

2ej.  
35



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOBRE LA AMPLIFICACION DE RADIACION GRAVITATORIA  
MEDIANTE EMISION ESTIMULADA"

# Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a

FRANCISCO FERNANDO NOREÑA VILLARIAS

México, D. F.

1986



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

INTRODUCCION .....	1
CAPITULO I : HAMILTONIANO DE DOS PARTICULAS CARGADAS EN CAMPOS GRAVITATORIO Y ELECTROMAGNETICO.....	6
a) Obtención de la expresión para las aceleraciones .....	7
b) Obtención del lagrangiano a partir de la acción .....	24
c) Congruencia entre el lagrangiano del sistema y la expresión para las aceleraciones .....	34
d) Obtención del hamiltoniano .....	39
e) Forma final del hamiltoniano .....	42
CAPITULO II : APLICACION DE LA TEORIA DE PERTURBACIONES DEPENDIENTES DEL TIEMPO AL CALCULO DE PROBABILIDADES DE TRANSICION .....	48
CAPITULO III: ACCION "LASER".....	68
a) Emisión y absorción de radiación .....	68
b) Condición de Schawlow-Townes .....	73
c) Ecuaciones de velocidad en un átomo de cuatro niveles .....	89
CAPITULO IV : RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....	97
APENDICE A : EVALUACION DEL PROMEDIO DE LA ECUACION (II-1) SOBRE LAS POLARIZACIONES .....	114
APENDICE B : ELEMENTOS DE MATRIZ, REGLAS DE SELECCION Y COEFICIENTES DE EINSTEIN .....	127
REFERENCIAS .....	141

## INTRODUCCION

Un átomo excitado podría decaer a un estado de menor energía mediante la emisión de un gravitón en vez de un fotón, como normalmente sucede. Las probabilidades de que ocurran estos dos procesos se pueden comparar por el cociente de la velocidad de transición  $A_{n'n}^G$  de la emisión del gravitón y la velocidad de transición electromagnética cuadrupolar  $A_{n'n}^e$  para los mismos dos niveles  $n'$  y  $n$  de un átomo de hidrógeno. Segun veremos (apéndice B) este cociente está dado por

$$\frac{A_{n'n}^G}{A_{n'n}^e} = \frac{4}{\alpha} \left( \frac{m_e}{M^*} \right) \approx 10^{-44}$$

en donde  $M^* = \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \approx 10^{-5} g$  es la llamada masa de Planck. Para la transición  $n'=3 \rightarrow n=1$ , en la que estaremos interesados, la velocidad de transición cuadrupolar electromagnética es aproximadamente  $A_{21}^e \sim 10^{-4} s^{-1}$ ; la transición gravitatoria correspondiente sería  $A_{31}^G \sim 10^{-40} s^{-1}$ . Si además tomamos en cuenta que las transiciones dipolares electromagnéticas tienen valores del orden de  $A_{n'n}^e \sim 10^8 s^{-1}$ , es claro que resulta casi imposible observar la transición gravitatoria. Sin embargo podemos preguntarnos si es posible, y en qué condiciones, estimular estas transiciones mediante radiación gravitatoria externa para producir amplificación de esa misma radiación de forma análoga a como sucede en un láser con la radiación electromagnética.

En este trabajo se estudia la amplificación de radiación gravitatoria por emisión estimulada, en un sistema simple que consiste en un gas de átomos de hidrógeno excitados por radiación electromagnética y por el cual atraviesa radiación gravitatoria. Esta radiación, al interactuar con los átomos excitados, puede amplificarse si se consigue una inversión de población adecuada para producir radiación gravitatoria estimulada.

Para estudiar la posibilidad de amplificación se analiza la interacción del átomo de hidrógeno tanto con la radiación electromagnética como con la gravitatoria, ya que el átomo excitado puede decaer espontáneamente o por estimulación emitiendo ya sea fotones o gravitones, y es la competencia entre estos procesos la que determina si puede obtenerse inversión de población y por ende amplificación de la radiación gravitatoria.

Este estudio se efectúa haciendo un paralelismo con la forma en que se estudia un láser, tomando como referencia principal los primeros tres capítulos de un libro sobre láseres (Lengyel) que consideramos adecuado por su tratamiento elemental del problema.

Cuando se produce radiación estimulada, se consigue un alto grado de coherencia y unidireccionalidad. Aquí apenas nos referiremos a estos aspectos, ya que fundamentalmente nos interesa la amplificación de la radiación sin entrar en otros detalles.

Tampoco consideraremos el problema de las cavidades resonantes, que es tan importante en el estudio de láseres y máseres. No necesitamos tomarlas en cuenta porque vamos a considerar

al medio activo ( gas de átomos de hidrógeno ) suficientemente extendido para que no se requiera que la radiación gravitatoria pase varias veces a través de él. Esto, además de simplificar el problema, nos ayuda a evadir el hecho de que no es fácil pensar en una superficie que refleje la radiación gravitatoria. Por eso en nuestro sistema la radiación gravitatoria pasa una sola vez por el medio activo y si encuentra una inversión de población adecuada puede amplificarse por estimulación y salir del gas con mayor intensidad. Sin embargo esto trae consigo algunos problemas; al aumentar el tamaño del sistema los modos normales de oscilación se acercan mucho unos a otros y esto implica que sea muy fácil que se produzcan en el sistema otras transiciones que no nos interesan y que pueden considerarse como ruido. Para evitar esto tenemos que considerar que la radiación gravitatoria incidente es totalmente monocromática, lo cual es una idealización más de nuestro modelo.

Como estamos considerando que el átomo de hidrógeno puede decaer mediante la emisión de fotones o de gravitones, debemos incluir la interacción gravitatoria del electrón en las ecuaciones de movimiento del sistema.

No se toma en cuenta el espín de las partículas porque en las estimaciones que se hacen de las probabilidades de transición, el desdoblamiento de niveles producido por el espín resulta irrelevante.

Para el estudio de la interacción del átomo con la radiación externa usamos la aproximación semiclásica en la que se considera la radiación clásicamente ( ondas electromagnéticas

y gravitatorias ) mientras que el intercambio de energía con el átomo ( emisión y absorción) se considera cuánticamente.

En los estudios elementales de láseres se utiliza generalmente esta aproximación semiclásica y los resultados son prácticamente iguales a los obtenidos cuando se aplica la electrodinámica cuántica, aunque hay algunas diferencias sutiles que no mencionaremos que están relacionadas con la emisión espontánea. En el caso de la radiación gravitatoria ni siquiera contamos con una teoría cuántica completa, por lo que la aproximación semiclásica resulta idónea. Otra aproximación que hacemos es considerar velocidades pequeñas en el sistema. En este sentido el tratamiento es cuasi-newtoniano.

A grandes rasgos el trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

En el capítulo I se encuentra el hamiltoniano de dos partículas cargadas con signos opuestos, irradiadas por pulsos planos de ondas electromagnéticas y gravitatorias. Tanto para la interacción gravitatoria externa como para la interna se utiliza la teoría de la relatividad general linealizada. Se obtiene un hamiltoniano que dividimos en dos partes. La primera es una parte hidrogenoide idéntica al hamiltoniano de un átomo de hidrógeno salvo por un término constante que sólo hace que el radio de Bohr cambie ligeramente; por lo tanto todas las funciones de onda y los estados estacionarios de este hamiltoniano son los del átomo de hidrógeno tomando en cuenta este nuevo valor del radio de Bohr. La otra parte del hamiltoniano se considera como perturbación del hamiltoniano base anterior.

En el capítulo II se aplica la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo al hamiltoniano, para encontrar las expresiones de las probabilidades de transición entre los estados estacionarios del hamiltoniano base debidas a la perturbación.

En el capítulo III se consideran los primeros cuatro niveles de nuestro átomo de hidrógeno y se establece la condición de inversión de población entre los niveles  $n=1$  y  $n=3$ , considerando que la radiación electromagnética es la que excita los átomos del estado  $n=1$  al estado  $n=4$  y estos decaen espontáneamente al estado  $n=3$  que es el que queremos poblar. La inversión de población depende de que este bombeo electromagnético predomine sobre las demás transiciones que hacen decaer a los átomos a los niveles  $n=2$  y  $n=1$ . La condición de inversión de población se encuentra imponiendo condiciones de equilibrio a todas las posibles transiciones ya sean espontáneas, estimuladas, gravitatorias o electromagnéticas.

En el capítulo IV se obtienen resultados numéricos, utilizando los cálculos realizados en el apéndice B. Se obtienen los valores de inversión de población extremos, cuando la radiación electromagnética de bombeo es mínima y máxima. Finalmente se obtienen conclusiones y se discuten los resultados, comentando la forma en que podría continuarse el estudio de este problema.



CAPITULO I  
HAMILTONIANO DE DOS PARTICULAS  
CARGADAS EN CAMPOS GRAVITATORIO  
Y ELECTROMAGNETICO.

En este capítulo encontraremos el hamiltoniano del sistema con con que vamos a trabajar, que consiste en dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$ , con cargas eléctricas  $e$  y  $-e$  respectivamente, irradiadas por ondas planas gravitatorias y electromagnéticas.

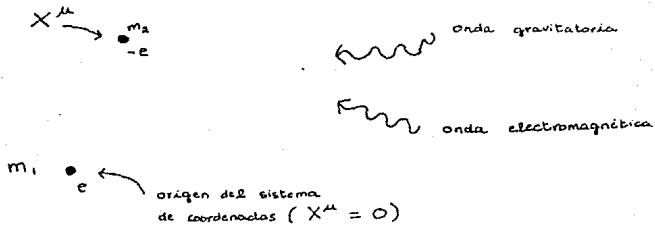
En la primera parte del camino hacia el hamiltoniano procederemos de dos maneras diferentes pero paralelas: por un lado encontraremos una expresión para las aceleraciones de la partícula de masa  $m_2$  en un sistema de coordenadas acelerado en el que la partícula de masa  $m_1$  está en reposo; esto lo hacemos partiendo de la ecuación de geodésicas que incluye el término correspondiente a la interacción electromagnética. Por otro lado encontraremos el lagrangiano del sistema a partir de principios básicos, es decir, empezando por la expresión general de la acción para llegar al lagrangiano de nuestro sistema. Después se muestra la congruencia de estas dos maneras de empezar a tratar el problema, haciendo ver que aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano obtenido, se llega a la misma expresión para las aceleraciones.

A continuación, partiendo del lagrangiano, se obtiene el hamiltoniano del sistema. Finalmente se le hacen algunas transformaciones a este hamiltoniano para darle la forma definitiva con la que se trabajará en los siguientes capítulos.

a) OBTENCION DE LA EXPRESION PARA LAS ACELERACIONES.

El origen del sistema de coordenadas que adoptaremos, del que hablaremos más adelante, lo situamos en la partícula de masa  $m_1$ , y analizaremos el movimiento de la partícula de masa  $m_2$  en este sistema de coordenadas. Llamaremos  $X^\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  a las coordenadas espaciotemporales de la partícula de masa  $m_2$ .

Esquemáticamente el sistema es el siguiente:



Mientras no se especifique lo contrario, usaremos unidades en las que  $c = G = 1$ .

Como queremos encontrar una expresión para las aceleraciones  $\frac{d^2 x^\mu}{d(x^0)^2}$ , partiremos de la ecuación de las geodésicas en la que incluimos el término que representa la interacción electromagnética:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{-e}{m_2} F^\mu_{\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

en donde  $\tau$  es el tiempo propio,  $\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}$  son los símbolos de Christoffel que representan la interacción gravitatoria y  $F_{\nu}^{\mu}$  es el tensor de campo electromagnético.

Como nos interesa  $\frac{d^2x^i}{d(x^0)^2}$ , por la regla de la cadena obtenemos

$$\left[ \frac{d^2x^{\mu}}{d(x^0)^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^{\alpha}}{dx^0} \right] \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + \frac{dx^{\mu}}{dx^0} \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\frac{e}{m_2} F_{\nu}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^0}{d\tau}$$

Para evaluar el factor  $\frac{d^2x^0}{d\tau^2}$  tomamos  $\mu = 0$ , obteniendo

$$\Gamma_{\nu\alpha}^0 \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^{\alpha}}{dx^0} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\frac{e}{m_2} F_{\nu}^0 \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^0}{d\tau}$$

de donde

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\alpha}^0 \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^{\alpha}}{dx^0} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 - \frac{e}{m_2} F_{\nu}^0 \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^0}{d\tau}$$

Sustituyendo este valor de  $\frac{d^2x^0}{d\tau^2}$  en la ecuación anterior nos resulta

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d(x^0)^2} + \left( \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} - \frac{dx^{\mu}}{dx^0} \Gamma_{\nu\alpha}^0 \right) \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{dx^{\alpha}}{dx^0} = -\frac{e}{m_2} \left( F_{\nu}^{\mu} - \frac{dx^{\mu}}{dx^0} F_{\nu}^0 \right) \frac{dx^{\nu}}{dx^0} \frac{d\tau}{dx^0}$$

La parte espacial de esta ecuación es la que nos interesa, y se obtiene haciendo  $\mu = i$ , o sea

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} + \left( \Gamma_{\nu\kappa}^i - \frac{dx^i}{dx^0} \Gamma_{\nu\kappa}^0 \right) \frac{dx^\nu}{dx^0} \frac{dx^\kappa}{dx^0} = -\frac{e}{m_2} \left( F_{\nu}^i - \frac{dx^i}{dx^0} F_{\nu}^0 \right) \frac{dx^\nu}{dx^0} \frac{d\mathcal{G}}{dx^0}$$

Llamando  $w = \frac{dx^i}{dx^0}$  a las velocidades, y desdoblado los símbolos de Christoffel en parte espacial y parte temporal se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = & - \left( \Gamma_{00}^i - w^i \Gamma_{00}^0 \right) - 2 \left( \Gamma_{0j}^i - w^i \Gamma_{0j}^0 \right) w^j - \left( \Gamma_{k j}^i - w^i \Gamma_{k j}^0 \right) w^k w^j \\ & - \frac{e}{m_2} \left( F_0^i - w^i F_0^0 + F_k^i w^k - w^i w^k F_k^0 \right) \frac{d\mathcal{G}}{dx^0} \end{aligned}$$

Como vamos a considerar velocidades pequeñas en nuestro sistema (aproximación cuasi-newtoniana), despreciaremos los términos en los que la velocidad aparece elevada al cuadrado, al cubo o a una potencia mayor. Así, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = - \Gamma_{00}^i + w^i \Gamma_{00}^0 - 2 w^j \Gamma_{0j}^i - \frac{e}{m_2} \left( F_0^i - w^i F_0^0 + F_j^i w^j \right) \frac{d\mathcal{G}}{dx^0} \quad (\text{I-1})$$

Hasta aquí no hemos considerado ningún sistema de referencia. Introducimos ahora las "coordenadas locales del sistema de referencia propio del observador" (Misner Thorne y Wheeler)\*. En este sistema de coordenadas pueden encontrarse expresiones para la métrica a segundo orden y para las aceleraciones inerciales a primer orden (Ni y Zimmerman), para un observador con aceleración y rotación arbitrarias. Nosotros no consideramos rotaciones por lo que tendremos  $\omega = \eta = 0$ . Con estas consideraciones los resultados de Ni y Zimmerman son:

$$\Gamma_{00,i}^0 = b^i$$

$$\Gamma_{00,i}^j = R_{0j0i} + \alpha^i a^j$$

$$\Gamma_{j0,i}^0 = R_{0j0i} - \alpha^i a^j$$

$$\Gamma_{k0,i}^j = R_{jkio}$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{jk}^\alpha = 0$$

$$\Gamma_{j0}^0 = \alpha^j$$

$$\Gamma_{k0}^j = 0$$

$$\gamma_{00}^0 = -1 - 2a_k x^k - (\alpha^i x^i)^2 - R_{0i0m} x^i x^m$$

$$\gamma_{0i}^0 = -\frac{2}{3} R_{0i0m} x^i x^m$$

$$\gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{i0jm} x^i x^m$$

TABLA I-1 Resultados de Ni y Zimmerman ( $\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ )

\* MTW

Ahora veremos como vamos a tomar en cuenta estos resultados en la ecuación (I-1):

En esta ecuación, que es una expresión para las aceleraciones, la interacción gravitatoria está representada por los símbolos de Christoffel, que a su vez pueden expresarse en función de la métrica  $g^{\mu\nu}$ . Tenemos que considerar las diferentes interacciones gravitatorias que hay en el sistema, y esto lo haremos considerando que la métrica consta de tres términos:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

en donde

$\eta_{\mu\nu}$  métrica de espacio plano  
 $\gamma_{\mu\nu}$  métrica de Ni y Zimmerman  
 $h_{\mu\nu}$  métrica producida por  $m_1$

De esta manera, en  $\gamma_{\mu\nu}$  están contenidas las aceleraciones inerciales de la partícula  $m_1$  que está en el origen del sistema de coordenadas, mientras que  $h_{\mu\nu}$  representa el campo gravitatorio producido por  $m_1$  que afecta a  $m_2$  cuyo movimiento está descrito por la ecuación ( I-1 ).

Ahora encontraremos las expresiones de todas las partes de la métrica, para luego sustituirlas en ( I-1 ) y tener la expresión de las aceleraciones. En todo lo que sigue vamos a despreciar, además de todos los términos que contengan la veloci-

dad elevada a una potencia superior a la primera, todos los términos que sean de orden de magnitud inferior a  $e^2$  o  $G$ ; es decir, que despreciaremos todos los términos de orden  $e^3$ ,  $G^2$ ,  $e^2G$ , etc.

Tomando en cuenta estas aproximaciones vamos a encontrar una expresión para los símbolos de Christoffel: Tenemos que

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu} (g_{\nu\rho,\alpha} + g_{\rho\alpha,\nu} - g_{\alpha\rho,\nu})$$

y

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Como veremos más adelante, la métrica  $h_{\mu\nu}$  producida por  $m_1$  está dada por las fórmulas ( I-5 ) que tomando unidades convencionales tienen la forma

$$h_{00} = \frac{2Gm_1}{c^2 r}, \quad h_{ij} = \frac{2Gm_1}{c^2 r} \delta_{ij}, \quad h_{i0} = 0$$

Los valores de  $m_1$  y  $r$  que consideraremos serán tales que podemos decir que

$$h_{\mu\nu} \sim G$$

es decir, que el orden de magnitud de  $h_{\mu\nu}$  está determinado principalmente por  $G$ , lo cual no siempre es cierto sino que

depende de los valores de  $m_1$  y  $r$ .

Encontraremos que la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$  (fórmula I-5 y I-6) está dada por

$$\gamma_{0i} = -\frac{2}{3} R_{0iim} x^i x^m$$

$$\gamma_{ij} = -\frac{1}{3} R_{iiljm} x^i x^m$$

$$\frac{\gamma_{00}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{e}{m_2} F_{zt}^{i0}(0) x^i - \frac{e^2}{m_1} \frac{1}{r} - \frac{Gm_2}{r} - \frac{1}{2} R_{0i0im} x^i x^i$$

De manera análoga al caso anterior, las masas, las distancias, los tensores electromagnéticos y el tensor de Riemann involucrados en estas expresiones, tendrán valores tales que podemos decir

$$\gamma_{\mu\nu} \sim e, e^2 \text{ o } G$$

Tomando en cuenta estas aproximaciones, al sustituir los valores de  $h_{\mu\nu}$  y  $\gamma_{\mu\nu}$  en la expresión para  $\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}$ , resultan muchos términos de orden de magnitud superior a la deseada, y nos queda

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (h_{\rho\nu,\alpha} + h_{\rho\alpha,\nu} - h_{\alpha\nu,\rho}) + \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\gamma_{\rho\nu,\alpha} + \gamma_{\rho\alpha,\nu} - \gamma_{\alpha\nu,\rho})$$

Llamaremos  $\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu}$  al término debido a la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$ .  
Entonces resulta



$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{i0} (h_{p0,0} + h_{p0,0} - h_{00,p}) + \Gamma_{r00}^i = h_{i0,0} - \frac{1}{2} h_{00,i} + \Gamma_{r00}^i$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \eta^{00} (h_{00,0}) + \Gamma_{r00}^0 = -\frac{1}{2} h_{00,0} + \Gamma_{r00}^0$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \eta^{ip} (h_{p0,j} + h_{p0,j} - h_{0j,p}) + \Gamma_{r0j}^i = \frac{1}{2} h_{i0,j} + \frac{1}{2} h_{i0,j} - \frac{1}{2} h_{0j,i} + \Gamma_{r0j}^i$$

Como la métrica  $h_{\mu\nu}$  es producida por  $m_1$  que en nuestro sistema de coordenadas está en reposo, sabemos que (MTW)

$$h_{00} = \frac{2m_1}{r}, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ij} = \frac{2m_1}{r} \delta_{ij}$$

donde  $r = \sqrt{x^i x^i}$

Las derivadas  $h_{\alpha\alpha,0} = \frac{\partial}{\partial t} h_{\alpha\alpha}$  se toman considerando  $x^i = \text{cte.}$  por lo que

$$h_{00,0} = h_{ij,0} = 0$$

Entonces, se obtiene

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} h_{00,i} + \Gamma_{r00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2m_1}{r} \right) + \Gamma_{r00}^i = \frac{m_1 x^i}{r^3} + \Gamma_{r00}^i$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{r00}^0$$

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{r0j}^i$$

Los valores de  $\Gamma_{ij}^k$  los obtenemos desarrollándolos en serie de Taylor a primer orden alrededor de el origen de coordenadas, y sustituyendo en estos desarrollos los resultados de Ni y Zimmerman (tabla I-1 pagina 10). Por ejemplo:

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{r0j}^i (x=0) + \Gamma_{r0j,k}^i (x=0) X^k = 0 + R_{i,jk0} X^k$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{r00}^0 (x=0) + \Gamma_{r00,k}^0 (x=0) X^k = b^k X^k$$

$$\Gamma_{r00}^i = \Gamma_{r00}^i (x=0) + \Gamma_{r00,k}^i (x=0) X^k = a^i + (R_{0i0k} X^k + a^i a^k X^k)$$

donde  $a^i$  es la aceleración de  $m_1$  y  $b^i = \frac{da^i}{dt}$  es el cambio de esta aceleración.

Ya hemos encontrado todos los valores de los símbolos de Christoffel que nos interesan. Sustituyéndolos en la ecuación ( I-1 ) obtenemos la siguiente expresión para las aceleraciones de la partícula  $m_2$

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = -\frac{m_i x^i}{r^3} - a^i - R_{0i0n} x^n - a^i a^k x^k + w^i b^k x^k$$

$$- 2R_{ijko} w^j x^k - \frac{e}{m_2} [F^i_0 - F^0_{0i} + F^i_j w^j] \frac{d\bar{t}}{dx^0}$$

(I-2)

Ahora vamos a expresar  $\frac{d\bar{t}}{dx^0}$  en función de la métrica.  
 Por definición

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\bar{t}^2$$

Dividiendo entre  $d\bar{t}^2$  y expresando  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  resulta

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{t}} \frac{dx^\nu}{d\bar{t}} = -1 = (\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0} \left(\frac{dx^0}{d\bar{t}}\right)^2$$

Despejando  $\frac{d\bar{t}}{dx^0}$  se obtiene

$$\frac{d\bar{t}}{dx^0} = \sqrt{-1 + w^i w^i + \gamma_{00} - 2\gamma_{0i} w^i - \gamma_{ij} w^i w^j + h_{00} - h_{ij} w^i w^j}$$

Como estamos considerando  $w$ ,  $\gamma$  y  $h$  pequeños, esta expresión puede aproximarse así:

$$\frac{d\bar{G}}{dx^0} = 1 - \frac{1}{2} w^i w^i - \frac{1}{2} \gamma_{00} - \gamma_{0i} w^i - \frac{1}{2} \gamma_{ij} w^i w^j - \frac{1}{2} h_{00} - h_{ij} w^i w^j$$

En la ecuación ( I-2 ).  $\frac{d\bar{G}}{dx^0}$  multiplica solamente a

$$\frac{e}{m_2} [F^i_0 - F^0_{\phantom{0}i} w^i + F^i_{\phantom{i}j} w^j]$$

Como el tensor electromagnético  $F^{\mu\nu}$  es de orden e, ya que está formado por campos eléctricos y magnéticos, estos términos son de orden  $e^2$ . Por lo tanto al multiplicarlos por  $\frac{d\bar{G}}{dx^0}$  resultan términos de orden  $e^4$ ,  $e^2 G$ , etc., con excepción del primer término en la expresión de  $\frac{d\bar{G}}{dx^0}$ . Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (I-2) así:

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = -\frac{m x^i}{r^3} - a^i - R_{0i0k} x^k - a^i a^k x^k + w^i b^k x^k - 2 R_{ij0k} w^j w^k$$

$$- \frac{e}{m_2} [F^i_0 - F^0_{\phantom{0}i} w^i + F^i_{\phantom{i}j} w^j]$$

Ahora nos ocuparemos de los términos electromagnéticos de esta expresión.

Para subir o bajar índices de los tensores electromagnéticos

se usa el tensor métrico  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , pero como  $eF_{\mu\nu} \sim e^2$  y  $\delta_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \sim e^2 \circ G$ , resultan términos de orden de magnitud superior a la deseada por lo que concluimos que podemos subir y bajar índices de los tensores electromagnéticos con el tensor métrico de espacio plano  $\eta_{\mu\nu}$ ,

Con base en lo anterior, tenemos

$$g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F^{\circ}_{\circ} = -F^{\circ\circ} = 0$$

La interacción electromagnética representada por el tensor  $F^{\mu\nu}$  puede ser debida al campo de la partícula  $m_1$  o al campo externo, por lo que escribimos

$$F^{\mu\nu} = F_{e^2}^{\mu\nu} + F_{ext}^{\mu\nu}$$

$F_{e^2}^{\mu\nu}$  es el campo electromagnético producido por  $m_1$  y que actúa sobre  $m_2$ . Por lo tanto se trata del campo electrostático producido por una carga e en reposo. Por esta razón no habrá campo magnético y podemos poner

$$F_{e^2}^{ij} = 0$$

El campo eléctrico debe ser igual al campo eléctrico en espacio plano producido por una carga en reposo, con la corrección relativista correspondiente, es decir

$$F_{e^2}^{i0} = \frac{F_{e^2 \text{ e.p.}}^{i0}}{\sqrt{-g}}$$

pero como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \approx 1 - \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{2} h$$

donde

$$\delta = \delta^i_j \delta^j_i, \quad h = h^i_k h^k_i$$

resulta que, por las mismas razones de órdenes de magnitud anteriores, podemos decir que

$$F_{e^2}^{i0} = F_{e^2 \text{ e.p.}}^{i0} = -F_{e^2}^{i0} = -\frac{ex^i}{r^3}$$

$F_{\text{ext}}^{\mu\nu}$  es el campo electromagnético que actúa sobre  $m_2$  debido a la onda plana, y lo escribimos así

$$F_{\text{ext}}^{\mu\nu} = F_{\text{ext}}^{\mu\nu}(x)$$

donde  $x$  representa genéricamente las coordenadas de la partícula  $m_2$ .

En conclusión, tenemos

$$F^0_{\quad 0} = 0, \quad -F^i_{\quad 0} = F^{i0} = F_{e^2}^{i0} + F_{\text{ext}}^{i0} = -\frac{ex^i}{r^3} + F_{\text{ext}}^{i0}(x)$$

$$F^i_{\quad j} = F^{ij} = F_{e^2}^{ij} + F_{\text{ext}}^{ij} = 0 + F_{\text{ext}}^{ij}(x)$$

y la ecuación (I-2) queda

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = -\frac{m_1 x^i}{r^3} - a^i - R_{0i0k} x^k - a^i a^k x^k + w^i b^k x^k - 2R_{ijko} w^j x^k$$

$$- \frac{e^2}{m_2} \frac{x^i}{r^3} + \frac{e}{m_2} F_{ext}^{i0}(x) - \frac{e}{m_2} F_{ext}^{ij}(x) w^j$$

(I-3)

Ahora solamente falta analizar la aceleración  $a^i$  debida al sistema de referencia considerado y que por lo tanto es una aceleración inercial. Como la partícula  $m_1$  está en el origen del sistema de coordenadas, la aceleración  $a^i$  es la que experimenta esta partícula. Consideraremos que esta aceleración es debida a tres causas diferentes, por lo que escribimos

$$a^i = \alpha_{em}^i + \alpha_{e^2}^i + \alpha_G^i$$

en donde:

$\alpha_{em}^i$  = aceleración de  $m_1$  debida al campo electromagnético externo.

$\alpha_{e^2}^i$  = aceleración de  $m_1$  debida al campo electromagnético de  $m_2$ .

$\alpha_G^i$  = aceleración de  $m_1$  debida al campo gravitatorio de  $m_2$ .

Por el argumento de que toda corrección debida a los términos  $\delta_{\mu\nu}$  o  $h_{\mu\nu}$  producirá términos de orden  $e^4$  o  $e^2 G$ ,

podemos tomar directamente las expresiones de espacio plano de estas aceleraciones. Analicemos cada una por separado:

$$a_{em}^i = -\frac{e}{m_1} F_{ext}^{i0} (0)$$

Se evalúa en  $x=0$  puesto que  $m_1$  está en el origen del sistema de coordenadas.

$$a_{e^2}^i = \frac{e^2}{m_1} \frac{x^i}{r^3}$$

En este caso, quien produce el campo es la partícula  $m_2$  que está en movimiento alrededor de  $m_1$ . Sin embargo, despreciamos los términos de retardación debidos a este movimiento, porque son muy pequeños en comparación con la fuerza electrostática.

$$a_G^i = \frac{m_2 x^i}{r^3}$$

También en este caso los términos de retardación son muy pequeños comparados con el término estático que de por sí ya es pequeño.

El término  $a^i a^k x^k$  de la ecuación (I-3) desaparece, ya que es claro que al multiplicar cualesquiera dos de las aceleraciones anteriores resultarán términos de orden despreciable.

Finalmente veremos lo que ocurre con el término  $\omega^i b^k x^k$ .  
Tenemos que



$$b^k = \frac{da^k}{d\tau} = \frac{da^k_{em}}{d\tau} + \frac{da^k_{g1}}{d\tau} + \frac{da^k_{g2}}{d\tau}$$

$$\frac{da^k_{g1}}{d\tau} \text{ y } \frac{da^k_{g2}}{d\tau} \sim w^k \Rightarrow w^i b^k_{g1} x^k \sim w^i \approx 0$$

Además vamos a imponer la condición de que los campos externos varíen relativamente despacio con el tiempo, es decir

$$\frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{dR_{\mu\nu\alpha\beta}}{d\tau} = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{da^k_{em}}{d\tau} \propto \frac{dF^k_{em}}{d\tau} = 0$$

Entonces podemos concluir que

$$w^i b^k x^k = 0$$

Incorporando todos estos resultados a la ecuación (I-3), obtenemos la siguiente expresión para las aceleraciones de la partícula  $m_2$ , en la que ya están expresadas explícitamente las dependencias con los campos electromagnético y gravitatorio tanto interno como externo:

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = -\frac{m_1 x^i}{r^3} + \frac{e}{m_1} F_{ext}^{i0}(0) - \frac{e^2}{m_1} \frac{x^i}{r^3} - \frac{m_2 x^i}{r^3} - R_{0i0k} x^k$$

$$- 2R_{i0j0} \omega^j x^k - \frac{e^2}{m_2} \frac{x^i}{r^3} + \frac{e}{m_2} F_{ext}^{i0}(x) - \frac{e}{m_2} F_{ext}^{ij}(x) x^j$$

Si reagrupamos términos y consideramos la masa reducida

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

obtenemos por último

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = -\frac{e^2}{\mu} \frac{x^i}{r^3} - \frac{m_1 m_2}{\mu} \frac{x^i}{r^3} - R_{0i0k} x^k - 2R_{i0j0} \omega^j x^k$$

$$+ e \left( \frac{1}{m_1} F_{ext}^{i0}(0) + \frac{1}{m_2} F_{ext}^{i0}(x) - \frac{1}{m_2} F_{ext}^{ij}(x) \omega^j \right)$$

(I-4)

que es la expresión para las aceleraciones a la que queríamos llegar.

b) OBTENCION DEL LAGRANGIANO A PARTIR DE LA ACCION.

En esta sección encontraremos el lagrangiano de nuestro sistema. Partiremos de la expresión general de la acción de un sistema como el que nos interesa, e introduciendo las características particulares y las aproximaciones que hemos estado considerando, daremos a la acción la forma adecuada para obtener de ella el lagrangiano deseado.

La acción para un sistema de partículas cargadas en presencia de campo electromagnético y gravitatorio está dada por (Weinberg)

$$I = -\sum_n m_n \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau + \sum_n e_n \int A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau$$

$$- \frac{1}{4} \int \sqrt{g} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) d^4x - \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{g} R(x) d^4x$$

Como estamos usando la aproximación semiclásica no vamos a considerar los dos últimos términos ya que representan respectivamente la acción del campo electromagnético y gravitatorio que trataremos clásicamente.

Por otro lado, nos interesa analizar el movimiento de la partícula  $m_2$  en el sistema de coordenadas propio del observador mencionado en la sección anterior, en el que  $m_1$  está en el origen. Por eso, nuestra acción será la de una sola partícula y el movimiento de  $m_1$  quedará descrito intrínsecamente

por la métrica. Por lo tanto, la acción de la que partiremos es

$$I = -m_2 \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau - e \int A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau$$

Igual que antes pondremos

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^0}{d\tau}, \quad \frac{dx^i}{dx^0} = w^i$$

así como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

en donde los términos de la métrica están dados exactamente igual que en la sección anterior. Después de sustituir, la acción queda

$$\begin{aligned} I &= -m_2 \int \sqrt{-(\eta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0}} dx^0 - e \int A_\mu \frac{dx^\mu}{dx^0} dx^0 \\ &= -m_2 \int \sqrt{-(\eta_{00} + \delta_{00} + h_{00}) - (\eta_{ij} + \delta_{ij} + h_{ij}) w^i w^j - 2(\eta_{0i} + \delta_{0i} + h_{0i}) w^i} dx^0 \\ &\quad - e \int (A_0 + A_i w^i) dx^0 \end{aligned}$$

Como ya sabemos,  $h_{0i} = 0$ ,  $\eta_{ij} = 0$ ,  $\eta_{00} = -1$ , por lo tanto

$$I = -m_2 \int \sqrt{1 - w^i w^i - h_{00} - h_{ij} w^i w^j - \gamma_{00} - \gamma_{ij} w^i w^j - 2\gamma_{i0} w^i} dx^0 \\ - e \int (A_0 + A_i w^i) dx^0$$

Dentro de la raíz cuadrada hay sólo términos pequeños, por lo que podemos usar la aproximación

$$\sqrt{1 - \epsilon} = 1 - \frac{1}{2} \epsilon \quad \text{si } \epsilon \ll 1$$

para obtener

$$I = -m_2 \int \left( 1 - \frac{w^i w^i}{2} - \frac{h_{00}}{2} - \frac{h_{ij} w^i w^j}{2} - \frac{\gamma_{00}}{2} - \frac{\gamma_{ij} w^i w^j}{2} - \gamma_{0i} w^i \right) dx^0 - e \int (A_0 + A_i w^i) dx^0$$

Los valores de la métrica  $h_{\mu\nu}$  están dados por (MTW)

$$h_{00} = \frac{2m}{r}$$

$$h_{ij} = \frac{2m}{r} \delta_{ij}$$

$$h_{i0} = 0$$

(I-5 a)

y los de la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$  son (Ni y Zimmerman)

$$\gamma_{00} = 1 - 2 a_i x^i - R_{020m} x^2 x^m$$

$$\gamma_{0i} = -\frac{2}{3} R_{02im} x^2 x^m \quad (\text{I-5 b})$$

$$\gamma_{ij} = -\frac{1}{3} R_{i2jm} x^2 x^m$$

También debemos considerar que la aceleración inercial  $a_i$  que aparece en la expresión para  $\gamma_{00}$ , está dada igual que en la sección anterior, por

$$a^i = a_{EM}^i + a_{G^2}^i + a_{G^3}^i = -\frac{e}{m_1} \frac{F_{ext}^{i0}}{c} (0) + \frac{e^2}{m_1} \frac{x^i}{r^3} + \frac{m_2 x^i}{r^3}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{00}}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{e}{m_1} \frac{F_{ext}^{i0}}{c} (0) x^i - \frac{e^2}{m_1} \frac{x^i x^i}{r^3} - m_2 \frac{x^i x^i}{r^3} - \frac{1}{2} R_{020m} x^2 x^m \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e}{m_2} \frac{F_{ext}^{i0}}{c} (0) x^i - \frac{e^2}{m_1} \frac{1}{r} - \frac{m_2}{r} - \frac{1}{2} R_{020m} x^2 x^m \end{aligned} \quad (\text{I-6})$$

La acción resulta introduciendo todo lo anterior y considerando que las constantes dentro de la integral no afectan a las ecuaciones de movimiento

$$I = -m_2 \int \left( -\frac{w^i w^i}{2} - \frac{m_1}{r} - \frac{m_1}{r} w^i w^i + \frac{1}{6} R_{i\ell j m} x^\ell x^m w^i w^j + \frac{2}{3} R_{o\ell i m} x^\ell x^m w^i \right)$$

$$- \frac{e}{m_1} \Gamma_{bc}^{i0} (0) x^i + \frac{e^2}{m_1} \frac{1}{r} + \frac{m_2}{r} + \frac{1}{2} R_{o\ell o m} x^\ell x^m) dx^0 - e \int (A_0 + A_j w^j) dx^0$$

Tenemos que cambiar el signo a los términos  $\frac{e^2}{m_1} \frac{1}{r}$  y  $\frac{m_2}{r}$  por la siguiente razón: Ambos provienen de la expresión para  $\gamma_{00}$  por lo que son de la forma  $a_i x^i$ . Nos fijaremos como fue obtenido uno de ellos para entender la razón de este cambio de signo en los dos. El término  $a_0^i$  se obtuvo así:

$$a_0^i = m_2 \frac{x^i}{r^3} \implies a_0^i x^i = m_2 \frac{x^i x^i}{r^3} = m_2 \frac{1}{r}$$

mientras que estrictamente debimos tener

$$\int a^i dx = a^i x^i$$

con lo que tendríamos

$$\frac{\partial (a^i x^i)}{\partial x^i} = a^i$$

Sin embargo vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{m_2}{r} = - \frac{m_2 x^i}{r^3} \neq a^i = \frac{m_2 x^i}{r^3}$$

en donde se ve que hay que cambiar de signo al término para que no se de esta contradicción. Para el término encontramos de la misma manera que también hay que cambiarle el signo. Con estos cambios la acción queda

$$\begin{aligned} I = & -m_2 \int \left( - \frac{v^i v^i}{2} - \frac{m_1}{r} - \frac{m_2}{r} - \frac{e^2}{m_1} \frac{1}{r} - \frac{m_1}{r} v^i v^i + \frac{1}{6} R_{i2jm} x^i x^m v^i v^j \right. \\ & + \frac{2}{3} R_{02im} x^i x^m v^i - \frac{e}{m_1} F_{\mu\nu}^i(0) x^i \\ & \left. + \frac{1}{2} R_{020m} x^i x^m \right) dx^0 - e \int (A_0 + A_i v^i) dx^0 \end{aligned}$$

Vamos a desprestigiar los términos  $\frac{m_1}{r} v^i v^i$  y  $\frac{1}{6} R_{i2jm} x^i x^m v^i v^j$  porque son de orden de magnitud pequeña comparados con los demás. Para poder ver esto con claridad vamos a variar estos términos ya que así encontraremos la manera en que contribuyen a las ecuaciones de movimiento  $\delta I = 0$  y es allí donde podemos aplicar los criterios de orden de magnitud que hemos usado hasta ahora. Analizaremos de esta manera cada uno de estos dos términos por separado:



$$m_2 \delta \int \frac{m_1}{r} w^i w^i dx^0 = m_2 \int \frac{m_1}{r} 2w^i \delta w^i = m_2 \int \frac{2m_1}{r} w^i \frac{d\delta x^i}{dx^0} dx^0$$

$$\delta w^i = \frac{d\delta(x^i)}{dx^0}$$

integrando por partes, obtenemos

$$m_2 \delta \int \frac{m_1}{r} w^i w^i dx^0 = \frac{2m_1}{r} m_2 w^i dx^i \Big|_{a(\delta(x^i))}^{b(\delta(x^i))} - m_2 \int \frac{2m_1}{r} \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} \delta(x^i) dx^0$$

El primer término es cero puesto que hay que evaluarlo en los límites de integración en donde suponemos siempre que la variación es cero.

Al variar el primer término de la acción, se obtiene  $m_2 \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2}$ , por lo tanto, si variamos la expresión completa para la acción e igualamos a cero se obtiene la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} + \frac{2m_1}{r} \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = (\dots\dots)$$

en donde (.....) representa los demás términos que resultan al variar la acción, y deben ser de orden  $e^2$  o G ya que se trata de términos de aceleración. Podemos escribir

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} \left( 1 + \frac{2m_1}{r} \right) = (\dots\dots) \implies \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = \frac{(\dots\dots)}{1 + \frac{2m_1}{r}}$$

y como  $\frac{2m_1}{r}$  es pequeño, podemos escribir

$$\frac{d^2 x^i}{dt(x^0)^2} \approx \left(1 - \frac{2m_1}{r}\right) (\dots)$$

Sabemos que  $\frac{2m_1}{r} \sim G$  por lo que al multiplicarlo por el paréntesis se producen términos de orden  $e^2 G$  o  $G^2$  que despreciamos. Entonces vemos que el término  $\frac{m_1 m_2}{r} w^i w^j$  de la acción no contribuye a las ecuaciones de movimiento y podemos despreciarlo.

Análogamente

$$-m_3 \delta \int \frac{1}{6} R_{i\ell j m} x^\ell x^m w^i w^j dx^0 = -m_2 \int \frac{2}{6} R_{i\ell j m} x^m w^i w^j \delta(x^i) dx^0$$

$$-m_2 \int \frac{2}{6} R_{i\ell j m} x^\ell x^m w^j \frac{d\delta(x^i)}{dx^0} dx^0$$

el primer término contiene la velocidad elevada al cuadrado por lo que lo despreciamos. El segundo término lo integramos por partes y obtenemos

$$\begin{aligned} -m_2 \delta \int \frac{1}{6} R_{i\ell j m} x^\ell x^m w^i w^j dx^0 &= -\frac{m_2}{3} R_{i\ell j m} x^\ell x^m w^j \delta(x^i) \Big|_{a(\delta(x^i))}^{b(\delta(x^i))} + \frac{m_2}{3} \int \left[ \frac{d}{dx^0} (R_{i\ell j m}) \right. \\ &\quad \left. x^\ell x^m w^j \delta(x^i) + R_{i\ell j m} w^\ell x^m w^j \delta(x^i) + R_{i\ell j m} x^\ell w^m w^j \delta(x^i) \right. \\ &\quad \left. + R_{i\ell j m} x^\ell x^m \frac{d^2 x^j}{dt(x^0)^2} \delta(x^i) \right] dx^0 = 0 + 0 + 0 + 0 \\ &\quad + \frac{m_2}{3} \int R_{i\ell j m} x^\ell x^m \frac{d^2 x^j}{dt(x^0)^2} \delta(x^i) dx^0 \end{aligned}$$

El primer término se anula al evaluarlo en los límites de integración, el segundo lo despreciamos ya que es muy pequeño por contener la derivada temporal del tensor de Riemann, el tercero y el cuarto contienen la velocidad al cuadrado por lo que también los despreciamos. Solamente sobrevive el último término. Con este término puede aplicarse el mismo razonamiento que usamos en el caso del término  $\frac{m_1 m_2}{r} w^i w^i$ , para concluir que podemos despreciar también a  $\frac{m_2}{c} R_{ijkl} x^k x^m w^i w^j$  en la expresión para la acción

Después de despreciar estos dos términos, la acción se reduce a

$$I = \int \left( \frac{m_2 w^i w^i}{2} + \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_2^2}{r} + \frac{m_2}{m_1} \rho^2 \frac{1}{r} - \frac{2}{3} m_2 R_{ijkl} x^k x^m w^i \right. \\ \left. - \frac{m_2}{2} R_{ijkl} x^k x^m + \frac{m_2}{m_1} \rho F_{ext}^{i0}(\omega) x^i - e A_0 - A_i w^i \right) dx^0$$

Solamente nos falta analizar los términos electromagnéticos:

$$F_{ext}^{i0}(\omega) = \eta^{00} \eta^{ij} F_{ext\ j0}(\omega) = -F_{ext\ i0}(\omega) = -A_{ext\ 0,i}(\omega) + A_{ext\ i,0}(\omega) \\ = A_{ext\ i,0}(\omega)$$

En el último paso se usó el hecho de que  $A_{ext,0}(0) = 0$ .

Los términos  $A_0$  y  $A_x$  representan el campo electromagnético externo sobre  $m_2$  por lo que

$$A_0 = -\frac{e}{r} \quad , \quad A_x = A_{ext,i}(x)$$

Los tres términos electromagnéticos de la acción resultan entonces

$$\frac{m_2}{m_1} e F_{ext}^{i0}(0) x^i - e A_0 - e A_i w^i = \frac{m_2}{m_1} e A_{ext,i,0}(0) x^i + \frac{e^2}{r} - e A_{ext,i}(x) w^i$$

El primero puede integrarse por partes

$$\int A_{ext,i,0} x^i dx^0 = x^i A_{ext,i} \Big| - A_{ext,i}(0) \dot{x}^i dx^0 = - \int A_{ext,i}(0) w^i dx^0$$

para obtener

$$\frac{m_2}{m_1} e F_{ext}^{i0}(0) x^i - e A_0 - e A_i w^i = - \frac{m_2}{m_1} e A_{ext,i}(0) w^i + \frac{e^2}{r} - e A_{ext,i}(x) w^i$$

Introduciendo esto en la expresión para la acción y reagrupando términos se obtiene una expresión en la que la parte electromagnética de la acción contiene solamente términos en el potencial vectorial electromagnético. La acción a la que hemos llegado es

$$I = \int \left( \frac{m_2 \dot{w}^i w^i}{2} + \frac{m_1 m_2 + m_2^2}{r} + \frac{m_2}{m_1} \frac{c^2}{r} + \frac{c^2}{r} - \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m w^i \right. \\ \left. - \frac{m_2}{2} R_{020m} x^i x^m - \frac{m_2}{m_1} e A_{ext\ i}(0) w^i - e A_{ext\ i}(x) w^i \right) dx^0$$

Introduciendo la masa reducida y tomando en cuenta que

$$I = \int L dx^0$$

obtenemos finalmente el lagrangiano del sistema

$$L = \frac{1}{2} m_2 \dot{w}^i w^i + \frac{m_1 m_2}{\mu} \frac{1}{r} + \frac{m_2}{\mu} \frac{c^2}{r} - \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m w^i \\ - \frac{m_2}{2} R_{020m} x^i x^m - m_2 e \left( \frac{A_{ext\ i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext\ i}(x)}{m_2} \right) w^i$$

c) CONGRUENCIA ENTRE EL LAGRANGIANO DEL SISTEMA Y LA EXPRESION PARA LAS ACELERACIONES

Queremos hacer ver que el lagrangiano que acabamos de obtener y las aceleraciones de la partícula  $m_2$  obtenidas en la sección a) (ecuación I-4), son congruentes, es decir, que ambos describen de la misma manera el movimiento del sistema. Para demostrar esta congruencia aplicaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano para obtener las ecuaciones de movimiento y con ellas encontrar las aceleraciones de la partícula  $m_2$  que deben coincidir con la ecuación (I-4).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dx^i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

y nuestro lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m_2 \dot{w}^i \dot{w}^i + \frac{m_1 m_2}{\mu} \frac{1}{r} + \frac{m_2}{\mu} \frac{e^2}{r} - \frac{2}{3} m_2 R_{020m} x^2 x^m \dot{w}^i$$

$$- \frac{m_2}{2} R_{020m} x^2 x^m - m_2 e \left( \frac{A_{ext_2}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext_2}(x)}{m_2} \right) \dot{w}^i$$

Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial w^i} = m_1 w^i - \frac{2}{3} m_2 R_{0i1m} x^1 x^m - m_2 c \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} \frac{\partial L}{\partial w^i} &= \frac{m_2 \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2}}{\frac{d(x^0)^2}{d(x^0)^2}} - \frac{2}{3} m_2 \left( \frac{d R_{0i1m}}{d x^0} x^1 x^m + R_{0i1m} w^1 x^m + R_{0i1m} x^1 w^m \right) \\ &\quad - m_2 c \left( \frac{A_{ext,i}(0) w^j}{m_1} + \frac{A_{ext,i,0}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i,j}(x) w^j}{m_2} + \frac{A_{ext,i,0}(x)}{m_2} \right) \end{aligned}$$

Los términos  $\frac{d R_{0i1m}}{d x^0} x^1 x^m$  y  $\frac{A_{ext,i}(0) w^j}{m_1}$  se anulan por razones que ya se han mencionado

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= - \left( \frac{m_1 m_i^2}{\mu} + \frac{m_2 e^2}{\mu} \right) \frac{x^i}{r^3} - \frac{2}{3} m_2 \left( 0 + R_{0i1m} x^m w^j + R_{0i,j} x^1 w^j \right) \\ &\quad - \frac{m_2}{2} \left( 0 + R_{0i0m} x^m + R_{0i0i} x^1 - m_2 c \left( \frac{A_{ext,j,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,j,i}(x)}{m_2} \right) w^j \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} R_{0i1m} = \frac{\partial}{\partial x^1} R_{0i0m} = 0$$

ya que en la métrica de

Ni y Zimmerman, de donde provienen estas expresiones, el tensor de Riemann se evalúa en  $x=0$  y solamente depende del tiempo.

Sustituyendo todo lo anterior en las ecuaciones de Euler-Lagrange y cambiando el nombre de algunos índices mudos, podemos obtener

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dx^0} &= -\left(\frac{m_1 m_2}{\mu} + \frac{e^2}{\mu}\right) \frac{x^i}{r^3} + \frac{2}{3} (R_{0i1m} w^l x^m + R_{0m1l} x^m w^l) \\ &\quad - \frac{2}{3} (R_{0i2m} x^m w^j + R_{0m2i} x^m w^j) + \frac{1}{2} (R_{0i0m} x^m + R_{0m0i} x^m) \\ &\quad + \frac{A_{ext i 0}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext i j}(x) w^j}{m_2} + \frac{A_{ext i 0}(x)}{m_2} - \frac{A_{ext j i}(x) w^j}{m_2} \end{aligned}$$

Aplicando algunas propiedades de simetría del tensor de Riemann tenemos

$$\begin{aligned} R_{0i0m} = R_{0m0i} &\Rightarrow -\frac{1}{2} (R_{0i0m} x^m + R_{0m0i} x^m) = -R_{0i0m} x^m, \text{ y} \\ &\frac{2}{3} (R_{0i1m} w^l x^m + R_{0m1l} w^l x^m - R_{0i2m} w^l x^m - R_{0m2l} w^l x^m) \\ &= \frac{2}{3} (R_{0i1m} + R_{0m1l} - R_{0i2m} - R_{0m2l}) w^l x^m \\ &= \frac{2}{3} (R_{0i1m} + R_{0m1l} - R_{0i2m} + R_{0m2l}) w^l x^m, \quad R_{0m1l} = -R_{0mli} \\ &= \frac{2}{3} (R_{0i1m} + 2R_{0m1l} - R_{0i2m}) w^l x^m, \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{3} (2 \beta_{0m12} + \beta_{0m11}) w^l x^m, \quad \beta_{0m12} + \beta_{02m1} + \beta_{012m} = 0$$

$$= \frac{2}{3} (2 \beta_{0m12} + \beta_{0m11}) w^l x^m$$

$$= \frac{2}{3} (3 \beta_{0m11}) w^l x^m$$

$$= 2 \beta_{0m11} w^l x^m$$

$$= 2 \beta_{i12m} w^l x^m = -2 \beta_{i2m1} w^l x^m$$

con lo cual resulta

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = - \left( \frac{m_1 m_2}{\mu} + \frac{e^2}{\mu} \right) \frac{x^i}{r^3} - 2 \beta_{i2m1} x^m w^l - \beta_{012m} x^m$$

$$+ e \left( \frac{A_{ext,i,0}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i,j}(x) w^j}{m_2} + \frac{A_{ext,i,0}(x)}{m_2} - \frac{A_{ext,j,i}(x) w^j}{m_2} \right)$$

Para los términos electromagnéticos tenemos

$$\left( \frac{A_{ext,i,j}(0)}{m_1} - \frac{A_{ext,j,i}(0)}{m_1} \right) w^j = \frac{F_{ext,j,i}(0) w^j}{m_1} = - \frac{F_{ext}^{ij}(0) w^j}{m} = 0$$

$$\left( \frac{A_{ext,i,j}(x)}{m_2} - \frac{A_{ext,j,i}(x)}{m_2} \right) w^j = \frac{F_{ext,j,i}(x) w^j}{m_2} = - \frac{F_{ext}^{ij}(x) w^j}{m_2}$$

$$\frac{A_{ext,i,0}(0)}{m_1} = \frac{F_{ext,0,i}(0)}{m_1} = - \frac{F_{ext}^{0i}(0)}{m_1}, \quad A_{ext,0} = 0$$

$$\frac{A_{ext_{i,0}}(x)}{m_2} = - \frac{F_{ext}^{oi}(x)}{m_2}$$

para finalmente llegar a

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = - \left( \frac{m_1 m_2}{\mu} + \frac{m_2 e^2}{\mu} \right) \frac{x^i}{r^3} - 2 P_{i440} x^m w^4 - P_{i40m} x^m$$

$$- \frac{e F_{ext}^{ij}(x) w^j}{m_2} - \frac{e}{m_1} F_{ext}^{oi}(0) - \frac{e F_{ext}^{oi}(x)}{m_2}$$

que efectivamente coincide con la ecuación (I-4).

d) OBTENCION DEL HAMILTONIANO.

El hamiltoniano de un sistema está relacionado con el lagrangiano mediante la ecuación

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(\dot{q}_i, q_i, t)$$

en donde  $\dot{q}_i = \dot{w}^i$ ,  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}^i}$ ,  $q_i = x^i$

En nuestro caso tenemos

$$L = \frac{1}{2} m_2 \dot{w}^i \dot{w}^i + \left( \frac{m_1 m_2}{\mu} + \frac{e^2 m_2}{\mu} \right) \frac{1}{r} - \frac{m_2}{2} R_{020m} x^i x^m - \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m \dot{w}^i - m_2 e \left( \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} + \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} \right) \dot{w}^i$$

Entonces

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}^i} = m_2 \dot{w}^i - \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m - e m_2 \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right)$$

de donde, despejando, obtenemos

$$\dot{w}^i = \frac{p_i}{m_2} + \frac{2}{3} R_{02im} x^i x^m + e \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right) \quad (I-7)$$

Por lo tanto

$$\sum P_i \dot{q}_i = \sum_i P_i w_i = m_2 w^i w^i - \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m w^i - c m_2 \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right) w^i$$

y restando el lagrangiano a esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned} H &= m_2 w^i w^i - \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m w^i - c m_2 \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right) w^i - \frac{1}{2} m_2 w^i w^i \\ &\quad - \left( \frac{m_1 m_2^2}{\mu} + \frac{c^2 m_2}{\mu} \right) \frac{1}{r} + \frac{m_2}{2} R_{020m} x^i x^m + \frac{2}{3} m_2 R_{02im} x^i x^m w^i \\ &\quad + c m_2 \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right) w^i \end{aligned}$$

$$H = \frac{m_2 w^i w^i}{2} - \left( \frac{m_1 m_2^2}{\mu} + \frac{c^2 m_2}{\mu} \right) \frac{1}{r} + \frac{m_2}{2} R_{020m} x^i x^m \quad (I-8)$$

Queremos expresar este hamiltoniano en función de  $p^i$  en lugar de  $w^i$ , para lo cual sustituimos (I-7) en (I-8) para obtener

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{P_i}{m_2} + \frac{2}{3} R_{02im} x^i x^m + c \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right) \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{m_1 m_2^2}{\mu} + \frac{c^2 m_2}{\mu} \right) \frac{1}{r} + \frac{m_2}{2} R_{020m} x^i x^m \end{aligned}$$

Como estamos considerando  $R_{0el1m}$ ,  $A_{ext,i}(x)$  y  $A_{ext,i}(0)$  pequeños, podemos usar la aproximación

$$(a + \epsilon)^2 \approx a^2 + 2a\epsilon, \quad \epsilon \ll a$$

y el hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{p^2}{2m_2} + \frac{2}{3} R_{0el1m} x^2 x^m p^i + e \left( \frac{A_{ext,i}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext,i}(x)}{m_2} \right) p^i$$

$$- \left( \frac{m_1 m_2}{\mu} + \frac{e^2 m_2}{\mu} \right) \frac{1}{r} + \frac{m_2}{2} R_{0el1m} x^2 x^m \quad (\text{I-9})$$

e) FORMA FINAL DEL HAMILTONIANO.

Ahora vamos a encontrar la forma del hamiltoniano con la que trabajaremos en el siguiente capítulo.

Empezaremos cambiando las unidades que hasta ahora hemos usado: Abandonaremos las unidades en que  $c = G = 1$  para adoptar el Sistema Internacional. Con esto deben aparecer  $c$  y  $G$  explícitamente en nuestras expresiones, y en particular en el hamiltoniano

Todos los términos del hamiltoniano deben tener unidades de energía. Teniendo en cuenta que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{(\text{longitud})^2} \quad \text{y} \quad A_i = \frac{\text{energía}}{\text{carga eléctrica}}$$

es fácil comprobar que el hamiltoniano (I-9) toma la forma

$$H = \frac{p^2}{2m_2} - \left( \frac{e^2 m_2}{\mu} + \frac{G m_2^2 m_1}{\mu} \right) \frac{1}{r} + \frac{m_2 c^2}{2} R_{020m} x^i x^m + \frac{2}{3} c R_{02im} x^i x^m p^i - \frac{e}{c} \left( \frac{A_{ext_1}(0)}{m_1} + \frac{A_{ext_2}(X)}{m_2} \right) p^i \quad (\text{I-9})'$$

Vamos a dividir al hamiltoniano en dos partes de la siguiente manera:

$$H = H_0 + H_I$$

donde

$$H_0 = \frac{p^2}{2m_2} - \left( \frac{e^2 m_2}{\mu} + \frac{G m_2^2 m_1}{\mu} \right) \frac{1}{r}$$

se considera el hamiltoniano base del sistema que va a ser perturbado por

$$H_I = \frac{m_2 c^2}{2} R_{\text{atomo}} X^2 X^m + \frac{2}{3} c R_{\text{atomo}} X^2 X^m p^2 - \frac{e}{c} \left( \frac{A_{\text{ext}}(0)}{m_1} + \frac{A_{\text{ext}}(x)}{m_2} \right) p^2$$

Observamos que  $H_0$  es igual al hamiltoniano del átomo de hidrógeno salvo el factor constante que multiplica a  $\frac{1}{r}$  que difiere por un término debido a que estamos considerando la interacción gravitatoria. Por esto, las funciones de onda del sistema serán las del átomo de hidrógeno con alguna pequeña corrección que veremos en el siguiente capítulo. El hamiltoniano de perturbación  $H_I$  inducirá transiciones de un estado estacionario a otro.

La perturbación  $H_I$  consta de varios términos que representan las interacciones externas al sistema. Como ya habíamos mencionado, estas interacciones consisten en ondas electromagnéticas y gravitatorias planas. Entonces, tenemos que expresar los tensores  $R_{0i0m}$ ,  $R_{0iim}$  y los vectores  $A_{ent_i}(x)$ ,  $A_{ent_i}(0)$  en función de estas ondas planas.

Tanto para la radiación gravitatoria como para la electromagnética, consideraremos pulsos ondulatorios planos y no una onda plana de una sola frecuencia. Es decir, en ambos casos se tratará de una superposición de ondas planas de diferente frecuencia alrededor de una cierta frecuencia central.

Cuando imponemos la norma de Lorentz  $A^\alpha, \alpha = 0$  a las ecuaciones del campo electromagnético, encontramos que éstas tienen la solución

$$A_0 = 0$$

$$A_i = \int d\omega_c A_c(\omega_c) \tilde{z}_i e^{-i\omega_c(t - \hat{n}_c \cdot \vec{r})} \quad (I-10)$$

donde  $A_\alpha = (A_0, A_i)$  es el cuadripotencial electromagnético. Esta solución representa un pulso de ondas electromagnéticas planas en la dirección  $\hat{n}_c$ . De manera análoga, si imponemos a las ecuaciones linealizadas del campo gravitatorio la condición de norma



$$\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0$$

en donde  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} h$  , se obtiene la solución

$$h_{0\mu} = 0$$

$$h_{ij} = \int d\omega_G \left[ A_+(\omega_G) (\vec{E}_+)_{ij} + A_-(\omega_G) (\vec{E}_-)_{ij} \right] e^{i\omega_G \left( t - \frac{\hat{n}_G \cdot \vec{r}}{c} \right)}$$

que representa un pulso de ondas gravitatorias planas en la dirección  $\hat{n}_G$  .

Veamos que es cada una de las cantidades que aparecen en la expresión para estos dos pulsos de ondas planas:  $(\vec{E}_+)_{ij}$  ,  $(\vec{E}_-)_{ij}$  son los tensores de polarización, que son constantes, y  $A_+(\omega_G)$  ,  $A_-(\omega_G)$  son sus respectivas amplitudes.  $\hat{n}_G$  es la dirección de propagación del pulso gravitatorio y también es constante.

$\vec{E}_i$  es el vector de polarización electromagnética que es constante,  $A_e(\omega_e)$  es la amplitud del pulso electromagnético y  $\hat{n}_e$  su dirección de propagación constante.

Para simplificar un poco la expresión del pulso gravitatorio es conveniente definir la amplitud

$$A_G = \left\{ A_+^2 + A_-^2 \right\}^{1/2}$$

y encontrar un tensor de polarización  $(\vec{e})_{ij}$  también constante que está en función de  $(\vec{e}_+)_ij$  y  $(\vec{e}_\times)_ij$ , para obtener

$$h_{0\mu} = 0$$

$$h_{ij} = \int d\omega_e A_e(\omega_e) \vec{e}_{ij} e^{-i\omega_e(t - \frac{\vec{R}_e \cdot \vec{r}}{c})} \quad (\text{I-11})$$

Ahora expresaremos  $R_{020m}$ ,  $R_{02im}$ ,  $A_{ext,i}(x)$  y  $A_{ext,i}(0)$  en función de estos pulsos ondulatorios.

$A_{ext,i}(x)$  se obtiene desarrollando el pulso electromagnético (I-10) en serie de Taylor hasta segundo orden alrededor de  $(\vec{R}_e \cdot \vec{r})$ .

$R_{010m}$  y  $R_{01im}$  se desarrollan según la fórmula de la teoría linealizada de la gravitación (MTW)

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\alpha,\nu\beta} - h_{\mu\beta,\nu\alpha})$$

en donde los tensores métricos se calculan mediante la expresión para el pulso gravitatorio (I-11).

Estas expresiones de los tensores de Riemann y de los vectores electromagnéticos, se sustituyen en el hamiltoniano. (I-9)' para obtener la forma final de este hamiltoniano, con la que trabajaremos en el siguiente capítulo aplicándole la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo.

El resultado de esta sustitución nos da finalmente

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m_2} - \left( \frac{e^2 m_2}{\mu} + \frac{G m_2^2 m_1}{\mu} \right) \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned}
 H_1 = & \int d\omega_e \left\{ \frac{m_2}{4} \omega_e^2 \left[ A_e(\omega_e) \vec{e}_{ij} x^i x^j \right] e^{-i\omega_e t} \right. \\
 & + \frac{\omega_e^2}{3c} \left[ A_e(\omega_e) \vec{e}_{ij} (\hat{n}_e)_m x^i x^m p^j - A_e(\omega_e) \vec{e}_{im} (\hat{n}_e)_j x^i x^m p^j \right] e^{-i\omega_e t} \left. \right\} \\
 & + \int d\omega_e \left[ \frac{-e}{\mu c} A_e(\omega_e) \vec{e} \cdot \vec{p} - \frac{i\omega_e e c A_e(\omega_e) \hat{n}_e \cdot \vec{r}}{c^2 m_1} \vec{e} \cdot \vec{p} \right. \\
 & \left. + \frac{e\omega_e^2}{2m_1 c^3} A_e(\omega_e) (\hat{n}_e \cdot \vec{r})^2 (\vec{e} \cdot \vec{p}) \right] e^{-i\omega_e t} \quad (I-12)
 \end{aligned}$$

CAPITULO II  
 APLICACION DE LA TEORIA DE PERTURBACIONES  
 DEPENDIENTES DEL TIEMPO AL CALCULO DE  
 PROBABILIDADES DE TRANSICION

Aplicaremos la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo al hamiltoniano (I-12) que obtuvimos en el capítulo anterior. Para hacer esto consideraremos, como ya se había mencionado, que el sistema puede estar en cualquiera de los estados estacionarios del hamiltoniano base  $H_0$ , y que las transiciones entre estos estados, además de las espontáneas son las inducidas por el hamiltoniano perturbativo  $H_I$ .

El hamiltoniano base es de la forma

$$H_0 = \frac{p^2}{2m_2} - \frac{C}{r}$$

donde C es una constante. Por lo tanto se trata de un hamiltoniano hidrogenoide y las funciones de onda de sus estados estacionarios tienen la misma forma que las del átomo de hidrógeno salvo por algunas constantes que estarán en función de C.

Antes de continuar, debemos hacer notar que esta constante difiere muy poco de la constante  $e^2$  que aparece en el hamiltoniano del átomo de hidrógeno: La constante C está dada, según la fórmula (I-12) por

$$C = \frac{e^2 m_2}{\mu} + \frac{G m_2^2 m_1}{\mu}$$

pero como la masa reducida para un protón y un electrón es prácticamente igual a la masa del electrón, podemos poner  $m_2 = \mu$  por lo que

$$C = e^2 + G m_2 m_1$$

Al sustituir los valores numéricos de estas cantidades, vemos que el término derecho, que aparece debido a que estamos tomando en cuenta la interacción gravitatoria, resulta ser  $10^{40}$  veces más pequeño que el primer término, por lo que nos queda

$$e^2 \approx C$$

Cuando se encuentran las funciones de estado correspondientes al hamiltoniano  $H_0$  donde se tiene  $\frac{e^2 m_2}{\mu} + \frac{G m_2^2 m_1}{\mu}$  en lugar de  $e^2$ , lo que se afecta es el llamado radio de Bohr que en vez de ser  $a_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_2}$  resulta

$$a = \frac{\hbar^2 \mu}{e^2 m_2^2 + G m_2^3 m_1}$$

Las funciones de onda estacionarias son las del átomo de hidrógeno cambiando  $a_0$  por  $a$  y  $k_0 = \frac{1}{na_0}$  por  $k = \frac{1}{na}$  en donde  $n$  es el número cuántico principal. Es decir

$$\Psi_{nlm} = \frac{(-1)^m}{a^{3/2}} \left\{ \frac{4(n-l-1)!}{n^2(n+l+1)!} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right\}^{1/2} e^{-kr} (2kr)^l \prod_{n-l}^{2l+1} (2kr) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

que ya están normalizadas.

Estamos considerando que las funciones de onda que representan los estados estacionarios del hamiltoniano  $H_0$  son soluciones de la ecuación de Schoedinger del átomo de hidrógeno con las correcciones que acabamos de mencionar. Sería más exacto considerar que la ecuación de movimiento fuera la de Klein-Gordon o la de Dirac en las que están incluidos los aspectos relativistas del problema. Sin embargo consideramos que para este primer estudio es suficiente tomar la ecuación de Schoedinger como ecuación de movimiento, sin dejar de tener en cuenta que esto representa una aproximación mas en nuestra forma de atacar el problema.

Ahora encontraremos la amplitud de probabilidad correspondiente a las transiciones de nuestro sistema entre cualesquiera dos estados estacionarios de  $H_0$  debidas a la perturbación  $H_I$ .

Según la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, estas amplitudes de probabilidad están dadas por (Merzbacher)

$$C_{n'n}(\infty) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n' | H_I | n \rangle e^{i\omega_{n'n}t} dt$$

en donde, para simplificar la notación hemos puesto  $|n\rangle = |n, l, m\rangle = \psi_{n, l, m}$ . La frecuencia angular  $\omega_{n'n}$  está dada por

$$\omega_{n'n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar}$$

$C_{n'n}(\omega)$  significa que hemos esperado un tiempo suficientemente largo para que la perturbación haya desaparecido, es decir hemos considerado  $t = \infty$ .

Estamos usando la notación de Dirac según la cual

$$\langle n' | = \Psi_{n' \ell' m'}^*$$

y

$$\langle n' | H_I | n \rangle = \int \Psi_{n' \ell' m'}^* H_I \Psi_{n \ell m} dV$$

Sustituyendo la expresión para la perturbación  $H_I$  en la expresión para la amplitud de probabilidad, nos queda

$$\begin{aligned} C_{n'n}(\infty) &= \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_e \left[ \frac{m^2}{4} \omega_e^2 A_e(\omega_e) \vec{e}_{\lambda} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \right. \\ &\quad + \frac{\omega_e^2}{3c} (A_e(\omega_e) \vec{e}_{\lambda} (\hat{n}_e)_m \langle n' | x^i x^m p^j | n \rangle \\ &\quad \left. - A_e(\omega_e) \vec{e}_{\lambda} (\hat{n}_e)_i \langle n' | x^i x^m p^j | n \rangle \right] e^{-i\omega_e t} dt e^{i\omega_{n'n} t} \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_e \left[ \frac{-e}{\mu c} A_e(\omega_e) \langle n' | \vec{e} \cdot \vec{p} | n \rangle \right. \\ &\quad - \frac{\omega_e}{c^2} \frac{e}{m_a} A_e(\omega_e) \langle n' | \hat{n}_e \cdot \vec{r} \vec{e} \cdot \vec{p} | n \rangle \\ &\quad \left. + \frac{e \omega_e^2}{2 m_e c^3} A_e(\omega_e) \langle n' | (\vec{n}_e \cdot \vec{r}) | n \rangle \right] e^{-i\omega_e t} dt e^{i\omega_{n'n} t} \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de la función delta

$$\delta(\omega_{n'n} - \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_{n'n} - \omega)t} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \delta(\omega_{n'n} - \omega) d\omega = F(\omega_{n'n})$$

tanto a la integral sobre  $d\omega_0$  como a la integral sobre  $d\omega_e$  podemos transformar la expresión anterior como sigue:

$$\begin{aligned}
 c_{n'n}(\omega) = & -\frac{i\pi m_a}{2\hbar} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{E}_{ij} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \\
 & - \frac{2\pi i}{3\hbar c} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{E}_{ii} (\hat{n}_e)_m \langle n' | x^i x^m p^i | n \rangle \\
 & + \frac{2\pi i}{3\hbar c} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{E}_{im} (\hat{n}_e)_i \langle n' | x^i x^m p^i | n \rangle \\
 & + \frac{2\pi i e}{\hbar \mu c} A_G(\omega_{n'n}) e^i \langle n' | p^i | n \rangle \\
 & - \frac{2\pi i e \omega_{n'n}}{\hbar c^2 m_i} (\hat{n}_e)_i (\vec{E})_j \langle n' | x^i p^j | n \rangle \\
 & - \frac{\pi_i e}{\hbar c^2 m_i} \omega_{n'n}^2 A_e(\omega_{n'n}) (\hat{n}_e)_i (\hat{n}_e)_j (\vec{E})_k \langle n' | x^i x^j p^k | n \rangle
 \end{aligned}$$

De los seis términos de esta expresión, vamos a despreciar el segundo, el tercero y el sexto, que son octupolares y por lo tanto de menor orden de magnitud que los demás. Para ver esto podemos estimar el cociente de el segundo término con el primero: si aproximamos  $\langle n' | x^i x^j | n \rangle \sim a^2$  y  $\langle n' | x^i p^j | n \rangle \sim a$  donde  $a$  es el radio de Bohr, resulta

$$\frac{\frac{2\pi i}{3\hbar c} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{E}_{ii} (\hat{n}_e)_m \langle n' | x^i x^m p^i | n \rangle}{\frac{i\pi m_a}{2\hbar} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{E}_{ij} \langle n' | x^i x^j | n \rangle} \sim \frac{\langle p \rangle}{m_a c}$$

usando el resultado  $\langle n' | p | n \rangle = i m_a \omega_{n'n} \langle n' | x | n \rangle$  tenemos



$$\frac{\langle P \rangle}{m_2 c} \sim \frac{\mu \omega_{nn} a}{m_2 c} \sim \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{m_2}{\mu} \right) \sim \alpha = \frac{1}{137.037}$$

lo cual nos dice que el segundo término es mas de cien veces menor que el primero por lo que podemos despreciarlo. De manera análoga podemos estimar el cociente de el tercer término con el primero y el del sexto con el quinto, para concluir que también podemos despreciar el tercero y el sexto términos.

Tomando en cuenta esto, la expresión para la amplitud de probabilidad se reduce a tres términos que podemos identificar de la siguiente manera:

$$C_{n'n}(\infty) = \frac{-i\pi m_2}{2\hbar} \omega_{n'n}^2 A_c(\omega_{n'n}) \vec{e}_{ij} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \quad \text{cuadrupolar gravitatorio}$$

$$+ \frac{2\pi i e}{\hbar \mu c} A_c(\omega_{n'n}) (\vec{e})_i \langle n' | p^i | n \rangle \quad \text{dipolar eléctrica}$$

$$- \frac{2\pi i e}{\hbar c^2 m_2} \omega_{nn} (\hat{n}_c)_i (\vec{e})_j \langle n' | x^i p^j | n \rangle \quad \text{cuadrupolar electromagnético}$$

Vamos a dividir al término cuadrupolar electromagnético en dos partes, usando

$$x^i p^j = \frac{1}{2} (x^i p^j + p^j x^i) + \frac{1}{2} (x^i p^j - p^j x^i)$$

Además sabemos que  $p^i = m_2 \dot{x}^i = \frac{i}{\hbar} m_2 (x^i H_0 - H_0 x^i)$ , y como  $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$ ,  $H_0 |n'\rangle = E_{n'} |n'\rangle$  resulta

$$\begin{aligned} \langle n' | x^i p^j | n \rangle &= \frac{-i m_2}{2 \hbar} (E_n - E_{n'}) \langle n' | x^i x^j | n \rangle - \frac{1}{2} (\langle n' | x^i p^j - p^i x^j | n \rangle) \\ &= \frac{i m_2}{2} \omega_{n'n} \langle n' | x^i x^j | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n' | x^i p^j - p^i x^j | n \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, por la definición de momento angular se tiene

$$x^i p^j - p^i x^j = \epsilon^{ijk} L_k$$

por lo que al sustituir en la expresión anterior podemos escribir

$$\langle n' | x^i p^j | n \rangle = \frac{i m_2}{2} \omega_{n'n} \langle n' | x^i x^j | n \rangle + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \langle n' | L_k | n \rangle$$

La amplitud de probabilidad que resulta de dividir este término en dos partes es

$$\begin{aligned} C_{n'n}(\infty) &= \frac{-i \hbar m_2}{2 \hbar} \omega_{n'n}^2 A_c(\omega_{n'n}) \langle n' | x^i x^m | n \rangle \vec{e}_{im} \\ &+ \frac{2 \hbar \omega_{n'n}}{\hbar \mu c} A_c(\omega_{n'n}) (\vec{e})_i \langle n' | p^i | n \rangle \\ &- \frac{\hbar \omega_{n'n}}{\hbar c^2} \omega_{n'n}^2 A_c(\omega_{n'n}) (\hat{n}_e)_i (\vec{e})_j \langle n' | x^i x^j | n \rangle \\ &- \frac{\hbar \omega_{n'n}}{\hbar c^2 m_2} (\hat{n}_e)_i (\vec{e})_j \epsilon^{ijk} \langle n' | L_k | n \rangle \end{aligned}$$

Considerando que  $P^i = [x^i, H]$ , y tomando en cuenta la definición del producto vectorial en términos del tensor totalmente antisimétrico de tercer orden, podemos escribir la expresión anterior así:

$$\begin{aligned}
 C_{n'n}(\infty) &= \frac{-i\pi m_2}{2\hbar} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{e}_{2m} \langle n' | x^i x^m | n \rangle \\
 &- \frac{2\pi i \omega_{n'n} e m_2}{\hbar c \mu} A_e(\omega_{n'n}) (\vec{e})_i \langle n' | x^i | n \rangle \\
 &- \frac{\pi i e \omega_{n'n}^2}{\hbar c^2} A_e(\omega_{n'n}) (\hat{n}_e)_i (\vec{e})_j \langle n' | x^i x^j | n \rangle \\
 &- \frac{\pi i e}{\hbar c^2 m_2} \omega_{n'n} A_e(\omega_{n'n}) (\hat{n}_e \times \vec{e})_i \langle n' | L_k | n \rangle
 \end{aligned}$$

Este último término es el cuadrupolar magnético y también vamos a despreciarlo ya que en general es mucho menor que el término cuadrupolar eléctrico (Bethe-Jackiw).

Finalmente, la expresión para la amplitud de probabilidad es

$$\begin{aligned}
 C_{n'n}(\infty) &= \frac{-\pi i m_2}{2\hbar} \omega_{n'n}^2 A_G(\omega_{n'n}) \vec{e}_{2m} \langle n' | x^i x^m | n \rangle \\
 &- \frac{2\pi i e m_2}{\hbar c \mu} \omega_{n'n} A_e(\omega_{n'n}) (\vec{e})_i \langle n' | x^i | n \rangle \\
 &- \frac{\pi i e}{\hbar c^2} \omega_{n'n}^2 A_e(\omega_{n'n}) (\hat{n}_e)_i (\vec{e})_j \langle n' | x^i x^j | n \rangle
 \end{aligned}$$

La cantidad que nos interesa por tener significado físico es el cuadrado del módulo de la amplitud de probabilidad, que representa la probabilidad de transición entre los estados  $n$  y  $n'$ :

$$|C_{n'n}(\infty)|^2 = C_{n'n}(\infty) C_{n'n}^*(\infty),$$

$$\begin{aligned}
 |C_{n'n}(\infty)|^2 &= \frac{\pi^2 m^2}{4 \hbar^4} \omega_{n'n}^4 A_G^2 (\omega_{n'n}) \vec{E}_{em} \vec{E}_{ej} \langle n' | x^m | n \rangle \langle n | x^j | n' \rangle \\
 &+ \frac{4\pi^2 e^2 m^2}{\hbar^2 c^2 \mu^2} \omega_{n'n}^4 A_c^2 (\omega_{n'n}) (\vec{E})_i (\vec{E})_j \langle n' | x^i | n \rangle \langle n | x^j | n' \rangle \\
 &+ \frac{\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^4} \omega_{n'n}^4 A_c^2 (\omega_{n'n}) (\hat{n}_e)_i (\vec{E})_j (\hat{n}_e)_k (\vec{E})_m \langle n' | x^i | n \rangle \langle n | x^k x^m | n' \rangle \\
 &+ \text{Términos cruzados}
 \end{aligned}
 \tag{II-1}$$

Los términos cruzados no contribuyen por las razones que explicaremos a continuación; por eso no los escribimos.

Como nuestro sistema no consiste de un solo átomo, sino de un gas en el que no podemos controlar la orientación individual de cada átomo respecto a los tensores y vectores  $\vec{E}_{ij}$ ,  $\vec{E}_{ij}$ ,  $\hat{n}_e$  y  $\hat{n}_e$ , podemos considerar que están orientados completamente al azar de tal manera que todas las orientaciones son igualmente posibles.

Tenemos entonces que obtener un promedio de la probabilidad de transición sobre todas las orientaciones posibles de los átomos. Matemáticamente esto es equivalente a considerar un átomo fijo y promediar sobre todas las direcciones posibles

de incidencia de las radiaciones electromagnética y gravitatoria. Como las direcciones de incidencia de estas dos radiaciones son independientes, podemos obtener el promedio sobre cada una de ellas por separado. Para hacer estos promedios, debemos considerar el hecho de que tanto para las ondas electromagnéticas como para las gravitatorias, el vector (o el tensor) de polarización es perpendicular a la dirección de propagación de las ondas, es decir, que se cumplen las relaciones

$$\vec{e}_i \hat{n}^i = 0 \quad , \quad \hat{e}_{ij} \hat{n}^j = 0$$

Por eso, al promediar basta que lo hagamos sobre todas las polarizaciones y habremos barrido simultáneamente todas las direcciones de propagación.

El promedio que nos interesa se obtiene de la siguiente manera:

$$\overline{|C_{mn}(\omega)|^2} = \frac{1}{4\pi} \int |C_{mn}(\omega)|^2 d\Omega$$

en donde  $d\Omega$  es la diferencial de volumen en un espacio de direcciones vectoriales o tensoriales. Como tanto los vectores como los tensores de polarización son unitarios, estas integrales se realizan sobre toda la esfera unitaria.

Vamos a distinguir a  $d\Omega$  como  $d\Omega_{\vec{e}_i}$  o  $d\Omega_{\hat{e}_{ij}}$ ; con lo cual sabemos si el término de  $|C_{mn}(\omega)|^2$  que estamos promediando es electromagnético o gravitatorio respectivamente.

Al hacer el promedio de los términos cruzados debemos integrar tanto sobre  $d\Omega_{\vec{e}_i}$  como sobre  $d\Omega_{\vec{e}_j}$ , pero como ya se dijo esto puede hacerse independientemente. En este caso, las integrales que hay que hacer son las siguientes

$$\int \vec{e}_i d\Omega_{\vec{e}_i} , \int (\hat{n}_{\vec{e}_i})_j \vec{e}_j \vec{e}_k d\Omega_{\vec{e}_i} , \int \vec{e}_j d\Omega_{\vec{e}_j}$$

o productos de estas integrales. Por argumentos de simetría puede verse que estas tres integrales son cero, cada vector, combinación de vectores o tensores que aparece en el integrando, tiene su inverso geométrico del otro lado de la esfera de integración, que lo cancela y por lo tanto al integrar sobre la esfera completa el resultado es cero en todos los casos. Por esta razón, al promediar  $|C_{n'n}(\infty)|^2$  sobre todas las polarizaciones, los términos cruzados no contribuyen.

El promedio de los tres términos restantes en la ecuación (II-1) se hace detalladamente en el apéndice A. El resultado final es

$$\begin{aligned} \overline{|C_{n'n}(\infty)|^2} &= \frac{9\pi^2 m_a^2}{10\hbar^2} \omega_{n'n}^4 |A_e(\omega_{n'n})|^2 | \langle r^2 \rangle |_{n'n}^2 \\ &+ \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2 c^2} \left(\frac{m_a}{\mu}\right)^2 \omega_{n'n}^2 |A_e(\omega_{n'n})|^2 | \langle r^2 \rangle |_{n'n}^2 \\ &+ \frac{9\pi^2 e^2}{10c^4 \hbar^2} \omega_{n'n}^4 |A_e(\omega_{n'n})|^2 | \langle r^2 \rangle |_{n'n}^2 \quad \text{(II-2)} \end{aligned}$$

en donde hemos introducido la notación

$$|\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2 = [\langle n' | x^2 x' | n \rangle \langle n | x^2 x' | n' \rangle - \frac{1}{3} |\langle n' | r^2 | n \rangle|^2]$$

$$|\langle \vec{r} \rangle|_{n'n}^2 = |\langle n' | \vec{r} | n \rangle|^2$$

A continuación vamos a encontrar una expresión para la ecuación (II-1) en términos de las densidades de energía de las radiaciones electromagnética y gravitatoria que denotaremos por  $U_e(\omega)$  y  $U_g(\omega)$  respectivamente. De esta manera podremos relacionar las probabilidades de transición  $|\langle C_{n'n}(\omega) \rangle|^2$  con los coeficientes de Einstein de emisión estimulada y absorción. Para encontrar esta expresión, hay que ver como están relacionadas las amplitudes  $A_e(\omega)$  y  $A_g(\omega)$  con las densidades de energía de las radiaciones.

Para encontrar esta relación, veremos primero como depende la amplitud de radiación de la intensidad  $I(\omega)$  tanto para las ondas electromagnéticas como para las gravitatorias.

Para la radiación electromagnética la energía por unidad de área en las frecuencias entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$  está dada por (Merzbacher)

$$I_e(\omega) = \frac{\omega^2}{c} |A_e(\omega)|^2 \quad (\text{II-3})$$

Para encontrar una expresión análoga en el caso gravitatorio, partiremos de la expresión para el flujo de energía de una onda plana, es decir, la energía por unidad de área que

está dada por

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} T^0_i n^i dx^0 = c \int_{-\infty}^{\infty} T^0_i n^i dt \quad (\text{II-4})$$

en donde el tensor  $T_{\mu\nu}$  puede calcularse mediante la fórmula (Landau-Lifshitz)

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle h_{\alpha\beta,\mu} \overset{\leftrightarrow}{h}{}^{\alpha\beta}{}_{,\nu} \rangle$$

Los paréntesis  $\langle \rangle$  representan un promedio sobre varias longitudes de onda.

Tomando en cuenta las ecuaciones (I-11) y recordando que

$$T_{0i} = -T^0_i, \quad h_{jk} = h^{jk}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} T^0_i &= -\frac{c^4}{16\pi G} \langle h_{jk,0} h^{jk}{}_{,i} \rangle \\ &= -\frac{c^4}{16\pi G} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A_G(\omega) A_G(\omega') \left(\frac{-i\omega}{c}\right) \left(\frac{i\omega'}{c}\right) e^{-i(\omega+\omega')(t-\frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c})} e_{jk} e^{ik} \right\rangle \\ &= -\frac{c^2}{16\pi G} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A_G(\omega) A_G(\omega') \omega \omega' e_{jk} e^{ik} e^{-i(\omega+\omega')(t-\frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c})} n_i \right\rangle \end{aligned}$$



Como para el tensor de polarización se cumple la relación

$$e_{jk} e^{jk} = 2$$

se llega a

$$T^{\circ}_{ij} = -\frac{c^2}{8\pi G} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A_G(\omega) A_G(\omega') \omega \omega' e^{-i(\omega+\omega')(t-\frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c}} n_i \right\rangle$$

El promedio  $\langle \rangle$  sobre varias longitudes de onda, se usa comunmente cuando se quiere calcular la energía y el momento que transporta una onda. Resulta ser independiente del número de longitudes de onda sobre el que se promedia siempre y cuando este número sea suficientemente grande. Al efectuar el promedio, lo único que cambia es que aparece un factor constante de un medio. Es decir  $\langle AB \rangle = \frac{1}{2} AB$ .

Entonces podemos poner

$$T^{\circ}_{ij} = -\frac{1}{2} \times \frac{c^2}{8\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A_G(\omega) A_G(\omega') \omega \omega' e^{-i(\omega+\omega')(t-\frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c})} n_i n_j$$

Sustituyendo esta expresión en (II-4) se obtiene

$$E = -\frac{1}{2} \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A_G(\omega) A_G(\omega') \omega \omega' e^{-i(\omega+\omega')(t-\frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c})} n_i n_j \right] dt$$

La integral sobre dt resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt = 2\pi \delta(\omega+\omega')$$

Además sabemos que  $n_i n_i^* = 1$  con lo que podemos escribir

$$\mathcal{E} = \frac{c^3}{8G} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A_G(\omega) A_G(\omega') \omega \omega' e^{i(\omega+\omega') \frac{\pi}{c} z} \delta(\omega+\omega')$$

Por las propiedades de la función delta, la integración sobre  $d\omega'$  resulta en sustituir  $\omega'$  por  $-\omega$ . Es decir

$$\mathcal{E} = \frac{c^3}{8G} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_G(\omega) A_G(-\omega) (\omega)(-\omega) = \frac{c^3}{8G} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 A_G(\omega) A_G(-\omega) d\omega$$

La amplitud  $A_G(\omega)$  debe cumplir la propiedad

$$A_G(-\omega) = A_G^*(\omega)$$

por lo que obtenemos

$$\mathcal{E} = \frac{c^3}{8G} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |A_G(\omega)|^2 d\omega = \frac{c^3}{4G} \int_0^{\infty} \omega^2 |A_G(\omega)|^2 d\omega$$

ya que el integrando es una función par.

Sabemos que el flujo de energía debe estar dado por la expresión

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} I_G(\omega) d\omega$$

por lo que podemos concluir que

$$I_G(\omega) = \frac{c^3}{4G} \omega^2 |A_G(\omega)|^2 \quad (\text{II-5})$$

Sustituyendo las expresiones (II-3) y (II-5) en (II-2) obtenemos las probabilidades de transición en función de las intensidades, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |C_{nn}(\infty)|^2 &= \frac{2\pi^2 m_2^2 G \omega_{nn}^2}{5 \hbar^2 c^3} |\langle r^2 \rangle|_{nn}^2 I_G(\omega_{nn}) \\ &+ \frac{4\pi^2 e^2}{3 \hbar^2 c} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 |\langle \vec{r} \rangle|_{nn}^2 I_e(\omega_{nn}) \\ &+ \frac{\pi^2 e^2}{10 \hbar^2 c^3} \omega_{nn}^2 |\langle r^2 \rangle|_{nn}^2 I_e(\omega_{nn}) \end{aligned}$$

Resulta conveniente expresar esta ecuación en términos de la constante de estructura fina, que es una constante adimensional dada por

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137.037}$$

En términos de esta constante resulta

$$\begin{aligned} |C_{n'n}(\infty)|^2 &= \frac{2\pi^2 m^2 G \omega_{n'n}^2}{5\hbar^2 c^3} |\langle r^2 \rangle|^2 I_G(\omega_{n'n}) \\ &+ \frac{4\pi^2 \alpha}{3\hbar} \left(\frac{m^2}{\mu}\right)^2 |\langle \vec{r} \rangle|^2 I_n I_e(\omega_{n'n}) \\ &+ \frac{\pi^2 \alpha}{10\hbar c^2} \omega_{n'n}^2 |\langle r^2 \rangle|^2 I_n I_e(\omega_{n'n}) \end{aligned}$$

Ahora introducimos el concepto de velocidad de transición que es la probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra la transición del estado  $n$  al estado  $n'$ . Esta velocidad de transición está dada por la probabilidad de transición  $|C_{n'n}(\infty)|^2$  multiplicada por el número de pulsos por unidad de tiempo de las ondas incidentes. Es decir, llamando  $P_{n'n}$  a la velocidad de transición y  $n$  al número de pulsos por segundo:

$$P_{n'n} = n |C_{n'n}(\infty)|^2$$

Por supuesto que  $n$  no tiene porque ser la misma para la parte electromagnética que para la gravitatoria de la expresión para  $|C_{n'n}(\infty)|^2$ . Por eso las distinguiremos mediante un subíndice. La expresión para las velocidades de transición queda, combinando la expresión para las probabilidades de transición con la expresión anterior, como

$$\begin{aligned}
P_{n'n} &= \frac{2\pi^2 m_2^2 G}{5 \hbar^2 c^3} \omega_{n'n}^2 \langle r^2 \rangle |f_{n'n}|^2 n_e I_e(\omega_{n'n}) \\
&+ \frac{4\pi^2 \alpha}{3 \hbar} \left(\frac{m_2}{\mu}\right)^2 |\langle \vec{r} \rangle|^2 |f_{n'n}|^2 n_e I_e(\omega_{n'n}) \\
&+ \frac{\pi^2 \alpha}{10 \hbar c^2} \omega_{n'n}^2 \langle r^2 \rangle |f_{n'n}|^2 n_e I_e(\omega_{n'n}) \quad (\text{II-6})
\end{aligned}$$

Por otra parte, existe una relación entre la intensidad de energía  $I(\omega)$  de la radiación y su densidad de energía  $U(\omega)$ , que es la energía por unidad de volumen en las frecuencias comprendidas entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$ . Esta relación está dada por (Merzbacher)

$$nI(\omega) = cU(\omega)$$

Mediante esta relación, ya podemos expresar la ecuación (II-6) en función de las densidades de energía electromagnética y gravitatoria  $U_e(\omega)$  y  $U_g(\omega)$ . El resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
P_{n'n} = & \frac{2\pi^2 m^2 G}{5\hbar^2 c^2} \omega_{n'n}^2 |\langle r^2 \rangle|_{n'n} U_G(\omega_{n'n}) \\
& + \frac{4\pi^2 e \omega}{3\hbar} \left( \frac{m_e}{\mu} \right)^2 |\langle \vec{r} \rangle|_{n'n}^2 U_E(\omega_{n'n}) \\
& + \frac{\pi^2 e}{10\hbar c} \omega_{n'n}^2 |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2 U_E(\omega_{n'n}) \quad (\text{II-7})
\end{aligned}$$

Como ya mencionamos,  $P_{n'n}$  es la probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra la transición de  $n'$  a  $n$ . Esta probabilidad consta de varias partes como puede verse en la expresión (II-7). Una de ellas es la gravitatoria y las otras dos son electromagnéticas. Esto se interpreta como sigue. Hay una cierta probabilidad de que la transición ocurra mediante la emisión o absorción de radiación gravitatoria representada por el primer término en (II-7). Los otros dos términos combinados representan la probabilidad de que la transición se lleve a cabo mediante la emisión o absorción de radiación electromagnética. El que se trate de emisión o absorción de cualquiera de estas radiaciones depende de si la transición se lleva a cabo de un nivel de mayor energía a otro de menor energía o viceversa.

Ambas probabilidades por unidad de tiempo dependen de la

densidad de energía correspondiente de la radiación incidente. Por eso es conveniente definir unas cantidades que son independientes de la densidad de energía y que por lo tanto podemos considerarlas como características del átomo. Estas cantidades las definimos mediante la relación

$$P_{n'n} = B_{n'n} U(\omega)$$

Observando la ecuación (II-7) y considerando por separado la parte electromagnética y la gravitatoria, resulta

$$\begin{aligned} B_{n'n}^e &= \frac{2\pi^2 m_e^2 G}{5\hbar^2 c^2} \omega_{n'n}^2 \langle r^2 \rangle_{n'n}^2 \\ B_{n'n}^g &= \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar} \left(\frac{m^2}{\mu}\right)^2 \langle \vec{r} \rangle_{n'n}^2 \\ &\quad + \frac{\pi^2 e^2}{10\hbar c} \omega_{n'n}^2 \langle r^2 \rangle_{n'n}^2 \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

Estas cantidades son algunos de los coeficientes de Einstein de los que hablaremos en el siguiente capítulo.

Antes de pasar a lo siguiente debemos aclarar que el factor  $\left(\frac{m_e}{\mu}\right)^2$  que aparece en el término dipolar eléctrico de las expresiones (II-8) no aparece en las expresiones comunes para este término. Sin embargo, no nos lo pudimos quitar de encima. Si desde el principio hubiéramos adoptado el sistema de coorde-

nadas del centro de masa, seguramente este factor no aparecería. Nuestro sistema de coordenadas tiene su origen en la partícula de masa  $m_1$  porque así se creyó conveniente en un principio, ya que en la relatividad general no ayuda en nada el concepto de centro de masa. Pero el modelo se ha simplificado mucho de tal manera que ahora pensamos que si es posible y conveniente considerar este sistema de coordenadas de centro de masa en nuestro problema. Esto no se hará en este trabajo ya que hemos empezado de otra manera y así vamos a continuar, pero para los próximos estudios de este problema si tomaremos en cuenta lo anterior.

De cualquier manera, este factor que nos está estorbando, si consideramos las masas del protón y del electrón, resulta

$$\left(\frac{m^2}{\mu}\right)^2 = 1.001 \approx 1$$

que es un valor muy cercano a la unidad. De todas maneras, vamos a conservar este término en nuestras expresiones.



## CAPITULO III

### ACCION "LASER"

En este capítulo estudiaremos las condiciones en que podría obtenerse amplificación de radiación gravitatoria en un medio activo consistente de un gas de átomos de hidrógeno irradiado por ondas electromagnéticas y gravitatorias planas.

Ya estudiamos en los dos capítulos anteriores el átomo de hidrógeno tal y como nos interesa, introduciendo algunos aspectos de la interacción gravitatoria entre el protón y el electrón, y entre el átomo y la radiación gravitatoria externa. Se obtuvieron las velocidades de transición del átomo y con ellas definimos dos coeficientes de Einstein (fórmulas II-8), uno correspondiente a la absorción o a la emisión estimulada mediante la interacción con la radiación electromagnética, y el otro a la gravitatoria.

Con estos resultados haremos ahora un análisis de la absorción y emisión de radiación en este sistema, considerando a la radiación electromagnética como la que excita al medio activo y a la radiación gravitatoria como la que podría amplificarse al atravesar el medio activo excitado.

#### a) EMISION Y ABSORCION DE RADIACION

En el capítulo anterior encontramos una expresión para las velocidades de transición de nuestro sistema (ecuación II-7). Convendremos a partir de este momento, que siempre que tengamos

dos estados  $n$  y  $n'$  del átomo,  $n'$  corresponderá al de mayor energía. De acuerdo con esto,  $P_{nn'}$ , es la probabilidad por unidad de tiempo de que el átomo pase de un estado  $n$  a otro estado  $n'$  mediante la absorción de radiación.

Se define el coeficiente de absorción de Einstein mediante la expresión

$$P_{nn'} = B_{nn'} \nu(\omega)$$

De esta manera tenemos un parámetro  $B_{nn'}$ , relacionado con la probabilidad de transición, que es independiente de la radiación externa al átomo. De acuerdo con la expresión (II-7), en nuestro caso tendremos dos coeficientes de absorción: uno correspondiente a la absorción de radiación electromagnética que denotamos  $B_{nn'}^e$ , y el otro correspondiente a absorción de radiación gravitatoria al que llamaremos  $B_{nn'}^g$ .

El átomo también puede emitir energía pasando de un nivel  $n'$  a otro inferior  $n$ , sólo que en este caso puede hacerlo mediante dos procesos diferentes:

Uno es la emisión espontánea, mediante la cual el átomo decae del estado  $n'$  al  $n$  emitiendo radiación, sin causa aparente, es decir independientemente de la radiación externa. Llamaremos  $A_{n',n}$  a la probabilidad por unidad de tiempo de que se dé este proceso entre los estados  $n'$  y  $n$ . Al igual que en el caso anterior, tendremos dos coeficientes,  $A_{n',n}^e$  y  $A_{n',n}^g$  que corresponden a decaimiento espontáneo mediante radiación de energía electromagnética o gravitatoria respectivamente.

El otro proceso es la emisión estimulada o inducida de radiación y consiste en que el átomo decae del nivel  $n'$  al  $n$  por la presencia de la radiación externa. Es una especie de resonancia con esta radiación externa, cuya frecuencia debe coincidir con la frecuencia correspondiente al cambio de niveles del átomo que es

$$\omega_{n',n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar}$$

La probabilidad de transición por unidad de tiempo en el caso de la emisión de radiación, estará entonces dividida en dos términos, uno correspondiente a la emisión espontánea y otro a la estimulada. Este último lo expresaremos, análogamente al caso de la absorción, en función de un coeficiente  $B_{n',n}$  ya que también depende de la radiación externa. Podemos escribir

$$P_{n',n} = A_{n',n} + B_{n',n} U(\omega)$$

recordando siempre, que tanto  $A_{n',n}$  como  $B_{n',n}$  pueden estar asociados a emisión de radiación electromagnética o gravitatoria.

En resumen, tenemos tres coeficientes de Einstein para cada tipo de radiación: uno de absorción, uno de emisión espontánea y otro de emisión estimulada. De acuerdo con la notación que hemos empleado, tenemos

$B_{n'n}^e$	$B_{n'n}^e$	$A_{n'n}^e$	$n' > n$
$B_{n'n}^e$	$B_{n'n}^e$	$A_{n'n}^e$	
Absorción	Emisión Estimulada	Emisión Espontánea	

Estos coeficientes no son independientes, y encontraremos la manera en que se relacionan unos con otros.

Los coeficientes de Einstein de emisión y absorción de radiación electromagnética, están relacionados de la siguiente manera

$$g_n B_{n'n}^e = g_{n'} B_{n'n}^e \quad , \quad A_{n'n}^e = \frac{h \omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (\text{III-1})$$

en donde  $g_n$  y  $g_{n'}$  son los grados de degeneración de los correspondientes niveles de energía.

Estas relaciones se obtienen analizando la radiación electromagnética en una cavidad en equilibrio con las paredes de ésta, y usando el hecho de que en este caso se cumple la ley de radiación de Planck. A las fórmulas (III-1) se les conoce como relaciones de Einstein.

Para encontrar las relaciones que hay entre los coeficientes de absorción y emisión de radiación gravitatoria de Einstein, haremos algunas consideraciones.

Podemos considerar a la radiación gravitatoria como formada

por gravitones que son partículas de masa cero que viajan a la velocidad de la luz y tienen espín 2. Por otro lado sabemos que la radiación gravitatoria tiene dos estados independientes de polarización al igual que la radiación electromagnética. Vemos entonces que la única diferencia que hay entre los fotones y los gravitones es el espín.

Cuando se obtiene la ley de distribución de Planck para la radiación electromagnética, se analiza el problema de un gas de fotones en equilibrio y en ningún momento se toma en cuenta el espín de los fotones. Sin embargo, juega un papel fundamental el hecho de que la radiación electromagnética tiene dos estados independientes de polarización.

Por todo lo anterior podemos concluir que para un gas de gravitones, la ley de distribución a la que se llegaría sería la ley de distribución de Planck.

Con base en esto, podemos concluir que los coeficientes de Einstein para el caso gravitatorio están relacionados entre sí mediante las mismas fórmulas (III-1), es decir, que también se cumplen las relaciones de Einstein

$$g_n B_{nn}^e = g_n B_{nn}^g \quad , \quad A_{nn}^g = \frac{h \omega^3}{\pi^2 c^3} B_{nn}^g \quad (\text{III-2})$$

En el capítulo anterior encontramos expresiones para los coeficientes  $B_{nn}^e$  y  $B_{nn}^g$ . Podemos encontrar los restantes usando las relaciones de Einstein. Las expresiones para todos los coeficientes de Einstein son

$$B_{n'n'}^G = \frac{24\pi^2 m_0^2 G}{5h^2 c^2} \omega_{n'n'}^2 |\langle r^2 \rangle|_{n'n'}$$

$$B_{n'n}^G = \frac{g_n}{g_{n'}} B_{n'n'}^G$$

$$A_{n'n}^G = \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{2m_0^2 G}{5hc^5} \omega_{n'n}^5 |\langle r^2 \rangle|_{n'n}$$

$$B_{n'n'}^E = \frac{4\pi^2 c \alpha}{3h} \left(\frac{m_0}{\mu}\right)^2 |\langle F \rangle|_{n'n'}^2 + \frac{\pi^2 \alpha}{10hc} \omega_{n'n}^2 |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2$$

$$B_{n'n}^E = \frac{g_n}{g_{n'}} B_{n'n'}^E$$

$$A_{n'n}^E = \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{4\alpha}{3c^2} \omega_{n'n}^3 \left(\frac{m_0}{\mu}\right)^2 |\langle F \rangle|_{n'n'}^2 + \frac{\alpha}{10c^4} \omega_{n'n}^5 |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2 \quad (\text{III-3})$$

#### b) CONDICION DE SCHAWLOW-TOWNES

En esta sección estudiaremos en que condiciones podría obtenerse amplificación de la radiación gravitatoria, es decir, que es lo que debe ocurrir en nuestro sistema para que la radiación gravitatoria que lo atraviesa salga de él con mayor intensidad, o sea que se haya amplificado. Esto sucede cuando la radiación gravitatoria, al pasar por el gas de átomos de hidrógeno, se encuentra con unas condiciones tales que interacciona con los átomos estimulando más radiación gravitatoria. A las condiciones

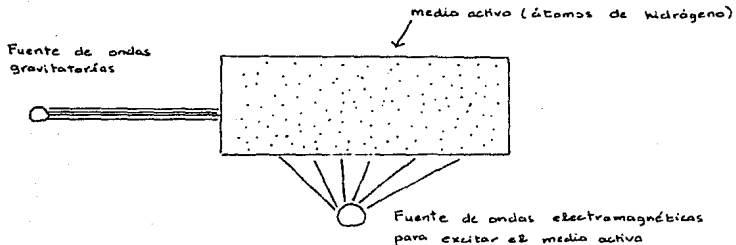
en las que debe de estar el gas para que esto suceda se le llama inversión de población, y consiste a grandes rasgos en que debe haber mas átomos en un cierto nivel excitado que en el estado base. Como ya mencionamos, además de tener inversión de población, para que haya estimulación de radiación, la frecuencia de la radiación incidente debe coincidir con la frecuencia  $\omega_0$ , correspondiente a la diferencia de energías del estado excitado y el estado base. En estas condiciones sería más la radiación estimulada que la absorbida. Lograr esta inversión de población es el problema central que se presenta en la construcción de láseres y máseres, así como también lo será para nosotros su estudio teórico.

Nuestro estudio concluirá con el establecimiento de una condición mínima para que haya inversión de población. A esta condición se le llama generalmente condición umbral o condición de Schawlow-Townes.

Para encontrar nuestra condición de Schawlow-Townes, lo haremos mediante un paralelismo con la manera en que se encuentra esta condición para un láser normal (Lengyel), introduciendo las características particulares de nuestro problema.

Como ya se ha mencionado, nuestro sistema consiste en un gas de átomos de Hidrógeno, que es nuestro medio activo, excitado por ondas electromagnéticas planas que serán las encargadas de excitar a los átomos tratando de producir y mantener la inversión de población. Además pasará a través del gas radiación gravitatoria que podrá amplificarse al interactuar con los átomos, si hay una inversión de población adecuada.

Esquemáticamente, podemos representar nuestro sistema de la siguiente manera



Empezaremos analizando lo que le sucede a la radiación gravitatoria al atravesar una placa de medio activo de espesor  $x$ . Si la radiación tiene una intensidad inicial  $I_{0G}$ , supondremos que el decaimiento de esta intensidad por absorción del medio es proporcional a  $I_{0G} dx$ , por lo que podemos escribir

$$I_{\omega_G} = I_{0G} e^{-k(\omega)x} \quad (\text{III-4})$$

donde  $k(\omega)$  es el coeficiente de absorción, que por supuesto depende de la frecuencia de la radiación, es decir, que el medio absorbe más unas frecuencias que otras.

Si  $k(\omega)$  resulta negativo, significa que la radiación en vez de disiparse, aumenta de intensidad al atravesar el medio, y hablamos entonces de un coeficiente de amplificación que



definimos como

$$\alpha(\omega) = -K(\omega) \quad (\text{III-5})$$

Nos fijaremos en dos niveles de energía de los átomos de Hidrógeno  $n$  y  $n'$  y veremos la relación que existe entre la intensidad de la onda gravitatoria incidente y las velocidades de transición entre estos dos niveles.

Supongamos que tenemos  $N_n$  átomos por unidad de volumen en el nivel  $n$ , de los cuales  $dN_{n\omega}$  pueden pasar al nivel  $n'$  por absorción de radiación de frecuencia  $\omega$ . En el nivel  $n'$  hay  $N_{n'}$  átomos por centímetro cúbico de los que  $dN_{n'\omega}$  pueden decaer a  $n$  por emisión de radiación de frecuencia estimulada por la radiación externa.

Los átomos en el nivel  $n'$  también podrían pasar al nivel  $n$  por emisión espontánea de radiación. Sin embargo, esta radiación a diferencia de la estimulada no es coherente con la radiación incidente, y es emitida en todas direcciones por lo que su contribución a la intensidad de la radiación que sale del medio activo en la dirección de la radiación incidente es mínima y no vamos a tomarla en cuenta en el cálculo que sigue. Sin embargo, la radiación estimulada por la radiación incidente se caracteriza por ser coherente con ésta, es decir, que las dos están en fase por lo que están en la misma dirección y por lo tanto pueden producirse haces muy bien colimados aún a grandes distancias.

Cuando la radiación atraviesa una longitud  $dx$ , su inten-

idad decrec de la siguiente manera

$$-d(I_{\omega_0} d\omega) = \frac{\hbar\omega}{c} (B_{nn'}^{\omega} dN_{n\omega} - B_{n'n}^{\omega} dN_{n'\omega}) I_{\omega_0} dx$$

de donde se sigue

$$-\frac{1}{I_{\omega_0}} \frac{dI_{\omega_0}}{dx} d\omega = \frac{\hbar\omega}{c} (B_{nn'}^{\omega} dN_{n\omega} - B_{n'n}^{\omega} dN_{n'\omega})$$

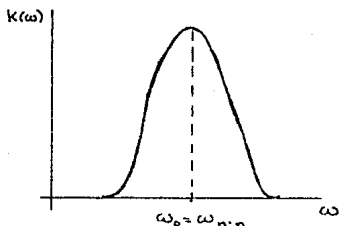
De acuerdo con la fórmula (III-4), el miembro derecho de esta ecuación es precisamente la definición de  $k(\omega)$  por lo que tenemos

$$k(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega}{c} (B_{nn'}^{\omega} dN_{n\omega} - B_{n'n}^{\omega} dN_{n'\omega})$$

Integrando sobre las frecuencias se obtiene (Lengyel)

$$\int k(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega_0}{c} (B_{nn'}^{\omega_0} N_n - B_{n'n}^{\omega_0} N_{n'}) \quad (\text{III-6})$$

en donde  $\omega_0$  es la frecuencia en la que hay mayor absorción. Para aclararun poco esto, diremos que la forma en que depende de la frecuencia el coeficiente de absorción  $k(\omega)$  es aproximadamente como lo indica la siguiente gráfica



Para nosotros es conveniente que la frecuencia pico  $\omega_0$  sea la frecuencia  $\omega_{n'n}$ . La expresión (III-6) es el área bajo esta curva, y veremos como depende de los coeficientes de Einstein. Para ello sustituimos las expresiones (III-2) en (III-5) para obtener

$$\int k(\omega) d\omega = \frac{\pi^2 c}{\omega_{n'n}^2} \frac{g_{n'}}{g_n} A_{n'n}^e (N_n - \frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'})$$

Para simplificar esta expresión, llamaremos

$$K^e = \frac{\pi^2 c}{\omega_{n'n}^2} \frac{g_{n'}}{g_n} A_{n'n}^e \quad (\text{III-7})$$

para obtener

$$\int k(\omega) d\omega = K^e (N_n - \frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'})$$

Como la cantidad que nos interesa es  $k(\omega)$  y no su integral

por estar directamente relacionada con la sección eficaz de absorción, nos conviene escribirla de la siguiente manera

$$K(\omega) = k_0 g(\omega - \omega_{n'n}) \left( N_n - \frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'} \right) \quad (\text{III-8})$$

en donde la función  $g(\omega - \omega_{n'n})$  es un factor de forma, que para ser congruente con lo anterior debe satisfacer la condición

$$\int g(\omega - \omega_{n'n}) d\omega = 1$$

El valor pico de la absorción que denotaremos por  $k_0$  está dado por

$$k_0 = k N_0 g(0) \quad (\text{III-9})$$

en donde hemos introducido la notación  $g(0) = g(\omega_{n'n} - \omega_{n'n})$ .  $N_0$  es el número total de átomos por unidad de volumen.

De acuerdo con la ley de Boltzmann, en una situación de equilibrio, la población de los niveles  $n$  y  $n'$  debe ser tal que

$$\frac{N_n}{g_n} = \frac{N_{n'}}{g_{n'}} e^{-\frac{(E_n - E_{n'})}{kT}} \quad \begin{array}{l} k: \text{cte. de Boltzmann} \\ T: \text{temperatura absoluta} \end{array}$$

de donde debe cumplirse la desigualdad

$$\frac{N_n}{g_n} > \frac{N_{n'}}{g_{n'}}$$

Sin embargo, puede darse el caso de una situación, en la que obviamente no hay equilibrio, en que se tenga

$$\frac{N_{n'}}{g_{n'}} > \frac{N_n}{g_n}$$

En este caso se habla de un estado de temperatura negativa, o más comunmente de una inversión de población.

Si en un sistema se consigue una inversión de población, la absorción es negativa y se tiene amplificación de la radiación. El coeficiente de amplificación será dado, de acuerdo con (III-5) y (III-8) por

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= K g(\omega - \omega_{n'n}) \left( \frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'} - N_n \right) \\ &= K g(\omega - \omega_{n'n}) N \end{aligned}$$

en donde hemos definido

$$N = \left( \frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'} - N_n \right)$$

que es una cantidad que mide la inversión de población. Otra medida útil de la inversión de población que usaremos nosotros es la definida por

$$n = \frac{\frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'} - N_n}{N_n + N_{n'}} = \frac{N}{N_n + N_{n'}} = \frac{N}{N_0}$$

que es un número adimensional. Se le llama inversión de población relativa, y puede verse que su valor es -1 cuando el material está desexcitado por completo, es decir cuando no hay ningún átomo en el nivel  $n'$  y por lo tanto  $N_{n'} = 0$ ; vale cero para un material que ni emite ni absorbe, y su valor máximo es  $n = \frac{g_n}{g_{n'}}$  que corresponde a una inversión de población completa, es decir cuando todos los átomos están en el nivel  $n'$ .

En términos de esta inversión de población relativa, podemos expresar el coeficiente de amplificación como

$$\alpha(\omega) = K_0 (\omega - \omega_{n,n}) N_0 n \quad (\text{III-10})$$

Volviendo a nuestro medio activo, vemos que si se logra una inversión de población, tendremos amplificación dada por la fórmula anterior. La radiación gravitatoria atraviesa el medio activo, que tiene una longitud  $L$ . Si nos interesa saber la amplificación de la radiación en la frecuencia  $\omega_{n,n}$  después de atravesar el medio activo, está dada por la expresión (III-10 multiplicada por la longitud  $L$ , es decir

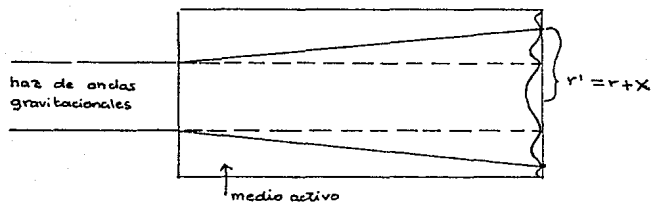
$$\alpha(\omega_{n,n})L$$

La amplificación  $\alpha(\omega_{n,n})L$  es una cantidad con dimensiones de (longitud)<sup>-1</sup>, por lo que  $\alpha(\omega_{n,n})L$  es una cantidad adimensional.

Debemos considerar que en el sistema puede haber pérdidas de la intensidad de la radiación incidente debidas a otros factores como dispersión, difracción, ruido, etc.. Si medimos estas pérdidas mediante la cantidad adimensional  $\gamma$ , resulta que, para que tengamos una verdadera amplificación,  $\alpha(\omega_{n,n})L$  debe ser superior a las pérdidas  $\gamma$ . Por lo tanto la condición umbral para la amplificación, podemos escribirla como

$$\alpha(\omega_{n,n})L = \gamma \quad (\text{III-11})$$

Nosotros vamos a considerar solamente pérdidas por difracción. Encontraremos una expresión para  $\gamma$  que represente las pérdidas de intensidad del haz incidente de radiación gravitatoria, debidas a que cuando este haz pasa a través del medio activo, se difracta. Los detalles de la forma en que esto ocurre pueden ser complicados, pero esquemáticamente lo que le sucede a la intensidad de la radiación incidente, que consideramos como un haz de sección transversal circular de radio  $r$ , es lo siguiente



Como suele hacerse, nosotros cortaremos esta curva de difracción en el primer mínimo después del disco central, de manera que, como se indica en la figura, el haz sale del medio activo con una sección transversal circular de radio  $r'$ .

Si el área del haz incidente es  $A$  y el área del haz que sale es  $A'$ , una medida de la pérdida de intensidad del haz original es

$$\gamma = 1 - \frac{A}{A'}$$

De esta manera, si las áreas son iguales, la pérdida de intensidad es cero como era de esperarse, y mientras mayor sea  $A'$ , aumentará.

En términos de los radios, la expresión anterior queda

$$\gamma = 1 - \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = 1 - \frac{r^2}{r'^2} = 1 - \frac{r^2}{(r+x)^2}$$



Ahora determinaremos  $x$  aplicando algunos resultados de la teoría de la difracción.

Para simplificar este cálculo, consideramos que el radio  $r$  es grande, con lo que el borde del círculo es casi una recta con lo cual se facilitan mucho las cosas.

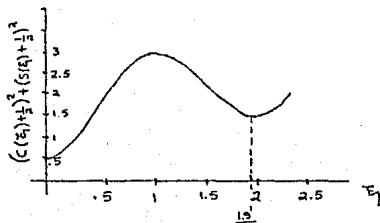
Para un obstáculo recto, la intensidad en la zona de sombra está dada por (Jackson)

$$I = \frac{I_0}{2} \left( \left( C(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( S(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

donde  $C(\xi)$  y  $S(\xi)$  son las integrales de Fresnel. La variable en nuestra nomenclatura, es

$$\xi = \left( \frac{k}{2L} \right)^{1/2} x, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La  $x$  que buscamos corresponde al primer mínimo de esta curva. La forma de esta curva podemos obtenerla a partir de los valores de las integrales de Fresnel. El resultado es



El primer mínimo corresponde a  $E_1 = 1.9$  o sea  $X = 1.9 \left(\frac{2L}{k}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^{1/2}$ .  
Entonces podemos escribir

$$\gamma = 1 - \frac{r^2}{(r+X)^2} = 1 - \frac{r^2}{\left(r + 1.9 \left(\frac{2L}{k}\right)^{1/2}\right)^2}$$

y poniendo  $\lambda = \lambda_{mn} = \frac{2\pi c}{\omega_{mn}}$  obtenemos

$$\gamma = 1 - \frac{r^2}{\left(r + 1.9 \left(\frac{2cL}{\omega_{mn}}\right)^{1/2}\right)^2} \quad (\text{III-12})$$

Tomando en cuenta los resultados (III-9, 10, 11 y 12) tenemos

$$\alpha(\omega_0)L = \kappa g(\omega) N_0 L n = \gamma = 1 - \frac{r^2}{\left[r + 1.9 \left(\frac{2cL}{\omega_{mn}}\right)^{1/2}\right]^2}$$

de donde

$$n = \frac{1 - \frac{r^2}{\left[r + 1.9 \left(\frac{2cL}{\omega_{mn}}\right)^{1/2}\right]^2}}{\kappa g(\omega) N_0 L}$$

Para expresar la condición umbral en términos de parámetros del sistema, solamente nos falta ver de que depende el valor pico del factor de forma, que hemos denotado por  $g(\omega)$ .

Se introdujo la función  $g(\omega - \omega_0)$  como un factor de forma para la absorción. Ahora nos interesa encontrar una expresión

para su valor pico  $g(0)$ . Este valor depende de la forma y del ancho de la curva  $g(\omega - \omega_{nn})$ . Hay dos mecanismos mediante los cuales puede formarse esta curva o línea de absorción (en nuestro caso de amplificación) (Lengyel): uno es debido al movimiento térmico de los átomos del sistema, que produce un corrimiento Doppler al emitir radiación; llamaremos a este proceso ensanchamiento Doppler. La curva de absorción (y por lo tanto también  $g(\omega - \omega_0)$ ) en este caso es una gaussiana por lo que a su valor pico lo denotaremos  $g(0)_G$ . El otro mecanismo es debido a las colisiones entre los átomos que afectan al proceso radiativo, y lo llamaremos ensanchamiento por colisiones. Este proceso fue estudiado por primera vez por H. A. Lorentz, por lo que llamaremos  $g(0)_L$  al valor pico de la curva generada en este caso.

Estos dos mecanismos están siempre presentes, aunque por lo general predomina uno de ellos. Nosotros encontraremos una expresión para los dos, y cuando los evaluemos numéricamente en el próximo capítulo, nos quedaremos con el de mayor valor.

Los dos valores pico están dados por (Lengyel)

$$g(0)_G = \frac{.939}{\Delta\nu}$$

$$g(0)_L = \frac{.613}{\Delta\nu}$$

donde  $\Delta\nu$  es el ancho medio de la curva, que depende de las características del sistema, de manera diferente en cada caso:

Para el ensanchamiento Doppler se tiene

$$\Delta\nu_D = 7.162 \times 10^7 \left( \frac{T}{M_0 m} \right)^{1/2} \nu_0 n$$

$$= 8.82 \times 10^4 \sqrt{\frac{T}{N_0}} \omega_0 n$$

$m$ : masa del átomo

$T$ : temperatura absoluta

y para el ensanchamiento por colisiones

$$\Delta\nu_C = \frac{1}{9\pi \bar{G}}$$

donde  $\bar{G}$  es el tiempo medio entre colisiones, que usando argumentos de la teoría cinética de los gases puede expresarse como

$$\bar{G} = \frac{\rho}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi N_0 a_H^2} \sqrt{\frac{m}{3kT}}$$

$a_H$  = radio del átomo

$m$  = masa del átomo

$k$  = constante de Boltzmann

con lo cual nos queda

$$\Delta\nu_C = \sqrt{2} N_0 a_H^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 6.28 \times 10^{13} N_0 \sqrt{T}$$

Resumiendo los resultados de esta sección, tenemos que la condición umbral de Schawlow-Townes está dada por

$$n = \frac{\left(\frac{g_n}{g_{n'}} N_{n'} - N_n\right)}{N_0} = \frac{1 - \frac{r^2}{\left[r + 1.9 \left(\frac{2cL}{\omega_{n'n}}\right)\right]^2}}{k g(o) N_0 L} \quad (\text{III-13})$$

$N_0$  = átomos/cm<sup>3</sup>

$N_{n'}$  = átomos/cm<sup>3</sup> en el nivel  $n'$

$N_n$  = átomos/cm<sup>3</sup> en el nivel  $n$

$g_n, g_{n'}$  multiplicidad de los niveles  $n$  y  $n'$

$r$  = radio del haz de radiación incidente

$L$  = longitud del medio activo

$\omega_{n'n}$  = frecuencia de la radiación gravitatoria incidente

$$k = \frac{\pi^2 c}{\omega_{n'n}^2} \frac{g_{n'}}{g_n} A_{n'n}^0$$

$$g(o) = \begin{cases} g(o)_G = 1.06 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{N_0}{T}} \times \frac{1}{\omega_{n'n}} \\ \sigma \\ g(o)_Z = \frac{9.76 \times 10^{11}}{N_0 \sqrt{T}} \end{cases}$$

$T$  = temperatura del medio activo

c) ECUACIONES DE VELOCIDAD EN UN ATOMO DE CUATRO NIVELES.

Para poder aplicar la condición de Schawlow-Townes que obtuvimos en la sección anterior, es necesario que definamos nuestro sistema con más precisión, ya que hasta ahora hemos hablado de los niveles de energía  $n'$  y  $n$  en abstracto. Vamos a considerar solamente los primeros cuatro niveles del átomo de hidrógeno, y tenemos que analizar las transiciones entre estos cuatro niveles para poder determinar el número de átomos por unidad de volumen que hay en dos de estos niveles.

De este análisis vamos a obtener una relación entre los coeficientes de Einstein y los números  $N_{n'}$ , y  $N_n$ .

Las razones por las que se consideran los primeros cuatro niveles son las siguientes: Debido a las reglas de selección (ver apéndice B) la transición  $n=2 \rightarrow n=1$  mediante emisión de radiación gravitatoria es prohibida. Entonces, la transición que nos interesa es  $n'=3 \rightarrow n=1$ , por ser la primera transición permitida que nos deja al átomo en el estado base. De todas maneras debemos seguir tomando en cuenta al nivel  $n=2$  porque las transiciones electromagnéticas  $n'=3 \rightarrow n=2$  y  $n'=2 \rightarrow n=1$  si están permitidas. El nivel  $n=4$  entra en juego porque queremos que el bombeo electromagnético se lleve a cabo de  $n=1$  a  $n=4$  para que el nivel  $n=3$  se pueble por decaimiento espontáneo de  $n=4$  a  $n=3$ . Este bombeo electromagnético no puede hacerse directamente al nivel  $n=3$  porque en este caso, la misma radiación de bombeo, que tendría que estar centrada en la frecuencia  $\omega_{1,3}$ , produciría radiación estimulada despojando el nivel

$n=3$ , haciendo imposible la inversión de población.

Los átomos son excitados pues, del nivel  $n=1$  al nivel  $n=4$  por lo que la radiación electromagnética debe tener una densidad de energía  $U(\omega)$  centrada en la frecuencia  $\omega = \omega_{41}$ . Los átomos en  $n=4$  empezarán a decaer a niveles inferiores por diferentes procesos como emisión estimulada de radiación gravitatoria o electromagnética, o emisión espontánea de cualquiera de estas dos radiaciones.

Lo que a nosotros nos interesa es estimular radiación gravitatoria en átomos que están en  $n=3$  y pasen a  $n=1$ , por lo que la radiación gravitatoria incidente debe tener una densidad de energía  $U_g(\omega)$  centrada en la frecuencia  $\omega = \omega_{31}$ . Nos interesa estudiar la posibilidad de invertir la población en los niveles  $n=1$  y  $n=3$ , con lo cual podría amplificarse la radiación gravitatoria incidente.

Para analizar todas las transiciones entre los cuatro niveles que estamos considerando, hay que tener en cuenta las reglas de selección, que se encuentran en el apéndice B.

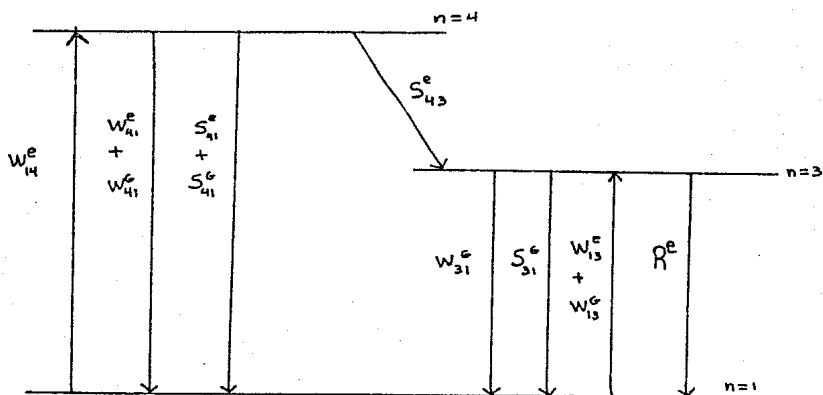
Usaremos la siguiente notación para las velocidades de transición:

$$W_{n'n} = B_{n'n} U(\omega) \quad , \quad W_{n'n'} = B_{n'n'} U(\omega)$$

$$S_{n'n} = A_{n'n}$$

A la velocidad de transición espontánea se le suele denotar por  $S_{n'n}$  en vez de  $A_{n'n}$  porque a veces se incluye en ella un término que corresponde a una transición en la que no hay radiación. En nuestro caso esto no sucede, pero respetamos la notación acostumbrada.

Todas las transiciones de nuestro sistema quedan representadas esquemáticamente de la siguiente manera



La transición  $R^e$  representa las transiciones electromagnéticas de  $n=3$  a niveles de menor energía, es decir, que en esta velocidad de transición están consideradas las transiciones  $n'=3 \rightarrow n=1$ ,  $n'=3 \rightarrow n=2$  y  $n'=2 \rightarrow n=1$ .

De acuerdo con este esquema podemos establecer las ecuaciones de velocidad entre los niveles, de la siguiente manera:



$$\frac{dN_4}{dt} = W_{14}^e N_1 - (W_{41}^e + W_{41}^g + S_{41}^e + S_{41}^g + S_{43}^e) N_4$$

$$\frac{dN_3}{dt} = (W_{13}^e + W_{13}^g) N_1 - (W_{31}^e + S_{31}^e + R^e) N_3 + S_{43}^e N_4$$

$$N_1 + N_3 + N_4 = N_0$$

Introduciendo las poblaciones relativas de los niveles, definidas por  $\alpha = \frac{N_1}{N_0}$ ,  $\beta = \frac{N_3}{N_0}$ ,  $\gamma = \frac{N_4}{N_0}$ , podemos escribir

$$\frac{d\alpha}{dt} = W_{14}^e \alpha - (W_{41}^e + W_{41}^g + S_{41}^e + S_{41}^g + S_{43}^e) \gamma$$

$$\frac{d\beta}{dt} = (W_{13}^e + W_{13}^g) \alpha - (W_{31}^e + S_{31}^e + R^e) \beta + S_{43}^e \gamma \quad (\text{III-14})$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Ahora vamos a despreciar algunas de las velocidades de transición:

$$W_{41}^g = B_{41}^g U_g(\omega) = 0 \quad \text{ya que la densidad de energía de}$$

la radiación gravitatoria se concentra principalmente alrededor de la frecuencia  $\omega_{31}$  y podemos considerar que  $U_g(\omega_{41}) = 0$ .

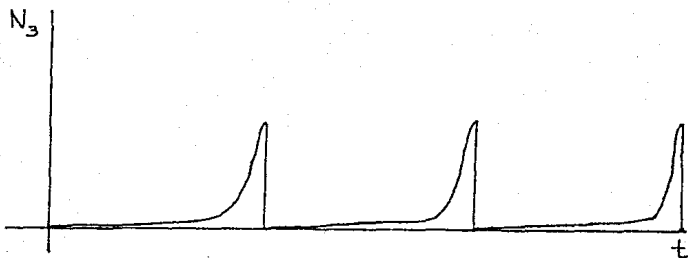
$W_{31}^e = W_{13}^e = B_{13}^e U_e(\omega) = 0$  ya que la densidad de energía de la radiación electromagnética se concentra principalmente al-

rededor de la frecuencia  $\omega_{41}$ , y podemos considerar que

$$\begin{aligned} U_e(\omega_{31}) &= 0 \\ S_{41}^e &= 0 \quad \text{ya que} \quad S_{41}^e \ll S_{41}^e. \end{aligned}$$

Suponer que las radiaciones gravitatoria y electromagnética son monocromáticas, como de hecho estamos considerando en estas aproximaciones, representa una idealización más en nuestro sistema. En la práctica esto es imposible y siempre tendremos que, por ejemplo,  $\mu_e(\omega_{31}) \neq 0$  por pequeño que sea. Esto hace que el nivel  $n=3$  tienda a despoblarse un poco por estimulación de esta radiación y hace más difícil la inversión de población. Nosotros al poner  $\mu_e(\omega_{31}) = 0$  estamos despreciando esto, y por lo tanto estamos considerando una situación ideal.

Vamos a despreciar otras dos velocidades de transición con base en las siguientes consideraciones: el nivel que nos interesa poblar es  $n=3$  para obtener inversión de población. Este nivel se va poblando hasta que se alcanza la condición umbral y se despuebla repentinamente debido a la estimulación de la radiación gravitatoria externa. Una vez vacío, empieza a poblarse de nuevo hasta que vuelve a ocurrir lo mismo. Por lo tanto, el proceso de amplificación sería pulsante. La forma en que se va poblando el nivel  $n=3$ , y la manera en que de pronto se vacía, puede ilustrarse mediante una gráfica de la siguiente manera:



Con base en esto, vemos que al estar poblado el nivel  $n=3$  se tiene una situación de desequilibrio. Como nos interesa analizar las partes del proceso en donde se tiene equilibrio para poder establecer las ecuaciones de velocidad, solamente tomamos en cuenta las partes horizontales de esta curva en las que el nivel  $n=3$  se va poblando lentamente. El sistema pasa la mayor parte del tiempo en estas partes del proceso, por lo que ignorar las partes en que no hay equilibrio (picos de la curva), no afecta mayormente nuestras consideraciones. Entonces, en las ecuaciones de velocidad despreciaremos los términos  $w_{31}^c$  y  $w_{13}^c$  que actúan solamente durante tiempos muy cortos. Por lo tanto pondremos

$$w_{31}^c = 0$$

$$w_{13}^c = 0$$

Tomando en cuenta todas las aproximaciones anteriores,  
y estableciendo las condiciones de equilibrio del sistema, que  
son

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$$

las ecuaciones de velocidad (III-14) se convierten en

$$0 = W_{14}^e \alpha - (W_{41}^e + S_{41}^e + S_{43}^e) \gamma$$

$$0 = -(S_{31}^e + R^e) \beta + S_{43}^e \gamma$$

$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$

que es un sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver  
y obtener

$$\alpha = \frac{(W_{14}^e + S_{41}^e + S_{43}^e) (S_{31}^e + R^e)}{W_{14}^e S_{43}^e + (W_{41}^e + S_{41}^e + S_{43}^e) (S_{31}^e + R^e) + (S_{31}^e + R^e) W_{14}^e}$$

$$\beta = \frac{W_{14}^e S_{43}^e}{W_{14}^e S_{43}^e + (W_{41}^e + S_{41}^e + S_{43}^e) (S_{31}^e + R^e) + (S_{31}^e + R^e) W_{14}^e}$$

$$\gamma = \frac{W_{14}^e (S_{31}^e + R^e)}{W_{14}^e S_{43}^e + (W_{41}^e + S_{41}^e + S_{43}^e) (S_{31}^e + R^e) + (S_{31}^e + R^e) W_{14}^e} \quad (\text{III-15})$$

Así, hemos obtenido las poblaciones relativas de los niveles, en función de las velocidades de transición, que son conocidas, y de la densidad de energía de la radiación electromagnética.

La condición de Schawlow-Townes en término de las poblaciones relativas de los niveles es, para  $n'=3$  y  $n=1$

$$\left(\frac{g_1}{g_3} \beta - \alpha\right) = \frac{1 - \frac{r^2}{[r+1.9\left(\frac{2cL}{\omega g_1}\right)^2]^{1/2}}}{k g(\omega) N_0 L} \quad (\text{III-16})$$

Al sustituir aquí los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  que acabamos de encontrar, la condición queda expresada en términos de cantidades conocidas y de la densidad de energía  $U_e(\omega)$ , por lo que podemos determinar el valor de mínimo de ésta, para el cual podría coseguirse la inversión de población.

CAPITULO IV  
RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este último capítulo estudiaremos la condición de umbral de Schawlow-Townes que desarrollamos en el capítulo anterior (fórmula III-16), con los valores numéricos obtenidos en el apéndice B para las velocidades de transición, y dando valores a los parámetros del sistema. Podremos ver así en qué condiciones se tiene inversión de población, y si es posible tener amplificación de la radiación gravitatoria en este sistema.

La condición de Schawlow-Townes para nuestro sistema es

$$\left(\frac{g_1}{g_3} \beta - \alpha\right) = \frac{1 - \frac{r^2}{[r + 1.9 \left(\frac{r^2}{g_3}\right)^{1/2}]^2}}{K g(\omega) N_0 L} \quad \text{IV-1}$$

en donde, como ya hemos visto, el lado izquierdo es la inversión de población relativa  $n$  que vale  $-1$  cuando todos los átomos del sistema están en el estado base. A partir de  $n=0$  se invierte la población, hay mas átomos en el estado  $n=3$  que en el estado base y su valor máximo es  $\frac{g_1}{g_3}$  cuando la población está totalmente invertida. El lado derecho de esta condición representa las pérdidas de intensidad de la radiación gravitatoria debidas a la difracción de ésta al pasar a través del medio activo. Por esto, no basta tener  $n > 0$  para tener amplificación de la radiación, sino que además  $n$  debe ser mayor que estas pérdidas, siendo la condición umbral la igualdad entre ambos.

Analizaremos primero el lado izquierdo de (IV-1), es decir

el valor de la inversión de población relativa.

En la tabla B-1 que aparece al final del apéndice B, en donde se enlistan los valores de las velocidades de transición, vemos que

$$S_{31}^c \ll R^c$$

y por lo tanto podemos poner  $S_{31}^c = 0$  y la expresión (III-15) se reduce a

$$\beta = \frac{W_{14}^c S_{43}^c}{W_{14}^c S_{43}^c + (W_{41}^c + S_{41}^c + S_{42}^c) R^c + W_{14}^c R^c}$$

$$\alpha = \frac{(W_{41}^c + S_{41}^c + S_{42}^c) R^c}{W_{14}^c S_{43}^c + (W_{41}^c + S_{41}^c + S_{42}^c) R^c + W_{14}^c R^c}$$

que pueden escribirse como

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{R^c}{S_{43}^c} \left( 1 + \frac{W_{41}^c}{W_{14}^c} + \frac{S_{41}^c + S_{42}^c}{W_{14}^c} \right)}$$

$$\alpha = \frac{\frac{R^c}{S_{43}^c} \left( \frac{W_{41}^c}{W_{14}^c} + \frac{S_{41}^c + S_{42}^c}{W_{14}^c} \right)}{1 + \frac{R^c}{S_{43}^c} \left( 1 + \frac{W_{41}^c}{W_{14}^c} + \frac{S_{41}^c + S_{42}^c}{W_{14}^c} \right)}$$

Si recordamos que

$$W_{14}^e = U_e B_{14} \quad , \quad W_{41}^e = U_e B_{41}$$

$$W_{41} = \frac{g_1}{g_4} W_{14}$$

las expresiones anteriores se transforman en

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{R^e}{S_{43}^e} \left( 1 + \frac{g_1}{g_4} + \frac{S_{41}^e + S_{42}^e}{U_e B_{14}} \right)}$$

$$\alpha = \frac{\frac{R^e}{S_{43}^e} \left( \frac{g_1}{g_4} + \frac{S_{41}^e + S_{42}^e}{U_e B_{14}} \right)}{1 + \frac{R^e}{S_{43}^e} \left( 1 + \frac{g_1}{g_4} + \frac{S_{41}^e + S_{42}^e}{U_e B_{14}} \right)}$$

En el apéndice B se dan los valores de las degeneraciones de los cuatro niveles de energía que nos interesan. Estos valores son  $g_1=1$ ,  $g_2=4$ ,  $g_3=9$  y  $g_4=16$ . Tomando esto en cuenta y haciendo algunas transformaciones algebraicas, las expresiones anteriores se convierten en

$$\beta = \frac{U_e}{U_e \left( 1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e} \right) + \frac{S_{41}^e + S_{42}^e}{B_{14}^e} \frac{R^e}{S_{43}^e}}$$

$$\alpha = \frac{\left( \frac{U_e}{16} + \frac{S_{41}^e + S_{42}^e}{B_{14}^e} \right) \frac{R^e}{S_{43}^e}}{U_e \left( 1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e} \right) + \frac{S_{41}^e + S_{42}^e}{B_{14}^e} \frac{R^e}{S_{43}^e}}$$

(IV-2)



Hemos expresado  $\alpha$  y  $\beta$  en función de la densidad de energía de la radiación electromagnética, que es la que bombea al sistema de  $n=1$  a  $n=4$  para tratar de producir la inversión de población. Es claro que esta inversión de población va a depender de esta radiación de bombeo, y nos interesa estudiar como cambia  $n$  al aumentar  $U_e$ .

Como de antemano no somos muy optimistas respecto a los resultados que pueden obtenerse, calcularemos la inversión de población relativa solamente en los casos extremos, es decir cuando  $U_e = 0$ , que corresponde por supuesto a la mínima inversión de población, y cuando  $U_e \rightarrow \infty$  que corresponde a la máxima inversión de población que idealmente podría obtenerse. Para calcular estos valores de  $n$ , a los que llamaremos  $n_{\min}$  y  $n_{\max}$  respectivamente, escribimos las expresiones (IV-2) en la siguiente manera

$$\beta = \frac{U_e}{M U_e + N}, \quad \alpha = \frac{P U_e + N}{M U_e + N} \quad (IV-3)$$

en donde  $M$ ,  $N$  y  $P$  son constantes conocidas dadas por

$$M = 1 + \frac{12}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}, \quad N = \frac{S_{41}^e + S_{43}^e}{B_{14}^e} \frac{R^e}{S_{43}^e}, \quad P = \frac{1}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e} \quad (IV-4)$$

Es claro que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son funciones crecientes de  $U_e$  por lo que en efecto, sus valores máximos corresponden a  $U_e \rightarrow \infty$  y sus valores mínimos ocurrirán cuando  $U_e = 0$ .

Entonces tenemos, de acuerdo con (IV-3)

$$\beta_{\min} = \beta (U_c = 0) = 0 \quad , \quad \alpha_{\min} = \alpha (U_c = 0) = \frac{N}{N} = 1$$

por lo que la inversión de población mínima es

$$n_{\min} = \frac{g_1}{g_3} \beta_{\min} - \alpha_{\min} = -1$$

lo cual era de esperarse ya que al no haber bombeo, todos los átomos se quedan en el estado base, que es lo que significa  $n = -1$ .

Estrictamente esto no es cierto, ya que aunque  $U_c = 0$ , por efectos térmicos siempre hay algunos átomos en otros estados además del base, a menos que se tenga temperatura absoluta igual a cero. Sin embargo este efecto es despreciable, porque aún a temperaturas  $T \sim 300K$ , tendríamos que el valor de  $n_{\min}$  sería apenas un poco mayor que  $-1$ .

Para el máximo de inversión de población, que es lo que realmente nos interesa, se obtiene

$$\beta_{\max} = \beta (U_c \rightarrow \infty) = \lim_{U_c \rightarrow \infty} \frac{U_c}{M U_c + N} = \frac{1}{M}$$

$$\alpha_{\max} = \alpha(U_c \rightarrow \infty) = \lim_{U_c \rightarrow \infty} \frac{P U_c + N}{M U_c + N} = \frac{P}{M}$$

Sustituyendo los valores de M y P dados en (IV-4) resulta

$$\beta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}}, \quad \alpha_{\max} = \frac{\frac{1}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}}{1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}}$$

por lo que el valor de la inversión de población máxima es

$$n_{\max} = \frac{9_1}{9_3} \beta_{\max} - \alpha_{\max} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}} - \frac{1}{16} \frac{\frac{R^e}{S_{43}^e}}{1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}}$$

que podemos poner en la siguiente forma

$$n_{\max} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}}{1 + \frac{17}{16} \frac{R^e}{S_{43}^e}} \quad (\text{IV-5})$$

Sustituyendo los valores de  $R^e$  y  $S_{43}^e$  obtenidos en el apéndice B (ver tabla B-1), obtenemos

$$n_{\max} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \frac{8.8106 \times 10^8}{2.5700 \times 10^7}}{1 + \frac{17}{16} \frac{8.8106 \times 10^8}{2.5700 \times 10^7}} = -.054 \quad (\text{IV-6})$$

Como la inversión de población relativa máxima que podemos tener es negativa, concluimos que en nuestro sistema, ni en el mejor de los casos obtenemos inversión de población, ya que ésta se obtiene cuando  $n > 0$ .

Si analizamos la expresión (IV-5), que nos da la máxima inversión de población, vemos que depende solamente del cociente

$R^e/S_{43}^e$ . Veamos que significa esto físicamente:

$S_{43}^e$  es la velocidad de transición espontánea de  $n=4$  a  $n=3$ , es decir que es la que corresponde al proceso mediante el cual se puebla el nivel  $n=3$  en el que queremos obtener la inversión de población. Por supuesto que éste nivel se puebla en función de qué tan poblado esté originalmente el nivel  $n=4$  por bombeo de la radiación electromagnética.

Por otro lado,  $R^e$  representa la velocidad de transición de  $n=3$  a  $n=1$  mediante transiciones electromagnéticas que pasan por  $n=2$  o directamente a  $n=1$ . Que el cociente  $R^e/S_{43}^e$  sea grande significa que el nivel  $n=3$  se vacía más rápidamente de lo que se llena. A nosotros nos interesaba que este cociente fuera tal, que (IV-5) fuera positiva para que hubiera inversión de población. Pero resultó que esto es imposible debido a que  $R^e$  predomina sobre  $S_{43}^e$  y en consecuencia el nivel  $n=3$  no puede mantenerse suficientemente poblado. Un posible problema a estudiar en el futuro sería el de ver las posibilidades de aumentar  $S_{43}^e$ , lo que significa reducir el tiempo de vida media del nivel  $n=4$  correspondiente a la transición a  $n=3$ . Si esto fuera posible, quizás podría lograrse la inversión de población en nuestro sistema.

Antes de pasar a analizar el lado derecho de la condición de Schawlow-Townes que impone condiciones aún más estrictas a la inversión de población, diremos algo acerca de otro problema que también contribuye a que las cosas sean más difíciles. Se trata del desdoblamiento del nivel  $n=3$  por efectos térmicos, es decir, el decaimiento de los átomos debido a estimulación por la radiación electromagnética producida por el movimiento térmico de los átomos del gas. Esta radiación es función de la temperatura absoluta, y su densidad de energía sigue la ley de distribución de Planck.

Para tener una idea de la magnitud del efecto producido por este ruido electromagnético compararemos la rapidez con la que decae el nivel  $n=3$  por emisión de radiación gravitatoria estimulada ( $U_e(\omega) B_{31}^e$ ) con la rapidez de decaimiento de  $n=3$  debida a este efecto térmico ( $U_e^t(\omega) B_{31}^e$ ). Para hacer esta comparación tenemos que ver las características de  $U_e^t$  lo cual nos hace hablar de la fuente que produce la radiación gravitatoria.

Empezaremos estableciendo la condición umbral, es decir la condición que establece la igualdad entre estos dos efectos, que es

$$U_e(\omega) B_{31}^e = U_e^t(\omega) B_{31}^e \quad (\text{IV-7})$$

en donde no debe confundirse  $U_e^t(\omega)$  con la densidad de energía  $U_e(\omega)$  de la radiación electromagnética de bombeo.  $U_e^t(\omega)$  está dada por

$$U_e^0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^3} \frac{1}{\frac{\hbar \omega}{kT} - 1}$$

Ahora haremos algunas consideraciones sobre  $U_e(\omega)$ , para lo cual diremos que la fuente de radiación gravitatoria sería un objeto colapsándose. Vamos a estimar órdenes de magnitud por lo que todos los desarrollos que siguen son aproximados.

La densidad de energía gravitatoria está dada por (MTW)

$$U_e(\omega) = \frac{t^{01}}{\Delta\omega}$$

en donde  $\Delta\omega$  es el ancho del pulso ondulatorio que aproximadamente es igual al tiempo  $\tau$  de colapso. A una distancia  $R$  del objeto colapsándose la componente  $t^{01}$  del pseudotensor de energía-impulso es (MTW)

$$t^{01} = \frac{G}{32\pi^2 c^6 R^2} (\ddot{D})^2$$

donde  $D$  es el momento cuadrupolar que en nuestro caso podemos aproximar por

$$\ddot{D} \approx \frac{ML^2}{\tau^3}$$

$L$  = tamaño del sistema

$M$  = masa del sistema

El tiempo  $\tau$  de colapso, está dado aproximadamente por

$$\tau \approx \sqrt{\frac{L^3}{GM}}$$

Tomando en cuenta todas estas relaciones aproximadas, podemos ver que

$$U_G(\omega) = \frac{t^{01}}{\Delta\omega} \approx \frac{G}{32\pi c^4 R^2} \frac{M^2 L^4}{G^5} \approx \frac{G}{32\pi c^4 R^2} \frac{M^2 L^4 G^{3/2}}{L^{3/2}} \approx \frac{1}{32\pi c^4 R^2} \sqrt{\frac{G^3 M^2}{L^7}}$$

Sustituyendo en la condición umbral (IV-7) y tomando en cuenta las expresiones de  $B_{31}^E$  y  $B_{31}^G$  (fórmulas III-3), resulta

$$\frac{1}{32\pi c^4 R^2} \sqrt{\frac{G^3 M^2}{L^7}} \frac{G m^2}{k^2 c^2} \omega_{31}^2 | \langle r^2 \rangle_{31}^2 = \frac{\hbar \omega_{31}^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \times \frac{\alpha \omega_{31}^2}{10 c \hbar} | \langle r^2 \rangle_{31}^2$$

$$\therefore \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \approx \sqrt{\frac{G^3 M^2}{L^7}} \frac{m^2}{k^2 c^4 \alpha \omega_{31}^2 R^2}$$

Para simplificar esta expresión pondremos

$$\odot = \sqrt{\frac{G^3 M^2}{L^7}} \frac{m^2}{k^2 c^4 \alpha \omega_{31}^2 R^2}$$

para obtener

$$T = \frac{\hbar \omega_{31}}{k \ln(1 + \frac{1}{\odot})}$$

que es la temperatura a la que se cumple la condición umbral expresada en función de los parámetros del sistema. Esto significa que a temperaturas por debajo de ésta, el efecto térmico es menor y predomina la emisión estimulada gravitatoria.

Ahora estimaremos esta temperatura umbral dando algunos valores aceptables a los parámetros del sistema. Diremos que

$$R = \text{unidad astronómica} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$$

$$M = \text{masa solar} \approx 2 \times 10^{33} \text{ g}$$

$$L = \text{radio de Schwarzschild para una masa solar} \approx 1 \text{ km}$$

Las demás son constantes conocidas.

Con estos valores se obtiene

$$\Theta \approx 10^{-12} \quad , \quad T \approx 5000 \text{ K}$$

La temperatura umbral no es muy elevada, pero está dentro del intervalo de temperaturas que puede tener una nube de gas. Esto significa que nuestro medio activo no tiene que estar demasiado frío para disminuir lo suficiente la competencia con el decaimiento térmico de  $n=3$ .

En conclusión podemos decir que el problema del ruido electromagnético, por sí solo no representa un obstáculo grave para nosotros, ya que es posible imaginar condiciones razonables para las que este efecto es pequeño.



Ahora analizaremos el lado derecho de la condición de Schawlow-Townes (fórmula IV-1) que está relacionada con las pérdidas de intensidad de la radiación gravitatoria incidente.

Aunque hubiéramos conseguido invertir la población, es decir, aunque hubiéramos obtenido  $n > 0$ , no necesariamente significaría que pudiéramos tener amplificación de radiación ya que falta considerar las pérdidas de intensidad, de la radiación gravitatoria, que en nuestro caso son debidas a la difracción. Antes de evaluar estas pérdidas, diremos que por lo general hay además otras causas de pérdida de intensidad de la radiación que no estamos considerando. Esto hace que nuestro estudio sea aún más simplista.

Recordemos que aún en el caso de que no hubiera pérdidas de intensidad, no tendríamos amplificación de radiación gravitatoria ya que no pudo conseguirse la inversión de población. Sin embargo vamos a evaluar las pérdidas por difracción contenidas en el lado derecho de la fórmula (IV-1), porque esto puede ser ilustrativo respecto a las propiedades que debería tener el sistema para por lo menos estar cerca de la posibilidad de amplificación de radiación gravitatoria, es decir, que el valor del lado derecho de (IV-1) esté entre cero y  $g_1/g_3 = 1/9$ .

La cantidad que queremos evaluar es (ver fórmula IV-1)

$$\frac{1 - \frac{r^2}{\left[ r + 1.9 \left( \frac{2ck}{\omega_{12}} \right)^{1/2} \right]^2}}{k g_3(\omega) N_0 L} \quad (\text{IV-8})$$

Ahora analizaremos el lado derecho de la condición de Schawlow-Townes (fórmula IV-1) que está relacionada con las pérdidas de intensidad de la radiación gravitatoria incidente.

Aunque hubiéramos conseguido invertir la población, es decir, aunque hubiéramos obtenido  $n > 0$ , no necesariamente significaría que pudiéramos tener amplificación de radiación ya que falta considerar las pérdidas de intensidad, de la radiación gravitatoria, que en nuestro caso son debidas a la difracción. Antes de evaluar estas pérdidas, diremos que por lo general hay además otras causas de pérdida de intensidad de la radiación que no estamos considerando. Esto hace que nuestro estudio sea aún más simplista.

Recordemos que aún en el caso de que no hubiera pérdidas de intensidad, no tendríamos amplificación de radiación gravitatoria ya que no pudo conseguirse la inversión de población. Sin embargo vamos a evaluar las pérdidas por difracción contenidas en el lado derecho de la fórmula (IV-1), porque esto puede ser ilustrativo respecto a las propiedades que debería tener el sistema para por lo menos estar cerca de la posibilidad de amplificación de radiación gravitatoria, es decir, que el valor del lado derecho de (IV-1) esté entre cero y  $g_1/g_3 = 1/9$ .

La cantidad que queremos evaluar es (ver fórmula IV-1)

$$1 - \frac{r^2}{\left[ r + 1.9 \left( \frac{2eL}{\omega_{12}} \right)^{1/2} \right]^2} \quad (\text{IV} - 8)$$

$$k g(\omega) N_0 L$$

El significado de cada uno de los parámetros que aparecen en esta expresión está dado en la fórmula (III-13) así como las expresiones para  $k^2$  y  $\mathcal{G}(0)$  en términos de otros parámetros del sistema como la temperatura y la densidad.

En síntesis, los parámetros del sistema a los que tenemos que asignarles valores para poder evaluar por completo la expresión (IV-8) son: la densidad de partículas del medio activo denotada por  $N_0$ , la temperatura  $T$  del medio activo, la longitud  $L$  del medio activo, y el radio  $r$  del haz incidente de radiación gravitatoria.

Para asignarles valores razonables a estos parámetros, debemos pensar en un modelo astronómico. Grosso modo, puede tenerse hidrógeno excitado por radiación electromagnética producida por un pulsar o alguna otra fuente que emita radiación de frecuencia central cercana a  $\omega_{14}$ . A su vez el gas es atravesado por radiación gravitatoria de frecuencia central  $\omega_{13}$  producida por ejemplo por un par de estrellas neutrónicas u hoyos negros que giran rápidamente uno alrededor del otro. Números que podemos asignar a los parámetros deseados de acuerdo con este modelo son

$$N_0 = 6.9 \times 10^{20} \text{ átomos/cm}^3,$$

Aproximadamente la densidad del aire en la Tierra.

$$T = 1000 \text{ K}$$

Aproximadamente la temperatura de algunas nubes de gas de nuestra galaxia

$$L = 1.4 \times 10^{13} \text{ cm}$$

Una unidad astronómica

$$r = 5 \times 10^4 \text{ cm}$$

Un haz de km de diámetro

Además, de (III-7) sabemos que

$$K = \frac{2\pi^2 c}{\omega_{31}^2} \frac{g_3}{g_1} A_{31}^G$$

en donde  $A_{31}^G = S_{31}^G = 9.3254 \times 10^{-41} \text{ s}^{-1}$  (tabla B-1). Entonces

$$K = 4.08 \times 10^{-60}$$

El valor de  $\omega_{31}$  también se encontró en el apéndice B, y resultó:  $\omega_{31} = 1.8486 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$

Solamente falta evaluar el valor pico  $g(0)$  que como dijimos en el capítulo anterior estará dado por la expresión que resulte de mayor magnitud de las dos siguientes

$$g(0)_G = 1.06 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{N_0}{T}} \frac{1}{\omega_{31}}, \quad g(0)_L = \frac{9.76 \times 10^{11}}{N_0 \sqrt{T}}$$

Con los valores que hemos asignado a todos los parámetros, se obtiene  $g(0)_G = 4.52 \times 10^{-13} \text{ s}$ ,  $g(0)_L = 5.4 \times 10^{-11} \text{ s}$

Por lo tanto nos quedamos con el valor

$$g(0) = g(0)_L = 5.4 \times 10^{-11} \text{ s}$$

Con todos estos valores podemos ya evaluar (IV-8). El resultado es

$$1 - \frac{r^2}{\left[ r + 1.9 \left( \frac{2cL}{\omega_{13}} \right)^{1/2} \right]^2} = 2.02 \times 10^{35}$$

$kg(0) N_0 L$

Este resultado es exageradamente grande comparado con un número entre cero y 1/9 que es el intervalo en donde sería posible la amplificación de radiación.

Podemos concluir entonces, que aunque hubiera sido posible invertir la población, las características de nuestro sistema son tales que estaríamos muy lejos de poder tener amplificación de la radiación gravitatoria.

Podríamos preguntarnos sin embargo, cuales tendrían que ser las características de un sistema como el nuestro, en el que este número estuviera dentro del intervalo de valores deseado. Una forma de lograr esto es aumentando la densidad de partículas, el tamaño del medio activo, o ambas cosas a la vez.

Por ejemplo, si quisiéramos aumentar solamente la longitud  $L$  del medio activo, tendría que ser

$$L \approx 10^{49} \text{ cm}$$

que es una distancia mayor que el universo visible, lo cual sobra decir que es absurdo.

Si lo que queremos aumentar es la densidad de nuestro sistema, tenemos que tener primero en cuenta que en este caso predomina la gaussiana sobre la lorentziana y nos queda

$$\frac{1 - \frac{r^2}{\left[r + 1.9 \left(\frac{2cL}{\omega_{1,3}}\right)^{1/2}\right]^2}}{kg_0) N_0 L} = \frac{1 - \frac{r^2}{\left[r + 1.9 \left(\frac{2cL}{\omega_{1,3}}\right)^{1/2}\right]^2}}{kLN_0 \times 1.06 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{N_0}{T}} \frac{1}{\omega_{31}}}$$

Basándonos en esta expresión, la densidad de partículas  $N_0$  necesaria para tener las condiciones deseadas resulta ser

$$N_0 \approx 10^{46} \text{ átomos/cm}^3$$

que para átomos de hidrógeno nos da una densidad de

$$\rho \approx 10^{22} \text{ g/cm}^3$$

Esta densidad es mayor aún que la de una estrella de neutrones, por lo que vemos que tampoco de esta manera podemos conseguir realístamente las condiciones deseadas.

Más en general, podemos ver que, según lo visto en el capítulo III, el denominador de la expresión (IV-8) representa la transparencia del sistema a la radiación gravitatoria, es decir, que es una medida de que tanta interacción hay entre la radiación y el gas. En nuestro caso este denominador resultó pequeñísimo ( $\sim 10^{-31}$ ) por lo que concluimos que la interacción entre la radiación gravitatoria y el medio activo es mínima, con lo que no podemos esperar mucho respecto a la posible amplificación. Es por esta razón que las fórmulas demandan grandes longitudes y grandes densidades.

Otra forma de hacer que (IV-8) disminuya, es aumentando el valor de  $A_{31}^G$  que es la velocidad de transición espontánea correspondiente a la transición  $n'=3 \rightarrow n=1$  por emisión de radiación gravitatoria. Este factor, que está contenido en el denominador de (IV-8), es el principal responsable del resultado obtenido para la transparencia. Tratar de que aumente es tratar de que el tiempo de vida media del nivel  $n=3$  se reduzca. Esto puede ser un tema de estudio interesante para el futuro.

Lo que puede concluirse de todo esto, es que aunque podrían mejorarse las cosas haciendo algunas modificaciones al sistema, lo que no es adecuado es el sistema mismo. Se trata de un sistema demasiado simple del que no podíamos esperar mucho. Sin embargo, el haber hecho este estudio seguramente resultará útil en estudios posteriores.

APENDICE A  
 EVALUACION DEL PROMEDIO DE LA  
 ECUACION II-1 SOBRE LAS  
 POLARIZACIONES

Para pasar de la ecuación (II-1) a la ecuación (II-2), se promedió sobre todas las polarizaciones. En el capítulo II ya se argumentó porqué los términos cruzados de la ecuación (II-1) desaparecen al efectuar este promedio. También se estableció ahí la notación que emplearemos en este apéndice, así como las propiedades y características de los vectores y tensores de polarización y de los vectores de propagación.

Efectuaremos el promedio sobre todas las polarizaciones de cada uno de los tres términos de la ecuación (II-1) por separado. Empezaremos por el término dipolar eléctrico que está dado por

$$\frac{4\pi^2 e^2 m_e^2}{\hbar^2 c^2 \mu^2} \omega_{n'n}^2 A_c^2(\omega_{n'n}) (\vec{e})_i (\vec{e})_j \langle n' | x_i | n \rangle \langle n | x_j | n' \rangle$$

Para promediar este término sobre las polarizaciones, basta promediar el producto  $e_i e_j$  cuyo promedio se definió como

$$e_i e_j = \frac{1}{4\pi} \int e_i e_j d\Omega_z$$



Para hacer esta integral usaremos una expresión para las componentes cartesianas de un vector unitario dada por

$$\vec{e} = (e_1, e_2, e_3) = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)$$

Al integrar sobre la esfera unitaria, la diferencial de ángulo sólido es

$$d\Omega_{\vec{e}} = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

De acuerdo con esto, las seis integrales  $\overline{e_i e_j}$  son:

$$\begin{aligned} \overline{e_1 e_1} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{12} \cos 3\theta - \frac{3}{4} \cos \theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{1}{12} - \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{6} + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De manera muy parecida se obtiene

$$\overline{e_2 e_2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{3}$$

$$\overline{e_3 e_3} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{3}$$

y para las tres integrales restantes se tiene

$$\left. \begin{aligned} \overline{e_1 e_2} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 0 \\ \overline{e_1 e_3} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 0 \\ \overline{e_2 e_3} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ya que} \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0 \end{array}$$

Estos seis resultados podemos escribirlos compactamente como

$$\overline{e_i e_j} = \frac{\delta_{ij}}{3}$$

y por lo tanto el término dipolar eléctrico promediado resulta

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{m_2}{\mu}\right)^2 \omega_{n'n}^2 A_e^2(\omega_{n'n}) \overline{e_i e_j} \langle n' | x^i | n \rangle \langle n | x^j | n' \rangle = \\ & = \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{m_2}{\mu}\right)^2 \omega_{n'n}^2 A_e^2(\omega_{n'n}) \frac{\delta_{ij}}{3} \langle n' | x^i | n \rangle \langle n | x^j | n' \rangle = \\ & = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2 c^2} \left(\frac{m_2}{\mu}\right)^2 \omega_{n'n}^2 A_e^2(\omega_{n'n}) |\langle \vec{r} \rangle|_{n'n}^2 \end{aligned}$$

en donde, al igual que en el capítulo II

$$|\langle \vec{r} \rangle|^2 = \delta_{ij} \langle n' | x^i | n \rangle \langle n | x^j | n' \rangle$$

Vamos ahora a promediar el término cuadrupolar eléctrico que está dado por

$$\frac{\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^4} \omega_{n'n}^4 A_e^2 (\hat{n}_e)_i (\vec{e})_j (\hat{n}_e)_k (\vec{e})_l \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle.$$

La parte de este término afectada al promediar sobre las polarizaciones es  $n_i e_j n_k e_l$  en donde los cuatro vectores son unitarios y además se cumple  $n_i e^i = 0 = n_k e^k$ . Estas últimas expresiones indican que el vector  $\hat{n}$  es perpendicular al vector  $\vec{e}$ . Al igual que en el caso anterior, escogemos las componentes de  $\vec{e}$  como

$$\vec{e} = (e_1, e_2, e_3) = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)$$

Las componentes cartesianas de un vector perpendicular a este están dadas de la siguiente manera

$$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, -\sin \varphi)$$

Con estos vectores, y con la diferencial de ángulo sólido mencionada anteriormente, tenemos que evaluar las integrales

$$\overline{e_i n_j e_k n_l} = \frac{1}{4\pi} \int e_i n_j e_k n_l d\Omega_{\vec{e}}$$

Usando algunas integrales conocidas de combinaciones de potencias enteras de senos y cosenos, es fácil ver que muchas de estas integrales son cero. Las únicas que resultan diferentes de cero son aquellas en que los índices  $i, j, k, l$  son iguales dos a dos. Esto puede expresarse matemáticamente como sigue

$$\frac{1}{4\pi} \int e_i n_j e_k n_l d\Omega_{\vec{e}} = A \delta_{ij} \delta_{kl} + B \delta_{ik} \delta_{jl} + C \delta_{il} \delta_{jk}$$

En donde tenemos que determinar las constantes  $A, B$  y  $C$  para obtener los valores de las integrales que no son cero. En lugar de hacer las integrales, usaremos algunas propiedades de los vectores de polarización y propagación. Por la perpendicularidad de estos dos vectores, vemos que se  $i=j$  se obtiene

$$\overline{e_i n_j e_k n_l} = A \delta_{ii} \delta_{kl} + B \delta_{ik} \delta_{il} + C \delta_{il} \delta_{ik} = 0$$

Cuando se da esta condición, si queremos que la integral no se anule debemos tener simultáneamente  $k=l$ .

Las funciones delta que aparecen en esta expresión cumplen con la propiedad  $\delta_{ii} = \delta_{kk} = 3, \delta_{ik} \delta_{ik} = 3$ , por lo que obtenemos

$$9A + 3B + 3C = 0$$

Por las mismas razones, si tenemos  $i=1$ , resulta

$$\begin{aligned}\overline{e_i n_j e_k n_i} &= A \delta_{ij} \delta_{ki} + B \delta_{ik} \delta_{ji} + C \delta_{ii} \delta_{jk} \\ &= A \delta_{ij} \delta_{ij} + B \delta_{ij} \delta_{ij} + C \delta_{ii} \delta_{jj} = 0\end{aligned}$$

Además, usando el hecho que  $\hat{e}^+$  y  $\hat{n}$  son unitarios podemos afirmar que si  $i=k$  y  $j=1$  se obtiene

$$\overline{e_i n_j e_i n_j} = A \delta_{ij} \delta_{ij} + B \delta_{ii} \delta_{jj} + C \delta_{ij} \delta_{ij} = 1$$

que nos da la ecuación

$$3A + 9B + 3C = 1$$

En resumen, las constantes A, B y C cumplen las tres ecuaciones algebraicas siguientes

$$9A + 3B + 3C = 0$$

$$3A + 9B + 3C = 1$$

$$3A + 3B + 9C = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas se obtiene

$$A = -\frac{1}{30}, \quad B = \frac{4}{30}, \quad C = -\frac{1}{30}$$

con lo que concluimos que

$$\overline{e_i n_j e_k n_l} = -\frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{30} + \frac{4 \delta_{ik} \delta_{jl}}{30} - \frac{\delta_{il} \delta_{jk}}{30}$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \overline{e_i n_j e_k n_l} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle &= \\ = \frac{1}{30} [4 \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}] \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle \end{aligned}$$

Al cambiar el orden de algunos índices esta expresión no se altera. Por ejemplo podemos hacer  $\delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{il} \delta_{jk}$ , para obtener

$$\begin{aligned} \overline{e_i n_j e_k n_l} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle &= \\ = \frac{1}{30} [3 \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{kl}] \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{10} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle \\
&= \frac{1}{10} \left[ \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^i x^j | n' \rangle - \frac{1}{3} \langle n' | x^i x^i | n \rangle \langle n | x^k x^k | n' \rangle \right] \\
&= \frac{1}{10} \left[ \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^i x^j | n' \rangle - \frac{1}{3} |\langle n' | r^2 | n \rangle|^2 \right] \\
&= \frac{1}{10} |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2
\end{aligned}$$

Con este resultado ya podemos escribir el promedio del término cuadrupolar eléctrico, que es

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^4} \omega_{n'n}^4 A_e^2(\omega_{n'n}) n_i e_j n_k e_l \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle = \\
&= \frac{\pi^2 e^2}{10 c^4 \hbar^2} \omega_{n'n}^4 A_e^2(\omega_{n'n}) |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2
\end{aligned}$$

Solamente nos falta promediar sobre la polarizaciones al término cuadrupolar gravitatorio, que esta dado por

$$\frac{\pi^2 m_z^2}{4 \hbar^2} \omega_{n'n}^4 A_g^2(\omega_{n'n}) \vec{e}_{ij} \cdot \vec{e}_{kl} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle$$

En este caso el promedio afecta nada mas al producto  $\vec{e}_{ij} \vec{e}_{kl}$  cuyo promedio está dado por

$$\overline{e_{ij} e_{kl}} = \frac{1}{4\pi} \int e_{ij} e_{kl} d\Omega_{\mathbf{e}}$$

La manera de calcular estas integrales es muy semejante a como lo acabamos de hacer para el caso del término cuadrupolar electromagnético, solamente que en este caso vamos a usar argumentos geométricos para ver cuáles de estas integrales se anulan. El resto se encontrarán de la misma manera que en el caso anterior.

El tensor de polarización es simétrico, por lo que  $e_{ij} = e_{ji}$ . Además sabemos que debe ser perpendicular a la dirección de propagación de la onda gravitatoria, lo cual se escribe como

$$e_{ij} \hat{n}_e^j = 0$$

La simetría del tensor de polarización implica que sólo tiene seis componentes independientes. Podemos visualizar a este tensor como compuesto por dos vectores tridimensionales ambos perpendiculares a la dirección de propagación. Escribimos entonces  $e_{ij} = e_i e_j$ . Por lo tanto al integrar el producto  $e_{ij} e_{kl} d\Omega_{\mathbf{e}}$ , estamos integrando el producto de cuatro vectores  $e_i e_j e_k e_l d\Omega$ .

Al integrar esta expresión sobre toda la esfera unitaria, es claro que cada componente de estos vectores tiene su inverso geométrico del otro lado de la esfera, que la anula. Entonces, la única forma en que una de estas integrales no es cero, es



que las componentes de los vectores aparezcan al cuadrado. Esto sucede en la integrales en las que los índices se repiten dos a dos, es decir, en las que  $i=j$  y  $k=l$ ,  $i=k$  y  $j=l$ ,  $i=l$  y  $j=k$ . Esto se expresa sintéticamente de la siguiente manera

$$\overline{e_{ij}e_{kl}} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}$$

Las constantes A, B y C serán determinadas valiéndonos de algunas propiedades del tensor de polarización.

Algunas propiedades de los tensores son invariantes ante cambios de coordenadas. Por eso usaremos la forma más sencilla del tensor de polarización, que es (MTW)

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las propiedades de este tensor que utilizaremos, y que son válidas en cualquier sistema de coordenadas, son

$$e_{ii} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{tr } e_{ij}e_{ij} = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\text{tr } e_{ij}e_{ji} = 2$  de la misma forma que antes.

Utilizando las propiedades de la delta, y estas tres propiedades, podemos obtener respectivamente:

$$0 = \overline{e_{ii} e_{kk}} = A \delta_{ii} \delta_{kk} + B \delta_{ik} \delta_{ik} + C \delta_{ik} \delta_{ik}$$

$$\therefore 9A + 3B + 3C = 0$$

$$\overline{e_{ij} e_{ij}} = A \delta_{ij} \delta_{ij} + B \delta_{ii} \delta_{jj} + C \delta_{ij} \delta_{ji}$$

$$= 3A + 9B + 3C = 2$$

$$\overline{e_{ij} e_{ji}} = A \delta_{ij} \delta_{ji} + B \delta_{ij} \delta_{ji} + C \delta_{ii} \delta_{jj}$$

$$= 3A + 3B + 9C = 2$$

Resolviendo el sistema de estas tres ecuaciones simultaneas, se obtienen los valores

$$A = -\frac{2}{15}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{5}$$

con lo que podemos escribir

$$\overline{e_{ij} e_{kl}} = -\frac{2}{15} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{5} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{5} \delta_{il} \delta_{jk}$$

Con esto, podemos poner

$$\overline{e_{ij} e_{kl}} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle =$$

$$= \frac{1}{5} \left( -\frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle$$

y como  $\delta_{ik} \delta_{jl} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle = \delta_{il} \delta_{jk} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle$   
se obtiene

$$\overline{e_{ij} e_{kl}} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle =$$

$$= \frac{1}{5} \left( -\frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \delta_{ik} \delta_{jl} \right) \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle$$

$$= \frac{2}{5} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle$$

$$= \frac{2}{5} \left[ \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^i x^j | n' \rangle - \frac{1}{3} |\langle n' | r^2 | n \rangle|^2 \right]$$

$$= \frac{2}{5} \langle r^2 \rangle_{n'n}^2$$

Con este resultado, el promedio sobre las polarizaciones del término cuadrupolar gravitatorio es

$$\frac{\pi^2 m_z^2}{4 \hbar^2} \omega_{n'n}^4 A_G^2(\omega_{n'n}) \overleftrightarrow{e}_{ij} \overleftrightarrow{e}_{kl} \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^k x^l | n' \rangle =$$

$$= \frac{\pi^2 m_z^2}{10 \hbar^2} \omega_{n'n}^4 A_G^2(\omega_{n'n}) |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2$$

Finalmente, recopilando los resultados de este apéndice se tiene

$$|\langle C_{n'n}(\infty) \rangle|^2 = \frac{\pi^2 m_z^2}{10 \hbar^2} \omega_{n'n}^4 A_G^2(\omega_{n'n}) |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2$$

$$+ \frac{4\pi^2 e^2 m_z^2}{3 \hbar^2 c^2 \mu^2} \omega_{n'n}^2 A_e^2(\omega_{n'n}) |\langle \vec{r} \rangle|_{n'n}^2$$

$$+ \frac{\pi^2 e^2}{10 \hbar^2 c^4} \omega_{n'n}^4 A_e^2(\omega_{n'n}) |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2$$

APENDICE B  
 ELEMENTOS DE MATRIZ, REGLAS DE SELECCION  
 Y COEFICIENTES DE EINSTEIN

En este apéndice se explica, sin entrar en todos los detalles de los cálculos, cómo se llegó a los valores de los coeficientes de Einstein, dando los valores de los elementos de matriz y reglas de selección que fue necesario calcular.

Sabemos que tanto para el caso electromagnético como para el gravitatorio, basta conocer uno de los tres coeficientes de Einstein para poder conocer los otros dos mediante las relaciones de Einstein. Por esta razón encontraremos primero los coeficientes de emisión espontánea  $A_{n'n}^G$  y  $A_{n'n}^e$ .

Según lo estudiado en el capítulo III, tenemos

$$A_{n'n}^G \propto |\langle r^2 \rangle_{n'n}^2 \quad \text{que es cuadrupolar}$$

$$A_{n'n}^e = A_{n'n}^e \text{ dip.} + A_{n'n}^e \text{ cuad.}$$

en donde

$$A_{n'n}^e \text{ cuad} \propto |\langle r^2 \rangle_{n'n}^2$$

El término dipolar  $A_{n'n}^e \text{ dip}$  lo encontramos calculado para los primeros niveles de energía que son los que nos interesan. Las reglas de selección en este caso son las dipolares, que son muy conocidas y no las mencionaremos aquí.

A los valores de  $A_{n'n}^e \text{ dip}$  (Condon y Shortley) tenemos que hacerles una corrección ya que como se mencionó, el radio de Bohr  $a$  que aparece en nuestras funciones de onda del hidrógeno es ligeramente diferente al radio de Bohr  $a_0$  que normalmente aparece. Sabemos que

$$A_{n'n}^e \text{ dip} \propto a^2$$

Por lo tanto, la corrección consiste en multiplicar los valores del libro por el factor

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 &\approx \left(1 - \frac{G m_1 m_2}{e^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{G}{\hbar c} \frac{\hbar c}{e^2} m_1 m_2\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{m_1 m_2}{M^2 \alpha}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{10^{-27}}{10^{-10} 10^{-2}}\right)^2 \approx (1 - 10^{-15})^2 \approx 1 \end{aligned}$$

Por lo que la corrección es insignificante.

Los valores de los coeficientes que nos interesan son

$$\begin{aligned} A_{41}^e \text{ dip} &= 0.678 \times 10^8 \text{ seg}^{-1} & A_{21}^e \text{ dip} &= 6.25 \times 10^8 \text{ seg}^{-1} \\ A_{43}^e \text{ dip} &= 0.257 \times 10^8 \text{ seg}^{-1} & A_{31}^e \text{ dip} &= 1.64 \times 10^8 \text{ seg}^{-1} & B-1 \\ A_{32}^e \text{ dip} &= 0.920 \times 10^8 \text{ seg}^{-1} \end{aligned}$$

Para calcular los valores de los coeficientes  $A_{n',n}^G$  y  $A_{n',n}^e$  es necesario evaluar primero el factor

$$|\langle r^z \rangle|_{n',n}^2 = \langle n' | x^i x^j | n \rangle \langle n | x^i x^j | n' \rangle - \frac{1}{3} |\langle n' | r^z | n \rangle|^2$$

Nos conviene hacer  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  para obtener

$$\begin{aligned} |\langle r^z \rangle|_{n',n}^2 &= |\langle n' | x^2 | n \rangle|^2 + |\langle n' | y^2 | n \rangle|^2 + |\langle n' | z^2 | n \rangle|^2 \\ &\quad + 2 |\langle n' | xy | n \rangle|^2 + 2 |\langle n' | xz | n \rangle|^2 \\ &\quad + 2 |\langle n' | yz | n \rangle|^2 - \frac{1}{3} |\langle n' | r^z | n \rangle|^2 \quad B-2 \end{aligned}$$

Para encontrar estos valores, tenemos que saber primero los elementos de matriz involucrados. Para esto recordemos que los elementos de matriz están dados por

$$\langle n' | x^z | n \rangle = \sum_{\substack{n,l \\ n',l'}} \langle n' | l' m' | x^z | n l m \rangle$$

y análogamente para los elementos de matriz correspondientes a  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ ,  $r^2$ .

En esta expresión, los elementos de matriz dentro de la sumatoria están dados por

$$\langle n'l'm' | x^2 | nlm \rangle = \int \psi_{n'l'm'}^* x^2 \psi_{nlm} dV$$

Las funciones de onda  $\psi_{nlm}$  son las del hidrógeno normalizadas, que en coordenadas esféricas tienen la forma

$$\psi_{nlm} = \frac{(-1)^m}{a^3} \left\{ \frac{4(n-l-1)!}{n^4(n+l+1)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-kr} (2kr)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(2kr) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$$k = \frac{1}{na}$$

En la integral deben expresarse  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $xy$ , etc. así como  $dV$  en coordenadas esféricas.

Evaluar todos los elementos de matriz fué un trabajo sencillo pero laborioso. Abarcaría mucho espacio incluir aquí todos los detalles. Se trata simplemente de hacer muchas integrales de las que se obtienen las reglas de selección y los valores de los elementos de matriz de las transiciones permitidas por estas reglas de selección.

Al hacer la parte angular de las integrales se obtienen las siguientes reglas de selección



$$\langle n'l'm' | x^2 | nlm \rangle$$

$\vdots$   
 $\vdots$   
 $\vdots$   
 $y^2$   
 $z^2$   
 $xy$   
 $xz$   
 $yz$   
 $r^2$

$$l' = l \pm 2, l' = l$$

$$l' = 0 \rightarrow l = 0 \text{ prohibida}$$

$$m' = m \pm 2, m' = m$$

$\ddot{\text{}}$   
 $\ddot{\text{}}$   
 $\ddot{\text{}}$   
 $\ddot{\text{}}$   
 $\ddot{\text{}}$   
 $\ddot{\text{}}$

$\ddot{\text{}}$   
 $m' = m$   
 $m' = m \pm 2$   
 $m' = m \pm 1$   
 $m' = m \pm 1$   
 $m' = m$

$$l' = l$$

$$l' = 0 \rightarrow l = 0 \text{ prohibida}$$

Al hacer las integrales completas, los valores de los elementos de matriz que nos interesan y que están permitidos por las reglas de selección son

$$\langle n'l'm' | x^2 | nlm \rangle$$

$$\begin{aligned} l' &= l \\ l' &= l \pm 2 \\ l' &= 0 \rightarrow l = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} m' &= m \\ m' &= m \pm 2 \end{aligned}$$

$$\langle 433 | x^2 | 311 \rangle = -45.21 a^2$$

$$\langle 432 | x^2 | 310 \rangle = -26.56 a^2$$

$$\langle 431 | x^2 | 311 \rangle = 6.48 a^2$$

$$\langle 431 | x^2 | 31-1 \rangle = -10.76 a^2$$

$$\langle 430 | x^2 | 310 \rangle = 7.76 a^2$$

$$\langle 43-1 | x^2 | 311 \rangle = -3.74 \times 10^{-4} a^2$$

$$\langle 43-1 | x^2 | 31-1 \rangle = 14.81 a^2$$

$$\langle 43-2 | x^2 | 310 \rangle = -7.13 \times 10^{-5} a^2$$

$$\langle 43-3 | x^2 | 31-1 \rangle = -4.5 \times 10^{-4} a^2$$

$$\langle 422 | x^2 | 322 \rangle = -45.3 a^2$$

$$\langle 422 | x^2 | 320 \rangle = 46.39 a^2$$

$$\langle 421 | x^2 | 321 \rangle = -7.22 a^2$$

$$\langle 421 | x^2 | 32-1 \rangle = 56.65 a^2$$

$$\langle 420 | x^2 | 322 \rangle = 46.35 a^2$$

$$\langle 420 | x^2 | 320 \rangle = -24.63 a^2$$

$$\langle 420 | x^2 | 32-2 \rangle = 46.43 a^2$$

$$\langle 42-1 | x^2 | 321 \rangle = 56.65 a^2$$

$$\langle 42-1 | x^2 | 32-1 \rangle = -243.47 a^2$$

$$\langle 42-2 | x^2 | 320 \rangle = 46.43 a^2$$

$$\langle 42-2 | x^2 | 32-2 \rangle = -39.60 a^2$$

$$\langle 422 | x^2 | 300 \rangle = -33.92 a^2$$

$$\langle 420 | x^2 | 300 \rangle = 3.04 a^2$$

$$\langle 42-2 | x^2 | 300 \rangle = -0.33 \times 10^{-4} a^2$$

$$\langle 400 | x^2 | 322 \rangle = -224.28 a^2$$

$$\langle 400 | x^2 | 320 \rangle = 181.02 a^2$$

$$\langle 400 | x^2 | 32-2 \rangle = -221.97 a^2$$

$$\langle 411 | x^2 | 311 \rangle = -15.93 a^2$$

$$\langle 411 | x^2 | 31-1 \rangle = 14.38 a^2$$

$$\langle 410 | x^2 | 310 \rangle = -7.83 a^2$$

$$\langle 41-1 | x^2 | 311 \rangle = 7.19 a^2$$

$$\langle 41-1 | x^2 | 31-1 \rangle = 12.94 a^2$$

$$\langle 422 | x^2 | 100 \rangle = 0.21 a^2$$

$$\langle 420 | x^2 | 100 \rangle = -0.02 a^2$$

$$\langle 42-2 | x^2 | 100 \rangle = 5.04 \times 10^{-6} a^2$$

$$\langle 322 | x^2 | 200 \rangle = -1.82 a^2$$

$$\langle 320 | x^2 | 200 \rangle = 0.16 a^2$$

$$\langle 32-2 | x^2 | 200 \rangle = -4.47 \times 10^{-5} a^2$$

$$\langle 311 | x^2 | 211 \rangle = -9.22 a^2$$

$$\langle 311 | x^2 | 21-1 \rangle = 8.32 a^2$$

$$\langle 310 | x^2 | 210 \rangle = -4.53 a^2$$

$$\langle 31-1 | x^2 | 211 \rangle = 4.16 a^2$$

$$\langle 31-1 | x^2 | 21-1 \rangle = 7.49 a^2$$

$$\langle 322 | x^2 | 100 \rangle = 0.35 a^2$$

$$\langle 320 | x^2 | 100 \rangle = -0.03 a^2$$

$$\langle 32-2 | x^2 | 100 \rangle = 8.7 \times 10^{-6} a^2$$

$$\langle n'l'm' | y^z | nlm \rangle$$

$$l' = l$$

$$m' = m$$

$$l' = l \pm 2$$

$$m' = m \pm 2$$

$$l' = 0 \rightarrow l = 0$$

En este caso la tabla es idéntica a la de  $x^2$  salvo algunos signos:

$$\langle n'l'm' | y^z | nlm \rangle = -\langle n'l'm' | x^z | nlm \rangle \text{ cuando } m' = m \pm 2$$

$$\langle n'l'm' | z^z | nlm \rangle$$

$$l' = l$$

$$m' = m$$

$$l' = l \pm 2$$

$$l' = 0 \rightarrow l = 0$$

$$\langle 431 | z^z | 311 \rangle = -47.70a^2$$

$$\langle 430 | z^z | 310 \rangle = -55.87a^2$$

$$\langle 43-1 | z^z | 31-1 \rangle = 88.86a^2$$

$$\langle 422 | z^z | 322 \rangle = -30.19a^2$$

$$\langle 421 | z^z | 321 \rangle = -44.38a^2$$

$$\langle 420 | z^z | 320 \rangle = -63.01a^2$$

$$\langle 42-1 | z^z | 32-1 \rangle = -44.13a^2$$

$$\langle 42-2 | z^z | 32-2 \rangle = -14.80a^2$$

$$\langle 420 | z^z | 300 \rangle = -54.73a^2$$

$$\langle 411 | z^z | 311 \rangle = -3.73a^2$$

$$\langle 410 | z^z | 310 \rangle = -20.81a^2$$

$$\langle 41-1 | z^z | 31-1 \rangle = -6.45a^2$$

$$\langle 400 | z^z | 320 \rangle = -361.86a^2$$

$$\langle 420 | z^z | 100 \rangle = 10.16a^2$$

$$\langle 320 | z^z | 200 \rangle = -2.44a^2$$

$$\langle 311 | z^z | 211 \rangle = -4.59a^2$$

$$\langle 310 | z^z | 210 \rangle = -10.51a^2$$

$$\langle 31-1 | z^z | 21-1 \rangle = -3.74a^2$$

$$\langle 320 | z^z | 100 \rangle = 0.57a^2$$

$$\langle n'l'm'|xy|nlm\rangle$$

$$l' = l$$

$$m' = m \pm 2$$

$$l' = l \pm 2$$

$$l' = 0 \rightarrow l = 0$$

$$\langle 433|xy|311\rangle = -45.21ia^2$$

$$\langle 432|xy|310\rangle = -26.56ia^2$$

$$\langle 431|xy|31-1\rangle = -10.76ia^2$$

$$\langle 43-1|xy|311\rangle = 3.74 \times 10^{-4}ia^2$$

$$\langle 43-2|xy|310\rangle = 7.13 \times 10^{-5}ia^2$$

$$\langle 43-3|xy|31-1\rangle = 4.5 \times 10^{-4}ia^2$$

$$\langle 422|xy|320\rangle = 46.39ia^2$$

$$\langle 421|xy|32-1\rangle = 56.65ia^2$$

$$\langle 420|xy|322\rangle = -46.35ia^2$$

$$\langle 420|xy|32-2\rangle = 46.43ia^2$$

$$\langle 42-1|xy|321\rangle = -56.65ia^2$$

$$\langle 42-2|xy|320\rangle = -46.43ia^2$$

$$\langle 422|xy|300\rangle = -33.92ia^2$$

$$\langle 42-2|xy|300\rangle = 8.33 \times 10^{-4}ia^2$$

$$\langle 411|xy|31-1\rangle = 14.38ia^2$$

$$\langle 41-1|xy|311\rangle = -7.19ia^2$$

$$\langle 400|xy|322\rangle = 224.28ia^2$$

$$\langle 400|xy|32-2\rangle = -221.77ia^2$$

$$\langle 422|xy|100\rangle = 0.21ia^2$$

$$\langle 42-2|xy|100\rangle = -5.04 \times 10^{-6}ia^2$$

$$\langle 322|xy|200\rangle = -1.82ia^2$$

$$\langle 32-2|xy|200\rangle = 4.47 \times 10^{-5}ia^2$$

$$\langle 311|xy|21-1\rangle = 8.32ia^2$$

$$\langle 31-1|xy|211\rangle = -4.16ia^2$$

$$\langle 322|xy|100\rangle = 0.35ia^2$$

$$\langle 32-2|xy|100\rangle = -8.7 \times 10^{-6}ia^2$$

$$\langle n'l'm'|xz|nlm\rangle$$

$$l' = l$$

$$m' = m \pm 1$$

$$l' = l \pm 2$$

$$l' = 0 \rightarrow l = 0$$

$$\langle 432|xz|311\rangle = -53.11a^2$$

$$\langle 431|xz|310\rangle = 46.75a^2$$

$$\langle 430|xz|31-1\rangle = 12.20a^2$$

$$\langle 430|xz|311\rangle = 7.84a^2$$

$$\langle 43-1|xz|310\rangle = 36.21a^2$$

$$\langle 43-2|xz|31-1\rangle = 19.93a^2$$

$$\langle 422|xz|321\rangle = -15.10a^2$$

$$\langle 421|xz|322\rangle = -15.10a^2$$

$$\langle 421|xz|320\rangle = -6.10a^2$$

$$\langle 420|xz|321\rangle = -6.10a^2$$

$$\langle 420|xz|32-1\rangle = 6.02a^2$$

$$\langle 42-1|xz|320\rangle = 6.02a^2$$

$$\langle 42-1|xz|32-2\rangle = 14.77a^2$$

$$\langle 42-2|xz|32-1\rangle = 14.77a^2$$

$$\langle 421|xz|300\rangle = -28.25a^2$$

$$\langle 42-1|xz|300\rangle = 11.15a^2$$

$$\langle 411|xz|310\rangle = -5.58a^2$$

$$\langle 410|xz|311\rangle = -5.58a^2$$

$$\langle 410|xz|31-1\rangle = 5.02a^2$$

$$\langle 41-1|xz|310\rangle = 5.02a^2$$

$$\langle 400|xz|321\rangle = -373.37a^2$$

$$\langle 400|xz|32-1\rangle = 73.72a^2$$

$$\langle 421|xz|100\rangle = 0.17a^2$$

$$\langle 42-1|xz|100\rangle = 0.07a^2$$

$$\langle 321|xz|200\rangle = -1.52a^2$$

$$\langle 32-1|xz|200\rangle = 0.60a^2$$

$$\langle 321|xz|100\rangle = 0.30a^2$$

$$\langle 32-1|xz|100\rangle = -0.12a^2$$

$$\langle n'l'm'|yz|nlm\rangle$$

$$\begin{aligned} l' &= l \\ l' &= l \pm 2 \\ l' &= 0 \rightarrow l = 0 \end{aligned}$$

$$m' = m \pm 1$$

$$\langle 432|yz|311\rangle = -26.56ia^2$$

$$\langle 431|yz|310\rangle = 23.38ia^2$$

$$\langle 430|yz|311\rangle = -6.1ia^2$$

$$\langle 430|yz|31-1\rangle = 3.12ia^2$$

$$\langle 43-1|yz|310\rangle = -18.1ia^2$$

$$\langle 43-2|yz|31-1\rangle = -9.97ia^2$$

$$\langle 422|yz|321\rangle = -7.55ia^2$$

$$\langle 421|yz|322\rangle = 7.55ia^2$$

$$\langle 421|yz|320\rangle = -3.05ia^2$$

$$\langle 420|yz|321\rangle = 3.05ia^2$$

$$\langle 420|yz|32-1\rangle = 3.01ia^2$$

$$\langle 42-1|yz|320\rangle = -3.01ia^2$$

$$\langle 42-1|yz|32-2\rangle = 7.39ia^2$$

$$\langle 42-2|yz|32-1\rangle = -7.39ia^2$$

$$\langle 421|yz|300\rangle = -14.13ia^2$$

$$\langle 42-1|yz|300\rangle = -5.58ia^2$$

$$\langle 411|yz|310\rangle = -2.79ia^2$$

$$\langle 410|yz|311\rangle = 2.79ia^2$$

$$\langle 410|yz|31-1\rangle = 2.51ia^2$$

$$\langle 41-1|yz|310\rangle = -2.51ia^2$$

$$\langle 400|yz|321\rangle = 186.69ia^2$$

$$\langle 400|yz|32-1\rangle = 36.80ia^2$$

$$\langle 421|yz|100\rangle = 0.09ia^2$$

$$\langle 42-1|yz|100\rangle = -0.04ia^2$$

$$\langle 321|yz|200\rangle = -0.76ia^2$$

$$\langle 32-1|yz|200\rangle = -0.30ia^2$$

$$\langle 321|yz|100\rangle = 0.15ia^2$$

$$\langle 32-1|yz|100\rangle = 0.06ia^2$$

$$\langle n'l'm'|r^2|nlm\rangle$$

$$\begin{aligned} l' &= l \\ l' &= 0 \rightarrow l = 0 \end{aligned}$$

$$m' = m$$

$$\langle 433|r^2|322\rangle = -105.76a^2$$

$$\langle 421|r^2|321\rangle = -105.76a^2$$

$$\langle 420|r^2|320\rangle = 103.49a^2$$

$$\langle 42-1|r^2|32-1\rangle = 108.22a^2$$

$$\langle 42-2|r^2|32-2\rangle = 105.81a^2$$

$$\langle 411|r^2|311\rangle = -39.84a^2$$

$$\langle 410|r^2|310\rangle = -39.84a^2$$

$$\langle 41-1|r^2|31-1\rangle = -32.27a^2$$

Con los valores dados en estas tablas, sustituyéndolos en la expresión (B-2), podemos obtener los  $|\langle r^2 \rangle|_{n'm}^2$  que nos interesan. Por ejemplo, para obtener  $|\langle r^2 \rangle|_{31}^2$  calculamos primero

$$\langle 3|x^2|1\rangle = \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} \langle 3l'm'|x^2|1lm\rangle = 0.38a^2$$

y análogamente

$$\langle 3|y^2|1\rangle = 0.38a^2$$

$$\langle 3|z^2|1\rangle = 0.57a^2$$

$$\langle 3|xy|1\rangle = 0.35a^2$$

$$\langle 3|xz|1\rangle = 0.18a^2$$

$$\langle 3|yz|1\rangle = 0.21a^2$$

$$\langle 3|r^2|1\rangle = 0$$

Sustituyendo estos valores en (B-2) resulta

$$|\langle r^2 \rangle|_{31}^2 = 0.433a^4$$

y como el radio de Bohr es  $a = 0.529 \times 10^{-8}$  cm, tenemos

$$|\langle r^2 \rangle|_{31}^2 = 7.2670 \times 10^{-34} \text{ cm}^4$$

Los valores de  $|\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2$  restantes se calculan de la misma manera. Los resultados son

$$|\langle r^2 \rangle|_{31}^2 = 7.2670 \times 10^{-34} \text{ cm}^4$$

$$|\langle r^2 \rangle|_{41}^2 = 8.058 \times 10^{-32} \text{ cm}^4$$

$$|\langle r^2 \rangle|_{43}^2 = 8.3897 \times 10^{-28} \text{ cm}^4$$

$$|\langle r^2 \rangle|_{32}^2 = 6.1566 \times 10^{-31} \text{ cm}^4$$

$$|\langle r^2 \rangle|_{21}^2 = 0$$

Con estos valores ya podemos calcular los coeficientes de Einstein de emisión espontánea

$$A_{n'n}^G = \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{2Gm_e^2}{5\hbar c^5} \omega_{n'n}^5 |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2, \quad A_{n'n}^E = \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{\alpha}{10c^2} \omega_{n'n}^5 |\langle r^2 \rangle|_{n'n}^2$$

Las multiplicidades  $g_n$  y  $g_{n'}$  de los niveles, representan el grado de degeneración de los mismos, es decir el número de estados en que puede estar el átomo con el número cuántico  $n$  fijo, o sea con la misma energía. Estas multiplicidades están dadas por los valores que pueden tomar los demás números cuánticos que determinan un estado, que en nuestro caso son  $l$  y  $m$  que como es sabido, en el átomo de hidrógeno pueden tomar los valores

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad |m| = l$$

Con base en esto, tenemos que

$$g_1 = \# \{ |100\rangle \} = 1$$

$$g_2 = \# \{ |211\rangle, |210\rangle, |21-1\rangle, |200\rangle \} = 4$$

$$g_3 = \# \{ |322\rangle, |321\rangle, |320\rangle, |32-1\rangle, |32-2\rangle, |311\rangle, \\ |310\rangle, |31-1\rangle, |300\rangle \} = 9$$

$$g_4 = \# \{ |433\rangle, |432\rangle, |431\rangle, |430\rangle, |43-1\rangle, |43-2\rangle, \\ |43-3\rangle, |422\rangle, |421\rangle, |420\rangle, |42-1\rangle, |42-2\rangle, \\ |411\rangle, |410\rangle, |41-1\rangle, |400\rangle \} = 16$$

Las frecuencias  $\omega_{n'n}$  están dadas por

$$\omega_{n'n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar} = \frac{e^2}{2a\hbar} \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Recordando que  $m_2$  es la masa del electrón, e la carga del electrón y  $m_1$  la masa del protón podemos obtener ya los valores de los coeficientes de Einstein cuadrupolares. Los resultados son

$$A_{31}^G = \frac{g_1}{g_3} \frac{m_2^2 G}{5\hbar c^5} \omega_{31}^5 |\langle r^2 \rangle|_{31}^2 = 3.1947 \times 10^{-35} \text{ seg}^{-1}$$

$$A_{41}^e = \frac{g_1}{g_4} \frac{\alpha}{10c^4} \omega_{41}^5 |\langle r^2 \rangle|_{41}^2 = 1.2575 \times 10^4 \text{ seg}^{-1}$$

$$A_{43}^e = 4.4170 \times 10^2 \text{ seg}^{-1}$$

$$A_{32}^e = 48.7689 \text{ seg}^{-1}$$

$$A_{31}^e = 4.5710 \times 10^4 \text{ seg}^{-1}$$

$$A_{21}^e = 0$$



Con estos coeficientes podemos calcular los que faltan.

Tomando en cuenta la notación del capítulo III se obtiene

$$S_{31}^G = A_{31}^G = 9.3254 \times 10^{-41} \text{ seg}^{-1}$$

$$S_{41}^e = A_{41}^e = A_{41 \text{ dip}}^e + A_{41 \text{ cuad}}^e = 6.7812 \times 10^7 \text{ seg}^{-1}$$

$$S_{43}^e = A_{43}^e = A_{43 \text{ dip}}^e + A_{43 \text{ cuad}}^e = 2.57 \times 10^7 \text{ seg}^{-1}$$

$$R^e = A_{32}^e + A_{21}^e + A_{31}^e$$

$$= A_{32 \text{ dip}}^e + A_{32 \text{ cuad}}^e + A_{21 \text{ dip}}^e + A_{21 \text{ cuad}}^e$$

$$+ A_{31 \text{ dip}}^e + A_{31 \text{ cuad}}^e =$$

$$= 8.81 \times 10^8 \text{ seg}^{-1}$$

Además, como

$$W_{41}^e = B_{41}^e u_e(\omega), B_{41}^e = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega_{41}^3} A_{41}^e, B_{14}^e = \frac{g_4}{g_1} B_{41}^e$$

tenemos

$$W_{41}^e = 2.3349 \times 10^{18} u_e(\omega) \text{ seg}^{-1}$$

$$W_{14}^e = (16)(2.3349) \times 10^{18} u_e(\omega) \text{ seg}^{-1}$$

$$= 3.7360 \times 10^{19} u_e(\omega) \text{ seg}^{-1}$$

Finalmente agrupamos en una tabla los resultados obtenidos en este apéndice que serán utilizados en el capítulo IV

$$\begin{aligned}W_{14}^e &= 3.7360 \times 10^{19} u_e(\omega) \text{ seg}^{-1} \\W_{41}^e &= 2.3349 \times 10^{18} u_e(\omega) \text{ seg}^{-1} \\S_{41}^e &= 6.7812 \times 10^7 \text{ seg}^{-1} \\S_{43}^e &= 2.5700 \times 10^7 \text{ seg}^{-1} \\R^e &= 8.8106 \times 10^8 \text{ seg}^{-1} \\S_{31}^e &= 4.5710 \times 10^4 \text{ seg}^{-1} \\S_{31}^G &= 9.3254 \times 10^{-41} \text{ seg}^{-1}\end{aligned}$$

TABLA B-1

VELOCIDADES DE TRANSICION

REFERENCIAS

Arfken, G., 1971, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York

Bethe, H. A. and Jackiw, R., 1968, Intermediate Quantum Mechanics, The Benjamin Cummings Publishing Company, Massachusetts.

Condon, E. U. and Shortley, G. H., 1959, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., 1980, Table of Integrals Series and Products, Academic Press, New York.

Jackson, J. D., 1975, Classical Electrodynamics, Wiley, New York.

Jenkins, F. A. and White, H. E., 1976, Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Kogakusha, LTD.

Landau, L. D. y Lifshitz, E. M., 1970, Teoría Clásica de los Campos (Volumen 2 del curso de Física Teórica), Editorial Reverté, S.A., Barcelona.

Lengyel, B. A., 1971, Lasers, John Wiley & Sons, New York.

Merzbacher, E., 1970, Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York.

Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., 1973, Gravitation,  
W. H. Freeman, San Francisco.

Ni, W. T. and Zimmerman, M., 1978, Inertial and Gravitational  
Effects in The Proper Reference Frame of an Accelerated and  
Rotating Observer, Phys. Rev. D 17, 1473.

Weinberg, S., 1972, Gravitation and Cosmology: Principles and  
Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley  
& Sons, New York.