Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

El Balanceo Dinámico de Rotores Elásticos

TESIS

Que para obtener el título de :

F I S I C O

Presenta:

ERNESTO RIVERA ONTIVEROS

México D.F. 1985

INDICE

INTRODUCCION

Nuestra vida está rodeada de maquinaria rotatoria: las ruedas del tren o del automovil; las turbinas de los jets y de los barcos; las hélices de los helicopteros, y además de la gran importancia que esto representa para el transporte, podemos pensar en las turbinas de gas de las plantas termoelectricas, en los rotores de los motores eléctricos etc. etc..

Cuando se opera un rotor desbalanceado aparecen ciertas vibraciones transversales al eje del rotor producidas por la accion centrífuga del desbalanceo. Estas vibraciones aumentan con la velocidad del rotor hasta cierta velocidad conocida como la primera velocidad crítica.

El proposito de los primeros cuatro capítulos de este trabajo es analizar el movimiento de un rotor elástico sujeto a la accion centrífuga de su propio desbalanceo.

El desarrollo de la teoría del balanceo dinámico ha sido paralelo al de la fabricación de esas maquinas. A medida que se ha presentado la necesidad de maquinas mas rápidas, la labor del balanceo dinamico se ha hecho mas difícil.

En esta tesis consideramos el desarrollo de las teorias relacionadas con el balanceo dinamico hasta el presente y se sugieren dos tipos de máquinas balanceadoras para medir las vibraciones del rotor desbalanceado y un programa de computacion en lenguaje BASIC para calcular las masas correctivas, y sus posiciones angulares (respecto a los pesos de prueba), de acuerdo con el metodo de los mínimos cuadrados, mediante el cual se puede balancear cualquier numero de planos si se hacen las mediciones correspondientes con y sin pesos de prueba.

Otro proposito de esta tesis consiste en evaluar los diferentes tipos de maquinas balanceadoras y colaborar en la eventual fabricacion de un analizador de vibraciones portatil y con transductores de posicion tipo capacitivo.

CONCEPTOS GENERALES

CAPITULO 1

A) EL BALANCEO ESTATICO

Considerese un rotor rigido que consiste en un disco de momento de inercia I con respecto a su eje de simetría, con un peso de desbalanceo P que se pone a oscilar alrededor de su posicion de equilibrio, ejecutando un movimiento pendular de pequeña amplitud, como se muestra en la figura 1.1.

La función de Lagrange para este oscilador armonico es claramente:

$$L = T - V = \frac{I\Omega^2}{2} - \left[Pr\,sen\,\alpha \right] \frac{\theta^2}{2}$$

de donde deducimos la ecuacion del movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

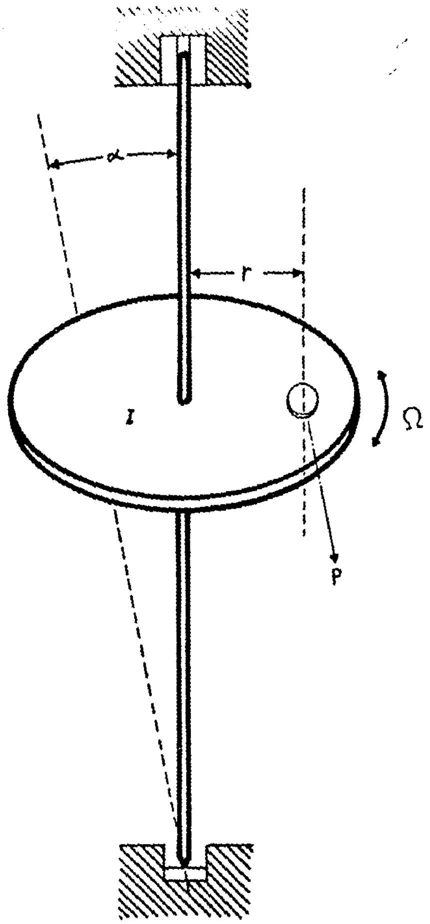


FIGURA 1.1
OSCILADOR ARMONICO PENDULAR

como

$$q = \theta$$

y

$$\dot{q} = \Omega$$

entonces tenemos que:

$$I\ddot{\theta} + (Pr\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\theta = 0$$

o sea:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Pr\,\mathrm{sen}\,\alpha}{I}\,\theta$$

por lo cual, la frecuencia angular natural es:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{Pr\,\mathrm{sen}\,\alpha}{I}} \qquad (1.1)$$

El desbalanceo estático es una magnitud vectorial con dos grados de libertad; amplitud y fase.

La fase del desbalanceo se conoce cuando se determina el punto de equilibrio del rotor. La amplitud del desbalanceo se puede medir en [grXcm] si se pone $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y r=1cm. Entonces la ecuación (1.1) se reduce a:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{P}{I}}$$

de donde podemos despejar a P cuyas unidades son [grXcm]:

$$P = \Omega_0^2\, I$$

El momento de inercia del rotor se podrá calcular siempre que se conozca su geometría y densidad mientras que su frecuencia natural se puede medir. En principio así es como se puede determinar la magnitud del desbalanceo estático.

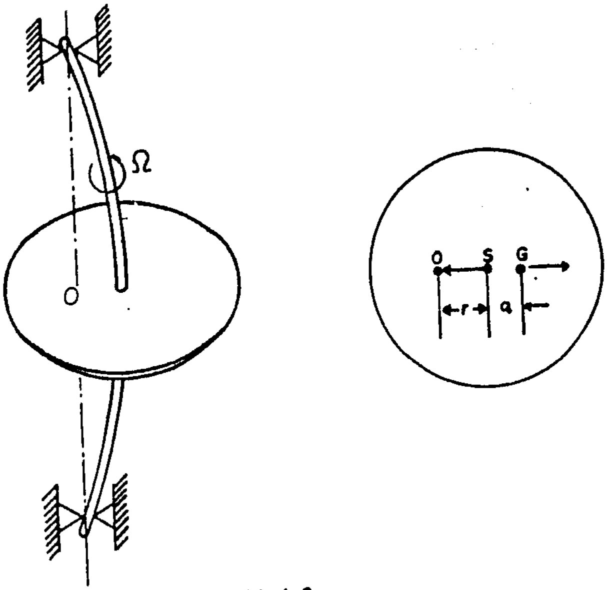


FIGURA 1.2

RELACIONES GEOMETRICAS ENTRE EL CENTRO DE GRAVEDAD, EL DE SIMETRIA Y EL EJE DE LOS BALEROS.

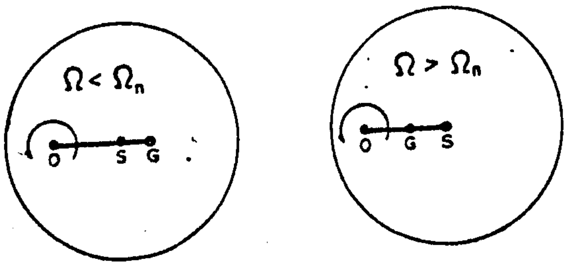


FIGURA 1.3

CAMBIO DE FASE EN LA VELOCIDAD CRITICA

B) LA VELOCIDAD CRITICA

Los rotores tienden a vibrar violentamente en direccion transversal, a ciertas velocidades conocidas como velocidades críticas o de resonancia. Este fenómeno resulta del desbalanceo del sistema rotacional y se puede demostrar que las velocidades críticas coinciden con las frecuencias naturales de vibración transversal del rotor.

Considerese un disco de masa m simetricamente colocado entre dos baleros como se muestra en la figura 1.2, el cual gira con velocidad constante Ω. En la misma figura se muestra una vista superior instantanea del rotor con desplazamientos muy exagerados. El centro de gravedad G del disco esta a una distancia radial a de su centro geometrico S. El centro de la linea de los baleros interseca al plano del disco en O, y el centro del rotor queda descentrado por una distancia OS=r.

Despreciando el efecto de la gravedad y la fricción, el disco solo esta afectado por la acción de dos fuerzas a saber: la fuerza restitutiva del eje dirigida de S a O, y la fuerza centrífuga sobre G. Es evidente que para que estén en equilibrio estas dos fuerzas deben ser colineales, iguales en magnitud y en dirección opuesta, para ello los puntos O, S y G deben estar alineados.

La deflexion lateral r del centro del disco se puede determinar al igualar simplemente las dos fuerzas involucradas.

La fuerza restitutiva del eje del rotor es $-kr$ donde k es la rigidez lateral del eje, y la fuerza centrífuga es igual a $m\Omega^2(r+a)$.

Equilibrándolas, se obtiene:

$$kr = m\Omega^2(r+a)$$

despejando r, se obtiene:

$$r = \frac{m\Omega^2 a}{k - m\Omega^2} = \frac{(\Omega^2/\Omega_n^2)a}{1 - m\Omega^2/k\Omega_n^2} \qquad (1.2)$$

donde $\Omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural de vibración lateral del rotor a velocidad cero.

La ecuación (1.2) indica que la velocidad crítica del rotor es igual a la frecuencia natural de vibración lateral del eje con su disco. r es positiva antes de la velocidad crítica y negativa para velocidades mayores que Ω_n, lo que implica que el sistema gira con el lado pesado G hacia afuera de S, mientras que para Ω mayor que Ω_n el lado ligero, u opuesto a G, queda hacia afuera de S como se muestra en la figura 1.3. Para velocidades muy grandes $\Omega \gg \Omega_n$, la amplitud r se hace igual a $-a$ y los puntos O y G coinciden; o sea que el disco gira alrededor de su centro de masa.

El análisis anterior es un caso particular de uno más general que considera la fricción. Las fuerzas tales como la fricción del aire que se oponen al movimiento rotacional, se pueden introducir como una fuerza F aplicada en el eje y un momento de fuerza respecto al centro del eje, este último es contrarrestado por la torca de tracción del eje debida al motor.

Por simplicidad, la fuerza de amortiguamiento F que actúa sobre S se puede considerar de naturaleza viscosa y por lo tanto proporcional a la velocidad tangencial $r\Omega$. la expresión para F se puede escribir como sigue:

$$F = -cr\Omega \qquad (1.3)$$

donde c es el coeficiente de fricción viscosa.

La presencia de la fuerza de fricción F permite la introduccion de una fase ϕ por la cual la linea a precede a la linea r como se muestra en la figura 1.4. Las fuerzas indicadas en este diagrama tendrán este efecto si se supone que los puntos O, S y G permanecen fijos entre si, y la configuración completa gira alrededor de O con velocidad Ω.

Ahora investigamos las condiciones de equilibrio que deben confirmar esta suposición.

Sumando las fuerzas en dirección de r y perpendiculares a r obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-Kr + m\Omega^2\cos\alpha = 0$$
$$-cr\Omega + m\Omega^2\operatorname{sen}\alpha = 0$$

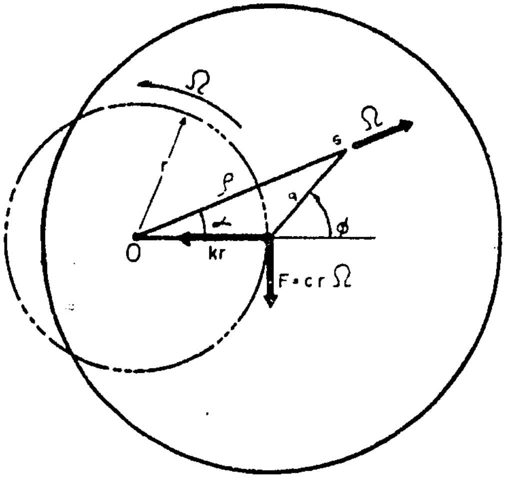


FIGURA 1.4
INTRODUCCION DE UNA FASE DEBIDA A LA FRICCION

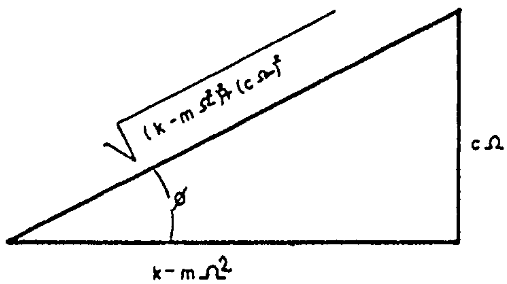


FIGURA 1.5
CONSTRUCCION GEOMETRICA DE φ

por la geometría de la figura, α y ϕ estan relacionadas como sigue:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{sen}\alpha &= a \operatorname{sen}\phi \\ \rho\cos\alpha &= r + a\cos\phi \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Sustituyendo las relaciones (1.4) en las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$\begin{aligned} -Kr + m\Omega^2(r + a\cos\phi) &= 0 \\ -cr\Omega + m\Omega^2 a \operatorname{sen}\phi &= 0 \end{aligned} \qquad (1.5)$$

y resolviendo simultáneamente para ϕ y r (ver figura 1.5):

$$\tan\phi = \frac{c\Omega}{K - m\Omega^2} = \frac{2\zeta\Omega/\Omega_n}{1 - (\Omega/\Omega_n)} \qquad (1.6)$$

$$r = \frac{m\Omega^2 a\cos\phi}{K - m\Omega^2} = \frac{m\Omega^2 a}{\sqrt{(K - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

$$r = \frac{a(\Omega/\Omega_n)^2}{\sqrt{(1-(\Omega/\Omega_n)^2)^2 + (2\zeta(\Omega/\Omega_n))^2}} \qquad (1.7)$$

La ecuación (1.6) indica que ϕ es una constante para una velocidad Ω dada, lo cual confirma la hipótesis de que los puntos O, S y G permanecen fijos unos respecto a otros y solo giran alrededor de O con velocidad angular constante. Tambien indica que cuando Ω es muy pequeña en comparacion con Ω_n, el disco gira con G hacia afuera de S. Cuando $\Omega = \Omega_n$, la linea de excentricidad a precede a la deflexión lateral r por 90°. Para velocidades mayores que la velocidad crítica, ϕ es mayor que 90° y se aproxima a 180° para velocidades muy grandes, esto es, el lado ligero se mantiene hacia afuera de S (ver figura 1.6). Como se puede ver de la ecuación (1.7) para velocidades muy grandes el término $m\Omega^2$ se hace predominante y entonces r se aproxima a a. El punto O coincide con el punto G, y el sistema gira alrededor de su centro de gravedad. La figura 1.7 muestra las gráficas de las ecuaciones (1.6) y (1.7).

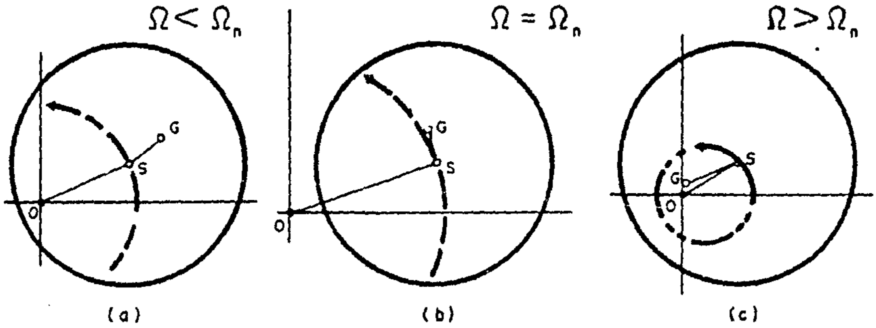


FIGURA 1.6

POSICIONES RELATIVAS DE O, S y G PARA DIFERENTES VELOCIDADES

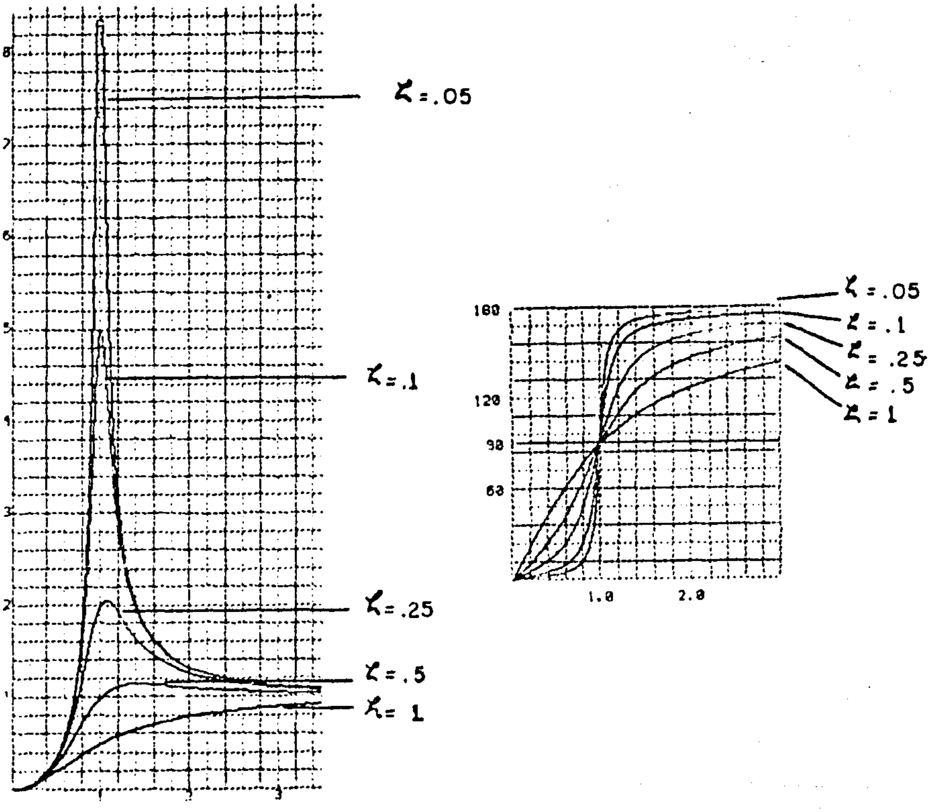


FIGURA I.7

GRAFICAS DE LAS ECUACIONES I.7

D) EL BALANCEO DINAMICO

El desbalanceo que aun persiste después de balancear estáticamente es el desbalanceo dinámico y para su corrección es necesario agregar parejas de pesos, para que no se altere la corrección lograda por el balanceo estático; es decir, para que no se altere la posición del centro de masa. Para detectar este tipo de desbalanceo es necesario hacer girar al rotor cerca de su primera velocidad critica. En la figura 1.8 se muestra un caso de desbalanceo tanto dinámico como estático. Supongamos que P y Q son las únicas masas perturbadoras del balanceo. Sin embargo, su efecto se puede eliminar aplicando masas correctivas en cualquier par de planos transversales al eje de giro.

De este modo el efecto de P es equivalente a la pareja de pesos P(b/l) y P(a/l) sobre los planos 1 y 2 respectivamente como se muestra en la figura 1.8; asimismo, Q equivale a la pareja de pesos Q(c/l) y Q(d/l).

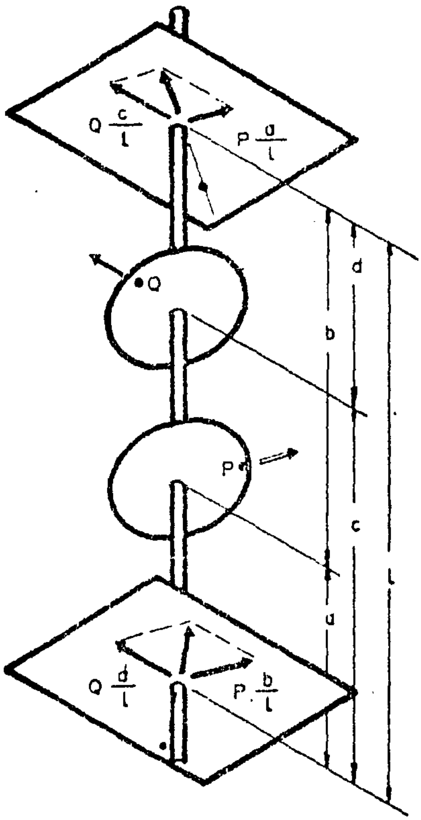


FIGURA 1.8

EL BALANCEO DINAMICO SE PUEDE EFECTUAR EN CUAQUIER PAR DE PLANOS

LAS FUERZAS DE RESISTENCIA AL MOVIMIENTO

CAPITULO 2

A) LA RESISTENCIA INTERNA

Según el profesor Sumiji Fujii [4], varios autores han confirmado que la amplitud en las vibraciones laterales de un rotor, girando a su velocidad crítica se pueden reducir si se opera el rotor en agua o en aceite, pero en contraste, el profesor Kimball* reporta la llamada fricción interna del material del rotor, que puede actuar como una resistencia negativa. También otros autores han reportado el golpeo del aceite y la fricción seca donde la presión del aceite y la fricción seca pueden actuar como factores excitadores.

Tales fuerzas de resistencia se pueden analizar mediante el siguiente procedimiento:

Supongamos que la fuerza de resistencia es de la forma:

$$F = - b_i \dot{\eta}$$

donde b_i es el coeficiente de resistencia y η es la posición del punto $\xi = x + iy$, centro representativo del rotor, con respecto al sistema móvil de coordenadas.

Según el dibujo 2.1 se puede concluir que, con respecto al sistema fijo de coordenadas, la fuerza tendrá la expresión:

$$F_s = - b_i \dot{\eta} e^{i\Omega t} \qquad (2.1)$$

y como

$$\xi = \eta e^{i\Omega t}$$

derivando con respecto a t:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\eta} e^{i\Omega t} + i\Omega e^{i\Omega t} \eta \\ &= \dot{\eta} e^{i\Omega t} + i\Omega \xi \end{aligned}$$

y despejando $\dot{\eta}$:

$$\dot{\eta} = (\dot{\xi} - i\Omega \xi) e^{i\Omega t}$$

por lo tanto

$$F_s = - b_i (\dot{\xi} - i\Omega \xi)$$

Si suponemos que solo hay fuerza elastica restitutiva $-K\xi$ y F_s actuando sobre el rotor, entonces la ecuacion del movimiento se puede escribir como:

$$m\ddot{\xi} = -b_i(\dot{\xi} - i\Omega \xi) - K\xi \qquad (2.2)$$

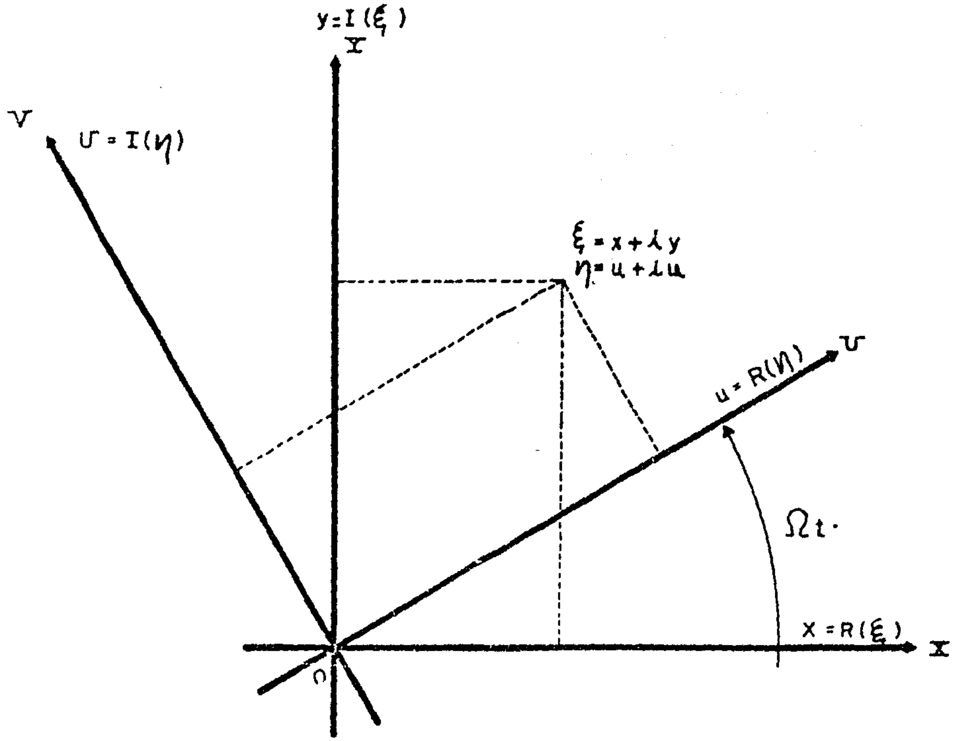


FIGURA 2.1

ROTACION DEL SISTEMA UV ALREDEDOR DEL SISTEMA XY ahora, para simplificar la ecuación se introducen los siguientes parámetros:

$\Omega_n = \sqrt{K/m}$ la frecuencia natural del rotor sin amortiguación.

$2\varepsilon_i = b_i/\sqrt{Km}$ el coeficiente de resistencia estandarizado.

$\tau = \Omega_n t$ el tiempo estandarizado.

$\omega = \Omega/\Omega_n$ la relación geométrica de las velocidades angulares.

Entonces la ecuación (2.2) se convierte en:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\varepsilon_i\left(\frac{d\xi}{d\tau} - i\omega\xi\right) + \xi = 0 \qquad (2.3)$$

Sustituyendo $\xi = e^{\lambda\tau}$ en esta última ecuacion se obtiene la ecuacion caracteristica de (2.3):

$$\lambda^2 + 2\varepsilon_i\lambda + (1 - 2i\varepsilon_i\omega) = 0 \qquad (2.4)$$

suponiendo que $\varepsilon_i << 1$, y despreciando terminos de grado superior en ε_i , las raices de la ecuación característica son aproximadamente:

$$\lambda_{aprox} = -\varepsilon_i(1 \mp \omega) \pm i$$

y entonces la solucion general de la ecuacion diferencial del movimiento (2.3) sería igual a:

$$\xi = A e^{-\varepsilon_i(1-\omega)\tau} e^{i\tau} + B e^{-\varepsilon_i(1+\omega)\tau} e^{-i\tau} \qquad (2.5)$$

Donde A y B son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales.

El primer término de la derecha representa un giro en dirección contraria a las manecillas del reloj, mientras que el segundo término representa una rotación en el sentido de las manecillas del reloj, y los términos $e^{-\varepsilon_i(1\mp\omega)\tau}$ representan la variación de la amplitud respecto al tiempo.

Cuando $\omega = 0$, entonces $e^{-\varepsilon_i(1\pm 0)\tau} = e^{-\varepsilon_i\tau}$ y ambas contribuciones a la amplitud de ξ son factores de amortiguamiento o disipación.

Ahora supongamos que $0 < \omega < 1$, entonces aunque ambos terminos $e^{-\varepsilon_i(1\pm\omega)\tau}$ son amortiguantes en el tiempo el amortiguamiento del segundo término sería más rapido. Esto ocasiona que el movimiento sea inicialmente en una linea recta (cuando es muy pequeña) pero si ω crece, el movimiento cambia a un movimiento espiral en dirección contraria a las manercillas del reloj y finalmente se detiene.

Por último si $\omega > 1$, solo la vibración rotacional en el sentido de las manecillas del reloj se amortigua, mientras que la de sentido opuesto se hace cada vez mayor pues crece con τ. Este es el caso de la resistencia negativa.

Estrictamente las raices de (2.4) se pueden escribir en en la forma:

$$\lambda_{\pm} = -\varepsilon_i \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(\varepsilon_i^2-1)^2 + 4\varepsilon_i^2\omega^2} + \varepsilon_i - 1\right)} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(\varepsilon_i^2-1)^2 + 4\varepsilon_i^2\omega^2} - \varepsilon_i^2 + 1\right)} \qquad (2.6)$$

si $\omega = 1$, el segundo término de la parte real es:

$$\sqrt{1/2(\sqrt{(\varepsilon_i^2-1)^2+4\varepsilon_i^2}+\varepsilon_i^2-1)} = \sqrt{1/2(\sqrt{(\varepsilon_i^2+1)^2}+\varepsilon_i^2-1)} = \varepsilon_i$$

el valor de este término crece monótonamente con $\omega > 0$ por lo tanto podemos concluir que:

$$\sqrt{1/2\{\sqrt{(\varepsilon_i^2-1)^2+4\varepsilon_i\omega^2}+\varepsilon_i-1\}} \begin{cases} <\varepsilon_i & \text{si} \quad 0<\omega<1 \\ =\varepsilon_i & \text{si} \quad \omega=1 \\ >\varepsilon_i & \text{si} \quad \omega>1 \end{cases}$$

por lo tanto la parte real de (2.6) es:

$$R(\lambda) \begin{cases} <0 & \text{si} \quad 0<\omega<1 \\ =0 & \text{si} \quad \omega=1 \\ >0 & \text{si} \quad \omega>1 \end{cases}$$

Aun en el caso en que ε_i no sea pequeña, la resistencia pierde su efecto amortiguador cuando la velocidad angular del sistema de coordenadas excede la frecuencia circular natural del rotor sin amortiguación.

Según la ecuación (2.6) las partes imaginarias $I_\pm$ de λ están dadas por:

$$I_\pm(\lambda) = \pm\sqrt{1/2\{\sqrt{(\varepsilon_i^2-1)^2+4\varepsilon_i\omega^2}-\varepsilon_i^2+1\}} \qquad (2.7)$$

donde el signo más antes del radical indica una vibración rotacional en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si ponemos $\omega = 1$ se obtiene la relación:

$$I_\pm(\lambda) = \pm 1$$

y cuando la velocidad angular del sistema coordenado de la resistencia coincide con la frecuencia circular natural del rotor, la frecuencia de la vibracion es exactamente igual a la velocidad crítica del rotor sin amortiguación, independientemente del valor de ε_i

Ahora considere el caso $\varepsilon_i \to \infty$. Al sustituir $\varepsilon_i \to \infty$ en (2.7) se puede calcular fácilmente que:

$$\lim_{\varepsilon_i \to \infty} I_{\pm}(\lambda) = \omega$$

Esto significa que cuando el coeficiente de resistencia es suficiéntemente grande, el movimiento del centro del rotor casi está restringido por la rotación del sistema coordenado de la resistencia. $I_{\pm}(\lambda)$ crece monótonamente con ω; por lo cual la frecuencia circular de la vibración tiende a crecer cuando crece la velocidad angular del campo de la resistencia.

B) EFECTOS COMBINADOS DE LAS RESISTENCIAS INTERNA Y EXTERNA

Considerese el caso en que dos fuerzas de resistencia:

$$-b_i\dot{\eta}e^{i\Omega t} \qquad y \qquad -b_e\dot{\xi} = -b_e(\dot{\eta}e^{i\Omega t} + i\Omega e^{i\Omega t}).$$

actuan sobre el rotor, una de las cuales esta restringida al sistema de coordenadas estacionario. Llamémosle al coeficiente de esta resistencia b_e y a su valor estandarizado $2\varepsilon_e$ y sea b_i el coeficiente de la resistencia que depende del sistema movil de coordenadas U, V y $2\varepsilon_i$ a su valor estandarizado. Entonces la ecuación de la vibración que corresponde a (2.3) esta dada por:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau} + 2\frac{d\xi}{d\tau} + 2\varepsilon_i\left(\frac{d\xi}{d\tau} - i\omega\xi\right) + \xi = 0 \qquad (2.8)$$

Su ecuacion característica es:

$$\lambda^2 + 2(\varepsilon_e + \varepsilon_i)\lambda + (1 - 2i\varepsilon_i\omega) = 0 \qquad (2.9)$$

y suponiendo que $\varepsilon_i, \varepsilon_e << 1$, los valores aproximados de $\lambda_\pm$ son:

$$\lambda_{aprox} = -\varepsilon_e - \varepsilon_i(1 \mp \omega) \pm i$$

La condicion de estabilidad es pues:

$$-\varepsilon_e - \varepsilon_i(1 - \omega) < 0$$

o sea:

$$\omega < 1 + \varepsilon_e/\varepsilon_i$$

Si $\varepsilon_e/\varepsilon_i << 1$, la vibracion se convierte en inestable despues de que el sistema de coordenadas de la resistencia excede la velocidad crítica del rotor Ω_n. En contraste, si $\varepsilon_e/\varepsilon_i >> 1$ el rotor se puede operar estáblemente a velocidades muy superiores al límite del caso anterior.

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN ROTOR ELASTICO DESBALANCEADO

CAPITULO 3

A) DEDUCCION DE LAS ECUACIONES

Consideremos un rotor de sección circular uniforme. Si este se dobla ligéramente, su eje geométrico no se elonga ni se contrae, pues éste es común a todos los planos neutros de flexion. Independientemente de la distribución de masa sobre el rotor, esta aseveración se cumple porque el módulo de Young lo suponemos constante para el material del rotor. En lo sucesivo nos referiremos a este eje como "eje elástico".

Para simplificar consideremos que el rotor tiene masa uniforme $A\rho$ por unidad de longitud, pero supongamos que los centros de masa de los delgados discos en que nos imaginamos que partimos al rotor no coinciden con el eje elástico, lo que produce el desbalanceo.

Consideremos que los ejes OX, OY y OZ de la figura 3.1 están fijos en el espacio y que OZ coincide con el eje elástico del rotor antes de flexionarse. Los ejes OU y OV giran sobre OZ con la velocidad angular Ω del rotor.

Ahora nos preguntamos cuál es el movimiento de uno de estos delgados discos que está a una distancia z a lo largo del eje OZ desde O y cuyo espesor es δz (ver figura 3.1).

Él vector de posición con respecto a las coordenadas moviles de la intersección E del eje elástico con las caras planas del disco, lo llamaremos η . Sus coordenadas son u y v, y dependen del tiempo. El centro de masa C tiene coodenadas u+a y v+b, donde a y b no varían con el tiempo, siendo funciones de z solamente.

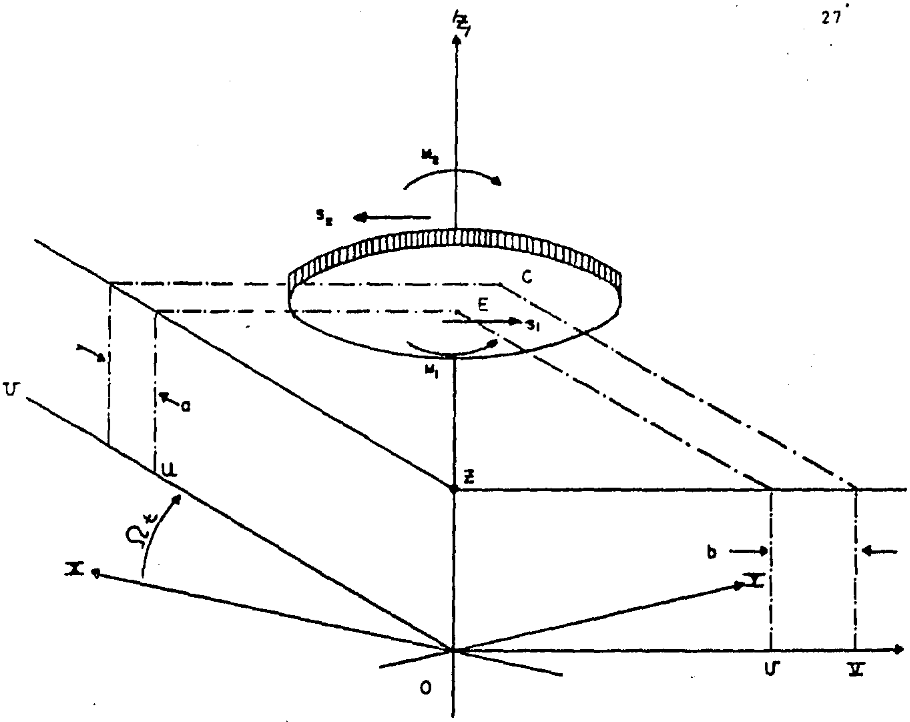
Considerese el movimiento de este disco bajo la influencia de las componenetes S_1 y S_2 de la fuerza cortante.

El vector OC=(u+a, v+b) referido al sistema fijo, después de que el sistema UV ha girado un ángulo Ωt es:

$$[(u+a)+i(v+b)]\,e^{i\Omega t}$$

derivando dos veces, se obtiene la aceleración del centro de masa:

$$(\ddot{u}+i\ddot{v})\,e^{i\Omega t}+2\,(\dot{u}+i\dot{v})\,i\Omega\, e^{i\Omega t}-[(u+a)+i(v+b)]\,\Omega^2 e^{i\Omega t}$$



ELEMENTO TRANSVERSAL DEL ROTOR CON ESPESOR MUY DELGADO

FIGURA 3.1

Si las fuerzas cortantes vistas desde el sistema UV a a uno y otro lado del disco son S_1+iT_1 y S_2+iT_2, referidas al sistema fijo, estas son:

$$[(S_1-S_2)+i(T_1-T_2)]\,e^{i\Omega t}$$

Luego:

$$[S_1+iT_1+(S_2+iT_2)]\,e^{i\Omega t}=$$
$$\delta z\,A\rho\{\ddot{u}+i\ddot{v}+2(\dot{u}+i\dot{v})\,i\Omega-[u+a+i(v+b)]\Omega^2\}e^{i\Omega t}$$

Vistas las aceleraciones y fuerzas desde el sistema UV resulta, cuando $\delta z\to 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial z}+i\frac{\partial T}{\partial z}=A\rho[\ddot{u}-2\Omega\dot{v}-(u+a)]\Omega^2+iA\rho[\ddot{v}+2\Omega\dot{u}-(v+b)]\Omega^2$$

La relacion entre el momento flexor y la fuerza cortante en el eje U es:

$$M_1-M_2+S\,\delta z=0$$

Si la inercia rotacional del elemento alrededor de un eje diametral se desprecia, este resultado es en el límite:

$$S=-\frac{\partial M}{\partial z}$$

El momento flexor se relaciona con la curvatura del eje del rotor en el plano UZ mediante la relacion:

$$M=EI\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (3.2)$$

De estos resultados se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial z}=-\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}=-EI\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right)$$

de manera que:

$$\frac{\partial S}{\partial z}+i\frac{\partial T}{\partial z}=-EI\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+i\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1) y separando las componentes llegamos fácilmente a las ecuaciones del movimiento:

$$- \frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \ddot{u} - (u+a)\Omega^2 - 2\Omega \dot{v}$$

$$- \frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \ddot{v} - (v+b)\Omega^2 + 2\Omega \dot{u}$$

La ecuación del movimiento para $\eta = u + i v$ es pues:

$$- \frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = \ddot{\eta} + i\, 2\Omega \dot{\eta} - \Omega^2(\eta + \alpha) \qquad (3.3)$$

Como

$$\xi = x + i y = \eta\, e^{i\Omega t}$$

entonces, la ecuación para ξ es

$$- \frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} = \ddot{\xi} - \Omega^2 (a + i b)\, e^{i\Omega t} \qquad (3.4)$$

Ahora superponemos las fuerzas de resistencia al movimiento estudiadas en el capítulo anterior:

$$-b_i \dot{\eta}\, e^{i\Omega t} \qquad \text{y} \qquad -b_e \dot{\xi} = -b_e(\dot{\eta}\, e^{i\Omega t} + i\Omega \eta e^{i\Omega t}) \qquad (3.5)$$

donde b_i y b_e son los coeficientes de resistencia interna y externa respectivamente.

La suma de estas fuerzas es:

$- [(b_i + b_e)\dot{\eta} + i\, b_e \Omega \eta]\, e^{i\Omega t}$ en el sistema fijo

$- [(b_i + b_e)\dot{\eta} + i\, b_e \Omega \eta]$ en el sistema móvil

por lo cual las ecuaciones del movimiento quedan modificadas del siguiente modo:

$$\frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \ddot{\eta} + \left[\frac{(b_i + b_e)}{A\rho} + 2 i \Omega \right] \dot{\eta} + \left(i \frac{b_e \Omega}{A\rho} - \Omega^2\right) \eta = \Omega^2 \alpha$$

$$\frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \ddot{\xi} + \frac{(b_i + b_e)\, \dot{\xi}}{A\rho} - i\Omega \frac{b_i}{A\rho}\, \xi = \Omega^2 \alpha\, e^{i\Omega t} \qquad (3.6)$$

B) SOLUCION DE LAS ECUACIONES

Para resolver la ecuacion (3.6) ponemos la función de excentricidad $\alpha(z)=a(z)+ib(z)$, como una serie lineal en las funciones características del rotor.

$$\alpha(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(z) \qquad (3.7)$$

donde la parte real representa a $a(z)$ y la parte imaginaria representa a $b(z)$.

y consecuentemente:

$$\alpha_n=a_n+i\,b_n$$

Ahora consideremos una solucion de la forma

$$\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(t)\,\phi_n(z) \qquad (3.8)$$

Como es de esperarse, la solución debe representar una vibración, para este efecto suponemos que las funciones características del rotor son funciones circulares o hiperbólicas y que a cada modo corresponde una velocidad angular crítica. Esto implica que las funciones características deben satisfacer la siguiente ecuacion diferencial:

$$-\frac{EI}{A\rho}\frac{d^4}{dz^4}\phi_n(z)=\omega_n^2\,\phi_n(z) \qquad (3.9)$$

sustituyendo en la ecuacion (3.6) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{\eta}_n(t)+\left[\frac{(b_e+b_i)}{A\rho}+2i\Omega\right]\dot{\eta}_n(t)+\left[\frac{EI}{A\rho}\omega_n^2-\Omega^2+\frac{i\,b_i}{A\rho}\Omega\right]\eta_n\right\}\phi_n(t)=\Omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\phi_n(z)$$

ahora se introducen los parametros $\mu_n=\dfrac{b_e}{2\omega_n A\rho}$ y $\nu=\dfrac{b_i}{2\omega_n A\rho}$ con los cuales se simplifica esta última ecuacion que se convierte en:

$$\ddot{\eta}_n+2\left[(\mu_n+\nu_n)\omega_n+i\Omega\right]\dot{\eta}_n+\left(\omega_n^2-\Omega^2+2i\nu_n\omega_n\Omega\right)\eta_n=\Omega^2\alpha_n \qquad (3.10)$$

una solucion particular de esta ecuacion es:

$$\eta_{np} = \frac{\alpha_n}{(\omega_n^2/\Omega^2 - 1) + 2i\mu_n\omega_n/\Omega} = \frac{\alpha_n e^{i\zeta_n}}{\sqrt{(\omega_n^2/\Omega^2 - 1)^2 + (2\mu_n\omega_n/\Omega)^2}}$$

donde

$$\zeta_n = \tan^{-1}(2\mu_n\omega_n\Omega/(\omega_n^2 - \Omega^2)) \qquad (3.12)$$

La ecuacion caracteristica de (3.10) es:

$$\lambda^2 + 2[(\mu_n + \nu_n)\omega_n + i\Omega]\lambda + \omega_n^2 - \Omega + 2i\mu_n\omega_n\Omega \qquad (3.13)$$

y por lo tanto la solucion general es:

$$\eta_n(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} + \frac{\alpha e^{i\zeta_n}}{\sqrt{(\omega_n^2/\Omega^2 - 1)^2 + (2\mu_n\omega_n/\Omega)^2}} \qquad (3.14)$$

Segun la teoria del capitulo anterior, cuando $\mu_n, \nu_n \ll 1$, las raices de la ecuacion caracteristica son aproximadamente:

$$\lambda_{aprox} = -(\mu_n + \nu_n)\omega_n - i\Omega \pm \sqrt{\Omega^2\nu_n^2 + 2i\Omega\omega_n\nu_n - \omega_n^2}$$

por lo cual la condicion de estabilidad es:

$$\Omega/\omega_n < (\mu_n + \nu_n)/\nu_n \qquad (3.15)$$

Con respecto al sistema fijo de coordenadas tenemos la siguiente ecuacion (3.16):

$$\ddot{\xi}_n + 2[(\mu_n + \nu_n)\omega_n + i\Omega]\dot{\xi}_n + (\omega_n^2 - \Omega^2 + 2i\mu_n\omega_n\Omega)\xi_n = \Omega^2\alpha_n e^{i\Omega t} \qquad (3.16)$$

cuya solucion particular es ahora:

$$\xi_{np} = \frac{\alpha_n e^{i\Omega t}}{(\omega_n^2/\Omega^2 - 1) + 2i\mu_n\omega_n/\Omega} = \frac{\alpha_n e^{i(\zeta_n + \Omega t)}}{\sqrt{(\omega_n^2/\Omega^2 - 1)^2 + (2\mu_n\omega_n/\Omega)^2}}$$

y su ecuacion caracteristica es:

$$\lambda^2 + 2\omega_n(\mu_n + \nu_n)\lambda - i\Omega 2\nu_n\omega_n - \omega_n^2 = 0$$

y por lo tanto la solucion general es:

$$\xi_n(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} + \frac{\alpha e^{i\zeta_n + i\Omega t}}{\sqrt{(\omega_n^2/\Omega^2 - 1)^2 + (2\mu_n\omega_n/\Omega)^2}}$$

APLICACION DE LAS ECUACIONES AL BALANCEO DINAMICO DE ROTORES

CAPITULO 4

A) EL BALANCEO CONVENCIONAL A BAJA VELOCIDAD

Este proceso tiene dos objetivos, el primero es asegurar que el centro de masa del rotor coincida con la linea de los baleros para que no tenga que aplicarse al rotor ninguna füerza para contrarrestar la acción centrífuga.

Analíticamente esto implica que la siguiente relación se debe cumplir:

$$\int_0^L A\rho\, a(z)\,\Omega^2\,dz = 0 = \int_0^L A\rho\, b(z)\,\Omega^2\,dz \qquad (4.1)$$

Si la ecuación 4.1 no se satisface, se deben agregar pequeñas masas m_1 y m_2 sobre dos planos $z = z_1$ y $z = z_2$, cuyas posiciones son r_1, s_1 y r_2, s_2 para que se satisfagan las siguientes relaciones:

$$\int_0^L A\rho\, a(z)\Omega^2 dz + m_1 r_1 \Omega^2 + m_2 r_2 \Omega^2 = 0$$

y $\qquad\qquad$ (4.2)

$$\int_0^L A\rho\, b(z)\Omega^2 dz + m_1 s_1 \Omega^2 + m_2 s_2 \Omega^2 = 0$$

que implican el balanceo estático.

El segundo proposito del balanceo a baja velocidad es asegurar que el eje giratorio no transmita a los baleros un par rotacional (cuyo eje sea perpendicular al eje del rotor) debido a la acción centrífuga.

Para un rotor rígido este sería el caso cuando:

$$\int_0^L A\rho\, a(z)\Omega^2 z\, dz = 0 = \int_0^L A\rho\, b(z)\Omega^2 z\, dz \qquad (4.3)$$

en general esta condicion no se cumple y mediante el procedimiento del balanceo dinámico para rotores rígidos, las relaciones 4.4a y 4.4b se deben hacer cumplir.

$$\int_0^L A\rho\, a(z)\Omega^2 z\, dz + m_1 r_1 \Omega^2 z_1 + m_2 r_2 \Omega^2 z_2 = 0 \qquad (4.4.a)$$

$$\int_0^L A\rho\, b(z)\Omega^2 dz + m_1 s_1 \Omega^2 z_1 + m_2 s_2 \Omega^2 z_2 = 0 \qquad (4.4.b)$$

En ausencia de masas balanceadoras, las contribuciones del desbalanceo sobre el n-ésimo modo de vibración estan dadas por:

$$a_n = \frac{1}{N}\int_0^L a(z)\phi_n(z)\, dz$$

$$b_n = \frac{1}{N}\int_0^L b(z)\phi_n(z)\, dz \qquad (4.5)$$

donde

$$N=\int_0^L \left[\phi_n(z)\right]^2 dz$$

Si se agregan las masas balanceadoras de acuerdo con 4.4a y 4.4b, las expresiones para a_n y b_n quedan modificadas en la forma que vamos a analizar.

Sea la posición del eje de masa (después de agregar las masas m_1 y m_2) la función:

$$\alpha' = a'(z) + i\,b'(z)$$

De manera que ahora α' reemplaza a α, aquí suponemos que las masas se colocaron sobre los planos z_1 y z_2 solamente.

La función $\alpha'(z)$ es en todos lados la misma que $\alpha(z)$ excepto sobre cualquier segmento donde se haya añadido una masa de corrección. Si la masa se agrega sobre el intervalo de longitud δz alrededor de la sección $z=z_1$, entonces para $z_1-\frac{\delta z}{2}\leq z$ $z\leq z_1+\frac{\delta z}{2}$ si la masa por unidad de longitud de eje en $z=z_1$ es n_1 y la masa por unidad de longitud en $z=z_2$ es n_2 tenemos que:

$$\alpha' = \alpha + \frac{n_1}{A\rho}(r_1+is_1) + \frac{n_2}{A\rho}(r_2+is_2)$$

La adición de las masas sobre el eje $\alpha(z)$ y que nos da $\alpha'(z)$ es de la forma mostrada en la figura 4.2.

Si desarrollamos esta modificación del eje en términos de las funciones $\phi_n(z)$ obtendremos que los coeficientes de orden n serán:

$$\alpha'_n = \alpha_n + \frac{n_1(r_1+is_1)}{A\rho N}\int_{z_1-\delta z/2}^{z_1+\delta z/2}\phi_n(z)\,dz + \frac{n_2(r_2+is_2)}{A\rho N}\int_{z_2-\delta z/2}^{z_2+\delta z/2}\phi_n(z)\,dz$$

Ahora sean $n_1\delta z = m_1$ y $n_2\delta z = m_2$, hagamos tender δz a cero mientras que m_1 y m_2 permanecen constantes, la última ecuacion se reduce a:

$$1/(A\rho N)[m_1 r_1 \phi_n(z_1) + m_2 r_2 \phi_n(z_2)] \qquad (4.6)$$
$$1/(A\rho N)[m_1 s_1 \phi_n(z_1) + m_2 s_2 \phi_n(z_2)]$$

así pues:

$$\alpha' = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n + \frac{m_1(r_1+is_1)}{A\rho N}\phi_n(z_1) + \frac{m_2(r_2+is_2)}{A\rho N}\phi_n(z_2)\right]\phi_n(z) \qquad (4.7)$$

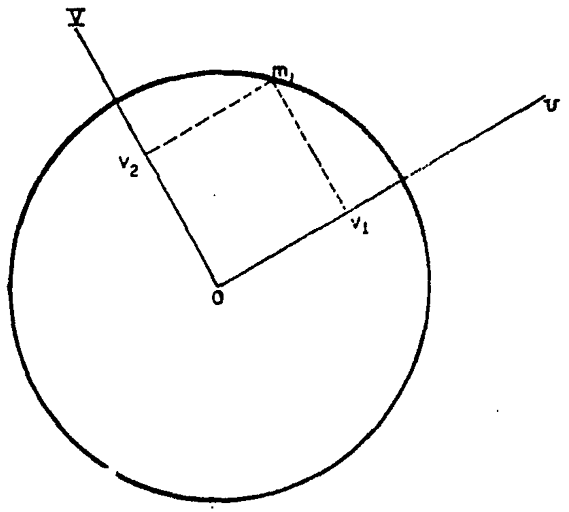
Si durante el proceso del balanceo a baja velocidad se agrega una masa sobre un nodo del n-ésimo modo, la ecuación 4.7 muestra que esta no tendrá efecto sobre la amplitud de las vibraciones para este modo. Pero en general la tendencia a vibrar en cualquier velocidad crítica será modificada para aumentar o disminuir.

Despues de aplicar las masas de corrección la solución particular 3.11 se convierte en:

$$\alpha'_n e^{i\varepsilon_n} / \sqrt{[(\omega_n^2/\Omega^2 - 1)^2 + (2H_n W/\Omega)^2} \qquad (4.8)$$

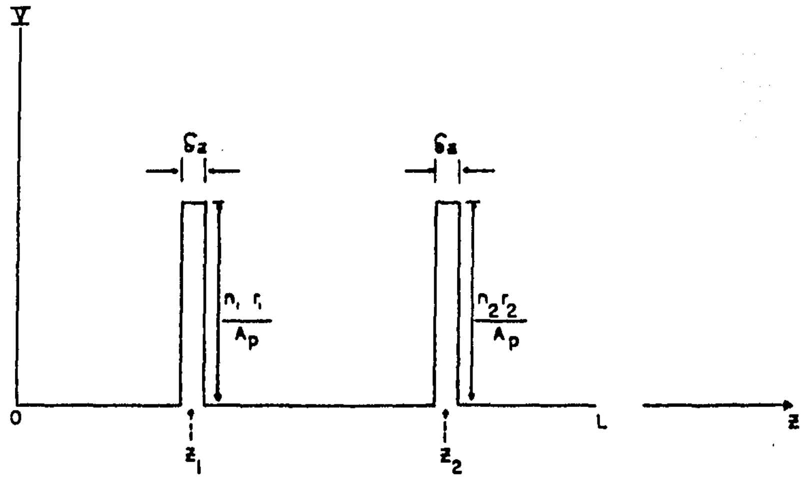
El significado de las funciones $a'(z)$ y $b'(z)$ se puede analizar por referencia a la ecuación 4.8 que representa a una solución particular en la forma de una constante compleja multiplicada por α'_n, la cual se puede representar en series en la ecuación 4.8 de la siguiente manera:

$$a'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n\phi_n(z) \quad ; \quad b'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n\phi_n(z) \qquad (4.9)$$



POSICION DE LA MASA DE CORRECCION EN LOS EJES UV

FIGURA 4.1



AFECTACION DEL EJE DE CENTROS DE MASA POR DOS MASAS DISCRETAS

FIGURA 4.2

las cantidades

$$\alpha'_n = a'_n + i\, b'_n$$

reemplazan a las cantidades correspondientes para α_n .

En el sencillo caso de un rotor de sección constante y densidad uniforme y cuyas funciones características son:

$$\phi_n(z) = \operatorname{sen}(n\pi z/L)$$

podemos analizar el efecto de las correcciones sobre los modos superiores. Primero notamos que el balanceo estático implica que:

$$\int_0^L A\rho\, a'(z)\,\Omega^2 dz = 0 = \int_0^L A\rho\, b'(z)\,\Omega^2 dz \qquad (4.10)$$

y que el balanceo dinámico (para rotores rígidos a baja velocidad) implica que:

$$\int_0^L A\rho\, a'(z)\,\Omega^2 z\, dz = 0 = \int_0^L A\rho\, b'(z)\,\Omega^2 z\, dz \qquad (4.11)$$

Para analizar el efecto de las masas sobre cada modo de vibración superior, sustituimos $a'(z)$ y $b'(z)$ por la forma 4.9 y cancelamos $A\rho\Omega^2$ de las ecuaciones 4.10 y 4.11. De aqui se llega a que después del balanceo estático tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a'_n = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n b'_n \qquad (4.12)$$

donde

$$A_n = \int_0^L \phi_n(z)\, dz$$

y para el balanceo dinámico tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n b'_n \qquad (4.13)$$

donde

$$B_n = \int_0^L z\,\phi_n(z)\,dz$$

integrando B_n por partes obtenemos:

$$B_n = L\int_0^L \phi_n(z)\,dz - \int_0^L \left\{ \int_0^z \phi_n(\xi)\,d\xi \right\} dz$$

o bién:

$$B_n = L A_n - C_n$$

donde

$$C_n = \int_0^L \left\{ \int_0^z \phi_n(\xi)\,d\xi \right\} dz$$

por lo tanto el balanceo a baja velocidad asegura que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha'_n = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha'_n \qquad (4.14)$$

pero cuando

$$\phi_n(z) = \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{L} \quad , \quad A_n = \int_0^L \operatorname{sen}(n\pi z/L)\,dz$$

y

$$C_n = \int_0^L \left\{ \int_0^z \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \right\} dz$$

por lo tanto

$$A_n = L/(\pi n)(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2L}{\pi n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$C_n = L/(n\pi) \int_0^L \{-\cos(n\pi z/L) + \cos(0)\} dz = L/(n\pi)$$

entonces la ecuación 4.14 se puede reducir despues de cancelar factores comunes a cada término de la serie a:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 + \tfrac{1}{3}\alpha'_3 + \tfrac{1}{5}\alpha'_5 + \cdots &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\alpha'_2 + \tfrac{1}{4}\alpha'_4 + \tfrac{1}{6}\alpha'_6 + \cdots &= 0 \end{aligned} \qquad (4.15)$$

donde la serie impar corresponde al balanceo estático y la serie par corresponde al balanceo dinámico.

B) EL BALANCEO DE ROTORES ELASTICOS DE ALTA VELOCIDAD

Para altas velocidades cuando Ω crece hacia ω_1 , la distorsion en el primer modo de vibracion tiende a aumentar. El eje elástico se desplaza mas lejos del eje de los baleros y la deformacion es tal que el "lado pesado" queda hacia afuera; esto queda ilustrado por la figura 4.4, donde los ejes OU estan fijos al rotor y coinciden con el plano de excentricidad inicial en el primer par de modos. La linea punteada muestra la trayectoria de E y unas cuantas posiciones de E y C (cada una corresponde a un valor diferente de Ω). Las lineas generadas por $\overline{E_1C_1}$, $\overline{E_2C_2}$, ... siempre permanecen paralelas a OU. Para cada una de esas lineas se ha dibujado un arco de circunferencia con centro en E_i y se ha marcado con un pequeña cruz el punto más lejano desde O; este es el punto que será marcado con un lápiz estacionario que apenas toque al rotor.

La figura 4.3 muestra que mientras Ω se aproxima a ω_{11} el lápiz estacionario marca un punto sobre el lado del rotor donde la excentricidad es $\overline{E_iC_i}$: entonces, si se invierte el sentido de la rotación, se puede marcar un punto en el lado opuesto y se puede asi determinar la posición de ese vector. Sin embargo, esto solo será satisfactorio cuando las dos marcas asi obtenidas esten suficientemente cercanas entre si, ya que el intervalo correspondiente a la mayoría de los puntos E_1 , E_2, ... de la figura 4.3 es relativamente pequeño y es

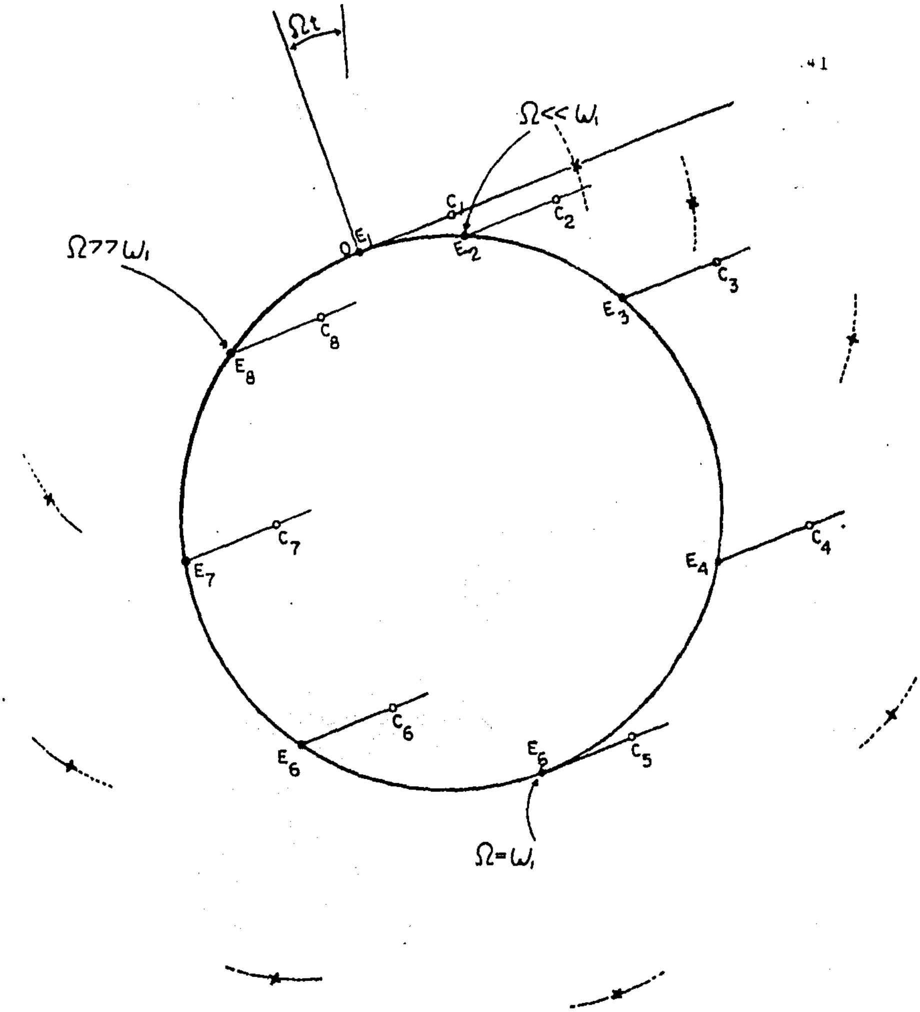


FIGURA 4.3

UNA PEQUEÑA CRUZ INDICA EL PUNTO QUE SERIA MARCADO POR UN LAPIZ ESTACIONARIO difícil mantenerse establemente a una velocidad cercana a la velocidad crítica.

Una manera más práctica para localizar la dirección de la excentricidad $\alpha_1 \phi_1(z)$, es hacer girar al rotor arriba de la velocidad crítica, para que la marca quede sobre el "lado ligero" (la marca ahora precederá ligeramente al vector requerido); y después hacer girar en sentido contrario para marcar el otro lado del rotor y asi determinar la dirección de la excentricidad. Una dificultad para este metodo puede ser que un modo superior al primero puede hacerse dominante si Ω excede a ω_1 , a medida que Ω se acerca a ω_2 pero esto se puede resolver si se marca al rotor en el nodo del segundo par de modos principales y en este caso solo resta pensar en que ω_3 esté lo suficientemente lejos.

Cuando se ha determinado la dirección de la excentricidad $\alpha_1 \phi_1(z)$, debe añadirse al lado ligero del rotor una distribución de masas balanceadoras para que hagan mínimo a α_1 sin incrementar a las cantidades α_2 , α_3 , ... La naturaleza de este requerimiento se puede hacer ver en la figura 4.3, en la cual $\overline{EC}$ es el vector de excentricidad correspondiente al primer par de modos. Vector que se supone que se ha encontrado. Para que C coincida con E se debe añadir la masa n por unidad de longitud de rotor del lado ligero de éste que para una longitud δz de rotor representa una masa igual a:

$$n \delta z \, r = A \rho \delta z \, \alpha_1 \phi_1(z)$$

así que:

$$n = \frac{A\rho}{r} \phi_1(z)$$

donde r es el radio del rotor. En general a_1 no se conoce, así que la magnitud de la corrección se deberá encontrar por ensayo y error, pero su dependencia de z es de proporcionalidad a la función $\phi(z)$.

Ahora se puede balancear la segunda componente de la excentricidad en la misma forma que la anterior y este proceso puede continuarse hasta que el rotor quede suficientemente balanceado para el proposito que debe servir. Esto es sin duda más facil de decir que de hacer.

En general no es posible distribuir la masa balanceadora a lo largo del rotor y en cambio se deben añadir masas discretas en posiciones discretas.

Supongamos que este es el caso. El vector de la excentricidad $\alpha_1 \phi_1(z)$ en el primer modo se puede encontrar como antes, para eliminar esta componente. Esto se puede hacer de varias formas, la mas simple es usar un solo plano de balanceo, digamos $z = z_1$; si el eje OU coincide con el vector de la excentricidad (o sea $b_1 = 0$), entonces solo es necesario que:

$$a_1 + \frac{m_1 r}{A\rho N} \phi_1(z) = 0 \qquad (4.16)$$

Como se ve en la ecuación 4.16 el valor de m_1 debe ser encontrado por ensayo y error. Se verá también que para un desbalanceo dado a_1 , el valor mínimo requerido es el que corresponde a el plano donde $\phi_1(z)$ adquiere su valor maximo. para que su efecto sea tan efectivo como sea posible. Un arreglo conveniente se muestra en la figura 4.5a.

La masa m_1 afectara a otros modos superiores (segundo o tercero), si no coincide con un nodo de las funciones $\phi_2(z)$ y $\phi_3(z)$. Por lo tanto, si no se quiere operar al rotor a velocidades mas grandes que la segunda velocidad crítica, es suficiente agregar la masa en el nodo del segundo modo de vibración (para que $\bar{a}_2\phi_2(z)$ mantenga su magnitud original) si es que ω_3, ω_4 etc. están suficientemente lejos de la velocidad de operacion.

Despues de eliminar la componente de la excentricidad para el primer modo, puede ser necesario eliminar la segunda; esto es, la componente $\alpha_2\phi_2(z)$, más lo que se haya agregado cuando se eliminó la primera componente. Supongamos que coincide con el eje OU y que ya se ha encontrado su posicion angular.

En general no es posible eliminar la componente del segundo modo con una sola masa balanceadora sin destruir el balanceo obtenido en la primera correcion, por eso es lo mas razonable introducir dos masas de correccion. Para esto escogemos dos planos de balanceo, por ejemplo, en $z=z_2$ y $z=z_3$.

Sean las masas balanceadoras m_2 y m_3. Para que el balanceo del primer modo no se altere, es necesario que:

$$m_2\phi_1(z_2)+m_3\phi_1(z_3)=0 \qquad (4.17)$$

mientras que para balancear el segundo modo es necesario que:

$$a_2 + \frac{m_2 r}{A\rho N}\phi_2(z_2) + \frac{m_3 r}{A\rho N}\phi_2(z_3) = 0 \qquad (4.18)$$

los planos Z_2 y Z_3 se pueden escoger casi al azar siendo necesario sólamente que:

$$\begin{vmatrix} \phi_1(z_2) & \phi_1(z_3) \\ \phi_2(z_2) & \phi_2(z_3) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.19)$$

Una vez elegidos estos planos la relación m_2/m_3 queda determinada por la ecuación 4.17.

Un arreglo efectivo se muestra en la figura 4.4.

Después se podría necesitar que las componentes de la excentricidad para el tercer modo quedaran eliminadas. Después de encontrar la dirección de la excentricidad, haciendo girar al rotor a una velocidad cercana a su tercera velocidad crítica. Es claro que para esto se necesitan más de una masa balanceadora pues ésta puede causar desbalanceo en el primero o segundo modo.

Si dos masas deben ser suficientes, es necesario que:

$$m_4\,\phi_1(z_4) + m_5\,\phi_1(z_5) = 0$$

$$m_4\,\phi_2(z_4) + m_5\,\phi_2(z_5) = 0 \qquad (4.20)$$

$$a_3 + \frac{m_4 r}{A\rho N}\phi_3(z_4) + \frac{m_5 r}{A\rho N}\phi_3(z_5) = 0$$

De hecho solo es posible resolver este sistema si:

$$\begin{vmatrix} \phi_1(z_4) & \phi_1(z_5) \\ \phi_2(z_4) & \phi_2(z_5) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.21)$$

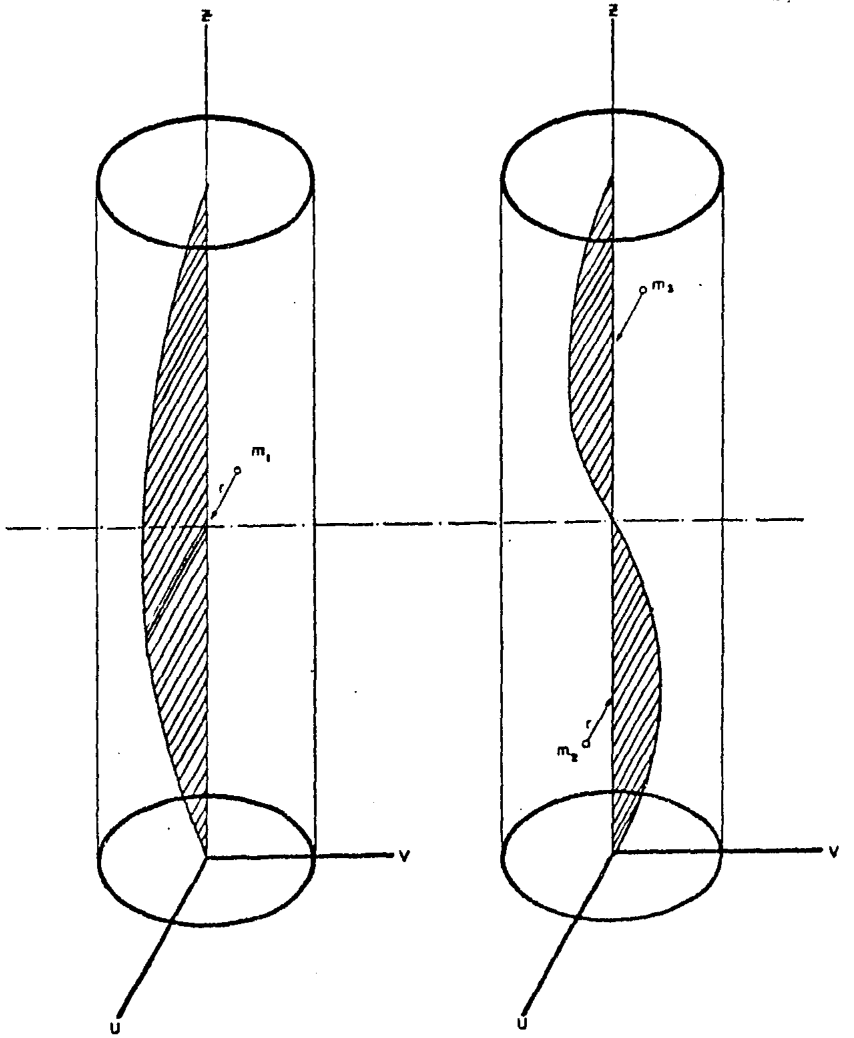


FIGURA 4.5
COLOCACION ADECUADA DE LAS MASAS DE CORRECCION

Esto no siempre es posible, lo que se puede ver con el caso más sencillo; cuando:

$$\phi_n(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

pues:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi z_4}{L}\operatorname{sen}\frac{2\pi z_5}{L} - \operatorname{sen}\frac{\pi z_5}{L}\operatorname{sen}\frac{2\pi z_4}{L} = 0$$

implica que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi z_4}{L} = 0 = \operatorname{sen}\frac{\pi z_5}{L}$$

o que:

$$\cos\frac{\pi z_4}{L} = \cos\frac{\pi z_5}{L}$$

las soluciones a estas ecuaciones son $z_4 = 0$ y $z_5 = L$ o $z_4 = z_5$ en el segundo caso las ecuaciones 4.20 muestran que $m_4 + m_5 = 0$.

Por esto es más razonable usar tres masas para balancear el tercer modo. Entonces es necesario que:

$$m_4\phi_4(z_4) + m_5\phi_1(z_5) + m_6\phi_1(z_6) = 0$$

$$m_4\phi_2(z_4) + m_5\phi_2(z_5) + m_6\phi_2(z_6) = 0 \qquad (4.22)$$

$$q_3 + \frac{m_4 r}{A\rho N}\phi_3(z_4) + \frac{m_5 r}{A\rho N}\phi_3(z_5) + \frac{m_6 r}{A\rho N}\phi_3(z_6) = 0$$

y en este caso los planos $z = z_4$, $z = z_5$ y $z = z_6$ pueden elegirse casi al azar, siendo solo necesario que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi_1(z_4) & \phi_1(z_5) & \phi_1(z_6) \\ \phi_2(z_4) & \phi_2(z_5) & \phi_2(z_6) \\ \phi_3(z_4) & \phi_3(z_5) & \phi_3(z_6) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.23)$$

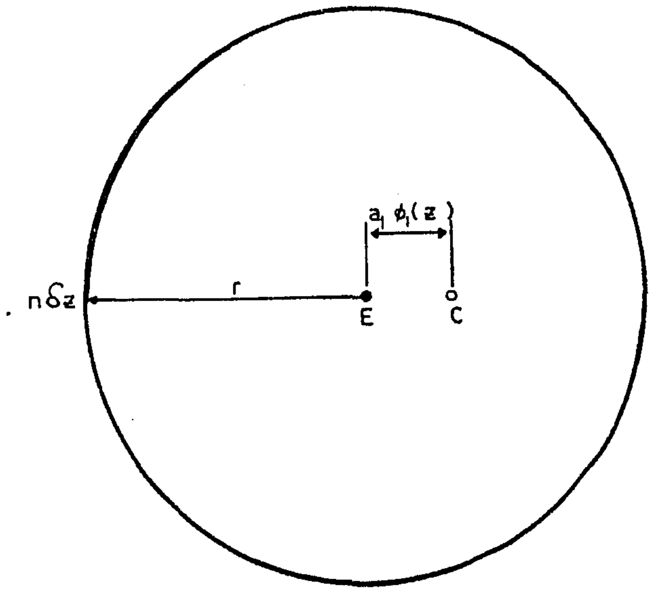
las soluciones a las ecuaciones (4.22) son:

$$m_4 = -(A_p N a_3 / r\Delta) \begin{vmatrix} \phi_1(z_5) & \phi_1(z_6) \\ \phi_2(z_5) & \phi_2(z_6) \end{vmatrix}$$

$$m_5 = -(A_p N a_3 / r\Delta) \begin{vmatrix} \phi_1(z_4) & \phi_1(z_6) \\ \phi_2(z_4) & \phi_2(z_6) \end{vmatrix} \qquad (4.24)$$

$$m_6 = -(A_p N a_3 / r\Delta) \begin{vmatrix} \phi_1(z_4) & \phi_1(z_5) \\ \phi_2(z_4) & \phi_2(z_5) \end{vmatrix}$$

como $a_i, i=1,\ldots$ son en general desconocidos solo se conocen las relaciones geométricas entre las masas y sus magnitudes absolutas se deben encontrar por ensayo y error.



CORRECCION CON UNA SOLA MASA DE LA PRIMERA COMPONENTE DE LA EXCENTRICIDAD

FIGURA 4.4

METODOS DE CALCULO PARA LAS MASAS DE CORRECCION

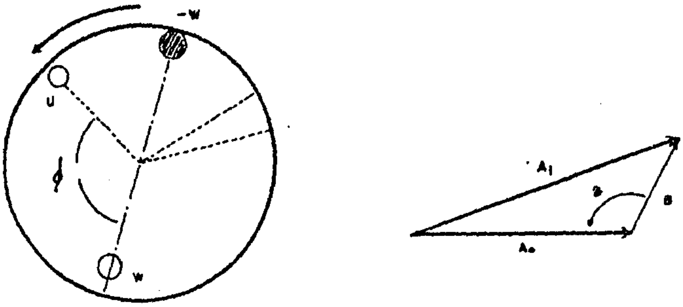
CAPITULO 5

A) EL METODO DE THEARLE-LEBLANC

Se usa para balancear rotores en sus condiciones de operación.

En el caso de un disco delgado, se puede balancear dinamicamente como sigue: girese el disco a cualquier velocidad que ocasione una amplitud detectable.

Entonces el punto con la mayor amplitud en el movimiento del disco es marcado y la amplitud $|\bar{A}_0|$ se compara con cierta escala.



ILUSTRACION DEL METODO DE THEALE
FIGURA 5.1

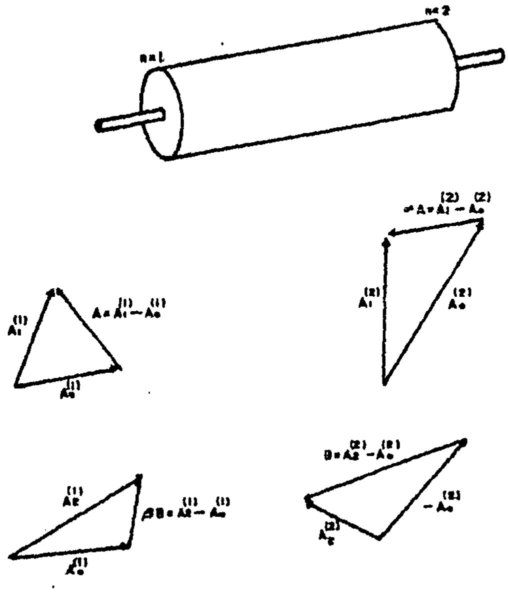


FIGURA 5 2
ILUSTRACION DEL METODO DE THEARLE PARA ROTORES LARGOS

Debido a las fuerzas de resistencia al movimiento el punto estara defasado (retrasado o adelantado) del punto desconocido, donde se encuentra el desbalanceo.

Ahora un peso de prueba U se coloca en cualquier posicion y se vuelve a girar a la misma velocidad que cuando se midio la primera amplitud $|\bar{A}_0|$. $\bar{A}_1$ representa ahora el efecto combinado de el desbalanceo original y el peso de prueba y es el efecto de U solo.

Sea $-W$ el valor desconocido del desbalanceo. Ahora se defasa en direccion contraria a las manecillas del reloj hasta una fase ϕ, como se muestra en la figura 5.1. Entonces su vector de desplazamiento sera paralelo y opuesto a $-W$ y si es modificado por la cantidad $|\bar{A}_0|/|B|$ para igualar al desbalanceo original, este contrapeso balanceara al disco.

En el caso de un rotor largo el procedimiento para balancear es una extensión del anterior. Llamemos a un extremo del rotor el plano de balanceo n=1 y al otro extremo el plano de balanceo n=2 (ver figura 5.2). Primero se corre sin carga el rotor y los vectores de amplitud maxima $A_0^{(1)}$ y $A_0^{(2)}$ se miden.

Despues se añade un peso de prueba en cualquier posicion sobre el primer plano de balanceo (n=1) y las amplitudes de los vectores $A_1^{(1)}$ y $A_1^{(2)}$ son ahora los efectos combinados del desbalanceo original en el plano n=1 y el peso de prueba; $-W_1$ y U_1, respectivamente.

Las diferencias vectoriales $A_1^{(1)} - A_0^{(1)}$ y $A_1^{(2)} - A_0^{(2)}$ deben ser el efecto de U_1 solo sobre los extremos 1 y 2 del rotor respectivamente . $A = A_1^{(1)} - A_0^{(1)}$ y $A_1^{(2)} - A_0^{(2)}$ varian directamente proporcionales a U_1 cuando este cambia de magnitud y posicion por lo tanto se puede escribir:

$$A_1^{(2)} - A_0^{(2)} = \alpha \left(A_1^{(1)} - A_0^{(1)} \right) = \alpha A$$

donde α es un operador vectorial que depende de la maquina giratoria y su montaje.

Ahora se quita el peso de prueba U_1 y se pone el peso de prueba U_2 en el otro extremo y se repiten las operaciones vectoriales mostradas en la figura 5.2.

$$A_2^{(1)} - A_0^{(1)} = \beta B = \beta \left(A_2^{(2)} - A_0^{(2)} \right)$$

Si llamamos W_1 y W_2 a los contrapesos de correccion, estos se pueden obtener modificando la amplitud y la fase de U_1 y U_2. entonces podemos escribir:

$$W = \theta U_1 \quad \text{y} \quad W = \phi U_2 \qquad (5.1)$$

donde θ y ϕ son operadores vectoriales.

Para lograr el balanceo, los operadores θ y ϕ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\theta(A) + \phi(\beta B) = A_0^{(1)}$$

$$\theta(\alpha A) + \phi(B) = A_0^{(2)}$$

resolviendo para θ y para ϕ :

$$\theta = \left(A_0^{(1)} B - A_0^{(2)} (\beta B) \right) / AB(1-\alpha\beta)$$

$$\phi = \left(A_0^{(2)} A - A_0^{(1)} (\alpha A) \right) / AB(1-\alpha\beta) \qquad (5.2)$$

donde α y β se pueden calcular por el siguiente procedimiento:

$$\alpha = (\alpha A)/A = \left(A_1^{(2)} - A_0^{(2)} \right) / \left(A_1^{(1)} - A_0^{(1)} \right)$$

$$\beta = (\beta B)/B = \left(A_2^{(1)} - A_0^{(1)} \right) / \left(A_2^{(2)} - A_0^{(2)} \right)$$

B) EL METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Dadas: N posiciones o planos de balanceo,

M condiciones de lectura de vibraciones

(esto es; K diferentes condiciones de carga

y velocidad por L diferentes estaciones

de medición)

Donde: M= KXL

Para obtener los datos de entrada para el programa de calculo de la teoría de los mínimos cuadrados del apendice A, se gira el rotor sin carga y se miden las amplitudes maximas en cada estación de medición. Designaremos a estas cantidades con los números complejos $A_1 , \ldots , A_M$.

Después hacemos corridas con un peso de prueba, uno a la vez, sobre cada plano de corrección. Estos datos serán designados como las cantidades complejas B_{mn}, que corresponden a la amplitud y fase de las vibraciones en la m-ésima condición de medición con el peso U_n sobre el n-ésimo plano de corrección.

Estos datos se alimentan a una computadora que calcula las masas de corrección segun la siguiente teoria.

Primero se calcula la matriz de los coeficientes de respuesta α_{mn} definidos mediante la siguiente ecuación:

$$[A] = [\alpha] [-W]$$

donde W_n es un numero complejo definido como sigue:

amplitud= masa correctiva necesitada en el n-esimo plano de corrección.

fase= posición angular de la masa de corrección relativa a la posición del peso de prueba.

Para calcular los valores de la matriz $[\alpha]$ formamos la diferencia $B_{mn} - A_M$, en la cual queda eliminada $-W_n$, que es desconocida:

$$B_{mn} - A_m = [\alpha]\begin{bmatrix} -W_1 \\ \vdots \\ -W_n + U_n \\ \vdots \\ -W_N \end{bmatrix} - [\alpha]\begin{bmatrix} -W_1 \\ \vdots \\ \\ -W_N \end{bmatrix} = \alpha_{mn} U_n$$

por lo tanto los coeficientes de respuesta son:

$$\alpha_{mn} = (B_{mn} - A_m) \div U_n \qquad (5.3)$$

Cuando M es igual a N podríamos calcular los valores exactos de la matriz $[W]$ que reduzcan a cero la amplitud de la vibración residual en las M estaciones de medición.

Pero si M > N, solo podemos hacer mínima la suma de los cuadrados de estas amplitudes.

Sean $\mathcal{E}_m$ las vibraciones residuales, o sean los números complejos que representan la amplitud y fase de las vibraciones en la condición de medición m, después de aplicar las masas correctivas.

Entonces

$$\varepsilon_m = A_m + \alpha_{m1} W_1 + \cdots + \alpha_{mN} W_N = A_m + \sum_{n=1}^{N} \alpha_{mn} W_n$$

o sea

$$\varepsilon_{mx} = A_{mx} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_{mn_x} W_{nx} - \alpha_{mny} W_{ny})$$

$$\varepsilon_{my} = A_{my} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_{mn_y} W_{nx} + \alpha_{mnx} W_{ny})$$

Entonces si

$$S = \sum_{m=1}^{M} |\varepsilon_m|^2 = \sum_{m=1}^{M} (\varepsilon_{mx}^2 + \varepsilon_{my}^2)$$

queremos encontrar $W_{1x}, W_{1y}, \ldots, W_{Nx}$ y W_{Ny} que minimicen a S. Esto implica que:

$$\frac{\partial S}{\partial W_{1x}} = \frac{\partial S}{\partial W_{1y}} = \cdots = \frac{\partial S}{\partial W_{Nx}} = \frac{\partial S}{\partial W_{Ny}} = 0 \qquad (5.4)$$

derivando S y dividiendo entre 2:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial W} = \sum_m \{\alpha_{mnx}[A_{mx} + \sum_n(\alpha_{mnx} W_{nx} - \alpha_{mny} W_{ny})] + \alpha_{mny}[A_{my} + \sum_n(\alpha_{mny} W_{nx} + \alpha_{mnx} W_{ny})]\}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial W_{ny}} = \sum_m \{\alpha_{mny}[A_{mx} + \sum_n(\alpha_{mnx} W_{nx} - \alpha_{mny} W_{ny})] + \alpha_{mnx}[A_{my} + \sum_n(\alpha_{mny} W_{nx} + \alpha_{mnx} W_{ny})]$$

para cada n. Pero en notación matricial, el sistema de ecuaciones (5.4) corresponde a la ecuacion:

$$[\alpha]^T [\alpha] [W] + [\alpha]^T [A] = 0$$

y de aqui se puede despejar $[W]$. Haciendo esto se obtiene:

$$[W] = -\{[\alpha]^T [\alpha]\}^{-1} [\alpha]^T [A]$$

donde:

$$[W] = \begin{bmatrix} W_{1x} \\ W_{1y} \\ \\ W_{Nx} \\ W_{Ny} \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ \vdots \\ A_{Mx} \\ A_{My} \end{bmatrix}$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11x} & -\alpha_{11y} & \cdots & \alpha_{1Nx} & -\alpha_{1Ny} \\ \alpha_{11y} & \alpha_{11x} & & \alpha_{1Ny} & \alpha_{1Nx} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{M1x} & -\alpha_{M1y} & \cdots & \alpha_{MNx} & -\alpha_{MNy} \\ \alpha_{M1y} & \alpha_{M1x} & & \alpha_{MNy} & \alpha_{MNx} \end{bmatrix}$$

C) EL METODO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA

Cuando M=N ; o sea el número de planos de correción es igual al numero de velocidades de balanceo, multiplicado por el numero de estaciones de medición, el valor de las amplitudes de las vibraciones está relacionado con los momentos de desbalanceo mediante la matriz de los coeficientes de influencia, a través de la siguiente ecuacion:

$$[A] = [a][-W]$$

Los coeficientes de influencia quedan definidos mediante esta ecuacion; o sea, $a_{ln}^{(k)}$ es el coeficiente que relaciona la deflexion producida en la posición l, cuando el rotor gira a la velocidad K, por el momento de desbalanceo de la posición n.

Para este efecto se escogen K velocidades y L posiciones de medición de tal manera que KXL=N. Para poder resolver la ecuacion de los coeficientes de influencia para los desbalanceos es necesario invertir la matriz en cuestión. Por lo tanto esta matriz debe ser cuadrada y para eso se pueden escoger K, L y M de tal manera que M=N; por lo tanto N/L debe ser entero.

Por ejemplo, si el número de detectores en cada corrida es L=2, entonces el número de velocidades es K=N/2 si N es par y K=(N+1)/2 si N es impar.

Como se menciono en la sección anterior, la matriz de los coeficientes de influencia se puede obtener si se restan los valores de las vibraciones sin cargas de los valores de las vibraciones, con un contrapeso a la vez en cada estacion de balanceo, por que al restar estas dos matrices se elimina el valor desconocido de los momentos del desbalanceo.

Para esto supongamos que el número de detectores es L=2 se miden amplitud y fase de las vibraciones ocasionadas por el desbalanceo en la primera velocidad K=1. Usaremos la notacion con tres indices $a_{ln}^{(K)}$ para denotar la amplitud de las vibraciones en la K-ésima velocidad, en el l-ésimo detector y con un peso de prueba U_n en el plano de correccion n, o sin carga en el caso n=0.

Se miden:

$$\begin{Bmatrix} A_{10}^{(1)} \\ A_{20}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 \\ \vdots \\ -W_N \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Se vuelve a girar a la misma velocidad, agregando un peso de prueba U_1 en el primer plano de corrección. Ahora se mide:

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1+U_1 \\ \vdots \\ -W_N \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

y restando la ecuacion (5.6) de la ecuacion (5.5) se elimina $[W]$, que es desconocida y se pueden calcular los coeficientes de influencia $a_{11}^{(1)}$ y $a_{21}^{(1)}$, pues:

$$a_{11}^{(1)} = \frac{A_{11}^{(1)} - A_{10}^{(1)}}{U_1} \quad y \quad a_{21}^{(1)} = \frac{A_{21}^{(1)} - A_{20}^{(1)}}{U_1}$$

En general, agregando un peso U_n en el n-esimo plano de correccion y restando la amplitud sin carga de la nueva amplitud, se obtiene el correspondiente coeficiente de influencia.

Para la aplicación de este método sólo es necesario invertir una matriz de números complejos, como lo indica la ecuación (5.7):

$$[W] = -[a]^{-1}[A] \qquad (5.7)$$

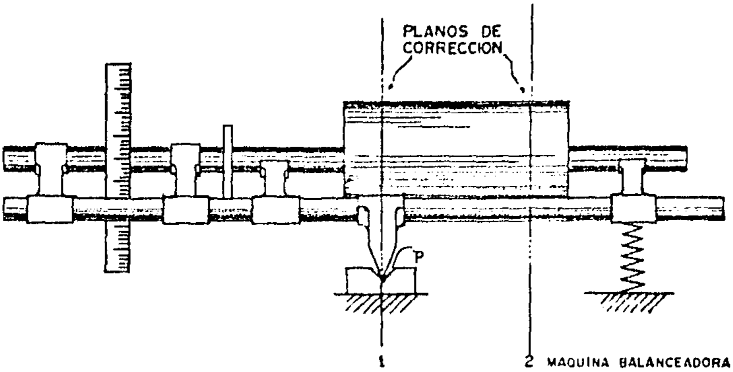
Pero ademas de tomar los datos con mucho cuidado, también es necesario escoger las velocidades de balanceo y los planos de correccion con el mismo cuidado.

INSTUMENTACION EXPERIMENTAL

CAPITULO 6

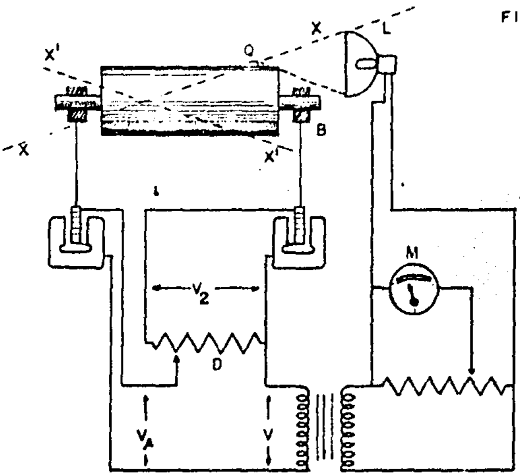
A) MAQUINAS BALANCEADORAS CONVENCIONALES

Hay muchos tipos de maquinas balanceadoras pero el principio basico con el que operan es esencialmente el mismo. En las maquinas de cierto tipo, la parte del rotor a ser balanceada se sujeta en un armazon pivotado sobre el cual se hace girar, como se muestra en la figura 6.1. Con este tipo de maquina uno de los planos de correccion 1 es colocado sobre el eje del pivote P del armazon, asi se elimina el efecto del desbalanceo sobre el segundo plano 2. De este modo el armazón sólo oscilará alrededor del pivote. Un mecanismo compensador se en-



MAQUINA BALANCEADORA DE ARMAZON PIVOTEADO

FIGURA 6.1



MAQUINA BALANCEADORA TIPO GISHOLT

FIGURA 6.2

cuentra en la rueda C. Esta se ajusta para reducir las oscilaciones a cero y la obtención de esta reduccion da una lectura sobre el disco C que corresponde a la correccion del desbalanceo en 2. Si el momento alrededor del plano del pivote es cero, entonces el único desbalanceo que puede haber tendria que estar en el plano 1. Entonces el proceso se repite con los extremos del rotor invertidos para que ahora el plano 2 coincida con el plano del pivote. Este tipo de maquina tiene un buen numero de serias desventajas, y al principio de todas está la inercia del armazon la cual reduce la oscilación detectable para el armazon con un desbalanceo dado.

La figura 6.2 representa otro tipo de máquina balanceadora en la cual la parte rotativa está soportada sobre dos baleros montados flexiblemente. Debido a la baja inercia de los soportes del rotor, la sensibilidad de este tipo de maquina es considerablemente superior a la de armazón pivotado. Además la función de la máquina de armazón pivotado de separar el desbalanceo en dos planos, se puede reproducir con metodos electricos.

Para describir el modo de operación de este otro tipo de maquina supongamos primero que el rotor de la figura 6.2 está balanceado. Y se le anade un peso Q tal que el único desbalanceo sobre el rotor se encuentra sobre el plano 2 y es debido a Q. Al girar, el eje del rotor oscilará hacia atras y hacia adelante entre las lineas $X-X$ y $X'-X'$. Como Q esta mas cerca de B que de A, el movimiento del soporte B sera mayor que el de A. Sin embargo, la relacion geometrica entre la amplitud B y la amplitud de A depende sólo de la posición del plano que contiene a Q y es independiente de la magnitud de Q.

La amplitud de la vibracion en A y B debida al desbalanceo se convierte en los voltajes V_A y V_B por medio de pick-ups. Como los voltajes son en este caso proporcionales a las amplitudes, V_B es mayor que V_A. Ajustando el divisor de voltaje D, una porción de V_B igual y opuestigual y opuesta a V_A se puede elegir para que el voltaje resultante V sea cero para cualquier desbalanceo en el plano 2.

B) MAQUINA PORTATIL PARA BALANCEO EN EL CAMPO

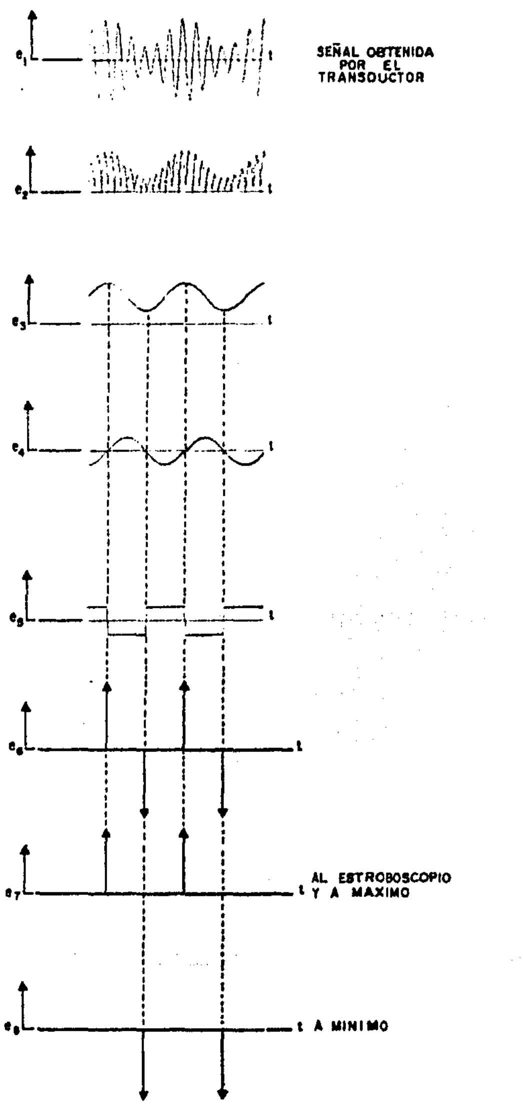
En ciertos casos ademas del balanceo de rutina en la linea de produccion, es necesario balancear el rotor al colocarlo en su lugar de operación, y casi todos los rotores necesitan un balanceo de mantenimiento después de cierto tiempo de operacion. Por esto se hace necesaria una maquina portátil para el balanceo en el campo.

Esta maquina consiste en un analizador de vibraciones de tamaño reducido v fácil de montar, el cual sincroniza una luz estroboscópica con la amplitud máxima o mínima que el detector de posición de tipo capacitivo percibe. Tambien se puede sincronizar un circuito de muestra y captura para medir dichas amplitudes en un voltimetro.

En la figura 6.3 se muestra un diseño para un analizador de vibraciones tipo capacitivo a nivel de amplificadores operacionales ideales.

El éxito en la utilización de este tipo de equipo depende del control que se tenga sobre la estabilidad de las velocidades de muestreo.

Una vez que se han tomado lecturas para el rotor sin carga y con pesos de prueba, las lecturas se pueden analizar en una computadora para determinar las masas de corrección según el programa del apendice A.



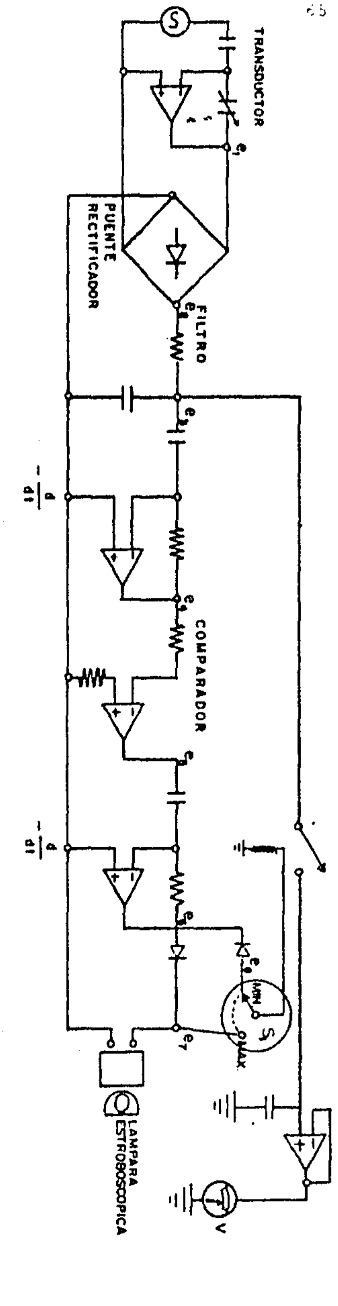


FIGURA 6.3

FUNCIONAMIENTO DE LA MAQUINA BALANCEADORA PORTATIL

C) MAQUINA BALANCEADORA ANALOGICA-DIGITAL

Este tipo de maquina consiste en una computadora conectada con detectores de proximidad de tipo capacitivo por medio de un voltímetro digital.

Estos detectores se estudian en el apendice C y tienen la propiedad de tener un voltaje de salida proporcional a la separación entre las placas de un capacitor.

El voltímetro digital permite a la computadora conocer la separacion entre las placas del capacitor en un instante dado.

Si se toman lecturas al azar en suficientes cantidades se puede hacer una estadística para estimar la amplitud de las vibraciones en cada condición de medición.

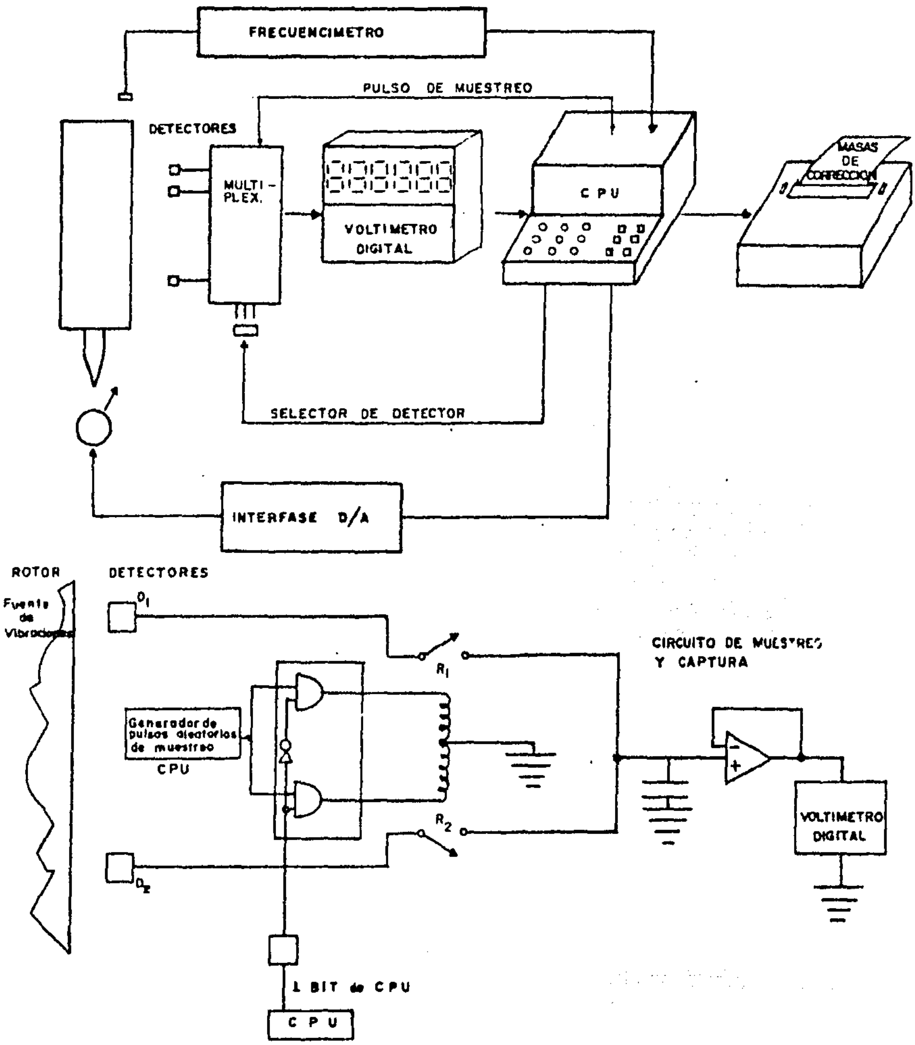
Hecho todo esto, la computadora solo tendría que calcular las masas correctivas para esas vibraciones según cualquiera de los métodos del capítulo anterior.

Nosotros recomendamos el método de los mínimos cuadrados para el cual se proporciona un programa en lenguaje BASIC en el apendice A.

Para usar solo un voltímetro y dos detectores se puede usar un bit de CPU para generar pulsos aleatorios de muestreo y otro bit para escoger entre dos detectores como se muestra en la figura 6.4.

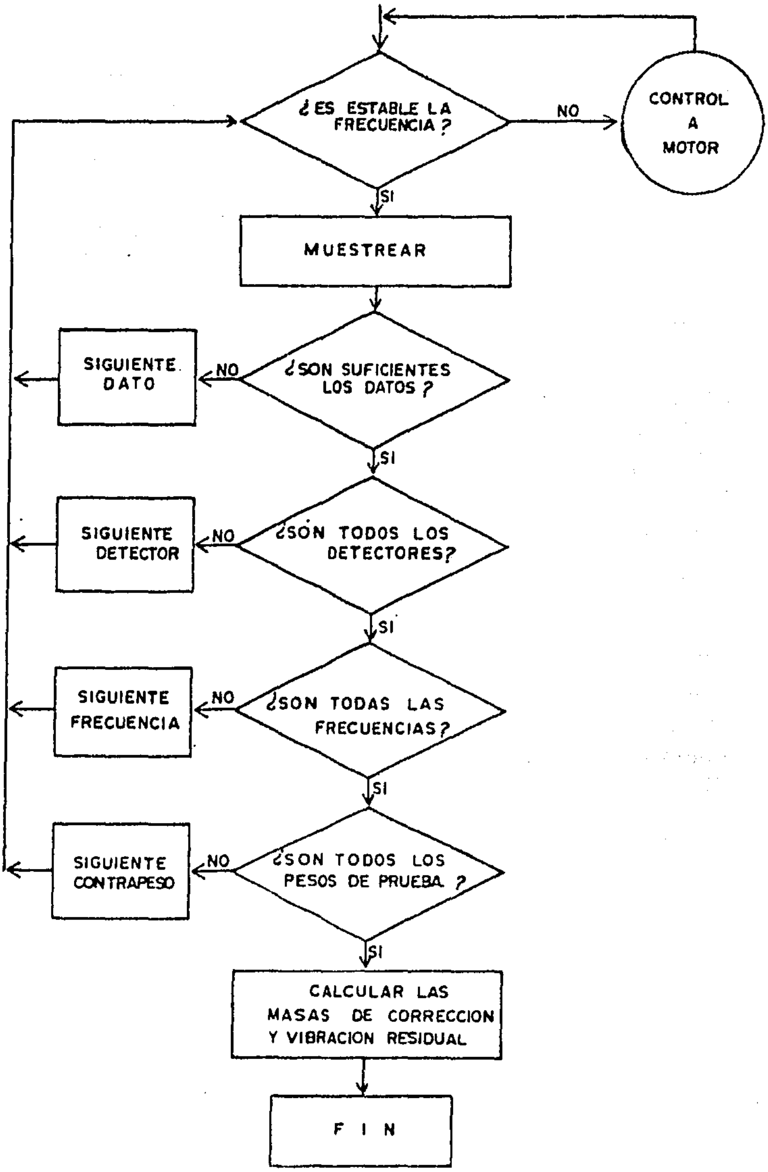
En la figura 6.5 se muestra un diagrama de flujo para

En el apendice B se estudian los transductores de posición de tipo capacitivo ampliamente usados en la instrumentación electrónica.



MAQUINA BALANCEADORA ANALOGICA — DIGITAL

FIGURA 6.4



PROGRAMA PARA EL MUESTREO AUTOMATICO DE DATOS

FIGURA 6.5

la obtención de los datos.

Y para obtener el balanceo basta colocar las masas correctivas sobre el rotor según los resultados obtenidos por la computadora.

CONCLUSIONES

CAPITULO 7

Auui se ha tratado el problema del balanceo dinámico de otores desde varios puntos de vista. La teoría de las vibraciones supone que se conoce la distribución de masa exácta- mente. Esta condicion es muy difíil de cumplir, pues solo se puede calcular a partir de las vibraciones producidas por el desbalanceo.

Afortunadamente para nosotros, no es necesario considerar la teoría de las vibraciones en la practica, pues el punto de vista de una caja negra es en este caso mas efectivo. Los coeficientes de respuesta son los elementos de la matriz de transferencia de una caja negra con n entradas y m salidas.

En este esquema las n entradas se pueden interpretar como los planos de corrección y las m salidas, como las condiciones de medicion.

Para determinar los elementos de la matriz de transferencia es necesario medir primero las salidas sin pesos de prueba (lo que corresponde a las salidas de la caja negra sin cargas a la entrada) y despues medir las salidas con ciertas pesos de prueba en cada una de las entradas, una a la vez que corresponde a las salidas de la caja negra con cargas de prueba análogas a los pesos de prueba).

Se escogió la teoría de los mínimos cuadrados para calcular las masas balanceadoras por las razones ya expuestas y se construyo un programa en lenguaje BASIC para calcular las masas de correccion asi como las vibraciones residuales.

El método preve un proceso iterativo para uniformar las vibraciones residuales, multiplicando el coeficiente de respuesta en cada condición de medición por un factor de ponderación proporcional a la vibración residual en esa condición en la iteración anterior.

Todo este metodo con su programa y la máquina balanceadora portatil analizada en el capítulo 6, forman el panorama del balanceo dinamico desde el punto de vista práctico.

El detector de posicion de tipo capacitivo es un transductor de posición lineal que es ideal para medir vibraciones de amplitud. Pero si se desea medir vibraciones de velocidad o de aceleracion, existen otros tipos de detectores que probablemente resultarían mas convenientes. Sin embargo, mediante el uso de amplificadores operacionales diferenciadores se puede convertir al detector en un transductor de velocidad o de aceleracion.

La construccion de la maquina balanceadora portatil podría resultar en un util instrumento de precision que no solo tendría aplicación en el balanceo de rotores, sino tambien para medir las vibraciones producidas por causas distintas a la distribucion de la masa de un rotor girando cerca de alguna de sus velocidades críticas.

PROGRAMA DE CALCULO PARA LAS MASAS DE CORRECCION

APENDICE A

En este apéndice se describe el procedimiento del cálculo por computadora de las masas de corrección que reducen al mínimo la raiz cuadrática media de las vibraciones residuales, según lo expuesto en el capítulo 5.

Este programa es iterativo y en cada iteracion se persigue uniformar las vibraciones en todas las condiciones de medición. Para ello se modifica la matriz transpuesta de los coeficientes de respuesta, multiplicando cada una de sus columnas por el factor $|\varepsilon_m|/R$. Este factor le da mayor importancia a condiciones de medicion con vibraciones residuales más fuertes.

En el pasado se popularizaron los métodos de los coeficientes de influencia y de un solo intento, por requerir menor capacidad de computación, pero en la actualidad esto ya no representa ningún problema, debido a los avances de la microcomputación.

El método de los mínimos cuadrados, tiene además las siguientes ventajas sobre los demás:

1. Proporciona una aproximación de las vibraciones residuales.

2. Los instrumentos de medición usados no necesitan ser tan precisos y en caso que no lo sean lo suficiente, se puede aumentar el número de condiciones de medición sin variar el número de planos de corrección.

3. El metodo de los coeficientes de influencia es solo un caso particular del método de los mínimos cuadrados.

A continuación se presenta una corrida de prueba y el listado del programa.

DATOS:
VIBRACION SIN CARGA:
Ax(1)= 1 Ay(1)= 0
Ax(2)=-1 Ay(2)= 0
Ax(3)= 0 Ay(3)= 0

1a. ITERACION

coeficientes de respuesta:

3.00	0.00	-2.00	0.00
0.00	3.00	0.00	-2.00
5.00	0.00	-2.00	0.00
0.00	5.00	0.00	-2.00
5.00	0.00	-3.00	0.00
0.00	5.00	0.00	-3.00

RESULTADOS:
MASAS DE CORRECCION:
Wx(1)= .809525 Wy(1)= 0
Wx(2)= 1.47619 Wy(2)= 0
VIBRACION RESIDUAL:
Ex (1)= .476194 Ey(1)= 0
Ex (2)= .0952435 Ey(2)= 0
Ex (3)=-.380947 Ey(3)= 0
SUMA DE RESIDUOS CUADRADOS= .380953
RAIZ MEDIA DE RESIDUOS= .356348

2a. ITERACION

coeficientes de respuesta:

4.01	0.00	-2.67	0.00
0.00	4.01	0.00	-2.67
1.34	0.00	-0.53	0.00
0.00	1.34	0.00	-0.53
5.35	0.00	-3.21	0.00
0.00	5.35	0.00	-3.21

RESULTADOS:
MASAS DE CORRECCION:
Wx(1)= .999986 Wy(1)= 0
Wx(2)= 1.79999 Wy(2)= 0
VIBRACION RESIDUAL:
Ex (1)= .399988 Ey(1)= 0
Ex (2)= .39996 Ey(2)= 0
Ex (3)=-.400026 Ey(3)= 0
SUMA DE RESIDUOS CUADRADOS= .479979
RAIZ MEDIA DE RESIDUOS= .399991

```
10 READ M,N
20 DIM AX(M-1):DIM AY(M-1)
30 DIM AF(2*M-1,2*N-1):DIM AG(2*M-1,2*N-1)
35 DIM E(2*M-1):DIM A(2*N-1,4*N-1)
40 DIM W(2*N-1):DIM AR(4*N-1)
50 FOR I=0TO M-1:READ AX(I):READ AY(I):NEXT I
55 IT=1
60 LPRINT "DATOS:":LPRINT"VIBRACION SIN CARGA:"
70 FOR I=0TOM-1:LPRINT "Ax("+STR$(I+1)+")=";AX(I);"Ay("+STR$(I+1)+")=";AY(I)
80 NEXT I
90 FOR I=0TO 2*M-1:FOR J=0TO 2*N-1:READ AF(I,J):NEXT J:NEXTI
100 FOR I=0TO2*M-1:FOR J=0TO 2*N-1:AG(I,J)=AF(I,J): NEXTJ:NEXTI
110 GOSUB700
120 FOR I=0TO2*N-1:FOR J=0TO 2*N-1:A(I,J)=0:FOR K=0TO2*M-1
140 A(I,J)=A(I,J)+AG(K,I)*AF(K,J)
150 NEXT K:NEXT J:NEXT I
170 FOR I=0TO 2*N-1:FORJ=1TO2*N:A(I,2*N-1+J)=0:IFJ=I+1THENLETA(I,2*N-1+J)=1
180 NEXT J:NEXTI
200 K=0
210 FOR I=K+1TO 2*N-1
220 IF A(K,K)=0THEN LET IS=K:GOSUB 950
230 B=A(I,K)/A(K,K)
240 FOR J=KTO 4*N-1:A(I,J)=A(I,J)-B*A(K,J):NEXT J:NEXTI
250 IF K=2*N-2THEN 300
260 K=K+1:GOTO 210
300 K=0
310 FOR I=K+1TO 2*N-1
320 IF A(I,I)=0THENLET IS=I:GOSUB 950
330 B=A(K,I)/A(I,I)
340 FOR J=KTO 4*N-1:A(K,J)=A(K,J)-B*A(I,J):NEXT J:NEXTI
350 IF K=2*N-2THEN400
360 K=K+1:GOTO 310
400 FOR I=0TO 2*N-1:B=A(I,I):D=D*A
410 FOR J=0TO 4*N-1:A(I,J)=A(I,J)/B:NEXT J: NEXT I
430 FOR I=0TO N-1:W(2*I)=0:W(2*I+1)=0:FOR J=0TO M-1
432 C0=0:C1=0
435 FOR K=0TO 2*N-1:C0=C0+A(2*I,2*N+K)*AG(2*J,K)
436 C1=C1+A(2*I+1,2*N+K)*AG(2*J+1,K):NEXT K
440 W(2*I)=W(2*I)-C0*AX(J):W(2*I+1)=W(2*I+1)-C1*AY(J):NEXT J:NEXT I
445 LPRINT "RESULTADOS:"
450 LPRINT "MASAS DE CORRECCION:"
460 FOR I=0TO N-1:LPRINT "Wx(";STR$(I+1);")=";W(2*I);"Wy(";STR$(I+1);")=";W(2*I+1)
465 NEXTI
470 FOR I=0TO2*M-1:E(I)=0:FOR J=0TO 2*N-1
480 E(I)=E(I)+AF(I,J)*W(J):NEXT J:NEXT I
490 FOR I=0TO M-1:E(2*I)=E(2*I)+AX (I):E(2*I+1)=E(2*I+1)+AY(I):NEXT I
500 LPRINT "VIBRACION RESIDUAL:"
510 FOR I=0TOM-1:LPRINT "Ex (";STR$(I+1);")=";E(2*I);"Ey(";STR$(I+1);")=";E(2*I+1)
515 NEXTI
520 S=0:FOR I=0TO 2*M-1:S=S+E(I)^2:NEXTI
530 LPRINT "SUMA DE RESIDUOS CUADRADOS=";S
540 R=SQR (S/M)
550 LPRINT " RAIZ MEDIA DE RESIDUOS=";R
```

```
560 INPUT " OTRA ITERACION ";I$
570 IF I$="no" THEN STOP
575 IT=IT+1
580 FOR I=0TO N-1:F=SQR (E(2*I)^2+E(2*I+1)^2)/R
590 FOR J=0TO 2*N-1:AG(2*I,J)=AG(2*I,J)*F:AG(2*I+1,J)=AG(2*I+1,J)*F
600 NEXT J:NEXT I
620 GOSUB700:GOTO 120
700 LPRINTTAB(10);STR$(IT)+"a. ITERACION":LPRINT "coeficientes de respuesta:"
710 FORI=0TO2*N-1:FORJ=0TO2*N-1
720 LPRINT USING"####.##";AG(I,J);:NEXTJ:LPRINT :NEXTI
730 RETURN
950 FOR JS=0TO 2*N-1:IF JS=ISOR A(JS,IS)=0OR(JS<ISAND A(IS,JS)=0)THEN970
960 FORKS=0TO2*N-1:AR(KS)=A(JS,KS):A(JS,KS)=A(IS,KS):AIS,KS)=AR(KS):NEXTKS
970 NEXT JS
980 RETURN
1000 DATA 3,2
1010 DATA 1,0
1020 DATA -1,0
1030 DATA 0,0
1040 DATA 3,0,-2,0
1050 DATA 0,3,0,-2
1060 DATA 5,0,-2,0
1070 DATA 0,5,0,-2
1080 DATA 5,0,-3,0
1090 DATA 0,5,0,-3
```

TRANSDUCTORES DE POSICION DE TIPO CAPACITIVO

APENDICE B

Si no se cuenta con instrumento de medición alguno, se puede usar el lápiz estacionario para determinar fases sobre el rotor y las amplitudes se pueden encontrar por ensayo y error.

Después solo sería necesario encontrar las masas de corrección por alguno de los tres métodos mencionados en el capítulo cinco.

Sin embargo, el lápiz estacionario deja de ser efectivo para altas velocidades. Esta dificultad se puede eliminar si se introduce un sencillo dispositivo eléctrico (ver figura B.1).

Este dispositivo sirve como un transductor de posición de tipo capacitivo, en el cual un amplificador de características cercanas al amplificador ideal hace que el voltaje sea directamente proporcional a la distancia entre las placas de el capacitor.

En realidad la capacidad por si sola no es proporcional a la separación entre las placas de un capacitor de placas paralelas sino inversamente proporcional a ésta. Sin embargo, esta dificultad queda eliminada conectando el amplificador como en la figura B.1.

En este caso el voltaje entre a y b V_{ab} será casi nulo pues la impedancia de entrada del amplificador es infinita y por la misma razón la corriente $i_{ab} = 0$

Entonces las ecuaciones:

$$i_f + i_x = i_{ab}$$
$$V_e - V_{cf} = V_{ab}$$
$$V - V_{cx} = V_{ab}$$

se convierten en

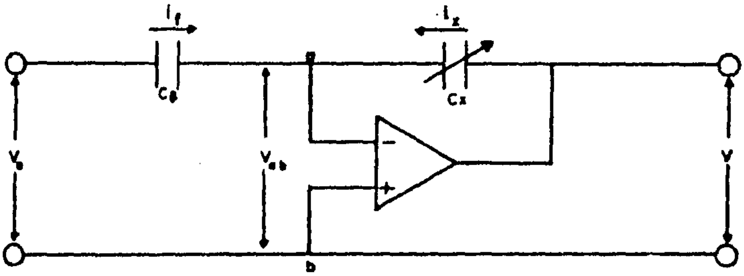
$$i_f = -i_x$$
$$V_e = V_{cf}$$
$$V = V_{cx}$$

por lo tanto

$$V = V_{cx} = \frac{1}{C_x}\int i_x dt = \frac{1}{C_x}\int -i_f dt$$
$$V_e = V_{cf} = \frac{1}{C_f}\int i_f dt$$

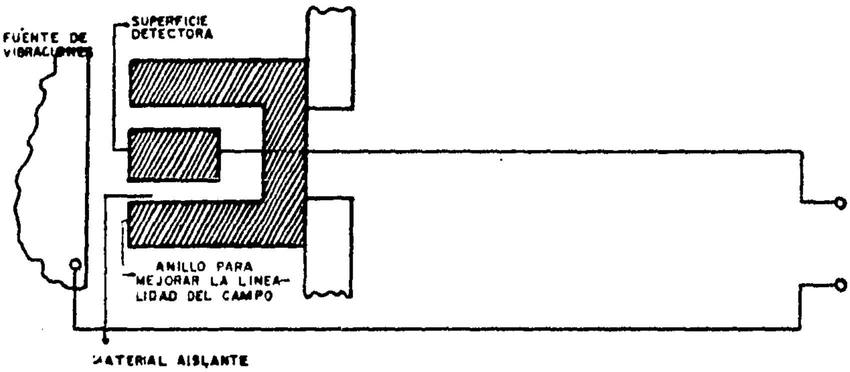
Entonces la función de transferencia de voltajes es:

$$\frac{V}{V_e} = -\frac{C_f}{C_x} = -\frac{C_f x}{\varepsilon_0 A} = -Kx \qquad (B.1)$$



DETECTOR LINEAL DE POSICION DE TIPO CAPACITIVO

FIGURA B.1



CONFIGURACION FISICA DEL DETECTOR

FIGURA B.2

por esta razon es posible usar detectores (transductores de posicion) de ese tipo para medir las vibraciones producidas por el desbalanceo de un rotor metalico.

Una gran ventaja es la alta sensibilidad alcanzable con este tipo de detectores pues:

$$C_x = \frac{\varepsilon_0 A}{x} = \frac{0.0895 A}{x} \quad \text{si} \begin{cases} [A] = cm^2 \\ [C] = pF \\ [x] = cm \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\left|\frac{dC}{dx}\right| = \frac{\varepsilon_0 A}{x^2}$$

Este valor es proporcional a la sensibilidad y segun se ve, esta se puede incrementar haciendo mas pequeña la separacion entre el detector y el rotor que en este caso constituyen las placas paralelas de el capacitor.

Un modelo de este tipo de detector se muestra en la figura B.2.

Otra gran ventaja del uso de este tipo de transductores para medir el tipo de vibraciones ocasionadas por el desbalanceo es el que la fuerza perturbadora que todo detector produce sobre el sistema que mide es casi nula.

Este detector también se puede calibrar en las unidades que se quiera alimentandolo con el voltaje adecuado.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. P. Goodman: A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections. Transactions of the ASME agosto 1964.

[2] J. M. Tessarzik, R. H. Badgley, W. J. Anderson: Flexible Rotor Balancing by the Exact Point-Speed Influence Coefficient Method, Transacions of the ASME 71-Vibr-91, 1971

[3] R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell: The Vibation and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor, Journal Mech. Eng. Sci. Vol 1 No 1 1959

[4] S. Fujii: The Roles of Resistances in the Vibration of a Rotating Shaft. Proccedings of the 1st. National Congress for App. Mech. 1951

[5] N. F. Rieger, R. H. Badgley: Flexible Rotor Balancing of a High-Speed Gas Turbine Engine. National Combined Farm, Construction & Industrial Machinery and Powerplant Meetings Milwakee, Wis. Sept 11-14, 1972

[6] D. Muster: Balancing of Rotating Machinery. ASA report 62-W-36

[7] W. Senger: Practice of Balancing. Gisholt Machine Company.

[8] A. Giers: Rechnergestuetztes Auswuchten elastischer Rotoren. Archiv fuer Technisches Messen, Blatt V 8224-22 (junio 1974)

[9] J. F. G. Wort: The Fundamentals of Industrial Balancing Machines and their Applications. Bruel & Kjaer Technical Review No. 1 1981

[10] E. Doeblin: Measurement Systems. Mac Graw Hill 1966

[11] W. T. Thompson: Mechanical Vibations. Prentice Hall 1957