



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIO DE LAS FASES
ESTABILIDAD Y BIFURCACION

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

presenta

EMILIO JESUS FLORES LLAMAS

México, D.F. 1984.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

INTRODUCCION	2
I ESPACIO DE LAS FASES	4
1. Espacio de las fases	4
2. Propiedades del retrato de las fases de un sistema conservador	9
3. Dos ejemplos	11
4. Teorema de la conservación de la energía mecánica	15
5. Oscilador armónico	16
6. Sistemas lineales	19
7. Retrato fase de los sistemas lineales	28
8. Retrato fase para el oscilador sobreamortiguado	44
9. La integral de Bohlin y otras integrales para el oscilador amortiguado	51
II INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD	60
1. Concepto de estabilidad	60
2. Teorema de Lagrange	62
3. Estabilidad en los sistemas lineales	66
4. Teoremas de Liapunov	66
5. Interpretación geométrica de los teoremas de Liapunov	70
III BIFURCACION	73
1. Estudio del comportamiento de un sistema al variar los parámetros que lo caracterizan	73
2. Un ejemplo	77
CONCLUSIONES	87
BIBLIOGRAFIA	88
REFERENCIAS	88

INTRODUCCION

Las leyes de la física en general, y en particular las leyes de la mecánica clásica, se encuentran formuladas en lenguaje matemático. Las ecuaciones diferenciales juegan un papel especialmente importante en dicha formulación; con lo que la comprensión de la naturaleza a través de la física va aparejada a la comprensión de la matemática, así se impone cada vez más una mayor profundización de ésta, en particular, de las ecuaciones diferenciales que son las que describen los procesos de cambio en los sistemas.

En general, las ecuaciones diferenciales, salvo para un número reducido de ellas, no es posible resolverlas en forma analítica ni en forma exacta, sin embargo, es posible tener información cualitativa sobre el comportamiento del sistema aun cuando no se tenga la solución exacta de la ecuación diferencial. Tal información puede consistir, por ejemplo, en saber si el sistema tiene estados de equilibrio, si dichos estados de equilibrio son estables o inestables; si tiene soluciones periódicas, si tiene soluciones acotadas, etcétera.

El escenario natural para el análisis de las propiedades cualitativas de los sistemas, es precisamente el espacio de las fases. En este trabajo se establecen las bases para su estudio. En el primer capítulo se introduce el concepto de espacio

de las fases, así como las propiedades del retrato fase de un sistema conservativo, después, a través del teorema de la conservación de la energía mecánica, se traza el retrato fase de dicho sistema. Además se dibujan todos los retratos fase para un sistema lineal y se termina este primer capítulo con un estudio detallado del oscilador amortiguado.

En los capítulos II y III se desarrollan las ideas establecidas en el capítulo I. En el capítulo II se discute el concepto de estabilidad en el sentido de Liapunov. En el capítulo III se define el concepto de bifurcación de Poincaré, y se analiza un sistema particular a través de este concepto.

I. ESPACIO DE LAS FASES

1. ESPACIO DE LAS FASES

El movimiento de una partícula en una dimensión, queda descrito, en general, por la siguiente ecuación:

$$(I.1) \quad \ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

En particular si la fuerza no depende del tiempo, la ecuación (I.1) se reduce a:

$$(I.2) \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Cuando un sistema está descrito por una ecuación del tipo de la ecuación (I.2), se dice que el sistema es autónomo; con esto se quiere decir que, el sistema queda descrito o definido a través de una ecuación en la cual sólo aparecen explícitamente las variables del sistema, x , \dot{x} , y no aparece la dependencia con respecto del tiempo. En otras palabras, el sistema queda descrito por las variables que definen a dicho sistema y es autónomo en el sentido en que autodefine su evolución en el tiempo.

Las variables que determinan a tal sistema son la posición x y la velocidad \dot{x} , a las cuales se les llama las fases del sistema y al plano de las variables x y \dot{x} se le llama plano de las fases.

En términos de la variable \dot{x} (velocidad) la ecuación (I.2) se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden, como sigue:

$$(I.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= f(x, v) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ f(x, v) \end{bmatrix}$$

La ecuación (I.2) y el sistema (I.3) son equivalentes. Esto quiere decir que a partir de cualquier solución de (I.2) se puede construir una solución de (I.3), y dada una solución de (I.3) extraer una solución de (I.2).

En efecto, si $\varphi(t)$ es una solución cualquiera de (I.2), satisface la ecuación diferencial, esto es:

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi, \dot{\varphi});$$

haciendo $\dot{\varphi} = v$, la ecuación se transforma en:

$$\dot{v} = f(\varphi, v)$$

que da el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= v \\ \dot{v} &= f(\varphi, v) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ f(\varphi, v) \end{bmatrix}, \text{ siendo } \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = [\varphi(t), v(t)]^T \text{ una solución}$$

En otras palabras, a partir de una solución de (I.2) se obtiene una solución de (I.3), tomando a φ como la primera componente de la solución de (I.3) y a la derivada de φ , esto es, a v , como la segunda componente de la solución.

Recíprocamente, dada una solución del sistema (I.3) $[\varphi(t), v(t)]^T$ la primera componente de ésta es una solución de la ecuación (I.2). En efecto, por ser $[\varphi(t), v(t)]^T$ una solución de (I.3),

$$\dot{\varphi} = v$$

$$\dot{v} = f(\varphi, v)$$

derivando la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, se tiene:

$$\ddot{\varphi} = \dot{v} = f(\varphi, \dot{\varphi})$$

De donde φ es solución de (I.2).

Resolver la ecuación (I.2), desde el punto de vista de encontrar una o varias expresiones analíticas que representen al conjunto de soluciones de dicha ecuación, no siempre es posible; en la mayoría de los casos esto no es posible. Pero

desde el punto de vista cualitativo, el análisis de las propiedades de las soluciones, o sea, del comportamiento del sistema, lo da el sistema (I.3) del siguiente modo:

Una solución de (I.3) es un par de funciones $x(t)$ y $v(t)$. Si se toma a t como un parámetro, las funciones $x(t)$ y $v(t)$ representan la parametrización de una curva en el plano x, v (el plano de las fases del sistema). Dicha curva representa la evolución del sistema en el tiempo, esto es, los estados por los que el sistema pasa. El sistema (I.3) en lenguaje matricial queda como

$$(I.4) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ f(x, v) \end{bmatrix}$$

El vector velocidad de la curva $t \rightarrow [x(t), v(t)]^T$ es $[\dot{x}(t), \dot{v}(t)]^T$ ⁽¹⁾ el cual es tangente a dicha curva en el punto $[x(t), v(t)]^T$ al instante t . Ahora, del sistema (I.4) se tiene que el vector tangente es precisamente $[v, f(x, v)]^T$, de donde se puede asociar a cada punto $[x, v]^T$ del plano de las fases un vector de coordenadas $[v, f(x, v)]^T$. De esta forma se ha definido un campo vectorial en el plano de las fases de la siguiente manera:

$$(I.5) \quad \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} v \\ f(x, v) \end{bmatrix}$$

Esto es, G es el campo que le asocia a cada punto $[x, v]^T$ el vector $[v, f(x, v)]^T$.

Por lo anterior, el campo vectorial (I.5) es precisamente un campo que da la velocidad de las curvas solución de (I.4), en el plano de las fases. O sea, que las curvas solución en el espacio de las fases del sistema (I.4) son curvas tangentes al vector $[v, f(x, v)]^T$ en el instante t . Este hecho permite bosquejar las curvas solución en el plano de las fases del siguiente modo: En cada punto del plano está definido un vector, que es exactamente igual al vector velocidad de la curva en el punto. Trazando un número suficiente de estos vectores en el plano, simplemente se traza una curva tangente a dichos vectores y ésta será una curva solución, y al conjunto de dichas curvas se le llamará "retrato fase" o "retrato de las fases".

Puntos Críticos.

A los puntos del plano x, v en los cuales el campo se anula se les llama puntos críticos. Si

$$\begin{bmatrix} v \\ f(x, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$v=0 \quad \text{y} \quad f(x, v)=0$$

De donde los puntos críticos son de la forma $[x, 0]^T$ donde x es tal que $f(x, 0)=0$. Esto es, los puntos críticos del sistema (I.3) se encuentran sobre el eje x y representan estados del sistema. Pero ¿cuál es su significado físico?

Para ver el significado físico de los puntos críticos o también llamados de equilibrio, se considera la partícula del sistema (sistema definido por la ecuación (I.2)), la cual tiene velocidad igual a cero y además como $f(x,0) = 0$, de la ecuación (I.2) se ve que $\ddot{x} = 0$, esto es, en un punto de equilibrio tanto la velocidad \dot{x} como la aceleración \ddot{x} son iguales a cero. Es decir, que en un punto crítico la partícula se encuentra en reposo.

Para el estudio en el espacio de las fases de un sistema, es de suma importancia la caracterización de los puntos críticos del sistema. Con dicha caracterización se puede conocer el comportamiento del sistema en la vecindad de los puntos de equilibrio y eventualmente el comportamiento global del mismo.

2. PROPIEDADES DEL RETRATO DE LAS FASES DE UN SISTEMA CONSERVADOR

Para un sistema mecánico conservativo, que se encuentra gobernado por la ecuación

$$(I.4) \quad m \ddot{x} = F(x)$$

o por el sistema correspondiente

$$(I.5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{F(x)}{m} \end{aligned}$$

su retrato fase presentará las siguientes características, que se deducen del sistema de ecuaciones:

a) Los puntos de equilibrio están siempre situados sobre el eje x . Esto se deduce porque al igualar a cero \dot{x} y \dot{v} en el sistema (I.5) se tiene $v=0$ y $F(x)=0$, o sea que los puntos del plano de la forma $(x, 0)$, donde x es una raíz de la función $F(x)$, serán los puntos de equilibrio.

b) Las trayectorias fase cortan al eje v de izquierda a derecha cuando $v > 0$ y de derecha a izquierda cuando $v < 0$. Esto se debe a que, como $\dot{x} = v$, x será una función creciente cuando $v > 0$ y será decreciente cuando $v < 0$.

Además si $F(0)=0$ entonces $\dot{v} = \frac{F(0)}{m} = 0$ y esto quiere decir que el vector tangente a la curva fase cuando $x=0$, es $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$, que es un vector ortogonal al eje v . Lo anterior indica que en este caso, las curvas cortan al eje v ortogonalmente.

c) Las trayectorias sólo pueden cruzar el eje x perpendicularmente. Esto se puede hacer ver a partir del sistema (I.5) y utilizando la regla de la cadena, del siguiente modo:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{F(x)}{m}}{v} = \frac{F(x)}{mv}$$

y en el límite

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{dv}{dx} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{F(x)}{mv} \rightarrow \pm \infty \quad \text{si } F(x) \neq 0$$

En el caso en que $F(x) = 0$, el punto $(x, 0)$ es un punto crítico del sistema y la solución que se acerque a éste lo hace con cualquier pendiente y además tarda un tiempo infinito (por el teorema de existencia y unicidad). Y en este caso dicha solución no cruza el eje x .

d) No puede haber trayectorias paralelas al eje v . Porque si así fuera, sería un sistema con una velocidad variable y que no cambia de posición. Esto es contradictorio.

e) No puede haber trayectorias que recorran el eje x porque esto significaría que la partícula tiene velocidad cero siempre y va cambiando de posición, cosa imposible.

f) Las trayectorias son simétricas con respecto al eje x . Esto se puede ver, porque del teorema de la conservación de la energía mecánica se deduce que

$$v = \pm \left[\frac{2}{m} (E - V(x)) \right]^{1/2}$$

Esta propiedad se demostrará más adelante.

3. DOS EJEMPLOS

1° Partícula Libre

La ecuación de movimiento de la partícula libre de masa m es:

$$m \ddot{x} = 0$$

el sistema asociado a esta ecuación es:

$$\dot{x} = v$$

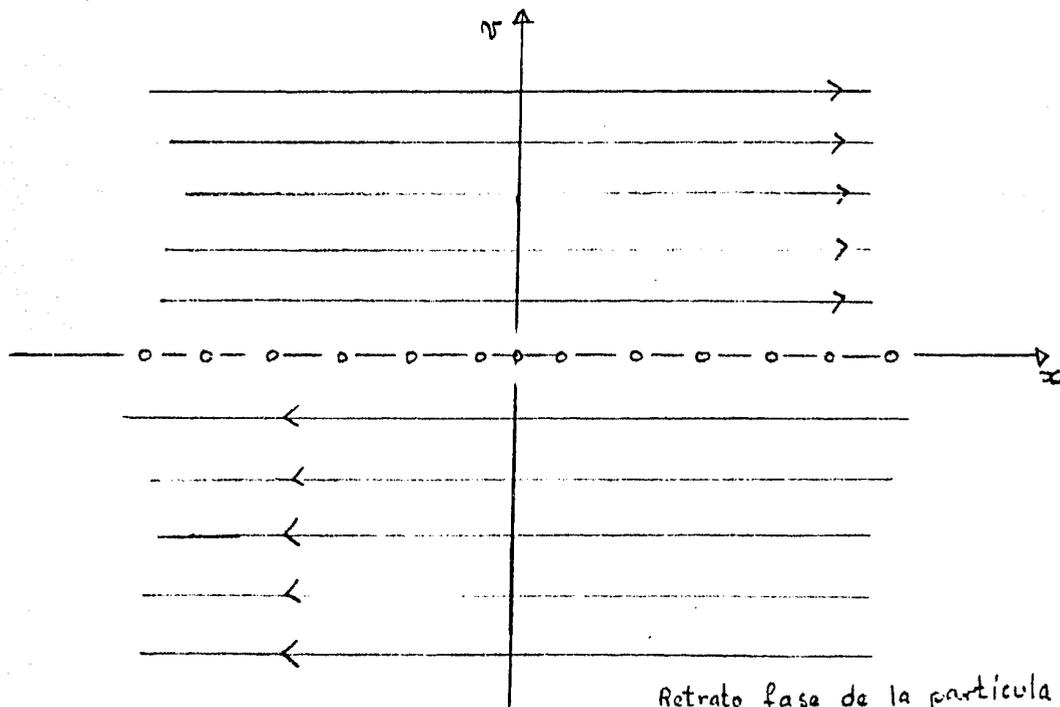
$$\dot{v} = 0$$

Los puntos críticos de este sistema son:

$$\dot{x} = v = 0$$

$$\dot{v} = 0 = 0$$

esto es, son los puntos sobre el eje x . Son puntos de la forma $(x, 0)$ y las trayectorias en el plano de las fases son rectas paralelas al eje x .



2° Caída libre

El movimiento es el de una partícula de masa m que se encuentra gobernado por medio de la segunda ley de Newton.

$$F = m\ddot{x}$$

donde la fuerza está dada por la ley de la gravitación universal de Newton

$$F = -G \frac{Mm}{r^2}$$

Considerando "pequeñas" variaciones de r ; $g = G \frac{M}{r^2}$ es prácticamente constante, de donde la ecuación resultante es:

$$m\ddot{x} = -gm$$

$$\ddot{x} = -g$$

El sistema asociado es:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -g$$

Por lo tanto, no tiene puntos críticos.

Las trayectorias en el espacio de las fases están dadas por la ecuación

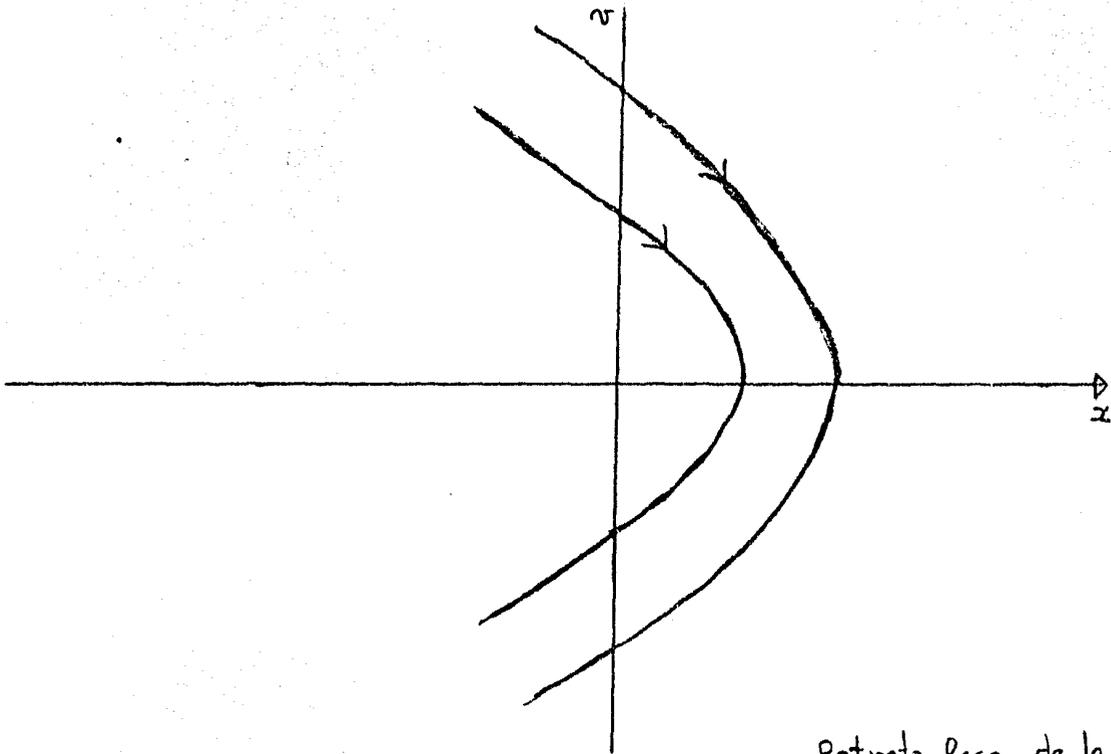
$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-g}{v}$$

Integrando:

$$\int v dv = -\int g dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 = -gx + C$$

Que es una familia de parábolas.



Retrato fase de la caída libre.

4. TEOREMA DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA.

Bajo la hipótesis de que la fuerza es conservativa, esto es, que es deducible de una función potencial

$$f(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$$

se demostrará que la energía mecánica total se conserva.

Teorema. Si $f(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$ entonces la energía mecánica total del sistema se conserva. Demostración:

$$m\ddot{x} = f(x)$$

multiplicando por \dot{x}

$$m\ddot{x}\dot{x} = -\dot{x} \frac{dV}{dx}$$

de donde

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) = - \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}$$

e integrando

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 = - \int_{t_0}^t \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} dt$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 = - \int_{x_0}^x \frac{dV}{dx} dx = -V(x) + V(x_0)$$

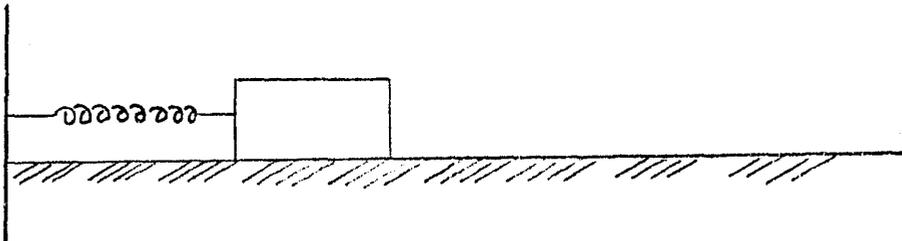
de donde, finalmente

$$(I.7) \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + V(x_0)$$

La ecuación (I.7), además de ser una ecuación de movimiento que es de primer orden, para ciertos sistemas, da un método geométrico para trazar las curvas en el espacio de las fases.

5. OSCILADOR ARMONICO

Como ejemplo se deducirá el retrato fase del oscilador armónico. El oscilador armónico consta de un objeto de masa m sujeto a un extremo de un resorte, y el resorte a su vez se encuentra fijo por el otro extremo (ver figura)



Considerando que el resorte cumple la ley de Hooke, la fuerza que actúa sobre la masa al ser estirado es $f(x) = -kx$,

(K es una constante que depende del resorte). Sin considerar la fricción debida al aire, ni la debida a la mesa sobre la que se desliza la masa, la ecuación de movimiento que resulta es:

$$m\ddot{x} = -kx$$

y la energía potencial asociada al sistema es

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Aplicando el teorema de conservación de la energía se tiene

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

ecuación que representa una familia de elipses, despejando la velocidad ($\dot{x} = v$)

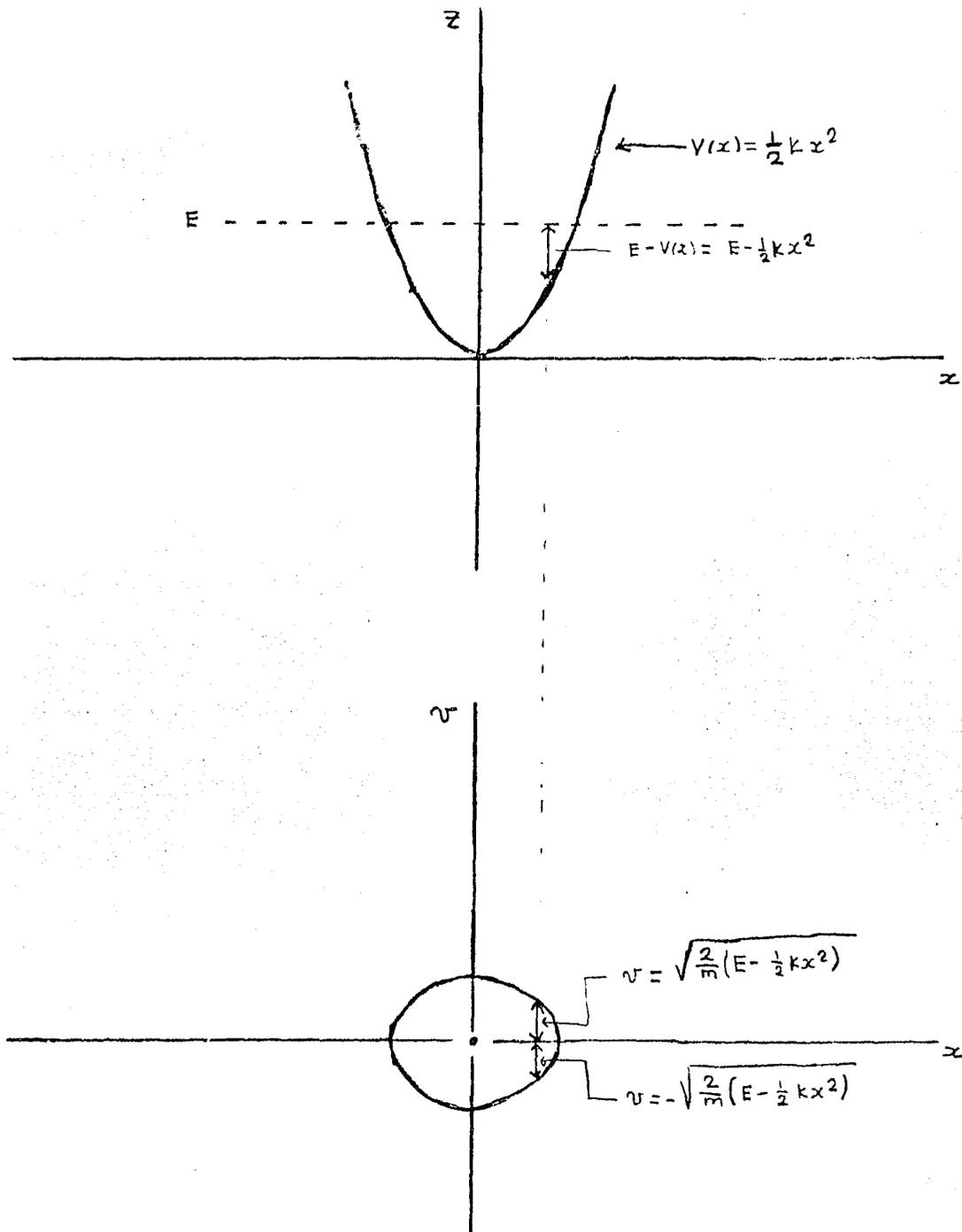
$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - \frac{1}{2} k x^2)}$$

De esta última fórmula se llega a que las curvas son simétricas respecto del eje x , como ya se había hecho notar anteriormente.

Para trazar las curvas en el plano fase, se consideran dos planos, el x, z y el x, v .

En el plano x, z , se traza la curva $z = \frac{1}{2} k x^2$, que representa a la energía potencial. Se considera un cierto nivel de energía $E = z$. Se toma la diferencia $E - \frac{1}{2} k x^2$ y se

multiplica por $2/m$; se resuelve la raíz cuadrada, se obtienen los dos valores correspondientes a v que se grafican en el plano x,v , como se muestra en la figura siguiente



Forma de trazar las curvas en el plano de las fases.

De esta forma se ve que las curvas en el espacio de fases son cerradas y simétricas con respecto al eje x y al eje v (elipses). Y claramente, que el único punto crítico es el origen.

6. SISTEMAS LINEALES

Soluciones Analíticas.

Ahora se analizarán las ecuaciones diferenciales de 2° orden, lineales.

$$(I.8) \quad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

las cuales representan, en general, a los sistemas oscilantes libres y amortiguados. Escribiendo la ecuación (I.1) como sistema se tiene:

$$(I.9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -bx - av \end{aligned} ;$$

en notación matricial

$$(I.10) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

o sea

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x},$$

donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

El sistema (I.10) no es más que un caso particular del siguiente sistema

$$(I.11) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como en lo anterior, se supone que el sistema (I.11) tiene soluciones y además que dada una cierta condición inicial la solución es única.

Para iniciar el estudio de las soluciones de los sistemas representados por (I.11), se resolverán tres casos particulares.

Primer caso.

$$(I.12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y \end{aligned}, \quad \dot{\bar{x}} = A \bar{x} \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La solución general es:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

en lenguaje vectorial

$$(I.13) \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{x}_1(t) + c_2 \bar{x}_2(t)$$

donde $\bar{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$

Segundo caso.

$$(I.14) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = -bx + ay \end{cases}, \quad \dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para este caso una forma sencilla de resolver el sistema es la siguiente. Sea $z = x + iy$, entonces x y y son soluciones si y sólo si

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} = ax + by + i[-bx + ay] \\ &= [a - ib]x + [a - ib]iy \\ &= [a - ib][x + iy] = [a - ib]z. \end{aligned}$$

De donde

$$z(t) = C e^{(a-ib)t}$$

haciendo $C = C_1 + iC_2$, se obtiene

$$z(t) = (C_1 + iC_2) e^{(a-ib)t} = (C_1 + iC_2) e^{at} e^{-ibt} = (C_1 + iC_2) e^{at} (\cos bt - i \sin bt)$$

$$z(t) = e^{at} [C_1 \cos bt + C_2 \sin bt + i(C_2 \cos bt - C_1 \sin bt)]$$

Por lo tanto la solución de (I.14) es

$$x(t) = e^{at} [C_1 \cos bt + C_2 \sin bt]$$

$$y(t) = e^{at} [-C_1 \sin bt + C_2 \cos bt]$$

La solución de (I.14) en lenguaje matricial es:

$$(I.15) \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt \\ -\operatorname{sen} bt \end{bmatrix} + C_2 e^{at} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} bt \\ \cos bt \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = C_1 \bar{x}_1(t) + C_2 \bar{x}_2(t)$$

donde

$$\bar{x}_1(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt \\ -\operatorname{sen} bt \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} bt \\ \cos bt \end{bmatrix}$$

Tercer caso.

$$(I.16) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + y \\ \dot{y} &= \lambda y \end{aligned}, \quad \dot{\bar{x}} = A \bar{x}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

En este caso, primero se resuelve la 2a. ecuación para obtener $y(t)$. A continuación se sustituye ésta en la 1a. ecuación para obtener $x(t)$.

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda x + C_1 e^{\lambda t}$$

de donde

$$\dot{x} - \lambda x = C_1 e^{\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t} (\dot{x} - \lambda x) = C_1$$

$$\frac{d}{dt} (x e^{-\lambda t}) = C_1$$

$$x e^{-\lambda t} = c_1 t + c_2$$

$$x(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$$

Por lo tanto la solución del sistema es

$$x(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}$$

y en lenguaje vectorial:

$$(I.17) \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{x}_1(t) + c_2 \bar{x}_2(t)$$

donde

$$\bar{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema general representado por la ecuación (I.11)

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x},$$

el cual queda completamente caracterizado por la matriz A de orden 2, se emplearán las soluciones de las tres formas elementales anteriores con un cambio de base del siguiente modo:

Sea
$$\bar{x} = P \bar{y}$$

donde P es una matriz de cambio de base⁽²⁾, derivando la ecuación anterior se obtiene

$$\dot{\bar{x}} = P \dot{\bar{y}}$$

y sustituyendo en el sistema $\dot{\bar{x}} = A \bar{x}$, se tiene que

$$P \dot{\bar{y}} = AP \bar{y}$$

de donde

$$(I.18) \quad \dot{\bar{y}} = (P^{-1}AP) \bar{y}$$

$$\dot{\bar{y}} = B \bar{y} \quad \text{donde} \quad B = P^{-1}AP$$

Esto es, que el sistema (I.11) se transforma en el sistema (I.18). Ahora la matriz que caracteriza al sistema es $B = P^{-1}AP$. Dada una matriz A , ésta puede ser transformada, mediante un cambio de base apropiado P , en una de las siguientes tres matrices

$$i) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad iii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

O sea que cualquier matriz A es similar a alguna de las tres matrices anteriores. Con lo que queda resuelto el sistema (I.11) en general; y esto es precisamente lo que se hace a continuación.

Primer caso. Suponiendo que A es diagonalizable, y escogiendo a

$$P = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2] \quad , \quad \text{donde} \quad A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

$$A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2 = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

entonces

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = B$$

y la solución del sistema

$$\dot{\bar{y}} = B \bar{y}$$

es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

de donde la solución del sistema original es

$$\bar{x} = P \bar{y}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} c_1 e^{\lambda_1 t} + x_{21} c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_{12} c_1 e^{\lambda_1 t} + x_{22} c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

De donde la solución de (I.11), en este caso es

$$(I.19) \quad \bar{x}(t) = c_1 \bar{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{x}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Segundo caso. Supóngase que A tiene eigenvalores complejos y por lo tanto eigenvectores complejos.⁽³⁾ Sean $\lambda = \alpha \pm i\beta$ sus eigenvalores y $\bar{x} = \bar{\mu} \pm i\bar{\nu}$ sus correspondientes eigenvectores. Sea

$$P = \begin{bmatrix} \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{bmatrix}, \quad \text{donde } \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\dot{\bar{y}} = (\bar{P}' A P) \bar{y}, \quad \text{donde } \bar{P}' A P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

la solución de este sistema es

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix}$$

y la solución para el sistema (I.11) es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}$$

$$(I.20) \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\alpha t} \left\{ \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \right\} + c_2 e^{\alpha t} \left\{ \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \sin \beta t + \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \right\}$$

Tercer caso. Cuando A tiene un único eigenvalor λ , puede ser llevada a la forma triangular. Sea λ el eigenvalor y $\bar{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$ el eigenvector. Se construye el vector $\bar{\nu}$ a partir del sistema siguiente

$$\bar{\mu} = (A - \lambda I) \bar{\nu}, \quad \bar{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

En este caso, la matriz P de cambio de base es

$$P = \begin{bmatrix} \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{bmatrix}$$

De la cual se obtiene el sistema

$$\dot{\bar{y}} = (\bar{P}^{-1} A P) \bar{y} \quad \text{donde} \quad \bar{P}^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

y su solución es

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} \\ c_1 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

De donde la solución del sistema original es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} \\ c_1 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

y haciendo el producto de matrices

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} t e^{\lambda t} + c_2 \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

o bien

(I.21)

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{\mu} t e^{\lambda t} + c_2 \bar{\nu} e^{\lambda t} + c_2 \bar{\mu} e^{\lambda t}$$

Resumiendo, se ha determinado la solución de cualquier sistema lineal de primer orden con dos incógnitas, mediante la resolución de tres sistemas particulares sencillos.

7.- RETRATOS FASE DE LOS SISTEMAS LINEALES

Considérese el sistema autónomo

$$(I.22) \quad \dot{\bar{x}} = A \bar{x}$$

o expresado en coordenadas

$$(I.23) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned}$$

Primero se determinan las soluciones constantes o de equilibrio del sistema (I.23) y para ello se igualan \dot{x}_1 y \dot{x}_2 a cero; esto es:

$$(I.24) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0 \end{aligned} \quad ;$$

El sistema tiene una solución si su determinante es distinto de cero. En el caso en que su determinante sea nulo hay un número infinito de soluciones de equilibrio del sistema (I.23). Cuando el sistema tiene un número infinito de soluciones, éstas pueden estar sobre una línea recta o sobre todo el plano. A continuación se verán los distintos retratos fase del sistema (I.23) considerando que el sistema tiene una sola solución constante, que es

$$x_1(t) = 0$$

$$x_2(t) = 0$$

La solución general del sistema (I.22)

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

cuando A es diagonalizable, está dada por la ecuación (I.19)

$$x(t) = c_1 \bar{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{x}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} A\bar{x}_1 &= \lambda_1 \bar{x}_1 \\ A\bar{x}_2 &= \lambda_2 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

a) Primer caso: $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$

La única solución de equilibrio está representada por el punto crítico $(0,0)$.

Si en la solución general, hacemos $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$, se tiene que

$$\bar{x}(t) = c_2 \bar{x}_2 e^{\lambda_2 t}$$

la cual representa una familia de soluciones que se encuentran montadas, en el espacio de las fases, sobre la línea recta determinada por el eigenvector \bar{x}_2 .

Ahora, si en la solución general, $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$

$$x(t) = c_1 \bar{x}_1 e^{\lambda_1 t}$$

de donde se deduce un conjunto de soluciones que se encuentran, en el espacio de las fases, sobre la recta determinada por el eigenvector \bar{x}_1 . (ver figura 1)

Además, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = (0,0)$$

Esto es, todas las soluciones tienden a la solución de equilibrio conforme t tiende al infinito. Y las soluciones que no

están sobre alguna de las rectas se acercan al origen, tangentes a la recta definida por \bar{x}_2 . En este caso, al origen se le llama un nodo.

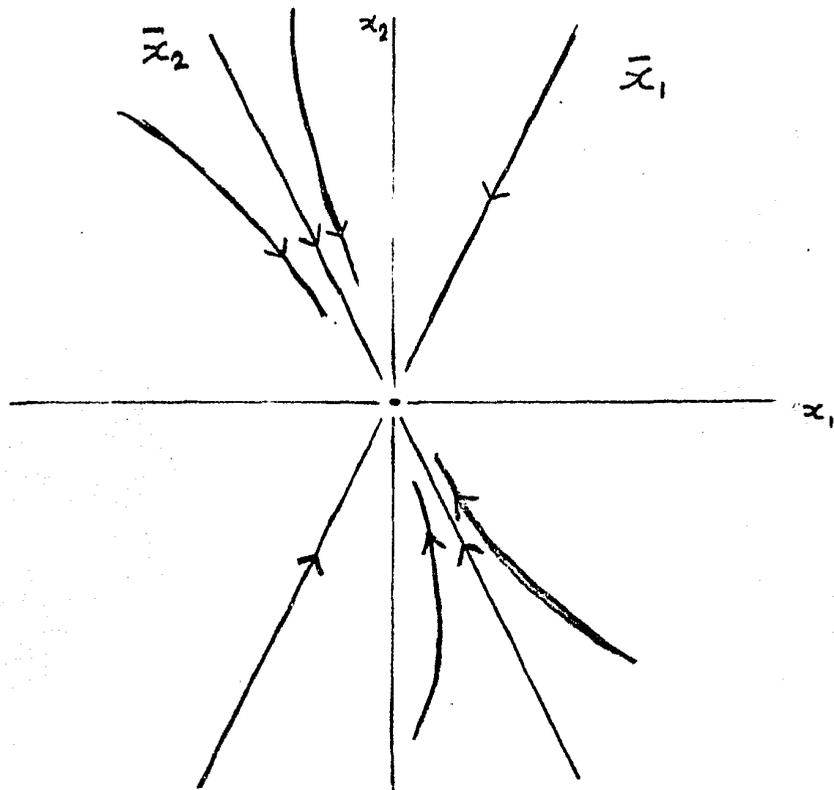


Fig.1 Retrato fase de un sistema con eigenvalores negativos. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
El origen es un nodo.

b) Segundo caso: Sean $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Las curvas en el plano de las fases son las mismas del caso anterior; la diferencia está en el sentido de recorrido de

éstas. Estas curvas no tienden al origen conforme t tiende a infinito. En este caso al origen se le llama también un nodo. (ver figura 2)

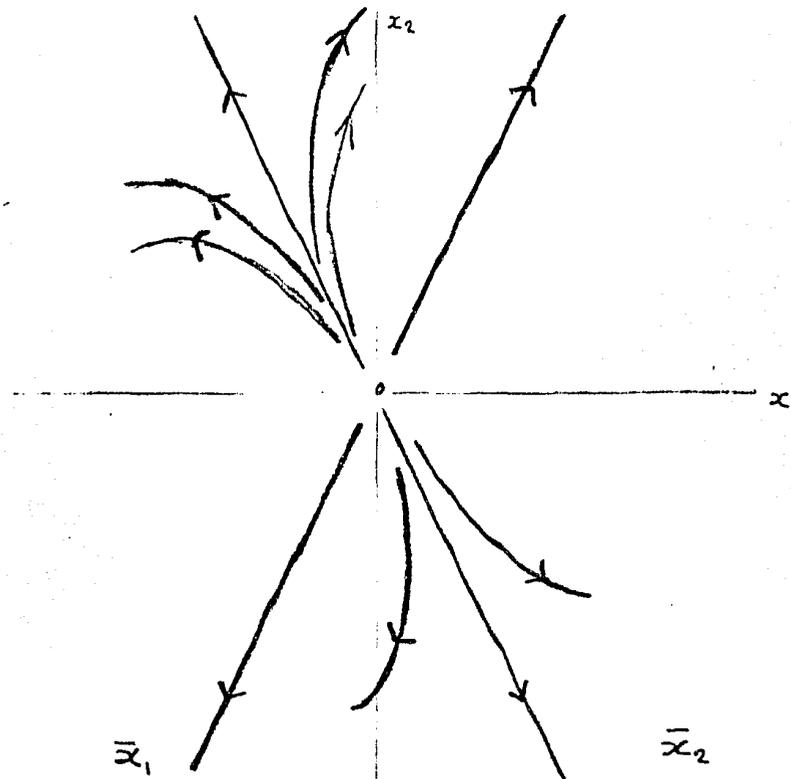


Fig.2 Retrato fase de un sistema con eigenvalores positivos. $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$
El origen es un nodo.

c) Tercer caso: Sean $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

En este caso al origen se le conoce como punto silla o puerto. Existen dos casos particulares de la solución general. Uno es cuando $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$ de donde:

$$x(t) = C_2 \bar{x}_2 e^{\lambda_2 t}$$

que representa a un conjunto de soluciones que se encuentran sobre la línea recta definida por el eigenvector \bar{x}_2 . y $\bar{x}(t)$ no tiende al origen cuando t tiende al infinito. Otra familia de soluciones se tiene cuando $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$. Esta familia se encuentra sobre la recta definida por el eigenvector \bar{x}_1 y $x(t)$ tiende al origen cuando t tiende al infinito. Por la continuidad del campo vectorial, definido por el sistema, se pueden trazar las demás curvas que son como hipérbolas como se muestra en la figura 3.

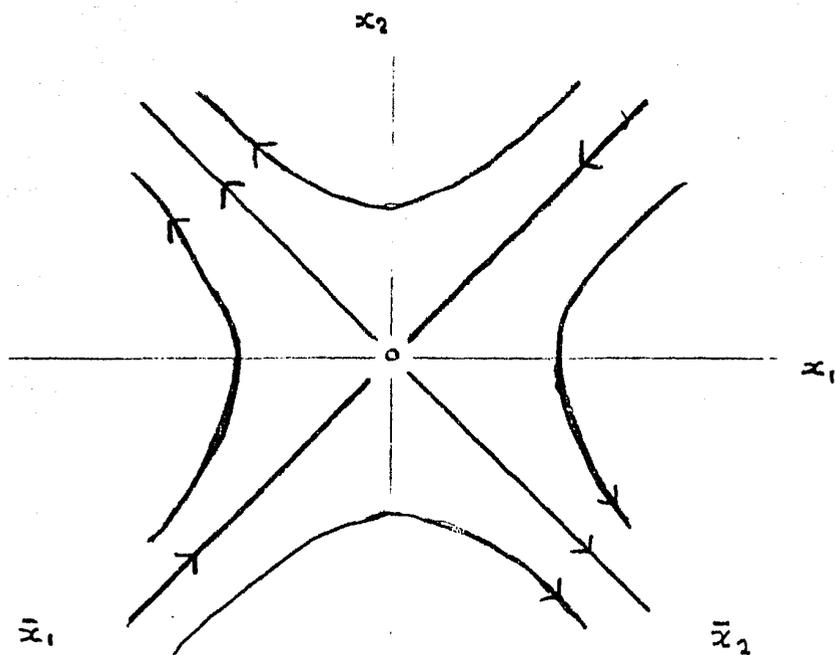


Fig.3 Retrato fase de un sistema con un eigenvalor positivo y un eigenvalor negativo. El origen es un punto silla.

d) Cuarto caso: Cuando sólo hay un único eigenvalor $\lambda < 0$

En este caso la solución general está dada por la ecuación (I.17)

$$x_1(t) = \mu_1 (c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}) + \nu_1 c_1 e^{\lambda t}$$

$$x_2(t) = \mu_2 (c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}) + \nu_2 c_1 e^{\lambda t}$$

cuando $c_1 = 0$,

$$x_1(t) = c_2 \mu_1 e^{\lambda t}$$

$$x_2(t) = c_2 \mu_2 e^{\lambda t}$$

de donde

$$x_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} x_1$$

que representa una familia de curvas solución que se encuentran sobre la línea recta que pasa por el origen y de pendiente $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Además como $\lambda < 0$, todas las soluciones tienden a cero cuando t tiende al infinito y tienden asintóticamente a la recta de pendiente $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. En este caso al origen se le llama nodo impropio. (ver figura 4)

e) Quinto caso. Cuando hay un único eigenvalor $\lambda > 0$

El retrato fase es igual al caso anterior sólo que aquí las curvas ya no tienden al origen. (ver figura 5)

f) Sexto caso. Cuando se tienen dos eigenvalores imaginarios.

Si $\lambda = \pm i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$; las soluciones están dadas por la

ecuación (I.13b) y éstas a su vez provienen de la ecuación (I.13a) mediante la transformación lineal P (o cambio de base P). Las curvas fase en el plano y_1, y_2 están dadas por

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Esta última igualdad dice que, dado el vector de condiciones iniciales $[C_1, C_2]^T$ éste es rotado por la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}$$

de manera continua conforme pasa el tiempo, describiendo una circunferencia alrededor del origen. Por lo que el retrato fase en el plano y_1, y_2 son circunferencias con centro en el origen, que al ser transformadas mediante P (P es una transformación lineal) al plano x_1, x_2 se obtienen curvas cerradas alrededor del origen. (ver figura 6). En este caso al origen se le llama un centro.

g) Séptimo caso. Cuando se tienen eigenvalores complejos, tanto con parte real como con parte imaginaria distinta de cero, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, las soluciones en las variables y_1 y y_2 están dadas, de nueva cuenta, por la ecuación

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix}$$

que se puede reescribir de la siguiente manera.

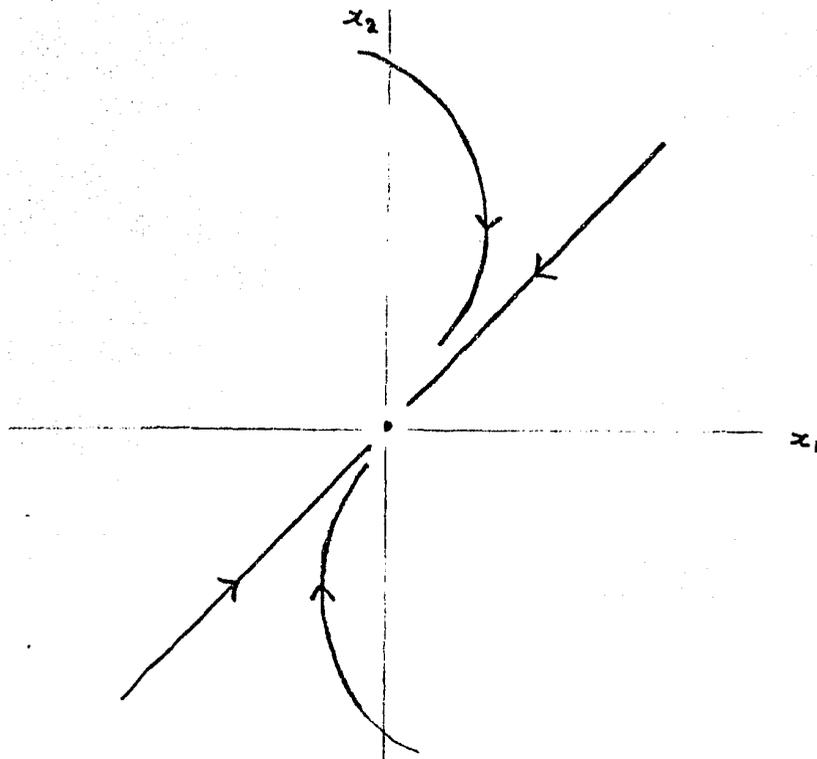


Fig.4 Retrato fase de un sistema con un único eigenvalor negativo. $\lambda < 0$.
Al origen se le llama nodo impropio.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \rho t & \sin \rho t \\ -\sin \rho t & \cos \rho t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Ahora, como la transformación

$$e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \rho t & \sin \rho t \\ -\sin \rho t & \cos \rho t \end{bmatrix}$$

representa una rotación seguida de una dilatación o una contracción (por un factor de $e^{\alpha t}$), el vector de condiciones iniciales $[c_1, c_2]^T$ rotará y se dilatará (cuando $\alpha > 0$). Esto es, describen espirales alrededor del origen. Estas espirales van a dar bajo P a curvas en el plano x_1, x_2 que también "espiralean" alrededor del origen (ver figuras 7 y 8). Por

lo que al origen se le conoce como espiral.

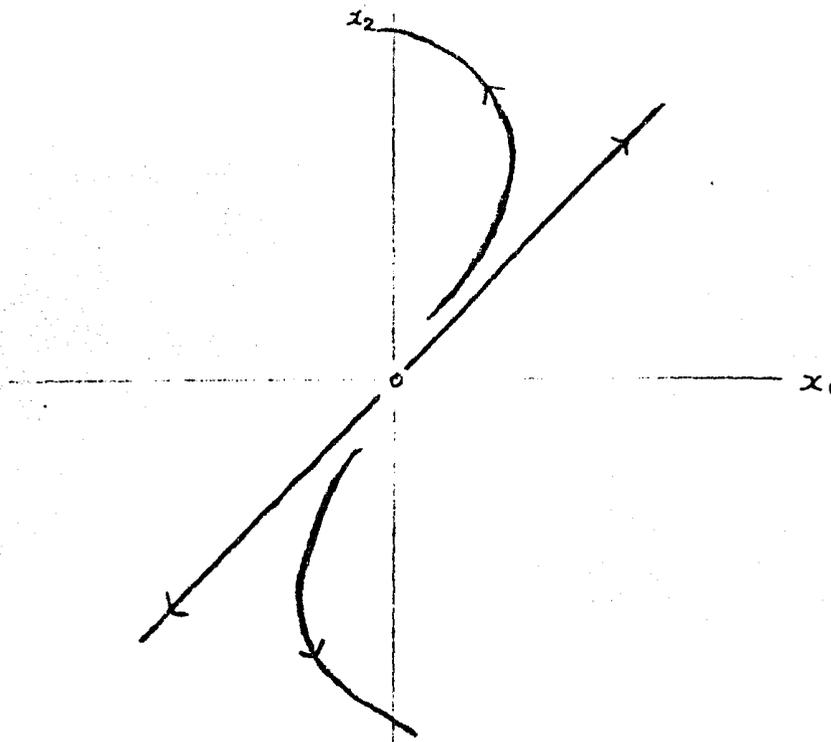


Fig.5 Retrato fase de un sistema con un único eigenvalor positivo. $\lambda > 0$
El origen es un nodo impropio.

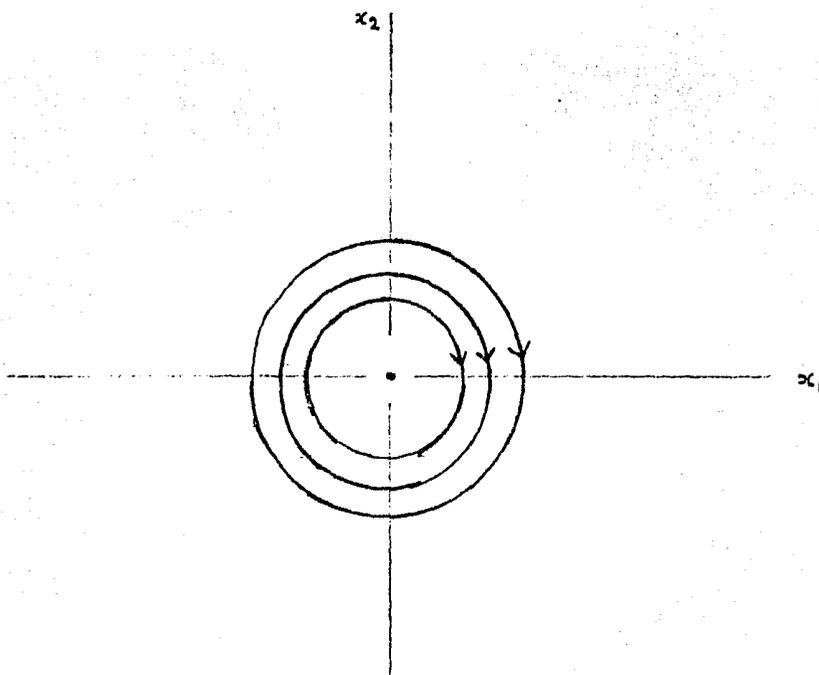


Fig.6 Retrato fase de un sistema con eigenvalores imaginarios puros $\lambda = i\beta$
En este caso al origen se le llama centro.

En todos los casos anteriores el único punto crítico, de cada uno de los sistemas, es el origen. Aparte de estos casos existen otros dos donde el punto crítico no es único. En estos casos el número de puntos críticos es infinito y dichos puntos críticos se encuentran en un espacio vectorial de dimensión uno o de dimensión dos. Esto es, están sobre una línea recta o en todo el plano. Para ver esto supóngase que uno de los eigenvalores se anule y el otro no: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. La solución está dada por (I.12).

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{x}_2 e^{\lambda_2 t} + c_2 \bar{x}_1$$

de donde los puntos críticos están sobre la recta definida por el vector \bar{x}_1 , y las curvas fase estarán sobre rectas paralelas al vector \bar{x}_2 . (ver figura 9).

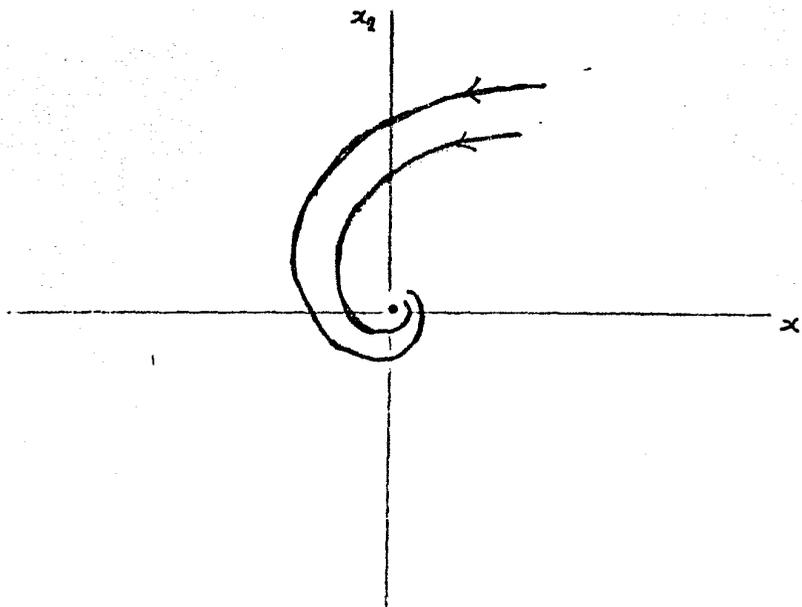


Fig. 7 Retrato fase de un sistema con eigenvalores complejos $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$. En este caso al origen se le llama una espiral.

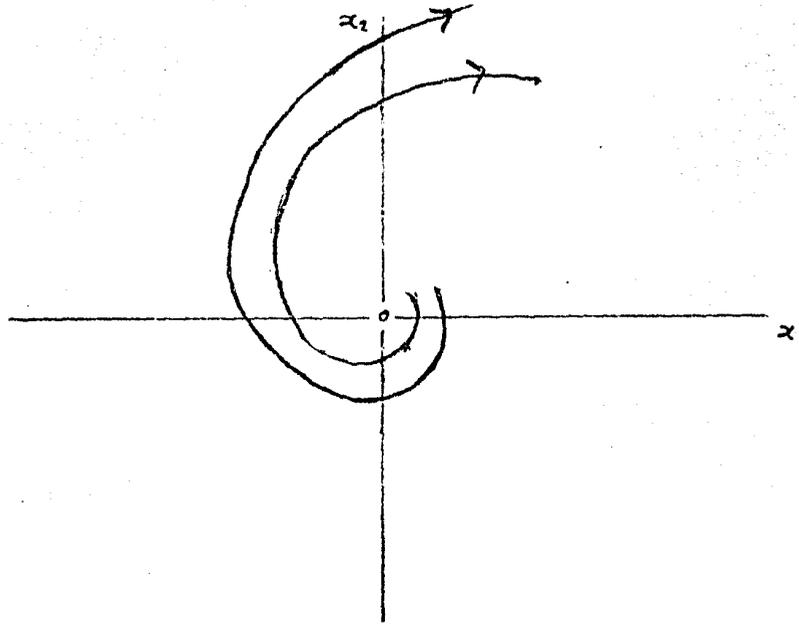


Fig.8 Retrato fase de un sistema con eigenvalores complejos $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$. Al origen se le llama una espiral.

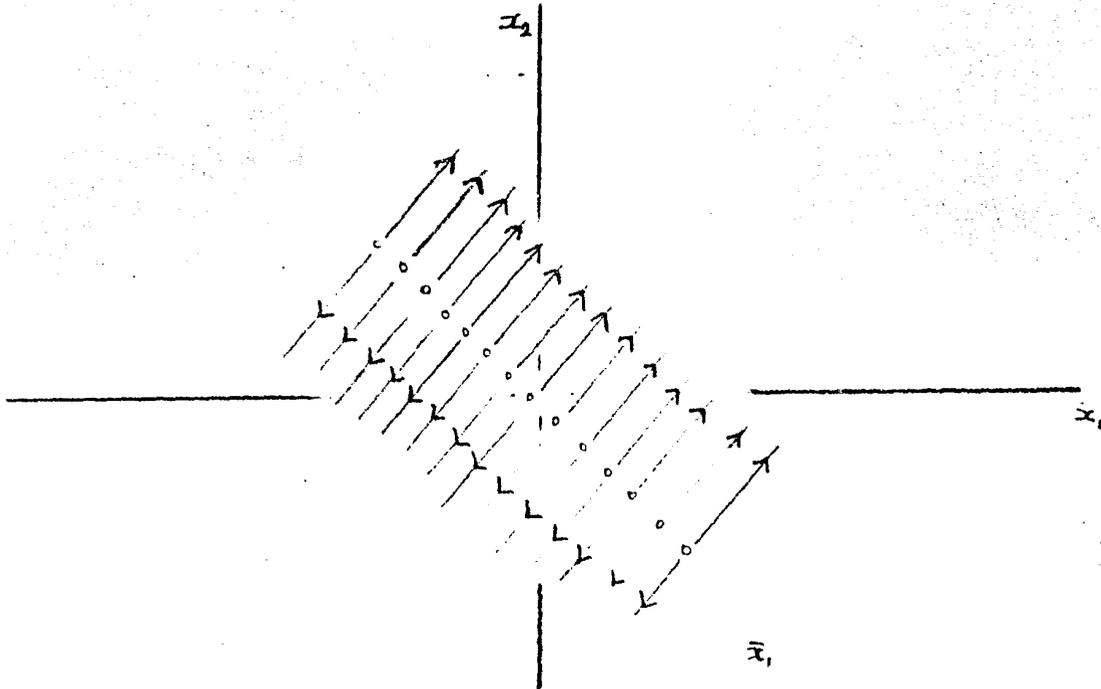


Fig.9 Retrato fase de un sistema con un número infinito de puntos críticos que se encuentran sobre una línea recta.

Cuando los dos eigenvalores se anulan ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) las soluciones también están dadas por

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2$$

las cuales representan a todos los puntos del plano, cuando \bar{x}_1 y \bar{x}_2 sean linealmente independientes. Esto es todos los puntos del plano son puntos críticos.

Para resumir los resultados anteriores se toma la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

que caracteriza al sistema (I.11). El polinomio característico asociado a A es

$$\lambda^2 - (\text{Tr} A) \lambda + \text{Det} A = 0$$

donde

$$\text{Tr} A = a_{11} + a_{22}$$

$$\text{Det} A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y los eigenvalores son

$$(I.25) \quad \lambda = \frac{(\text{Tr} A) \pm \sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \text{Det} A}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[(\text{Tr} A) \pm \sqrt{\Delta} \right]$$

donde

$$\Delta = (\text{Tr} A)^2 - 4 \text{Det} A$$

Como se ha visto en lo anterior, los valores característicos de la matriz A determinan completamente el tipo de retrato fase del sistema (I.4). A su vez los valores característicos de la matriz A , quedan determinados por los valores del determinante y la traza de A (ecuación (I.17)). Por lo que los retratos fase quedan determinados por los valores del determinante y la traza de A .

Para hacerlo en un esquema, se grafica el $\text{Det } A$ en el eje vertical y la $\text{Tr } A$ en el eje horizontal de un plano cartesiano. De esta forma cada punto en el plano tiene coordenadas $(\text{Tr } A, \text{Det } A)$. Con esto se caracteriza el tipo de retrato fase o punto crítico según la región del plano donde se encuentre el punto $(\text{Tr } A, \text{Det } A)$. Para dividir el plano en las diferentes regiones se empieza por localizar los puntos para los cuales el discriminante se anula ($\Delta = 0$).

$$(\text{Tr } A)^2 - 4(\text{Det } A) = 0$$

Este conjunto de puntos es una parábola (ver figura 10). Para estos puntos se tienen eigenvalores repetidos

$$\lambda = \frac{1}{2} (\text{Tr } A)$$

por lo que el origen es un nodo impropio.

Ahora cuando $\Delta > 0$ se tiene

$$(\text{Det } A) < \frac{1}{4} (\text{Tr } A)^2$$

Los puntos que satisfacen esta desigualdad, son los que se

encuentran sobre la parábola $(\text{Det } A) = (\text{Tr } A)^2 / 4$. En este caso ($\Delta > 0$) se tienen dos raíces reales y distintas. Si además $\text{Det } A > 0$ se tiene que las raíces son del mismo signo. Esto es, se obtienen nodos propios.

En el caso de que $\Delta > 0$ y $(\text{Det } A) < 0$ se tienen dos raíces reales y de signos opuestos. Estos puntos se localizan debajo del eje $\text{Tr } A$. Y para estos sistemas el origen es un punto silla.

Cuando $\Delta > 0$ y $(\text{Det } A) = 0$ se tiene una raíz cero y otra distinta de cero. Estos puntos se localizan sobre el eje $\text{Tr } A$, con lo cual se ve un caso degenerado donde el número de puntos críticos forma una línea recta.

Si $\Delta < 0$ y $\text{Tr } A = 0$ entonces las raíces son imaginarias. Estos puntos se localizan sobre la parte positiva del eje $\text{Det } A$. En este caso el origen es un centro.

En el caso en que $\Delta < 0$ y $\text{Tr } A \neq 0$ las raíces son complejas. Estos puntos están arriba de la parábola $\text{Det } A = \frac{1}{4}(\text{Tr } A)^2$ Y el retrato fase es una espiral.

Con toda la información anterior se puede trazar el diagrama representado en la figura 10.

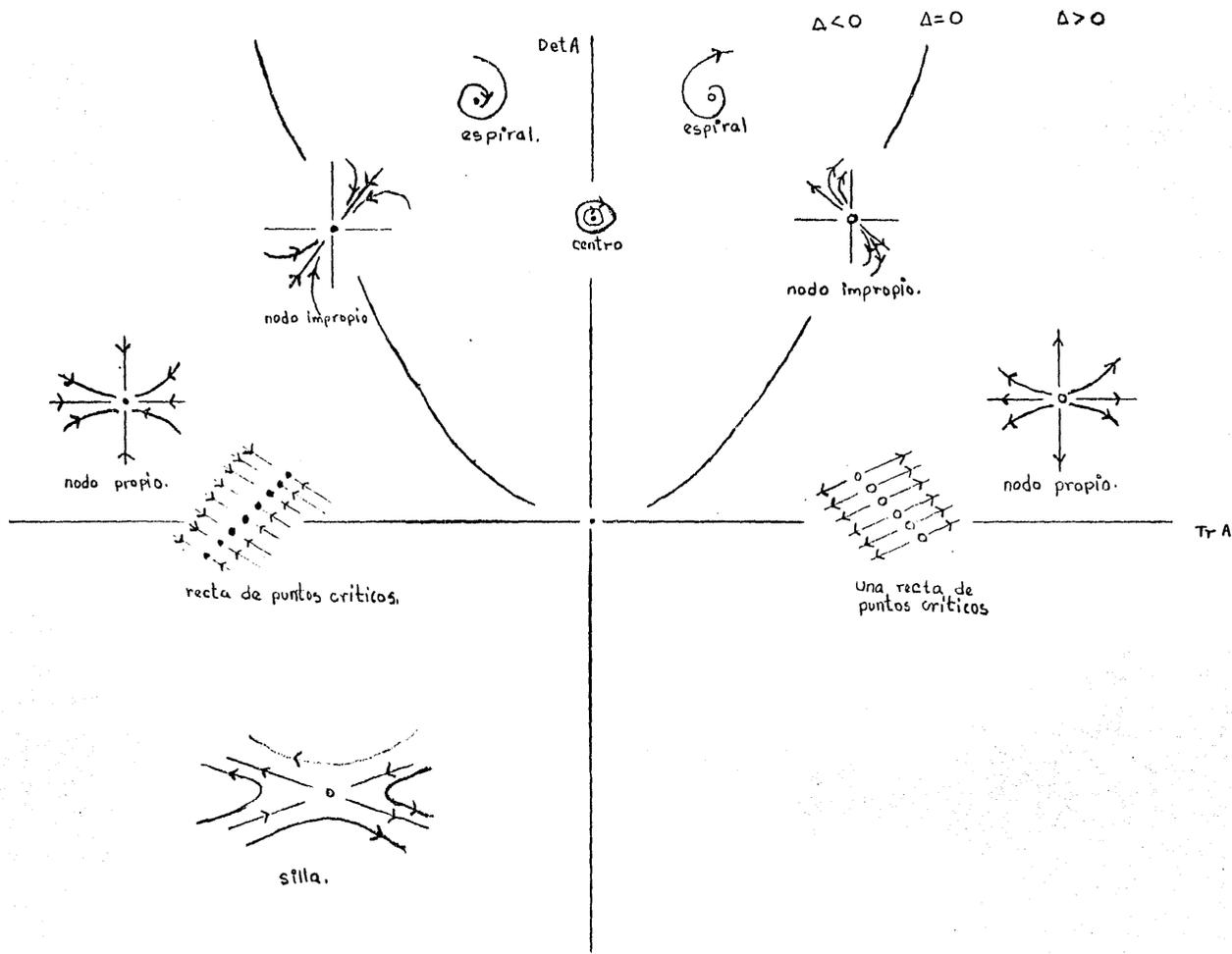
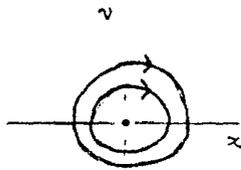


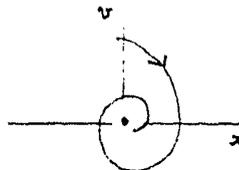
Fig.10 Diagrama que resume la información sobre los sistemas lineales.

Retratos Fase de los Sistemas Mecánicos.

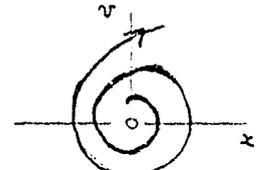
No todos los retratos fase de los sistemas lineales anteriores corresponden a retratos fase de sistemas mecánicos, por ejemplo el retrato fase de la figura 9 no representa la evolución de ningún sistema mecánico. La forma del sistema de ecuaciones (I.9) restringe el número de posibles retratos fase. A continuación se representan los posibles retratos fase para sistemas mecánicos gobernados por (I.9)



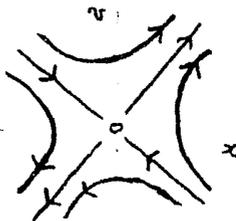
centro



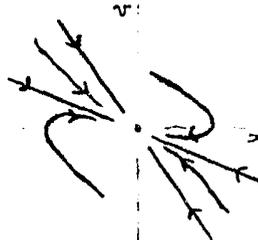
espiral



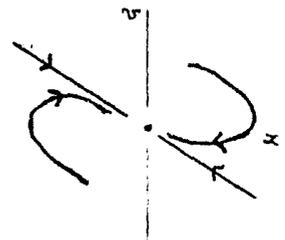
espiral



silla



nodo propio



nodo impropio

8. RETRATO FASE PARA EL OSCILADOR SOBREAMORTIGUADO.

A una partícula de masa m , se le aplican: la fuerza de un resorte (que cumple con la ley de Hooke) $F_R = -kx$, y la fuerza de fricción $F_f = -b\dot{x}$, donde $k > 0$ y $b > 0$. Por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Reescribiendo esta ecuación

$$(I.26) \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{donde} \quad 2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Para encontrar su solución, se resuelve el polinomio característico asociado a (I.26)

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

cuyas raíces son

$$r = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

haciendo $\omega_2^2 = \beta^2 - \omega_0^2$

queda $r = -\beta \pm \omega_2$

En el caso de sobreamortiguamiento

$$\beta > \omega_0$$

con lo cual se tienen dos soluciones reales, ambas negativas del polinomio característico. De donde las soluciones de la ecuación (I.26) son:

$$x(t) = A e^{(-\beta + \omega_2)t} + B e^{(-\beta - \omega_2)t}$$

(I.27)

$$x(t) = e^{-\beta t} [A e^{\omega_2 t} + B e^{-\omega_2 t}]$$

y la derivada de las soluciones

$$(I.28) \quad \dot{x}(t) = -e^{-\beta t} [(\beta - \omega_2) A e^{\omega_2 t} + (\beta + \omega_2) B e^{-\omega_2 t}]$$

Ahora se evalúan A y B en términos de las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x(0) = A + B = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -(\beta - \omega_2) A - (\beta + \omega_2) B = \dot{x}_0$$

De donde

$$(I.29) \quad A = \frac{(\beta + \omega_2)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_2}; \quad B = -\frac{(\beta - \omega_2)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_2}$$

Soluciones Asintóticas y Soluciones Particulares

Dos casos particulares son:

a) Para el caso en que $A=0$ y $B \neq 0$, de (I.27) y (I.28) las soluciones y sus derivadas son

$$x(t) = B e^{-\beta t} e^{-\omega_2 t}$$

$$\dot{x}(t) = -(\beta + \omega_2) B e^{-\beta t} e^{-\omega_2 t}$$

y dividiendo \dot{x} entre x se obtiene

$$\dot{x}(t) = -(\beta + \omega_2)x(t)$$

Esta última relación es una línea recta que divide al plano en dos regiones por lo que se le llama "línea que divide" y que representa una familia de trayectorias en el plano de las fases. Las soluciones montadas sobre esta línea recta se dirigen a la posición de equilibrio directamente.

b) Cuando $A \neq 0$ y $B = 0$ de (I.27) y (I.28),

$$x(t) = A e^{-\beta t} e^{\omega_2 t}$$

$$\dot{x}(t) = -(\beta - \omega_2) A e^{-\beta t} e^{\omega_2 t}$$

de donde la relación entre \dot{x} y x es

$$\dot{x}(t) = -(\beta - \omega_2)x(t)$$

esta expresión representa una familia de trayectorias en el plano de las fases, sobre una línea recta de pendiente $-(\beta - \omega_2)$, a la que se designa como "asíntota" (más adelante se verá el por qué).

En el caso general, cuando $A \neq 0$ y $B \neq 0$, los primeros términos en (I.27) y (I.28) son los términos dominantes, esto es, los segundos términos se van a cero más rápidamente que los primeros. De donde se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow A e^{-(\beta - \omega_2)t} \\ t &\longrightarrow \infty \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\longrightarrow -(\beta - \omega_2) A e^{-(\beta - \omega_2)t} \\ t &\longrightarrow \infty \end{aligned}$$

o sea

$$\dot{x}(t) \longrightarrow -(\beta - \omega_2)x(t)$$

Y esta última relación expresa que, si las condiciones iniciales son tales que satisfacen que $B = 0$, entonces el punto inicial de la trayectoria fase está sobre la recta

$$\dot{x} = -(\beta - \omega_2)x \quad \text{y toda la trayectoria está sobre dicha recta.}$$

En caso de que las condiciones iniciales sean tales que $A = 0$

las trayectorias fase estarán sobre la recta $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$.

En todos los demás casos, cuando la condición inicial no esté sobre ninguna de las rectas, (que "divide" o "asíntota"); la trayectoria fase tenderá asintóticamente a la recta $\dot{x} = -(\beta - \omega_2)x$.

Otras Trayectorias Fase

Se divide el plano fase en las regiones 1a, 1b, 1c y 2, como se muestra en la figura 11. Ahora, dependiendo de la región en que empiece la trayectoria se determinará su evolución ya que se tienen cuatro distintos tipos de comportamiento, uno para cada región.

a) Si las condiciones iniciales se encuentran en la 1a, entonces \dot{x}_0 es positiva por lo que la masa m avanza hasta alcanzar la posición máxima y en este momento tiene velocidad cero, teniendo, a continuación, una velocidad negativa y finalmente se dirige hacia el origen y lo hace acercándose asintóticamente a la recta $\dot{x} = -(\beta - \omega_2)x$.

b) En el caso en que el punto inicial, de la trayectoria en

el espacio de las fases, esté en 1b se tiene que la partícula siempre se mueve con velocidad negativa, esto es, hacia el origen.

c) Si el punto inicial de la trayectoria se encuentra en la región 1c, dicha trayectoria se dirige al origen, aproximándose asintóticamente a la recta $\dot{x} = -(\beta - \omega_2) x$ (que es la recta llamada asíntota).

d) En la región 2, el único camino, para que la trayectoria fase pueda tender a la asíntota sin cruzar otra trayectoria, es que oscile, esto es, que cruce la recta $x = 0$ y entonces se aproxime al punto de equilibrio.

Aparentemente las soluciones que empiezan en 1b y 1c no tienen una diferencia fundamental. Pero si extrapolamos la solución que empieza en 1b hacia atrás, esto es, cuando la solución en 1b puede ser vista como la parte final de una trayectoria que empieza en el segundo cuadrante, esto es, con condiciones iniciales $x_0 < 0, \dot{x}_0 > 0$, entonces cruza la recta $x = 0$ con velocidad positiva y finalmente se dirige al origen por el mismo camino que una solución en 1a. Mientras que las trayectorias en 1c siempre se encuentran en esta región, nunca salen de ella, nunca cruzan los ejes.

En base a todo el análisis anterior podemos trazar el retrato fase del oscilador sobremortiguado, el cual aparece en la figura 11 .

Caso Límite: Amortiguamiento Crítico

Es interesante preguntarse qué pasa cuando el amortiguamiento se reduce, esto es, cuando $\beta \rightarrow \omega_0$, o equivalentemente $\omega_2 \rightarrow 0$. Claramente las pendientes de ambas rectas $-(\beta - \omega_2)$ y $-(\beta + \omega_2)$ se aproximan a $-\beta$. O sea las rectas que acotan la región 1c se aproximan hasta converger en una recta de pendiente $-\beta$. Para probar lo anterior resolvemos analíticamente el caso de amortiguamiento crítico. En este caso las soluciones son

$$(I.30) \quad x(t) = e^{-\beta t} (C + Dt)$$

y su derivada

$$(I.31) \quad \dot{x}(t) = e^{-\beta t} [D - \beta C - \beta Dt]$$

y los valores de las constantes C y D en términos de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ son:

$$C = x_0$$

$$D = \dot{x}_0 + \beta x_0$$

Para el caso particular cuando $C \neq 0$ y $D = 0$ la solución y su derivada son

$$x(t) = C e^{-\beta t}$$

$$\dot{x}(t) = -\beta C e^{-\beta t}$$

Por lo tanto la relación entre x y \dot{x} es

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t)$$

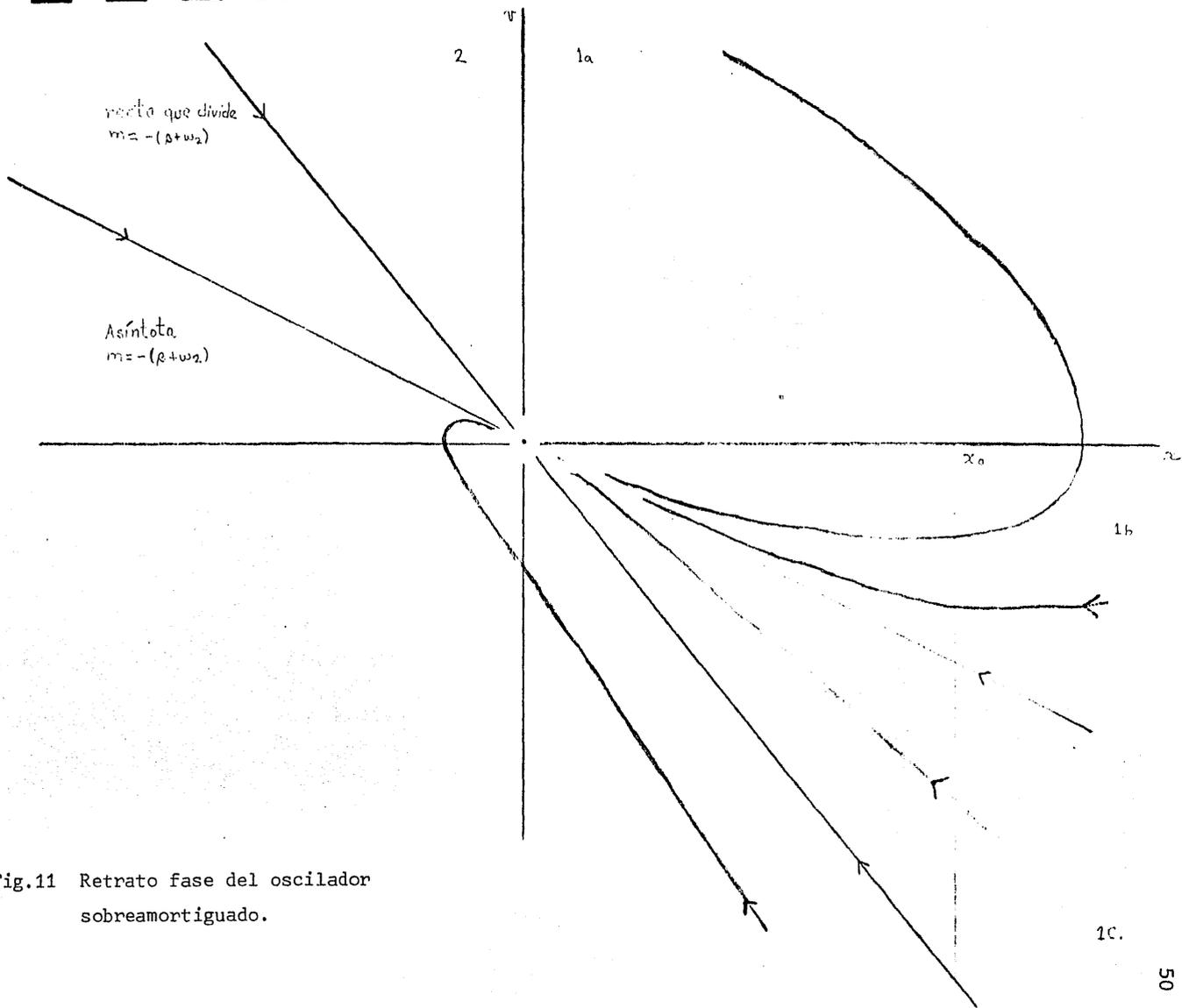


Fig.11 Retrato fase del oscilador sobreamortiguado.

Esto es, tenemos una familia de trayectorias fase que se encuentran sobre la recta $\dot{x} = -\beta x$. Las demás soluciones y sus derivadas están representadas por (I.30) y (I.31), donde los términos dominantes son $Dt \bar{e}^{\beta t}$ y $-\beta Dt \bar{e}^{\beta t}$ por lo que

$$x(t) \rightarrow Dt \bar{e}^{\beta t}$$

y

$$\dot{x}(t) \rightarrow -\beta Dt \bar{e}^{\beta t}$$

De donde

$$\dot{x}(t) \rightarrow -\beta x(t)$$

O sea que todas las curvas con condiciones iniciales fuera de la recta $\dot{x} = -\beta x$ tienden asintóticamente a dicha recta. Como se esperaba, se ha obtenido el resultado conocido como el caso límite del oscilador sobreamortiguado

9. LA INTEGRAL DE BOHLIN Y OTRAS INTEGRALES PARA EL OSCILADOR AMORTIGUADO

En el apartado (4) se ha visto que, para el caso de sistema conservativo, la integral de movimiento llamada energía mecánica, es una función de la posición y la velocidad y que permanece constante durante el movimiento. En general, en un sistema mecánico, existen unas funciones, que dependen de la posición, la velocidad y el tiempo, cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento, dependiendo solamente de las condiciones iniciales. A estas funciones se les conoce como integrales de movimiento o constantes de movimiento.

En esta parte se verán, para el oscilador amortiguado, algunas integrales de movimiento poco conocidas; una de ellas es la llamada integral de Bohlin.

La ecuación de movimiento para el oscilador amortiguado ha sido establecida como la ecuación (I.26)

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Una forma alternativa de escribirla se tiene al introducir los parámetros λ_1 , λ_2 , tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\beta$ y $\lambda_1 \lambda_2 = \omega_0^2$. Y ésta es:

$$(I.32) \quad \ddot{x} + (\lambda_1 + \lambda_2) \dot{x} + \lambda_1 \lambda_2 x = 0$$

Es de notar que la ecuación de movimiento así como las relaciones que definen a λ_1 y λ_2 son invariantes bajo el intercambio de λ_1 y λ_2 . Y en términos de β y ω_0 se definen los tres tipos siguientes de osciladores

a) Oscilador sobreamortiguado

Cuando $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$, se tiene

$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} > \lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} > 0$$

b) Oscilador Críticamente Amortiguado

Cuando $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$, se tiene

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \beta > 0$$

c) Oscilador Subamortiguado

Cuando $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$, se tiene

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \beta + i\omega, \quad \text{donde } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{o} \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2$$

Esta división no es exhaustiva. Se puede considerar a λ_1 y λ_2 como cualquier par de números complejos, pero solamente para los tres casos anteriores representan el movimiento de un oscilador.

Un primer factor de integración para la ecuación de movimiento (I.26) es $e^{2\beta t}(\dot{x} + \beta x)$ que puede verse del siguiente desarrollo. Comenzando por la ecuación (I.26)

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

se hace la sustitución $\omega_0^2 = \beta^2 + \omega^2$, y se multiplica por el factor integrante $e^{2\beta t}(\dot{x} + \beta x)$, obteniendo

$$e^{2\beta t}(\dot{x} + \beta x) [\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + (\beta^2 + \omega^2)x] = 0$$

desarrollando esta última ecuación se llega a

$$e^{2\beta t}(\dot{x} + \beta x)(\ddot{x} + \beta \dot{x}) + \beta e^{2\beta t}(\dot{x} + \beta x)^2 + \omega^2 e^{2\beta t}(\dot{x}x + \beta x^2) = 0$$

la cual puede reescribirse como sigue

$$\frac{1}{2} \left[e^{2\beta t} 2(\dot{x} + \beta x)(\ddot{x} + \beta \dot{x}) + (\dot{x} + \beta x)^2 2\beta e^{2\beta t} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \left[e^{2\beta t} 2x\dot{x} + x^2 2\beta e^{2\beta t} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} \left[e^{2\beta t} \frac{d}{dt} (\dot{x} + \beta x)^2 + (\dot{x} + \beta x)^2 \frac{d}{dt} e^{2\beta t} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \left[e^{2\beta t} \frac{d}{dt} x^2 + x^2 \frac{d}{dt} e^{2\beta t} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[e^{2\beta t} (\dot{x} + \beta x)^2 \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{d}{dt} \left[e^{2\beta t} x^2 \right] = 0$$

$$0' \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ e^{2\beta t} \left[(\dot{x} + \beta x)^2 + \omega^2 x^2 \right] \right\}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{dt} = 0$$

de donde

$$F = e^{2\beta t} \left[(\dot{x} + \beta x)^2 + \omega^2 x^2 \right]$$

es una constante de movimiento.

Esta primera integral F es similar a la integral de la energía mecánica, para un sistema conservativo. La relación se ve fácilmente haciendo $\beta = 0$. Se tiene un oscilador cuya integral es la energía $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$. Sin embargo, para $\beta \neq 0$, F no es la energía mecánica. Ahora, como y $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\beta$, la integral F en términos de λ_1 y λ_2 toma la forma siguiente.

$$F = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} (\dot{x} + \lambda_1 x)(\dot{x} + \lambda_2 x)$$

A continuación se considera una integral de movimiento independiente, la integral de Bohlin.

$$B = \frac{(\dot{x} + \lambda_1 x)^{\lambda_1}}{(\dot{x} + \lambda_2 x)^{\lambda_2}}$$

6

$$b = \ln B = \lambda_1 \ln(\dot{x} + \lambda_1 x) - \lambda_2 \ln(\dot{x} + \lambda_2 x)$$

Para ver que en realidad es una constante de movimiento derivamos con respecto a t

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_1(\ddot{x} + \lambda_1 \dot{x})}{\dot{x} + \lambda_1 x} - \frac{\lambda_2(\ddot{x} + \lambda_2 \dot{x})}{\dot{x} + \lambda_2 x} \\ &= \frac{\lambda_1(\ddot{x} + \lambda_1 \dot{x})(\dot{x} + \lambda_2 x) - \lambda_2(\ddot{x} + \lambda_2 \dot{x})(\dot{x} + \lambda_1 x)}{(\dot{x} + \lambda_1 x)(\dot{x} + \lambda_2 x)} \\ &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \dot{x}}{(\dot{x} + \lambda_1 x)(\dot{x} + \lambda_2 x)} \left[\ddot{x} + (\lambda_1 + \lambda_2) \dot{x} + \lambda_1 \lambda_2 x \right] = 0 \end{aligned}$$

Nótese que la integral de Bohlin es real para el oscilador sobreamortiguado, tiene el valor de uno ($B=1$) para el caso críticamente amortiguado y compleja con módulo uno para el oscilador subamortiguado.

Para una ecuación de movimiento de segundo orden, hay solamente dos integrales independientes o constantes de movimiento. Habiéndose obtenido dos primeras integrales independientes F y B , se puede eliminar \ddot{x} de éstas y obtener la solución $x(t)$. Pero tal tarea será más fácil usando dos nuevas primeras integrales que a continuación se obtienen.

La ecuación de movimiento (I.32) se puede reescribir para obtenerse

$$(I.33) \quad \ddot{x} + \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 (\dot{x} + \lambda_1 x) = 0$$

y un factor de integración es $e^{\lambda_2 t}$

En efecto

$$e^{\lambda_2 t} \left[\ddot{x} + \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 (\dot{x} + \lambda_1 x) \right] = 0$$

$$e^{\lambda_2 t} [\ddot{x} + \lambda_1 \dot{x}] + (\dot{x} + \lambda_1 x) \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 0$$

$$e^{\lambda_2 t} \frac{d}{dt} [\dot{x} + \lambda_1 x] + (\dot{x} + \lambda_1 x) \frac{d}{dt} e^{\lambda_2 t} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [e^{\lambda_2 t} (\dot{x} + \lambda_1 x)] = 0$$

Y una primera integral es

$$(I.34) \quad D_1 = e^{\lambda_2 t} (\dot{x} + \lambda_1 x)$$

Intercambiando los papeles de λ_1 y λ_2 , se tiene otra primera integral

$$(I.35) \quad D_2 = e^{\lambda_1 t} (\dot{x} + \lambda_2 x)$$

D_1 y D_2 son independientes, excepto para el caso críticamente amortiguado ($\lambda_1 = \lambda_2 = \beta$), de aquí podemos eliminar \dot{x} para obtener x . De (I.35) despejamos \dot{x} ,

$$\dot{x} = D_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 x$$

sustituyendo en (I.34) y reagrupando se tiene

$$x(t) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (D_1 e^{\lambda_2 t} - D_2 e^{\lambda_1 t}) \quad \text{con } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Para el oscilador subamortiguado, $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\beta + i\omega$, $D_1 = D_2^*$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$x(t) = [\beta + i\omega - (\beta - i\omega)]^{-1} [D_1 e^{-(\beta - i\omega)t} - D_1^* e^{-(\beta + i\omega)t}]$$

y desarrollando se tiene

$$x(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\beta t} \left[\frac{D_1 - D_1^*}{2i} \cos \omega t + \frac{D_1 + D_1^*}{2i} i \sin \omega t \right]$$

Haciendo

$$D_1 = |D_1| e^{i\delta}, \quad D_1^* = |D_1| e^{-i\delta}$$

$$\frac{D_1 - D_1^*}{2i} = \frac{|D_1|}{2i} [2i \sin \delta] = |D_1| \sin \delta$$

y

$$\frac{D_1 + D_1^*}{2} = \frac{|D_1|}{2} [2 \cos \delta] = |D_1| \cos \delta$$

De donde

$$x(t) = \frac{|D_1|}{\omega} e^{-\beta t} [\sin \delta \cos \omega t + \cos \delta \sin \omega t]$$

$$x(t) = \frac{|D_1|}{\omega} e^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta)$$

Para el oscilador críticamente amortiguado, como $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta$, se tiene $D_1 = D_2 = D = e^{\beta t} (\dot{x} + \beta x)$. Además, una integral independiente puede obtenerse por el siguiente proceso de límite.

$$G = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \beta} \frac{D_1 - D_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\beta t} [x - t(\dot{x} + \beta x)]$$

En efecto

$$\frac{D_1 - D_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{e^{\lambda_1 t} (\dot{x} + \lambda_1 x) - e^{\lambda_2 t} (\dot{x} + \lambda_2 x)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Derivando con respecto a λ_1 y aplicando la regla de L'Hopital

$$\frac{x e^{\lambda_2 t} - t e^{\lambda_1 t} (\dot{x} + \lambda_2 x)}{1}$$

De donde finalmente

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \beta} \frac{D_1 - D_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \beta} \left[x e^{\lambda_2 t} - t e^{\lambda_1 t} (\dot{x} + \lambda_2 x) \right] = x e^{\beta t} - t e^{\beta t} (\dot{x} + \beta x)$$

y

$$D = e^{\beta t} [x - t(\dot{x} + \beta x)]$$

Ahora eliminando \dot{x} de D y G se obtiene la solución para el oscilador críticamente amortiguado

$$x(t) = [G + tD] e^{-\beta t}$$

Las constantes F y B se pueden expresar en términos de D_1 y D_2 como sigue

$$F = D_1 D_2 \quad , \quad B = \frac{D_1^{\lambda_1}}{D_2^{\lambda_2}}$$

Y para el caso de amortiguamiento crítico F y B se expresan por medio de D y G como sigue.

$$F = D^2 \quad , \quad B \equiv 1$$

La interpretación física de una integral de movimiento, está directamente relacionada a la utilidad que presta para la comprensión de la evolución de un sistema. En este sentido se puede usar la integral de Bohlin para probar fácilmente el siguiente teorema para el oscilador sobreamortiguado.

Un oscilador sobreamortiguado tiene a lo más un punto de retorno (esto es, a lo más existe un tiempo para el cual $\dot{x} = 0$).

Demostración. Supongamos que existen dos instantes t_a y t_b tales que $\dot{x}(t_a) = \dot{x}(t_b) = 0$. Evaluando la integral de Bohlin para t_a y t_b , se tiene:

$$B = \frac{[\dot{x}(t_a) + \lambda_1 x(t_a)]^{\lambda_1}}{[\dot{x}(t_a) + \lambda_2 x(t_a)]^{\lambda_2}} = \frac{[\lambda_1 x_a]^{\lambda_1}}{[\lambda_2 x_a]^{\lambda_2}}$$

$$B = \frac{[\dot{x}(t_b) + \lambda_1 x(t_b)]^{\lambda_1}}{[\dot{x}(t_b) + \lambda_2 x(t_b)]^{\lambda_2}} = \frac{[\lambda_1 x_b]^{\lambda_1}}{[\lambda_2 x_b]^{\lambda_2}}$$

y de aquí

$$\frac{[\lambda_1 x_a]^{\lambda_1}}{[\lambda_2 x_a]^{\lambda_2}} = \frac{[\lambda_1 x_b]^{\lambda_1}}{[\lambda_2 x_b]^{\lambda_2}}$$

de donde

$$x_a = x_b$$

Ahora, evaluando la constante F en t_a y t_b , se tiene que

$$e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_a} [\dot{x}(t_a) + \lambda_1 x(t_a)] [\dot{x}(t_a) + \lambda_2 x(t_a)] = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_b} [\dot{x}(t_b) + \lambda_1 x(t_b)] [\dot{x}(t_b) + \lambda_2 x(t_b)]$$

y como $\dot{x}(t_a) = \dot{x}(t_b) = 0$ y $x_a = x_b$, se tiene

$$e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_a} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_b}$$

De donde

$$t_a = t_b$$

O sea que a lo más hay un punto de retorno.

II. INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD

1. CONCEPTO DE ESTABILIDAD

Para un sistema mecánico conservativo, que se encuentra gobernado por la ecuación

$$(II.1) \quad m\ddot{x} = f(x) \quad \text{o} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{f(x)}{m} \end{aligned}$$

las soluciones de equilibrio representan los estados de equilibrio de dicho sistema y estos estados de equilibrio quedan representados por los puntos críticos en el espacio de las fases. Cuando $f(0)=0$, el origen del espacio de las fases, es un punto crítico, el cual se supone aislado. Considerando el problema de condiciones iniciales

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{f(x)}{m} \end{aligned} \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

Si x_0 y \dot{x}_0 están cerca del punto crítico $(0,0)$ cabe preguntarse si la solución de (II.2) permanecerá cerca del punto de equilibrio o se alejará. Si se considera este problema en el

intervalo $t_0 \leq t \leq T < \infty$, es el problema de la dependencia de la solución con respecto a las condiciones iniciales. Si $t_0 \leq t$, esto es, t puede tomar valores arbitrariamente grandes, es de lo que se ocupa precisamente la teoría de la estabilidad. Este problema es de suma importancia práctica, si se requiere que el sistema en cuestión se encuentre en el estado de equilibrio representado por el punto $(0,0)$, se necesita dar a dicho sistema las condiciones $x(t_0) = 0$ y $\dot{x}(t_0) = 0$, pero en general en un experimento de laboratorio no se pueden obtener exactamente estas condiciones iniciales y de ahí el interés por saber qué pasa con las soluciones al tener pequeñas variaciones en los valores iniciales. ¿Las soluciones se alejarán del estado de equilibrio haciendo que el punto crítico sea inestable? ¿permanecerán cerca? así el punto crítico sería estable. Si fuera el caso en que no sólo permanecen cerca, sino que además se acercan, el punto crítico sería asintóticamente estable.

A continuación se formalizan los conceptos anteriores. La solución de equilibrio $\bar{x}_0 = (x_0, 0)$ de (II.1) se dice que es estable, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\bar{\psi}(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ es alguna solución de (II.1) que satisface que $\|\bar{\psi}(t_0) - \bar{x}_0\| < \delta$, entonces la solución $\bar{\psi}(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ y $\|\bar{\psi}(t) - \bar{x}_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

La solución de equilibrio \bar{x}_0 se dice que es asintóticamente estable si es estable y existe un número $\delta_0 > 0$ tal que

si $\bar{\psi}(t)$ es alguna solución de (II.1) con $\|\bar{\psi}(t_0) - \bar{x}_0\| \leq \delta_0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\psi}(t) = \bar{x}_0$.

La solución de equilibrio \bar{x}_0 de (II.1) se dice que es inestable si no es estable.

En el caso del oscilador armónico, se tiene que el punto de equilibrio $(0,0)$ es estable. La energía potencial $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ tiene un mínimo en $x=0$ y ésta es la razón por la cual el punto de equilibrio $(0,0)$ es un punto estable. Esto es precisamente lo que establece el teorema de Lagrange.

2. TEOREMA DE LAGRANGE

Teorema: Si la energía potencial es mínima en el estado de equilibrio, entonces dicho estado de equilibrio es estable.

Para ilustrar el teorema anterior, se escribe el sistema (II.1) en términos de la energía potencial $V(x)$.

$$(II.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \end{aligned}$$

Se observa que los puntos críticos son de la forma $(x, 0)$, donde x es un punto crítico de la función $V(x)$. Con el auxilio de la gráfica de la energía potencial, se traza el retrato fase del sistema (II.3), ver figura 12

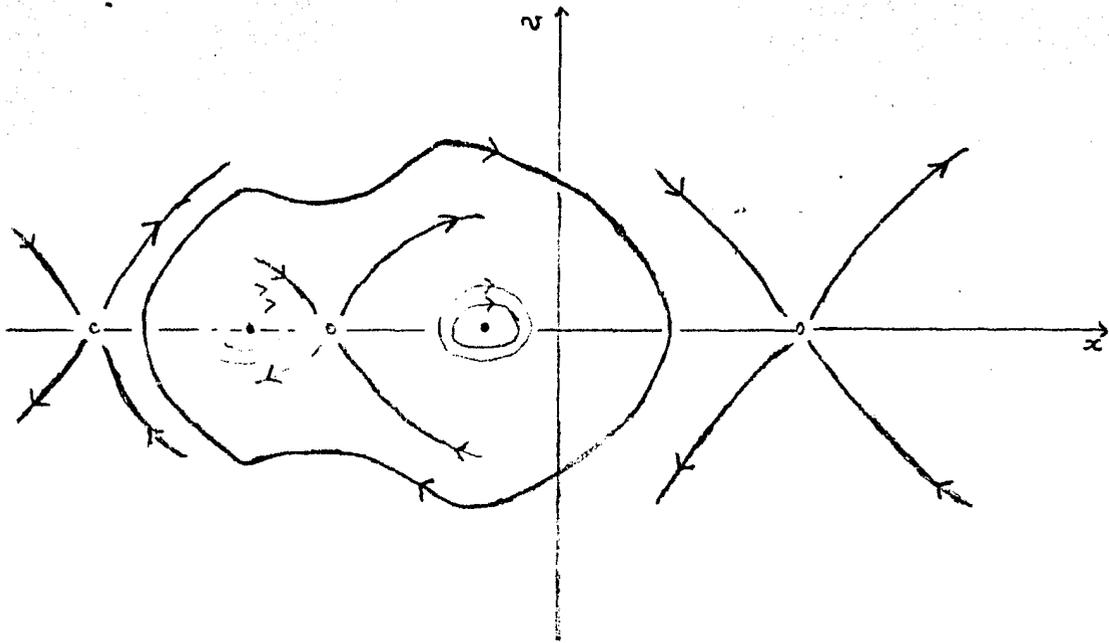
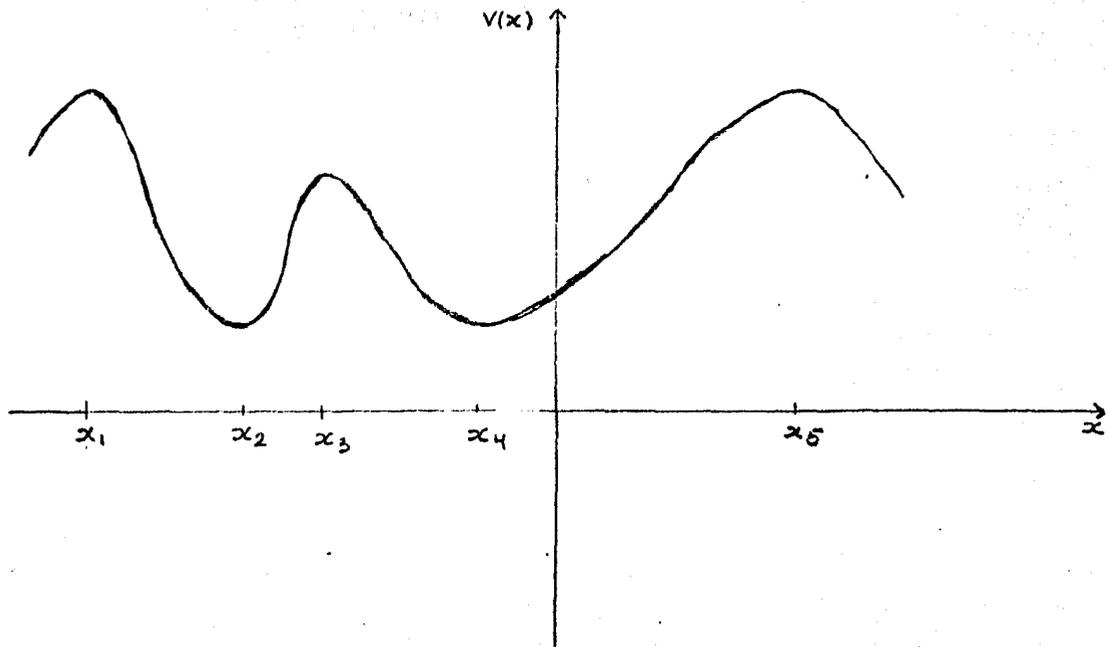


Fig.12 Por medio de la gráfica de la energía potencial, se puede bosquejar el retrato fase de un sistema conservativo.

Se observa que los puntos críticos del potencial x_2 y x_4 , son las abscisas de los puntos de equilibrio estable, donde la energía potencial es un mínimo (centros). Todos los demás puntos estacionarios de la función $V(x)$, que podrían ser puntos máximos y puntos de inflexión, son puntos de equilibrio inestable, o sea puntos silla.

Demostración intuitiva del Teorema de Lagrange.

Supóngase que $x = 0$ es un mínimo de $V(x)$ y $V(0) = 0$, entonces $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (II.3). Por lo anterior $V(x) > 0$ para una vecindad del origen ($x \neq 0$ y $|x| < \epsilon$). Ya se demostró* que la energía total $H(x, v) = V(x) + \frac{m}{2} v^2$ es una constante a lo largo de las soluciones (II.3). Si $E > 0$, pero suficientemente pequeño, entonces $H(x, v) = E$ es una familia de curvas cerradas que rodean al origen y son simétricas respecto al eje x . (ver figura 13).

Si $E_1 < E_2 < E_3$ entonces las curvas correspondientes estarán situadas, como se muestra en la figura 13, contrayéndose al origen conforme E tiende a cero. Ahora si la solución $(x(t), v(t))$ empieza en el tiempo t_0 con $|x_0(t_0)|$ y $|v(t_0)|$ pequeños, ésta se mantendrá cerca del origen, por lo que el origen es un punto de equilibrio estable. Sin embargo, el origen no es asintóticamente estable, ya que cada solución distinta de la cero es una curva cerrada que no se acerca al origen. Para que el origen fuera asintóticamente estable, la

* Sec.4, Cap.I.

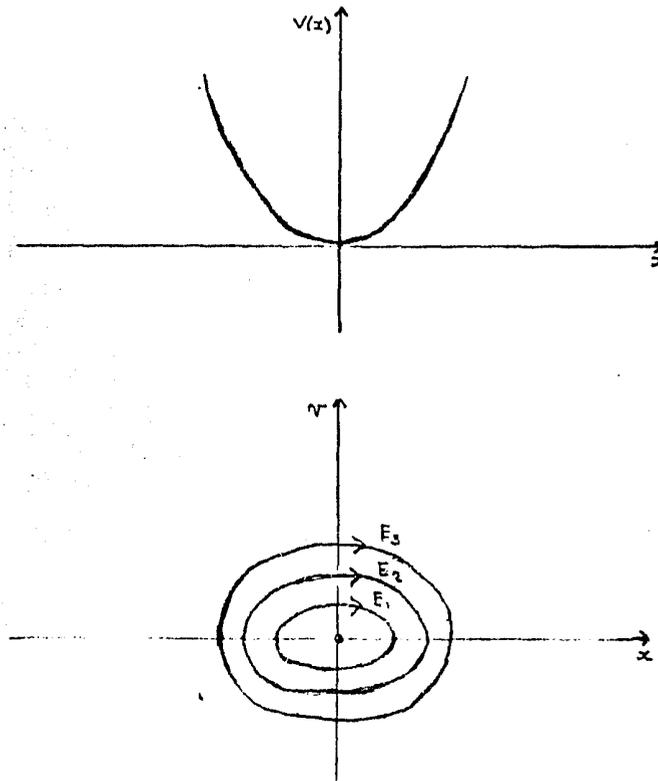


Fig.13 Demostración intuitiva del teorema de Lagrange.

energía total debería decrecer a cero como una función del tiempo.

Además de la figura 12 puede apreciarse que los puntos máximos y de inflexión del potencial $V(x)$ corresponden a puntos de equilibrio inestable en el plano de las fases, y esto es precisamente lo que afirma el siguiente teorema que se le acredita a Liapunov.

Teorema: Si la energía potencial no es un mínimo en el estado de equilibrio, entonces el equilibrio es inestable.

Para completar las propiedades del espacio de las fases,* se tienen las siguientes tres propiedades:

g) Toda trayectoria cerrada corresponde a una solución pe-

* vistas en la sección 2 del capítulo I

riódica.

h) Teorema de Poincaré¹: En un sistema conservativo, los puntos críticos interiores a una trayectoria cerrada son sillan y centros. Su número total es impar y el número de centros excede en uno al número de sillan.

i) En medio de dos centros hay un punto silla y en medio de los puntos silla hay un centro.

3. ESTABILIDAD EN LOS SISTEMAS LINEALES

En la sección 7 del primer capítulo, se trazaron los diferentes retratos fase para los sistemas lineales y en la figura 10 se hace una síntesis de éstos. En dicha figura se aprecia que los sistemas que se encuentran localizados en el segundo cuadrante del plano $\text{Tr } A, \text{ Det } A$, incluyendo la parte positiva del eje $\text{Det } A$ y la parte negativa del Eje $\text{Tr } A$, tienen la característica de que sus puntos críticos son estables. Mientras que los sistemas que se localizan fuera del segundo cuadrante, tienen soluciones de equilibrio inestables.

4. TEOREMAS DE LIAPUNOV

Los teoremas de Liapunov vienen a ser una generalización del teorema de Lagrange. Para formular estos teoremas se recuerdan las siguientes definiciones.

La función escalar $U(\bar{x})$ se dice que es positiva definida en un conjunto A si y sólo si $U(\bar{0}) = 0$ y $U(\bar{x}) > 0$ para todo $\bar{x} \neq \bar{0}$. ($U: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)⁽⁴⁾.

La función escalar $U(\bar{x})$ es negativa definida en el conjunto A si y sólo si $-U(\bar{x})$ es positiva definida en A .

Considérese el sistema representado por

$$(II.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) & \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

que es un sistema más general que el sistema (II.1). Suponiendo que la función escalar $U(\bar{x})$ tiene primeras derivadas continuas ($U(\bar{x}) \in C^1$ en A), se define la derivada de U con respecto al sistema (II.4) como el producto escalar

$$\begin{aligned} U^*(\bar{x}) &= \text{grad } U(\bar{x}) \cdot \bar{f}(\bar{x}) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_1}(\bar{x}) \cdot f_1(\bar{x}) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\bar{x}) \cdot f_2(\bar{x}) \end{aligned}$$

Se observa que si $\bar{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ es alguna solución de (II.4) entonces por la regla de la cadena y de la definición anterior

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(\bar{\varphi}(t)) &= \frac{\partial U}{\partial x_1}(\bar{\varphi}(t)) \dot{\varphi}_1(t) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\bar{\varphi}(t)) \dot{\varphi}_2(t) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_1}(\bar{\varphi}(t)) f_1(\bar{\varphi}(t)) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\bar{\varphi}(t)) f_2(\bar{\varphi}(t)) \\ &= U^*(\bar{\varphi}(t)) \end{aligned}$$

Lo anterior indica que a lo largo de una solución $\bar{\varphi}$ la derivada total de $U(\bar{\varphi}(t))$ con respecto a t coincide con la derivada de U con respecto al sistema evaluado en $\bar{\varphi}(t)$.

Para ilustrar lo anterior considérese el sistema (II.3)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v & \text{o sea} & \quad \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} & \text{donde} & \quad \bar{f}(\bar{x}) = (v, -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}) \end{aligned}$$

y la energía mecánica de éste: $U(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$

La derivada de U con respecto al sistema es

$$\begin{aligned} U^*(x, v) &= \text{grad } U(x, v) \cdot \bar{f}(x, v) = \\ &= \left(\frac{dV(x)}{dx}, m v \right) \cdot \left(v, -\frac{1}{m} \frac{dV(x)}{dx} \right) \\ &= v \frac{dV(x)}{dx} - v \frac{dV(x)}{dx} = 0 \end{aligned}$$

Como
$$\frac{d}{dt} U(\bar{\varphi}(t)) = U^*(\bar{\varphi}(t)) = 0$$

Esto nos dice que la energía del sistema a lo largo de una solución no varía, esto es, que dado un estado del sistema la energía permanece constante.

Para el caso del oscilador amortiguado, representado por la ecuación (I.26), que escrita como sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v \\ \dot{v} &= -\omega_0^2 x - 2\beta v & \text{donde} & \quad 2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

si se considera la energía mecánica del oscilador armónico $U(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2$, la derivada de U con respecto al sistema es

$$\begin{aligned} U^*(x, v) &= \text{grad} U(x, v) \cdot \bar{f}(x, v) \\ &= (m\omega_0^2 x, m v) \cdot (v, -\omega_0^2 x - 2\beta v) \\ &= m\omega_0^2 x v - \omega_0^2 m x v - 2\beta m v^2 \\ &= -2\beta m v^2 \end{aligned}$$

$$U^*(x, v) = -2\beta v^2$$

de donde

$$\frac{d}{dt} [U(\varphi_1(t), \varphi_2(t))] = U^*(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = -2\beta [\varphi_2(t)]^2 \leq 0$$

y esto indica que la energía U es una función decreciente.

En lo que sigue se considerará que el origen ($\bar{x} = \bar{0}$) es un punto de equilibrio aislado del sistema (II.4). El teorema siguiente establece la estabilidad del origen.

Teorema. Si existe una función escalar $U(\bar{x})$ que sea positiva definida y para la cual $U^*(\bar{x}) \leq 0$ en alguna región A que contiene al origen, entonces la solución de equilibrio cero de $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ es estable.

Para la estabilidad asintótica del origen, Liapunov establece el siguiente teorema.

Teorema: Si existe una función escalar $U(\bar{x})$ que sea positiva definida y para la cual $U^*(\bar{x})$ sea negativa definida en alguna región A que contiene al origen, entonces la solución de equilibrio cero de $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ es asintóticamente estable.

Con este par de teoremas, Liapunov establece las condiciones necesarias para la estabilidad de la solución de equilibrio del sistema (II.4). Nótese que la estabilidad se puede establecer sin necesidad de conocer las soluciones del sistema (II.4) explícitamente. Esta es precisamente la importancia y utilidad de los teoremas de Liapunov. Sin embargo, para probar la estabilidad de una solución de equilibrio utilizando los teoremas anteriores, se necesita construir una función $U(\bar{x})$ con ciertas propiedades, y no hay un método general para determinar dicha función.

5. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS TEOREMAS DE LIAPUNOV.

El segundo teorema tiene las hipótesis siguientes:

$U(\bar{x})$ es una función positiva definida y $U^*(\bar{x})$ es negativa definida. Sea C una constante positiva, pequeña, entonces la ecuación $U(\bar{x}) = C$ representa una curva cerrada alrededor del origen; esto se debe a que $U(\bar{x})$ es una función positiva definida. Además el gradiente de $U(\bar{x})$ es un vector normal a la curva $U(\bar{x}) = C$ que apunta en la dirección del máximo crecimiento de la función, por lo que apunta hacia "afuera"

(ver figura 14).

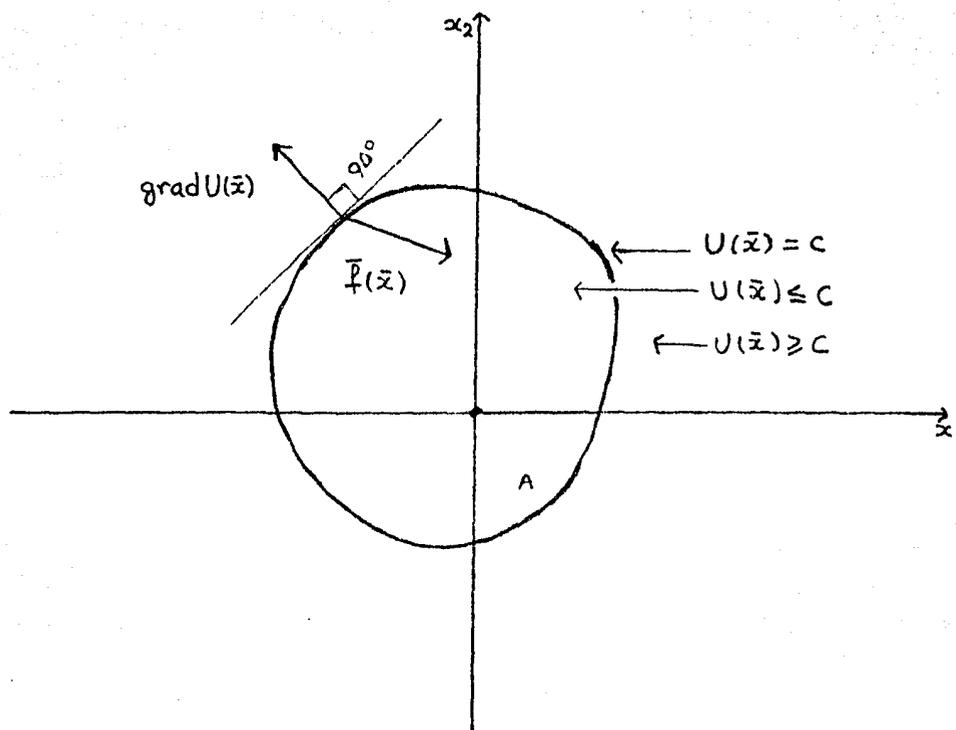


Fig.14 Interpretación geométrica de los teoremas de Liapunov.

Ahora, por definición $U^*(\bar{x}) = \text{grad} U(\bar{x}) \cdot \bar{f}(\bar{x})$; y por hipótesis $U^*(\bar{x}) < 0$, esto quiere decir que el vector $\bar{f}(\bar{x})$ apunta hacia "adentro" de la región limitada por $U(\bar{x}) = c$. Esto es, $\bar{f}(\bar{x})$ no puede apuntar hacia el "exterior" de la región A , y como la curva solución en el espacio de las fases es tangente a $\bar{f}(\bar{x})$, dicha curva se mantiene dentro de la región A . Esto es, las curvas solución que se encuentran dentro de la región A no se salen de ésta. Tomando c suficientemente pequeña las soluciones se mantienen cada vez más cerca del origen. Por lo que el origen es un pun-

to de equilibrio asintóticamente estable.

Para el primer teorema no se pide que $U^*(\bar{x})$ sea negativa definida, sino solamente se requiere que $U^*(\bar{x}) \leq 0$, esto es, $\text{grad } U(\bar{x}) \cdot \bar{f}(\bar{x}) \leq 0$, con lo que se garantiza que los vectores $\text{grad } U(\bar{x})$ y $\bar{f}(\bar{x})$ formen un ángulo mayor a $\pi/2$ ó a lo menos de $\pi/2$, con lo que existe la posibilidad de que las curvas solución no tiendan al origen sino que se mantengan sólomente cerca de éste. Y en este caso el origen será un punto de equilibrio estable.

El concepto de estabilidad, que se ha manejado en este capítulo, se refiere a la estabilidad de las soluciones de equilibrio del sistema conservativo (II.1); pero dicho concepto se generaliza en forma natural para cualquier solución de dicho sistema. Al generalizar los conceptos de estabilidad para cualquier solución, tendría que intentarse, a su vez, "generalizar" los teoremas de Liapunov; esto es, habría que establecer los criterios correspondientes para instrumentar dichos conceptos.

III. BIFURCACION

1. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA AL VARIAR LOS PARAMETROS QUE LO CARACTERIZAN

Considérese que la fuerza f es una función $f(x, \lambda)$ analítica para todos los valores x y λ . El comportamiento del sistema, en general, cambia al variar λ . Pero se puede hacer una distinción entre los posibles tipos de cambios. Al tomar diferentes valores del parámetro λ el comportamiento cuantitativo del sistema cambia, sin embargo el comportamiento cualitativo puede mantenerse igual o bien, puede cambiar. Se denominará λ_0 a un valor ordinario de λ siempre que exista $\epsilon > 0$ tal que para todo λ que satisfaga que $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$, la topología, o sea el comportamiento cualitativo de las trayectorias en el espacio de las fases, es la misma que para λ_0 . Cuando λ_0 no es un punto ordinario se le llama punto de bifurcación o de ramificación del sistema.

En lo que sigue se considerará como sistema, al sis-

tema físico que se encuentra caracterizado por una ecuación del tipo

$$(III.1) \quad m\ddot{x} = f(x, \lambda)$$

o equivalentemente por el sistema

$$(III.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{f(x, \lambda)}{m} \end{aligned}$$

Son diversos los sistemas mecánicos que se caracterizan por la ecuación (III.1). Dicha ecuación puede caracterizar el movimiento de una partícula en una dimensión, o también el movimiento de una partícula en varias dimensiones pero con un sólo grado de libertad. Un caso, que se presenta con frecuencia, es el de las rotaciones de una partícula; en este caso x representa un ángulo, y al obtener la derivada de f con respecto a x , lo que se determina es precisamente la torca total aplicada a la partícula. Además, de que dicha torca puede contener términos debidos a fuerzas ficticias.

Como se sabe, los puntos de equilibrio del sistema (III.2) están dadas por $(x_i, 0)$, donde x_i es una raíz de la función $f(x, 0)$. En general estas raíces x_i cambian al cambiar λ . Para λ , las raíces son precisamente las posiciones de equilibrio x_1 y x_2 . (ver figura 15).

Como $V_x(x, \lambda) = -f(x, \lambda)$, se sigue que $V_{xx}(x, \lambda) = -f_x(x, \lambda)$

Donde V_x, f_x son las derivadas parciales de V y f respectivamente.

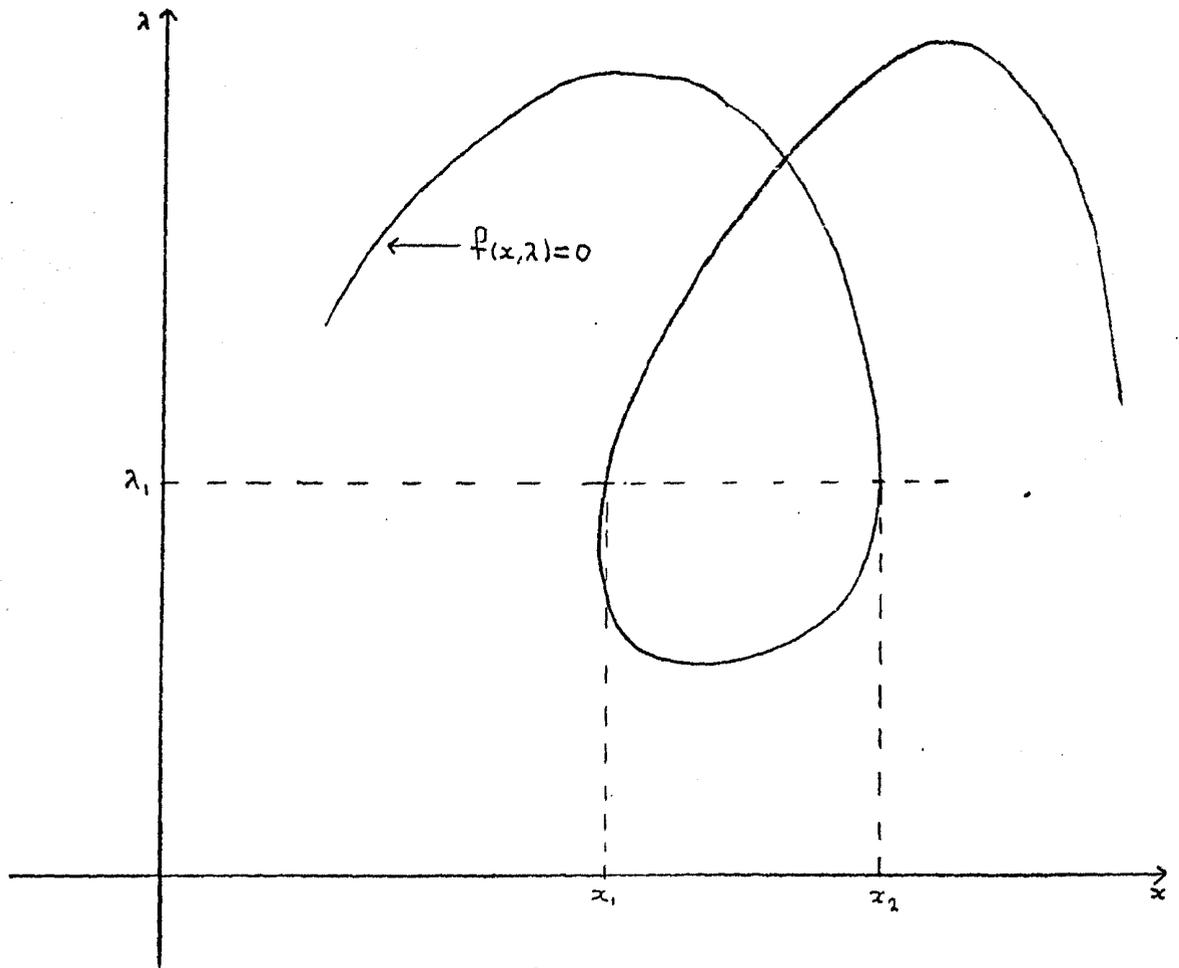


Fig.15 Las raíces para λ_1 , de la función, son las posiciones x_1, x_2 .

y de ahí que se pueden caracterizar los puntos de equilibrio estable e inestable por la función de $f_x(x, \lambda)$. El punto $(x_i, 0)$ será de equilibrio estable cuando $f_x(x_i, \lambda) < 0$ e inestable cuando $f_x(x_i, \lambda) > 0$.

El número de raíces x_i y por lo tanto el número de puntos de equilibrio para una λ dada, puede aumentar o disminuir en número de dos. Esto pasa sólo cuando la curva $f(x, \lambda) = 0$ en un cierto punto (x_i, λ) "tiene un valor máximo o mínimo". Precisando: Para que esto suceda es ne-

cesario que $f_x(x_i, \lambda) = 0$, $f_{xx}(x_i, \lambda) \neq 0$ y $f_\lambda(x, \lambda) \neq 0$.

Hay una regla simple debida a Poincaré para determinar rápidamente las partes de la curva $f(x_i, \lambda) = 0$ que corresponden a la estabilidad. En la figura 16 se sombreó la región donde $f(x, \lambda) > 0$.

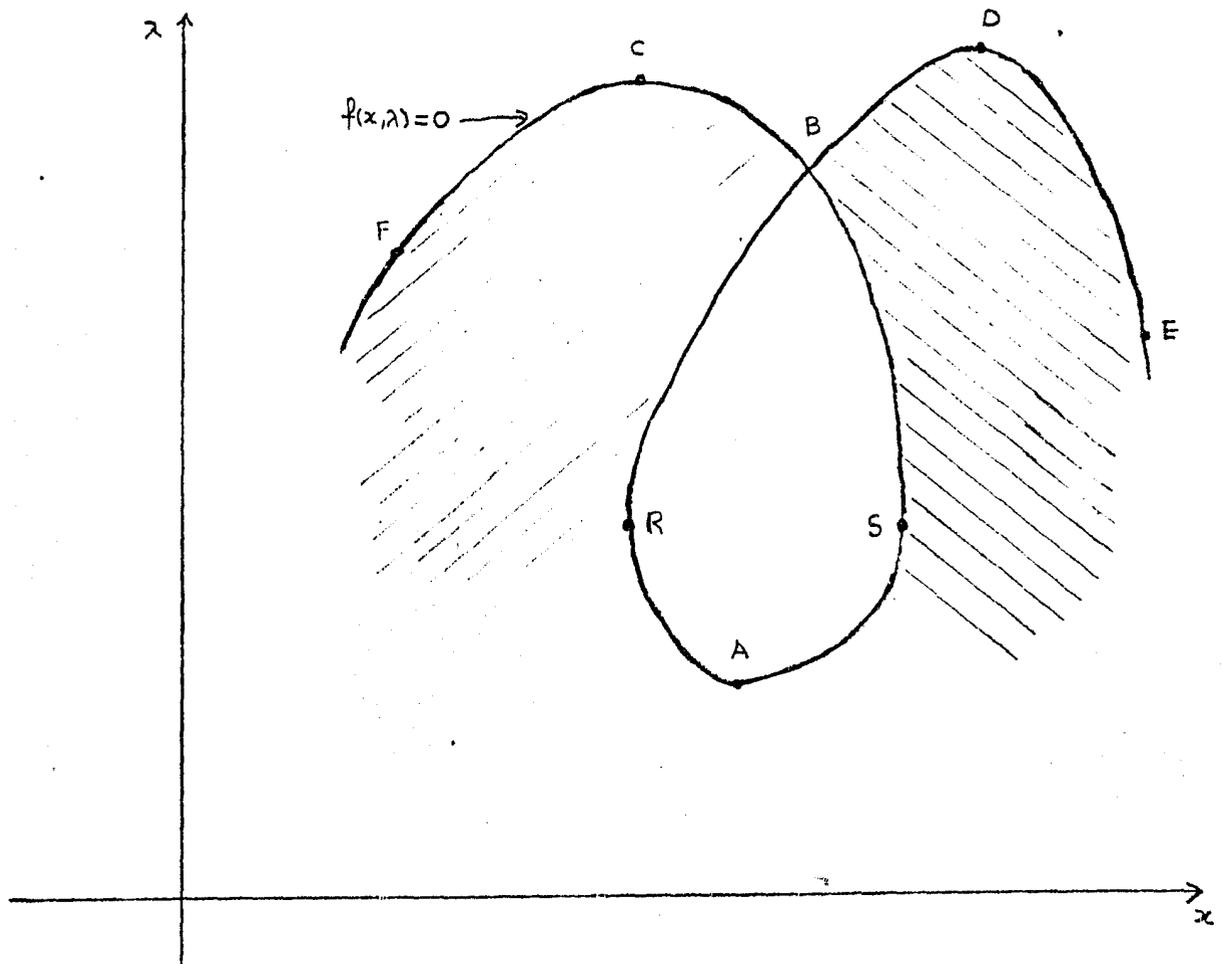


Fig.16 El punto R corresponde a una posición de equilibrio estable, mientras que el punto S corresponde a una posición de equilibrio inestable.

Si un punto (x_i, λ) está a la derecha de la región sombreada y a la izquierda de una región sin sombrear, como el punto R , éste será un punto de equilibrio estable, ya que $f_x(x_i, \lambda) < 0$. En caso contrario, como el punto S ,

el equilibrio es inestable. Los puntos estables serán centros, ya que $V_{xx} = -\frac{p}{f_x} > 0$ y los puntos inestables, puntos sillas, porque $V_{xx} = -\frac{p}{f_x} < 0$. En la figura 16 los puntos sobre los arcos \widehat{AR} , \widehat{RB} , \widehat{DE} son estables. Mientras que los puntos sobre los arcos \widehat{AS} , \widehat{SB} , \widehat{FC} son inestables. Los puntos A , B , C y D , son puntos de bifurcación. Al ir variando λ hasta cruzar un punto de bifurcación sucede que las posiciones de equilibrio cambian su carácter, los equilibrios estables se transforman en inestables, e inversamente. Además las posiciones de equilibrio aparecen o desaparecen en pares.

2. UN EJEMPLO

A continuación se analizará el equilibrio y estabilidad de una cuenta de masa m que se desliza sin fricción en un aro circular de radio a .

El aro está en un plano vertical, el cual es obligado a rotar alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante Ω . (ver figura 17).

Hay justamente un grado de libertad puesto que la cuenta sólo puede deslizarse alrededor del anillo. Se escoge una sola coordenada θ que determina el ángulo formado por el eje vertical y la recta que va desde el punto sobre el eje que corresponde al centro del anillo y la

cuenta en movimiento, considerando como $\theta = 0$ cuando la cuenta se encuentra en el punto más bajo del anillo.

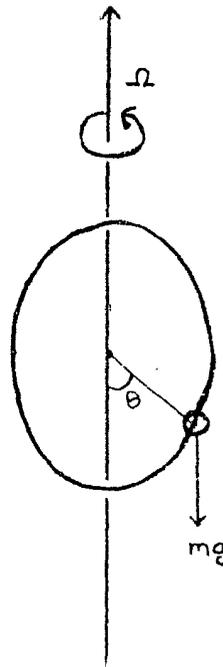


Fig.17 El sistema consta de una masa m que se desliza sin fricción en un aro circular de radio a .

La energía cinética del sistema es:

$$(III.3) \quad T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$

y la energía potencial

$$(III.4) \quad V = -mga \cos \theta$$

De donde la función de Lagrange está dada por

$$(III.5) \quad L = T - V = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta$$

Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$,

la cantidad $\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L$ es una constante de movimiento

$$(III.6) \quad \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta - m g a \cos \theta = E'$$

Como se ve, esta constante de movimiento no es la energía total $T + V$, dado que el segundo término de la izquierda no es nulo. El llamado potencial efectivo

$$(III.7) \quad V_e(\theta) = -\frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta - m g a \cos \theta$$

está dado por el segundo y tercer términos de la izquierda en la ecuación (III.6). Por lo tanto :

$$(III.8) \quad L_1 = T_1 - V_e(\theta) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta + m g a \cos \theta$$

De la ecuación (III.7), la torca respecto al centro del círculo es:

$$(III.9) \quad \begin{aligned} \gamma &= -\frac{\partial V_e(\theta)}{\partial \theta} = m a^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - m g a \sin \theta. \\ &= m a^2 \Omega^2 \left(\cos \theta - \frac{g}{\Omega^2 a} \right) \sin \theta \\ &= m a^2 \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta \end{aligned}$$

donde

$$(III.10) \quad \lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$$

y de aquí se obtiene la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt} \hat{L} = \gamma$$

$$\frac{d}{dt} (ma^2 \dot{\theta}) = ma^2 \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \operatorname{sen} \theta$$

$$(III.11) \quad ma^2 \frac{d\omega}{dt} = ma^2 \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \operatorname{sen} \theta$$

Y el sistema de ecuaciones que representa al movimiento es

$$(III.12) \quad \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

De donde la ecuación de las trayectorias en el espacio de las fases es:

$$(III.13) \quad \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \operatorname{sen} \theta}{\omega}$$

e integrando la ecuación anterior, se llega a la constante de movimiento que ya se vio en la ecuación (III.6).

Ahora, para trazar el retrato fase, se deducirán las posiciones de equilibrio. Las soluciones de equilibrio o puntos críticos del sistema (III.12) son las soluciones del siguiente sistema:

$$(III.14) \quad \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} &= \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \operatorname{sen} \theta = 0 \end{aligned}$$

Y de aquí se tiene:

$$\omega = 0$$

$$\sin \theta = 0$$

$$\text{o } \cos \theta - \lambda = 0$$

o bien

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta = n\pi \end{cases}$$

,

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta = \arccos \lambda \end{cases}$$

En el caso de $\theta = \arccos \lambda$ se necesita que $|\lambda| \leq 1$ para que exista solución, ésto es,

$$\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a} \leq 1$$

El valor límite, también llamado valor crítico es:

$$\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a} = 1$$

Este valor divide las posibilidades de rotación en dos casos:

$$\Omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$$

rotación rápida

$$\Omega < \sqrt{\frac{g}{a}}$$

rotación lenta

Regresando a las posiciones de equilibrio, éstas son:

$$\begin{pmatrix} \theta = 0 \\ \omega = 0 \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} \theta = \pi \\ \omega = 0 \end{pmatrix}$$

cuando la rotación es lenta.

Y en el caso de rotación rápida $\Omega > \sqrt{g/a}$, además de las posiciones de equilibrio anterior, tenemos las siguientes:

$$\begin{pmatrix} \theta = \arccos \lambda \\ \omega = 0 \end{pmatrix}$$

El carácter de estas posiciones de equilibrio se determina a través de la función

$$(III.15) \quad f(\theta, \lambda) = ma^2 \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta$$

que representa la torca total sobre la partícula con respecto al centro del círculo y que define la ecuación de movimiento (III.11). La coordenada θ de la posición de equilibrio está dada por

$$f(\theta, \lambda) = m \Omega^2 a^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta = 0$$

La gráfica de esta relación que aparece en la figura 18 consiste de la curva $\cos \theta = \lambda$ y de las líneas rectas $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = -\pi$, etc., en donde los puntos negros representan posiciones estables, los puntos blancos representan posiciones inestables. En la figura 18 se ve que para $\lambda = 1$, $\Omega^2 = g/a$, se tiene un punto de bifurcación. En donde un punto de equilibrio estable $\theta = 0$ se ramifica en tres puntos de equilibrio, uno inestable y dos estables; lo anterior ocurre al cruzar la velocidad angular Ω de lenta a ($\Omega < \sqrt{g/a}$) a rápida ($\Omega > \sqrt{g/a}$). Además la posición de equilibrio $\theta = 0$ cambia de carácter, de ser una posición

estable (para $\Omega < \sqrt{g/a}$) pasa a ser inestable (para $\Omega > \sqrt{g/a}$).

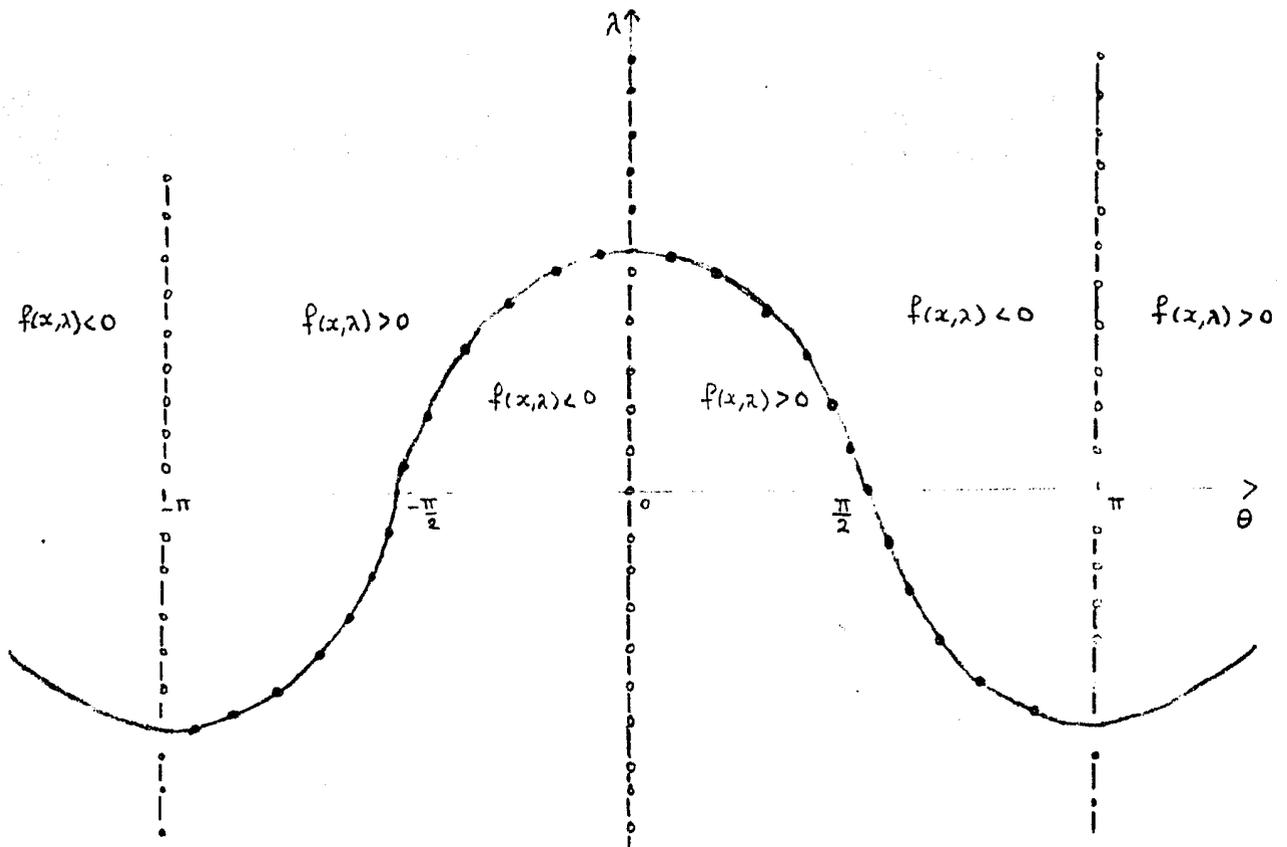


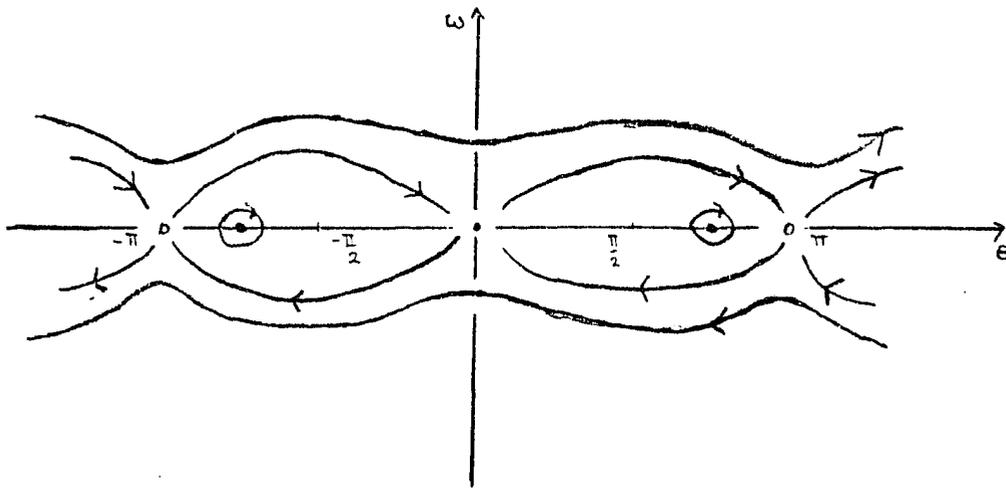
Fig.18. Gráfica de la curva $f(\theta, \lambda) = m\Omega^2 a^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta = 0$. Donde aparecen los puntos que corresponden a posiciones de equilibrio estable (puntos negros) y los puntos que corresponden a posiciones de equilibrio inestable (puntos blancos).

Como $\lambda = g/\Omega^2 a$, es positivo en el caso que se está analizando. Pero considerando que λ también pudiera ser negativo, en ese caso $\lambda = -1$ también es un punto de bifurcación.

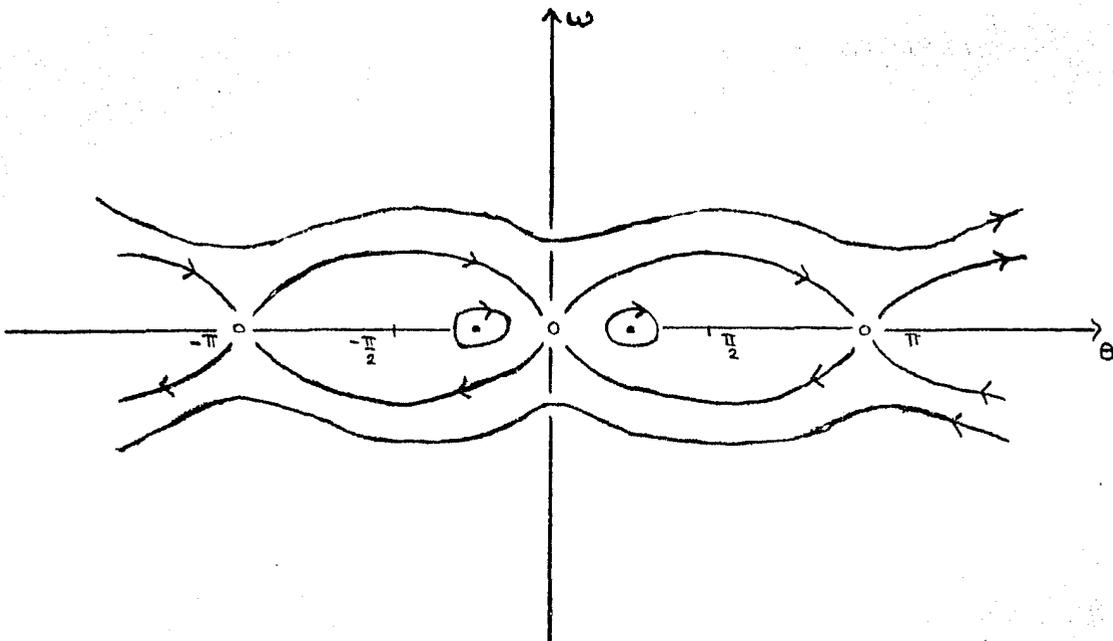
Los puntos estables son centros, porque $V_{\theta\theta} = -f_{\theta} > 0$ esto es ahí el potencial efectivo tiene un mínimo. Los puntos inestables son puntos silla porque ahí el potencial efectivo es máximo.

RETRATOS FASE

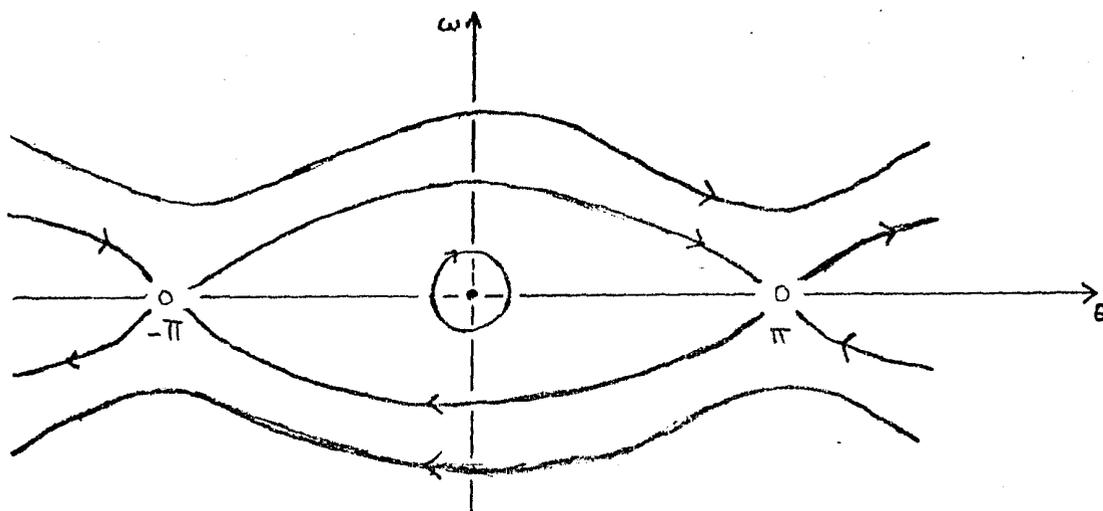
Primer caso. Para $-1 < \lambda < 0$, no tiene significado físico. En este caso tenemos cuatro puntos de equilibrio (el punto $(-\pi, 0)$ y el punto $(\pi, 0)$ es de hecho el mismo). Siendo dos puntos estables (centros) y dos inestables (sillas).



Segundo caso. Para $0 < \lambda < 1$, esto es para $\Omega > \sqrt{g/a}$. Aquí se tienen cuatro puntos de equilibrio



Tercer caso. Para $\lambda > 1$, o sea para $\Omega < \sqrt{g/a}$. En este caso se observan dos puntos de equilibrio, uno estable y uno inestable.



Cuarto caso. Para $\lambda = 1$, esto es $\Omega = \sqrt{g/a}$. Aquí hay dos puntos de equilibrio.

$$\begin{pmatrix} \theta = 0 \\ \omega = 0 \end{pmatrix}$$

estable

$$\begin{pmatrix} \theta = \pi \\ \omega = 0 \end{pmatrix}$$

inestable

Conforme $\lambda \rightarrow 1$, $\Omega \rightarrow \sqrt{g/a}$, desde la izquierda de 1, el punto de equilibrio inestable $(0,0)$ pasa a ser un punto de equilibrio estable.

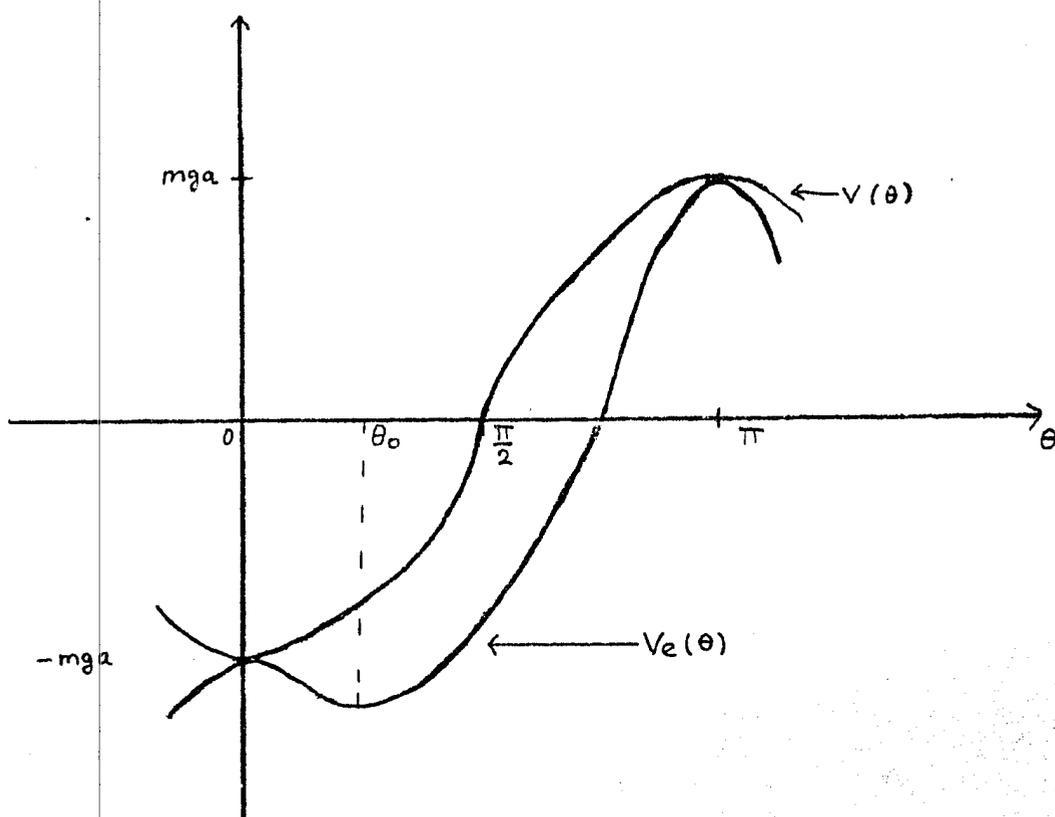
De todo lo anterior se concluye que al variar la velocidad Ω (o los valores de λ) un punto de equilibrio inestable cambia a estable o viceversa.

Las posiciones de equilibrio se determinan con los puntos de equilibrio del potencial efectivo, y su carácter por el signo de la función $f_{\theta}(\theta, \lambda)$, por lo que éste va a

depender del valor de λ .

RELACION DE LA ENERGIA POTENCIAL Y LA ESTABILIDAD.

En la siguiente figura se observan las gráficas de las funciones $V(\theta)$ y $V_e(\theta)$.



Aquí se ve que el potencial del sistema $V(\theta)$ es un mínimo en $\theta = 0$ y sin embargo esta es una posición de equilibrio inestable. En θ_0 existe una posición de equilibrio estable y aquí el potencial $V(\theta)$ ni es máximo ni es mínimo.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se introducen los conceptos de estabilidad y retrato fase y se alcanza el concepto de bifurcación, con los cuales se tiene una base para abordar una serie de tópicos tales como: ciclos límite, atractores extraños, ergodicidad, estabilidad estructural, estabilidad orbital, teoría de Floquet, etc.

De entre los temas anteriormente mencionados destaca la teoría de la estabilidad estructural debido a que ésta se aboca al problema de qué tan válido es hacer una aproximación, o lo que es lo mismo, que tan confiables son las aproximaciones que se hacen al modelar un cierto sistema.

El siguiente paso en la continuación natural del presente trabajo sería explorar las ideas en torno a la teoría de la estabilidad estructural.

BIBLIOGRAFIA

1. Andronow, A.A. and Chaikin, C.E., Theory of Oscillations. Princenton University Press, 1949.
2. Brauer, Fred and Nohel, John A., Ordinary Differential Equations: A First Course. W.A. Benjamin, 1973.
3. Brauer, Fred and Nohel, John A., The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. W.A. Benjamin, 1969.
4. Braun, M., Differential Equations and Their Applications. An Introduction to Applied Mathematics. Springer-Verlang, 1975.
5. Feynman, Richard P. and Leighton, Robert B. and Sands, Matthew, The Feynman Lectures on Physics Mainly Mechanics, Radiation and Heat. Fondo Educativo Interamericano, 1971.
6. Gettys, W. Edward and Ray, John R., Am. J. Phys. 49 (12) (1981) 162.
7. Goldstein, Herbert, Mecánica Clásica. Aguilar, 1972.
8. Hirsch, Morris W. and Smale, Stephen, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, 1974.
9. Jeffers, William A., Am. J. Phys. 39 (1971) 1210.
10. Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., Mecánica. Reverté, 1970.
11. Plaats, Otto, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Reverté, 1974.
12. Ross, Shepley L., Differential Equations. Ginn and Company, 1964.
13. Simmons, George F., Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. McGraw-Hill, 1977.
14. Stoker, J.L., Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. Interscience, 1950.
15. Symon, K.R. Mechanics. Addison-Wesley, 1960.
16. Bauer, M. y Lozano, J.M., Rev. Mex. de Fís. 25 (1976) E13-E19.
17. Blitzer, Leon, Am. J. Phys. 50 (5), May. 1982.
18. O'Neill, Barrett, Elementos de Geometría Diferencial. Limusa-Wiley, 1972.
19. Anton, Howard, Elementary Linear Algebra. John Wiley, 1973.

REFERENCIAS

- (1) pág.28 del libro 18 de la bibliografía
- (2) pág.217 del libro 19 de la bibliografía
- (3) pág.68 del libro 8 de la bibliografía
- (4) pág.192 del libro 8 de la bibliografía