle, \bigcirc\}$

para un matemático o para una persona entrenada a pensar en términos de conjuntos, y tal vez por ello, sea más fácil pensar que esa relación (viz. tener el mismo número de elementos) es, de hecho, descubierta al observar los conjuntos A y B.

Ahora bien, al hacer la observación de los conjuntos A y B, no necesariamente tenemos que referirnos al "número de elementos". Así, por ejemplo, al observar el conjunto A se puede golpear (ligeramente) con el dedo sobre cada uno de los símbolos que estan entre los corchetes, de tal modo que se escuchara algo como "Toc, toc, toc". Si se repite este procedimiento con el conjunto B y se escucha también toc, toc, toc, podemos concluir que ambos comparten la relación Toc, toc, toc. Aquí se ve que mediante esta técnica (golpear sobre los símbolos) *expreso* la relación en la cual *he centrado mi atención*, pero ¿por qué llamarla "relación esencial" entre A y B? Otra persona bien pudo haber dicho que la relación que encuentra entre ambos conjuntos es que contienen elementos "semjantes" respectivamente, esto es, que en A solo aparecen frutas y en B solo figuras geométricas. ¿Por qué no llamar entonces esencia de A y B a tener elementos "semejantes"? No lo hacemos porque lo que nos interesa de los conjuntos, entre otras cosas, es lo que llamamos su número cardinal, pero, repetimos, eso es lo que *nos interesa*.

Wittgenstein afirma que el que se afirme que  y  esten semejantemente numerados (o bien que M tenga tantas líneas como ángulos tiene H) hace de esa relación la esencia de M y H y no al revés. En otras palabras: no es que sea la esencia de M y H estar semejantemente numerados, sino que a estar semejantemente numerados le llamamos la esencia de H y M.

No es que A y B tengan tres elementos cada uno lo que los hace semejantes sino que yo, al observarlos, los hago semejantes afirmando que tienen tres elementos. Esta idea , que compartimos firmemente con Wittgenstein, está sutilmente expresada en el Tractatus Logico-Philosophicus:

> 3.1432 No: "El signo complejo 'aRb' dice que 'a' está en relación con 'b'" sino: Que 'a' está en una cierta relación con 'b' dice que 'aRb'.

Wittgenstein considera al matemático como un inventor, no como un descubridor. Sin embargo, las Matemáticas no son una invención libre de la mente, sinó estimulada en una gran variedad de formas. Algunas veces, necesidades de otras ciencias estimulan el desarrollo de las Matemáticas; otras, de las mismas Matemáticas surgen problemas y motivaciones para su ulterior desarrollo.

Podemos citar,a manera de ejemplo, los cuatro problemas que enuncia Morris Kline como principales motivaciones para la invención del cálculo.[28] Estos cuatro problemas son:

1.- Dada la fórmula para la distancia que recorre un cuerpo, como función del tiempo, encontrar la velocidad y la aceleración, y recíprocamente.

2.- Encontrar la tangente a una curva. El interés por este problema surge de más de una fuente. El diseño de lentes era un interés directo de Fermat, Huygens, Descartes y Newton. El estudio del paso de la luz a través de lentes requiere del conocimiento del ángulo de incidencia para poder aplicar la ley de refracción, el ángulo significativo es el que se forma entre el rayo de luz y la normal a la curva.

3.- Encontrar el valor máximo o mínimo de una función. Cuando una bala de cañón es disparada, la distancia que recorre horizontalmente depende del ángulo en que es disparada. El estudio del movimiento de los planetas también incluye problemas de máximos y mínimos.

4.- Encontrar la longitud de una curva, por ejemplo, la distancia recorrida por un planeta en un cierto tiempo. Encontrar áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies,centros de gravedad y la atracción gravitacional de un cuerpo.

Morris Kline añade que "el método de agotamiento fue modificado primero gradualmente y después radicalmente por <u>la invención</u> del cálculo".[28] (El subrayado es mío)

Wittgenstein afirma al respecto:

> I-166 ¿Pero, se necesita una sanción para esto? ¿Se puede ampliar la red <u>arbitrariamente</u>? Bueno, podría decir que el matemático esta <u>inventando</u> siempre nuevas formas de descripción. Algunas estimuladas por necesidades prácticas, otras por necesidades

estéticas, y otras estimuladas en una variedad de formas.

Y concluye:

I-167 El matemático es un inventor, no un descubridor.

CAPITULO V

WITTGENSTEIN Y EL TEOREMA DE GÖDEL

En el apéndice I de la primera parte del Remarks on the Foundations of Mathematics, Wittgenstein trata acerca del resultado obtenido por Kurt Gödel y publicado en 1931.[18] En particular, Wittgenstein discute acerca de la afirmación de la existencia de proposiciones indecidibles que Gödel enuncia de la manera siguiente:

> Si a los axiomas de Peano añadimos la lógica de Principia Mathematica* (con los números naturales como individuos) junto con el axioma de elección (para todos los tipos), obtenemos un sistema formal S para el cual se cumplen los siguientes teoremas:
>
> I.- El sistema S no es completo ((entscheidungsdefinit)); esto es, contiene proposiciones A (y de hecho podemos exhibir tales proposiciones) para las cuales ni A ni no-A son demostrables, y en particular contiene (aún para propiedades F decidibles acerca de los números naturales) problemas indecidibles de la simple estructura (Ex)F(x) donde x varía sobre los números naturales**.

---

* Con el axioma de reducibilidad o sin la ramificada teoría de tipos.

** Además S contiene fórmulas del cálculo funcional restringido, tales que ni la validez universal ni la existencia de contraejemplos es demostrable para ninguna de ellas.

Debido a que Wittgenstein argumenta acerca de este resultado, no mencionaremos los demás, sin que ello signifique que se les reste importancia. A continuación exponemos la idea general de la demostración que está basada en la explicación que el mismo Gödel hace en su artículo, previa a la demostración formal. Puede consultarse también la exposición de Nagel y Newman.[35] Suponemos que el lector está familiarizado con los sistemas formales, no obstante, en el apéndice A se da una breve explicación de lo que son las fórmulas significativas, también llamadas fórmulas bien formadas.

Como ya se dijo anteriormente, las corrientes fundacionistas en su intento para fundamentar las Matemáticas han tenido necesidad de precisar y delimitar claramente los conceptos y el lenguaje empleados en las Matemáticas. Hacia 1931, los sistemas formales más acabados y amplios (en el sentido de poder desarrollar en ellos gran parte de las Matemáticas) eran Principia Mathematica y la axiomatización de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Podría esperarse que todas las cuestiones que pueden plantearse en dichos sistemas puedan resolverse dentro de ellos pero , precisamente, Gödel demostró que esto no puede ser.

Esta situación no es debida a los axiomas empleados, sino a la naturaleza misma de los sistemas mencionados, esto ocurre también, en particular, en todos los sistemas que resulten de ellos mediante la adición de un número finito de axiomas, siempre y cuando no pueda demostrarse, debido a los axiomas añadidos, una proposición falsa en la cual, además de las constantes lógicas — (no), v (o), (x) (para toda x) y = (igual), no aparezcan otras nociones distintas de + (adición) y • (multiplicación), ambas para números naturales y en la cual los prefijos (x) solo se apliquen también a números naturales.

Veamos ahora la idea general de la demostración del ya citado teorema.

Las fórmulas de Principia Mathematica (abreviado de aquí en adelante PM) son sucesiones finitas de símbolos primitivos tales como variables, constantes lógicas, paréntesis y puntos. De dichas fórmulas siempre se puede saber si corresponden a fórmulas significativas o no.*

Desde el punto de vista formal, una demostración es una sucesión finita de fórmulas en la cual solo hay axiomas o consecuencias de ellos mediante la o las reglas de inferencia. En vista de que para consideraciones metamatemáticas no importa qué objetos sean escogidos como símbolos primitivos, Gödel usa números naturales como tales. Entonces, las fórmulas se convierten en sucesiones finitas de números naturales y las demostraciones, a su vez, en sucesiones finitas de sucesiones finitas de números naturales.

Así, las proposiciones metamatemáticas se convierten en proposiciones acerca de números naturales o de sucesiones de ellos, de modo

---

* Cf. Apéndice A.

que pueden expresarse en símbolos de PM.

Puede demostrarse que las nociones 'fórmula', 'demostración' y 'fórmula demostrable' pueden ser definidas en PM, de tal modo que se puede construir una fórmula, digamos F(v), que puede ser interpretada como "v es una fórmula demostrable". Gödel procede entonces a construir una proposición A que es indecidible, i.e. ni A ni no-A son demostrables en S.

Llamamos fórmula natural a toda fórmula de PM con exactamente una variable libre del tipo de los números naturales. Suponemos que dichas fórmulas naturales estan ordenadas y que la noción 'fórmula natural' así como la relación de orden pueden definirse en PM.

Sea R(n) la n-ésima fórmula natural, si α es una fórmula natural, $[\alpha;n]$ es la fórmula que resulta de remplazar la única variable libre de α por el signo que denota al número natural n.

Se define al conjunto de números naturales K como sigue:

$$n \in K \equiv \overline{}Bew[R(n),n]$$

donde BewX significa 'X es una fórmula demostrable' y la línea anterior significa negación. Así pues, n pertenece a K si y solo si: —(la fórmula que resulta de substituir la variable libre de la n-ésima fórmula natural por el signo que denota al número natural n es demostrable).

Las nociones que aparecen en el definiens pueden definirse en PM, por lo tanto, el conjunto K puede ser definido también en PM. Esto es, hay una fórmula natural F tal que $[F;n]$ puede ser interpretada como "el número natural n pertenece a K". Como F es una fórmula natural, debe ser alguna de las fórmulas naturales que supusimos estaban ordenadas, o sea $F=R(q)$ para algún número natural q. Pues bien, la fórmula $[R(q);q]$ es indecidible en PM.

Antes de ver cómo es que dicha fórmula es indecidible, veamos cómo debe interpretarse.

$[R(q);n]$ o sea $[F;n]$ debe interpretarse como "el número natural n pertenece a K", por lo tanto, $[R(q);q]$ debe interpretarse como "el número natural q pertenece a K". Pero que q pertenezca a K significa, por definición, que q es el número natural que substituido por la única variable libre de R(q) hace que : —($[R(q);q]$ es demostrable). En otras palabras, la fórmula $[R(q);q]$ dice de sí misma que no es demostrable.

Supongamos que $[R(q);q]$ fuera demostrable, entonces bajo esta interpretación sería verdadera y en ese caso se cumpliría

$$\text{—Bew}\,[R(q);q]$$

y eso contradice que $[R(q);q]$ sea demostrable.

Si por el contrario, suponemos que la negación de $[R(q);q]$ es demostrable, entonces se cumpliría que q no pertenece a K y, por lo tanto se tendría que

$$\text{Bew}\,[R(q);q]$$

se cumpliría y eso quiere decir que $[R(q);q]$ es demostrable y hemos supuesto que su negación lo era. Por lo tanto, $\left[R(q);q\right]$ es indecidible.

Dado que $\left[R(q);q\right]$ es interpretada de tal modo que dice de sí misma que es indemostrable y ya que, en efecto, ni ella ni su negación son demostrables, bajo esta interpretación, la fórmula $\left[R(q);q\right]$ es verdadera.

LAS AFIRMACIONES DE WITTGENSTEIN

Ahora pasamos a la discusión que hace Wittgenstein de este resultado que, definitivamente, no comprendió del todo y la razón de esta incomprensión es la identificación de los conceptos <u>verdad</u> y <u>demostrabilidad</u>.

Wittgenstein inicia sus comentarios de la manera siguiente:

> Ap. I-5 ¿Hay proposiciones verdaderas en el sistema de Russell que no pueden ser demostradas en ese sistema? Entonces, ¿a qué llamamos proposición verdadera en el sistema de Russell?
>
> Ap. I-6 ¿qué significa que una proposición sea verdadera? 'p' es verdadera=p. (Esa es la respuesta)
>
> Así que queremos preguntar algo como: ¿bajo

qué condiciones afirmamos una proposición? O: ¿cómo se usa la afirmación de una proposición en el juego del lenguaje? Y aquí, "afirmación de una proposición" es contrastado con la expresión de una proposición, por ejemplo, como práctica de la elocución o como parte de otra proposición.

Si, entonces, nos preguntamos en este sentido: "Bajo qué circunstancias se afirma una proposición en el sistema de Russell? la respuesta es: Al final de una demostración o como una ley fundamental. No hay otra manera de emplear proposiciones afirmadas en el sistema de Russell.

Para Wittgenstein, una proposición es verdadera en el sistema de Russell si puede afirmarse, así que cada vez que se menciona "proposición afirmada", debe entenderse "proposición verdadera". Este es fundamentalmente el error de Wittgenstein ya que las proposiciones de PM son fórmulas sin significado pues es un sistema formal.

Las fórmulas de un sistema formal son suceptibles de ser demostrables o indemostrables, pero no verdaderas o falsas. Estos valores de verdad (verdero y falso) se aplican cuando las fórmulas son 'traducidas' a una interpretación. Alan Ross Anderson lo enuncia con gran claridad:

En el contexto de la lógica matemática, "verdadero" es un predicado semántico y "demostrable" es sintáctico. Dadas (a) una formulación sintáctica de un sistema en el cual ciertas expresiones son demostrables y (b) una interpretación del sistema en la cual ciertas expresiones son verdaderas, podríamos preguntarnos si todas las verdades son demostrables. Si es así, se dice que el sistema es completo relativamente a la interpretación, si no, se dice que es incompleto.[4]

Lo que Gödel demostró, precisamente, es que el sistema de Russell (si es consistente) es incompleto.

Ap. I-7"¿Pero puede haber proposiciones verdaderas escritas en este simbolismo que no son demostrables en el sistema de Russell?". 'Proposiciones verdaderas', o sea, proposiciones que son verdaderas en otro sistema, i.e., que pueden ser afirmadas en otro sistema. Ciertamente, ¿por qué no habría de haber tales proposiciones o, aún más, por qué no podríamos escribir proposiciones, digamos de la física, en el simbolismo de Russell? La pregunta es bastante análoga a: ¿puede haber proposiciones en el lenguaje de Euclides que no son demostrables en su sistema, pero queson verdaderas?

¿Por qué hay proposiciones que son demostrables en el sistema de Euclides pero falsas en otro?

¿Los triângulos pueden ser, en otro sistema, similares (muy similares) pero que no tengan los ângulos iguales? "Pero eso es una broma, porque en ese caso no son similares en el mismo sentido".

Por supuesto que no, y una proposición que no puede demostrarse en el sistema de Russell es "verdadera" o "falsa" en un sentido diferente al de una proposición de Principia Mathematica.

El problema de Wittgenstein se reduce a que está suponiendo, quizá inconcientemente, que el sistema de Russell es completo, o sea, está suponiendo que todo lo que es verdadero es demostrable.

Metido en este predicamento, se ve obligado a abandonar la interpretación dada a $\left[R(q);q\right]$ pues lo lleva a una contradicción:

Ap. I-8 Imagino a alguien que me pide consejo y me dice: "He construido una proposición (la designaré P) en el simbolismo de Russell y mediante ciertas definiciones y transformaciones, puede ser interpretada de modo que diga: "P no es demostrable en el sistema de Russell". ¿No debo acaso decir que esta proposición es por un lado indemostrable y por otro verdadera? Porque si fuera falsa, entonces es verdad que es demostrable. Y eso no puede ser. Y si es demostrada, entonces se demüestra que no es demostrable, así que solo puede ser indemostrable".

...Si suponemos que la proposición es demostrable en el sistema de Russell, esto quiere decir que es verdadera en el sentido de Russell. Y la interpretación 'P no es demostrable' debe abandonarse. Si suponemos que es verdadera en el sentido de Russell, lo mismo se sigue. Más aún, si la proposición se supone falsa en un sentido distinto al de Russell, entonces no se contradice si es demostrada en el sistema de Russell. (Lo que se llama "perder" en ajedrez puede ser ganar en otro juego).

He aquí los problemas a que Wittgenstein se enfrenta, y que no esta por demás decirlo, él mismo los ha creado.

Este es un desafortunado error que ha servido para atacarlo duramente.* No es nuestro propósito defenderlo puesto que evidentemente está en un error en este caso, no obstante,este error no es suficien-

* Cf. Alan Ross Anderson.[5]

te como para hacer caso omiso del resto de sus observaciones. Pese a éste y otros errores que haya podido cometer, es posible rescatar su filosofía de las matemáticas que es, por cierto, sumamente interesante.

CAPITULO VI

LA CONTRADICCION

La aparición de las contradicciones o paradojas fue interpretada como un indicio de que las Matemáticas carecían de fundamento y de ahí el surgimiento de las corrientes fundacionistas.

En este capítulo se presenta la concepción de Wittgenstein acerca de la contradicción que, por cierto, no significa para él un indicio de falta de fundamento de las Matemáticas y por ello sugiere modificar nuestra actitud con respecto a la contradicción.

> II-78 Supongamos que originalmente se practicaran las cuatro operaciones en la forma usual y que después se llevaran a cabo con expresiones entre paréntesis como (a-a). La gente notaría que las multiplicaciones, por ejemplo, comenzarían a ser ambiguas. ¿Los llevaría esto a una confusión? ¿Tendrían que decir: "Ahora la base sólida de la aritmética parece tambalearse?".
>
> Y si ahora exigieran una demostración de consistencia, porque de otra manera caerían en problemas a cada paso, ¿qué estarían exigiendo? Bueno, estarían exigiendo una clase de orden. Pero, ¿no había orden antes? Bueno, estarían exigiendo un orden

que los apaciguaría ahora. ¿Pero son como niños pequeños que necesitan una canción de cuna para dormir?

Bueno, las multiplicaciones serían inútiles en la práctica debido a su ambigüedad, esto es, para los propósitos normales. las predicciones basadas en las multiplicaciones no serían acertadas. (Si se tratara de predecir la longitud de una línea de soldados que puede ser formada por un cuadrado de 50x50 de ellos, llegaría a resultados diferentes cada vez).

¿Entonces esta clase de cálculos es incorrecta? Bueno, es inútil para estos propositos (quizá útil para otros).

Lo que queremos es describir, no explicar.

Hemos caminado dormidos entre abismos. ¿Pero aún si dijeramos: "Ahora estamos despiertos", podemos estar seguros de que no vamos a despertar otra vez (y, por lo tanto, decir: así que estábamos dormidos otra vez).

¿Podemos estar seguros de que no hay abismos que no vemos? Pero supongamos que yo dijera: Los abismos del cálculo no estan ahí si no los vemos.

¿No nos está engañando un demonio ahora? Bueno, si es así no importa.

Ojos que no ven, corazón que no siente.

Con este argumento, entre otros, Wittgenstein intenta alterar nuestra actitud con respecto a la contradicción y a las demostraciones de consistencia. No nos recomienda simplemente cerrar nuestros ojos ante las paradojas, sino modificar nuestro concepto de certeza.

Sabemos que se puede demostrar la consistencia de teorías formales bastante simples como, por ejemplo, el cálculo proposicional. Pero entonces, nos encontramos en el caso de teorías demasiado simples. Como afirma José Alfredo Amor:

> Si queremos certeza absoluta, entonces tenemos que contentarnos con un sistema muy "trivial" tal como el cálculo proposicional con un número finito de proposiciones. Sin embargo, si queremos disfrutar de la riqueza de aventuras en el razonamiento que permiten los conceptos de número y de teoría de conjuntos, entonces tenemos que aceptar algún elemento de inseguridad y la posibilidad de encarar una paradoja que solo más tarde en un campo de contornos (posiblemente) más inseguros, podemos resolver.[4]

El que hayan aparecido las corrientes fundacionistas muestra que al menos estas corrientes han considerado a las contradicciones como algo grave dentro de las Matemáticas, de modo que para ellos es necesario garantizar que, haciendo las debidas correcciones, no aparecerán nunca más. Esto es, se han esforzado en proporcionar una demostración de consistencia o bien, como los intuicionistas, en garantizar la no-contradictoriedad de las Matemáticas por otros métodos. Ante esta actitud Wittgenstein afirma:

> II-82 Quiero preguntar: ¿debe una demostración de consistencia (o de no ambigüedad) necesariamente darme una mayor certidumbre de la que tengo sin ella? Y si en realidad ando en pos de aventuras, ¿no puedo buscarlas ahí, donde la demostración no me ofrece ninguna certidumbre?

Y añade:

> Mi meta es alterar la actitud con respecto a la contradicción y a las demostraciones de consistencia (no mostrar que estas demostraciones prueban algo sin importancia. ¿Cómo podría ser eso?).

Y alterar la actitud con respecto a las demostraciones de consistencia y la contradicción implica alterar la actitud con respecto a las Matemáticas en general.

La concepción de las Matemáticas de Wittgenstein es bastante coherente, pues su actitud con respecto a la contradicción y a las demostraciones de consistencia se conjuga con su anti-fundacionismo para formar una concepción sumamente interesante.

No obstante no haber comprendido el teorema de Godel, Wittgenstein pone en tela de juicio la existencia de un cálculo totalmente adecuado, esto es, suficientemente amplio y consistente y completo:

> II-85 ¿Hay algo -puede preguntarse- llamado el cálculo lógico _correcto_, solo que sin las contradicciones?
>
> ¿Podría decirse, por ejemplo, que la teoría de tipos de Russell evita la contradicción, aún así, el cálculo de Russell _no es el cálculo lógico universal_, sino uno quizá artificialmente restringido y mutilado? ¿Podría decirse que el cálculo lógico _puro_ y _universal_ debe aún ser encontrado?

Las respuestas afirmativas a estas preguntas, dadas por Gödel indirectamente, estan completamente en favor de Wittgenstein cuya idea es que la aparición de las paradojas no debía tomarse como una indicación de que las Matemáticas debieran reconstruirse, ni que tal reconstrucción resolvería el problema de la fundamentación de las Matemáticas.

Alan Ross Anderson extrapola en exceso al afirmar que "algunos argumentos diseñados para cambiar nuestra actitud hacia la contradicción indican que Wittgenstein no comprendió ni el contenido ni la motivación de un número de resultados que discute - y añade - lo que haré es discutir su tratamiento del teorema de Godel como ilustrativo de una mala concepción de los programas logicista y formalista".[5]

La afirmación II-85 (cuya continuación citamos más adelante) es suficiente para rebatir la de A.R. Anderson. Es verdad, como ya hemos visto, que Wittgenstein no comprendió el teorema de Gödel ni sus implicaciones, pero de ahí a afirmar que no comprendió ni la motivación ni el contenido de los programas logicista y formalista hay una gran diferencia.

> II-85 (continuación)... La formalización de la lógica no funcionó satisfactoriamente. Pero ¿para qué fue hecho este intento? (¿para qué es útil?). ¿No surgió esta necesidad y la idea de que podía resolverse satisfactoriamente de una falta de claridad en otro lado?
>
> La pregunta "¿para qué era ú il?" era una pregunta bastante <u>esencial</u>. Porque el cálculo no fue

> inventado para algún propósito práctico, sino para 'dar fundamento a la aritmética'. Pero ¿quién dice que la aritmética es lógica o lo que debe hacerse con la lógica para hacerla, en cierto sentido, una subestructura para la aritmética? Si hubieramos sido dirigidos a intentar esto, por ejemplo, por consideraciones estéticas, ¿quién dice que habría de tener éxito?
>
> La insatisfacción filosófica desaparece cuando vemos más... En ciertos lugares el cálculo me guía hacia su propia abolición. Ahora quiero uno que excluya esos lugares. ¿Significa esto, sin embargo, que cualquier cálculo en el que no ocurra tal exclusión es incierto? "Bueno, el descubrimiento de tales lugares fue una advertencia para nosotros". Pero: ¿no *comprendieron mal* esa advertencia?

El descubrimiento de las contradicciones se toma como una indicación de que algo no funciona bien y por lo tanto surge la necesidad de una reconstrucción para evitar las contradicciones. Wittgenstein se pregunta ¿no es esto un error?

Aquí podemos hacer una analogía histórica. Los griegos, al descubrir los segmentos inconmensurables, los consideraron como una indicación de que era un error asociar números a segmentos rectilíneos, con lo cual se privaron de la posibilidad de enriquecer su sistema numérico con la creación de los números irracionales. Podemos preguntarnos: ¿no fue un error considerar a los segmentos inconmensurables como una indicación para el abandono de la asociación de números con segmentos? ¿no comprendieron mal los griegos el surgimiento de los segmentos inconmensurables?

Del mismo modo, Wittgenstein se pregunta si el surgimiento de las paradojas no ha sido incomprendido.

Pero, si el surgimiento de las paradojas ha sido mal interpretado, al pensarlo como una indicación de la necesidad de reconstruir las Matemáticas evitando las contradicciones, ¿cuál es entonces el enfoque que debe darse a las paradojas? ¿cómo debe interpretarse la aparición de las paradojas? He aquí una indicación:

> II-87 Veremos a la contradicción bajo una luz muy diferente si vemos sus ocurrencias y consecuencias antropológicamente, que si las vemos con la exasperación del matemático. Esto es, las veremos diferentemente si simplemente tratamos de describir cómo la contradicción influye en los lenguajes (language-games) que si la vemos desde el

punto de vista del que proporciona leyes matemáticas.

¿Cómo debemos considerar a las pardojas entonces? Para dar respuesta a esta cuestión es necesario tener una concepción de las Matemáticas que no considere que estan sobre una base poco confiable, o más bien, que no tienen una base firme.

Creer que la ausencia de una demostración plausible de la consistencia de la aritmética la hace poco confiable y, por lo tanto, que nuestros esfuerzos deben ser dirigidos a la consecución de esta demostración para fundamentarla, es la premisa básica de las corrientes fundacionistas. Aunque los intuicionistas no pretendan dar una demostración de consistencia, sus esfuerzos también se basan e la consideración de la falta de fundamento de las Matemáticas.

Si no consideramos que la aritmética no es del todo correcta por la falta de la demostración de su consistencia, no tendremos necesidad de buscar esta demostración para fundamentarla. No obstante, Wittgenstein <u>no</u> propone el abandono del estudio de conceptos tales como completez, consistencia, etc. sino que considera a la actividad en este sentido como algo que crea nuevas ramas de las Matemáticas, antes que como una actividad que mejore las Matemáticas actuales:

V-9 Lo que se hace no es mejorar las malas Matemáticas, sino crear una nueva parte de las Matemáticas.

Ahora volvamos a la pregunta anterior: ¿cómo debemos considerar a las paradojas? Wittgenstein responde con una pregunta:

> III-59 ¿Por qué no considerar a la contradicción de Russell como algo supra-proposicional, algo que está por encima de las proposiciones y mira en ambas direcciones como una cabeza de Janus?

Y, en efecto, el hecho mismo de llamar paradojas a las contradicciones muestra que son consideradas en modo distinto al de las proposiciones no contradictorias de las Matemáticas. Las paradojas han sido llevadas a un nivel diferente al del resto de las proposiciones y quedan ahí como testimonio de las dificultades a las que los matemáticos se han enfrentado para hacer de su ciencia algo valioso. No es permitido derivar de ellas ninguna conclusión pues han sido excluidas del contenido de las Matemáticas.

La posibilidad de encontrar otras paradojas hará, probablemente, que a las que ya conocemos se sumen otras pero, seguramente, no implicará el abandono de las teorías en las cuales sean halladas.

Deseamos concluir este capítulo con una pequeña fábula y una sentencia de Wittgenstein:

En un castillo muy grande y fortificado vivían una arañas que, cada vez que las fuertes corrientes de aire destruían sus telas, se apresuraban angustisamente a reconstruirlas pues estaban convencidas de que eran precisamente sus telas las que mantenían en pie al castillo.

La falta de satisfacción filosófica desaparece cuando vemos más.

CAPITULO VII

LA DEMOSTRACION

Las demostraciones han sido, desde los tiempos de Euclides o tal vez desde antes, objeto de fuertes controversias. Recuérdese el caso de la proposición 4 del libro primero de los Elementos.

Actualmente sigue habiendo controversia en cuanto a cuáles procedimientos son válidos en la demostración y las distintas corrientes fundacionistas proporcionan respuestas diferentes.

Las afirmaciones de Wittgenstein no son, en algunos casos, estrictamente técnicas, sino psicológicas y hasta sociológicas, pero no por ello dejan de ser interesantes y algunas de ellas proporcionan la base para posiciones más adecuadas que la formalista.

DEMOSTRACION Y COMPRENSION

> II-2 Quiero decir: si se tiene el patrón de una demostración que no puede ser comprendido y, mediante un cambio de notación se convierte en uno que si puede ser comprendido, entonces, se está creando una demostración ahí, donde antes no la había.

Así pues, una demostración debe ser, ante todo, comprensible y comprendida. Hay una objección inmediata a la afirmación anterior, a saber, que la comprensión o incomprensión de una demostración es una cuestión subjetiva, o como el mismo Wittgenstein observa:

> II-2 (continuación)... Imaginemos una demostración de una proposición Russelliana estableciendo una adición como 'a+b=c' que consista de varios cientos de símbolos. Podrás decir: investigar si esta demostración es correcta o no es una dificultad puramente externa sin interés matemático (una persona comprende fácilmente lo que otra no puede comprender o lo hace con dificultad, etc.).

Si Wittgenstein estuviera proponiendo la comprensibilidad de una demostración como criterio para aceptarla o rechazarla, la objeción que él mismo menciona sería suficiente como para olvidarnos de dicho criterio, pero Wittgenstein <u>no</u> está proponiendo ningún criterio para la aceptación o rechazo de una demostración, sino haciendo mención de una carcterística de la demostración que es interesante notar.

Un matemático acepta una configuración de símbolos como una demostración solo después de convencerse de que es correcta, y para ello necesita comprenderla. Mientras no pueda justificar cada paso de la demostración, no estará en posición de afirmar la proposición que supuestamente ha demostrado.

Recordamos a René Thom, quien se opone al formalismo con lo que él llama una fábula que es como sigue:

> Supongamos que para una teoría formalizada (S) hayamos podido construir una máquina electrónica (M) capaz de realizar, a velocidades increibles, todas las operaciones permitidas en (S). Queremos verificar una fórmula (F) de la teoría. Luego de un cálculo compuesto de 10^{30} operaciones elementales, efectuado en unos cuantos segundos, la máquina (M) nos da una respuesta afirmativa. ¿Qué matemático aceptaría, sin titubear, como válida una tal 'demostración' estando imposibilitado de verificar paso a paso la prueba?[47]

Esta 'fábula' toca el punto que Wittgenstein ha abordado pero con tintes más drásticos. Seguramente el mismo Thom, de verse obligado a ello, habría respondido a su pregunta diciendo: ninguno. Wittgenstein, por su parte, afirma que si el patrón de una demostración no se comprende, éste no alcanza el rango de demostración hasta ser comprendido.

Ahora bien, el desarrollo de las técnicas de demostración permite la consideración de 'demostraciones extraordinarias' para conjeturas que no ha sido posible demostrar con los medios tradicionalmente empleados. Para casos como, por ejemplo, el problema de los cuatro colores que ha sido resuelto por métodos no convencionales, la aceptación de tal solución indica que, excepcionalmente, puede abandonarse la exigencia de comprensibilidad de la demostración. Esto no implica que todas las demostraciones deban llevarse a cabo por tales métodos pero si que ahí, donde la demostración tradicional ha sido imposible de encontrar, nuevos métodos y técnicas de demostración sean empleados. Pero si no nos hallamos frente a una de estas proposiciones, es necesario comprender todos y cada uno de los pasos de que consta la demostración para convencernos de la validez de tal proposición.

No nos atrevemos a afirmar que Wittgenstein hubiera rechazado la solución del problema de los cuatro colores ni a conjeturar sobre la posición que habría tomado al respecto, pero no podemos negar que, fuera de estos casos excepcionales, una demostración es, ante todo, un argumento diseñado para <u>convencernos</u> de la validez de una proposición y ello implica, necesariamente, ser un argumento comprensible.

DEMOSTRACION Y CONVICCION

> II-23 ...La demostración debe ser un procedimiento del cual yo diga: sí, así es como debe ser, esto debe obtenerse si procedo de acuerdo a esta regla.
>
> II-40 ... Lo que nos convence, <u>eso</u> es la demostración, una configuración que no nos convence no es una demostración, aún cuando pueda ejemplificar la proposición.

No es difícil estar de acuerdo con Wittgenstein en cuanto a que las demostraciones son convincentes. Una vez aceptada una cierta configuración de símbolos como demostración de, digamos la proposición A, nos dejaría perplejos la afirmación de que alguien ha demostrado no-A*. Seguramente pensaríamos que alguna de las dos demostraciones es incorrecta. Si al revisar la demostración de A no hallamos ningún error, estaremos tentados a asegurar que quien dice haber demostrado no-A está equivocado.

No obstante, Michael Dummet afirma que "la concepción de Wittgenstein es extremadamente difícil de tragar (sic) ... Se supone que la demostración tiene el efecto de persuadirnos, de inducirnos a contar tales y tales formas de palabras como inobjetablemente ciertas o de excluir tales y tales formas de palabras de nuestro lenguaje. Parece bastante obscuro cómo la demostración lleva a cabo tan notable proeza".[14]

La sarcástica expresión de Michael Dummet nos hace pensar que no a leído a Wittgenstein con la objetividad que puede y debe esperarse de cualquier científico.

Probablemente no sea claro cómo es que la demostración nos convence, sin embargo, nos convence.

II-25 La demostración nos convence de algo, pero lo que nos interesa no es el estado mental de

* Suponiendo que la teoría en la que se demuestra A es consistente.

la convicción, sino las aplicaciones asociadas con esa convicción.

He aquí la importancia de ser convencidos por la demostración. Nos permite seguir adelante, empleando la proposición demostrada para demostrar otras y enriquecer así la teoría en cuestión y finalmente, a las Matemáticas. O bien, puede tener aplicación en otras ciencias que esperan un resultado para su ulterior desarrollo. Una vez que se ha demostrado una proposición, estamos plenamente convencidos de que su utilización es válida y por ello nos dedicamos a obtener, con ayuda de ella, todos los resultados posibles.

No sabemos qué consecuencias puedan derivarse de la conjetura de Goldbach, tal vez ninguna de importancia o tal vez muchas muy importantes, pero no se sabe de ningún matemático empeñado en obtener consecuencias de ella porque no estamos convencidos de que sea válida. Estas, son las importantes repercusiones de la convicción proporcionada por la demostración.

LA DEMOSTRACION Y LA CREACION DE CONCEPTOS

II-31 Cuando dije que la demostración introduce un nuevo concepto, qui decir algo como: la demostración pone un nuevo paradigma entre los paradigmas del lenguaje, como cuando alguien mezcla un cierto azul rojizo, de alguna manera establece la mezcla especial de colores y le da un nombre...

Quisiera decir: la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje, cambia nuestros conceptos. Hace conexiones y crea el concepto de esas conexiones. (No establece que estén ahí, las conexiones no existen sino hasta que la demostración las crea).

Esta afirmación es muy importante para situar a Wittgenstein como opuesto al formalismo pues, a diferencia de esta corriente, considera a la demostración como un procedimiento creativo eminentemente y no simplemente mecánico.

Es claro que la demostración establece conexiones, no solo entre axiomas y teoremas de una teoría formal, sino también entre ramas de las Matemáticas aparentemente ajenas. Así, por ejemplo, la demostración del teorema de Pitágoras mediante proporciones establece una conexión entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de cualquier triángulo rectángulo y las proporciones; la demostración de la equivalencia del principio del buen orden y el axioma de elección establece una conexión entre el concepto de orden y familias infinitas de conjuntos; las demostraciones algebráicas de teoremas de la geometría establecen relaciones entre álgebra y geometría, etc.

Pero Wittgenstein afirma algo más, a saber, que éstas conexiones no estan ahí sino que las demostraciones las crean y ésto está en estrecha relación con lo que Carl Hempel afirma:

> Puesto que todas las demostraciones matemáticas se basan exclusivamente en deducciones lógicas a partir de determinados postulados, se sigue que un teorema matemático, por ejemplo, el teorema de Pitágoras en geometría, no afirma nada que sea objetivamente o teoréticamente nuevo comparado con los postulados de los cuales se deriva, aunque su contenido puede perfectamente ser nuevo psicológicamente, en el sentido de que no nos hubiéramos dado cuenta de que estaba implícitamente contenido en los postulados.[23]

La posición de Hempel es insostenible a la luz de los resultados de Kurt Gödel y la posición de Wittgenstein es más adecuada y acorde con dichos resultados. Es suficiente para afirmar lo anterior el hecho de que existan proposiciones que no pueden ser demostradas a partir de los axiomas de una teoría formal, esto es, no todos los posibles resultados estan 'implícitos' en los axiomas. No puede, por lo tanto, suponerse que la demostración solo hace explícito algo que contenían los axiomas, que descubre algo que se hallaba oculto dentro de los axiomas ya que hay proposiciones que no pueden ser relacionadas (deducidas de) con los axiomas. Solo una demostración podría relacionarlos y ésta no existe para el caso de proposiciones indecidibles.

LA DEMOSTRACION Y EL LENGUAJE

Volvamos ahora a otro aspecto de la afirmación II-31 ¿Cómo es que la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje? Wittgenstein afirma que la demostración nos sirve para establecer no solo que algo es, sino que debe ser así:

> II-30... Sigo la demostración y digo: "sí, esto es como tiene que ser, debo fijar el uso de mi lenguaje en esta forma".
>
> Quiero decir que el debe ((ser así)) corresponde a una huella que yo establezco en el lenguaje

Esto es, vía la demostración, establecemos el uso de proposiciones como 'así es' y 'así debe ser'

Si demostramos una proposición A establecemos, gracias a la demostración, que tiene sentido afirmar A y todo lo que sea consecuencia de A, y que no tiene sentido lo que contradiga a A. Convenimos, mediante la demostración, no solo que algo es sino que debe ser (y, por lo tanto, lo que no debe ser). Así, por ejemplo, una vez que se ha demostrado que toda función contínua es integrable, dada una función contínua, no solo decimos 'es integrable' sino también 'debe ser integrable'. La generalidad con que se demuestran los teoremas matemáticos implica que, para continuar con el ejemplo anterior, independientemente de que una función sea recién inventada y nadie jamás la haya integrado, si es contínua debe ser integrable.

La demostración también nos hace excluir de nuestro lenguaje y del de las Matemáticas expresiones tales como "tres es par", "seis es primo". etc.

LA DEMOSTRACION DE UNA PROPOSICION YA DEMOSTRADA

II-60 ... ¿Qué se entiende por: "Una demostración es una entidad matemática que no puede ser remplazada por ninguna otra"? Seguramente que cada demostración tiene una utilidad que ninguna otra posee. Podría decirse que: "toda demostración, aún la de una proposición ya demostrada, es una contribución a las Matemáticas". Pero ¿por qué es una contribución si su único propósito es demostrar la proposición? Bueno, puede decirse: "la nueva demostración muestra (o <u>hace</u>) una nueva conexión". (Pero en este caso ¿no existe una proposición matemática que diga que esa conexión existe?).

¿Qué aprendemos cuando vemos la nueva demostra-

ción, aparte de la proposición que ya conocíamos?
¿Aprendemos algo que no puede ser expresado mediante una proposición matemática?

Como ya se ha dicho, la demostración crea conexiones antes no existían, entonces es claro que toda nueva demostración es una aportación a las Matemáticas ya que ella establece nuevas conexiones. No es posible dejar de considerar, por ejemplo, que las múltiples demostraciones del teorema de Pitágoras son una aportación a las Matemáticas.

Cuando vemos una nueva demostración de un teorema, aprendemos que es posible crear o establecer otros enlaces entre el teorema y las herramientas empleadas en su nueva demostración, esta nueva demostración puede mostrarnos con mayor claridad los alcances del teorema y esto es algo que no puede expresarse con una proposición matemática, sino que se muestra del mismo modo que una cierta configuración de símbolos muestra que es o no una demostración. No hay una proposición matemática que diga: "esta es una demostración".

Esto es completamente análogo a cómo las proposiciones del lenguaje muestran si tienen o no sentido. Así como la proposición del lenguaje muestra su sentido, la demostración muestra que es una demostración.*

* Cf. Tractatus Logico-Philosophicus.[53]

CAPITULO VIII

EL PRINCIPIO DEL TERCERO EXCLUIDO

El principio del tercero excluido es discutido por Wittgenstein en estrecha conexión con expansiones decimales infinitas no periódicas (como las de los números irracionales y trascendentes) ya que es en el contexto de conjuntos infinitos donde hay controversia con respecto a su validez.

Dada una sucesión finita obtenida, digamos, de una expansión decimal y un patrón de números P=777, siempre es posible responder a la pregunta:

(1) ¿Aparece P en la sucesión dada?

En este caso, el principio del tercero excluido (expresado como P aparece o bien no aparece en la sucesión dada y no hay ninguna tercera posibilidad) es válido y su uso no ocasiona ningún problema, pero en el caso de sucesiones infinitas no periódicas como, por ejemplo, la expansión decimal de π o de $\sqrt{2}$, la cuestión cambia radicalmente. El paso del caso finito al caso infinito entraña ciertas dificultades. Así, el que durante la inspección de la expansión decimal de π (hasta un cierto momento) no se encontrara el patrón P, no implica que éste nunca aparecerá. En este contexto, la pregunta:

(2) ¿Aparece P en la sucesión dada?

Pese a ser sintácticamente identica a la pregunta (1), no es semánticamente identica, esto es, no tiene el mismo significado pues la pregunta (1) siempre puede responderse y en cambio, para la pregunta (2) sucede que, como afirma Wittgenstein:

> IV-9 ... Hasta ahora, no hay respuesta a esta pregunta. (El subrayado es mío)

A diferencia de Brower, quien rechaza el uso del principio del tercero excluido en relación a conjuntos infinitos, Wittgenstein considera que dicho principio, en el antes mencionado contexto, no tiene sentido. En efecto, no podemos afirmar ni negar que P aparecerá en la expansión decimal de π. Por supuesto, el problema no quedaría resuelto si resultara que P=777 aparece en la expansión de π puesto que, entonces, podríamos preguntarnos si P'=7777 aparece o no en dicha expansión.

Es claro que mientras P no aparezca en la expansión de π no podemos garantizar que no aparecerá, pero tampoco podemos afirmar que sí lo hará. Así pues, ambas afirmaciones (P aparece en la expansión y P no aparece en la expansión) son equivalentes en cuanto a indecibilidad. ¿Cómo hemos llegado a esta situación? Wittgenstein sostiene que los matemáticos han sido guiados por la situación análoga (pero esencialmente distinta) de las sucesiones finitas, de tal modo que parece natural extender a sucesiones infinitas la pregunta ¿aparece P en la sucesión?, hecha con respecto a sucesiones finitas:

> IV-9 ... La pregunta, quiero decir, cambia su status cuando se vuelve decidible, porque entonces se hace una conexión que antes no _estaba_ _ahí_.
>
> Quiero decir: _parece_ como si el terreno para la decisión estuviera ahí, sin embargo, éste debe ser inventado.
>
> ¿Sería esto lo mismo que decir: al pensar en la técnica de expansión que hemos aprendido usamos una imagen falsa de una expansión completa (de lo que ordinariamente llamamos 'renglón') y esto nos fuerza a hacer preguntas que no podemos responder?

Ahora podemos preguntarnos ¿cuándo tiene sentido la pregunta acerca de si P aparece en una sucesión infinita? Wittgenstein responde:

> IV-9... Decir de una sucesión infinita que _no_ contiene un patrón particular tiene sentido solo bajo condiciones bastante especiales. Esto es, a esta proposición se le ha dado un sentido para

ciertos casos. Aproximadamente para aquellos en que está en la regla de expansión no contener al patrón.

En este caso, estamos <u>imponiendo</u> la condición de que el patrón no ocurra. Estamos haciendo algo como:

$$S(n)=\begin{cases} 3.i_1 i_2 i_3 \ldots i_n & \text{donde } i_n \text{ es el n-ésimo dígito de la expansión decimal de } \pi.\ n \in N. \\ \text{si } i_k = i_{k+1} = i_{k+2} = 7 & \text{para cierta k, substitúyase } i_k \text{ por 6.} \end{cases}$$

En este caso, la pregunta ¿aparece P en la sucesión S(n)?, pese a estar en el contexto de una sucesión infinita no periódica, es efectivamente decidible.

Dado que nuestros medios para investigar la aparición de un cierto patrón de números en una expansión infinita no periódica son limitados, podemos dar sentido a una pregunta como la (2) incluyendo en la regla de la expansión la 'orden' de que tal patrón no aparezca, como afirma Wittgenstein:

> IV-13 La proposición general de que ese patrón no ocurre en la expansión dada solo puede ser una orden (commandment).

No obstante, si se trata de expansiones en las cuales no podemos establecer, como 'orden' que tal o cual patrón de números no aparezca, como es el caso de la expansión decimal de π, la pregunta ¿aparece P en la expansión de π ? no tiene sentido y, por lo tanto, tampoco tiene sentido el principio del tercero excluido.

Wittgenstein considera que esta situación no tiene que ser siempre así, pues tal vez sea posible -según él- inventar la base matemática necesaria para dar sentido al principio del tercero excluido en el contexto de conjuntos infinitos:

> IV-11 ... Si deseas saber más acerca de la sucesión, tienes, por así decirlo, que entrar en otra dimensión (algo como pasar de la línea al plano que la contiene). ¿Pero no hay tal plano <u>ahí</u>, solo la línea y algo que debe ser <u>explorado</u> si uno quiere saber los hechos? No, las Matemáticas de esta dimensión ulterior deben ser inventadas, como mucho de las Matemáticas.

Tal vez nos encontramos frente a las sucesiones infinitas como los habitantes de Flatland[1] con respecto a los cuerpos. Ellos, viviendo en un plano, eran incapaces de concebir los cuerpo pues para ello necesitaban salir de su mundo y desde fuera <u>ver más</u>. Quizá nosotros necesitamos salir de nuestro mundo de alguna manera y así poder crear las Matemáticas necesarias para <u>ver más</u>.

CAPITULO IX

DEMOSTRACIONES NO CONSTRUCTIVAS DE EXISTENCIA

Las demostraciones que afirman la existencia de un ente matemático pero que no lo construyen ni proporcionan un método para construrlo en un número finito de pasos, son rechazadas por los intuicionistas ya que ellos solo admiten como válidos a los procedimientos constructivos finitos.

La discusión que hace Wittgenstein acerca de este tipo de demostraciones está basada en la idea de que la comprensión de una proposición, tanto del lenguaje común como del de las Matemáticas, está intimamente ligada a su uso.

> IV-25 Una demostración te convence de que hay una raíz de una ecuación (sin darte idea de donde) ¿Cómo sabes que entiendes la proposición de que hay una raíz?, ¿Cómo sabes que estás convencido de algo? Puedes estar convencido de que la aplicación de la proposición demostrada se descubrirá. Pero no entiendes la proposición en la medida en que no has encontrado la aplicación.
>
> Todo lo que digo realmente se reduce a esto: que uno puede conocer una demostración detalladamente y seguirla paso a paso y , no obstante, no

comprender qué es lo que se ha demostrado.

Y ésto, a su vez, está en conexión con el hecho de que se puede formar una proposición en una manera gramaticalmente correcta sin entender su significado.

Ahora bien, ¿cuándo se entiende? Yo creo: cuando uno puede aplicarla.

Podría, tal vez, decirse: cuando uno tiene una imágen clara de su aplicación.

Wittgenstein hace, a lo largo de toda su obra, constantes alusiones al lenguaje y en esta afirmación, es muy clara la relación que hace entre el lenguaje y el lenguaje de las Matemáticas.

En la afirmación que acabamos de citar, Wittgenstein se refiere a una parte particular del lenguaje de las Matemáticas, a saber, a las proposiciones que resultan de las demostraciones no constructivas de existencia.

Para Wittgenstein, una proposición, no solo matemática sino también del lenguaje común, solo puede comprenderse en la medida en que puede aplicarse, en la medida en que puede emplearse adecuadamente. Esta posición también la expresa claramente en Philosophical Investigations (Sec. 43) en donde afirma:

> Para una gran clase de casos, aunque no para todos, en los cuales empleamos la palabra 'significado' puede ser explicada así: el significado de una palabra es su uso en el lenguaje.

Así, por ejemplo, el teorema del álgebra que nos afirma que todo polinomio de grado positivo n tiene a lo más n raíces, no nos proporciona la manera de encontrar dichas raíces. En este caso, Wittgenstein cuestiona nuestra comprensión de, digamos, la afirmación 'el polinomio f(x) de grado 20 tiene a lo más 20 raíces'. Puede decirse que sí es posible aplicar esta afirmación y decir algo como: 'si a es una raíz de f(x), entonces f(a)=0 o bien, (x-a) divide a f(x)' pero estas aplicaciones son limitadas en cuanto a que no nos dan un indicio del valor numérico de dicha raíz. Si no somos capaces de aplicar una proposición -afirma Wittgenstein- no podemos asegurar que la comprendemos.

A lo largo de nuestra experiencia en la enseñanza, nos hemos llegado a convencer de que, en efecto, no se ha comprendido del todo una proposición (y en particular una proposición matemática) si no puede utilizarse, si no puede aplicarse correctamente.

En la enseñanza de una lengua extranjera, es una clara manifestación de la incomprensión del significado de una palabra o construcción gramatical, el uso erróneo de tal palabra o construcción.

En la enseñanza de las Matemáticas, los alumnos muestran que han comprendido tal o cual teorema, en la medida en que son capaces de resolver problemas que involucren los conceptos contenidos en él. La persona que pueda repetir, palabra por palabra, la definición de continuidad, pero que sea incapaz de decidir si, por ejemplo, sen(x) es contínua o no en x=0, no comprende el concepto de continuidad.

Ahora bien, si el significado está tan intimamente relacionado con el uso, podría esperarse que aquellas proposiciones que además de aplicaciones matemáticas tienen aplicaciones extramatemáticas, tengan un significado más rico, más amplio, que aquellas que solo tienen aplicaciones matemáticas. Esto, aunque no lo afirma Wittgenstein, es una consecuencia natural de su posición.

Desde éste punto de vista, resulta también que el significado de una proposición no es algo constante, sino que puede enriquecerse en la medida en que se encuentren más y más aplicaciones de tal proposición. Esta situación es totalmente análoga a la del lenguaje común en donde muchas palabras enriquecen su significado en la medida en que su uso se amplía. A mayores aplicaciones, mayor riqueza de significado.

Las demostraciones no constructivas de existencia, a diferencia de Brower, no son rechazadas por Wittgenstein, sino justificadas en la medida en que puedan ser aplicadas y consideradas como una innovación y un notable avance con respecto a los métodos constructivos que son más limitados.

Así, si se demostrara que el patrón P=777 sí ocurre en la expansión decimal de π, pero sin decirnos dónde, nos daría una perspectiva de dicha expansión distinta de la que nos ofrecen nuestros medios actuales para investigarla:

> IV-27 Una demostración de que 777 ocurre en la expansión de π sin mostrar dónde, debe contemplar a ésta expansión desde un punto de vista totalmente nuevo, tal que mostrara, por ejemplo, propiedades de regiones de la expansión acerca de las cuales solo sabíamos que estaban muy lejos. Ante nuestras mentes solo flota la imágen de una zona obscura de longitud indeterminada, muy lejos en la expansión de π, donde ya no podemos confiar en nuestras herramientas de cálculo, y después, aún más alla de esa zona podemos ver, en una forma diferente, algo.

Similarmente, las demostraciones no constructivas de existencia nos permiten ver más alla de lo que podemos construir efectivamente. Nos dan una perspectiva que supera las posibilidades de los métodos constructivos.

CAPITULO X

EL ANTIFUNDACIONISMO DE WITTGENSTEIN

A lo largo de los capítulos anteriores, se han expuesto y discutido las ideas de Ludwig Wittgenstein acerca de la fundamentación de las Matemáticas, así como de la naturaleza de las mismas. En éste, se integra lo anteriormente expuesto para quedar resumido en lo que hemos llamado antifundacionismo de Wittgenstein.

Por antifundacionismo entendemos lo siguiente: las Matemáticas no necesitan ser reconstruidas para ser fundamentadas ya que no carecen de fundamento. Una contradicción en ellas no las estropea o inutiliza. En efecto, pese a haberse encontrado varias contradicciones en la teoría de conjuntos, ésta no ha sido deschada ni abolida, sino modificada para excluir dichas contradicciones y poder conservarla. El que esto haya ocurrido muestra, indudablemente, que el valor de la teoría de conjuntos no reside en su no contradictoriedad, aunque sería deseable poder demostrar su consistencia no para tener un mayor grado de certeza sino para aumentar el caudal de conocimientos matemáticos. La validez y la importancia de la teoría de conjuntos, como del resto de las Matemáticas, no puede aprisionarse y reducirse a un solo concepto: la consistencia.

Desde ésta perspectiva, Wittgenstein no puede ser ubicado en ninguna de las tres corrientes fundacionistas pues no comparte con ninguna de ellas la esperanza de ver 'fundamentadas' a las Matemáticas ya sea reduciéndolas a la lógica, considerandolas como un sistema formal o basándolas exclusivamente en construcciones efectivas a partir de los enteros.

Wittgenstein no propone el abandono del estudio de los conceptos surgidos a lo largo de los esfuerzos fundacionistas y a la luz de las paradojas, sino que los considera como la <u>creación</u> de nuevas Matemáticas.

Así pues, por antifundacionismo debe entenderse el rechazo a reconstruir las Matemáticas, pues ello no les proporciona la fundamentación de la cual, supuestamente, carecen. En este sentido, los resultados de Kurt Gödel estan en favor de la posición de Wittgenstein ya que prueban que no se podrá proporcionar un sistema formal lo suficientemente amplio como para deducir en él la aritmética pues será incompleto, esto es, contendrá una proposición formalmente indecidible.

> IV-53 El filósofo debe rodear los problemas matemáticos y no chocar contra uno de ellos, el cual debe ser resuelto antes de que pueda seguir adelante.
>
> Su labor en filosofía es como si fuera una ociosidad en Matemáticas.
>
> No es que haya que construir un nuevo edificio o tender un nuevo puente, sino que la geografía, <u>tal</u>

como es ahora, debe ser juzgada.

Ciertamente vemos partes de conceptos, pero no vemos claramente los declives mediante los cuales pasamos de unos a otros.

Es por ello que no es necesario, en la filosofía de las Matemáticas, reconstruir las demostraciones en nuevas formas. Pese a que hay aquí una fuerte tentación.

Aún 500 años antes era posible una filosofía de las Matemáticas, una filosofía de lo que las Matemáticas eran entonces.

Precisamente, gran parte de las afirmaciones de Wittgenstein convergen a esta conclusión, pues solo modificando nuestro concepto de las contradicciones y de las demostraciones de consistencia podemos aceptar que las Matemáticas no estan mal. Análogamente a sus afirmaciones en el Tractatus Logico-Philosophicus en cuanto a que en el mundo todo es como es y sucede como sucede, las Matemáticas son como son y en ellas todo sucede como sucede. Y como son es como deben ser juzgadas, o mejor dicho, debe filosofarse acerca de las Matemáticas tal como son ahora.

Deben, ciertamente, investigarse más a fondo cuestiones tales como el criterio de verdad para las proposiciones matemáticas, las repercusiones de la tendencia axiomatizadora, el uso del principio del tercero excluido en el contexto de conjuntos infinitos, el significado de las proposiciones matemáticas, etc., ya que ello nos proporcionará una mejor comprensión de las Matemáticas pues Wittgenstein piensa que eso es lo que hace falta y no reconstruirlas:

> V-13 ¿Para qué necesitan las Matemáticas una fundamentación? No necesitan una fundamentación, yo creo, tanto como las proposiciones acerca de objetos físicos o de impresiones sensoriales no necesitan un análisis. Lo que necesitan las proposiciones matemáticas es una clarificación de su gramática, tanto como otras proposiciones.
>
> Los problemas matemáticos de lo que se llama fundamentos no son más fundamentos de las Matemáticas, para nosotros, de lo que una roca dibujada lo es de una torre dibujada.

Wittgenstein quiere hacernos ver que el edificio matemático no está en peligro de derrumbarse por falta de cimientos, como una torre dibujada en un papel no se derrumbará al borrar la piedra que supuestamente la sostiene en pie. Tal vez los cimientos de las Matemáticas estan ahí y no sabemos verlos pero, independientemente de que los veamos o no, las Matemáticas no van a derrumbarse.

La importancia de las Matemáticas y su validez no pueden juzgarse desde un solo punto de vista, es necesario poner en la balanza todo aquello que ha hecho que se les llame "La reina de las ciencias".

Un puñado de hombres, llamense logicistas, formalistas o intuicionistas, no es suficiente para poner a las Matemáticas en el banquillo de los acusados y condenarlas o absolverlas, es la historia entera de la humanidad la que, finalmente, dará su veredicto.

Por otro lado, la necesidad de clarificación de la gramática de las proposiciones ha surgido a la luz de las contradicciones y de los problemas planteados por la empresa fundacionista. Antes del surgimiento de las paradojas no era necesario (aparentemente) tratar a la teoría de conjuntos axiomáticamente, la dificultad de definir el concepto de conjunto es precisamente hecha patente por las paradojas. Clarificar la gramática de las proposiciones matemáticas puede significar algo: aclarar la posición de unas proposiciones con respecto de otras, como en el caso del quinto postulado de Euclides, ubicado como independiente del resto de los axiomas de la geometría euclidiana.

Recordamos la pregunta que hace Wittgenstein durante la discusión del principio del tercero excluido:

¿Al pensar en la técnica de expansión que hemos aprendido usamos una imágen falsa de una expansión completa y esto nos fuerza a hacer preguntas que no podemos responder?

Y nos vemos forzados a hacer preguntas que no podemos responder porque la gramática de las proposiciones matemáticas no ha sido clarificada.

A diferencia de su posición en el Tractatus Logico-Philosophicus en donde al hacer preguntas como ¿qué es el mundo?, ¿qué es la realidad? estamos tratando de trascender los límites del lenguaje, y para las cuales no hay respuesta, las preguntas que en Matemáticas no podemos responder (como, por ejemplo, ¿aparece P=777 en la expansión decimal de π?) aunque no tienen respuesta ahora, tal vez la tendrán. Y ello en la medida en que se inventen las Matemáticas que den sentido a la pregunta, i. e., cuando se cree la base para responderlas plausiblemente.

V-13 ... Uno podría imaginar que a un salvaje se le ha dado la lógica de Frege como un instrumento con el cual derivar proposiciones aritméticas. Deriva la contradicción y después deriva arbitrariamente proposiciones verdaderas y falsas de ella.

'Hasta ahora un buen ángel nos ha preservado de hacer <u>esto</u>'. Bueno, ¿qué más quieres? Creo que se podría decir: Un buen ángel será necesario siempre, hagas lo que hagas.

Wittgenstein expresa sutilmente la creencia de que nunca se podrá probar la consistencia de la aritmética plausiblemente. Esta creencia puede parecer exagerada, pero hasta la fecha, no hay evidencia para pensar lo contrario.

Si, como afirma Wittgenstein, un ángel bueno nos ha preservado de derivar toda clase de proposiciones de una contradicción, tampoco hay razón para pensar que algún día comenzaremos a hacerlo.

La teoría de conjuntos no ha sido destruida por la contradicción de Russell (u otras) y en esto, Wittgensetin ve una razón como para no creer que una contradicción sea suficiente para hacer que el edificio matemático tiemble sobre sus 'débiles fundamentos'.

CAPITULO XI

RECAPITULACION

A lo largo de este trabajo hemos investigado la posición de Wittgenstein acerca de la fundamentación y naturaleza de las Matemáticas. A manera de recapitulación y resumen veremos como responde Wittgenstein a una serie de preguntas acerca de éstos temas.

1.- ¿Qué son las Matemáticas?

Las Matemáticas son una creación humana, estimulada por necesidades de muy diversa índole, (prácticas, teoricas, estéticas, etc.). El matemático en su actividad no explora las propiedades de los entes matemáticos, sino que crea lo que debe considerarse como esencia de tales entes.

2.- ¿Qué es una demostración matemática?

La demostración es un proceso creativo y no mecánico, que crea nexos entre la proposición a demostrar y las herramientas empleadas para demostrarla. La demostración, aún la de una proposición ya demostrada, es una aportación a las Matemáticas por la creación de nuevas conexiones. Dentro de las características de la demostración estan la comprensibilidad y la cualidad de ser convincentes.

3.- ¿Son las proposiciones matemáticas acerca de objetos que existen independientemente de quien los piensa?

En vista de que las Matemáticas son una invención del ser humano, los entes matemáticos no existen fuera de la mente de quien los inventa o los piensa.

4.- ¿Son válidas las demostraciones de existencia que no construyen o no proporcionan un método para construir el ente matemático en cuestión?

Las demostraciones de existencia que no construyen el ente del cual garantizan la existencia, son válidas porque son aplicables. Pueden usarse y proporcionan una manera de ver lo que con técnicas constructivas no podemos ver.

5.- ¿Es válido el principio del tercero excluido en el contexto de conjuntos infinitos?

La aplicación del principio del tercero excluido, para el caso de conjuntos infinitos, es originada por una falsa imágen surgida del caso de conjuntos finitos. En el contexto de los conjuntos infinitos, el principio del tercero excluido no tiene sentido, y las Matemáticas necesarias para que lo tenga, estan por ser inventadas.

6.- ¿Como considera a las paradojas?

Las paradojas o contradicciones pueden ser consideradas como algo que está más alla de las proposiciones matemáticas. Su aparición no debe considerarse como una indicación de la necesidad de reconstruir las Matemáticas, ni como un signo de 'enfermedad' de las Matemáticas.

7.- ¿Deben reconstruirse las Matemáticas?

Las Matemáticas no necesitan reconstruirse pues no carecen de fundamento. Tal como son ahora es como se debe filosofar acerca de ellas. Su valor no reside en la demostración de su consistencia la cual, por cierto, puede no ser encontrada.

Creemos haber rescatado bastante oro de los escritos de Wittgenstein pero aún queda mucho por rescatar.

No pensamos haber dicho la última palabra sobre él, y debido a la falta de claridad en sus escritos, dudamos que algún día pueda decirse.

Deseamos finalizar este trabajo con una frase de Wittgenstein que encierra una gran verdad con respecto al problema de la fundamentación de las Matemáticas:

> Nosotros sentimos que incluso si todas las posibles cuestiones científicas pudieran responderse, el problema de nuestra vida no habría sido más penetrado. Desde luego que no queda ya ninguna pregunta y precisamente ésta es la respuesta.
>
> La solución del problema de la vida está en la desaparición del problema.

APENDICE A

Russell y Whitehead definen en Principia Mathematica lo que es una proposición significativa, de una manera larga y complicada. Nos contentamos con dar una breve explicación de cómo lo hacen y proporcionar la definición que da Elliot Mendelson en su desarrollo axiomático del calculo proposicional.[30]

Iniciamos la explicación de Whitehead y Russell:

Una proposición es significativa si es una proposición atómica, es decir, si no contiene las nociones 'todos' o 'algunos'. Otra manera de definirlo es la siguiente:

Una proposición A es atómica si es de la forma:

R'(x) significando: 'x tiene el predicado R''.

R''(x,y) significando: 'x está en la relación R'' con y'.

R'''(x, y, z) significando: 'x, y y z estan en la relación R''''.

También son proposiciones significativas aquellas que se obtienen mediante la idea primitiva $p|q$ que es verdadera cuando p o q o ambas son falsas.

A partir de las proposiciones atómicas, se pueden construir proposiciones moleculares, que también son significativas, con el uso de la anterior idea primitiva, substituyendo en p y/o q otras proposiciones de la forma a|b donde, a su vez, a y b no son necesariamente atómicas. Se definen también las funciones de individuos, funciones de funciones, etc. que son llamdas matrices y también son fórmulas significativas. Así, si $f(x_1,x_2,...x_n)$ es una matríz, entonces, $(x_j)f(x_1,x_2,...x_n)$ y $(Ex_j)f(x_1,x_2,...x_n)$ también son fórmulas significativas.

Damos a continuación la definición de fórmula significativa de Mendelson de la teoría formal L del cálculo proposicional:

Los símbolos de L son $\sim$, $\supset$,), (y las letras A_i con enteros positivos como subíndices. Los símbolos $\sim$ y $\supset$ son llamdos conectivos primitivos y las letras A_i son llamadas letras proposicionales.

Son fórmulas significativas a) todas las letras proposicionales y b) si A y B son fórmulas significativas, entonces $\sim A$ y $A \supset B$ también son fórmulas significativas.

Mendelson llama a las fórmulas significativas fórmulas bien formadas pero esta diferencia es tan solo de notación.

APENDICE B

Afirmar que las Matemáticas son una creación humana, implica aceptar que no es posible hablar, por ejemplo, de trayectorias parabólicas o elípticas cuando el hombre no había inventado estos conceptos. Negar la existencia de tales conceptos antes de su invención no es, por cierto, descabellado pues al afirmar que un cuerpo sigue lo que llamamos una 'trayectoria parabólica' estamos realmente abusando del lenguaje, puesto que lo que estamos haciendo es idealizar un cierto fenómeno y ver que cierto modelo matemático lo describe con mayor o menor exactitud. Estrictamente hablando, ningún cuerpo sigue una trayectoria parabólica.

Una parábola es una abstracción tal que ni siquiera somos capaces de imaginarla, aunque lo que dibujamos con el nombre de parábola, sea una buena aproximación a la visualización de tal concepto.

Una parábola, como todo ente matemático, es el fruto de la actividad intelectual guiada o no por la naturaleza y la experiencia, y existe solo en el intelecto. No obstante, es cierto que antes de ser inventadas las parábolas, los cuerpos lanzados desde la superficie terrestre con un cierto ángulo distinto de 90°con respecto a la horizontal, seguían una cierta trayectoria, la cual puede ser representada matemáticamente por una parábola, pero tales trayectorias no pueden llamarse 'parábolicas' . Podría decirse que aquí hay una coincidencia tal que el ser humano ha descubierto que tales trayectorias son parábolas, no que las ha inventado; pero interpretar así la correspondencia entre las multicitadas trayectorias y las parábolas no es más que una toma de posición filosófica al respecto, mas no un hecho concluyente.

BIBLIOGRAFIA

1.- Abbot, Edwin A. Flatland, a romance of many dimensions. Dover. 1952.

2.- Ambrose, Alice. Essays in Analisis. London 1966.

3.- Ambrose, Alice. Ludwig Wittgenstein,Philosophy and Language. London 1972.

4.- Amor, José Alfredo. Antología de Lógica Matemática. Cuadernos de Filosofía de las Ciencias. U.N.A.M.

5.- Anderson, Alan Ross. Mathematics and the Language Game. Philosophy and Language. Ed. por Alice Ambrose.

6.- Anscombe, G.E.M. An introduction to Wittgenstein's Tractatus.

7.- Bernays, Paul. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. The Philosophy of Mathematics. Ed. por H. Putnam y Benacerraf.

8.- Bourbaki, Nicolás. Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann. 1969.

9.- Black, Max. A companion to Wittgenstein's Tractatus.

10.- Brower, L.E.J. Intuitionism and Formalism. Amer. Math. Soc. Bull. 20. 1913/14.

11.- Cantor, Georg. Contributions to the Foundings of the Theory of Transfinite Numbers. Dover.

12.- Copl, Irving. Essauys on Wittgenstein's Tractatus.

13.- Dilman, Ilham. Induction and Deduction, a study in Wittg stein. Oxford 1973.

14.- Dummett, Michael. Wittgensetin's Philosophy of Mathematics. The philosophy of Mathematics. Ed. por H. Putnam y Benacerraf.

15.- Engel, Morris. Wittgensetein's doctrine of the tyranny of language, an historical and critical examination of his blue book.

16.- Fann, K.T. Wittgenstein's conceptions of Philosophy. University of California Press. 1971.

17.- Feibleman, James. Inside the great mirror; a critical examination of Russell, Wittgenstein and their followers.

18.- Gödel, Kurt. On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related sistems. From Frege to Godel. Ed. por Jean Van Heijenoort. Harvard.

19.- Goodstein, R.L. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. Philosophy and Language. Ed. por Alice Ambrose.

20.- Hacker, P.M.S. Insight and Illusion. Oxford 1972.

21.- Hardwick, Charles. Language learning in Wittgenstein's later philosophy. 1971.

22.- Hartnak, Justus. Wittgenstein and the modern philosophy. 1971.

23.- Hempel, Carl. La geometría y la ciencia empírica. El Mundo de las Matemáticas. Ed. por James R. Newman. Colección Sigma.

24.- Hilbert, David. Foundations of Geometry. Open Court.

25.- Janik y Toulmin. Wittgenstein's Vienna. New York 1973.

26.- Kleene, Stephen Cole. Mathematical Logic.Wiley and Sons.

27.- Korner, Stephan. Introducción a la filosofía de las matemáticas. Siglo XXI.

28.- Kline, Morris. Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford.

29.- Kenny, Anthony. Wittgenstein.Trad. por A. Deaño. Revista de Occidente. Madrid 1973.

30.- Leeds, A. A Wittgenstein's workbook. Oxford 1970.

31.- Lipschutz, Seymour. Matemáticas finitas. McGraw-Hill.

32.- Mauro, Tulio de. Ludwig Witggenstein. His place in the development of semantics. 1967.

33.- Mendelson, Elliot. Introduction to Mathematical Logic. New York 1964.

34.- Morrison, James. Meaning and truth in Wittgenstein's Tractatus.

35.- Nagel y Newman, J.R. Godel's Proof. Mathematics and the modern world. Selected readings from Scientific American.

36.- Newman, James R. y Nagel. Godel's Proof. Mathematics and the modern world. Selected readings from Scientific American.

37.- Peursen, C.A. van . Ludwig Wittgenstein, an introduction to his philosophy. London 1967.

38.- Peers, David. Ludwig Wittgenstein. London 1971.

39.- Pither, George. The philosophy of Wittgenstein. Prentice-Hall 1964.

40.- Rhees, Rush. Discusions of Wittgenstein. London.

41.- Russell, Bertrand y Whitehead, Alfred North. Principia Mathematica. Cambridge 1957.

42.- Russell, Bertrand. The Principles of Mathematics. New York 1902.

43.- Sefler, Geroge. Language and the world.

44.- Shibler, Warren. Wittgenstein; Language and Philosophy.

45.- Spetch, Ernst Konrad. The foundations of Wittgenstein's later philosophy.

46.- Sternius, Erik. Wittgenstein's Tractatus; a critical exposition of its main lines of thought.

47.- Thom, René. Las matemáticas modernas. Miscelánea Matemática #4. Soc. Mat. Mex.

48.- Waisman, Friedrich. Wittgenstein y el círculo de Viena.

49.- Weyl, Herman. Philosophy of Mathematics and Natural Science.

50.- Weyl, Herman. Mathematics and Logic. Amer. Math. Monthly 53. 1946.

51.- Whitehead, Alfred North y Russell, Bertrand. Principia Mathematica.

52.- Winch, Peter. Studies in the philosophy of Wittgenstein.

53.- Wittgenstein, Ludwig. Tractatus Logico-Philosophicus. Alianza Universidad.

54.- Wittgenstein, Ludwig. On certainty.

55.- __________. Los cuadernos azul y marrón.

56.- __________. Lectures and conversations on Aesthetics.

57.- __________. Psycology and religious belief. Compiled from notes taken by Yorick Smythies; Rush Rees and James Taylor.

58.- __________. Letters to C.K. Ogden.

59.- __________. Letters to Russell, Keynes and Moore.

60.- __________. Notebooks 1914-1916.

61.- __________. Philosophical Grammar.

62.- __________. Philosophical Investigations.

63.- __________. Philosophical Remarks.

64.- __________. Remarks on the foundations of Mathematics.

65.- __________. Zettel.