UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Sobre la Dinámica Clásica No Relativista de Partículas Cargadas"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE;

FISICO

PRESENTA

MARTHA LORENA ZOGAIB ACHCAR

MEXICO, D. F. 198

I N D I C E

CAPITULO III.- La Ecuación Integrodiferencial de Abraham-Lorentz (EIDAL)

CAPITULO IV.- La Ecuación No Lineal para Partícula Extendida

LOS AGRADECIMIENTOS DE RIGOR

Esta es mi primera presentación en sociedad. Obligada, o no, un día me ví en la penosa situación de tesista, y traté de hacerlo lo mejor que pude. Si a alguno se le ocurre leer el contenido de esta tesis, podrá juzgar qué tan bien desempeñé esa labor. Mis primeros agradecimientos van destinados, pues, a todos esos amabilísimos lectores.

Todas las ideas que aquí se expresan, son el resultado de varios meses de trabajo. Sin embargo, hubieron otros resultados que se han quedado en mí como parte esencial de mi formación como futura trabajadora de ese arte que es la Ciencia; son estos los más importantes, qué pena que no los podamos compartir.

Pero no he estado sola en esta labor, sino que hubo alguien a mi lado echándole ganas al asunto. Sí, porque mi cuate y profesor José Luis Jiménez tuvo la osadía de aceptar dirigirme esta tesis, con lo cual se echó la soga al cuello pues tuvo que trabajar el doble que yo.

Es por eso que quiero agradecer su paciencia y confianza, así como el haberme permitido redactar esta tesis con un lenguaje coloquial en algunas partes, lo cual es poco usual en estos casos; cabe señalar que en sobradas ocasiones él mismo participó resaltando o sugiriendo algunas de las frases con ese tono cotidiano que tanta falta hace en los textos científicos. Aprovecho el viaje para agradecer todo el interés que ha puesto en mi formación a través de sus cursos, asesorías y charlas extraescolares. Gracias, bigotón.

Pero ya entrados en gastos, quiero extender mis agradecimientos a todos esos locos con los que a diario platico sobre física y esas cosas. En particular, quiero mencionar a mis cuates: Alberto, Carlitos "el colega", César, Armando, Vinicio, Juan Carlos, José Luis Ponce, Salvador, "la cursi" , Jorge Hirsch, Eduardo, Rufino y Gaby. Se les quiere a todos.

Asímismo, no puedo dejar de agradecer a mis sinodales: Juan Manuel Lozano, Arturo Olvera, Nacho Campos y Germinal Cocho, el tener que leer mi tesis, criticarla, y por si fuera poco, después de eso ir a fletarse mi discurso el día del examen. En particular quiero agradecer a Arturo su largas horas de trabajo en la computadora para sacar adelante parte de este trabajo, y al "viejo" Lozano, que ni está tan viejo, y quien fue el primero en enseñarme que todo esto de hacer física es algo divertido. Después de haber terminado esta tesis, estoy segura que no me mintió.

Por otra parte, quiero que quede por escrito que estoy muy agradecida con Alberto, con Jorge y con Elena (mi hermanísima), por su ayuda en la elaboración de esta tesis, como el librito que ahora es. Deveras que se han portado de poca, como se dice por ahí. En particular a Elena le debemos que es-

A MANERA DE INTRODUCCION

"El que escribe al último
escribe mejor
Yo apenas empiezo"
E. Huerta

Nos gustan los retos. En esta ocasión se nos planteó uno muy interesante: escribir una tesis de licenciatura, con un mínimo de ecuaciones, cuyo eje principal fuera la discusión y el entendimiento de algunos conceptos expresados en los textos, a veces sin justificación alguna. Y es que a menudo se nos exhorta a ser críticos y no creer "a ciegas" todo lo que se dice, aunque sea una "vaca sagrada" nuestro blanco de ataque. Y es que también a menudo se nos olvida ser críticos, y caemos en el error de la pasividad.

Así, por ejemplo, un buen día se nos enseña que existe una ecuación fulana, se nos presenta su deducción como ráfaga, y si bien nos va, se nos menciona su grado de validez y sus limitaciones. Posteriormente, esa misma persona aplica esa misma ecuación precisamente ahí donde la ecuación no es válida. Si se nos ocurre protestar, se nos dice que lo aceptemos porque la fulana es la única ecuación que se conoce, o bien, que propongamos otra (en fin que llevan años tratando de hacerlo, y no han podido).

¿Es esa una buena manera de proceder?.Nosotros pensamos que no. Por esta razón nos pareció interesante y divertido adoptar una de esas ecuaciones fulanas, la de Abraham-Lorentz, y ponernos a jugar con ella. Vaya, que la idea no es ociosa si se piensa que no existe hasta la fecha una ecuación de movimiento clásica que describa correctamente la dinámica de las cargas en movimiento. Es más, ni siquiera se sabe exactamente cómo demonios está constituida una carga. ¿Por qué entonces no atacar este problema, averiguar qué es lo que la Electrodinámica tal cual nos dice y llevar esto hasta donde se deje manejar?

Digamos, pues, que ese fue nuestro objetivo al iniciar esta tesis, con la suerte que obtuvimos además muy buenas ganancias: una buena revisión de la literatura (de la cual algo se nos habrá pegado), una fuerte participación personal (para irnos iniciando en esto de la investigación), la oportunidad de un trabajo en equipo (que nos obliga a ser más organizados y cooperativos), y la ocasión de aprender a expresar nuestras ideas de una manera clara y accesible a los demás. Esperamos haber logrado esto último, pues de lo contrario corremos el riesgo de que se nos considere, o bien, confusos, o bien, genios. Así no se vale, pues. Pero volvamos a nuestro objetivo...

Nuestro trabajo será presentado, por así decirlo, de una manera inductiva. En el primer capítulo llevaremos a cabo una revisión acerca de la ecuación de Abraham-Lorentz, la cual constituye una primera aproximación a la dinámica de la partícula cargada. En el siguiente capítulo desarrollaremos una ecuación más general que la de Abraham-Lorentz, pero aún aproximada; daremos una amplia discusión sobre sus ventajas, sus limitaciones y algunos resultados novedosos que de ella se desprenden. Dejando parcialmente olvidada esta generalización, en el capítulo III nos dedicaremos a estudiar otro tipo de generalización a la ecuación de Abraham-Lorentz, que es la Ecuación Integrodiferencial (EIDAL), válida para el caso más general de partícula extendida. El siguiente capítulo estará dedicado a unificar las ecuaciones presentadas en los capítulos II y III; esto conducirá al establecimiento de una expresión más general en la cual queden contenidos todos los efectos de la radiación de una partícula cargada sobre su propio movimiento. Finalmente pasaremos a una recapitulación de todo lo anterior, de la que extraeremos algunas conclusiones. ¡Manos a la obra!

CAPITULO I

"LA ECUACION DE ABRAHAM-LORENTZ"

"El que
Esté libre
De influencias
Que tire
La primera
Metáfora"

E. Huerta

§1.- INTRODUCCION.

Desde hace unos ochenta años son conocidas las dificultades alrededor de la ecuación de Abraham-Lorentz. El desarrollo histórico de este añejo problema es bastante interesante para todos los aficionados a estudiar los orígenes mismos del quehacer científico. Nosotros no trabajaremos en esa línea, tan sólo nos limitaremos a sugerir algunas fuentes al respecto: ROHRLICH, 1965 y 1973, las cuales dan una buena idea de la problemática alrededor de dicha ecuación; esto en la inteligencia de que, como es de esperarse, ese autor se encuentra polarizado según su muy peculiar punto de vista, el cual no compartimos del todo. Además, dado el carácter de esta tesis, hemos preferido no meternos en problemas con algunos de nuestros temibles sinodales, entre los que se encuentra un experto en la historia de la Física de esta época, y uno en la de más para atrás. Para qué buscarle. Es mejor, entonces, que entremos de una vez en materia.

Como es sabido, en general, una carga acelerada radía. Esta radiación transporta energía e impulso, de tal forma que el movimiento mismo de la partícula debe verse afectado. Ahora bien, si partimos del supuesto de que la partícula no constituye una fuente infinita de energía, es de esperarse que el efecto de la radiación se manifieste en una disminución de su energía cinética, es decir, que aparezca una fuerza de frenado debido a la radiación.

Para determinar el movimiento de la partícula es necesario, pues, conocer cuál es esa fuerza de frenado o reacción por radiación[1]. Dado que todo esto está íntimamente ligado con la naturaleza (i.e. estructura) de la partícula, la expresión para la fuerza de frenado va a depender fuertemente del modelo utilizado. A este respecto, cabe aclarar que aquí se trabajará con un modelo clásico (no cuántico), no relativista.

Como punto de partida se supone, ya que no se conoce otro tipo de descripción, que el movimiento de la partícula cargada puede expresarse mediante una ecuación dinámica tipo newtoniano, a saber

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} + \bar{F}_{rad}, \tag{1}$$

[1] Si se quiere ser más formal y profundo, se debe cuestionar acerca de los mecanismos de emisión de la radiación.

donde $\bar{F}_{rad}$ es la fuerza de frenado por radiación a determinarse.

Se debe hacer notar, sin embargo, que el uso de este tipo de ecuación, tan bien establecida en la dinámica newtoniana, representa en sí una hipótesis que puede ser muy fuerte para los propósitos que se persiguen.

Ahora bien, ¿qué tipo de propiedades se espera que satisfaga $\bar{F}_{rad}$?:

a) Tiene que anularse para movimientos con velocidad constante, pues sólo hay radiación si $\dot{v} \neq 0$.

b) Debe ser proporcional a q^2 , donde q es la carga de la partícula; esto por dos razones: (i) el signo de la carga no debe afectar los efectos radiativos, y (ii) la potencia radiada es proporcional a q^2 .

c) De alguna manera debe de reflejar la información que caracteriza a los campos electromagnéticos. En particular, dada la finitud de la velocidad de propagación de las señales electromagnéticas, es de esperarse que el retardo de éstas tenga algún efecto en la ecuación de movimiento.

Si se tiene en cuenta lo anterior, ahora surge la pregunta acerca del o los procedimientos para su deducción.

Históricamente se pensó que el origen de la masa era electromagnético; por esta razón, resulta razonable utilizar las ecuaciones de conservación de energía e impulso, tan bien establecidas en la Electrodinámica, para obtener de ellas una ecuación de movimiento del tipo (1), y así conocer la forma explícita de $\bar{F}_{rad}$.

Es precisamente de este tipo de ideas como diversos autores (Abraham (1903); Lorentz (1904 y 1906); Planck (1898)) llegaron a que:

$$\bar{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{v}} . \qquad (2)$$

Esta expresión para la fuerza dio lugar a la ecuación conocida como la de Abraham-Lorentz (AL) :

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{v}} ,\ [2] \qquad (3)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden en t para la velocidad. Esta última característica da lugar a las diversas dificultades que la han caracterizado y que serán discutidas brevemente a continuación, con el objeto de futuras referencias.

§2.- DIFICULTADES DE LA ECUACION DE ABRAHAM-LORENTZ.

Las dificultades que caracterizan a la ecuación de AL han sido mencionadas, en mayor o menor grado, a lo largo de

[2] Más adelante discutiremos el significado de m .

la literatura que existe al respecto. No obstante, dada la importancia que tiene para nosotros de acuerdo con los objetivos de nuestro trabajo, consideramos necesario incluir aquí un resumen de dichas dificultades, a saber:

1) En ella aparece una tercera derivada de la posición con respecto al tiempo, lo cual hace necesario el conocer una condición inicial adicional: - la aceleración inicial. Esto contrasta claramente con la suposición de que la ecuación de movimiento es de tipo newtoniano, pues para resolver estas últimas sólo basta con conocer la posición y la velocidad iniciales.

2) No queda claro el balance energético: esta ecuación predice una fuerza de frenado nula para movimientos uniformemente acelerados; sin embargo, de la expresión de Larmor para la potencia radiada - ($P = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2$) se ve que sí existe radiación. Así, por un lado se obtiene que sí hay radiación, pero por el otro, que ésta no ejerce efecto alguno sobre la partícula. Ambos resultados son contradictorios.

3) Si la fuerza externa es nula, se obtiene como solución $\dot{v} = \dot{v}_0 e^{t/\tau_0}$ ($\tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}$), la cual diverge - para tiempos muy grandes. Pero esto contrasta con

la experiencia adquirida en la dinámica newtoniana, en la cual, la aceleración es cero para fuerzas externas nulas. Este hecho, compatible con lo ya mencionado en el inciso (1), establece perfectamente el carácter no newtoniano de la ecuación (3).

4) Aprovechando que se cuenta con una condición inicial adicional, suele fijársela de tal modo que se elimine el problema anterior, obteniéndose como solución:

$$\dot{\bar{v}}(t) = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} e^{-s}\,\bar{F}(t+s\tau_0)\,ds,$$

con $s>0$ (p.e. JACKSON, 1975). Ya que esta expresión predice que la aceleración al tiempo t es una función del tiempo posterior $t+s\tau_0$, esta es una solución claramente acausal de la ecuación de AL. Esto sorprende, pues la Electrodinámica, punto de partida de esa ecuación, es perfectamente causal.

Algunos autores (p.e. ROHRLICH, 1965) aseguran que este hecho muestra una clara inconsistencia de la Electrodinámica misma. Otros (JACKSON, 1975; etc...) le restan importancia argumentando que esta violación de la causalidad no puede ser observada macroscópicamente ($\tau_0 \sim 10^{-24}$ seg), de tal suerte que en esa escala de descripción el modelo satisface los requerimentos de causalidad. Nosotros nos inclinamos a pensar que simplemente se ha cometido un error al fijar la condición inicial adicional de la manera que se hizo, es decir, esa selección para la aceleración inicial nos parece incorrecta.

5) A pesar de que aún no lo hemos mencionado, en la ecuación (3) $m = \frac{4U}{3c^2} = \frac{4}{3} m_e$; se puede demostrar que esta dificultad desaparece usando el límite no relativista de la expresión covariante para el momento electromagnético[3].

Algo muy importante, y que no siempre suele subrayarse, es el hecho de que la ecuación (3) se obtiene al tomar el límite para partículas muy pequeñas, despreciándose con ello un infinito de términos; más aún, suele considerársele como "exacta" para partícula puntual. Sin embargo, el tomar ese límite da origen a dos problemas bastante serios: (i) la masa electromagnética diverge, ya que ésta es del orden de $\frac{e^2}{ac^2}$, con a un radio característico de la distribución de carga, y (ii) no aparecen términos no lineales, independientes de a , y que han sido omitidos desde su deducción misma, como veremos en los

[3] En el capítulo III ampliaremos este punto.

próximos capítulos.

Es conveniente hacer un último comentario, y es que si bien el límite para partícula puntual da lugar a los problemas ya mencionados, el considerar la partícula extendida también genera dificultades: no queda claro qué tipo de fuerzas (de origen no electromagnético) mantienen estable a la distribución de carga. Nosotros echaremos este problema en el "baúl de las complicaciones a posteriori" (vamos despacito, señores).

Para finalizar este capítulo y dado que en lo particular nos interesa proponer, con un mínimo de aproximaciones, una ecuación de movimiento para partícula cargada, a continuación mostraremos algunas de las deducciones más comunes de la ecuación de AL. Asímismo, trataremos de señalar con todo detalle las suposiciones de que hicieron uso, a fin de tenerlas presentes a lo largo de los siguientes capítulos.

§3.- ALGUNAS DEDUCCIONES.

§3.1 .-LA DEDUCCION HEURISTICA DE PLANCK.

Este método (JACKSON,1975; EYGES,1980; PAULI,1981) está basado en la idea de balance energético, a saber, el trabajo hecho sobre la partícula por la fuerza de frenado por radiación, debe ser igual a la energía radiada por ella misma. Esta energía se obtiene a partir de la expresión de Larmor para la potencia radiada, es decir,

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_{rad} \cdot \bar{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2\, dt \,. \tag{4}$$

Ahora bien, el modelo utilizado es el de un electrón ligado elásticamente a un átomo, o sea, el de un oscilador armónico. Dado que en este caso la velocidad y la aceleración son funciones periódicas del tiempo, al integrar por partes el lado derecho de la ecuación (4) se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \bar{F}_{rad} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\bar{v}} \right\} \cdot \bar{v}\, dt = 0 \,, \tag{5}$$

que se anula en dos casos: cuando $\bar{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\bar{v}}$, o bien, cuando tanto $\bar{F}_{rad}$ como $\ddot{\bar{v}}$ son perpendiculares a la velocidad (esto para t_1 y t_2 arbitrarios). Usualmente se escoge, sin mayor discusión, la primera opción.

Este método, si bien simple, ha hecho uso de algunas aproximaciones a nuestro juicio delicadas, las cuales discutiremos a continuación.

Habiendo partido de un balance energético, Planck encuentra una expresión para la fuerza de frenado por radiación, tomando como modelo a un electrón ligado a un átomo. Esta fuerza debería ser lo suficientemente grande para que pudieran ser considerados los efectos de la radiación, pero a su vez, lo suficientemente pequeña para que no se viera afectado el movimien to "armónico" de la partícula. Esto último es equivalente a pedir que tanto $\vec{v}$ como $\dot{\vec{v}}$ deben seguir siendo funciones armónicas del tiempo, aunque la partícula radíe (¡sic!), de tal manera que el producto $\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}$,evaluado en un período, sea nulo. Sin embargo, también cabe la posibilidad de considerar cualquier movimiento que satisfaga la condición $\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}=0$, cosa que no hace más general la deducción,puesto que esto sólo se satisface para el movimiento circular uniforme, y este es un caso particular de movimiento armónico.

Aunada a las limitaciones que impone el estudio de movimientos de carácter tan restringido, está la ambigüedad asociada con el tipo de estructura que la partícula debe poseer; y es que en este modelo no se ha considerado, para nada, la forma, las dimensiones, la facha, pues, de la partícula en cuestión.

Pero existen aún más puntos delicados en esta deducción, bien llamada "heurística". En ningún momento se han tomado en cuenta los efectos retardados de la radiación, ¡tal parece que la partícula se "entera" instantáneamente de esos efectos! Esto no es de esperarse si recordamos que loscampos mismos de radiación son, en sí, funciones retardadas.

Adicionalmente a lo anterior, ahí se ha manejado una idea que no acaba de convencernos, y es la siguiente: se está acostumbrado a construir ecuaciones de balance a partir de expresiones ya conocidas para la fuerza; sin embargo, en esta de ducción se ha trabajado precisamente en el orden inverso: dada una ecuación de balance se "contruye" una expresión para la fuerza. Si bien a priori parecería que el problema es simétrico, un análisis más detallado puede hacernos dudar. Seamos más explícitos. En primer lugar, el uso de la expresión de Larmor para la potencia radiada limita nuestro estudio a movimientos bastante lentos ($v \ll c$)(JACKSON, 1975). Por otra parte, el concluir de la expresión (5) que $\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}}$, tiene sentido solamente si se escogen intervalos de tiempo arbitrarios, y no exclusivamente aquellos para los cuales $\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}$ tenga el mismo valor al evaluarse en los límites (EYGES, 1980). Más aún, para que pueda establecerse una ecuación de balance, es necesario conocer perfectamente las características del fenómeno en su totalidad; es decir, que se debe tener un conocimiento profundo de todas las magnitudes físicas que entran en juego, y no tratar de adivinarlas de ahí.

En base a todo lo anterior podemos concluir que esta deducción, si bien muy sugerente, es bastante aproximada y debe servir sólo como un primer vistazo al problema que nos ocupa.

Dado que una de las deficiencias de la deducción anterior está relacionada con el hecho de no tomar en cuenta los efectos retardados de la partícula sobre sí misma, a continuación presentaremos dos deducciones en las cuales esos efectos sí han sido contemplados; es más, son parte esencial del mismo desarrollo. No obstante, también en ellas encontraremos serias dificultades.

§3.2.- LA DEDUCCION DE LORENTZ.

Lorentz toma como modelo (JACKSON, 1975; PAULI, 1981; ...) a una partícula con movimiento arbitrario, en presencia de campos electromagnéticos tanto externos como propios; estos últimos, producidos por la partícula, van a interactuar a su vez con ella misma.

La partícula se considera dotada de una distribución localizada de carga, rígida y con simetría esférica; esto último para facilitar los cálculos. Asímismo, se hace la consideración de que todo el impulso de la partícula es de origen electromagnético, y éste se conserva ($\frac{d\bar{G}}{dt} = 0$)[4].

Esto último es equivalente a pedir que la fuerza total - Fuerza de Lorentz - sea nula:

$$\int \left(\rho \bar{E} + \frac{1}{c}\, \bar{j} \times \bar{B}\right) dVol = 0\,, \tag{6}$$

donde

$$\bar{E} = \bar{E}_{ext} + \bar{E}_{prop}$$

$$\bar{B} = \bar{B}_{ext} + \bar{B}_{prop}\,, \tag{7}$$

con $\bar{E}_{prop}$ y $\bar{B}_{prop}$ los campos generados por la partícula en movimiento.

Denotando por $\bar{F}_{ext}$ la contribución a la fuerza -

[4]Si se quiere tomar en cuenta una contribución no electromagnética, entonces se debe satisfacer que $\frac{d\bar{G}}{dt} + \frac{d\bar{P}}{dt} = 0$

proveniente de los campos externos, la integral (6) se puede escribir como:

$$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{p}}{dt} = -\int \left(\rho \bar{E}_{prop} + \frac{\bar{j}}{c} \times B_{prop}\right) dVol, \qquad (8)$$

donde $d\bar{p}/dt$ es la razón de cambio del impulso de la partícula.

Para calcular la autofuerza (dada por la integral en (8)) se considera que la partícula se encuentra instantáneamente en reposo, eliminándose, de entrada, las contribuciones provenientes del campo magnético[5].

Así, para una partícula instantáneamente en reposo, la ecuación (8) se reduce a:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\int \rho \, \bar{E}_{prop} \, dVol. \qquad (9)$$

En ella, $\bar{E}_{prop}$ es función de los potenciales retardados ($\bar{E}_{prop} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$) y estos, a su vez, de las funciones retardadas $[\rho]_{ret}$ y $[j]_{ret}$:

$$\phi(\bar{r},t) = \int \frac{[\rho(r',t')]_{ret}}{R} d^3r'$$

$$\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{[\bar{j}(r',t')]_{ret}}{R} d^3r', \qquad (10)$$

donde $R = |\bar{r}-\bar{r}'|$.

Ahora bien, dado que la expresión para la autofuerza resulta dependiente del tiempo retardado $t' = t - R/c$, cualquier solución a esa ecuación debe de contener información acerca de toda la historia anterior de la partícula. Pero esa historia

[5] Se argumenta generalmente que este paso se hace por simplicidad (sic).

se desconoce.

Lorentz propone eliminar el retardo mediante un desarrollo en serie alrededor del tiempo actual t . Por esto supone que ρ y $\bar{\gamma}$ no varían bruscamente en el tiempo - R/c que le toma a la señal viajar desde la posición $\bar{r}'(t')$ en que fue emitida hasta la posición $\bar{r}(t)$ en la que se recibe.

Después de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene finalmente que:

$$\frac{d\bar{p}}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n+2}}\,\frac{2}{3n!}\,\frac{\partial^{n+1}\bar{v}}{\partial t^{n+1}}\int d^3r'\int d^3r\,\rho(r)\rho(r')\,R^{n-1}, \tag{11}$$

donde se ha supuesto que R no varía, prácticamente, en el -- tiempo.

Las contribuciones a la autofuerza provenientes de - cada término en (11) son:

$$(\bar{F})_0 = 4/3\ m_e\,\dot{\bar{v}},$$
$$(\bar{F})_1 = -\frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{\bar{v}},$$
$$(\bar{F})_k = a^{k-1}\,\overset{(k+1)}{\bar{v}},$$

donde se ha utilizado la definición convencional de la masa -- electromagnética m_e :

$$m_e = \frac{U}{c^2} = \frac{1}{2c^2}\int d^3r\int d^3r'\,\frac{\rho(r)\,\rho(r')}{R}\ . \tag{12}$$

De modo que la ecuación de AL se obtiene tomando el límite para partícula puntual ($a\to 0$)[6] :

$$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \left(\frac{4}{3}m_e\right)\dot{\bar{v}} - \frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{\bar{v}},$$

[6] Para asegurar la convergencia de esta serie, se ha supuesto que $\overset{(k)}{v} > \left(\frac{a}{c}\right)\overset{(k+1)}{v}$ (SOMMERFELD, 1952).

o bien

$$\frac{4}{3} m_e \dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\bar{v}}. \tag{13}$$

Ahora bien, independientemente del hecho de que esta ecuación presente las dificultades expuestas en la sección anterior (§2), nosotros quisiéramos señalar algunos puntos delicados concernientes a este desarrollo en particular. Entremos en materia, pues.

Al tomar a la partícula instantáneamente en reposo se eliminan, por una parte, las contribuciones de origen magnético, las cuales juegan un papel muy importante en la energía de radiación; por otra parte, y este parece ser el punto más crítico, desaparecen términos que contienen a la velocidad. Esto quiere decir simplemente que la ecuación (13) representa tan sólo la descripción del movimiento vista desde un marco de referencia montado sobre la partícula. ¡Pero esto es grave, señores! . Lo que se busca es, precisamente, describir los efectos de autointeracción de la partícula, vistos desde afuera de ella (la famosa referencia "laboratorio"). Ambas descripciones sólo coinciden en el límite de muy bajas velocidades. ¡Ah! entonces ya no es tan general la ecuación de AL. Más adelante volveremos a retomar este punto. Baste, por el momento, con tenerlo presente.

Una de las consecuencias de tomar a la partícula instantáneamente en reposo es la desaparición de algunos términos no lineales, independientes del tamaño de la distribución[7], que en principio pueden aportar contribuciones significativas e interesantes; esto no suele discutirse en los textos.

Otra aproximación, con la cual también se ha eliminado del juego a los términos no lineales, está relacionada con el hecho de despreciar la dependencia temporal de R : ¡también ella es una cantidad retardada, no una constante temporal! . Esto hace que el desarrollo en serie utilizado sea incorrecto, o si se quiere, tan sólo aproximado. Esta última crítica es precisamente la motivación que dará lugar a los desarrollos del capítulo IV.

Podemos hacer un último comentario en relación con el desarrollo en serie de las cantidades retardadas. Aún suponiendo que el desarrollo utilizado fuera el correcto, se debe tener presente que en él se deben conservar todos los términos ¡y no sólo los dos primeros! . Nos parece incorrecto el hecho de recortar el desarrollo (11), debido a que al eliminar un número infinito de términos se está echando a un lado toda la información física que ellos contienen sobre el fenómeno mismo de la radiación. De hecho ya se ha demostrado (DABOUL, 1974) que si se recorta dicha serie a cualquier orden $n \geqslant 3$, se obtienen siempre soluciones divergentes. Esta es precisamente una de las ventajas que tiene el expresar la ecuación de movimiento como una integrodiferencial con "memoria", como lo haremos ver en el capítulo III.

[7] De modo que sobreviven en el límite $a \to 0$

Para finalizar con esta sección, estudiaremos una última deducción, bastante análoga a ésta, pero que presenta y aclara algunos puntos interesantes.

§3.3. LA DEDUCCION SEGUN PANOFSKI.

Esta deducción (PANOFSKI, 1962) está basada en la idea original de Lorentz, según la cual es necesario evaluar la interacción del campo de radiación de una parte del electrón con todas las restantes. La distribución de carga es considerada, nuevamente, rígida y con simetría esférica. Sin embargo, en lugar de trabajarse con el campo $\bar{E}$ como función de los potenciales retardados, aquí se va a suponer que los elementos de carga son prácticamente puntuales, de modo que se usa directamente el campo eléctrico derivado de los potenciales de Liénard-Wiechert para partícula puntual.

Dada la analogía de ambos métodos, nuevamente se introduce la hipótesis de que el elemento dq de carga que va a recibir la señal emitida por dq' un tiempo $t - R/c$ anterior, está instantáneamente en reposo, o sea, $\bar{v}(t) = 0$; esto también elimina la contribución magnética.

De esta manera, el campo que "siente" el elemento dq debido al elemento dq' está dado por (EYGES, 1980):

$$d\bar{E}(t) = dq' \left[\frac{(\hat{n}-\bar{\beta})(1-\beta^2)}{S^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times ((\hat{n}-\bar{\beta}) \times \dot{\bar{\beta}})}{c\, S^3 R} \right]_{ret} , \qquad (14)$$

donde, como es usual, $\hat{n} = \frac{\bar{R}}{R}$, $\bar{\beta} = \frac{\bar{v}}{c}$ y $S = (1 - \hat{n}\cdot\bar{\beta})$.

Nuevamente aquí se propone un desarrollo en serie de Taylor para eliminar el retardo en $\bar{v}$ y $\dot{\bar{v}}$, suponiendo que no varían bruscamente en el tiempo que tarda la señal en cruzar la partícula. Así:

$$\bar{v}(t') = -\frac{R}{c}\dot{\bar{v}}(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{c}\right)^2\ddot{\bar{v}}(t) - \ldots$$

$$\dot{\bar{v}}(t') = \dot{\bar{v}}(t) - \frac{R}{c}\ddot{\bar{v}}(t) + \ldots, \tag{15}$$

recordando que $\bar{v}(t) = 0$.

Sustituyendo estos desarrollos en (14) y llevando la aproximación hasta orden c^{-3} (puesto que este orden es suficiente para obtener la ecuación de AL), se llega a que:

$$d\bar{E}(t) = dq'\left(-\frac{2(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}})\hat{n}}{Rc^2} + \frac{1}{2}\frac{(\hat{n}\cdot\ddot{\bar{v}})\hat{n}}{c^3} + \frac{\hat{n}}{R^2} + \frac{\ddot{\bar{v}}}{2c^3}\right).[8]$$

Dada la simetría esférica de la partícula, un promedio espacial lleva a que:

$$F = \iint dq\, dE = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{v}} - \frac{4}{3}m_e\dot{\bar{v}}, \tag{16}$$

donde se ha usado la definición (12) para la masa electromagnética.

Para concluir, las críticas que podemos aportar a esta deducción son básicamente las mismas que se hicieron en la sección anterior, siendo las más importantes la de suponer que $\bar{v}(t) = 0$ y la de no tomarse en cuenta la dependencia retardada de R. No obstante, hemos considerado de interés incluir este desarrollo debido a que sentará las bases del método que

[8] Aquí R sigue siendo una cantidad retardada, pero Panofski no lo usa.

seguiremos en el próximo capítulo.

En la próxima sección presentaremos una generalización covariante de la ecuación de AL, a fin de estudiar su parte espacial, la cual nos servirá para futuras comparaciones.

§4.- LA GENERALIZACION COVARIANTE.

Hemos seleccionado una deducción simple y directa -- (SOMMERFELD, 1952) de la generalización covariante, o de Lorentz -Dirac, con el fin de discutir brevemente las ideas físicas -- que hay detrás de ella.

El método es el siguiente. Se parte de la ecuación - dinámica:

$$m_0 a_\mu = F_\mu + R'_\mu \,, \tag{17}$$

donde a_μ es el cuadrivector aceleración, R'_μ el cuadrivector de fuerza de reacción por radiación y F_μ la cuadrifuerza relacionada con la fuerza de Lorentz K_μ por:

$$F_\mu = \gamma K_\mu \,, \tag{18}$$

con $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Adicionalmente, se sabe que tanto a_μ como F_μ deben ser perpendiculares a la línea de universo de la partícula, es decir,

$$v_\mu a^\mu = v_\lambda F^\lambda = 0 \,, \tag{19}$$

donde v_μ es la cuadrivelocidad. Tomando en cuenta (17) y (19) se concluye que:

$$v_\mu R'^\mu = 0 . \qquad (20)$$

Ahora bien, tomando como modelo la expresión (2) para la fuerza de reacción, puede parecer razonable el proponer:

$$R'_\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{a}_\mu , \qquad (21)$$

con $\dot{a}_\mu = \frac{da_\mu}{d\tau}$, donde τ es el tiempo propio de la partícula. Sin embargo, esta forma para R'_μ contradice, en el caso general, lo establecido en (20).

De este modo, se propone a R'_μ como una combinación lineal de $\dot{a}_\mu$ y v_μ , a saber:

$$R'_\mu = \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{a}_\mu + \alpha v_\mu) , \qquad (22)$$

donde $\alpha = -v_\mu \dot{a}^\mu / v_\lambda v^\lambda$ de acuerdo con (20) y (22). La forma explícita de α se obtiene tomando en cuenta que $v_\lambda v^\lambda = -c^2$ y que $\frac{d}{d\tau}(v_\mu a^\mu) = v_\lambda \dot{a}^\lambda + a_\nu a^\nu = 0$; así:

$$\alpha = -\frac{a_\nu a^\nu}{c^2} . \qquad (23)$$

Por lo tanto, R'_μ está dada por:

$$R'_\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\dot{a}_\mu - \frac{a_\lambda a^\lambda}{c^2} v_\mu \right) . \qquad (24)$$

Si se quiere considerar solamente la parte espacial de (24), la cual denotaremos por $\vec{R}'$, se debe hacer uso de la definición de los cuadrivectores

$$v = (\gamma \bar{v}, ic\gamma)$$
$$a = (\dot{\gamma}\bar{v} + \gamma\dot{\bar{v}}, ic\dot{\gamma}). \qquad (25)$$

Al tomar solamente la parte espacial de $\dot{a}$, v y la contribución espacio-temporal de a^2, a saber,

$$a^2 = a_\mu a^\mu = |\dot{\gamma}\bar{v} + \gamma\dot{\bar{v}}|^2 - c^2\dot{\gamma}^2,$$

se obtiene que:

$$\bar{R}' = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\gamma\ddot{\bar{v}} + \frac{2\gamma^3}{c^2}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}} + \frac{\gamma^3}{c^2}(\bar{v}\,\ddot{\bar{v}})\bar{v} + \frac{2\gamma^5}{c^4}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})^2\bar{v}\right). \qquad (26)$$

Ahora bien, consideramos necesario llevar a cabo aún dos modificaciones adicionales para fines de referencia posterior. La primera consiste en pasar del tiempo propio τ del electrón, desde el cual están referidos $\dot{\bar{v}}$ y $\ddot{\bar{v}}$, al tiempo t del observador, en el cual denotaremos estas cantidades como $\bar{v}'$ y $\bar{v}''$ [9]. La segunda se basa en reemplazar:

$$m_0 a_\mu \longrightarrow \frac{d\bar{G}}{dt} = m_0\frac{\bar{a}}{\gamma}$$
$$F_\mu \longrightarrow \bar{K} = \frac{\bar{F}}{\gamma}$$
$$R'_\mu \longrightarrow \bar{R}^* = \frac{\bar{R}'}{\gamma}, \qquad (27)$$

de acuerdo con lo cual la expresión para la fuerza $\bar{R}^*$ de reacción por radiación se convierte en:

$$\bar{R}^* = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^2\left[\bar{v}'' + \frac{3\gamma^2}{c^2}(\bar{v}\cdot\bar{v}')\bar{v}' + \frac{\gamma^2}{c^2}(\bar{v}\cdot\bar{v}'')\bar{v} + \frac{3\gamma^4}{c^4}(\bar{v}\cdot\bar{v}')^2\bar{v}\right]. \qquad (28)$$

---

[9] Es decir, $\dot{\bar{v}} = \frac{d}{d\tau}\bar{v} = \gamma\frac{d}{dt}\bar{v} = \gamma\bar{v}'$, $\ddot{\bar{v}} = \frac{d}{d\tau}(\gamma\bar{v}') = \frac{\gamma^4}{c^2}(\bar{v}\cdot\bar{v}')\bar{v}' + \gamma^2\bar{v}''$.

En el límite de muy bajas velocidades (28) coincide con la expresión usual para F_{rad}.

Para concluir, debemos señalar que si bien la expresión (24) ha sido deducida aquí de una manera heurística, ésta se puede obtener, claro está, mediante desarrollos rigurosos (p.e., TEITELBOIM, 1970); no hemos considerado necesario incluirla, dado que nuestro objetivo no es la discusión y/o deducción de una ecuación covariante.

§5.- CONCLUSIONES.

En este capítulo presentamos la ecuación de Abraham-Lorentz, así como las dificultades que la han caracterizado. A fin de conocer el origen de dichas dificultades, mostramos algunas de las deducciones más usuales de esa ecuación, señalando, con el mayor detalle, todas las aproximaciones utilizadas en ellas.

Entre las diversas dificultades que se mencionaron resaltan dos. La primera está relacionada con la idea misma de autointeracción de una partícula puntual, la cual, además de ser nada intuitiva, da origen a la ya conocida divergencia de la masa. La segunda está basada en el incumplimiento de una ecuación adecuada de balance energético, al menos tal y como lo conocemos en Mecánica. Gran parte de este problema proviene de la introducción de dos hipótesis delicadas a lo largo de los desarrollos, a saber, la descripción desde un marco de referen cia en reposo ($\vec{v}=0$) y la omisión de la dependencia temporal de R ; ambas suposiciones traen como consecuencia la desaparición de términos no lineales que pueden aportar nueva luz para la comprensión y establecimiento de la ecuación dinámica.

En la última sección presentamos una deducción simple, y muy conocida, de la generalización covariante de la ecuación de Abraham-Lorentz (ecuación de Lorentz-Dirac), mostrando cómo en su parte espacial aparecen los términos no lineales.

Dado que estamos interesados en obtener una expresión más general que la de AL, en el siguiente capítulo mostraremos cómo el trabajar con una de las deducciones aquí presentadas - para partícula puntual, pero evitando al máximo las aproximaciones, nos va a conducir a la aparición de términos no lineales con la misma estructura que los de la ecuación covariante. Para ello, retomaremos la deducción de Panofski (§3.3), dada - su transparencia y simplicidad. ¡Adelante!.

CAPITULO II

"LA ECUACION NO LINEAL PARA PARTICULA PUNTUAL"

"Sistema, poeta, sistema.
Empieza por contar las piedras,
luego contarás las estrellas".

León Felipe

§1.- INTRODUCCION.

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se pueden obtener los términos no lineales mediante los métodos usuales de la deducción no relativista de la ecuación de AL, evitando tan sólo algunas aproximaciones. En particular usaremos el método seguido por Panofski, debido a su simplicidad y a la facilidad con la que de él puede hacerse un análisis de los resultados extraídos; también trataremos de "sondear" las consecuencias físicas que tiene cada una de sus aproximaciones. Se proseguirá con una discusión acerca de los términos encontrados, así como con una crítica a las deducciones presentadas en el capítulo anterior. Se verá también la importancia de los términos no lineales omitidos en esas aproximaciones, señalando el origen de cada uno de ellos. Mostraremos también cómo estos resultados dan lugar a efectos del mismo tipo que los rela cionados con la masa electromagnética de la partícula. Proseguiremos con una comparación directa con la parte espacial de la ecuación covariante de Lorentz-Dirac. Finalizaremos discutiendo las limitaciones del desarrollo y las posibles extensiones que de él pueden hacerse.

§2.- DEDUCCION DE LA ECUACION.

Siguiendo con el espíritu de la deducción de Panofski, efectuamos un desarrollo en serie de Taylor de $\vec{v}(t-R/c)$ alrededor del tiempo actual t . Como primera aproximación, supondremos que dentro de los desarrollos R es prácticamente una constante respecto del tiempo. No obstante, eliminaremos la hipótesis de que el elemento dq de la distribución está instantáneamente en reposo, es decir, para nosotros $\vec{v}(t) \neq 0$. No se piense que esto lo hacemos nomás para complicarnos la vida. ¡No! Argumentaremos.

Por una parte, nos parece incorrecto el tratar de describir la dinámica de la partícula cargada a través de "sus propios ojos"; lo que a nosotros nos interesa es encontrar las leyes que rigen su movimiento según nuestro marco de referencia. ¡Vaya, pues, que eso es lo que medimos en un laboratorio!. Más aún, sabemos que en el caso general, diversos observadores inerciales registran, para un mismo fenómeno, diferentes valores para la fuerza; sólo coinciden, estos, en el límite newtoniano ($\frac{\vec{v}}{c} \cong 0$)[10]. No olvidemos que es ése el origen de la --

---

[10] ¿Y quién demonios nos asegura que la radiación puede ser estudiada en ese límite?

fuerza de Lorentz.

Por otra parte, y este nos parece el punto más importante, hemos mencionado ya que la partícula cargada radía, luego entonces, se frena; así, la autofuerza de frenado viene a jugar el papel de una fuerza de fricción, la cual esperamos que dependa de la velocidad de acuerdo con nuestra experiencia en Mecánica. Pero al hacer $\bar{v}(t)=0$ estamos eliminando, de entrada, cualquier contribución a la fuerza de ese tipo. ¡Cuidado, cuates!.

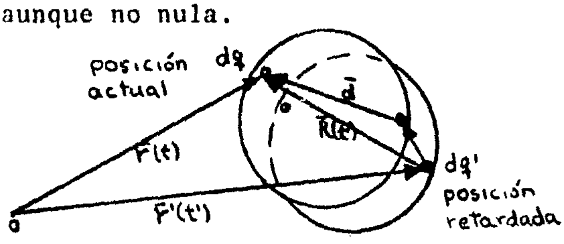
En base a lo anterior, se sustituye el desarrollo (I-15) por:

$$\bar{v}(t - R/c) = \bar{v}(t) - \frac{R}{c}\dot{\bar{v}}(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{c}\right)^2 \ddot{\bar{v}}(t) + \ldots \quad , \qquad (1)$$

en donde, como ya mencionábamos, no hemos considerado la dependencia retardada de R (esta transa es herencia de Panofski).

Esto último tiene su justificación en el hecho de suponer que la distancia R que recorre la señal para llegar de dq' a dq (le sugerimos que vea la figura para que no se haga bolas) es prácticamente igual a la distancia fija d entre esos dos elementos de la distribución, o lo que es lo mismo, que la velocidad retardada $\bar{v}(t') = \frac{d}{dt'}\{\bar{R}(t') - \bar{d}\}$ es pequeña comparada con la de la luz, aunque no nula.

$R = |\bar{R}|$
$d = |\bar{d}|$



Las consideraciones anteriores, así como el uso del desarrollo (1), se justifican por el hecho de suponer a la distribución como rígida y sin rotación. Cabe señalar que si bien esto nos permite conservar términos de orden $\tilde{\beta}$ ($=\frac{\bar{v}(t')}{c}$), -- también nos deja introducir, en principio, correcciones a orden β^2, siendo estas últimas bastante pequeñas, pero de gran utilidad para nuestra discusión futura.

Es necesario señalar que en la deducción original -- presentada por Panofski (§3.3 del capítulo I) hubiera bastado con suponer $\tilde{\beta}=0$ (de modo que $S=1$) para recuperar la expresión usual de la ecuación de AL; asímismo, esto traería como consecuencia una contribución magnética nula. Se tendría además una ventaja: eliminar la suposición de que la partícula está instantáneamente en reposo ($\bar{v}(t)=0$), la cual, insistimos, nos parece bastante delicada. Así, la ecuación de AL se obtiene tan sólo de considerar el límite de velocidades retardadas muy pequeñas ($S=1$), sin hacer consideración alguna sobre la velocidad actual.

Para seguir adelante, debemos expresar ahora a la -- aceleración retardada en términos de un desarrollo alrededor de la aceleración al tiempo actual t. Para este fin, necesitamos tomar en cuenta la definición de la aceleración retardada:

$$\bar{a}(t') = \frac{d}{dt'}\bar{v}(t') , \tag{2}$$

que de acuerdo con (1), y usando la relación $\frac{d}{dt'} = S\frac{d}{dt}$, se expresa como:

$$\bar{a}(t') = S\left(\dot{\bar{v}}(t) - \frac{R}{c}\ddot{\bar{v}}(t) + \ldots\right), \tag{3}$$

donde la notación $\dot{\bar{v}}, \ldots$ significa derivada respecto al tiempo actual, y S está definida en la forma usual[11].

El introducir el factor S en (3) constituye otra diferencia entre nuestro desarrollo y el de Panofski. El argumento para introducir dicho factor es el siguiente. En la expresión (I-15) se ha denotado por $\dot{\bar{v}}(t), \dot{\bar{v}}(t'), \ldots$ a la derivada de $\bar{v}(t), \bar{v}(t'), \ldots$ respecto del argumento, sin importar si éste es retardado o no; es decir, en el miembro izquierdo de esa ecuación, $\dot{\bar{v}}(t')$ significa $\frac{d}{dt'}\bar{v}(t')$, mientras que en el derecho $\dot{\bar{v}}(t) = \frac{d}{dt}\bar{v}(t)$. Eso nos parece incorrecto, pues se ha pasado por alto la física del problema desarrollando $\bar{v}(t')$ y $\dot{\bar{v}}(t')$ como funciones independientes entre sí, y no se ha usado que una es la derivada de la otra respecto del tiempo retardado.

Por otra parte, a diferencia de lo que suele hacerse en los textos, a nosotros nos parece necesario trabajar con ambos campos $\bar{E}_{ret}$ y $\bar{B}_{ret}$, puesto que en principio los dos deben jugar un papel importante en el fenómeno de la radiación. Así, la autofuerza tiene la forma

$$\bar{F}_{rad} = q\left(\bar{E}_{rad} + \frac{\bar{v}(t)}{c} \times \bar{B}_{rad}\right). \tag{4}$$

[11] Nótese la incongruencia: por un lado hacemos $R \neq R(t)$ lo cual nos lleva al desarrollo (1), pero por otro lado $S \neq 1$. Esta transa se la heredamos directamente a Panofski. Reclámenle a él.

Pero podemos hacer otra consideración, y es la de -- trabajar a orden c^{-5} en nuestros desarrollos. Si recordamos, - Panofski los lleva hasta orden c^{-3}, ya que con esto le es - suficiente para recuperar la ecuación de AL. Nosotros, sin embargo, deseamos (y debemos) ir un poco más lejos. ¿Para qué? la razón es simple.

Argumentábamos ya la necesidad de contar con términos dependientes de la velocidad, ya que esta es la forma usual en la que aparecen las fuerzas de fricción en la Mecánica Clásica. Sin embargo, estos deben de anularse en el caso de movimiento uniforme, en el cual no hay radiación. De esta manera, de existir dichos términos, deben de estar dados por el producto de - alguna potencia de la velocidad con alguna potencia de cualquiera de sus derivadas temporales. Mediante un análisis dimensional concluimos que, necesariamente, esos términos tienen la -- forma $\frac{e^2\dot{v}^2 v}{c^5}$; la dependencia con $\dot{v}^2$ hace que el único - signo relevante sea el de la velocidad. Asímismo, existen otras combinaciones de la forma $\frac{e^2 v^2\ddot{v}}{c^5}$ y $\frac{e^2 v^2\dot{v}}{a c^4}$; no hay - más.

De estos últimos, el primero representa una correc - ción de la forma $\beta^2\frac{e^2}{c^3}\ddot{v}$, la cual puede asociarse directamente al término usual $\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}$. El segundo de ellos va como $\beta^2\frac{e^2}{a c^2}\dot{v}$ y tiene la apariencia de una corrección a la masa electromagnética, puesto que es el coeficiente de la aceleración.

Lo anterior nos justifica a trabajar a orden c^{-5}. Es más, ¡y esto es crucial!, los términos con c^{-5} no dependen del tamaño de la distribución, de modo que sobreviven aún en el límite para partícula puntual. Más aún, ni siquiera podemos eliminarlos a priori argumentando al respecto el carácter no relativista del modelo. Para esto baste recordar que la aceleración puede tender a infinito en la dinámica newtoniana (por ejemplo, en el choque de una pelota pequeña con una pared), y de la derivada de la aceleración ni hablar, pues ni siquiera se tiene claro qué es. Por último, el trabajar a ese orden abre la posibilidad de establecer una comparación entre nuestros resultados y la expresión para la parte espacial de la ecuación covariante[12]; esto nos permite ir "manoseando" el problema, a pesar de lo burdo de nuestras aproximaciones.

En base a todo lo anterior, se sustituyen los desarrollos (1) y (3) en las expresiones para los campos retardados (I-14) y $\bar{B}_{ret} = \hat{n} \times \bar{E}_{ret}$. Dado lo engorroso de los cálculos, hicimos uso del programa REDUCE de computación, a través del cerebro y de las manos de nuestro amigazo Arturo Olvera. Esos cálculos condujeron a la siguiente expresión:

$$d\left\{\bar{E}_{ret} + \frac{\bar{v}}{c} \times B_{ret}\right\}_\alpha = dq'\left\{-\frac{2}{3Rc^2}\left[\left(1+\frac{1}{5}\beta^2\right)\dot{v}_\alpha + \frac{2}{5c^2}(v_\beta \dot{v}_\beta)^2 v_\alpha\right]\right.$$
$$+ \frac{2}{3c^3}\left[\left(1+\frac{1}{5}\beta^2\right)\ddot{v}_\alpha + \frac{2}{5c^2}(v_\beta \ddot{v}_\beta) v_\alpha\right]$$
$$\left. + Q(R) + \frac{4}{3c^3}\left[\frac{1}{5c^2}(\dot{v}_\beta \dot{v}_\beta) v_\alpha + \frac{2}{5c^2}(v_\beta \dot{v}_\beta)\dot{v}_\alpha\right]\right\}. \quad (5)$$

---

[12] En esa ecuación aparecen, en realidad, términos de orden c^{-7}, pero el considerarlos aquí no enriquece en nada la discusión y sólo complica los cálculos considerablemente.

En esta expresión hemos eliminado ya los términos que promedian a cero dada la simetría esférica de la distribución. Los términos de orden R ($\mathbb{Q}(R)$) tienen la forma del producto de esa variable con las derivadas n-ésimas ($n \geq 1$) de la velocidad, o sea:

$$\mathbb{Q}(R) \in \left\{ R\frac{\dddot{v}}{c^4} , \frac{R\ddddot{v}}{c^5}, \frac{Rv\dddot{v}}{c^5}, \frac{R\dot{v}\ddot{v}}{c^5} \right\},$$

los cuales desaparecen al tomar el límite para partícula puntual.

Finalmente, la expresión (5) nos conduce a la pavorosa ecuación de movimiento:

$$\bar{F} = -\frac{4}{3}m_e\left[\left(1+\frac{1}{5}\beta^2\right)\dot{\bar{v}} + \frac{2}{5c^2}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{v}\right] + \frac{4e^2}{3c^3}\left[\frac{1}{5c^2}\dot{v}^2\bar{v} + \frac{2}{5c^2}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}\right]$$
$$+\frac{2e^2}{3c^3}\left[\left(1+\frac{1}{5}\beta^2\right)\ddot{\bar{v}} + \frac{2}{5c^2}(\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v}\right] + \mathbb{Q}(R), \tag{6}$$

donde m_e se define de la forma usual. La ecuación (6) es una generalización a orden c^{-5} de la de AL, que se reduce a ella en el límite $\frac{v}{c} = 0$. ¿y qué con esto? Vamos a ello.

§3.- DISCUSION DE LOS RESULTADOS.

Comencemos con un análisis acerca del origen de los términos en la ecuación (6). En ella aparecen contribuciones dependientes de $1/R$, R^0 y de orden R^n , $n \geq 1$. Estos últimos desaparecen en la aproximación de partícula puntual, de modo que la única dependencia en R se manifiesta a través de la masa electromagnética ($\sim {}^1/R$). Ahora bien, la ecuación (6) se obtuvo a partir de los campos retardados que salen de los potenciales de Lienard-Wiechert, y ellos se caracterizan por poseer una parte "radiativa", que va como ${}^1/R$, y una "ligada" (coulombiana), que va como ${}^1/R^2$. Sin embargo, nosotros hemos obtenido que las contribuciones asociadas con la parte ligada de los campos han promediado a cero; es decir, la parte "coulombiana" de los campos no tiene ninguna contribución.

Ese resultado nos parece hermoso, físicamente hablando, ya que es de esperarse que las únicas aportaciones a la radiación tengan su origen exclusivamente en los campos lejanos, o de radiación (de ahí su nombre, pues). Así, son estos los únicos responsables de los autoefectos de frenado. Lo anterior es una consecuencia de que los campos "ligados" promedian a cero, debido a que son campos estáticos y, por ende, sus efectos son instantáneos; esto hace que no exista ninguna dirección privilegiada para ellos. Adicionalmente, pudimos observar un hecho peculiar: los términos no dependientes de R tienen su origen, totalmente, en el campo eléctrico, de modo que el campo magnético de radiación no contribuye a la autofuerza de reacción. Sin embargo, sí hay aportaciones, por parte de ambos campos, que están asociadas con la inercia de la partícula, es decir, con el coeficiente de los términos que dependen linealmente de la aceleración.

Lo anterior nos sugiere que una parte del campo ra--

diado se utiliza en el frenado de la partícula, mientras que la otra parte se manifiesta en una modificación de su propia masa, en un incremento de su inercia (lo que también produce un frenado). En la próxima sección ampliaremos esta discusión. Que quede por el momento en nuestras memorias.

En relación con los factores β^2 que aparecen en (6) podemos estar tentados a no considerarlos, cuestionando su magnitud en una deducción no relativista. ¿Qué diablos hace aquí una β^2 ?. Si bien ya hemos argumentado que los coeficientes de β^2 pueden ser tan grandes como se desee, y que a ese orden en β aparecen efectos "hermosos" en relación con un incremento de la inercia, podemos introducir momentáneamente, no más por jugar, la aproximación $\beta^2 \to 0$ ($\beta \neq 0$), y ver qué consecuencias tiene. ¿Se recupera AL? ¡Pues no! .

Primeramente, en este límite la ecuación (6) se reduce a

$$\bar{F} = -\frac{4}{3} m_e \dot{\bar{v}} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\bar{v}} + \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^5}\left[\frac{1}{5}\dot{v}^2 \bar{v} + \frac{2}{5}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}\right]. \tag{7}$$

Esta nueva forma para la ecuación de movimiento contiene, a lo más, términos de orden β . ¡Pero estos no debemos eliminarlos si queremos ser congruentes con la misma Electrodinámica! . Hacer eso sería equivalente a darle una puñalada a la propia fuerza de Lorentz. Por si fuera poco, los términos sobrevivientes tienen la misma facha que aquellos que construimos mediante el análisis dimensional, y como veremos más adelante, tienen su razón de existir.

Sin embargo, pensamos que es muy natural que aún aparezca un rechazo hacia esos términos por diversas razones, dos de las cuales son: (a) al hacer $\beta = 0$ se recupera la ecuación de AL, la cual, a pesar de las serias dificultades que la caracterizan, es la única que se conoce, o más bien, se reconoce (digamos que es un "viejo recuerdo de familia", y como tal, se le estima); (b) no suelen aparecer factores c^{-5} en modelos no relativistas.

Nada podemos hacer contra las "razones" expuestas en (a); no obstante, sí podemos argumentar algo contra un "razonamiento" tipo (b). La idea es la siguiente. Mencionábamos ya que aún en el límite no relativista es posible tener movimientos sujetos a aceleraciones muy grandes, de tal suerte que $\left(\frac{\dot{v}}{c^2}\right)^2$ no tiene por qué ser pequeña (mucho menos nula). Más aún, si suponemos que $\frac{\dot{v}}{c^2}$ es pequeña, ¿qué sentido tiene entonces establecer una ecuación dinámica en la cual aparece inevitablemente el término $-\frac{4}{3} m_e \dot{\vec{v}}$, con $m_e \sim c^{-2}$?. Así, el suponer que $\frac{\dot{v}}{c^2} \to 0$ es equivalente, necesariamente, a desaparecer la ecuación misma de movimiento.

Más aún, dado el tipo de tratamiento utilizado en todas las deducciones anteriores, se puede demostrar que el límite $\frac{\dot{v}}{c^2} \neq 0$ es compatible con $\frac{v}{c} \neq 0$ y $\frac{\ddot{v}}{c^3} \neq 0$, siendo este último el que da origen a la expresión usual para la autofuerza. Así, el suponer que cualesquiera de las cantidades

$\frac{v}{c}$, $\frac{\dot{v}}{c^2}$, $\frac{\ddot{v}}{c^3}$, es muy pequeña lleva a la ecuación de AL al mis mísimo desastre. Además, no debemos olvidar que la expresión de Larmor para la potencia radiada tiene dimensiones de $\frac{(\dot{v})^2}{c^3}$, y ésta no es nada despreciable (¡coño, que de ahí parte la deducción heurística, pues!).

También podemos echar mano de nuestros argumentos anteriores, en los cuales manifestábamos la necesidad de contar con términos dependientes de la velocidad al identificar la autofuerza de reacción con una de frenado. Más aún, esperamos que una fuerza disipativa tenga un signo bien definido, como es el de la velocidad. Pero pensar que $\ddot{v}$ "es" esa fuerza de fricción nos parece muy aventurado, y más considerando los cambios de signo que ésta puede tener. Seamos más cuidadosos ¿no?.

Es por eso que nos manifestamos a favor de los términos no lineales obtenidos por nosotros de manera limpia y directa. De acuerdo con lo cual, consideramos que la ecuación (6) - o bien la ecuación (7) - representa una generalización (no covariante) más adecuada de la ecuación de AL, para partícula puntual.

Con el objeto de futuras referencias es conveniente reescribir la ecuación (6) como:

$$\bar{F} + \frac{4}{3} m_e \left[\left(1 + \frac{1}{5}\beta^2\right) \dot{\bar{v}} + \frac{2}{5c^2} (\bar{v} \cdot \dot{\bar{v}}) \bar{v} \right] = \bar{R} \quad , \tag{8}$$

con

$$\bar{R} = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\left(1 + \frac{1}{5}\beta^2\right) \ddot{\bar{v}} + \frac{2}{5} (\bar{v} \cdot \ddot{\bar{v}}) \bar{v} \right] + \frac{4e^2}{3c^3} \left[\frac{1}{5c^2} \dot{v}^2 \bar{v} + \frac{2}{5c^2} (\bar{v} \cdot \dot{\bar{v}}) \dot{\bar{v}} \right] + Q(R) , \tag{9}$$

siendo $\bar{\mathcal{R}}$ una fuerza con componentes en $\bar{v}$, $\dot{\bar{v}}$ y $\ddot{\bar{v}}$.

Este último hecho nos viene a señalar una fuerte diferencia entre $\bar{\mathcal{R}}$ y las fuerzas que aparecen comúnmente en la Mecánica Clásica. O sea que, a pesar de que hemos partido de una ecuación dinámica tipo newtoniano, la forma explícita de las fuerzas que ahí aparecen de ninguna manera tiene la facha de una fuerza de ese tipo, ya que dependen en forma no lineal, tanto de la velocidad, como de sus primera y segunda derivadas temporales. Esto podemos pensarlo como una consecuencia natural de las marcadas diferencias que guardan entre sí la Electrodinámica y la Mecánica Clásica.

No obstante, a pesar de que estamos conscientes de que la forma de $\bar{\mathcal{R}}$ puede ser, en principio, todo lo alejada de nuestra experiencia en Mecánica, no cualquier extravagancia debe parecernos un buen candidato para $\bar{\mathcal{R}}$. No olvidemos que aún venimos heredando algunas de las dificultades de la ecuación de AL, las cuales iremos tratando de corregir a lo largo de nuestro trabajo.

Ahora vamos a discutir más a fondo los efectos tan peculiares que aparecen en el miembro izquierdo de la ecuación (8).

§4.- ¿EFECTOS RELATIVISTAS?

Resulta que al tratar de entender la ecuación (8) nuestra curiosidad hizo que nos acercáramos a la Relatividad

Especial, y es que estábamos sorprendidos por la simplicidad con que aparecen las correcciones mismas a la ecuación dinámica, sin entrar en detalles sobre $\bar{\mathcal{R}}$. Vamos, pues, a comentar lo que encontramos.

En Relatividad Especial, la segunda ley de Newton sigue manteniendo la forma

$$F = \frac{dp}{dt} , \tag{10}$$

donde el cuadri-impulso p ahora se define como:

$$p = m\gamma v , \tag{11}$$

con $\gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ y m es la masa en reposo.

Al efectuar la derivada de p con respecto al tiempo t, medido en el sistema del laboratorio, se obtiene:

$$F = m\gamma \frac{dv}{dt} + mv\frac{d\gamma}{dt} . \tag{12}$$

Como $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}(v \cdot a)$ y $a = \frac{dv}{dt}$, entonces

$$F = m\gamma a + \frac{m\gamma^3}{c^2}(v \cdot a)\, v . \tag{13}$$

Ahora bien, si se separa la aceleración en una componente perpendicular al movimiento ($a_\perp$) y una longitudinal a él ($a_\parallel = \frac{1}{|v|}(v \cdot a)$) la expresión (13) puede escribirse como:

$$F = F_\parallel + F_\perp , \tag{14}$$

con

$$F_{\parallel} = m\gamma^3 a_{\parallel}$$

$$F_{\perp} = m\gamma a_{\perp} \quad . \tag{15}$$

El coeficiente de $a_{\parallel}$ recibe el nombre de "masa longitudinal" y el de $a_{\perp}$ se llama "masa transversal". Esto da origen a que, para grandes velocidades, el vector aceleración no es paralelo al vector fuerza, como sucede con la Mecánica newtoniana. Las ecuaciones (15) han sido confirmadas experimentalmente, de modo que estos efectos están bien establecidos en la teoría relativista.

Pero regresemos a la expresión (13). Es notable su similitud, salvo factores γ , con el miembro izquierdo de nuestra ecuación (8). Más aún, si desarrollamos estos factores γ y conservamos la ecuación (13) hasta orden β^2 , ésta se convierte en:

$$\bar{F} = m\left\{\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\bar{a} + \frac{1}{c^2}(\bar{v}\cdot\bar{a})\bar{v}\right\} , \tag{16}$$

estableciéndose, aún más, el parecido con nuestros resultados. De hecho, la única diferencia la constituyen los factores numéricos, lo cual es notable dado nuestro tipo de tratamiento no relativista (y la bola de aproximaciones utilizadas aún).

Sin embargo, esta diferencia (originada en el hecho de que nosotros no consideramos factores γ) no se ve opacada con el resultado sorprendente de que nuestro modelo "tan --

burdo" arroje ya efectos relativistas relacionados con la masa electromagnética de la partícula, a saber, la aparición de una componente transversal y otra longitudinal al movimiento de la misma (¡Qué hermoso!). ¡Y esta es tan sólo una de las consecuencias de eliminar la aproximación $\bar{v}(t)=0$! (y, claro está, de la covariancia implícita en la Electrodinámica: ¡hermosa teoría!).

En resumen, esta comparación nos permite asegurar que la estructura misma de la ecuación (8) es una manifestación de la finitud de la velocidad de propagación de las señales electromagnéticas, lo cual le da un carácter intrínsecamente no newtoniano.

Finalicemos con un "jalón de orejas" para aquellos que piensan que la Relatividad Especial es una teoría que sólo se aplica a movimientos con velocidades cercanas a la de la luz. ¡Pues no!. Como todos sabemos, la Relatividad Especial es parte misma de la Electrodinámica (de la cual es origen), y una de sus gracias es la prohibición de velocidades infinitas de propagación.

§5.- COMPARACION CON LA ECUACION DE LORENTZ-DIRAC.

La discusión anterior representa también una motivación para comparar nuestros resultados con los que provienen de la parte espacial de la ecuación covariante conocida como de Lorentz-Dirac.

Dado que estamos interesados en establecer una comparación, es necesario escribir la expresión (I-28) sin los factores γ que en ella aparecen, así como conservar términos del mismo orden en c, a saber, c^{-5}.

Para esto podemos desarrollar γ^2 y conservar términos hasta orden β^2, es decir:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \cong 1+\beta^2 \qquad ; \beta^2 < 1.$$

Así, la ecuación (I-28) se convierte en:

$$\bar{R}^* = \frac{2e^2}{3c^3}\left\{(1+\beta^2)\bar{v}'' + \frac{1}{c^2}(\bar{v}\cdot\bar{v}'')\bar{v}\right\} + \frac{4e^2}{3c^3}\left\{\frac{3}{2c^2}(\bar{v}\cdot\bar{v}')\bar{v}'\right\}, \tag{17}$$

la cual tiene la misma estructura que nuestra expresión (9) para la autofuerza; sólo hay diferencia en los coeficientes.

En particular, y esto es lo más relevante, ambas expresiones poseen el mismo tipo de dependencia, aún la no lineal. Esto resulta bastante interesante dado el tipo de deducción que nos llevó a ellas, una covariante y la otra "ingenua".

Y es precisamente la "ingenuidad" de nuestros desarrollos la que nos ha hecho cometer aproximaciones, ya sea en la manera de eliminar el retardo, o en la despreocupación total por los factores γ, los cuales conducen a coeficientes diferentes a los de (17). Es por ello que en los próximos capítulos trataremos de cometer "pecados" cada vez menores en cuanto a las aproximaciones, aunque dado el carácter de este trabajo, no se seguirá un tratamiento covariante.

De cualquier forma, las confrontaciones que hemos hecho en esta sección, y en la anterior, nos dejan ver resultados bastante compatibles con los que salen de la Relatividad Especial, ¡y nosotros no hemos usado la covariancia!.(Jala bien, para ser un modelo "ingenuo").

§6. ¿PODEMOS HABLAR DE UN BALANCE ENERGETICO?.

Usualmente se acepta sin mayor problema la existencia de una ecuación de balance de energía teniendo en mente la deducción heurística de Planck (I-§3.1). Sin embargo, si queremos ser formales nos encontramos con el problema de que este tipo de ecuación la hemos aprendido a deducir para las ecuaciones newtonianas, es decir, aquellas en las que $\bar{F}=\bar{F}(x,v,t)$. Se puede demostrar que en la expresión para la fuerza se puede incluir a lo más una dependencia lineal para la aceleración, pero es obvio que ni la ecuación de Abraham-Lorentz, ni nuestra ecuación (6) son de ese tipo. Sin embargo, la deducción heurística aparentemente provee de una ecuación de balance, cosa que, como vemos, es muy aproximada y ya presenta problemas. ¿Qué pasa, por ejemplo, cuando la aceleración es constante (I-§2)?. Además, dada la forma tan horrenda de la ecuación (6), establecer con ella una ecuación de balance de energía se torna en un problema inmanejable.

Sin embargo, parece que podemos dormir con la consciencia tranquila, ya que resulta realmente sorprendente y agradable que todos los términos de la ecuación (6), con los coeficientes correctos, pueden incluirse como parte de una formulación covariante en la cual se puede plantear una ecuación de balance energético enteramente análoga a la heurística; -- ¡claro! pero bien hecho, sin trampas. Bonito, ¿no?.

Esto corrobora el que no se deban eliminar los malvados términos no lineales, pues, si bien no es claro el balance de energía en forma no covariante, las cosas se componen un poco más en la formulación covariante. Como que no andamos tan errados, pues.

§7.- CONCLUSIONES.

En este capítulo presentamos una generalización (no covariante) de la ecuación de AL para partícula puntual, Para ello utilizamos el método seguido por Panofski, previamente -- discutido (I-§3.3), pero eliminando la descripción desde un -- marco de referencia instantáneamente en reposo (i.e., para nosotros $\bar{v}(t) \neq 0$). Además, llevamos nuestras expresiones hasta orden c^{-5} , puesto que con eso pudimos obtener resultados - bastante interesantes.

Encontramos que todos los términos de la ecuación dinámica tienen su origen, efectivamente, en los campos lejanos o de radiación; la parte proveniente de los campos ligados, o coulombianos, promedió a cero. Como de esos términos no todos juegan un mismo papel en la ecuación de movimiento, esto nos -

hizo pensar en dos tipos de contribuciones, básicamente: (a) una, relacionada con términos no lineales de la forma $\beta^n \frac{e^2}{R}\dot{v}$, o sea, con la masa electromagnética, y (b) otra, cuyo origen proviene exclusivamente del campo eléctrico, constituída por términos no lineales de orden R^n, con $n>0$, de modo que en el límite para partícula puntual sólo sobreviven esos con $n=0$ (i.e., los que son independientes del tamaño de la distribución). Aquí apareció el término usual con $\ddot{v}$.

Las contribuciones del tipo (a) nos permitieron redefinir la idea misma de fuerza, la cual ahora tiene componentes tanto en la dirección de $\dot{\bar{v}}$ como en la de $\bar{v}$, en analogía con la expresión relativista. En consecuencia, esto dio origen a la aparición de una masa longitudinal ($m_\parallel$) y una transversal ($m_\perp$) al movimiento.

Por otra parte, las contribuciones tipo (b) fueron identificadas por nosotros como la expresión para la fuerza de reacción por radiación. Esta apareció con componentes en la dirección de $\bar{v}$, $\dot{\bar{v}}$, $\ddot{\bar{v}}$, lo cual afirma su carácter no newtoniano. De esta expresión, resaltan términos de la forma $\dot{v}^2 v$, la cual es bastante parecida a la del término de reacción por radiación ($\frac{2e^2}{3c^3} a^2 v^\mu$) de la ecuación de Lorentz-Dirac, y que dan origen a contribuciones compatibles con la expresión de Larmor para la potencia radiada.

Asímismo, pudimos comparar nuestra expresión para la reacción de radiación con aquella que sale de la parte espacial de la ecuación covariante de Lorentz-Dirac, llegando a que ambas poseen la misma estructura; esto sorprende en un modelo -- tan "ingenuo" como el nuestro.

Posteriormente hicimos algunas consideraciones relacionadas con el balance energético; de éstas sólo pudimos concluir que, si bien se dio un paso más en relación con la ecuación de AL, ahora el problema ha quedado bastante oscuro, lo - cual hace difícil entender el balance energético.

Finalmente, nos resta señalar que si bien esta generalización arroja ya nuevas luces para el establecimiento de - la ecuación de movimiento, aún seguimos heredando las dificultades propias de un modelo de partícula puntual, como la divergencia de la masa o la idea misma de interacción de un punto - consigo mismo. Es por ello que los próximos capítulos estarán dedicados al estudio de la dinámica de partículas cargadas con estructura. En particular, en el capítulo III presentaremos la ecuación integrodiferencial de Abraham-Lorentz (EIDAL), que es una ecuación lineal para partículas cargadas con estructura, - rígidas y que no rotan. Dado el carácter lineal de la EIDAL, - ésta servirá como una primera aproximación que nos será de gran utilidad. Sin embargo, la aparición de los términos no lineales aquí obtenidos, hará que busquemos posteriormente una ecuación integrodiferencial que los contenga. Primero lo primero.

CAPITULO III

"LA ECUACIÓN INTEGRODIFERENCIAL DE ABRAHAM-LORENTZ (EIDAL)"

"Mis pasos en esta calle
Resuenan
En otra calle
Donde
Oigo mis pasos
Pasar en esta calle
Donde
Sólo es real la niebla"

O. Paz

§1.- INTRODUCCION.

Como se discutió en el capítulo I, la ecuación de -- Abraham-Lorentz presenta serias dificultades que ya menciona - mos. Es por eso que sería deseable contar con una ecuación de movimiento clásica para partículas cargadas, aún cuando fuese aproximada, pero que no presentara tales dificultades. Una alternativa a esto se mostrará a lo largo de este capítulo.

Con este fin, presentaremos lo que podemos llamar -- "Ecuación Integrodiferencial de Abraham-Lorentz (EIDAL)", que constituye una aproximación lineal al problema dinámico de una partícula cargada con estructura. Daremos una discusión acerca de su deducción y señalaremos cada una de sus características relevantes.

Limitaremos nuestro estudio al caso traslacional exclusivamente, aún cuando ya se han hecho avances importantes para el caso rotacional (JIMENEZ-MONTEMAYOR, 1983. 2do.); este último caso no hemos considerado necesario incluirlo, ya que el solo análisis del movimiento traslacional es bastante rico en contenido, y con él nos basta para los fines de este trabajo. Entremos en materia.

§2.- DEDUCCION DE LA EIDAL.

Mencionábamos anteriormente, que estamos interesados en eliminar algunas de las aproximaciones inherentes a la ecuación de AL. A nuestro juicio, una de las más importantes tiene su origen en la idea misma de autointeracción de una partícula puntual (¡Mole!). Nosotros creemos que esa interacción debe pensarse como el resultado de considerar todas las interacciones de cualesquiera dos elementos distintos de una distribución de carga, sobre la distribución misma de carga. ¿Tiene algún sentido físico el hablar de la interacción de un punto con él mismo?. Es evidente que la respuesta a esto está relacionada con la filosofía propia de cada persona; en nuestro caso, la respuesta es negativa, siguiendo la vieja escuela del maestrísimo Abraham.

En base a lo anterior, nosotros pensamos que la idea de autointeracción debe aplicarse necesariamente a partículas con estructura. Con esto se elimina, de entrada, el problema ya discutido de la divergencia de la masa electromagnética. Más aún, posteriormente veremos cómo esto también da origen a que no aparezcan soluciones acausales ni divergentes a la ecuación dinámica, hecho tan deseado por cualquier científico bien nacido y que tenga fe en los principios fundamentales en que se sustenta la Física misma (¡Joder!, que uno de esos principios es el de causalidad).

Para este fin, se parte de la deducción de Lorentz (I-§3.2) la cual conduce a la expresión (I-11) para la autofuerza. Para ella se consideró una distribución de carga rígida, con simetría esférica y sujeta a un movimiento traslacional lento, de tal suerte que R prácticamente no dependía del tiempo; esto último es lo que da origen a que la ecuación (I-11) sea lineal.

El hecho de eliminar la dependencia retardada de la aceleración mediante un desarrollo en serie alrededor del tiempo actual, dio origen a que la expresión para la autofuerza estuviera dada por una suma infinita de términos. Si se desea conservar el retardo en la aceleración, es necesario recuperar la expresión de la cual se obtuvo la ecuación (I-11), a saber,

$$\bar{F}_{auto} = \frac{-2e^2}{3c^3}\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r)\,\rho(r')}{R}\,\bar{a}(t - R/c), \qquad [13] \qquad (1)$$

donde se ha usado que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{R}{c}\right)^n \frac{\partial^n \bar{a}(t)}{\partial t^n} = \bar{a}(t - R/c), \qquad (2)$$

[13] En este caso, $\rho(r)$ es la distribución de carga normalizada a la unidad.

con $\bar{a} = \dot{\bar{v}}$.

La ecuación (1) proviene del cálculo directo de la razón de cambio del impulso $\bar{p}$ de la partícula, con

$$\bar{p} = \int \frac{\bar{S}}{c^2}\, d^3r. \tag{3}$$

Sin embargo, dado que esta definición carece de las propiedades de transformación de Lorentz, debe ser reemplazada por (JACKSON, 1962)

$$\bar{p} = \frac{1}{c^2}\int (\bar{S} + \overleftrightarrow{\Pi}\cdot\bar{v})\, d^3r \tag{4}$$

para recobrar la covariancia. La ecuación (4) es la parte espacial, en el límite no relativista, de la definición covariante del impulso:

$$P_\mu = \frac{\gamma}{c}\int T_{\mu\nu}\, n_\nu\, d^3r, \tag{5}$$

donde $n_\nu = (\gamma\bar{v}/c, i\gamma)$.

De este modo, es necesario añadir la corrección que proviene del término $\frac{1}{c^2}\int \overleftrightarrow{\Pi}\cdot\bar{v}\, d^3r$ a la ecuación (1). El cálculo directo de esta corrección da una contribución igual a $-1/4$ veces el término con $n=0$ en la ecuación (I-11) (DE LA PEÑA-JIMENEZ-MONTEMAYOR, 1982); o sea:

$$\frac{1}{c^2}\int \overleftrightarrow{\Pi}\cdot\bar{v}\, d^3r = -\frac{1}{4}\left(\frac{2e^2}{3c^2}\right)\bar{v}\int \frac{\rho(r)\rho(r')}{R}\, d^3r\, d^3r'. \tag{6}$$

Por lo tanto, la ecuación (1) debe sustituirse por:

$$\bar{F}_{auto} = -\frac{2e^2}{3c^2}\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r)\rho(r')}{R}\left\{\bar{a}(t-R/c) - \frac{1}{4}\bar{a}(t)\right\}, \quad (7)$$

de modo que la ecuación de movimiento para la partícula carga-da es entonces

$$\mu\bar{a} = \bar{F}_{ext} - \frac{2e^2}{3c^2}\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r)\rho(r')}{R}\left\{\bar{a}(t-R/c) - \frac{1}{4}\bar{a}(t)\right\}, \quad (8)$$

donde μ es la masa desnuda ("en cueros") de la partícula, y donde se ha supuesto que la fuerza externa permanece constante dentro de las dimensiones de la misma. En esta ecuación no se han considerado las contribuciones del campo magnético, lo -- cual es heredado directamente de la deducción de Lorentz.

Tomando en cuenta la definición (I-12) para l- electromagnética de la partícula, y definiendo la "masa obser-vada" m como:

$$m = \mu + m_e, \quad (9)$$

la ecuación (8) se convierte en:

$$m\bar{a} = \bar{F}_{ext} - \frac{2e^2}{3c^2}\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r)\rho(r')}{R}\left\{\bar{a}(t-\frac{R}{c}) - \bar{a}(t)\right\}, \quad (10)$$

que es la ecuación de movimiento buscada, o sea, la EIDAL.

Pasemos ahora a discutir sus características más no-tables.

§3.- COMENTARIOS A LA ECUACION.

En esta sección vamos a señalar cada una de las propiedades más sobresalientes de la EIDAL, a fin de precisar sus ventajas en relación con la ecuación de AL, así como sus propias limitaciones. Esto nos será de gran utilidad para los desarrollos del próximo capítulo. Las principales características son:

a) Como lo esperaríamos físicamente, en ausencia de fuerzas externas el movimiento se reduce a uno con velocidad uniforme. Esto se obtiene de manera directa a partir de la solución a la ecuación (10); se puede demostrar (p.e., DE LA PEÑA-JIMENEZ-MONTEMAYOR, 1982) que esa solución es de la forma:

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\bar{F}(t')\,dt', \qquad (11)$$

donde $G(t)$ es la función de respuesta, relacionada con la estructura de la partícula. La ecuación (11) muestra claramente cómo en ausencia de fuerzas externas, la aceleración es nula.

b) Se puede demostrar fácilmente que dadas las propiedades analíticas de G, (11) no contiene soluciones divergentes, y su comportamiento es causal siempre que se cumpla una condición sobre el radio de la partícula. Esta condición se discute en la referencia citada anteriormente.

Más aún, en una ecuación de ese tipo está contenida toda la historia del movimiento de la partícula. Digamos, pues, que es una ecuación con "memoria". Con ella se recupera la característica típica de los campos electromagnéticos, como ya mencionábamos anteriormente.

Es notable cómo el efecto de memoria se ha obtenido con sólo reescribir adecuadamente la ecuación (I-11). Este resultado tan importante tiene su justificación en una idea muy simple: si bien la ecuación (I-11) posee toda la información sobre la historia del movimiento de la partícula, el conservar sólo los tres primeros términos de ella, que conducen a la ecuación de AL, hace que se pierda no sólo gran parte de esa información, sino que conduce a resultados absurdos. Esto se justifica en que si se corta la serie para cualquier orden $n \geq 3$, aparecen soluciones divergentes (DABOUL, 1974).

Así, una parte del precio que se debe pagar al recortar salvajemente la serie (I-11), es la pérdida de la memoria típica de los campos electromagnéticos; ¡pues no! .

c) Si el movimiento es uniformemente acelerado, la ecuación (7) toma la forma:

$$\bar{F}_{auto} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}\int d^3r \int d^3r' \; \rho(r)\rho(r')\,\bar{a}$$

$$= -m_e\,\bar{a} \tag{12}$$

de modo que no desaparece la fuerza de frenado por radiación.

Es esto, y no la fuerza nula que predice la ecuación de AL, lo que físicamente debemos esperar. ¡Vaya, que es necesario obtener un resultado compatible con la expresión de Larmor para la pot ncia radiada! . Por esta razón, la ecuación (10) da un paso adelante hacia el entendimiento del balance energético. Veamos qué sucede con dicho balance.

Se puede demostrar (FRANÇA-MARQUES-DA SILVA, 1978) que si se multiplica la ecuación (10) por la velocidad $\bar{v}$, la potencia cedida por la fuerza externa es:

$$\bar{F}\cdot\bar{v} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(m-\frac{4}{3}m_e\right)v^2\right\} - \bar{J}\cdot\bar{E} \tag{13}$$

A su vez, usando el Teorema de Poynting, $-\bar{J}\cdot\bar{E}$ puede expresarse como:

$$-\bar{J}\cdot\bar{E} = P_{rad} + \frac{d}{dt}W, \tag{14}$$

donde $P_{rad} = \int \bar{S} \cdot d\bar{a}$ es la potencia radiada y W es la energía almacenada en el campo elec-- tromagnético. Por lo consiguiente, la ecuación de balance que se obtiene es:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mv^2 - q^*\right\} = \bar{F}_{ext} \cdot \bar{v} - P_{rad} , \qquad (15)$$

donde se define

$$q^* = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) - W ; \qquad (16)$$

este término es el equivalente al de Schoot relativista, y es de importancia fundamental para nosotros, ya que para movimientos uniformemente acelerados se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mv^2\right\} = \bar{F}_{ext} \cdot \bar{v} , \qquad (17)$$

ya que en ese caso

$$P_{rad} = \frac{dq^*}{dt}. \qquad (18)$$

Así, con (17) se recobra el resultado obtenido -- con la ecuación de AL, pero, y esto es hermoso, - aquí se ve con claridad que la radiación se ve compensada por el cambio respecto al tiempo del todavía misterioso término q^* ; es decir, no es que no exista reacción de radiación en el caso $\bar{a} = cte.$, sino por el contrario, existe, aunque es compensa da de alguna manera. ¡Ah!, esto cambia las cosas. Algo parecido sucede en el caso covariante --- (TEITELBOIM, 1970), por lo que resulta interesante y agradable su aparición por estos sitios. De esta manera, al utilizar la ecuación (10) en lugar de la de Abraham-Lorentz, las cosas mejoran bastante en relación al balance energético. ¡Qué bueno!

d) Debido a que se utilizó la definición (4) para el impulso, si se efectúa el desarrollo en serie de (10), en la ecuación dinámica ya no aparece el espantoso factor $4/3$; esto se verá claramente en la próxima sección.

Por otro lado, dado (12), la ecuación dinámica para movimiento uniformemente acelerado se reduce a:

$$\mu \bar{a} = \bar{F}_{ext} - m_e \bar{a}, \tag{19}$$

o bien

$$\bar{F}_{ext} = (\mu + m_e)\bar{a} = m\bar{a}. \tag{20}$$

Esto justifica, de alguna u otra forma, el hecho de referirnos a m como la "masa observada" de la partícula. Sin embargo aún existen puntos por esclarecer al respecto, ya que durante el estudio de la dinámica de la partícula, el cual con dujo a la ecuación (10), se definen diversos tipos de "masa" (p.e., DE LA PEÑA-JIMENEZ-MONTEMAYOR, 1982).

e) De la ecuación (10) puede obtenerse un límite inferior para el tamaño de la distribución de carga. En efecto, si se aplica la ecuación (10) para estudiar un gas de electrones con estructura, y si se supone que $\frac{\bar{F}_{ext}}{q}$ es el campo de radiación estocástico producido por todas las partículas del gas, el aplicar un Teorema de Fluctuación-Disipación en este sistema da origen a una densidad espectral de energía que impone un valor mínimo para el radio de la partícula (JIMENEZ-MONTEMAYOR, 1983. 1ro.); este valor es del mismo orden que el radio clásico del electrón ($r_e = 2e^2/3mc^2$).

f) Si bien con la EIDAL se eliminan varias dificultades inherentes a la ecuación de AL, también persisten algunas deficiencias graves en ella. Estas tienen su origen en que su deducción está basada en la de Lorentz, cuyas limitaciones ya discutimos anteriormente. En particular, el no considerar la dependencia temporal de R hace que en la EIDAL no aparezcan los términos no lineales que han sido nuestra preocupación a lo largo de este trabajo. Ya hemos demostrado su existencia en la ecuación de movimiento para partícula puntual y hemos señalado, e insistido, que son independientes del tamaño de la estructura asociada a la partícula. ¿Por qué no habrían de aparecer aquí?. Eso necesariamente obliga a considerar la dependencia temporal de R , como lo haremos en el próximo capítulo.

Adicionalmente, la aparición de los términos no - lineales debe dar origen a contribuciones importantes, las cuales no debemos eliminar en el establecimiento de un balance energético apropiado. Puede éste ser difícil, u oscuro, pero no por ello debemos desechar toda la información física que arrojan. ¡Cuidadín! .

Esperamos haber señalado aquí las características más sobresalientes de la EIDAL, y sólo nos resta mostrar cómo esta ecuación contiene como caso particular a la de Abraham-Lorentz. Este será el objetivo de la próxima sección.

§4.- LIMITE PARA PARTICULA PUNTUAL.

En esta sección vamos a mostrar, por completez, cómo se recupera la ecuación de AL a partir del tratamiento que nos condujo a la EIDAL[14].

Si se retoma la expresión (7) para la autofuerza, se

[14] Existe un método más directo, el cual no incluiremos aquí - dado que para eso sería necesario introducir algunas definiciones que nos desviarían un poco de nuestros objetivos.

le escribe en forma de sumatoria, y se utiliza la definición (9) para la masa m , nos queda la ecuación de movimiento:

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} - \frac{2e^2}{3c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^n}\left(\frac{\partial^n \dot{\bar{v}}}{\partial t^n}\right)\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r)\rho(r')\,R^{n-1}$$
$$+\frac{2e^2}{3c^2}\dot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r)\rho(r')\,R^{-1}, \qquad (21)$$

o bien,

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} - \frac{2e^2}{3c^2}\dot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r)\rho(r')\,R^{-1} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r)\rho(r')$$
$$+\ldots+(-1)^k\frac{2e^2}{3k!\,c^{k+2}}\overset{(k+1)}{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,R^{k-1}\rho(r)\rho(r')$$
$$+\ldots+\frac{2e^2}{3c^2}\dot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r)\rho(r')\,R^{-1}. \qquad (22)$$

Tomando en cuenta que el primer término en la ecuación (22) se cancela con el último, y que $\iint \rho(r)\rho(r')\,d^3r\,d^3r' = 1$, esta ecuación se reduce a:

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{v}} + Q(a), \qquad (23)$$

donde
$$Q(a) \sim \frac{e^2}{k!\,c^{k+2}}\overset{(k+1)}{\bar{v}}\,a^{k-1},$$

con a tomada como una longitud característica de la distribución de carga.

En el límite para partícula puntual $Q(a)\to 0$, de modo que se recupera la ecuación de Abraham-Lorentz:

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{v}},$$

donde la masa m ya no aparece con el espantoso factor $4/3$

usual. Queremos insistir que esto es consecuencia de utilizar la definición (4) para el impulso.

Para concluir, deseamos señalar que al tomar el límite para partícula puntual se recuperan todas dificultades propias de la ecuación de AL, como es de esperarse. La causa, insistimos, está en recortar la serie (15), cosa, por demás, incorrecta; nosotros hemos cometido ese pecado, en esta sección, sólo con el fin de mostrar que la EIDAL es, efectivamente, una expresión más general que la ecuación de AL y, por si eso fuera poco, más adecuada que ella.

§5.- CONCLUSIONES.

A la luz de lo expuesto en este capítulo, se pueden desprender las siguientes conclusiones. Parece bastante claro que al tomar en cuenta la estructura de las partículas cargadas y escribir adecuadamente la expresión para la fuerza de autointeracción, quedan solucionadas algunas de las dificultades más características de la ecuación de AL ;la Ecuación Integrodiferencial representa, pues, una aproximación lineal a la dinámica de las partículas cargadas, y constituye una generalización a la ecuación de AL. Sin embargo, dado el carácter aproximado de la EIDAL, no debe perderse de vista el establecimiento de una ecuación más general, que nos acerque hacia un mejor entendimiento tanto de la dinámica como del balance energético. De acuerdo con los argumentos expuestos en el capítulo anterior, tal generalización debe contener términos no lineales en la expresión para la autofuerza de frenado.

En el siguiente capítulo trataremos de ir más lejos en la descripción del movimiento de una partícula cargada con estructura, cuyo único grado de libertad es el de traslación; nuestro tratamiento (clásico) dará origen a una ecuación de movimiento no lineal, la cual constituirá una generalización de todo lo que hemos expuesto a lo largo de este trabajo. ¡Vamos en pos de ella! .

CAPITULO IV

"LA ECUACION NO LINEAL PARA PARTICULA EXTENDIDA".

"Nada se edifica sobre la piedra, todo sobre la arena, pero nuestro deber es edificar como si fuera piedra la arena..."

J.L. Borges

§1.- INTRODUCCION.

A la luz de todo lo expuesto anteriormente, en este capítulo se vierten los desarrollos más importantes de este -- trabajo (para que juzguen si valió la pena, o no, todo el rollo anterior).

Los pasos a seguir aquí quedan justificados de manera natural por toda la discusión previa. Si bien este capítulo no muestra una teoría concluída, da ya las bases para el establecimiento de una ecuación dinámica, en la cual estamos trabajando, pero las limitaciones de tiempo no permiten su completa aparición aquí.

El trabajo a desarrollar en este capítulo, debe ser ya adivinado por cualquier curioso que haya tenido a bien se-- guir las discusiones anteriores. De acuerdo al capítulo III, - resulta natural el trabajar con el método que ahí se sigue, el de Lorentz; sin embargo, ahora sí consideraremos la dependencia temporal de R, como trataremos de fundamentar en la siguiente sección. Asímismo, motivados por la discusión que nos condujo a los resultados del capítulo II, también habremos de eliminar la descripción desde un marco de referencia en reposo. Veremos cómo el evitar las hipótesis $R \neq R(t)$ y $\vec{v} = 0$ nos va a conducir, de manera directa, a una ecuación de movimiento no lineal que en el límite para partícula puntual tiene la misma estructura que la encontrada en el capítulo II y, por tanto, a la parte espacial de la ecuación de Lorentz-Dirac. Concluiremos con una amplia discusión sobre los resultados obtenidos, en base a nuestros objetivos iniciales, los cuales fueron delineándose aún más a lo largo del trabajo.

§2.- ALGUNAS CONSIDERACIONES PRELIMINARES.

Tomaremos como modelo de partícula cargada a una distribución rígida de carga, con simetría esférica y que esté bien localizada (i.e., que decaiga más rápido que R^{-2}). Supondremos, además, que está sujeta solamente a un movimiento traslacional.

Por simplicidad, y para ir entendiendo el problema, seguiremos el método de Lorentz (I-§3.2) ya conocido por nosotros; sin embargo, evitaremos algunas de sus aproximaciones: eliminaremos la descripción desde un marco instantáneamente en reposo (i.e., $\vec{v} \neq 0$), así como también tomaremos en cuenta la dependencia temporal de R (¡ahora sí!) que, como ya vimos, suele omitirse impúnemente y sin mayor discusión. Ambas consideraciones darán origen a una ecuación de movimiento no lineal, más acorde con el comportamiento que esperamos, y que como caso particular incluya <u>todos</u> los resultados anteriores.

Queremos insistir en que la dependencia temporal de R sólo puede omitirse bajo la suposición de que el movimiento de la partícula se lleva a cabo con velocidades muy pequeñas ($\beta \cong 0$), de tal suerte que $\bar{R} \cong \bar{d}$; es decir, que en ese límite la distancia retardada R entre el punto fuente al tiempo t' y el punto receptor al tiempo t , resulta casi igual a la distancia fija d entre esos puntos, para cualquier tiempo (ver dibujo de la sección 2, capítulo II).

No está de más hacer hincapié en que debemos tener mucho cuidado con la identificación de R con una distancia del orden del diámetro típico ($2a$) de la distribución, pues esto nos lleva a cometer crueles barbaridades; una de ellas se relaciona con la definición misma de tiempo retardado $\left(t'=t-\frac{R(t')}{c}\right)$, en la cual la suposición $R \cong 2a$ conduce a la desaparición de los efectos retardados ($t'=t$) para el caso de partícula puntual ($a \to 0$). Esto significaría que la velocidad de propagación de las señales, para el caso de partícula puntual, es infinita. Horrible, ¿no? ¿Entonces?.

Por esa razón, nosotros preferimos apegarnos al significado correcto de R como una cantidad retardada ($\tilde{R}$)

de la forma $\tilde{R} = \tilde{R}(t - \tilde{R}/c)$, aunque se vea fea. ¡Este no es un concurso de belleza! .

§3.- DESARROLLOS PREVIOS.

Las consideraciones expuestas en los párrafos anteriores nos van a obligar a ser muy cuidadosos en cada uno de los desarrollos que realicemos de aquí en adelante. A este respecto, los potenciales ϕ y $\bar{A}$ que antes se expresaban según (I-10), ahora están dados por:

$$\phi(r,t) = \int \left[\frac{\rho(r',t')}{SR} \right]_{ret} d^3r'$$

$$\bar{A}(r,t) = \frac{1}{c} \int \left[\frac{\bar{J}(r',t')}{SR} \right]_{ret} d^3r' , \qquad (1)$$

donde, como ya es usual, $S = 1 - \hat{n} \cdot \hat{\beta}$. Nótese que no omitimos ese factor en base a un argumento del tipo $\beta \approx 0$.

Las ecuaciones (1) muestran la dependencia de los potenciales ϕ y $\bar{A}$ con funciones retardadas de la forma $\left[\frac{f}{S} \right]_{ret}$ las cuales, siguiendo con el espíritu del método de Lorentz, debemos expresar en función del tiempo actual.

Para ese fin, debemos hacer uso de un desarrollo más general que el usado en los capítulos anteriores, entendiendo por ello uno en el cual se considere la dependencia temporal retardada de R . Este desarrollo es:

$$F(t') = F(t - \tilde{R}/c) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K!\,c^K} \frac{\partial^{K-1}}{\partial t^{K-1}} \left\{ R^K(t) \frac{\partial F(t)}{\partial t} \right\} , \qquad (2)$$

donde ahora todas las cantidades dentro de $\{ \}$ son actuales.

Adicionalmente, dado que $S=(1-\hat{n}\cdot\bar{\beta})=1+\dot{R}/c$ y que $\frac{\dot{R}}{c}<1$, podemos reescribir cualquier función de la forma $\left[\frac{f}{S}\right]_{ret}$ mediante un desarrollo en serie de potencias de $\dot{R}/c$, a saber,

$$\left[\frac{f}{S}\right]_{ret}=\left[\frac{\gamma}{1+\frac{\dot{R}}{c}}\right]_{ret}=\left[\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n}\dot{R}^n\right]_{ret}. \qquad (3)$$

Si aplicamos ahora el desarrollo (2) a la expresión (3), obtenemos una ecuación que contiene en su miembro derecho únicamente cantidades no retardadas, es decir, en función del tiempo t actual:

$$\left[\frac{f}{S}\right]_{ret}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,c^k}\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left\{R^k\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n}\dot{R}^n\right)\right\}. \qquad (4)$$

Se puede demostrar, haciendo un poco de algebrita, que (4) puede expresarse de manera más compacta como:

$$\left[\frac{f}{S}\right]_{ret}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,c^k}\frac{\partial^k\{f(t)R^k(t)\}}{\partial t^k}\quad; \qquad (5)$$

esta expresión, como es de esperarse, se reduce al desarrollo en serie usual cuando $R\neq R(t)$ (recuérdese que en ese caso $S=1$).

Dado el desarrollo (5), la manera de proseguir es ahora bastante similar a la de Lorentz. Así, sustituyendo (5) en (1) obtenemos las expresiones para los potenciales:

$$\phi(\bar{r},t)=e\int d^3r'\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,c^k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left\{\rho(r',t)R^{k-1}(t)\right\}$$

$$\bar{A}(r,t)=\frac{e}{c}\int d^3r'\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,c^k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left\{\rho(r',t)\,\bar{v}(t)\,R^{k-1}(t)\right\}, \qquad (6)$$

que son ahora las más generales que podemos construir (no hemos hecho aproximaciones aún).

Para continuar, podemos hacer una consideración para ganar simplicidad en los desarrollos subsecuentes. La idea consiste en no tomar en cuenta, por el momento, cualquier contribución a la fuerza proveniente del campo magnético. Sí, es tramposón, en base a lo expuesto en el capítulo II. Sin embargo, dado que nuestros cálculos aquí están hechos "a mano", las limitaciones de tiempo que tenemos nos impiden considerar a B: ¡el álgebra se complica mucho en ese caso! . Sin embargo, de acuerdo con nuestros resultados anteriores, las contribuciones magnéticas sólo aportarán correcciones en los coeficientes y no términos nuevos. Esto nos justifica bastante bien por ahora, aunque nos deja obligados a considerar las contribuciones magnéticas a la ecuación en un trabajo posterior. Sigamos adelante, con este "pecadillo" a cuestas, en la inteligencia que éste no aporta ideas físicas nuevas al problema; ya en el trabajo en proceso seguiremos contándoles.

§4.- LA ECUACION DE MOVIMIENTO.

En base a todo lo anterior y dada la definición de $\bar{E}_{prop}$ en función de los potenciales ϕ y $\bar{A}$, al sustituir las expresiones (6) en la ecuación (I-9) para $\frac{d\bar{P}}{dt}$, obtenemos que:

$$\frac{d\bar{P}}{dt}=e^2\int d^3r\int d^3r'\, \rho(r,t)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^K}{K!\,C^K}\frac{\partial^K}{\partial t^K}\Big\{\rho(r',t)\nabla R^{K-1} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\rho(r',t)\bar{v}(t)R^{K-1}(t)\big)\Big\}, \qquad (7)$$

que es la generalización de (I-11) al considerar la dependencia retardada de R .

Si tomamos en cuenta que $\bar{j}(r,t) = \rho(r\,t)\,\bar{v}(t)$, la ecuación (7) se puede escribir también como:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,c^k}\int d^3r \int d^3r'\; \rho(r,t)\,\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left\{ \rho(r'\,t)\,\nabla R^{k-1} + \frac{R^{k-1}(t)}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{j}(r',t) \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{j}(r',t)}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} R^{k-1}(t) \right\} . \qquad (8)$$

Los dos primeros términos de $\{\ \}$ dan origen a una expresión para la autofuerza similar a la de Lorentz (JACKSON, 1975), salvo que en (8) $R = R(t)$, y el último término representa una corrección que proviene precisamente de considerar esa dependencia retardada. Esta corrección presenta claramente términos no lineales y la denotaremos por $\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL}$; análogamente, la contribución similar a la de Lorentz la escribiremos como $\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{LOR}$. Así la ecuación (8) podemos expresarla como

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{LOR} + \left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL} , \qquad (9)$$

donde

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{LOR} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^{k+2}}\,\frac{2e^2}{3k!}\left(\frac{\partial^{k+1}\bar{v}}{\partial t^{k+1}}\right)\int d^3r' \int d^3r\; \rho(r,t)\,\rho(r',t)\,R^{k-1}(t) \qquad (10)$$

es el análogo de la ecuación (I-11), que es equivalente a la EIDAL, y

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL} = \frac{e^2}{c^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,c^k}\int d^3r \int d^3r'\; \rho(r,t)\,\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left\{ \bar{j}(r',t)\,\frac{\partial}{\partial t} R^{k-1}(t) \right\} \qquad (11)$$

es la corrección no lineal.

Ahora bien, dado que (10) es ya conocida por noso -- tros (y esperamos que también por ustedes), limitaremos nuestro análisis a las correcciones que a ella hace la expresión (11). Así, pues, vayamos al ataque.

Cabe señalar que si bien la ecuación de movimiento - (9) está expresada aquí en términos de sumatorias, ésta puede escribirse en forma integrodiferencial, como una generaliza -- ción a la EIDAL. Sin embargo, no la hemos incluido aquí debido a que aún quedan en ella algunos puntos por esclarecer y pulir; por el momento podemos afirmar, sin lugar a dudas, que garanti za condiciones de causalidad y cualidades semejantes. Por ahora, baste tener presente que este es un trabajo en proceso -- (JIMENEZ, 1984).

§5.- ANALISIS DE LA ECUACION.

Tomando en cuenta que la ecuación (11) no la hemos - expresado aquí en su forma integral, el camino más directo para su análisis es el de considerar las correcciones que cada - uno de los términos de la sumatoria aporta. No obstante, para seguir con la línea iniciada en el capítulo II, vamos a limi-- tar nuestro estudio hasta orden c^{-5} , o lo que es equivalente, analizaremos los términos con $K \leq 3$; ¡cuidado! , no estamos - cortando la serie en ese orden, sólo nos restringimos a él con fines comparativos, o bien, para estudiar las consecuencias de nuestra ecuación. A reserva de contar con una versión más elegante de (11), lo cual dejamos para más adelante, nos hasta -- con considerar los primeros términos de la serie para nuestros propósitos actuales.

De este modo, el término con $K=0$ en la expresión (11) es:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_0} = -\frac{e^2}{c^3}\bar{v}(t)\left\{\bar{v}(t)\cdot\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\rho(r',t)\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right\}, \qquad (12)$$

que se anula para distribuciones con simetría esférica --- (JACKSON, 1975), como es nuestro caso.

El siguiente término, con $K=1$, se anula directamente debido al factor $\frac{\partial R^{K-1}}{\partial t}$; o sea:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_1} = 0 \,. \qquad (13)$$

Así, no existen correcciones a orden c^{-2} y c^{-3}, lo cual concuerda con nuestra experiencia previa para partícula - puntual. Esto implica que la ecuación de AL es exacta a orden c^{-3}. ¿Pero qué pasa con los siguientes órdenes en c ?.

La contribución proveniente de $K=2$ ya no es nula. En efecto, de la ecuación (11) se obtiene que ese término es:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_2} = \frac{e^2}{2c^4}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r',t)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\bar{j}(r',t)\,\frac{\partial R}{\partial t}\right\}; \qquad (14)$$

si se considera que $\frac{\partial R}{\partial t} = -\hat{n}\cdot\bar{v}$, entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{TNL_2} = -\frac{e^2}{2c^4}\int d^3r\int d^3r'\ \rho(r,t)\left\{\frac{\partial^2\rho(r',t)}{\partial t^2}(\hat{n}\cdot\bar{v})\bar{v} + 2\frac{\partial\rho(r',t)}{\partial t}\left((\hat{n}\cdot\bar{v})\dot{\bar{v}}\right.\right.$$

$$\left.\left. +(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{v}\right) + 2\rho(r',t)\left((\hat{n}\cdot\bar{v})\ddot{\bar{v}} + (\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}\right)\right\}. \tag{15}$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad y teniendo en mente nuestro modelo para la distribución, el primero de los términos en (15) se reduce a:

$$\frac{2}{3}m_e\,(\bar{\beta}\cdot\dot{\bar{v}})\,\bar{\beta}\,, \tag{16}$$

y el segundo y tercer términos contribuyen en:

$$\frac{4}{3}m_e\left\{\beta^2\,\dot{\bar{v}} + (\bar{\beta}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{\beta}\right\}; \tag{17}$$

los dos últimos se expresan como:

$$I_1 \equiv -\frac{e^2}{c^4}\ddot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\ \rho(r,t)\,\rho(r',t)\,(\hat{n}\cdot\bar{v})$$

$$-\frac{e^2}{c^4}\dot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\ \rho(r,t)\,\rho(r',t)\,(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}}) \tag{18}$$

y promedian directamente a cero (tan, tan).

En resumen, para $K=2$ se tiene:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_2} = \frac{4}{3}m_e\left\{\beta^2\,\dot{\bar{v}} + \frac{3}{2}\,(\bar{\beta}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{\beta}\right\}. \tag{19}$$

Estas contribuciones dependen de la distribución de carga a -- través de la masa electromagnética m_e , y están relacionadas con las componentes transversal y longitudinal de ella, de acuerdo con lo expuesto en (II-§4).

Los primeros dos términos de (19) dan correcciones a orden β^2 y su forma concuerda muy bien con la de los términos obtenidos en el capítulo II. Más adelante volveremos a este punto, haciendo una comparación más detallada entre ambos resultados.

Finalmente, para $K=3$ se obtienen las siguientes correcciones a orden c^{-5}:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_3} = -\frac{e^2}{6c^5}\int d^3r \int d^3r' \, \rho(r,t) \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left\{ \bar{J}(r',t) \frac{\partial R^2}{\partial t} \right\}, \qquad (20)$$

o bien

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_3} = \frac{e^2}{3c^5}\int d^3r \int d^3r' \, \rho(r,t) \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left\{ R\, \bar{J}(r',t)\, (\hat{n}\cdot\bar{v}) \right\}. \qquad (21)$$

Desarrollando la tercera derivada parcial en el integrando de (21), se tiene que:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_3} = \frac{e^2}{3c^5}\int d^3r \int d^3r' \, \rho(r,t) \left\{ f_1 \bar{J}(r',t) + f_2 \frac{\partial \bar{J}(r',t)}{\partial t} + f_3 \frac{\partial^2 \bar{J}(r',t)}{\partial t^2} + f_4 \frac{\partial^3 \bar{J}(r',t)}{\partial t^3} \right\}, \qquad (22)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= R(\hat{n}\cdot\dddot{\bar{v}}) - 4(\hat{n}\cdot\bar{v})(\hat{n}\cdot\ddot{\bar{v}}) - 3(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}})^2 \\ f_2 &= 3R(\hat{n}\cdot\ddot{\bar{v}}) - 9(\hat{n}\cdot\bar{v})(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}}) \\ f_3 &= 3R(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}}) - 3(\hat{n}\cdot\bar{v})^2 \\ f_4 &= R(\hat{n}\cdot\bar{v}). \end{aligned} \qquad (23)$$

Así, del primer término en (22) se obtiene la corrección:

$$-\frac{4}{9}\,\frac{e^2}{c^5}(\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v}\;-\;\frac{1}{3}\,\frac{e^2}{c^5}\,\dot{v}^2\,\bar{v}\;+\;I_2 \tag{24}$$

con

$$I_2 \equiv -\frac{e^2}{3c^5}\,\bar{v}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\,\rho(r',t)\,(\bar{R}\cdot\dddot{\bar{v}})\;. \tag{25}$$

A su vez, el segundo término de (22) se reduce a:

$$\frac{e^2}{c^5}\,(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}\;-\;\frac{e^2}{c^5}\,\bar{v}(\,\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}}\,)\;+\;I_3\;\;, \tag{26}$$

con

$$I_3 \equiv \frac{3e^2}{c^5}\,\bar{v}\int d^3r\int d^3r'\;\rho(r,t)\,(\nabla'\cdot\bar{j}(r',t))(\hat{n}\cdot\bar{v})\,(\hat{n}\cdot\dot{\bar{v}}), \tag{27}$$

de modo que $I_3 = Q(\beta^3)$.

De igual manera, el tercer término contribuye con:

$$-\frac{1}{3}\,\frac{e^2}{c^5}\,v^2\,\ddot{\bar{v}}\;-\;\frac{2e^2}{c^5}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}\;-\;\frac{e^2}{c^5}\,\dot{v}^2\,\bar{v}\;+I_4\;+I_5, \tag{28}$$

donde

$$I_4 = \frac{e^2}{c^5}\,\ddot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\,\rho(r',t)\,(\bar{R}\cdot\dot{\bar{v}}) \tag{29}$$

e

$$\begin{aligned} I_5 = {} & \frac{2e^2}{c^5}\,\dot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\,\nabla'\cdot\bar{j}(r',t)\;(\hat{n}\cdot\bar{v})^2 \\ & +\frac{e^2}{c^5}\,\bar{v}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\,\nabla'\cdot\frac{\partial\bar{j}(r',t)}{\partial t}\,(\hat{n}\cdot\bar{v})^2\;; \end{aligned} \tag{30}$$

es decir, $I_5 = Q(\beta^3)$.

Finalmente, el último término en (22) da origen a:

$$-\frac{e^2}{c^5}v^2\dddot{\bar{v}}-\frac{e^2}{c^5}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\ddot{\bar{v}}+\frac{e^2}{3c^5}(\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v}+I_6+I_7\,, \quad (31)$$

con

$$I_6=\frac{e^2}{3c^5}\dddot{\bar{v}}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\rho(r',t)\,(\bar{R}\cdot\bar{v}) \quad (32)$$

e

$$I_7=-\frac{2e^2}{3c^5}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{v}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\,\nabla'\cdot\bar{j}(r',t)$$
$$-\frac{e^2}{3c^5}\,v^2\bar{v}\int d^3r\int d^3r'\,\rho(r,t)\,\nabla'\cdot\frac{\partial\bar{j}(r',t)}{\partial t}\,; \quad (33)$$

o sea, $I_7=\mathcal{O}(\beta^3)$.

En resumen, para $K=3$ se tiene:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_3}=-\frac{e^2}{c^5}\left\{\frac{4}{3}\dot{v}^2\bar{v}+2(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}+\frac{4}{3}v^2\ddot{\bar{v}}+\frac{10}{9}(\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v}\right\}$$
$$+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7\,. \quad (34)$$

De todo lo anterior se desprende que las correcciones a orden c^{-5} son:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL_3}=\frac{4}{3}m_e\left\{\beta^2\dot{\bar{v}}+\frac{3}{2c^2}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{v}\right\}$$
$$-\frac{4e^2}{3c^3}\left\{\frac{1}{c^2}\dot{v}^2\bar{v}+\frac{3}{2c^2}(\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}}\right\}$$
$$-\frac{2e^2}{3c^3}\left\{2\beta^2\ddot{\bar{v}}+\frac{5}{3c^2}(\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v}\right\}+I_2+I_4+I_6+\mathcal{O}(\beta^3). \quad (35)$$

Ahora bien, si se hace tender la distribución a una

de partícula puntual, y se toma el límite $\beta^3 \to 0$, entonces --
$I_2 = I_3 = \ldots = I_7 = 0$, y por tanto (35) se reduce a:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_{TNL} = \frac{4}{3} m_e \left\{ \beta^2 \dot{\bar{v}} + \frac{3}{2c^2} (\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{v} \right\} - \frac{4e^2}{3c^3} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{v}^2 \bar{v} + \frac{3}{2c^2} (\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}} \right\} - \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ 2\beta^2 \ddot{\bar{v}} + \frac{5}{3c^2} (\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v} \right\}. \tag{36}$$

Ahora bien, tomando en cuenta que en ese mismo límite:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{LOR} = \frac{4}{3} m_e \dot{\bar{v}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\bar{v}}, \tag{37}$$

entonces, por (9),

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}_{ant} = \frac{4}{3} m_e \left\{ (1+\beta^2)\dot{\bar{v}} + \frac{3}{2c^2} (\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\bar{v} \right\} - \frac{4e^2}{3c^3} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{v}^2 \bar{v} + \frac{3}{2c^2} (\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}})\dot{\bar{v}} \right\} - \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ (1+2\beta^2)\ddot{\bar{v}} + \frac{5}{3c^2} (\bar{v}\cdot\ddot{\bar{v}})\bar{v} \right\}. \tag{38}$$

La estructura de la ecuación (38) es exactamente la misma que la de (II-6). La diferencia en los signos se debe a las definiciones distintas (una de Lorentz, otra de Panofski) y la de los coeficientes se debe a las aproximaciones "cometidas" en ambos métodos; en particular, aquí no se consideró al campo magnético, y además los cálculos se hicieron "a mano", - lo cual es una posible fuente de error. Adicionalmente, en el método desarrollado en el capítulo II habían algunas inconsistencias relacionadas con el considerar unas veces la dependencia temporal (retardada) de R y otras veces no (¿se acuerdan?). Nosotros pensamos a este respecto que, dado los fines de este trabajo, no deben preocuparnos esas discrepancias numéricas. - Queríamos mostrar la existencia de términos no lineales, así - como su forma, y lo logramos.

Es importante señalar que al tener la misma estructura las ecuaciones (II-6) y (38), esto hace que esta última sea también comparable con la parte espacial de la ecuación de -- Lorentz-Dirac (II-17). Es decir, que nuevamente hemos obtenido "correcciones relativistas" en nuestro modelo actual. Los coeficientes en ambas descripciones no concuerdan evidentemente, y las causas de ello son, en esencia, las mismas expuestas en el capítulo II. Sin embargo, sorprende que todos los modelos - aquí presentados conducen al mismo tipo de ecuación no lineal, y esto con sólo evitar algunas de las aproximaciones que tan a la ligera se utilizan en los desarrollos usuales. Esperamos -- que esto nos obligue a ser más cuidadosos en lo sucesivo.

Pasando ahora a otro punto, deseamos hacer notar que la ecuación (35) representa la corrección, para el caso general $a \neq 0$, que se puede hacer a la expresión de Lorentz para la autofuerza, a orden c^{-3}. La forma de esa corrección está dada por la suma de dos contribuciones, una independiente - del tamaño de la distribución (que sobrevive en el límite $a \to 0$) y otra relacionada con las dimensiones de la partícula. Sin embargo, la ecuación (35) no es la ecuación de movimiento para -

la partícula, porque en ella hemos omitido un infinito de términos en los cuales hay aún mucha información física. No olvidemos que la idea de "pecar" fue sólo con el fin de extraer -- una información acorde con las líneas generales de nuestro trabajo. Que nos quede claro que la corrección "buena" es la (11), aunque aquí no la hayamos expresado de una manera más elegante.

Asímismo, cabe señalar que el uso de la ecuación -- (11) para el establecimiento de un balance de energía, se torna sumamente complejo y poco claro; es por eso que aquí no trabajaremos en ello. Pensamos que en su forma integrodiferencial se dejará manejar más fácilmente.

§6.- CONCLUSIONES.

Hemos demostrado ya que el considerar la dependencia temporal de R en la deducción de Lorentz da origen a una -- ecuación de movimiento que contiene a la expresión usual para la autofuerza (I-11), más una corrección no lineal compatible con los resultados previos para partícula puntual. El desarrollo, si bien laborioso, fue bastante directo a partir del conocimiento que de él teníamos desde los primeros capítulos.

El hecho de obtener finalmente nuestra ecuación más general de movimiento, en base al modelo dado, fue una consecuencia del análisis realizado en cada uno de los capítulos anteriores. De ese análisis surgieron las críticas a las aproximaciones usuales que conducen a la ecuación de Abraham-Lorentz que, como también demostramos, no es una ecuación apropiada para describir la dinámica de las partículas cargadas. El puntualizar insistentemente cada una de esas críticas, nos permitió establecer un modelo más adecuado, que no presentara varias de las dificultades que caracterizan a la ya tan familiar ecuación de Abraham-Lorentz (¡Qué bien!).

CAPITULO V

"CONCLUSIONES GENERALES"

"Sólo
A fuerza
De poesía
Deja uno
De ser
Un poeta
A fuerza"

E. Huerta

En este trabajo revisamos tan a fondo como nos fue posible algunas de las ideas básicas que pueden establecerse para la descripción de la dinámica de una partícula cargada. Estudiamos el efecto de la radiación sobre la carga sujeta a un movimiento traslacional, bajo el marco de una teoría clásica como lo es la Electrodinámica.

Guiados por la idea de entender dicha dinámica, comenzamos con una discusión acerca de la ecuación de Abraham-Lorentz; esto debido a que esa ecuación ocupa un papel preponderante en la literatura, hasta el grado de convertirse ya en un lugar común, y ha servido como base a diversas investigaciones relacionadas con el fenómeno de radiación. Sin embargo, dado que esa ecuación da origen a varias dificultades ya conocidas, nos lanzamos a analizar el problema de una manera cuidadosa.

Con este fin, fue necesario el entender y precisar el origen de dichas dificultades, para así evitarlas en los desarrollos posteriores. Esto se hizo a través del estudio cuidadoso de algunas de las deducciones más conocidas de esa ecuación. Nuestro trabajo posterior consistió simplemente en ir eliminando cada una de las aproximaciones que dan origen a esas dificultades, con la única intención de conocer los resultados a los que realmente conduce la teoría electromagnética si se hace un buen uso de ella. En otras palabras, deseábamos saber qué es lo que la Electrodinámica dice al respecto.

De esa labor de "sondeo" pudimos situar a tres aproximaciones como las más importantes por eliminar, a saber: la de partícula puntual, que conduce a la divergencia de la masa electromagnética y a la existencia misma de soluciones divergentes; la de considerar la descripción desde un marco instantáneamente en reposo respecto a la partícula, así como la de no tomar en cuenta la dependencia retardada de la distancia entre el elemento emisor y el elemento receptor de las señales electromagnéticas. Estas dos últimas consideraciones son las responsables de que la ecuación de Abraham-Lorentz sea lineal, lo cual impide comprender el balance de energía.

En base a lo anterior, nuestro primer paso fue el de eliminar la descripción desde un marco de referencia en reposo, lo cual nos llevó a obtener una ecuación no lineal para partícula puntual en la cual aparecían términos dependientes de la velocidad; esta dependencia era de esperarse al identificar la fuerza de autointeracción como una disipativa.

Más aún, estos términos presentaron una estructura idéntica a la parte espacial de la ecuación covariante de Lorentz-Dirac, deducida a partir de la Dinámica Relativista. Esto se vio reforzado por el hecho de que nuestra ecuación daba origen a algunos efectos característicos de la Relatividad, a través de la masa electromagnética; tales efectos se manifestaron en la aparición de una "masa longitudinal" y otra "transversal" al movimiento. Esto resaltó en una teoría no relativista como la nuestra.

Posteriormente, dejamos a un lado el problema de los términos no lineales y nos dedicamos al estudio de la Ecuación Integrodiferencial de Abraham-Lorentz (EIDAL), que surge de un modelo para partícula extendida. Mostramos cómo al evitar la aproximación para partícula puntual se solucionan varias de las dificultades inherentes a la ecuación de Abraham-Lorentz, de tal suerte que ya no se presentan las soluciones acausales, ni divergentes, así como se termina con el problema de la masa electromagnética infinita. No obstante, en esta ecuación no aparecían los términos no lineales ya obtenidos por nosotros en la ecuación para partícula puntual. Había que buscarlos.

Fue así como la parte final de nuestro trabajo fue destinada a la elaboración de un modelo más completo, que in--

cluyera cada uno de los resultados previos. Se trabajó así en el desarrollo de una ecuación no lineal para partícula extendida, pero dadas las limitaciones de tiempo, su análisis se llevó a cabo de una manera poco exhaustiva, aunque con esto bastó para demostrar su compatibilidad con cada una de las ecuaciones anteriores.

En la actualidad estamos elaborando un trabajo en el cual quede cubierto, en su totalidad, dicho análisis. Es una lástima que esto ya no hayamos podido incluirlo aquí.

De esta manera, llegamos al punto deseado, esperando que éste sirva como un primer paso para la construcción de una ecuación más general y permita, en lo posible, una mayor comprensión de las posibilidades y limitaciones de la Electrodinámica Clásica. Así sea. Por el momento, esperamos que este trabajo les haya parecido interesante, divertido y útil (no necesariamente en ese orden). ¡Hasta la próxima!

Lorena

y

José Luis

R E F E R E N C I A S

DABOUL, J.
Int.J.Theot.Phys. 11, 145 (1974)

DE LA PEÑA,L. , JIMENEZ,J.L. & MONTEMAYOR, R.
Nuo.Cim. 69B, 71 (1982)

EYGES,L.
"The Classical Electromagnetic Field"
Dover. N.Y. 1980.

FEYNMAN,R.P. , LEIGHTON,R.B. & SANDS,M.
"The Feynman Lectures on Physics"
Fondo Educativo Interamericano. EEUU . Vol.II. 1972.

FRANÇA,H.M. , MARQUES, G.C. & DA SILVA, A.J.
Nuo.Cim. 48A,65 (1978)

GOEDECKE,G.H.
Nuo.Cim. 28B,225 (1975)

JACKSON,J.A.
"Classical Electrodynamics"
John Wiley & Sons. N.Y. 1962
y 2a. edición de 1975.

JIMENEZ,J.L. & MONTEMAYOR, R.
Nuo. Cim. 73B,246 (1983)

JIMENEZ, J.L. & MONTEMAYOR, R.
Nuo.Cim. 75B, 87 (1983)

JIMENEZ, J.L.
En preparación (1984)

KATZ,R.
"Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad"
Reverté. México. 1968.

PANOFSKI,W. & PHILLIPS, M.
"Classical Electricity and Magnetism"
Addison-Wesley. Reading, Mass. 2nd. edition. 1962.

PAULI, W.
"Pauli Lectures on Physics: Electrodynamics"
MIT Press. Mass. Vol. I. 1981.

ROHRLICH, F.
"Classical Charged Particles"
Addison-Wesley. Reading, Mass. 1965.

ROHRLICH, F.
"The Electron: Development of the First Elementary Particle -- Theory".
D.Reidel. Holland. 1973.

SOMMERFELD, A.
"Electrodynamics"
Academic Press. N.Y. Vol.III. 1952.

TEITELBOIM, C.
Phys.Rev. D 1,1572 (1970)

...y para los aficionados a la poesía:

BORGES, J.L.
"Obra Poética, 1923-1976"
Alianza Editorial. Madrid. 1979.

HUERTA, E.
"Estampida de Poemínimos"
Premiá Editora. México. 4a.edición. 1983.

LEON FELIPE
"Antología Rota"
Ed. Losada. Buenos Aires. 9a.edición. 1978.

"Poesía en Movimiento. México, 1915-1966"
Siglo Veintiuno Editores. México. 14a.edición. 1980.
(Recopilación).