

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

" EQUILIBRIO DE PLASMAS TOROIDALES EN ROTACION "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

PRESENTA:

JUAN ANTONIO AIMAGUER ANDRADE

1 9 8 5



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

	página.
INTRODUCCION.	1
CAPITULO I.	
El Estado de Equilibrio.	6
I.1 Las Ecuaciones MHD y la Configuración Toroidal.	6
I.2 La Función de Corriente y las Superficies Magnéticas.	14
I.3 La Relación entre el Campo de Velocidades y el Campo Magnético.	15
I.4 Superficies de Flujo Isentrópicas. Superficies de Flujo Isotérmicas.	17
I.5 El Término $rB_\theta - rF(\psi)v_\theta$ como Cantidad de Superficie.	18
I.6 La Ecuación de Bernoulli.	20
Notas.	24
CAPITULO II.	
La Ecuación del Estado de Equilibrio.	25
II.1 La Ecuación de Grad-Shafranov Modificada.	25
II.2 La Ecuación de Grad-Shafranov como Caso Límite.	29
II.3 Determinación del Tipo de la Ecuación de Grad-Shafranov Modificada.	30
Notas.	39
CAPITULO III.	
Solución de la Ecuación de Grad-Shafranov Modificada.	40
III.1 Flujo Transversal $\vec{B} = \vec{B}_p, \vec{v} = r\omega\hat{\theta}$.	40
III.2 Flujo Transversal $\vec{B} = \vec{B}_\theta, \vec{v} = \vec{v}_p$.	47
III.3 Flujo Paralelo.	53

Notas.	55
CAPITULO IV.	
Conclusiones.	57
GRAFICAS.	61
APENDICE I.	62
APENDICE II.	63
REFERENCIAS.	66

INTRODUCCION

El estudio de la rotación de los plasmas ha cobrado auge en los últimos años debido a su presencia en los experimentos que se realizan con miras a la fusión nuclear controlada. Si bien su estudio es de interés por sí mismo.

Cuando se tienen una densidad de corriente, \vec{j} , y un campo magnético, \vec{B} , no paralelos entre sí, en un fluido conductor, la fuerza $\vec{j} \times \vec{B}$ puede no estar balanceada con gradientes de presión dando lugar a movimientos macroscópicos del fluido. Si, por ejemplo, la densidad de corriente forma un patrón divergente o convergente en los planos perpendiculares al campo magnético se tendrá una torca que hará rotar al fluido en torno a las líneas del campo magnético. Cuando las líneas de \vec{B} se portan como equipotenciales en un fluido conductor inmerso eléctricamente, las corrientes eléctricas y la fuerza $\vec{j} \times \vec{B}$ producen una fuerte transmisión de momento en la dirección de \vec{B} . Así, para una configuración de simetría axial, dicha interacción lleva a la conocida ley de isorrotación de Ferraro.

La rotación de los plasmas se crea en los laboratorios usualmente aplicando una descarga eléctrica a través de un campo magnético inmerso en una masa de gas neutro. Dicha descarga tenderá tanto a ionizar y calentar el gas como a ponerlo en rotación. También puede hacerse creando primero el plasma y a continuación ponerlo en rotación con un campo eléctrico transversal.

Entre los diferentes dispositivos para tal efecto se tienen los tipos siguientes (Lehnert, 1971) :

A) Sistemas cuasi-estacionarios.

Un plasma cuasi-estacionario puede producirse y sos-

tenerse por una descarga en un sistema que contenga tanto plasma como gas neutro. El plasma se pone en rotación en la dirección $\vec{E} \times \vec{B}$ por un campo eléctrico \vec{E} debido a una diferencia de potencial aplicada por medio de electrodos.

Cuando se tienen densidades suficientemente altas para establecer una distribución casi isotrópica con igual temperatura para iones y electrones, la componente del campo eléctrico a lo largo de \vec{B} , $E_{||}$, es pequeña comparada con la componente transversal E_{\perp} . En esa situación el plasma sigue la ley de isorrotación. En el caso de bajas densidades también existen sistemas cuasi-estacionarios conteniendo plasmas anisotrópicos rotando, en los cuales $E_{||}$ no puede despreciarse y donde las partículas neutras penetran en el centro del grueso del plasma. En esta última situación no existen superficies equipotenciales bien definidas y no es válida la ley de isorrotación.

Como ejemplos del primer caso se tienen Homopolar I (Berkeley), Ixion III (Los Alamos) etc.; y del segundo , Ion magnetron (Berkeley), Penning discharge (Estocolmo), etc.

B) Sistemas "Puffatron".

Se trata de un arreglo lineal con una válvula rápida en el centro del dispositivo. Entre ellos se encuentran Homopolar IV (Berkeley), Alice Puffatron (Livermore), etc.

C) Sistemas de ionización frontal.

Se trata de un arreglo lineal donde el plasma es generado por una descarga entre dos electrodos concéntricos en un extremo del aparato. De este tipo son Hothouse I (Berkeley) y Supper II (Sidney).

D) Sistemas de campo rotando.

Una manera de poner la columna de plasma en rotación

por campos \vec{E} y \vec{B} que rotan variando en el tiempo es usar la componente de campo magnético que rota sobrepuesta sobre un plasma confinado magnéticamente con simetría axial. Ejemplos de este dispositivo son Rotating Field (Culham) y Rotating Pinch (Lausanne).

E) Sistemas de campo axisimétrico.

Es un dispositivo más complicado, el caso más conocido es el de un "estelerador" (stellarator en inglés) en el cual una rotación del plasma se presenta a veces por un campo eléctrico radial: Stellarator (Princeton).

En la actualidad la rotación del plasma está asociada con el proceso de inyección de haces neutros con objeto de calentar el plasma para llevarlo, en principio, hasta el punto que haga posible la fusión nuclear. En los sistemas toroidales, por ejemplo, dicha inyección lleva invariablemente a una rotación inevitable del plasma. La rotación toroidal afecta la posición y la forma de las superficies magnéticas cambiando de esa manera la configuración de equilibrio y que habrá de repercutir en la estabilidad del sistema. Uno de los cambios más claros es el que las superficies de presión constante y las superficies magnéticas ya no coincidan.

En los dispositivos usados con miras a la fusión nuclear se sabe (K. Brau et al., 1983) que las fuerzas no balanceadas asociadas a la inyección de haces neutros son capaces de inducir flujos de plasma que alcanzan una modesta fracción de la velocidad térmica de los iones de hidrógeno. Si la velocidad de rotación de los iones de impurezas es comparable a su velocidad térmica (lo cual puede ocurrir en los tokamaks para algunas impurezas con Z alta) el transporte radial de iones puede ser modificado. Esto ha estimulado el estudio de

ese proceso con el objetivo de usarlo para controlar impurezas con la inyección de haces neutros ⁽¹⁾ (Stacey y Sigmar, 1979. Isler et al., 1981). También se presenta una asimetría poloidal en la distribución de la densidad de electrones (Wong y Burrell, 1982) a consecuencia de rotaciones toroidales grandes ⁽²⁾ durante la inyección de haces neutros. Se ha visto que la velocidad del flujo poloidal con inyección de haz neutro toroidalmente y no balanceado es varias veces menor que la velocidad toroidal incluso en los casos en los cuales las fuerzas toroidal y poloidal son comparables. Este es el resultado del intenso amortiguamiento de los flujos poloidales por el bombeo magnético, proceso en el cual la energía translacional de un plasma que se mueve a través de un campo magnético que varía espacialmente se convierte en energía térmica sin transporte radial.

En el presente trabajo se examina en el Capítulo I el estado de equilibrio de un plasma toroidal con simetría axial, perfectamente conductor y no viscoso, en estado estacionario.

(1) Cálculos realizados para el Toro Largo de Princeton (PLT) (Suckewer et al., 1979) muestran que una gran fracción del momento del haz es transferido a los iones de impurezas. La transferencia de momento es (en dinas):

Para electrones	$8.7 \cdot 10^3$
Para iones de especies hidrogénicas	$3.3 \cdot 10^4$
Para impurezas	$4.7 \cdot 10^4$
Fuerza $\vec{J}_r \times \vec{B}_\theta$	$2.3 \cdot 10^4$.

(2) La comparación es siempre con respecto a la velocidad térmica de los iones.

Se obtiene la representación de Clebch para \vec{B} y se relaciona el campo magnético con el campo de velocidades. A continuación se establecen las cantidades de superficie y la ecuación de Bernoulli, terminando con una comparación entre esta última y la manejada en la dinámica de fluidos.

La ecuación para el estado de equilibrio con flujo de plasma (ecuación de Grad-Shafranov modificada) se obtiene en el Capítulo II y se obtiene como caso particular, en ausencia de flujo, la conocida ecuación de Grad - Shafranov para el caso estático. Se examina qué tipo de ecuación es la primera y se determinan explícitamente las regiones de elipticidad e hiperbolicidad.

En el Capítulo III se resuelve la ecuación de G-Sh modificada para tres casos particulares: i) flujo transversal teniendo rotación pura del plasma y únicamente componente poloidal del campo magnético; ii) flujo transversal teniendo únicamente componente poloidal en la velocidad y toroidal en el campo magnético; iii) flujo paralelo, el campo de velocidades es paralelo al campo magnético. Ahí se obtienen las superficies de flujo correspondientes y los campos electromagnéticos consistentes con las situaciones analizadas.

El trabajo finaliza con una analogía hidrodinámica entre las superficies de flujo conocidas en un ejemplo de la dinámica de fluidos y las que aquí se obtienen; señalando además las diferencias entre las superficies correspondientes al caso estático y al caso con flujo de plasma. Los resultados obtenidos se discuten en el Capítulo IV.

CAPITULO I
EL ESTADO DE EQUILIBRIO.

En este capítulo se definen los conceptos de superficie de flujo magnético y cantidades de superficie para una geometría toroidal en el marco de la magnetohidrodinámica ideal. Se expresa el campo magnético, \vec{B} , en un sistema de coordenadas contravariantes conocido como representación de Clebsch haciendo uso de la función de corriente $\psi(r, z)$ definida a partir del potencial vectorial. En particular interesa estudiar el caso en el cual $\vec{v} \neq \vec{0}$, por lo que se encuentra la relación entre \vec{B} y \vec{v} , y en estos términos se determinan las cantidades de superficie del problema. Asimismo, se obtiene la ecuación análoga a la de Bernoulli para el plasma toroidal y se analizan tanto las diferencias como las similitudes con la ecuación de Bernoulli conocida en la Dinámica de Fluidos.

I.1 LAS ECUACIONES MHD Y LA CONFIGURACION TOROIDAL.

El sistema a estudiar consiste en un plasma ideal que se encuentra confinado en un conductor perfecto, rígido, y de forma toroidal. Por plasma ideal se entenderá en lo que sigue un gas completamente ionizado que presenta una conductividad infinita o, equivalentemente, una resistividad nula; no viscoso, y cuya ecuación de estado es la de los gases ideales (si $\gamma = 1$) o la de cambio de estado adiabático (si $\gamma > 1$)⁽¹⁾. Su descripción estará dada por las ecuaciones de la dinámica de fluidos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{ecuación de continuidad}), \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{ecuación de Navier-Stokes}), \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (\text{ecuación de estado}), \quad (1.3)$$

donde ρ es la densidad de masa, \vec{v} es la velocidad de flujo, p es la presión, \vec{j} la densidad de corriente, \vec{B} el campo magnético y γ es la relación de los calores específicos, C_p / C_v .

Para cerrar el sistema es necesario recurrir a las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.7)$$

y a la ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \rho_e \vec{v} \quad (1.8)$$

Si se desprecian las corrientes de desplazamiento, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, y se considera un fluido conductor de una componente, $\rho_e = 0$, las ecuaciones (1.4) y (1.8) quedan, respectivamente, como

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.4.1)$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.8.1)$$

Eliminar las corrientes de desplazamiento es equivalente a tener la condición $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ como puede verse de (1.7). Si las corrientes de desplazamiento y $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e$ fueran consideradas sólo llevarían a correcciones de orden $(v/c)^2$ en relación a la situación en la cual no se consideran y puesto que para los problemas estándar en magnetohidrodinámica esos cocientes son muy pequeños, es buena aproximación no tomarlas en cuenta (Bernstein et al., 1958. Jackson, 1975). Por otra parte, los casos de interés en este trabajo son aquellos para los cuales se puede considerar que se tiene una resistividad nula (i.e. conductividad infinita, $\sigma = \infty$) por lo cual (1.8.1) se convierte en

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (1.9)$$

Esto significa que para la situación aquí señalada el

plasma se moverá de tal manera, bajo la acción de los campos \vec{E} y \vec{B} , que se satisfaga (1.9). Así, el sistema completo de ecuaciones que describen el flujo del plasma es (2);

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.10)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.13)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad (1.14)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.16)$$

En el caso estacionario, $\frac{\partial(\dots)}{\partial t} = 0$, las ecuaciones anteriores quedan como

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.17)$$

$$\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.18)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (1.19)$$

$$\nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) = \vec{0} \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad (1.21)$$

Estas ecuaciones constituyen el formato matemático del modelo magnetohidrodinámico (MHD) en su aproximación ideal, en el sentido señalado arriba (Bateman, 1978. Miyamoto, 1980. Thompson, 1964. Krall y Trivelpiece, 1973).

Si se considera el caso estático ($\frac{\partial(\dots)}{\partial t} = 0$ y $\vec{v} = \vec{0}$), se tienen

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.24)$$

en vez de las ecuaciones (1.10) a (1.16). Con estas tres expresiones puede estudiarse el equilibrio de un plasma estático como puede verse en los textos (Bateman,1978. Kruskal, 1964. Shafranov,1966;y otros). Frecuentemente son aludidas como ecuaciones magnetohidrostáticas. De (1.23) se obtienen

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.25)$$

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.26)$$

y de (1.24)

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.27)$$

Si p es razonablemente suave, pero no constante, en cualquier (pequeña) región, la igualdad $p=p_0$ determina una familia de superficies caracterizadas por los valores que toma el parámetro p_0 . Dichas superficies son llamadas " superficies magnéticas ", por (1.25), en cuanto que son formadas por las líneas de campo magnético; y son también " superficies de corriente " como se ve de (1.26). Si tales superficies se encuentran en un volumen acotado, no tienen bordes, y si \vec{B} o \vec{j} no se anulan en ninguna región de ella, se trata (topológicamente) de un toroide o de una botella de Klein (Alexandroff y Hopf, 1935). La botella de Klein no es realizable en el espacio físico; así, la posibilidad a estudiar es la de un toroide.

Los comentarios anteriores sugieren que es posible suponer que las superficies magnéticas forman una familia de toroides anidados. El último de los toroides está degenerado y consiste de una sola curva cerrada llamada " eje magnético ". También se supondrá que p decrece monótonamente hacia el interior del toro y, como se verá en el Capítulo III, $\nabla p \neq \vec{0}$ excepto en el eje magnético.

Las expresiones (1.25) a (1.27) dan lugar (como se mostrará en el Capítulo II) a la ecuación para el equilibrio estático, denominada ecuación de Grad-Shafranov (G-Sh).

Para entender la topología del plasma es necesario caracterizar las superficies de flujo. Esto puede hacerse de dos maneras: una es examinar las líneas de campo magnético sobre la superficie de flujo de interés y otra consiste en examinar la intersección de dicha superficie con una sección toroidal. De acuerdo a la primera manera se dirá que una línea de campo magnético es racional si se cierra después de un número (finito) de vueltas; si, por otra parte, al tomar un punto sobre la superficie del toro la línea de campo magnético llena una vecindad alrededor de dicho punto pero sin cerrarse se dice que se trata de una línea de campo magnético irracional. Una manera de establecer qué tan " racional " es una superficie magnética es estableciendo la razón de rotación, ι , que se define como el cociente del número de vueltas alrededor del circuito mayor, n , y el número de vueltas, m , alrededor del circuito menor

$$\iota = \frac{n}{m} \quad (1.28)$$

En el caso de las superficies magnéticas irracionales, en las cuales las líneas de fuerza cubren continuamente la superficie sin cerrarse, la cantidad ι se define como (Solov'ev y Shafranov, 1970)

$$\iota = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n}{m} \quad (1.29)$$

En la segunda manera se utiliza el método del mapeo de Poincaré (Marsden y McCracken, 1976. Abraham y Marsden, 1978), consistente en seguir una línea de campo magnético durante varios circuitos toroidales y examinar los puntos de intersección de esa línea con una sección toroidal dada; si los puntos

de intersección de esa línea forman un conjunto discreto, en general, puede uno referirse a ella como racional. Si, en cambio, dichos puntos constituyen un continuo, digamos una curva, se dice que son irracionales (Boozer, 1983. Morozov y Solov'ev, 1966).

En lo que sigue se considerarán superficies magnéticas bien definidas, formadas por líneas de campo magnético irracionales. Esto es importante pues las superficies bien definidas se necesitan para establecer magnitudes que sean uniformes en todos los puntos de aquéllas (como se verá más adelante al definir las cantidades de superficie).

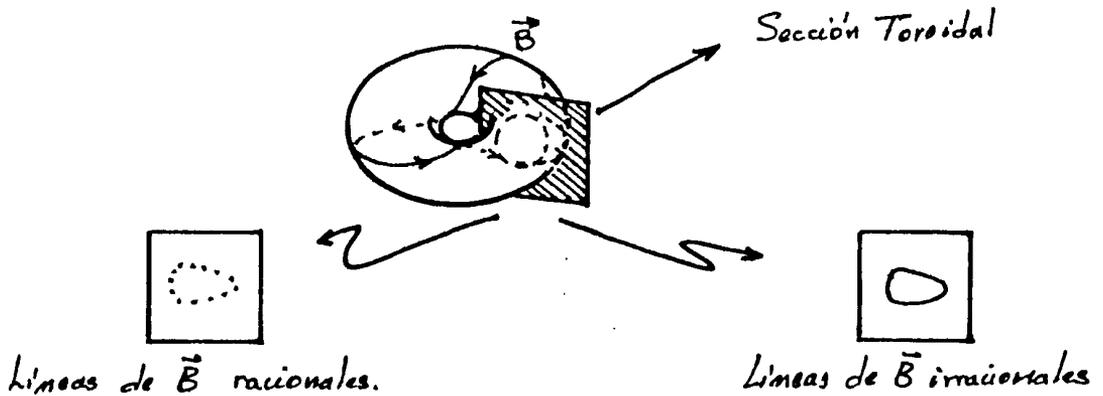


Figura 1.

Una propiedad importante del sistema que se ha definido es que el campo magnético y el de velocidades comparten las mismas superficies. Como antes fue señalado, cuando $\vec{v} = \vec{0}$ las superficies isobaras también son superficies magnéticas y superficies de corriente. Ahora con $\vec{v} \neq \vec{0}$; es decir, en el caso con flujo de plasma las superficies magnéticas son también superficies de flujo pero no necesariamente isobaras. Esto es fácil de mostrar partiendo de la ley de Faraday, (1.20). De ella se obtiene que existe una función φ , univaluada, tal que

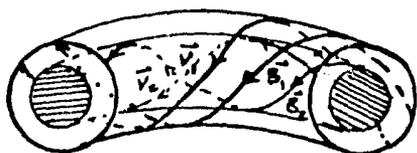
$$\vec{B} \times \vec{v} = -\nabla\varphi \quad (1.30)$$

o sea que se tiene la ley de Ohm para un conductor perfecto ($\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$) y φ en este caso es el potencial eléctrico. De (1.30) es inmediato que

$$\vec{B} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (1.31)$$

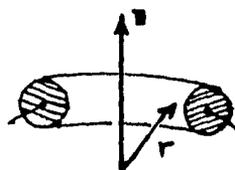
$$\vec{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (1.32)$$

lo cual también se tiene si $\nabla \varphi = \vec{0}$. De (1.31) se concluye que φ es uniforme sobre las superficies magnéticas y de (1.32) que \vec{v} comparte con \vec{B} las mismas superficies de flujo.



*Dos superficies magnéticas
compartidas por \vec{v} y \vec{B} .*

Figura 2.



A cualquier magnitud f que sea uniforme sobre una superficie magnética, $\vec{B} \cdot \nabla f = 0$ se le llamará "cantidad de superficie".

Dado que se tiene simetría axial, se usan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) en donde θ será coordenada ignorable

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (1.33)$$

donde f es cualquier función que intervenga en el problema.

El campo magnético, \vec{B} , en la superficie toroidal puede expresarse, en general, como la suma de una componente toroidal, \vec{B}_θ , y una componente poloidal, \vec{B}_p ,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_p(\vec{x}) + \vec{B}_\theta(\vec{x}) \quad (1.34)$$

donde \vec{x} es un punto sobre la superficie toroidal en cuestión.

Es claro que

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_p \cdot \hat{\theta} &= 0 \\ \vec{B}_\theta &= \hat{\theta} B_\theta \end{aligned} \right\} (1.35)$$

Además, \vec{B}_p puede ponerse en términos de la componente toroidal del potencial vectorial $\vec{A}(r, z)$ pues al ser θ coordenada

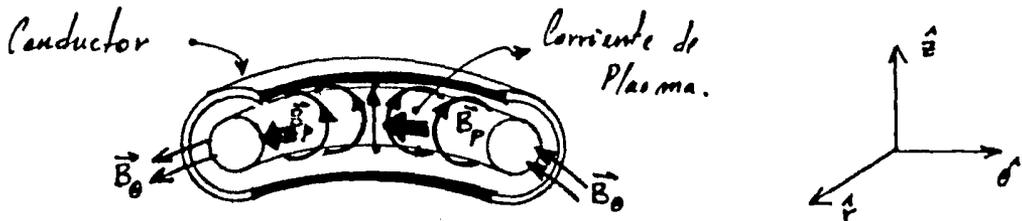


Figura 3.

ignorable los únicos términos que aparecerán serán los de \hat{r}, \hat{z} que, precisamente, dan las componentes de \vec{B}_p

$$\vec{B}_p = \hat{r} B_r + \hat{z} B_z \quad (1.36)$$

El diagrama muestra un tubo de plasma con un conductor central. Se muestran las componentes del campo magnético B_r y B_z en las direcciones radial y axial.

Figura 4.

Para ello debe calcularse, en coordenadas cilíndricas,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix} = \underbrace{-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rA_\theta) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) \hat{z}}_{\vec{B}_p} + \underbrace{\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\theta}}_{\vec{B}_\theta}$$

$$\text{luego,} \quad \vec{B} = \nabla \times (\hat{\theta} A_\theta(r, z)) + \vec{B}_\theta \quad (1.37)$$

Como $\nabla \theta = \frac{1}{r} \hat{\theta}$, puede tomarse $\hat{\theta} A_\theta(r, z) = r A_\theta(r, z) \nabla \theta$ y así definir una "función de corriente" ⁽³⁾ $\psi(r, z)$ por

$$\psi(r, z) = r A_\theta(r, z) \quad (1.38)$$

para obtener $\vec{B} = \nabla \times (\psi(r, z) \nabla \theta) + \vec{B}_\theta$, o bien

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \nabla \theta + \vec{B}_\theta \quad (1.39)$$

De este modo se ha mostrado, a través del potencial vec-

torial y la función de corriente $\psi(r, z)$, que un campo solenoidal, \vec{B} , se puede poner en la forma $\nabla \times (\alpha \nabla \beta)$. Este tipo de expresión en términos de coordenadas contravariantes se conoce como representación de Clebsch.

I.2 LA FUNCION DE CORRIENTE Y LAS SUPERFICIES MAGNETICAS.

En esta sección se examina qué características tiene $\psi(r, z)$ en relación con las superficies magnéticas. Descomponiendo la velocidad en parte toroidal, \vec{v}_θ , y parte poloidal, \vec{v}_p , se obtiene, haciendo uso de (1.39)

$$\vec{B} \times \vec{v} = \hat{r} \left(-\frac{v_\theta}{r} (\nabla \psi)_r + B_\theta (v_p)_z \right) + \frac{\hat{z}}{r} \vec{v} \cdot \nabla \psi - \left(\frac{v_\theta}{r} (\nabla \psi)_z + B_\theta (v_p)_r \right) \hat{z} \quad (1.40)$$

Pero de (1.31) y (1.32) se sabe que $\vec{B} \times \vec{v}$ es perpendicular a la superficie del toro y por ende se puede expresar sólo en términos de componentes en \hat{r} y \hat{z} , ya que siendo perpendicular a dicha superficie $(\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \hat{\theta} = 0$. Entonces, (1.40) implica

$$\vec{v} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (1.41)$$

lo que significa que \vec{v} y $\nabla \psi$ son perpendiculares y en consecuencia $\nabla \psi$ también es perpendicular a la superficie del toro⁽⁴⁾. Así, de (1.30) se concluye que $\nabla \psi$ y $-\nabla \varphi$ son paralelos, lo que implica la existencia de una función Ω tal que

$$-\nabla \varphi = \Omega \nabla \psi \quad (1.42)$$

De la última igualdad se tiene $\varphi = \varphi(\psi)$ cumpliéndose las relaciones (1.31) y (1.32),

$$-\vec{B} \cdot \nabla \varphi(\psi) = - \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right) \vec{B} \cdot \nabla \psi = 0$$

$$-\vec{v} \cdot \nabla \varphi(\psi) = - \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right) \vec{v} \cdot \nabla \psi = 0$$

ya que ψ es cantidad de superficie. Como $\nabla \varphi = \varphi'(\psi) \nabla \psi$ se tiene $\Omega = -\varphi'(\psi)$, y definiendo $\omega(\psi) = \varphi'(\psi)$ queda $\Omega = -\omega$ con lo cual la (1.42) se convierte en

$$\nabla \varphi = \omega(\psi) \nabla \psi \quad (1.42.1)$$

donde es claro que tanto Σ como ω son cantidades de superficie.

I.3 LA RELACION ENTRE EL CAMPO MAGNETICO Y EL CAMPO DE VELOCIDADES.

Los resultados precedentes muestran que se puede caracterizar satisfactoriamente a las superficies magnéticas usando la función de corriente $\psi(r, z)$. El siguiente paso consiste en establecer la relación entre el flujo de plasma y el campo magnético.

Por definición se puede escribir

$$\vec{v}_p = \mu \vec{B}_p \quad (1.43)$$

donde μ es una función escalar. De (1.30) se tiene

$$-\omega(\psi) \nabla \psi = \vec{B}_p \times \vec{v}_\theta + \vec{B}_\theta \times \vec{v}_p$$

cuyo producto vectorial con \vec{v}_θ da

$$-\omega(\psi) v_\theta (\hat{\theta} \times \nabla \psi) = v_\theta^2 \vec{B}_p - \mu v_\theta B_\theta \vec{B}_p$$

Pero $r \nabla \theta = \hat{\theta}$ por lo cual

$$-\omega(\psi) r (\nabla \theta \times \nabla \psi) = (v_\theta - \mu B_\theta) \vec{B}_p$$

que debido a (1.39) da lugar a

$$v_\theta = \mu B_\theta - r \omega(\psi) \quad (1.44)$$

Del primer término de esta igualdad puede apreciarse que si $\vec{v}_p \neq \vec{0}$, \vec{v}_p y \vec{v}_θ están acopladas a través de μ .

Antes de continuar es necesario caracterizar a la función μ . Haciendo uso de la ecuación de continuidad, (1.17), junto con (1.43) y (1.44) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho \vec{v}_p + \rho \vec{v}_\theta) = \nabla \cdot (\rho \mu \vec{B}_p + \rho \hat{\theta} (\mu B_\theta + r \omega(\psi))) \\ &= \nabla \cdot (\rho \mu \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla (\rho \mu) \end{aligned}$$

y de (1.31) se concluye la existencia de una función arbitraria f tal que $\rho \mu = f(\varphi) = f(\varphi(\psi)) \equiv F(\psi)$; es decir

$$\mu = F(\psi) / \rho \quad (1.45)$$

siendo F una función arbitraria y cantidad de superficie. Entonces, (1.43), (1.44) y (1.45) permiten escribir la velocidad como $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_\theta = \mu \vec{B}_p + \hat{\theta}(\mu B_\theta + r\omega(\psi)) = \mu \vec{B} + r\omega(\psi) \hat{\theta}$, i.e.

$$\vec{v} = \frac{F(\psi)}{\rho} \vec{B} + r\omega(\psi) \hat{\theta}. \quad (1.46)$$

La ecuación (1.46) establece la relación entre el campo de velocidades (flujo) y el campo magnético. Como en ella aparece ρ explícitamente, es posible ver qué relación hay entre la compresibilidad (o incompresibilidad) del flujo y las superficies magnéticas

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \left(\frac{F(\psi)}{\rho} \right) \cdot \vec{B} = - \frac{F(\psi)}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \vec{B} \quad (1.47)$$

donde se utiliza el que F sea cantidad de superficie. Esto permite establecer que, salvo el caso trivial de $F = 0$, el plasma es incompresible si, y sólo si, la densidad, ρ , es cantidad de superficie $\rho(\psi)$.

Puede observarse, de (1.46), que \vec{v} es paralela a \vec{B} hasta por una rotación rígida en cada una de las superficies de flujo individuales, pues el término $r\omega(\psi) \hat{\theta}$ puede interpretarse como una velocidad tangencial en el sentido $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r(\hat{z} \times \hat{r}) = r\omega(\psi) \hat{\theta}$ y donde $\omega(\psi)$ sería la velocidad angular, con $\omega(\psi) = \frac{d\varphi}{d\psi}$. Así, con esta interpretación, también obtenemos que la velocidad angular con la cual rota cada una de las superficies de flujo es cantidad de superficie. Este resultado es conocido en la literatura como la " ley de isorrotación " del campo magnético y fue señalada por Ferraro en 1937 (Ferraro, 1937. Cowling, 1968). Obsérvese que se trata de una rotación rígida de las superficies magnéticas en forma individual. Este congelamiento de las líneas de campo es una propiedad del modelo MHD ideal.

I.4 SUPERFICIES DE FLUJO ISENTROPICAS. SUPERFICIES DE FLUJO ISOTERMICAS.

La ecuación (1.19) da una restricción sobre la entropía si se usa la relación de las adiabatas, $\delta > 1$, pues siendo así $p\rho^{-\delta} = S$ y esa ecuación lleva a

$$\vec{v} \cdot \nabla S = 0 \quad (1.48)$$

Esta expresión señala que la entropía en cada superficie de flujo es uniforme; es decir, conserva su valor, si bien ese valor puede ser distinto para cada una de las superficies de flujo.

Sustituyendo \vec{v} de la (1.46) la (1.48) se convierte en

$$\frac{F(\psi)}{\rho} \vec{B} \cdot \nabla S = 0 \quad (1.49)$$

Esto significa que la entropía es cantidad de superficie cuando $F(\psi) \neq 0$ y a reserva de tener axisimetría

$$\vec{B} \cdot \nabla S = 0 \quad \text{si } F(\psi) \neq 0 \quad (1.50)$$

Entonces, si el flujo poloidal es distinto de cero, $\vec{v}_p \neq \vec{0}$, (por (1.43) y (1.45)) la entropía es uniforme sobre cada superficie magnética ⁽⁵⁾. Al revés, si queremos mantener S uniforme en dichas superficies debemos garantizar, en un plasma toroidal con resistividad despreciable, que tenemos flujo poloidal (teniendo la axisimetría).

En este punto uno podría preguntarse ¿qué sucede si $F=0$, es decir, si no hay flujo poloidal ($\vec{v}_p = \vec{0}$)? En dicho caso no es posible establecer una restricción para la entropía pues (1.48), teniendo axisimetría, se reduce a una identidad a cero. Sin embargo, puede plantearse de otra manera la situación si en vez de considerar al plasma en una forma tan restrictiva como $p = S(\psi) \rho^\delta$, $\delta > 1$, se propone una relación del tipo

$$p = p(\psi, \rho) \quad (1.51)$$

(aquí se toma ρ en general y no necesariamente $\rho(\psi)$).

Un caso de interés⁽⁶⁾ es cuando $\gamma=1$, es decir

$$p(\psi, \rho) = k \rho T(\psi) \quad (1.52)$$

que es la expresión de la ley de los gases ideales para el caso de superficies isotérmicas; aquí k es la constante de Boltzmann, ρ es la densidad de masa y $T(\psi)$ es la temperatura como cantidad de superficie. Tener la temperatura como cantidad de superficie es adecuado para tener (1.52) como ecuación de estado cuando no es posible establecer la restricción sobre la entropía.

Como puede observarse en la literatura frecuentemente se trabaja con superficies isotérmicas en vez de manejar superficies isentrópicas. Por esta razón en los desarrollos posteriores que lo ameriten se presentarán las relaciones obtenidas en ambas formulaciones para tener a mano la posibilidad de manejar una u otra. Es claro que si no se puede establecer restricción sobre la entropía no queda más que utilizar (1.52).

1.5 EL TERMINO $rB_\theta - rFv_\theta$ COMO CANTIDAD DE SUPERFICIE.

Se sabe (Bateman, 1978) que en el caso de configuración toroidal con un plasma estacionario, sin flujo y ninguna fuerza de cuerpo (caso de Grad-Shafranov) se obtiene que rB_θ es cantidad de superficie. En esta sección se mostrará que en el caso aquí estudiado rB_θ ya no es cantidad de superficie sino $rB_\theta - rF(\psi)v_\theta$.

Recordando que
$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (1.53)$$

la ecuación de movimiento (1.18) queda

$$\rho \left[\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] = - \nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.54)$$

La componente en $\hat{\theta}$ de (1.54) es

$$- \rho \left(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right)_\theta = \left(\vec{j} \times \vec{B} \right)_\theta \quad (1.55)$$

De la expresión para la velocidad, (1.46), se obtienen

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \left(\frac{F(\psi)}{\rho} \right) \times \vec{B} + \frac{F(\psi)}{\rho} \vec{j} + \nabla(r\omega(\psi)) \times \hat{\theta} + r\omega(\psi) \nabla \times \hat{\theta}. \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = & \frac{F(\psi)}{\rho} \vec{B} \times \left[\nabla \left(\frac{F(\psi)}{\rho} \right) \times \vec{B} \right] + \frac{F^2(\psi)}{\rho^2} \vec{B} \times \vec{j} + \frac{F(\psi)}{\rho} \vec{B} \times \left[\nabla(r\omega(\psi)) \times \hat{\theta} \right] \\ & + \frac{F(\psi)}{\rho} r\omega(\psi) \vec{B} \times (\nabla \times \hat{\theta}) + r\omega(\psi) \hat{\theta} \times \left[\nabla \left(\frac{F(\psi)}{\rho} \right) \times \vec{B} \right] \\ & + \frac{F(\psi)}{\rho} r\omega(\psi) \hat{\theta} \times \vec{j} + r\omega(\psi) \hat{\theta} \times \left[\nabla(r\omega(\psi)) \times \hat{\theta} \right] + \\ & + \frac{F^2(\psi)}{\rho^2} \omega^2(\psi) \hat{\theta} \times (\nabla \times \hat{\theta}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Sustituyendo (1.57) en (1.55)

$$-\frac{F^2}{\rho^2} (\vec{B} \cdot \nabla \rho) B_\theta + \frac{F^2}{\rho} (\vec{j} \times \vec{B})_\theta + F \vec{B} \cdot \nabla(r\omega) + F\omega B_r = (\vec{j} \times \vec{B})_\theta. \quad (1.58)$$

Pero es claro que

$$(\vec{j} \times \vec{B})_\theta = \frac{\vec{B}}{r} \cdot \nabla(r B_\theta) \quad (1.59)$$

con lo cual (1.58) se convierte en

$$-\frac{F^2}{\rho^2} (\vec{B} \cdot \nabla \rho) B_\theta + F \vec{B} \cdot \nabla(r\omega) + F\omega B_r = \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\vec{B}}{r} \cdot \nabla(r B_\theta) \quad (1.60)$$

$$\text{pero } F \vec{B} \cdot \nabla(r\omega) + F\omega B_r = F \left(\frac{\vec{B}}{r} \cdot \nabla(r^2\omega) - \omega B_r \right) + F\omega B_r = F \frac{\vec{B}}{r} \cdot \nabla(r^2\omega)$$

$$\text{y como } \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \vec{B} \cdot \nabla(r B_\theta) = \vec{B} \cdot \nabla \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) r B_\theta \right] + r B_\theta \nabla \left(\frac{F^2}{\rho} \right) \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \nabla \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) r B_\theta \right] - r B_\theta \frac{F^2}{\rho^2} \vec{B} \cdot \nabla \rho$$

$$\text{la (1.60) queda } F \vec{B} \cdot \nabla(r^2\omega) = \vec{B} \cdot \nabla \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) r B_\theta \right]^2, \text{ o bien } \vec{B} \cdot \nabla \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) r B_\theta - F\omega r^2 \right] = 0 \quad (1.61)$$

usando que F es cantidad de superficie, $\vec{B} \cdot \nabla F(\psi) = 0$.

Esta igualdad implica, por (1.31), que existe una función arbitraria $G(\psi)$ tal que

$$G(\psi) = \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) r B_\theta - r^2 \omega F \quad (1.62)$$

es cantidad de superficie. Puesta de otra manera

$$\begin{aligned} G(\psi) &= r B_\theta - r F \left(\frac{F}{\rho} B_\theta + r\omega \right) \\ &= r B_\theta - r F v_\theta. \end{aligned} \quad (1.63)$$

por (1.46).

Si el flujo toroidal es nulo, $v_\theta = 0$, o bien $r\omega = -\frac{F}{\rho} B_\theta$, la expresión (1.63) se reduce a

$$G(\psi) = r B_\theta \quad (1.64)$$

i.e. $r B_\theta$ es cantidad de superficie. Corresponde al caso en el cual no hay flujo. Sin embargo, obsérvese que aquí se obtu-

vo suponiendo únicamente que $v_\theta = 0$ ($\delta r \omega = -\frac{F}{\rho} B_\theta$) sin hacer mención de si existe o no flujo poloidal. Esto es crucial por que muestra que el resultado (1.64), concebido para equilibrio estático, es válido también para el caso menos restrictivo de flujo estacionario a condición de que se trate sólo de un flujo poloidal tal que $r\omega = -\frac{F}{\rho} B_\theta$ pues en ese caso (1.46) lleva a

$$\vec{v} = \frac{F}{\rho} \vec{B} + r\omega \hat{\theta} = -\frac{r\omega}{B_\theta} \vec{B} + r\omega \hat{\theta} = -\frac{r\omega}{B_\theta} \vec{B}_P.$$

Nótese también que si se considera el flujo poloidal nulo ($F=0$) la ecuación (1.63) nuevamente se reduce a (1.64), independientemente de que exista o no flujo toroidal.

Esta conclusión resultará más clara al obtener la ecuación de equilibrio de G-Sh como un caso límite de una más general que contempla la existencia de flujo ($\vec{v} \neq \vec{0}$) en el Capítulo II, Sec. II.2; y se mostrará (en el Capítulo III, Sec. III.1 y III.2) que las soluciones correspondientes a los casos $v_\theta = 0$ y $v_P = 0$ aquí aludidos tienen la misma estructura matemática que la solución de Solov'ev para la ecuación de G-Sh en el caso estático.

I.6 LA ECUACION DE BERNOULLI.

Es posible obtener una ecuación análoga a la de Bernoulli de la dinámica de fluidos; es decir, una expresión en la cual intervengan la presión magnética, la presión térmica y la energía asociada al flujo de plasma.

Tomando el producto punto de $\rho^{-1} \vec{B}$ con la ecuación de movimiento en su forma (1.54)

$$\vec{B} \cdot \left[\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] + \rho^{-1} \vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.65)$$

Pero haciendo uso de (1.46) y (1.57) se tiene

$$\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \nabla \left[\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 + \frac{F}{\rho} B_\theta r\omega + \frac{r^2 \omega^2}{2} \right] \quad (1.66)$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{r})) = \vec{B} \cdot \left(-r\omega \frac{B_0}{\rho^2} F \nabla \rho + \frac{F}{\rho} r\omega \hat{\theta} \times \vec{j} + r\omega \nabla(r\omega) + r\omega^2 \hat{r} \right). \quad (1.67)$$

Por otra parte (Bateman, 1978),

$$\vec{j} = -\frac{1}{r} \Delta^* \psi \hat{\theta} + \nabla(rB_0) \times \nabla \theta \quad (1.68)$$

donde $\Delta^* \psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ y con lo cual

$$\hat{\theta} \times \vec{j} = \frac{1}{r} \nabla(rB_0) \quad (1.69)$$

Sustituyendo (1.66), (1.67) y (1.69) en (1.65) se tiene

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 + \frac{Fr\omega}{\rho} B_0 + r\frac{\omega^2}{2} \right) - \vec{B} \cdot \left(-r\omega \frac{B_0}{\rho^2} F \nabla \rho + \frac{F\omega}{\rho} \nabla(rB_0) + r\omega \nabla(r\omega) + r\omega^2 \hat{r} \right) + \rho^{-1} \vec{B} \cdot \nabla p = 0$$

y, después de las reducciones algebraicas, queda

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 - r\frac{\omega^2}{2} \right) + \rho^{-1} \vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.70)$$

Considerando a p dada por $p = S(\psi) \rho^\delta$ se tiene

$$\rho^{-1} \nabla p = \rho^{\delta-1} \nabla S + \delta S \rho^{\delta-2} \nabla \rho$$

pero $\nabla \rho^{\delta-1} = (\delta-1) \rho^{\delta-2} \nabla \rho$

$$\rho^{-1} \nabla p = \rho^{\delta-1} \nabla S + S \nabla \left(\frac{\delta}{\delta-1} \rho^{\delta-1} \right)$$

y así

$$\rho^{-1} \vec{B} \cdot \nabla p = \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\delta}{\delta-1} S \rho^{\delta-1} \right) \quad (1.71)$$

haciendo uso de $\vec{B} \cdot \nabla S = 0$.

De (1.70) y (1.71) se tiene

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 - r\frac{\omega^2}{2} + \frac{\delta}{\delta-1} S \rho^{\delta-1} \right) = 0 \quad (1.72)$$

que por (1.31) implica que existe una función arbitraria $H(\psi)$

tal que

$$H(\psi) = \frac{F^2}{2\rho^2} B^2 - r\frac{\omega^2}{2} + \frac{\delta}{\delta-1} S \rho^{\delta-1}. \quad (1.73)$$

es cantidad de superficie.

En (1.73) se pueden identificar fácilmente los términos involucrados. El primero está relacionado con la presión magnética y el tercero con la presión térmica, mientras que el segundo se relaciona con la energía cinética de rotación. De hecho son términos que expresan la energía por unidad de masa para cada una de esas contribuciones. Existe, en consecuencia,

una analogía con la ecuación de Bernoulli de la dinámica de fluidos (Currie,1974. Batchelor,1970. Swanson,1970.) en la que se tiene

$$p/\rho + v^2/2 + \phi = \text{constante}$$

para un flujo de régimen estable, no viscoso e incompresible. Serán señaladas algunas ideas de la dinámica de fluidos en relación con la ecuación de Bernoulli para mostrar la analogía conceptual con (1.73).

La ecuación de Bernoulli sólo es aplicable al flujo de régimen estable puesto que las cantidades que intervienen en ella han sido calculadas a lo largo de una línea de corriente. Si el flujo es irrotacional se puede demostrar que la constante es la misma para todas las líneas de corriente (Currie,1974. Batchelor,1970. Halliday y Resnick,1976. Feynman et al.,1975). En un fluido incompresible no viscoso no se puede cambiar la temperatura por medios mecánicos; así, la expresión de arriba se refiere a procesos isotérmicos. En un fluido no viscoso compresible es posible cambiar T por medios mecánicos.

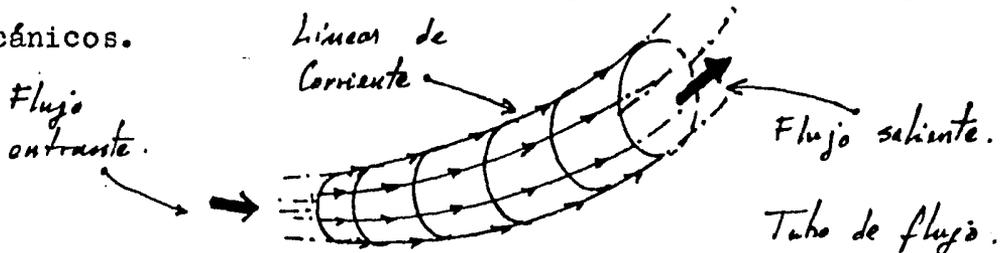


Figura 5.

Análogamente, para (1.73) se tiene que $H(\psi)$ posee un valor dado, constante, para cada superficie magnética (una vez fijado un valor de r) pues se está considerando caso estacionario; eso está expresado matemáticamente en la medida en que las cantidades de superficie dependen de ψ , la función de corriente, que como fue señalado anteriormente permite " etique-

tar " las superficies. Además, se pueden tener superficies iso térmicas como antes se explicó. De (1.47) se obtuvo que si $F=0$ o bien $\rho = \rho(\psi)$ se tiene $\nabla \cdot \vec{v} = 0$; esto es, se trata en ese caso de flujo rotacional y por ello, según fue señalado arriba, la $H(\psi)$ será distinta para cada superficie de flujo. Por el contrario, si $F \neq 0$ y $\rho \neq \rho(H)$ entonces $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$; es decir, el flujo es irrotacional y en dicho caso la constante será la misma para todas las superficies de flujo.

En el caso de la ecuación de Bernoulli la línea de corriente se porta como un " invariante " del fluido mientras que en el plasma aquí tratado será la superficie de flujo. Dicha " invariancia " en el caso de la ecuación de Bernoulli está, físicamente, relacionada con el que no escape fluido por las paredes del tubo de flujo (ver figura arriba) y en el caso del plasma toroidal, que las superficies de flujo son compartidas por \vec{v} y \vec{B} ; no escapa flujo de la superficie magnética: no hay transporte neto de plasma de una superficie a otra. Esto último es congruente con el tener superficies isotérmicas (ó isentrópicas, según el caso) y, más aún, se relaciona con el hecho fundamental de esta descripción: las líneas del campo magnético están congeladas.

NOTAS.

(1) En el primer caso $p = k\rho T$ y en el segundo $p\bar{\rho}^\alpha = S$ donde k, S son la constante de Boltzmann y la entropía, respectivamente. Por razones que serán más claras en las secciones I.4 y II.1, se verá que, en general, es más conveniente usar el modelo de gas ideal en vez de aquél para estado adiabático.

(2) De la ley de Faraday, (1.13), se sigue que $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v} \cdot \vec{B}) = 0$. Que se satisfaga $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$ puede ponerse como condición inicial cuando se analizan casos con dependencia temporal; o, en general, considerarse como una restricción. Estrictamente, (1.16) es redundante pues puede obtenerse de la divergencia de (1.13) y, en consecuencia, el sistema cerrado de ecuaciones está constituido por (1.10) a (1.15).

(3) De hecho es una " función de flujo poloidal " pues $\psi = \psi_{pol.} / z\pi$.

(4) Dicho de otra manera: es cantidad de superficie pues \vec{v} y \vec{B} se encuentran sobre la misma superficie, así que (1.41) equivale a $\vec{B} \cdot \nabla\psi = 0$.

(5) Es indistinto hablar de que las cantidades de superficie son funciones uniformes sobre las superficies de flujo o sobre las superficies magnéticas pues como fue mostrado antes \vec{v} y \vec{B} comparten superficies.

(6) La hace de interés la alta conductividad térmica a lo largo de las líneas de \vec{B} pues así la temperatura tiende a igualarse sobre las superficies de flujo rápidamente, pudiendo entonces considerarse la temperatura como cantidad de superficie.

CAPITULO II
LA ECUACION DEL ESTADO DE EQUILIBRIO.

En este capítulo se obtiene la ecuación para el estado de equilibrio dinámico para el plasma toroidal con flujo (ecuación de Grad-Shafranov modificada). Partiendo de ella se obtiene la conocida ecuación de Grad-Shafranov, para el caso estático, como un caso límite. Se examina el tipo de la ecuación de Grad-Shafranov modificada. A diferencia de aquella, la ecuación aquí obtenida no necesariamente es elíptica, y para ciertos parámetros puede convertirse en hiperbólica.

II.1 LA ECUACION DE GRAD-SHAFRANOV MODIFICADA.

Cuando se tiene un plasma de configuración toroidal en equilibrio estacionario y sin flujo se puede describir dicho estado de equilibrio a través de la conocida ecuación de Grad-Shafranov (Bateman, 1978. Copenhaver, 1983), que en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) está dada por

$$-\Delta^* \psi(r, z) = r^2 \frac{dP}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} \quad (2.1)$$

donde $\Delta^* \psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$, $I(\psi) = r B_\theta$.

En cambio, el problema de un plasma toroidal con flujo, pero en equilibrio, da lugar a una expresión que no sólo es más elaborada que (2.1) sino esencialmente distinta. Sin embargo, esa ecuación se reduce a (2.1) cuando no hay flujo.

Puede obtenerse dicha ecuación de la de movimiento, (1.54),

$$\rho \left(\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

haciendo uso de las cantidades de superficie ya obtenidas. Para ello se requiere expresar $\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right)$ y $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ en términos de dichas cantidades. De (1.46)

$$\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{z} \right) = \nabla \left(\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 + \frac{r^2 \omega^2}{z} + \frac{F}{\rho} \omega r B_0 \right)$$

pero $\frac{F}{\rho} B_0 = -r\omega + v_\theta$, por lo cual

$$\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{z} \right) = \nabla \left(\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 - \frac{r^2 \omega^2}{z} + \omega r v_\theta \right)$$

y usando la (1.73)

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{z} \right) &= \nabla \left(H(\psi) - \frac{\sigma}{\delta-1} S \rho^{\delta-1} + \omega r v_\theta \right) \\ &= \left(\frac{dH}{d\psi} - \frac{\sigma}{\delta-1} \rho^{\delta-1} \frac{dS}{d\psi} - \sigma \rho^{\delta-2} S \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + \nabla(\omega r v_\theta). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Observando que $\Delta^* \psi = \nabla^2 \psi - \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ y utilizando (1.39)

se pueden obtener directamente las siguientes relaciones

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \nabla(r B_0) \times \hat{v}_\theta - \frac{1}{r} \Delta^* \psi \hat{\theta}. \quad (2.3)$$

$$\vec{B} \times \vec{j} = \frac{B_0}{r} \nabla(r B_0) - \frac{\vec{B}}{r} \cdot \nabla(r B_0) \hat{\theta} + \frac{1}{r^2} \Delta^* \psi \nabla \psi. \quad (2.4)$$

$$\hat{\theta} \times \vec{j} = \frac{1}{r} \nabla(r B_0). \quad (2.5)$$

$$\vec{B} \times \hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{\theta} + B_0 \hat{r}. \quad (2.6)$$

Haciendo uso de (2.3) a (2.6) puede calcularse, tomando

(1.46), que

$$\begin{aligned} \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) &= \vec{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) \nabla \psi \times \vec{B} + \frac{F}{\rho} \nabla \times \vec{B} + \nabla(r\omega) \times \hat{\theta} + \omega \hat{z} \right). \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) \nabla \psi + \frac{F}{\rho} \left(\frac{F}{\rho} \vec{B} \times \vec{j} + r\omega \hat{\theta} \times \vec{j} \right) + \left(\frac{F}{\rho} B_0 + r\omega \right) \nabla(r\omega) \\ &\quad - (\vec{v} \cdot \nabla(r\omega)) \hat{\theta} + \omega \left(\frac{F}{\rho} \vec{B} \times \hat{z} + r\omega \hat{r} \right). \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) \nabla \psi + \frac{F^2}{\rho^2} \frac{B_0}{r} \nabla(r B_0) - \frac{F^2}{\rho^2} \frac{\vec{B}}{r} \cdot \nabla(r B_0) \hat{\theta} + \\ &\quad + \frac{F^2}{\rho^2 r^2} \Delta^* \psi \nabla \psi + \frac{F}{\rho} \omega \nabla(r B_0) + \left(\frac{F}{\rho} B_0 + r\omega \right) \left(r \frac{d\omega}{d\psi} \nabla \psi + \omega \hat{r} \right) \\ &\quad - (\vec{v} \cdot \nabla(r\omega)) \hat{\theta} + \omega \left(\frac{F}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{\theta} + \frac{F}{\rho} B_0 \hat{r} + r\omega \hat{r} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Las componentes en $\nabla \psi$ de (2.2) y (2.7) son

$$\left[\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{z} \right) \right]_{\nabla \psi} = \frac{dH}{d\psi} - \frac{\sigma}{\delta-1} \rho^{\delta-1} \frac{dS}{d\psi} - \sigma \rho^{\delta-2} S \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + r v_\theta \frac{d\omega}{d\psi} + r \omega \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi}; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \left[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right]_{\nabla \psi} &= (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) + \frac{F^2}{\rho^2} \frac{B_0}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_0) + \frac{F^2}{\rho^2 r^2} \Delta^* \psi + \\ &\quad + \frac{F}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_0) + \left(\frac{F}{\rho} B_0 + r\omega \right) r \frac{\partial \omega}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Al considerar en la ecuación de movimiento, (1.54), sólo la componente en $\nabla \psi$ y sustituyendo en ella la (2.8) y (2.9)

$$\begin{aligned}
& -(\nabla p)_{\nabla\psi} + (\vec{j} \times \vec{B})_{\nabla\psi} = \\
& = \rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{\sigma}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} - \sigma \rho^{\sigma-1} S \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + r \rho v_{\theta} \frac{d\omega}{d\psi} + r \rho \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \psi} - \\
& - \rho (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) - \frac{F^2}{\rho} \frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) - \frac{F^2}{\rho r^2} \Delta^* \psi - F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) - \rho v_{\theta} r \frac{d\omega}{d\psi}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

De $\rho = S \rho^{\sigma}$ puede calcularse

$$(\nabla p)_{\nabla\psi} = [\nabla(S \rho^{\sigma})]_{\nabla\psi} = [\sigma \rho^{\sigma-1} S \nabla \rho + \rho^{\sigma} \nabla S]_{\nabla\psi} = \sigma \rho^{\sigma-1} S \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi},$$

que permite simplificar

$$-\frac{\sigma}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} - \sigma \rho^{\sigma-1} S \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + (\nabla p)_{\nabla\psi} = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma-1}\right) \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} = -\frac{1}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi},$$

para escribir (2.10) como

$$\begin{aligned}
(\vec{j} \times \vec{B})_{\nabla\psi} & = \rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{1}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} + r \rho \omega \frac{dv_{\theta}}{d\psi} - \rho (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) - \\
& - \frac{F^2}{\rho} \frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) - \frac{F^2}{\rho r^2} \Delta^* \psi - F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Con $\Delta^* \psi = \nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ y la (2.4) la (2.11) se convierte en

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{1}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} - \rho (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) - \frac{F^2}{\rho} \frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) - \frac{F^2}{\rho r^2} \left(\nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \\
- F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) + r \rho \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \psi} - F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) = -\frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) - \frac{1}{r^2} \left(\nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Reagrupando en (2.12)

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{1}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} - \rho (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) + r \rho \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \psi} - F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) + \\
+ \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \left(\frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) + \frac{1}{r^2} \nabla^2 \psi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Pero } \nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right] & = \left(1 - F^2/\rho\right) \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) - \frac{2}{\partial \psi} \left(\frac{F^2}{\rho} \right) \frac{|\nabla \psi|^2}{r^2} \\
& = \left(1 - F^2/\rho\right) \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) - \left(\frac{2}{\partial \psi} \left(\frac{F^2}{\rho} \right) \right) B_p^2,
\end{aligned}$$

pues $B_p^2 = |\nabla \psi \times \nabla \theta|^2 = \frac{|\nabla \psi|^2}{r^2}$. Luego, (2.13) se convierte en

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{1}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} - \rho (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) + r \rho \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \psi} - F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) + \\
+ \nabla \cdot \left[\left(1 - F^2/\rho\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right] + \left(\frac{2}{\partial \psi} \left(\frac{F^2}{\rho} \right) \right) B_p^2 + \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) = 0. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Se puede mostrar (vide Apéndice I) que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{\partial \psi} \left(\frac{F^2}{\rho} \right) \right) B_p^2 + \left(1 - F^2/\rho\right) \frac{B_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) + r \rho \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \psi} - \rho (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) - \\
- F \omega \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_{\theta}) = r \rho v_{\theta} \frac{d\omega}{d\psi} + (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{dF}{d\psi} + \frac{1}{r} B_{\theta} \frac{dG}{d\psi}, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

con $G(\psi)$ definida por (1.62).

Sustituyendo (2.15) en (2.14)

$$\nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right] + \rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{1}{\sigma-1} \rho^{\sigma} \frac{dS}{d\psi} + (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{dF}{d\psi} + r \rho v_{\theta} \frac{d\omega}{d\psi} + \frac{B_{\theta}}{r} \frac{dG}{d\psi} = 0. \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es la correspondiente al estado de equilibrio dinámico del plasma considerado y es análoga a la ecuación de Grad-Shafranov para el equilibrio estático. Puede observarse que en (2.16) intervienen densidades de las constantes del movimiento dependiente del tiempo (Chandrasekhar, 1958. Woltjer, 1958 y 1959. Hameiri, 1983)⁽¹⁾:

- i) la densidad de masa, ρ ;
- ii) la circulación a lo largo de las líneas de campo, $\vec{v} \cdot \vec{B}$;
- iii) la densidad de momento angular, $r v_{\theta} \rho$.

Si se desea usar superficies isotérmicas en vez de isentrópicas en vez de $S = \rho \rho^{-\gamma}$ se utiliza (1.52), con lo cual

$$\begin{aligned} \nabla p &= k \nabla (\rho T(\psi)) = k T(\psi) \nabla \rho + k \rho \nabla T(\psi), \\ \rho^{-1} \vec{B} \cdot \nabla p &= k \rho^{-1} T(\psi) \vec{B} \cdot \nabla \rho = k \vec{B} \cdot \nabla (T(\psi) \ln \rho), \end{aligned} \quad (2.17)$$

dando lugar a que en vez de (1.72) se tenga

$$\vec{B} \cdot \nabla \left[\frac{F^2}{2\rho^2} B^2 - \frac{r^2 \omega^2}{2} + k T \ln \rho \right] = 0, \quad (2.18)$$

o bien

$$H(\psi) = \frac{F^2(\psi)}{2\rho^2} B^2 - \frac{r^2 \omega^2(\psi)}{2} + k T(\psi) \ln \rho, \quad (2.19)$$

en vez de (1.73). Esto también modifica a (2.2), pues

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) &= \nabla (H(\psi) - k T(\psi) \ln \rho) + \nabla (\omega(\psi) r v_{\theta}) \\ &= \left(\frac{dH}{d\psi} - k \ln \rho \frac{dT}{d\psi} - \frac{kT}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + \nabla (r \omega(\psi) v_{\theta}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pero $k \rho \left(- \ln \rho \frac{dT}{d\psi} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right) + (\nabla p) \nabla \psi =$
 $= k \rho \left(- \ln \rho \frac{dT}{d\psi} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right) + k T \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + k \rho \frac{dT}{d\psi} = k \rho (1 - \ln \rho) \frac{dT}{d\psi},$

de forma que (2.16) se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho^2} \right) \frac{1}{r^2} \nabla \psi \right] + \rho \frac{dH}{d\psi} + k (\rho - \rho \ln \rho) \frac{dT}{d\psi} + r \rho v_{\theta} \frac{d\omega}{d\psi} + \\ + (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{dF}{d\psi} + \frac{1}{r} B_{\theta} \frac{dG}{d\psi} = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Así pues, se han obtenido tanto la ecuación de Bernoulli como la de Grad-Shafranov modificada, (2.19) y (2.21), para el caso en que se tienen superficies isotérmicas y para el caso de superficies isentrópicas, (1.73) y (2.16).

II.2 LA ECUACION DE GRAD-SHAPRANOV COMO CASO LIMITE.

Cuando $F=0$ sabemos, por (1.43) y (1.45), que el flujo poloidal es nulo, $\vec{v}_p = \vec{0}$, y consecuentemente a lo más podría tenerse flujo toroidal, $\vec{v}_\theta \neq \vec{0}$. Se verá que el mismo resultado es aplicable en el caso $\vec{v} = \vec{0}$.

Por (1.46)

$$\vec{v} = r\omega(\psi)\hat{\theta} \quad \text{con } F(\psi) = 0, \quad (2.22)$$

lo cual implica, debido a (1.47), que se trata de un caso de flujo incompresible $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ con $F(\psi) = 0$ (2.23)

En este caso, como se indicó en el Capítulo I, no hay constricción sobre la entropía. En resumen, $F=0$ conlleva los cambios siguientes:

$$1) \quad G_*(\psi) = rB_\theta \quad (2.24)$$

que corresponde al caso del plasma estacionario (Bateman, 1978);

2) la ecuación de Bernoulli (en la forma (2.19)) se reduce a

$$H_*(\psi) = -\frac{r^2\omega^2(\psi)}{2} + kT(\psi) \ln \rho \quad (2.25)$$

3) la ecuación de G-Sh modificada (en la forma (2.21)) se convierte en

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) + \rho \frac{dH_*}{d\psi} + k(\rho - \rho \ln \rho) \frac{dT}{d\psi} + r^2 \rho \omega \frac{d\omega}{d\psi} + \frac{B_\theta}{r} \frac{dG_*}{d\psi} = 0 \quad (2.26)$$

donde se usó (2.22). Los asteriscos hacen alusión a que se tomó $F=0$ en las funciones correspondientes.

La (2.26) queda, explícitamente, como

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) + k\rho \frac{dT}{d\psi} + \frac{I}{r^2} \frac{dI}{d\psi} = 0 \quad (2.27)$$

con $I(\psi) = rB_\theta$.

Si se usa $\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) = \frac{1}{r^2} \Delta^* \psi$,

$$\frac{d\rho}{d\psi} = k \frac{d}{d\psi} \rho T = k\rho \frac{dT}{d\psi},$$

la (2.27) queda

$$\Delta^* \psi + r^2 \frac{d\rho}{d\psi} + I I'(\psi) = 0 \quad (2.28)$$

que es la ecuación de G-Sh del caso estático presentada al principio de este capítulo en (2.1).

Resumiendo, si $F=0$ (i.e. flujo poloidal nulo, $\vec{v}_p = \vec{0}$) se recupera la ecuación de equilibrio de G-Sh, pero no importa si hay o no flujo toroidal, pues no interviene en la obtención de (2.28) a partir de (2.26) si \vec{v}_θ es o no cero. De manera que (2.28) puede usarse para estudiar el caso de equilibrio estacionario pero no necesariamente estático hasta por un flujo toroidal. Esta observación se relaciona con el comentario hecho al final de la sección I.5 del Capítulo I.

II.3 DETERMINACION DEL TIPO DE LA ECUACION DE GRAD-SHAFRA NOV MODIFICADA.

Antes de cualquier intento de resolver la ecuación de G-Sh modificada, ya sea en su forma (2.16) o (2.21), debe determinarse qué tipo de ecuación diferencial parcial es.

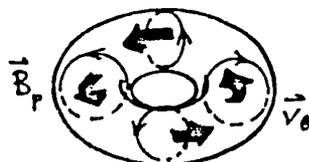
Considérese la siguiente clasificación, de interés en el presente estudio, de una ecuación en derivadas parciales en dos variables de la forma

$$A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + F(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = 0$$

que se denomina de tipo:

- 1) hiperbólico si $B^2 - AC > 0$;
- 2) parabólico si $B^2 - AC = 0$; (2.29)
- 3) elíptico si $B^2 - AC < 0$;

(suponiendo que A, B y C poseen derivadas continuas hasta de segundo orden inclusive).



$$\vec{B}_\theta = \vec{0}$$

$$\vec{v}_p = \vec{0}$$

Figura 6.

Los términos de (2.16) que tienen segundas derivadas están claramente contenidos en el término de la divergencia⁽²⁾

$$\nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right] = \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla^2 \psi}{r^2} + \left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \nabla \left(\frac{1}{r^2}\right) \cdot \nabla \psi - \frac{2F \nabla F \cdot \nabla \psi}{r^2 \rho} + \frac{F^2}{r^2 \rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla \psi.$$

Entonces

$$\left[\nabla \cdot \left(\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right) \right]_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} = \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla^2 \psi}{r^2} \right]_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} + \frac{F^2}{r^2 \rho^2} (\nabla \rho \cdot \nabla \psi)_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} \quad (2.30)$$

pero

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \psi} d\psi + \dot{\rho} d|\nabla \psi|^2 + \frac{\partial \rho}{\partial r} dr,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial r} |\nabla \psi|^2 + \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial z} |\nabla \psi|^2,$$

denotando $\dot{\rho} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial |\nabla \psi|^2}$. Así $\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \nabla \psi + \dot{\rho} \nabla (|\nabla \psi|^2) + \frac{\partial \rho}{\partial r} \hat{r}$,

con lo cual se obtiene

$$\nabla \rho \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \rho}{\partial \psi} |\nabla \psi|^2 + \dot{\rho} \nabla (|\nabla \psi|^2) \cdot \nabla \psi + \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.31)$$

y entonces

$$(\nabla \rho \cdot \nabla \psi)_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} = \dot{\rho} \nabla \psi \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2). \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.32) en (2.30)

$$\left[\nabla \cdot \left(\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right) \right]_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} = \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla^2 \psi}{r^2} \right]_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} + \frac{F^2}{r^2 \rho^2} \dot{\rho} \nabla \psi \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2)_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} \quad (2.33)$$

Utilizando subíndices para denotar las correspondientes derivadas parciales se tiene $\nabla^2 \psi = \psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz}$. Luego,

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2) &= \nabla \psi \cdot (\nabla (\psi_r^2 + \psi_z^2)) \\ &= 2 \nabla \psi \cdot (\hat{r} (\psi_r \psi_{rr} + \psi_z \psi_{zr}) + \hat{z} (\psi_r \psi_{rz} + \psi_z \psi_{zz})) \\ &= 2 (\psi_r^2 \psi_{rr} + \psi_r \psi_z \psi_{zr} + \psi_z \psi_r \psi_{rz} + \psi_z^2 \psi_{zz}) \end{aligned}$$

y $(\nabla^2 \psi)_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} = \psi_{rr} + \psi_{zz}$; con lo cual

$$\left[\nabla \cdot \left(\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right) \right]_{2^{\text{as}} \text{ derivadas}} = \frac{1}{r^2} [(1 - Q^2 + \eta \psi_r^2) \psi_{rr} + 2\eta \psi_r \psi_z \psi_{zr} + (1 - Q^2 + \eta \psi_z^2) \psi_{zz}] \quad (2.34)$$

donde se tomó $Q = |F|/\sqrt{\rho}$ y $\eta = 2Q^2 \dot{\rho}/\rho$. También se supone que ψ es derivable con continuidad, de forma que $\psi_{rz} = \psi_{zr}$. Ahora, de los coeficientes de (2.34) se obtiene la expresión

$$\mathbb{D} = -(1 - Q^2)(1 - Q^2 + \eta |\nabla \psi|^2) \quad (2.35)$$

que permitirá determinar el tipo de la ecuación de Grad-Shafranov modificada.

Para poder usar las condiciones señaladas por (2.29) de-

be darse una expresión para $\dot{\rho}$ de manera que se tenga una forma explícita para η que permita hacer el análisis.

Retomando la ecuación de Bernoulli, (1.73), se calcula

$$0 = \frac{\partial H(\psi)}{\partial |\nabla\psi|^2} = \frac{F^2}{2} \frac{\partial}{\partial |\nabla\psi|^2} \left(\frac{B^2}{\rho^2} \right) + \gamma S \rho^{\alpha-2} \dot{\rho} \quad (2.36)$$

y usando (1.62) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^2}{\partial |\nabla\psi|^2} &= \frac{\partial}{\partial |\nabla\psi|^2} \left(\frac{|\nabla\psi|^2 + B_0^2}{r^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial |\nabla\psi|^2} \left[\frac{(G(\psi) - r^2 \omega(\psi) F(\psi))^2}{(1 - F^2/\rho)^2 r^2} + \frac{|\nabla\psi|^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} - \frac{2 B_0^2}{(1 - Q^2)} Q^2 (\dot{\rho}/\rho). \end{aligned} \quad (2.37)$$

La (2.36) en virtud de (2.37) queda como

$$\frac{F^2}{2r^2\rho^2} + \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) \left[-\frac{B_0^2 Q^2 F^2}{\rho^2 (1 - Q^2)} + \gamma S \rho^{\alpha-1} - \frac{F^2 B^2}{\rho^2} \right] = 0$$

i.e.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{F^2/2r^2}{-\gamma S \rho + (F^2 B^2 + \frac{B_0^2 Q^2 F^2}{1 - Q^2})} = \frac{1/2r^2}{B_P^2 + \frac{B_0^2}{1 - Q^2} - \gamma P/Q^2} \quad (2.38)$$

Ahora ya se tiene una expresión explícita para η ,

$$\eta \equiv 2Q^2 \dot{\rho}/\rho = \frac{Q^2/r^2}{B_P^2 + (B_0^2/(1 - Q^2)) - \gamma P/Q^2} \quad (2.39)$$

Esta expresión permitirá escribir (2.35) de manera que pueda efectuarse el análisis con las magnitudes que se conocen (o se pueden conocer) desde el punto de partida. Los resultados recién obtenidos permiten expresar los términos que intervienen en \mathbb{D} como sigue

$$\begin{aligned} \eta |\nabla\psi|^2 &= \frac{Q^2 |\nabla\psi|^2 / r^2}{B_P^2 + \frac{B_0^2}{1 - Q^2} - \frac{\gamma P}{Q^2}} = \frac{Q^2 B_P^2}{B_P^2 + \frac{B_0^2}{1 - Q^2} - \frac{\gamma P}{Q^2}} \\ 1 - Q^2 + \eta |\nabla\psi|^2 &= \frac{(1 - Q^2) (B_P^2 + \frac{B_0^2}{1 - Q^2} - \frac{\gamma P}{Q^2}) + Q^2 B_P^2}{B_P^2 + \frac{B_0^2}{1 - Q^2} - \frac{\gamma P}{Q^2}} \\ &= -(1 - Q^2) \left[\frac{Q^2 (B^2 + \gamma P) - \gamma P}{Q^4 B_P^2 - Q^2 (B^2 + \gamma P) + \gamma P} \right] \end{aligned}$$

y con ellas (2.35) se convierte en

$$\mathbb{D} = (1 - Q^2)^2 \left[\frac{Q^2(B_p^2 + \gamma P) - \gamma P}{Q^4 B_p^2 - Q^2(B_p^2 + \gamma P) + \gamma P} \right]. \quad (2.40)$$

Se procede ahora al análisis de este resultado considerando algunos casos particulares para así establecer el comportamiento global.

Cuando no hay componente toroidal del campo, $B_\theta = 0$, se tienen las siguientes consecuencias:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \frac{F}{\rho} \vec{B}_p + \omega r \hat{\theta} && \text{por (1.46)} \\ \nabla \cdot \vec{v} &= -\frac{F}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \vec{B}_p && \text{por (1.47)} \\ G(\psi) &= -r F v_\theta = -\omega r^2 F && \text{por (1.63) y (1.46)} \\ H(\psi) &= \frac{F^2}{2\rho^2} B_p^2 - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{\gamma}{r-1} S \rho^{r-1} && \text{por (1.73)} \\ \nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right] + \rho \frac{dH}{d\psi} - \frac{1}{r-1} \rho^r \frac{dS}{d\psi} + \\ + \rho r^2 \omega \frac{d\omega}{d\psi} + \frac{F}{\rho} B_p^2 \frac{dF}{d\psi} &= 0 && \text{por (2.16)} \\ \eta &= (Q^2/r^2) / (B_p^2 - \gamma P/Q^2) && \text{por (2.39)} \\ \mathbb{D}(Q^2) &= (1 - Q^2)^2 \left[\frac{Q^2(B_p^2 + \gamma P) - \gamma P}{Q^4 B_p^2 - Q^2(B_p^2 + \gamma P) + \gamma P} \right] && \text{por (2.40)} \end{aligned} \right\} (2.41)$$

Si fuera el caso sin constricción en S tendríamos en vez de las últimas cuatro expresiones de (2.41):

$$\left. \begin{aligned} H(\psi) &= \frac{F^2}{2\rho^2} B_p^2 - \frac{\omega^2 r^2}{2} + kT \ln \rho && \text{por (2.19)} \\ \nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho}\right) \frac{\nabla \psi}{r^2} \right] + \rho \frac{dH}{d\psi} + k(\rho - \rho \ln \rho) \frac{dT}{d\psi} + r^2 \rho \omega \frac{d\omega}{d\psi} + \frac{F}{\rho} B_p^2 \frac{dF}{d\psi} &= 0 && \text{por (2.21)} \\ \eta &= (Q^2/r^2) / (B_p^2 - k\rho T/Q^2) && \text{por (2.39)} \\ \mathbb{D}(Q^2) &= (1 - Q^2)^2 \left[\frac{Q^2(B_p^2 - \rho kT) - k\rho T}{Q^4 B_p^2 - Q^2(B_p^2 + k\rho T) + k\rho T} \right] && \text{por (2.40)} \end{aligned} \right.$$

Si además $Q^2 = 0$; i.e. $F = 0$ (es decir, flujo poloidal nulo) queda

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \omega r \hat{\theta}, \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ G(\psi) &= 0, \\ H(\psi) &= -\frac{\omega^2 r^2}{2} + kT \ln \rho, \\ \Delta^* \psi + k r^2 \frac{d}{d\psi} (\rho T) &= 0, \\ \eta &= 0, \\ \mathbb{D}(0) &= -1 \end{aligned} \right\} (2.42)$$

Definiendo $\beta = \delta P / (\gamma P + B^2)$ para cuando se tiene constricción en S, o bien $\beta_* = k\rho T / (k\rho T + B^2)$ para el caso de superficies isotérmicas⁽³⁾, la (2.40) se convierte en

$$\mathbb{D}(Q^2) = (1 - Q^2)^2 \left(\frac{Q^2 \delta P / \beta - \delta P}{Q^4 B_p^2 - Q^2 \delta P / \beta + \delta P} \right) \quad (2.43)$$

o

$$\mathbb{D}(Q^2) = (1 - Q^2)^2 \left(\frac{Q^2 k\rho T / \beta_* - k\rho T}{Q^4 B_p^2 - Q^2 k\rho T / \beta_* + k\rho T} \right) \quad (2.44)$$

y estas expresiones permiten ver que

$$\mathbb{D}(Q^2) = 0 \quad \text{si} \quad Q^2 = 1 \quad \text{o} \quad Q^2 = \beta \quad (\text{o} \quad \beta_*). \quad (2.45)$$

Nótese que (2.43) y (2.44) divergen, respectivamente, cuando

$$Q^4 B_p^2 - Q^2 \delta P / \beta + \delta P = 0,$$

$$Q^4 B_p^2 - Q^2 k\rho T / \beta_* + k\rho T = 0,$$

i.é. cuando

$$Q^2 = \frac{\delta P / \beta \pm [(\delta P / \beta)^2 - 4\delta P B_p^2]^{1/2}}{2B_p^2} \quad (2.46)$$

$$Q_*^2 = \frac{k\rho T / \beta_* \pm [(k\rho T / \beta_*)^2 - 4k\rho T B_p^2]^{1/2}}{2B_p^2} \quad (2.47)$$

Como $\beta = \gamma P / (\gamma P + B_p^2)$ y $\beta_* = k\rho T / (k\rho T + B_p^2)$ si $B_0 = 0$; se obtienen las raíces siguientes

$$Q^2 = \frac{(B_p^2 + \delta P) \pm (-B_p^2 + \delta P)}{2B_p^2} = \begin{cases} 1 \\ \delta P / B_p^2 \end{cases} \quad (2.48)$$

$$Q_*^2 = \frac{(B_p^2 + k\rho T) \pm (k\rho T - B_p^2)}{2B_p^2} = \begin{cases} 1 \\ k\rho T / B_p^2 \end{cases} \quad (2.49)$$

El valor $Q^2 = 1$ se conocía previamente de (2.45); entonces, $\mathbb{D}(Q^2)$ tiene cambio de signo en $Q^2 = \beta$ (o en β_*) y una divergencia en $Q^2 = \delta P / B_p^2$ (o en $k\rho T / B_p^2$).

La función $\mathbb{D}(Q^2)$, para $B_0 \neq 0$, diverge donde

$$d(Q^2) = Q^4 B_p^2 - Q^2 (B^2 + \gamma P) + \delta P = 0$$

o en donde

$$d_*(Q^2) = Q^4 B_p^2 - Q^2 (B^2 + k\rho T) + k\rho T = 0,$$

(la $d(Q^2)$ se refiere al denominador de $\mathbb{D}(Q^2)$); es decir en

$$Q^2 = \frac{(B^2 + \gamma p) \pm \sqrt{(B^2 + \gamma p)^2 - 4\gamma p B_p^2}}{2B_p^2} \quad (2.50)$$

$$Q_{*}^2 = \frac{(B^2 + k\rho T) \pm \sqrt{(B^2 + k\rho T)^2 - 4k\rho T B_p^2}}{2B_p^2} \quad (2.51)$$

Pero $(B^2 + \gamma p)^2 - 4\gamma p B_p^2 = (B^2 + \gamma p)^2 - 4\gamma p (B^2 - B_0^2)$

$$= (B^2 + \gamma p)^2 + 4\gamma p B_0^2 \geq 0,$$

y $(B^2 + k\rho T)^2 - 4k\rho T B_p^2 = (B^2 + k\rho T)^2 - 4k\rho T (B^2 - B_0^2)$

$$= (B^2 - k\rho T)^2 + 4k\rho T B_0^2 \geq 0,$$

que implica que las raíces dadas por (2.50) ó (2.51) son reales. Tales raíces serán denotadas como sigue

$$\left. \begin{aligned} Q_1^2 &= \frac{(B^2 + \gamma p) - \sqrt{(B^2 + \gamma p)^2 + 4\gamma p B_0^2}}{2B_p^2}, \\ Q_r^2 &= \frac{(B^2 + \gamma p) + \sqrt{(B^2 + \gamma p)^2 + 4\gamma p B_0^2}}{2B_p^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

para la ecuación (2.50); y con

$$\left. \begin{aligned} Q_{*1}^2 &= \frac{(B^2 + k\rho T) - \sqrt{(B^2 + k\rho T)^2 + 4k\rho T B_0^2}}{2B_p^2}, \\ Q_{*r}^2 &= \frac{(B^2 + k\rho T) + \sqrt{(B^2 + k\rho T)^2 + 4k\rho T B_0^2}}{2B_p^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

para (2.51).

Estas raíces no sólo son reales sino también no-negativas pues $B^2 + \gamma p \geq \sqrt{(B^2 + \gamma p)^2 - 4\gamma p B_p^2}$ ó $B^2 + k\rho T \geq \sqrt{(B^2 + k\rho T)^2 - 4k\rho T B_p^2}$

Dichas raíces corresponden a las ondas compresivas lentas (Q_1) y rápidas (Q_r), respectivamente.

Puede notarse que $d(\beta) = \beta^2 B_p^2 > 0,$

$$\left. \begin{aligned} d(1) &= -B_0^2 < 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} d_*(\beta_*) &= \beta_*^2 B_p^2 > 0, \\ d_*(1) &= -B_0^2 < 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Puesto que los radicandos de (2.50) y (2.51) son positi-

vos se tiene: $1 > \frac{4\gamma p B_p^2}{(B^2 + \gamma p)^2}$
 ó $1 > \frac{4k_p T B_p^2}{(B^2 + k_p T)^2}$,
 y que permitirán desarrollar en serie los radicales correspondientes con el uso de

$$(1-x)^{1/2} = 1 - x/2 - x^2/8 - \dots \quad \text{con } |x| < 1.$$

Así, el radical de (2.50) queda

$$\begin{aligned} [(B^2 + \gamma p)^2 - 4B_p^2 \gamma p]^{1/2} &= (B^2 + \gamma p) \sqrt{1 - \frac{4B_p^2 \gamma p}{(B^2 + \gamma p)^2}} = \\ &= (B^2 + \gamma p) \left(1 - \frac{2B_p^2 \gamma p}{(B^2 + \gamma p)^2} - \frac{2B_p^4 (\gamma p)^2}{(B^2 + \gamma p)^4} - \dots \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Luego, hasta primer orden, (2.52) da

$$Q_r^2 \approx \frac{(B^2 + \gamma p)}{B_p^2} - \frac{\gamma p}{(B^2 + \gamma p)} \approx \frac{B^2}{B_p^2} + \left(\frac{\gamma p}{B_p^2} - \beta \right) > \frac{B^2}{B_p^2},$$

pues $\frac{\gamma p}{B_p^2} > \frac{\gamma p}{B^2} > \beta$; concluyéndose que $Q_r^2 > 1$ porque $B^2/B_p^2 > 1$. Más aún,

$$Q_r^2 > 1 \quad (2.57)$$

porque los siguientes términos son todos mucho menores que $2B_p^2 \gamma p / (B^2 + \gamma p)^2$ y las diferencias con β son tales que $\beta > \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{O}(h)$, así que $Q_r^2 = \frac{B^2}{B_p^2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; y con ello $Q_r^2 > 1$.

Para Q_1^2 se tiene $Q_1^2 \approx \frac{\gamma p}{B^2 + \gamma p} = \beta$, hasta primer orden; i.e. $Q_1^2 \approx 1$. Examinando hasta segundo orden $Q_1^2 \approx \beta + \frac{B_p^2}{B^2 + \gamma p} \beta^2 > \beta$ y como los siguientes términos son positivos y de orden $\mathcal{O}(\beta^3)$ se encuentra finalmente

$$\beta < Q_1^2 < 1 \quad (2.58)$$

Juntando (2.57) y (2.58)

$$\beta < Q_1^2 < 1 < Q_r^2. \quad (2.59)$$

Si en vez de manejar superficies isentrópicas se consideran superficies isotérmicas se tienen los resultados análogos a (2.59)

$$\beta_* < Q_{*1}^2 < 1 < Q_{*r}^2 \quad (2.60)$$

De (2.48) y (2.49) vemos que en $Q^2 = 1$ el denominador de $D(Q)$ se anula cuando $B_c = 0$; sin embargo, no diverge en ese valor

pues en el numerador se tiene $(1-Q^2)^2$ dando lugar a la indeterminación 0/0. Ahora, usando la regla de L'Hospital para el límite $\lim_{Q^2 \rightarrow 1} D(Q^2)$ se obtiene que es cero (en el caso $B_\theta = 0$); por tanto $D(Q^2)$ en 1 es cero sea o nulo B_θ . Luego, $Q^2=1$ no es punto de transición. Esto puede corroborarse de otra manera todavía, si se toma la derivada $\frac{d}{dQ^2} D(Q^2)$ y viendo que en $Q^2=1$ esa derivada es cero; i.e. se tiene un punto con tangente horizontal al cual corresponde un máximo relativo.

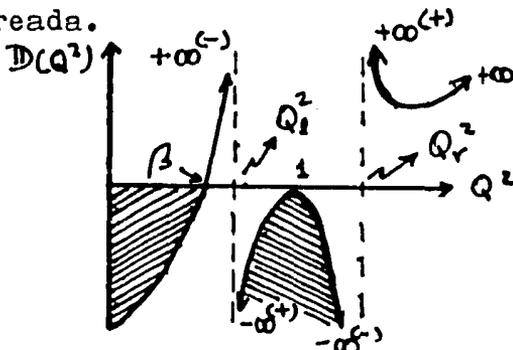
De los resultados precedentes ya se puede determinar la zona de elipticidad de la ecuación de G-Sh modificada:

$$\begin{aligned} D(0) &= -1, & D(Q_1^2) &\rightarrow -\infty^{(+)} \\ D(\beta) &= 0, & D(Q_r^2) &\rightarrow -\infty^{(-)} \\ D(1) &= 0, \end{aligned}$$

i.e.

$$\left. \begin{aligned} D(Q^2) < 0 & \text{ si } 0 \leq Q^2 < \beta; \\ D(Q^2) < 0 & \text{ si } 0 < Q^2 < Q_r^2. \end{aligned} \right\} (2.61)$$

La expresión (2.61) se representa gráficamente (en forma aproximada) según la figura ; la zona de elipticidad es la sombreada.



La zona sombreada es la de elipticidad.

Figura 7.

Nótese que si en vez de superficies isentrópicas se manejan superficies isotérmicas, en lugar de las expresiones anteriores se tendrán

$$0 = \frac{\partial H}{\partial |v|^2} = \frac{F^2}{2r^2 \rho^2} + \frac{\dot{P}}{\rho} \left(T - \frac{F^2}{\rho^2} \left(\frac{B_\theta^2 Q^2}{1-Q^2} + B^2 \right) \right). \quad (2.62)$$

$$\dot{P}/\rho = \frac{1/2 r^2}{B^2/\rho + B_\theta^2/(1-Q^2) - k\rho T/Q^2}. \quad (2.63)$$

$$\eta \equiv 2Q^2 \dot{p}/p = \frac{Q^2/\kappa^2}{B_p^2 + B_0^2/(1-Q^2) - k\rho T/Q^2} \quad (2.64)$$

$$D_* = (1-Q^2)^2 \left[\frac{Q^2(B^2 + k\rho T) - k\rho T}{Q^1 B_p^2 - Q^2(B^2 + k\rho T) + k\rho T} \right] \quad (2.65)$$

$$D_*(Q^2) < 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq Q^2 < Q_{*L}^2 \quad \text{o} \quad Q_{*R}^2 < Q^2 < Q_{*T}^2 \quad (2.66)$$

y la gráfica de $D_*(Q^2)$ es análoga a la de la figura .

NOTAS.

(1) Woltjer (1958) demostró que en ausencia de procesos disipativos las ecuaciones hidromagnéticas admiten seis integrales de movimiento

$$I_1 = \int_V \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{A} \, dV$$

$$I_2 = \int_V \vec{B} \cdot \vec{v} \, dV$$

$$I_3 = \int_V \hat{e} \times \vec{r} \cdot \rho \vec{v} \, dV$$

$$I_4 = \int_V \hat{j} \times \vec{r} \cdot \rho \vec{v} \, dV$$

$$I_5 = \int_V \vec{k} \times \vec{r} \cdot \rho \vec{v} \, dV$$

$$I_6 = \int_V \rho \, dV$$

(2) Obsérvese que la ecuación de Bernoulli, (1.73), define la densidad de masa, ρ , como una función $\rho = \rho(\psi, |\nabla\psi|^2, r)$.

(3) La β (ó β_*) es un cociente que compara la presión termodinámica con la presión total en el plasma.

CAPITULO III

SOLUCION DE LA ECUACION DE GRAD-SHAFRANOV MODIFICADA.

En este capítulo se consideran algunos casos particulares de flujo de plasma en la configuración toroidal y se determina la solución de la ecuación de G-Sh modificada correspondiente. Los ejemplos a tratar son los siguientes:

1) Flujo transversal. En éste se analizan dos posibles casos. Uno es cuando se tiene sólo componente poloidal del campo magnético y rotación pura. El otro es cuando el flujo es poloidal y el campo magnético tiene únicamente componente toroidal;

2) Flujo paralelo. Aquí se toma \vec{v} paralela a \vec{B} . A lo largo de este capítulo se examinará sólo el caso con superficies isotérmicas, $T(\psi)$, dejando a un lado el caso de superficies isentrópicas, $S(\psi)$, ya que es más cómodo para la interpretación física.

III.1 FLUJO TRANSVERSAL $\vec{B} = \vec{B}_p$, $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$.

Considérese que el plasma de configuración toroidal y axisimétrico sólo tiene componente poloidal de campo magnético y que fluye toroidalmente en rotación pura. Para tener flujo poloidal nulo debe hacerse $F(\psi) = 0$ como se ve de (1.43) y (1.45); y si además se considera sólo rotación pura se tendrán los resultados obtenidos en (2.42)

$$\vec{v} = \omega r \hat{\theta}.$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

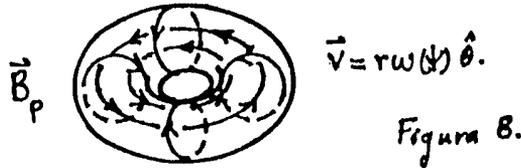
$$G(\psi) = 0.$$

$$H(\psi) = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + kT \ln \rho.$$

$$\Delta^* \psi + kr^2 \frac{d}{d\psi} (\rho T) = 0.$$

$$Q^2 = 0.$$

donde la última igualdad, $Q^2 = \frac{|F|^2}{\rho} = 0$, señala que se trata de un flujo de régimen elíptico (ver fig.). Además, de (2.38) es claro que ρ no dependerá de $|\nabla\psi|^2$ y en consecuencia la densidad de masa será sólo función de r y ψ , $\rho(r, \psi)$.



Que ρ sólo depende de r y ψ también se ve de la ecuación de Bernoulli puesta arriba; despejándola de ahí se obtiene

$$\rho(r, \psi) = e^{H(\psi)/kT(\psi)} e^{r^2 \omega^2(\psi)/2kT(\psi)}$$

ó bien,

$$\text{definiendo } \rho(\psi) = e^{H(\psi)/kT(\psi)} \rho(r, \psi) = \rho(\psi) e^{r^2 \omega^2(\psi)/2kT(\psi)} \quad (3.1)$$

La expresión (3.1) pone en evidencia el efecto centrífugo por la presencia del término $r\omega(\psi)$. Si no hubiera rotación, $\omega=0$, la densidad sería estrictamente cantidad de superficie. Ya que ρ manifiesta el efecto centrífugo cabe esperar que otro tanto suceda a la presión, pues debido a (1.52) se tiene

$$p = k\rho(r, \psi)T(\psi) = k\rho(\psi)T(\psi) e^{r^2 \omega^2(\psi)/2kT(\psi)}$$

y definiendo $p(\psi) = k\rho(\psi)T(\psi)$ queda

$$p(r, \psi) = p(\psi) e^{r^2 \omega^2(\psi)/2kT(\psi)} \quad (3.2)$$

De (3.1) y (3.2) resulta claro que en presencia de rotación ya no coinciden las superficies de flujo con las de presión o densidad debido al efecto centrífugo y que en dichas expresiones está presente a través del término $e^{r^2 \omega^2/2kT}$.

Al sustituir (3.2) en la ecuación de G-Sh modificada, en la forma particular que tomá para el caso bajo análisis, según

se muestra al inicio de esta sección; se obtendrá

$$\Delta^* \psi + r^2 e^{r^2 \omega^2 / 2kT} \left[\frac{d}{d\psi} p(\psi) + p(\psi) \frac{d}{d\psi} \left(\frac{r^2 \omega^2}{2kT} \right) \right] = 0. \quad (3.3)$$

El cociente $\omega^2 / 2kT$ es cantidad de superficie pues $\omega(\psi)$ y $T(\psi)$ son cantidades de superficie, separadamente; luego, puede proponerse un desarrollo en serie, de ese cociente, en potencias de $\psi^{(1)}$

$$\frac{\omega^2(\psi)}{2kT(\psi)} = \epsilon_0 + \epsilon_1 \psi + \epsilon_2 \psi^2 + \dots \quad (3.4)$$

Sin embargo, para obtener una solución aproximada, pero sencilla, de (3.3) es necesario proponer

$$\frac{\omega^2(\psi)}{2kT(\psi)} = \epsilon_0 \quad (3.5)$$

donde ϵ_0 es una constante.

Copenhaver (1983) señala la existencia de experimentos con haces neutros en los cuales ω y T son " fuertemente picudas " en el centro del plasma, es decir que el cambio relevante en el valor de $\omega(\psi)$ y $T(\psi)$ se tiene muy cerca del eje magnético y el cambio fuera del eje magnético es despreciable en comparación, resultando razonable el considerar $\omega^2(\psi)/2kT(\psi) =$ constante. Se toma

$$p(\psi) = -p_0(\psi - \psi_0) \quad (3.6)$$

donde p_0 , ψ_0 son valores constantes de referencia para p y ψ , respectivamente.

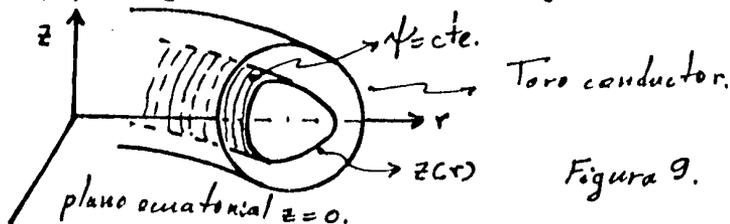
De la sustitución de (3.5) y (3.6) en (3.3) queda

$$\Delta^* \psi - p_0 r^2 e^{r^2 \epsilon_0} = 0. \quad (3.7)$$

Ahora el establecer las superficies de flujo depende de resolver la ecuación diferencial (3.7). La solución general de (3.7), como es claro, es de la forma $\psi(r, z) = \psi_H + \psi_p$ donde ψ_p es una solución particular y ψ_H es solución a la ecuación homogénea $\Delta^* \psi = 0$.

Si se supone que las superficies magnéticas (o tubos de

flujo) tienen un plano de simetría en el plano ecuatorial del toro ($z=0$) es necesario proponer que la dependencia de ψ en z sea tal que para una superficie dada ($\psi = \text{cte.}$) la función $z(r)$ tenga dos raíces reales y sea bivaluada en el



sentido de que a todo valor $r \in [r_1, r_2]$ siendo $r_1 < r_2$ las dos raíces reales de $z(r)$ le corresponda el positivo y el negativo de la magnitud en cuestión. Esto último es para preservar el plano $z=0$ como plano de simetría. Así, uno puede esperar que ψ tenga una dependencia en z del tipo z^{2k} con k entero. Sin embargo, no es difícil convencerse de que proponer una solución del tipo $r^n z^{2k}$ para $\Delta^* \psi = 0$, con n y k enteros, conduce a cuatro soluciones independientes, dadas por $C_0 z$, $C_1 z^2$, $C_2 r^2$ y $C_3 r^2 z$ con C_0, C_1, C_2 y C_3 constantes. Empero, estas soluciones no satisfacen el requisito de generar una curva, $z(r)$, con dos raíces reales.

A raíz de lo obtenido puede proponerse una solución que vaya como $C r^2 z^2$, pero da lugar a ${}^{(2)}\Delta^*(C r^2 z^2) = 2C r^2 \neq 0$, con C una constante. Esto sugiere una solución general de la forma

$$\psi_H(r, z) = C r^2 z^2 + g(r) \quad (3.8)$$

donde $g(r)$ es una función a determinar. El sustituir (3.8) en la ecuación homogénea lleva a ⁽³⁾

$$\frac{d^2 g}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + 2C r^2 = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y(x) = Q(x)$$

tiene, como es sabido, la solución general

$$\gamma(x) = \gamma(x_0) e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi \quad (3.10)$$

con $A(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} P(t) dt$.

Aplicando (3.10) para resolver (3.9) se obtiene sucesivamente

$$\frac{dg}{dr} = \frac{r}{r_0} \left(\frac{dg}{dr} \right)_{r_0} - Cr(r^2 - r_0^2) \quad (3.11)$$

$$g(r) = \frac{(r^2 - r_0^2)}{2r_0} \left(\frac{dg}{dr} \right)_{r_0} - \frac{C}{4} (r^2 - r_0^2)^2 \quad (3.12)$$

y sustituyendo (3.12) en (3.8) la solución a la homogénea es

$$\psi_H(r, z) = Cr^2 z^2 + \frac{(r^2 - r_0^2)}{2r_0} \left(\frac{dg}{dr} \right)_{r_0} - \frac{C}{4} (r^2 - r_0^2)^2. \quad (3.13)$$

Falta determinar una solución particular a la ecuación inhomogénea (3.7). El término de inhomogeneidad no depende de z lo cual hace razonable proponer una solución del tipo $\psi_p = f(r)$ que sustituida en (3.7) da

$$\frac{dzf}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - p_0 r^2 e^{\epsilon_0 r^2} = 0 \quad (3.14)$$

Utilizando (3.10) para resolver (3.14) se obtienen

$$\frac{df}{dr} = \frac{r}{r_0} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r_0} + \frac{p_0 r}{2\epsilon_0} (e^{\epsilon_0 r^2} - e^{\epsilon_0 r_0^2}). \quad (3.15)$$

$$\psi_p = f(r) = \frac{(r^2 - r_0^2)}{2r_0} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r_0} - \frac{p_0}{4\epsilon_0^2} (e^{\epsilon_0 r_0^2} - e^{\epsilon_0 r^2} + \epsilon_0 e^{\epsilon_0 r_0^2} (r^2 - r_0^2)). \quad (3.16)$$

La solución completa para (3.7) se obtiene sumando

(3.13) y (3.16),

$$\psi(r, z) = Cr^2 z^2 + \frac{(r^2 - r_0^2)}{2r_0} \left[\left(\frac{dg}{dr} \right)_{r_0} + \left(\frac{df}{dr} \right)_{r_0} \right] - \frac{C}{4} (r^2 - r_0^2)^2 - \frac{p_0}{4\epsilon_0^2} [e^{\epsilon_0 r_0^2} - e^{\epsilon_0 r^2} + \epsilon_0 e^{\epsilon_0 r_0^2} (r^2 - r_0^2)]. \quad (3.17)$$

Las condiciones de contorno que debe satisfacer (3.17) están relacionadas con lo mencionado en la sección I.1 en lo referente a que el toroide interior está degenerado en una curva cerrada llamada eje magnético. El eje magnético es una circunferencia de radio r_0 que se encuentra sobre el plano $z = 0$. Al estar degenerada esa superficie magnética le corresponderá un flujo nulo; es decir, $\psi(r_0, 0) = 0$. Por otra parte, ahí también se mencionó que se supondría $\nabla p \neq \vec{0}$ excepto en

el eje magnético. Considerar este requisito junto con (3.6) lleva a que $\nabla\psi \neq \vec{0}$ excepto en el eje magnético. En resumen, las condiciones de contorno a satisfacer por (3.17) son

$$\left. \begin{aligned} \psi(r_0, 0) &= 0 \\ \nabla\psi(r_0, 0) &= \vec{0} \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Se ve que la primera se satisface en forma inmediata. El gradiente de (3.17) y la segunda condición llevan a que

$$\left(\frac{dg}{dr}\right)_{r_0} + \left(\frac{df}{dr}\right)_{r_0} = 0.$$

Esto convierte a (3.17) en

$$\psi(r, z) = Cr^2z^2 - \frac{C}{A}(r^2 - r_0^2)^2 - \frac{p_0}{4\epsilon_0} \left[e^{\frac{\epsilon_0 r_0^2}{r}} - e^{\frac{\epsilon_0 r^2}{r_0}} + \epsilon_0 e^{\frac{\epsilon_0 r_0^2}{r}} (r^2 - r_0^2) \right] (3.19)$$

que es la solución al problema planteado.

Una vez fijado el valor para ψ , $\psi = \text{constante}$, se tiene una expresión para $z(r)$ que permite establecer el perfil correspondiente a esa superficie de flujo.

Si no se tiene rotación, $\omega = 0$, las expresiones dadas al inicio de esta sección se convierten en

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{0}. \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0. \\ G(\psi) &= 0. \\ H(\psi) &= kT(\psi) \ln \rho. \\ \Delta^* \psi + k r^2 \frac{d}{d\psi} (\rho T(\psi)) &= 0. \\ Q^2 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.20)$$

donde ρ y p se obtienen de (3.1) y (3.2), respectivamente, haciendo $\omega = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho(\psi) \\ p &= k\rho(\psi)T(\psi) \end{aligned} \right\} (3.21)$$

y también $\epsilon_0 = 0$, por (3.5), dando lugar a que (3.7) se convierta en

$$\Delta^* \psi - p_0 r^2 = 0. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) es la (2.21) para el caso sin flujo (caso estático). La solución⁽⁴⁾ de (3.22) diferirá de la solución de (3.7) únicamente en la solución particular, pues la solución a la homogénea aún será dada por (3.13).

Si la solución a la inhomogénea se busca en la forma $\psi_p = f(r)$, después de sustituirla en (3.22) queda

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \rho_0 r^2 = 0 \quad (3.23)$$

y usando (3.10) para resolverla se obtienen

$$\frac{df}{dr} = \frac{r}{r_0} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r_0} + \rho_0 \frac{r}{2} (r^2 - r_0^2)$$

$$f(r) = \frac{(r^2 - r_0^2)}{2r_0} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r_0} + \frac{\rho_0}{8} (r^2 - r_0^2)^2 \quad (3.24)$$

de manera que la solución a (3.22) se obtiene con la suma de (3.13) y (3.24)

$$\psi(r, z) = C r^2 z^2 + \frac{(r^2 - r_0^2)}{2r_0} \left[\left(\frac{dg}{dr} \right)_{r_0} + \left(\frac{df}{dr} \right)_{r_0} \right] + \frac{\rho_0 - 2C}{8} (r^2 - r_0^2)^2$$

y aplicando las condiciones de contorno (3.18) se llega a

$$\psi(r, z) = C r^2 z^2 + \frac{\rho_0 - 2C}{8} (r^2 - r_0^2)^2 \quad (3.25)$$

Esta solución es del tipo de soluciones bien conocidas para el caso estático (Solov'ev, 1975). Así, al no tener rotación ($\omega = 0$) se tiene un caso estático y se recupera el resultado correspondiente ya conocido.

Es posible encontrar, a partir de las soluciones obtenidas, las componentes de los campos electromagnéticos congruentes con las funciones de corriente correspondientes. Para ello se usarán (1.9) y (1.39) con la \vec{v} dada en esta sección.

A la situación representada por la función de corriente dada en (3.19) le corresponden, una vez realizada el álgebra,

$$\vec{B}_p = (-2C r z) \hat{r} + \left(2C z^2 - C(r^2 - r_0^2) - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (-e^{r^2} + e^{\epsilon_0 r_0^2}) \right) \hat{z} \quad (3.26)$$

$$\vec{E} = (-2C r^2 \omega z) \hat{z} - \left(2C r \omega z^2 - C r \omega (r^2 - r_0^2) - \frac{\rho_0 r \omega}{2\epsilon_0} (-e^{r^2} + e^{\epsilon_0 r_0^2}) \right) \hat{r} \quad (3.27)$$

mientras que a la ψ dada por (3.25) le corresponden

$$\vec{B}_p = (-2Crz)\hat{r} + \left(2Cz^2 + \frac{\rho_0 - 2C}{z}(r^2 - r_0^2)\right)\hat{z}. \quad (3.28)$$

$$\vec{E} = \vec{0}. \quad (3.29)$$

III.2 FLUJO TRANSVERSAL $\vec{B} = \vec{B}_\theta$, $\vec{v} = \vec{v}_p$.

Si para tener este caso se hace $\vec{v}_\theta = \vec{0}$ y $\vec{B}_p = \vec{0}$ la primera igualdad, por (1.46), lleva a $\frac{F}{\rho}\vec{B}_\theta + r\omega = 0$; mientras que la segunda conduce $\vec{v}_p = \frac{F}{\rho}\vec{B}_p = \vec{0}$. Es decir, la manera en que se han relacionado el flujo y el campo magnético plantea una inconsistencia aparente para tener $(\vec{B}_\theta, \vec{v}_p)$. Debido a esto no es posible atacar el problema en la formulación presentada. Sin embargo, es posible establecer la ecuación de G-Sh modificada en tal forma que permita hacer directamente $\vec{B}_p = \vec{0}$ y $\vec{v}_\theta = \vec{0}$ para tener la situación de interés en esta sección.

Para establecer la nueva forma de la ecuación de G-Sh modificada se parte de la ecuación de continuidad, (1.17),

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

de la cual puede concluirse la existencia de una función de corriente $U(r, z)$ tal que, en forma análoga⁽⁵⁾ a (1.39), permita escribir

$$\rho \vec{v} = \nabla U \times \nabla \theta + \rho \vec{v}_\theta. \quad (3.30)$$

Con esta expresión se calculará nuevamente $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ para lo cual se hace

$$\rho \vec{v}_p = \nabla U \times \nabla \theta = -\frac{\hat{r}}{r} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\hat{z}}{r} \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \vec{v} = -\frac{\hat{r}}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) - \hat{\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\hat{z}}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r}. \quad (3.32)$$

$$\rho \vec{v}_p \times (\nabla \times \vec{v}) = \hat{r} \left\{ \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \right\} -$$

$$- r \hat{\theta} \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \hat{z} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial z} \right\}. \quad (3.33)$$

$$\nabla \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \nabla \left(\frac{v_p^2}{2} \right) + \nabla \left(\frac{v_\theta^2}{2} \right). \quad (3.34)$$

Haciendo uso de los resultados (3.31) a (3.34) se sustituye en la ecuación de movimiento (1.18) y tomando componente a componente se obtiene

$$\text{para } r, \quad -\frac{I}{r^2} \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Delta^* \psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_p^2}{2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta^2}{2} \right) - \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.35)$$

$$\text{para } \theta, \quad 0 = \vec{B} \cdot \nabla I \quad (3.36)$$

$$\text{para } z, \quad -\frac{I}{r^2} \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \Delta^* \psi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_p^2}{2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_\theta^2}{2} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.37)$$

donde se usó (2.4) y se tomó $I = r B_\theta$.

$$\text{Pero } \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta^2}{2} \right) - \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = -\rho v_\theta^2 / r$$

$$\text{y } \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_\theta^2}{2} \right) - \rho v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0$$

de manera que (3.35) y (3.37) se convierten, respectivamente,

$$\text{en } -\frac{I}{r^2} \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Delta^* \psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_p^2}{2} \right) - \frac{\rho v_\theta^2}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.38)$$

$$-\frac{I}{r^2} \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \Delta^* \psi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_p^2}{2} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Estas quedan englobadas en expresión única si se define

$$\Delta_{(p)}^* = r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \text{ y con ello}$$

$$\nabla U \Delta_{(p)}^* U - \rho r^2 \nabla \left(\frac{v_p^2}{2} \right) = r^2 \nabla p + \nabla \left(\frac{I^2}{2} \right) - \rho v_\theta^2 \nabla \left(\frac{r^2}{2} \right). \quad (3.40)$$

que es otra manera de escribir la ecuación de G-Sh modificada usando las funciones de corriente ψ , U . Nótese que si $\rho = 1$ se recupera el operador ya definido Δ^* , $\Delta^* = \Delta_{(p=1)}^*$.

La ecuación de G-Sh modificada, en su forma (3.40), ya permite analizar el flujo transversal $\vec{B} = \vec{B}_\theta$, $\vec{v} = \vec{v}_p$. Para tener $\vec{B}_p = \vec{0}$ bastará hacer $\psi = 0$ para tener $\vec{v} = \vec{v}_p$ se toma $\vec{v}_\theta = \vec{0}$; así se tendrá flujo poloidal y campo magnético toroidal. Con eso (3.40) se convierte en

$$\nabla U \Delta_{(p)}^* U - \rho r^2 \nabla \left(\frac{v_p^2}{2} \right) = r^2 \nabla p + \nabla \left(\frac{I^2}{2} \right). \quad (3.41)$$

Por otra parte,

$$\vec{B} \times \vec{v} = \vec{B}_0 \times \frac{(\nabla U \times \nabla \theta)}{\rho} = \frac{B_0}{\rho r} \nabla U = \frac{I}{\rho r^2} \nabla U$$

por lo cual

$$0 = \vec{B} \cdot (\vec{B} \times \vec{v}) = \frac{I}{\rho r^2} \vec{B} \cdot \nabla U \quad (3.42)$$

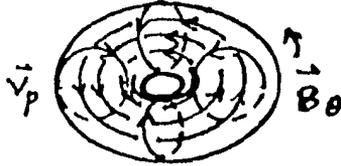


Figura 10.

Recordando que \vec{v} y \vec{B} comparten superficies, de (3.42) se concluye que existe una función arbitraria, $\Lambda(U)$, tal que

$$0 = \vec{B} \cdot \nabla \Lambda(U) = \Lambda'(U) \vec{B} \cdot \nabla U$$

con $\Lambda'(U) = \frac{d\Lambda}{dU} = I/\rho r^2$.

Luego, $\Lambda'(U) = \frac{I}{\rho r^2} \equiv \lambda(U)$ es cantidad de superficie⁽⁶⁾

$$\lambda(U) = \frac{I}{\rho r^2} \quad (3.43)$$

(al igual que antes $I = rB_0$).

La ecuación de Bernoulli para este caso, análoga a (2.19), es

$$H(U) = kT(U) \ln \rho + \frac{1}{2} v_p^2 + \frac{1}{2} v_A^2 \quad (3.44)$$

donde v_A es la velocidad de Alfvén. De ello resulta que la densidad está dada de acuerdo a

$$\begin{aligned} \rho &= e^{H(U)/kT(U)} e^{[-v_p^2/2kT(U) - v_A^2/2kT(U)]} \\ &= \rho(U) e^{-[v_p^2 + v_A^2]/2kT(U)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

En esta expresión se tiene un término que va como v^2 señalando que el plasma podría ser expulsado radialmente⁽⁷⁾.

Se trata, entonces, de un caso de equilibrio inestable pero puede remediarse tal situación si se impone como condición adicional la conservación del flujo toroidal

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (3.46)$$

i.e. $\vec{v} \cdot \nabla I = 0$ pues $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ por tratarse de una situación estacionaria; luego, (3.46) implica que $I = I(U)$ es cantidad de super-

ficie. Con esto y (3.43) se tiene

$$\lambda(\nu) = I(\nu) / \rho r^2$$

y definiendo $\rho_* = \rho r^2$ queda

$$\rho_*(\nu) = I(\nu) / \lambda(\nu) \quad (3.47)$$

De manera que $v_p^2 + v_A^2 \rightarrow \frac{|\nabla \nu|^2}{r^2 \rho^2} + \frac{B_0^2}{\rho^2} = \frac{|\nabla \nu|^2 + B_0^2 r^2}{\rho^2 r^2} =$
 $= \frac{|\nabla \nu|^2 + I^2(\nu)}{\rho_*(\nu)} = v^2(\nu)$ y, en consecuencia, (3.45) se convierte en

$$\rho = \rho(\nu) e^{-v^2/2kT} \quad (3.48)$$

En forma análoga a la de la sección anterior tenemos el efecto centrífugo en la densidad. Usando (3.48) se obtendrá para la presión

$$\begin{aligned} p &= k \rho T(\nu) \\ &= p(\nu) e^{-v^2/2kT} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para simplificar el problema se tomará el caso con incompresibilidad; es decir, cuando $\rho = \rho(\nu)$ pues $\nabla \cdot (\rho(\nu) \vec{v}) = 0$ implica que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Nótese que hacer $\rho = \rho(\nu)$ es equivalente a tomar en (3.48) que $\frac{v^2(\nu)}{2kT(\nu)} = \text{constante}$; así, es como aplicar una condición equivalente a la (3.5) de la sección anterior. En consecuencia,

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \eta \rho(\nu) \\ p &= \eta p(\nu) = \eta k \rho(\nu) T(\nu) \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

por (3.48) y (3.49) tomando $\eta = e^{-v^2(\nu)/2kT(\nu)} = \text{constante}$. Además, se usará también la condición de que el flujo toroidal se conserve, (3.46), y con lo cual (3.41) se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla \nu \Delta_{(\rho(\nu))}^* \nu - \eta \rho(\nu) \nabla \left[\frac{|\nabla \nu|^2}{2 r^2 \eta^2 \rho^2(\nu)} \right] &= \\ = r^2 \eta \rho'(\nu) \nabla \nu + I I'(\nu) \nabla \nu. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Considerando sólo componente en $\nabla \nu$ en (3.51) se obtiene

$$\Delta_{(\rho(\nu))}^* \nu + v_p^2 \rho' \eta = r^2 \eta \rho'(\nu) + I I'(\nu). \quad (3.52)$$

Dado que se tiene incompresibilidad resulta adecuado proponer, en particular, que

$$p = -p_0 (\psi - \psi_0) \quad (3.53)$$

donde p_0, ψ_0 son valores constantes de referencia para p y ψ , respectivamente. Con esto la (3.52) se convierte en

$$\Delta_{(\rho(U))}^* U + \eta v_p^2 \rho' = -\eta p_0 r^2 + I I'(U). \quad (3.54)$$

Si se expanden las funciones $\rho(U)$ y $I I'(U)$ en potencias de U

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 U + \dots \quad ; \quad \frac{I I'}{r_0^2} = -I_0 - I_1 U - \dots \quad (3.55)$$

y dejándolas hasta el primer término se puede convertir la (3.54) en una ecuación más sencilla, limitándose además a buscar las soluciones de ella en una vecindad del eje $r=r_0, z=0$.

Luego,

$$\rho_0' \Delta^* U = -\eta p_0 r^2 - I_0 r_0^2$$

$$\Delta^* U = -\eta p_0 r^2 - I_0 r_0^2 \quad (3.56)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (3.22) y para resolverla se puede optar entre usar la solución a $\Delta^* U = 0$ cuya estructura se conoce por el problema de la sección anterior y luego buscar una solución particular a (3.56) para que sumadas den la solución completa de (3.56); o bien, proponer la serie $U = \sum_{j,j'=0}^{\infty} a_{j,j'} (r^2 - r_0^2)^{j'} z^{2j}$ cortándola en la tercera potencia de $(r^2 - r_0^2)$.

Proponiendo la serie $U = \sum_{j=0}^3 \sum_{j'=0}^{\infty} a_{j,j'} (r^2 - r_0^2)^{j'} z^{2j}$ y sustituyéndola en (3.56) queda

$$8r^2 \sum_{j=0}^3 a_{2j} z^{2j} + \sum_{j=1}^3 2j(z_j - 1) a_{0j} z^{2j-2} + (r^2 - r_0^2) \sum_{j=1}^3 2j(z_j - 1) a_{1j} z^{2j-2} + (r^2 - r_0^2)^2 \sum_{j=1}^3 2j(z_j - 1) a_{2j} z^{2j-2} = \eta p_0 r^2 + I_0 r_0^2. \quad (3.57)$$

Agrupando términos semejantes se obtienen

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= 0. \\ 8a_{20} + 2a_{11} &= -\eta p_0 r_0^2. \\ 2a_{01} - 2a_{11} r_0^2 &= -I_0 r_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

y los demás coeficientes son nulos. Con esto queda la solución como

$$U(r, z) = a_{00} + a_{01} z^2 + a_{10} (r^2 - r_0^2) + a_{11} (r^2 - r_0^2) z^2 + a_{20} (r^2 - r_0^2)^2 \quad (3.59)$$

Las condiciones de contorno a satisfacer son, análogamente a (3.18),

$$\left. \begin{aligned} U(r_0, 0) &= 0. \\ \nabla U(r_0, 0) &= \vec{0}. \end{aligned} \right\} (3.60)$$

La primera lleva a que
en tanto que la segunda

$$a_{00} = 0$$

$$a_{10} = 0$$

y por ello la (3.59) queda $U(r, z) = z^2(a_{01} + a_{11}(r^2 - r_0^2)) + a_{20}(r^2 - r_0^2)^2$. Pero con (3.58) se tiene

$$U(r, z) = \left(-\frac{I_0 r_0^2 \rho_0}{z} + a_{11} r^2 \right) z^2 - \left(\frac{\gamma \rho_0 \rho_0 + 2a_{11}}{\beta} \right) (r^2 - r_0^2)^2. \quad (3.61)$$

Cuando se impone una condición más restrictiva que $I_0 = \text{cte.}$, se tendría según la aproximación tomada, $I_0 = 0$; quedando, en vez de (3.61), la ecuación

$$U(r, z) = a_{11} r^2 z^2 - \frac{(\gamma \rho_0 \rho_0 + 2a_{11})}{\beta} (r^2 - r_0^2)^2. \quad (3.62)$$

Como puede verse de (3.61), (3.62) y (3.63) en este caso las curvas de nivel de U son análogas a las de ψ en el caso sin flujo, ecuación (3.25). Al tomar un valor fijo de U , $U = \text{cte.}$, se obtiene $z(r)$ que da el perfil de las superficies de flujo.

Por otro lado, de $U(r, z)$ se obtienen los campos de velocidades compatibles con las suposiciones realizadas, usando para eso la expresión, de (3.30), $\rho \vec{V}_p = \nabla U \times \nabla \theta$. Así

$$\vec{V}_p = \left(\left(I_0 r_0^2 + \frac{2a_{11}}{\rho_0} r^2 \right) \frac{\hat{\theta}}{r} \right) \hat{r} + \left(\frac{2a_{11}}{\rho_0} z^2 - \frac{(\gamma \rho_0 \rho_0 + 2a_{11})}{2\rho_0} (r^2 - r_0^2) \right) \hat{z}. \quad (3.63)$$

$$\vec{E} = B_0 \left[\hat{r} \left(\frac{2a_{11}}{\rho_0} z^2 - \frac{(\gamma \rho_0 \rho_0 + 2a_{11})}{2\rho_0} (r^2 - r_0^2) \right) - \hat{z} \left(\left(I_0 r_0^2 + \frac{2a_{11}}{\rho_0} r^2 \right) \frac{\hat{\theta}}{r} \right) \right]. \quad (3.64)$$

De (3.63) puede verse que la componente radial de la velocidad tiene una singularidad en $r=0$. Esa singularidad se remueve al aplicar, como en (3.62), $I_0 = 0$. Los resultados correspondientes a (3.62) son

$$\vec{V}_p = \frac{2a_{11}}{\rho_0} r z \hat{r} + \left(\frac{2a_{11}}{\rho_0} z^2 - \frac{(\gamma \rho_0 \rho_0 + 2a_{11})}{2\rho_0} (r^2 - r_0^2) \right) \hat{z}. \quad (3.65)$$

$$\vec{E} = B_0 \left[\hat{r} \left(\frac{2a_{11}}{\rho_0} z^2 - \frac{(\gamma \rho_0 \rho_0 + 2a_{11})}{2\rho_0} (r^2 - r_0^2) \right) - \frac{2a_{11}}{\rho_0} r z \hat{\theta} \right]. \quad (3.66)$$

III.3 FLUJO PARALELO.

Si \vec{v} y \vec{B} son paralelos deben ser relacionados ambos campos a través de una función n tal que

$$\vec{v} = n \vec{B} \quad (3.67)$$

y al tomar la divergencia

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla n \cdot \vec{B} \quad (3.68)$$

Entonces, se tiene flujo incompresible si n ⁽⁸⁾ es cantidad de superficie, $n = n(\psi)$; o, en forma trivial, cuando $n = \text{cte}$. Las ecuaciones (1.39) y (3.30) permiten escribir

$$\frac{1}{\rho} \nabla \sigma \times \nabla \theta + \vec{v}_\theta = n \nabla \psi \times \nabla \theta + n \vec{B}_\theta \quad (3.69)$$

o bien

$$\begin{aligned} \nabla \sigma &= \rho n \nabla \psi \\ v_\theta &= n B_\theta \end{aligned} \quad (3.70)$$

Utilizando que el flujo toroidal se conserva, (3.46), junto con (3.42) y (3.69) la ecuación modificada de G-Sh en su forma (3.40) queda como

$$\nabla \sigma \Delta_{(\rho)}^* \psi - \rho r^2 \nabla \left(\frac{n^2 |\nabla \psi|^2}{2r^2} \right) = \nabla \psi \Delta^* \psi + r^2 \nabla p + I I' \nabla \psi - \rho r v_\theta^2 \hat{r} \quad (3.71)$$

Tomando en cuenta únicamente flujo incompresible (ver nota # 8) se hace $n(\psi)$, $\rho(\psi)$ en (3.70) y así, con (3.69) se obtiene

$$\Delta_{(\rho(\psi))}^* \psi = n(\psi) \Delta^* \psi \quad (3.72)$$

$$\text{y también } \Delta_{(\rho(\psi))}^* \psi \nabla \sigma = \rho n^2(\psi) \Delta^* \psi \nabla \psi \quad (3.73)$$

Sustituyendo (3.72) en (3.70)

$$\begin{aligned} \rho(\psi) n^2(\psi) \Delta^* \psi \nabla \psi - \rho r^2 \nabla \left(\frac{n^2(\psi) |\nabla \psi|^2}{2r^2} \right) = \\ = \nabla \psi \Delta^* \psi + r^2 \nabla p + I I' \nabla \psi - \rho r v_\theta^2 \hat{r} \end{aligned} \quad (3.74)$$

que al tomar la componente en $\nabla \psi$ da

$$\rho(\psi) n^2(\psi) \Delta^* \psi - \rho |\nabla \psi|^2 n n'(\psi) = \Delta^* \psi + r^2 \frac{d\rho}{d\psi} + I I'$$

o bien

$$- (1 - \rho(\psi) n^2(\psi)) \Delta^* \psi - \rho(\psi) n(\psi) |\nabla \psi|^2 \frac{dn(\psi)}{d\psi} = r^2 \frac{d\rho}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} \quad (3.75)$$

Para simplificar esta ecuación se usará la expansión hecha en (3.55) y se realizará la misma aproximación

$$\rho = \rho_0 \quad , \quad \mathbf{I} \mathbf{I}' / r_0^2 = -\mathbf{I}_0 \quad (3.76)$$

además $n = n_0$ donde ρ_0, \mathbf{I}_0 y m_0 son constantes así como $\rho' = -\rho_0$.

Luego,

$$(1 - \rho_0 m_0^2) \Delta^* \psi = -r^2 \rho_0 - \mathbf{I}_0 r_0^2. \quad (3.77)$$

Esta ecuación es análoga a la (3.56); en consecuencia, dado que se aplican las mismas condiciones de contorno, se obtiene el mismo tipo de solución que (3.61)

$$\psi(r, z) = z^2 \left(b_{11} r^2 - \frac{\mathbf{I}_0 r_0^2 \rho_0}{2(1 - \rho_0 m_0^2)} \right) - \left(\frac{\rho_0 \rho_0}{8(1 - \rho_0 m_0^2)} + \frac{b_{11}}{4} \right) (r^2 - r_0^2)^2. \quad (3.78)$$

Con (3.77) se pueden obtener tanto el campo de velocidades como el electromagnético consistente con la situación presentada. Para el campo magnético se tiene

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \nabla \theta + \vec{B}_0$$

$$= -\frac{2z}{r} \left(b_{11} r^2 - \frac{\mathbf{I}_0 r_0^2 \rho_0}{2(1 - \rho_0 m_0^2)} \right) \hat{r} + \left(2b_{11} z^2 - \left(\frac{\rho_0 \rho_0}{2(1 - \rho_0 m_0^2)} + b_{11} \right) (r^2 - r_0^2) \right) \frac{\hat{z}}{r} + \vec{B}_0. \quad (3.79)$$

y para el campo de velocidades

$$\vec{V} = -\frac{2z}{r} \left(b_{11} r^2 - \frac{\mathbf{I}_0 r_0^2 \rho_0}{2(1 - \rho_0 m_0^2)} \right) \hat{r} m_0 + m_0 \left(2b_{11} z^2 - \left(\frac{\rho_0 \rho_0}{2(1 - \rho_0 m_0^2)} + b_{11} \right) (r^2 - r_0^2) \right) \frac{\hat{z}}{r} + m_0 \vec{B}_0. \quad (3.80)$$

en tanto que el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \vec{0} \quad (3.81)$$

NOTAS.

(1) Limitándose al caso de ψ pequeñas; esto es, cuando se está en una región cercana al eje magnético.

(2) La razón de introducir explícitamente r^2 obedece al hecho de que $z(r)$ también, como es razonable de suponer, por las consideraciones de simetría, sea par.

(3) Tomando en cuenta los argumentos geométricos señalados resulta claro que otra manera de obtener la solución a la homogénea $\Delta^* \psi_H = 0$ es proponiendo una serie de potencias de $(r^2 - r_0^2)$ y z^2 generalizada $\psi_H = \sum_{ij} C_{ij} (r^2 - r_0^2)^i z^{2j}$. Haciéndolo se obtiene (después de cortar la serie en la tercera potencia de $(r^2 - r_0^2)$), una vez sumada la solución particular de la inhomogénea y aplicadas las condiciones de contorno, que $C_{00} = 0$ y $C_{10} = 0$. Eso lleva exactamente a la solución obtenida por el otro método, ecuación (3.18), donde la constante C de ahí corresponde a la C_{11} de esta serie.

(4) Nótese que siendo algebraica la inhomogeneidad de (3.22) es posible proponer de entrada una solución en serie como la propuesta en la nota # 3 de este capítulo. Cortando la serie en la tercera potencia de $(r^2 - r_0^2)$ se obtiene

$$\psi = C_{00} + C_{11} r_0^2 z^2 + C_{10} (r^2 - r_0^2) + C_{11} (r^2 - r_0^2) z^2 + \frac{P_0 - 2C_{11}}{8} (r^2 - r_0^2)^2$$

y de las condiciones de contorno $C_{00} = C_{10} = 0$; luego

$$\psi = C_{11} r^2 z^2 + C_{11} (r^2 - r_0^2) z^2 + \frac{P_0 - 2C_{11}}{8} (r^2 - r_0^2)^2$$

o sea la solución (3.25): $\psi = C_{11} r^2 z^2 + \frac{P_0 - 2C_{11}}{8} (r^2 - r_0^2)^2$.

(5) Se tiene el análogo completo con una sustitución dada por $\vec{B} \rightarrow \rho \vec{v}$, $\psi \rightarrow U$, $\vec{B}_0 \rightarrow \rho \vec{v}_0$.

(6) Obsérvese que en esta sección se trata de cantidades de superficie en relación con la función de corriente $U(r, z)$ que está asociada al campo de velocidades, \vec{v} ; mientras que las cantidades de superficie manejadas en la otra formulación es-

tán asociadas a $\psi(r, z)$, la función de corriente para el campo magnético, \vec{B} .

(7) Pues la velocidad de Alfvén es, para este caso, $\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho}}$ con $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(r, z)$.

(8) Que n sea cantidad de superficie implica incompresibilidad; y, a la inversa, pensar en el flujo incompresible como $\rho(\psi)$ implica que $m(\psi)$. Esto puede verse usando la ecuación de continuidad $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$. Para la primera $\vec{v} = m(\psi) \vec{B}$ luego $0 = \nabla \cdot (\rho m(\psi) \vec{B}) = m(\psi) \nabla \rho \cdot \vec{B}$ que lleva a $\rho(\psi)$; y, al revés, si $\rho(\psi)$ se tiene $0 = \nabla \cdot (\rho(\psi) \vec{B}) = \rho(\psi) \nabla m \cdot \vec{B}$ que lleva a $m = m(\psi)$.

CAPITULO IV
CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se ha establecido una relación entre el campo de velocidades del plasma (\vec{v}) y el campo magnético (\vec{B}) (Sec. I.3). Con esa relación y las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal se obtuvieron una serie de funciones que son uniformes (cantidades de superficie) sobre las superficies (Capítulo I) de flujo (y las superficies son compartidas, según se mostró, por \vec{v} y \vec{B}). Dichas funciones permiten caracterizar las superficies de flujo de tal manera que permite el estudio de su estructura.

Ese conjunto de resultados permitió establecer una ecuación para el estado de equilibrio dinámico ($\vec{v} \neq \vec{0}$) análoga a la ecuación de Grad-Shafranov para el caso estático ($\vec{v} = \vec{0}$). Aquella se reduce a esta última en el caso en el cual no hay flujo de plasma ($\vec{v} = \vec{0}$).

La ecuación de Grad-Shafranov modificada se estableció usando una función de corriente (Sec. II.1) ψ que genera la componente poloidal del campo magnético ($\vec{B}_p = \nabla\psi \times \nabla\theta$) y fue presentada para dos situaciones:

i) cuando la ecuación de estado es la de gases ideales,
 $p = k\rho T$; y

ii) cuando la ecuación de estado es la de cambio de estado adiabático, $p = S\rho^\gamma$.

Más aún, la ecuación de G-Sh modificada fue reformulada (Se. III.2) usando dos funciones de corriente: ψ , U. La segunda genera la componente poloidal de la velocidad ($\vec{v}_p = \frac{1}{\rho} \nabla U \times \nabla\theta$). Así, se obtuvo la expresión que permite, en forma más

general que la anterior, estudiar el flujo de plasma porque al involucrar las funciones ψ y U se puede manejar en forma directa la forma del campo magnético y el de velocidades para el estudio de cualquier caso, teniendo como limitación el que la ecuación resultante se pueda resolver. Esta expresión también puede contener la expresión del proceso adiabático o la de los gases ideales.

En íntima conexión con el que se pueda resolver la ecuación obtenida para una situación dada está el delimitar el régimen de flujo para ese caso; determinado si se trata de régimen elíptico o hiperbólico. A tal fin sirve la gráfica presentada en la sección II.3 en la que se muestran las zonas de elipticidad e hiperbolicidad para la ecuación de G-Sh modificada.

Debe hacerse notar una diferencia crucial de lo obtenido aquí en relación con los resultados estándar de la dinámica de fluidos. En esta última se tienen, por así decirlo, dos regiones posibles: subsónica y supersónica. De lo obtenido en la sección II.3 se ve ^{que} para el problema aquí tratado eso no se tiene sino que existen varias regiones. Así, las regiones $0 \leq \frac{F^2}{\rho} < \beta$, $Q_1^2 < F^2/\rho < Q_r^2$ son elípticas en tanto que $\beta < \frac{F^2}{\rho} < Q_1^2$, $Q_r^2 < F^2/\rho$ son hiperbólicas. En consecuencia, se tienen los siguientes "puntos de transición":

$$F^2/\rho = \beta, \quad Q_1^2 \xrightarrow{h} e, \quad Q_r^2 \xrightarrow{e} h.$$

donde e y h se refieren a elíptico e hiperbólico, respectivamente. Esto se relaciona con el que se tengan dos, en vez de una, velocidades características: la de ondas MHD lentas (Q_1) y la de las rápidas (Q_r).

De los ejemplos analizados en el capítulo III ha quedado

de manifiesto el efecto centrífugo, al tener rotación toroidal $\omega \neq 0$, tanto en la función de densidad como en la función de presión al igual que en las superficies de flujo. En esa situación las funciones en cuestión están dadas por:

$$i) \rho(r, \psi) = \rho(\psi) e^{r^2 \omega^2 / 2kT} \quad \text{con} \quad \rho(\psi) = e^{H(\psi) / kT(\psi)} \quad \text{ec. (3.1)}$$

$$ii) \rho(r, \psi) = \rho(\psi) e^{r^2 \omega^2 / 2kT} \quad \text{con} \quad p(\psi) = k\rho(\psi)T(\psi) \quad \text{ec. (3.2)}$$

para el caso del flujo transversal $\vec{B} = \vec{B}_\theta$, $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$. En tanto que para el flujo transversal $\vec{B} = \vec{B}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_p$ se tienen:

$$i) \quad \rho = \rho(v) e^{-v^2 / 2kT}. \quad \text{ec. (3.48)}$$

$$ii) \quad p = p(v) e^{-v^2 / 2kT}. \quad \text{ec. (3.49)}$$

De esas expresiones queda claro que ya no pueden coincidir las superficies de flujo ($\psi = \text{cte.}$ ó $U = \text{cte.}$, según el caso) con las de presión y densidad constantes a consecuencia del efecto centrífugo presente a través del término $e^{r^2 \omega^2 / 2kT}$ en el primer caso y a través de $e^{-v^2 / 2kT}$ en el segundo.

Si no se tiene flujo de plasma las expresiones de arriba se reducen a:

$$i) \quad \rho = \rho(r) \quad \text{o}' \quad \rho = \rho(v)$$

$$ii) \quad p = p(r) \quad \text{o}' \quad p = p(\psi)$$

donde es clara la coincidencia entre superficies de densidad, presión y campo magnético. Las expresiones para ψ y U correspondientes a esos dos casos se encuentran en las secciones III.1 y III.2.

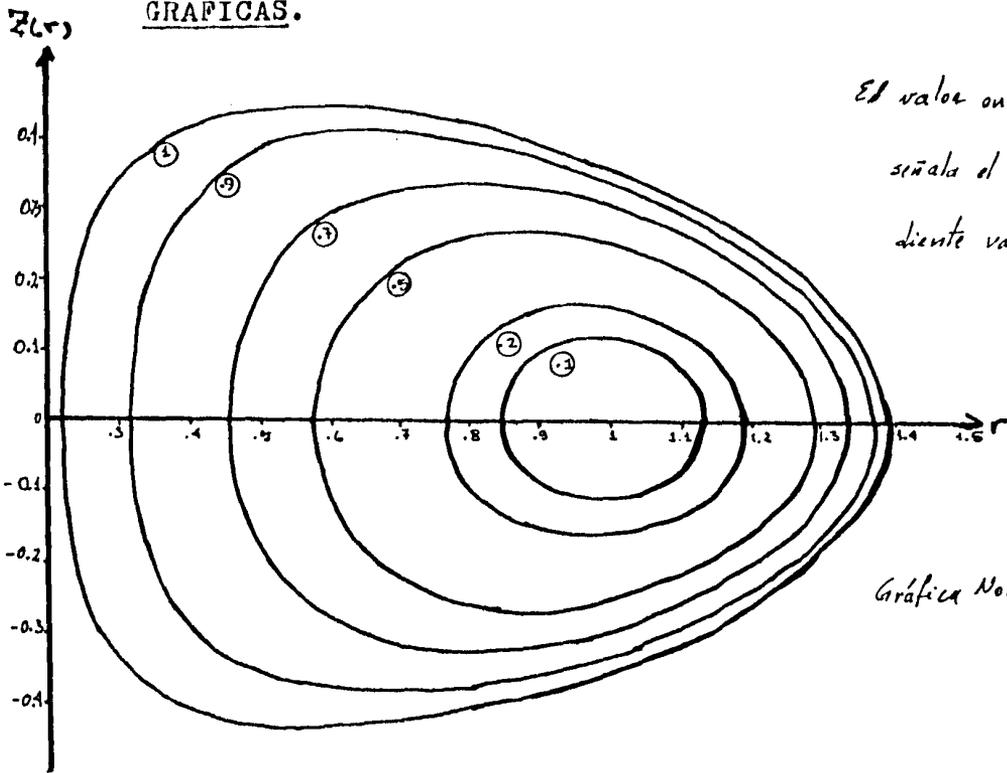
El efecto de la rotación en las superficies de flujo es aplastar a dichas superficies por ambos extremos en la dirección radial. Esto puede verse en las gráficas correspondientes a uno y otro caso. La gráfica No.1 muestra las intersecciones de las superficies de flujo con el plano $z-r$ en el caso del flujo transversal $\vec{B} = \vec{B}_\theta$, $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$; mientras que la gráfica

No.2 presenta la intersección de las superficies de flujo con el plano $z-r$ pero cuando $\omega = 0$. La segunda corresponde al caso estático cuando $\vec{B} = \vec{B}_p$; es decir, corresponde a la solución de la ecuación de Grad-Shafranov con ese campo magnético. En esas gráficas se tomó como factor $\epsilon = \frac{\psi}{g}$, con $\psi = \text{cte.}$, para establecer las curvas.

La forma de las curvas en la gráfica No.2 también corresponde al caso de flujo transversal $\vec{B} = \vec{B}_\theta$, $\vec{v} = \vec{v}_p$ tomando $\epsilon = \frac{v}{g}$ y $I_0 = 0$, con $U = \text{cte.}$; y sirven también para el caso del flujo paralelo $\vec{B} \parallel \vec{v}$ con $I_0 = 0$ pues las soluciones correspondientes a estos casos son análogas como puede verse de las ecuaciones (3.25), (3.62) y (3.78), esta última con $I_0 = 0$, donde sólo es necesario revalorar los coeficientes correspondientes a cada caso y sin olvidar que en el flujo transversal aquí mencionado se trata de un caso de flujo de plasma ; es decir, no es un caso estático, pero teniendo también en cuenta que las curvas para él corresponden no a superficies $\psi = \text{cte.}$ sino a superficies $U = \text{cte.}$ donde U es la "función de corriente" para el campo de velocidades así como ψ lo es para el campo magnético.

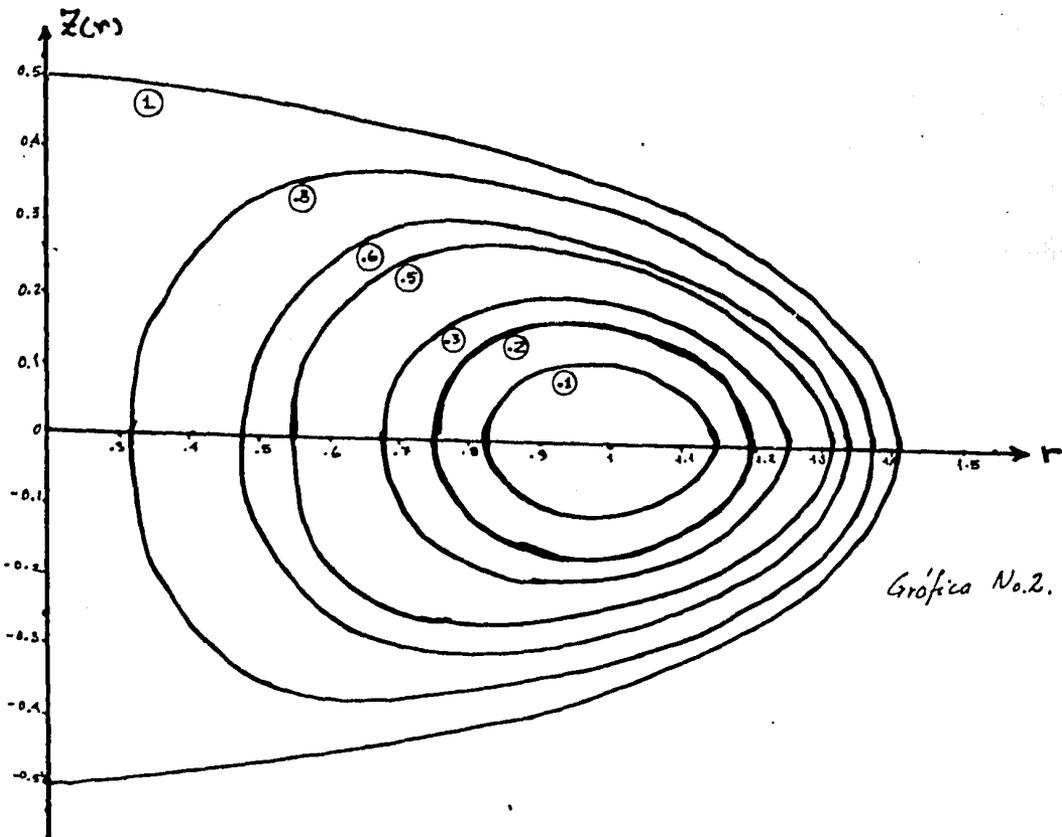
Es posible establecer una analogía entre las superficies de flujo U , $\psi = \text{cte.}$ obtenidas aquí y las obtenidas en la hidrodinámica para un flujo estacionario con vorticidad. La analogía es bastante notable. La comparación se presenta en el Apéndice II.

GRAFICAS.



El valor en el círculo
señala el correspon-
diente valor de ϵ .

Gráfica No. 1.



Gráfica No. 2.

APENDICE I

OBTENCION DE LA RELACION (2.15).

Desarrollando los términos se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F^2}{\rho} \right) \cdot B_p^2 + \left(1 - \frac{F^2}{\rho} \right) \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r B_\theta) + r \rho \omega \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} - \rho \vec{v} \cdot \vec{B} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} \right) - F \omega \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial \psi} \right] = \\
 & = z B_p^2 \frac{F}{\rho} \frac{dF}{d\psi} - \frac{F^2 B_p^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(1 - \frac{F^2}{\rho} \right) r B_\theta \right] - B_\theta^2 \left(-\frac{2F}{\rho} \frac{dF}{d\psi} + \frac{F^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right) + \\
 & + r \rho \omega \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} - \vec{v} \cdot \vec{B} \frac{dF}{d\psi} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{\rho} F \frac{\partial \rho}{\partial \psi} - F \omega \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial \psi} = \quad \textcircled{3} \\
 & = \left[\frac{2F}{\rho} B_p^2 + \frac{2F}{\rho} B_\theta^2 - \vec{v} \cdot \vec{B} \right] \frac{dF}{d\psi} + \left[-\frac{F^2 B_p^2}{\rho^2} - \frac{F^2 B_\theta^2}{\rho^2} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{\rho} F \right] \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{dG}{d\psi} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial F r^2 \omega}{\partial \psi} \right] + \left[r \rho \omega \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} - F \omega \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial \psi} \right]. \quad \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

donde se usó (1.62). Pero

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} & = \left(\frac{F}{\rho} B^2 - r \omega B_\theta \right) dF/d\psi. && \text{por (1.46)} \\
 \textcircled{2} & = \left(-\frac{F}{\rho} B^2 + \vec{v} \cdot \vec{B} \right) \frac{F}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} = r \omega B_\theta \frac{F}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi}. && \text{por (1.46)} \\
 \textcircled{3} & = \left(\frac{B_\theta}{r} \frac{dG}{d\psi} + r B_\theta \omega \frac{dF}{d\psi} + r B_\theta F \frac{d\omega}{d\psi} \right). \\
 \textcircled{4} & = \left(r \rho \omega \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{\rho} B_\theta + r \omega \right) - F r \omega \frac{\partial B_\theta}{\partial \psi} \right) && \text{por (1.46)} \\
 & = \left(r \omega F \frac{\partial B_\theta}{\partial \psi} - \frac{r \omega F B_\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + r \omega B_\theta \frac{dF}{d\psi} - F r \omega \frac{\partial B_\theta}{\partial \psi} + r \rho \omega \frac{d\omega}{d\psi} \right) \\
 & = -r \omega \frac{F}{\rho} B_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + r \omega B_\theta \frac{dF}{d\psi} + r \rho \omega \frac{d\omega}{d\psi}.
 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \right\} \text{(I.1)}$$

Sustituyendo (I.1) en la expresión original:

$$\begin{aligned}
 (\dots) & = \left(\frac{F}{\rho} B^2 + r \omega B_\theta \right) \frac{dF}{d\psi} + \frac{B_\theta}{r} \frac{dG}{d\psi} + (r B_\theta F + r \rho \omega) \frac{d\omega}{d\psi} \\
 & = (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{dF}{d\psi} + \frac{B_\theta}{r} \frac{dG}{d\psi} + r \rho \left(\frac{F}{\rho} B_\theta + r \omega \right) \frac{d\omega}{d\psi} \\
 & = (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{dF}{d\psi} + \frac{B_\theta}{r} \frac{dG}{d\psi} + r \rho v_\theta \frac{d\omega}{d\psi}.
 \end{aligned}$$

que es el resultado esperado.

APENDICE II

LA ANALOGIA HIDRODINAMICA.

Es de interés investigar una analogía entre un flujo estacionario de un fluido incompresible y el flujo estacionario magnetohidrodinámico.

En la dinámica de fluidos se tiene para un flujo incompresible:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (\text{II.1})$$

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}. \quad (\text{II.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (\text{II.3})$$

donde $\rho \vec{F}$ es la densidad de fuerzas externas, μ es el coeficiente de viscosidad y $\vec{\Omega}$ la vorticidad. Si se considera el caso estacionario, sin viscosidad y en ausencia de fuerzas externas, la (II.1) se convierte en $\rho (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p$

o bien $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2\rho} \right).$ (II.4)

para densidad constante.

Así, la expresión (II.4) puede tomarse como formalmente equivalente a (1.22) si se hace la sustitución: $\vec{v} \rightarrow \vec{B}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{j},$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2\rho} \rightarrow \phi.$$

En el problema magnetohidrodinámico se requiere como condición de frontera que la superficie del plasma sea una superficie magnética, o que el campo sea paralelo a una pared perfectamente conductora. Análogamente, en el correspondiente problema hidrodinámico se tiene el caso del jet-libre o de fronteras rígidas con deslizamiento libre (Thompson, 1964. Shafranov, 1966).

Luego, una analogía del plasma confinado es dada por un anillo de vórtice o un vórtice esférico de Hill.

Las líneas de corriente señaladas en la fig. II.1 pueden obtenerse, aproximadamente, por la superposición de las correspondientes a un campo de velocidades axial uniforme del tipo

$-\frac{k}{4\pi a} \log\left(\frac{a}{\epsilon}\right)$ sobre las producidas por el flujo asociado con una única línea de vórtice circular para un fluido que se toma en

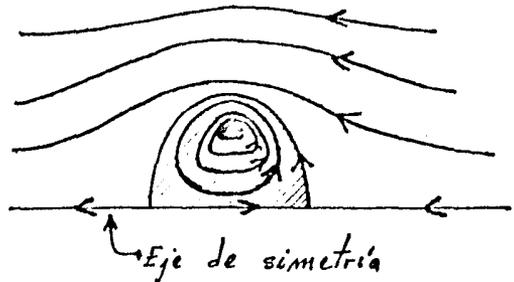
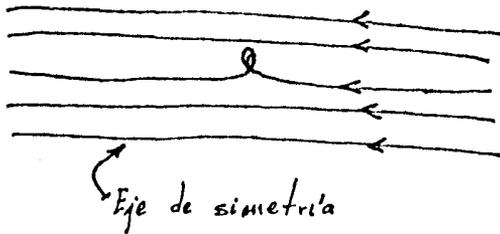


Figura II.1

Líneas de corriente de un flujo estacionario para un anillo de vórtice para varios valores pequeños de ϵ/a . La zona interior negra indica el núcleo de la vorticidad. La zona sombreada señala el fluido arrastrado con el anillo.



reposo en infinito (vea fig. II.2). En la expresión anterior k es la intensidad, a^{-1} la curvatura constante del tubo de vórtice y ϵ es el radio pequeño de la sección transversal.

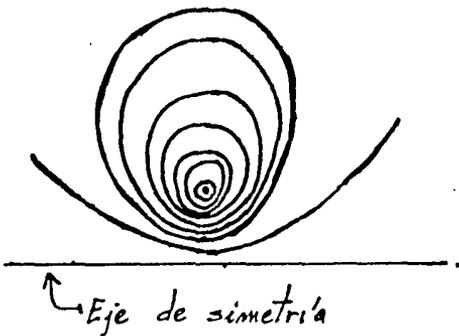


Fig. II.2

En el caso del vórtice esférico de Hill se tienen las líneas como en la figura II.3.

En este caso la función de corriente ψ es cero en $x^2 + \sigma^2 = a^2$, esfera de radio a , y en el interior de la esfera ψ está

dada por (Batchelor, 1970) :

$$\psi = \frac{1}{10} \Delta \sigma^2 (a^2 - x^2 - \sigma^2) \quad (\text{II.5})$$

estando dada la distribución de vorticidad Ω por

$$\Omega = \Delta \sigma \quad (\text{II.6})$$

con A una constante con el mismo valor para todas las líneas de corriente en el interior de la esfera.

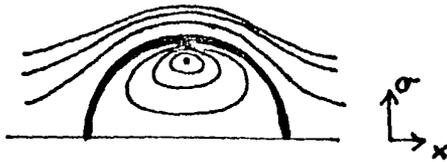


Fig. II.3

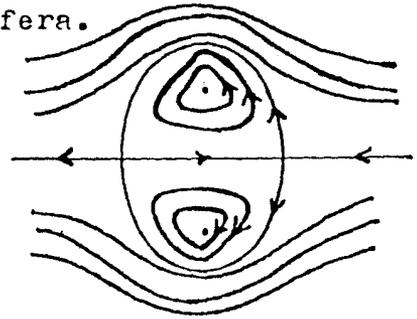


Fig. II.4

También se tiene cierta analogía con el caso del flujo debido a dos vórtices puntuales de intensidades κ y $-\kappa$ (vea fig. II.4) y con el flujo estacionario debido a una vorticidad proporcional ⁽¹⁾ a $J_1(kr) \text{sen } \theta$ ($r \leq a, ka = 3.83$) más una corriente uniforme (vea fig. II.5)

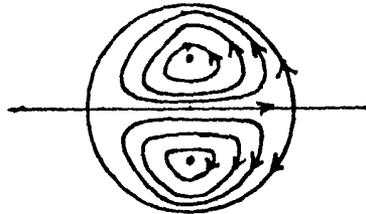


Fig. II.5

(1) Para este caso se supone que dentro de la zona de vorticidad no-nula $\Omega = k^2 \psi$, donde k es una constante. Así, en coordenadas polares la ecuación para la vorticidad lleva a que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -k^2 \psi$. Se busca una solución $\psi \propto \text{sen } \theta$ y se obtiene $\psi = C J_1(kr) \text{sen } \theta$.

REFERENCIAS

-
- Alexandroff, P. y Hopf, H. Topologie. Springer, Berlín 1935
p.552, Satz III.
- Abraham, R. y Marsden, J. Foundations of Mechanics.
Benjamin 1978.
- Bateman, G. MHD instabilities. M.I.T. Press 1978.
- Batchelor, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics.
Cambridge University Press 1970.
- Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D. y Kulsrud, R.M.
Proc.Roy.Soc.(London) A244, 17(1958).
- Boozer, A.H. Phys. Fluids 26(5), Mayo 1983; p. 1288.
- Brau, K. et al. Nuclear Fusion, vol.23. No.12(1983)1643.
- Chandrasekhar, S. Proc.Nat.Acad.Sci. 44, 842(1958).
- Copenhaver, C. Phys. Fluids 26(9), Sep. 1983, p.2635.
- Cowling, T.G. Magnetohidrodinámica. Alhambra 1968.
- Currie, J.G. Fundamental Mechanics of Fluids.
McGraw Hill, N.Y. 1974.
- Ferraro, V.C.A. Monthly Not.Roy.Astron.Soc.44, 842(1958).
- Feynman et al. The Feynman Lectures on Physics, vol.II.
Addison Wesley 1975.
- Garabedian, P.R. Partial Differential Equations.
Wiley and Sons N.Y. 1964.
- Hameiri, E. Phys. Fluids 26(1), Enero 1983, p.230.
- Halliday y Resnick. Física. CECSA. 1976.
- Hildebrand. Advanced Calculus for Applications.
Prentice-Hall 1962.
- Isler, R.C., Murray, L.E. et al. Phys.Rev.Letters.
47(9)(1981)649.
- Jackson, J.D. Classical Electrodynamics. 2a ed.
John Wiley & Sons 1975.

- Krall y Trivelpiece. Principles of Plasma Physics.
McGraw Hill 1973.
- Kruskal, M. "Equilibrium of a Magnetically Confined
Plasma in a Toroid". I.A.E.A. Vienna 1965
pp. 115-136.
- Lehnert, B. Rotating Plasmas (Review Paper). Nuclear
Fusion 1971, p.485.
- Miyamoto, K. Plasma Physics for Nuclear Fusion.
M.I.T. Press 1980.
- Marsden, J.E. y McCracken, M. The Hopf Bifurcation and
Its Applications. Springer-Verlag, N.Y.
1976.
- Smirnov, M.M. Problemas de Ecuaciones de la Física
Matemática. MIR, Moscú 1976.
- Shafranov, V.D. Rev. Plasma Phys. vol.12. Consultants
Bureau, N.Y. 1966, pp. 103-151.
- Solov'ev, L.S. Rev Plasma Phys. vol.6. Consultants
Bureau, N.Y. 1975, pp. 239-331.
- Solov'ev, L.S. y Shafranov, V.D. Rev. Plasma Phys. vol.5.
Consultants Bureau, N.Y. 1970, pp.1-247.
- Stacey, W.M.Jr. y Sigmar, D.J. Nuclear Fusion. 19(12)
(1979)1665.
- Suckewer, S., Eubank, H.P. et al. Phys. Rev Letters. 43 (3)
(1979)207.
- Swanson, W.M. Fluid Mechanics. Holt, Rinehart y Winston 1970
- Tompson, W.B. An Introduction to Plasma Physics.
Reading Mass. Addison-Wesley 1964.
- Woltjer, L. Proc. Nat. Acad. Sci. 44 (1958)833.
----- Astrophys. J. 130(1959)400.
----- idem. p. 405.
- Wong, S.K. y Burrell, K.H. Phys. Fluids. 25(10) (1982)1863.