

28  
10



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL CILINDRO RODANTE:  
UN ENFOQUE DIDACTICO  
DE UN PROBLEMA DE MECANICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

JUAN JOSE ESPINOSA RIVERA

ABRIL 1984



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

	Pág.
PREFACIO.....	1
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	
I.1. El problema.....	2
I.2. El origen.....	2
I.3. El plan de acción.....	2
<b>II. LA PARTE TEÓRICA</b>	
II.1. Similitudes con otros problemas.....	5
II.1.1. El yoyo sobre la mesa.....	5
II.1.2. El cilindro rodante con polea.....	7
II.1.3. El acelerómetro.....	9
II.1.4. El péndulo enrollado en un cilindro fijo.....	10
II.1.5. El yoyo invertido oscilante.....	13
II.1.6. El péndulo que se alarga con velocidad constante.....	16
II.2. El cilindro rodante.....	19
II.2.1. Obtención de las ecuaciones de movimiento mediante la formulación de Lagrange.	24
II.2.2. Relación entre las coordenadas, velocidades y aceleraciones del cilindro y la pesa.....	24
II.2.3. Soluciones aproximadas.....	26
II.2.4. Obtención de las ecuaciones de movimiento a partir de las leyes de Newton.....	27
II.2.5. Análisis cualitativo del problema.....	31
II.2.6. Análisis de las ecuaciones de movimiento.....	33

II.2.7. Gráficas del movimiento: (para ángulos pequeños).....	37
II.2.8. Gráficas del movimiento: caso general.....	37
II.2.9. Línea de oscilación de la pesa.....	47
II.2.10. Un resultado inesperado: $a_c > g$ .....	49

III. SOLUCIONES NUMÉRICAS 52

III.1. Una solución general.....	52
III.2. Método empleado para el cálculo numérico.....	52
III.3. El programa.....	55
III.4. Solución numérica con las condiciones iniciales de "El Arpa".....	57
III.5. Solución numérica para el sistema cilindro-pesa sin oscilación.....	61
III.6. Un caso particular $a_c > g$ .....	62

IV. LA PARTE EXPERIMENTAL 64

IV.1. Experimentos cualitativos.....	64
a) Tubo negro y cilindro de madera.....	64
b) Cilindro con polea.....	65
c) El péndulo que se alarga con velocidad constante....	66
IV.2. El cilindro rodante: diseño experimental.....	67
IV.3. Movimiento uniformemente acelerado.....	72
IV.3.a. El Acelerómetro.....	74
IV.4. El cilindro rodante con ángulos de oscilación pequeños.....	77
IV.5. El cilindro rodante: caso general.....	79

V. LA PARTE DIDÁCTICA 93

V.1. ¿Por qué un programa de video?.....	93
--	----

	Pág.
V.2. ¿Cómo presentar el problema?.....	94
V.3. Características y desarrollo del programa.....	94
V.4. Guión Literario.....	96

VI. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES 112

VI.1. Sobre la realización del programa.....	112
VI.2. Conclusiones.....	115
<i>Lista de Referencias.....</i>	<i>117</i>

## P R E F A C I O

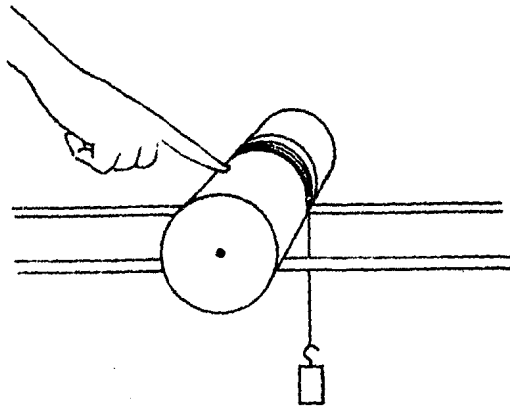
Estas notas fueron elaboradas en torno de un problema no trivial de Mecánica: desde su origen, pasando por la investigación, análisis y solución teórica y experimental, hasta la presentación didáctica del asunto mediante un programa de video destinado a estudiantes que han llevado, al menos, un curso de Física a nivel medio superior.

El problema tratado tiene características especiales: es muy simple en primera aproximación, tiene el atractivo de no estar resuelto en los libros y es susceptible de abordarse experimentalmente, con el incentivo adicional de que su explicación -en forma elemental y clara- a estudiantes que empiezan a asomarse a la Física, constituye un buen desafío.

## I.- INTRODUCCION

### I.1.- EL PROBLEMA

Un cilindro metálico de radio  $R$  y masa  $M$  está colocado sobre dos rieles horizontales, como se muestra en la figura # 1. Un hilo enrollado en el cilindro tiene en su extremo una pesa de masa  $m$ . Inicialmente el cilindro está sujeto. ¿Qué sucede cuando se suelta?



*Fig. I.1. El Cilindro Rodante*

### 1.2.- EL ORIGEN

Un buen día mientras daba su clase, el Profesor Darío Moreno lanzó a los alumnos una pregunta inocente: ¿Por qué se mueve un - automóvil?. En la discusión subsecuente, surgieron algunos culpa

bles del movimiento: el motor del auto, la gasolina, la caja de transmisiones, etc. Para mostrar que el meollo del asunto estaba en otro lado, redujo el coche a un par de ruedas conectadas mediante un eje y en lugar de motor o haciendo las veces del mismo, colocó una pesa en el extremo de un hilo enrollado al eje y ....

En 1982, cuando impartí el curso de Física General a un grupo de aspirantes a la carrera de Biología, algunos de ellos mostraron un interés particular por las rotaciones, torcas y cosas de esas. Querían enfrentar algún problema que contuviera esos elementos. Les sugerí el problema del cilindro y la pesa. Ellos lo bautizaron como "El cilindro rodante". Trabajaron en el asunto varias semanas, se metieron a experimentar al laboratorio de Mecánica, tomaron las primeras fotografías y pudieron resolver algunas interrogantes... y, por supuesto, surgieron muchas más.

### 1.3.- EL PLAN DE ACCIÓN

El presente trabajo es una presentación ordenada de los diferentes ángulos en que se abordó el problema. A grandes rasgos son los siguientes:

La parte teórica, donde se recaba información pertinente, se destacan los aspectos relevantes, se analiza y resuelve el problema.

La parte experimental, donde se da cuenta de los ensayos realizados, los resultados obtenidos y la confrontación con la teoría.



La parte didáctica donde se estructura un programa de video destinado a presentar y explicar el problema en forma elemental y se analizan los objetivos y las estrategias seguidas para la - presentación a los alumnos.

Y una parte final destinada a comentarios y conclusiones so bre el asunto.

## II.- LA PARTE TEORICA

### II.1.- SIMILITUDES CON OTROS PROBLEMAS

Con el propósito de obtener información en torno al asunto planteado y que ayudara a comprenderlo, examinamos algunos problemas semejantes pero más sencillos y cuya solución es, por supuesto, conocida. Se mencionan aquí para abreviar, solamente aquellos problemas que se utilizaron en la parte V (el programa de video) y que contribuyeron a dar luz sobre el problema central.

#### II.1.1- El Yoyo Sobre la Mesa

Un yoyo se encuentra sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura II.2. Sobre el hilo que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, se ejerce una fuerza  $T$ . Se supone que el yoyo rueda sin resbalar. Determinar el movimiento resultante<sup>(1)</sup>

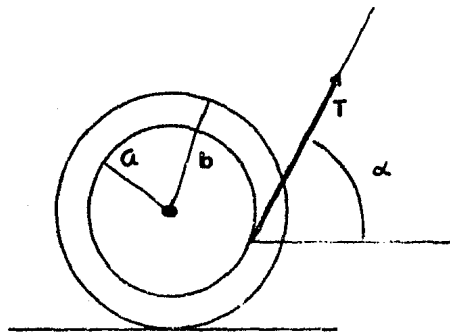


Fig. II.2. ¿Hacia que lado se mueve el yoyo?

Del análisis de fuerzas y torcas que actúan sobre el yoyo, se llega a la siguiente expresión:

$$X = \frac{bT(b \cos \alpha - a)t^2}{2M(k^2 + b^2)}$$

en donde  $X$  es la distancia recorrida por el yoyo,  $M$  su masa;  $b$  es el radio (se supone un yoyo cilíndrico);  $a$  es el radio del eje;  $t$ , el tiempo y  $k$ , el radio de giro que está dado por:

$$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

De acuerdo con la ecuación obtenida, el sentido en que rueda el yoyo depende del ángulo que forma el hilo con la horizontal:

si  $\cos \alpha = \frac{a}{b}$ , el yoyo rueda hacia la derecha

si  $\cos \alpha < \frac{a}{b}$ , el yoyo rueda hacia la izquierda

si  $\cos \alpha = \frac{a}{b}$ , el yoyo no se mueve

Para que el yoyo permanezca en reposo bajo la acción de la fuerza  $T$ , es necesario que la suma de fuerzas y torcas sea cero.

De acuerdo con la figura 11.3:

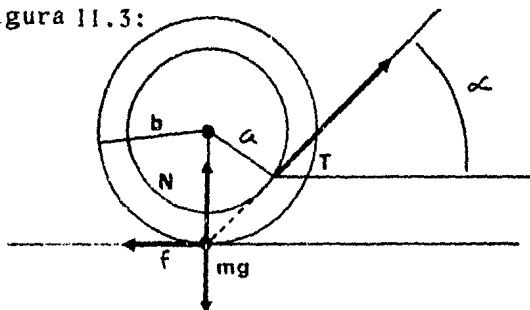


Fig. 11.3. Fuerzas concurrentes sobre el yoyo

$$T \operatorname{sen} \alpha + N - mg = 0 \quad (1)$$

$$T \cos \alpha - f = 0 \quad (2)$$

$$-aT + fb = 0 \quad (3)$$

De (2) y (3) se obtiene:

$$a = b \cos \alpha$$

que, según se estableció, es la condición para que el yoyo permanezca en el mismo lugar.

### II.1.2.- El Cilindro Rodante con Polea

En este problema, entre el cilindro y la pesa se intercala una polea y se obtiene el arreglo mostrado en la figura II.4. La masa de la polea es muy pequeña comparada con las masas de la pesa y del cilindro. No se toma en cuenta la fricción entre el hilo y la polea. Se supone que el cilindro rueda sin deslizar. Se desea obtener una expresión para la aceleración del cilindro<sup>(2)</sup>.

Sean  $M$ , la masa del cilindro;  $R$ , el radio;  $a_c$ , la aceleración del cilindro;  $f$ , la fuerza de fricción;  $T$ , la tensión en el hilo;  $m$ , la masa de la pesa y  $a_p$ , la aceleración de la pesa.

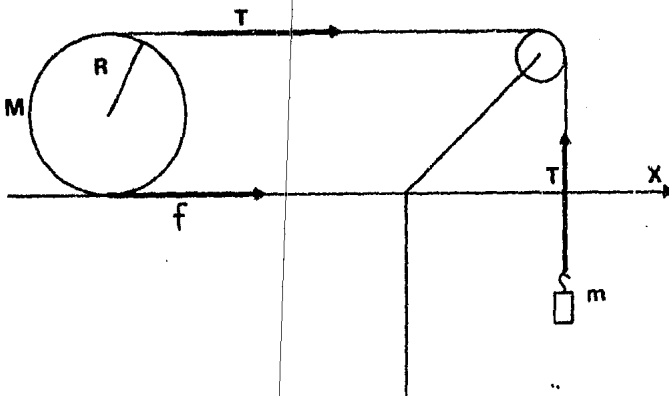


Fig. II.4 Una versión simplificada del cilindro rodante.

De la suma de fuerzas y torcas sobre el cilindro se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$T + f = Ma_c \quad (1)$$

$$TR - fR = I\alpha \quad (2)$$

I, el momento de inercia del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{a_c}{R},$$

de tal manera que al substituir en (2) se obtiene:

$$T - f = \frac{1}{2}Ma_c \quad (3)$$

Sobre la pesa tenemos las siguientes fuerzas:

$$mg - T = ma_p \quad (4)$$

Al caer la pesa, el hilo se desenrolla una longitud  $R\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo girado por el cilindro. Al mismo tiempo el cilindro avanza una distancia  $R\theta$  (condición de rodadura), de manera que la altura descendida por la pesa es el doble de la distancia recorrida por el cilindro, suponiendo que el hilo es inextensible.

O sea que:

$$y_p = 2x_c$$

y de aquí:

$$a_p = 2a_c \quad (5)$$

usando (1), (3), (4) y (5) se llega a

$$a_c = \frac{m g}{\frac{3}{4} M + 2m} \quad (6)$$

### II.1.3. El Acelerómetro

Sea un péndulo de longitud  $\ell$  que está sujeto a una aceleración constante  $a$  hacia la derecha, de tal manera que forma un ángulo  $\beta_0$  con la vertical, como se indica en la figura II,5. (3)

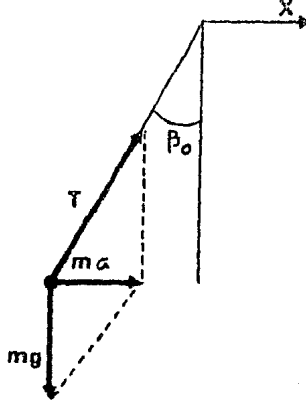


Fig. II.5. Fuerzas sobre el péndulo

Consideremos las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$ :

En la dirección del eje  $x$

$$T \operatorname{sen} \beta = ma \quad (1)$$

A lo largo de la vertical

$$T \operatorname{cos} \beta - mg = 0$$

o

$$T \operatorname{cos} \beta = mg \quad (2)$$

Si dividimos (1) entre (2)

$$\frac{T \operatorname{sen} \beta}{T \operatorname{cos} \beta} = \frac{ma}{mg}$$

$$\tan \beta = \frac{a}{g}$$

El péndulo queda en reposo a lo largo de una nueva "vertical", formando un ángulo que tiene por tangente el cociente entre la aceleración horizontal y la aceleración de la gravedad.

Por supuesto, si inicialmente el péndulo cuelga verticalmente bajo la acción de la gravedad y de pronto queda sujeto a la aceleración  $a$ , el péndulo se desplaza en sentido contrario a la aceleración y comienza a oscilar en torno de la nueva "vertical". Eventualmente se amortigua y queda en reposo formando el ángulo  $\beta$  con la vertical.

El periodo de este péndulo cambia a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{(g^2 + a^2)^{1/2}}}$$

#### II.1.4. El Péndulo Enrollado en un Cilindro Fijo

Una pesa de masa  $m$  está suspendida de un hilo enrollado en un cilindro fijo de radio  $R$ . Obtener la ecuación de movimiento cuando la pesa se pone a oscilar. (4)

Sea  $\beta$  el ángulo que el hilo forma con la vertical y  $\rho$  la longitud del péndulo formado por la pesa, como está indicado en la fig. II.6.

El sistema tiene un sólo grado de libertad: el ángulo  $\beta$ .





La resolución del problema es sencilla si recurrimos a la formulación de Lagrange. Para ello, calcularemos primero la energía cinética  $T$  de la pesa.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \quad (3)$$

De la figura II.6 puede verse que:

$$X = R \cos \beta - \rho \operatorname{sen} \beta \quad (4)$$

$$Y = R \operatorname{sen} \beta + \rho \cos \beta \quad (5)$$

derivando respecto del tiempo

$$\dot{X} = -\dot{\rho} \operatorname{sen} \beta - \dot{\beta} (R \operatorname{sen} \beta + \rho \cos \beta)$$

$$\dot{Y} = \dot{\rho} \cos \beta + \dot{\beta} (R \cos \beta - \rho \operatorname{sen} \beta)$$

elevando al cuadrado y sumando

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{\rho}^2 \dot{\beta}^2 + (\dot{\rho} - R\dot{\beta})^2$$

con la condición (2) queda:

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \rho^2 \dot{\beta}^2$$

y la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\beta}^2$$

Sea  $V$  la energía potencial de la pesa. De la figura II.6

$$V = -mg(y - \rho_0)$$

usando (5)

$$V = -mg(\rho_0 \{\cos \beta - 1\} + R\{\operatorname{sen} \beta - \beta \cos \beta\})$$

La lagrangiana  $L=T-V$ , será:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + mg(\rho_0(\cos \beta - 1) + R(\sin \beta - \beta \cos \beta))$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

obtenemos:

$$m(\rho_0 - R\beta)^2 \ddot{\beta} - 2mR(\rho_0 - R\beta)\dot{\beta}^2 + mR(\rho_0 - R\beta)\dot{\beta}^2 + mg(\rho_0 - R\beta)\sin \beta = 0$$

Simplificando, llegamos a la ecuación diferencial buscada:

$$(\rho_0 - R\beta)\ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2 + g \sin \beta = 0$$

### II.1.5.- El Yoyo Invertido Oscilante

Supongamos que el eje del cilindro está conectado a un motor que puede comunicarle un movimiento giratorio de la forma  $\theta=f(t)$ , como indica la figura II.7. Obtener la ecuación de movimiento de la pesa cuando el cilindro gira, variando el péndulo su longitud. (5)

Si llamamos  $\theta$  al ángulo del cilindro y continuamos usando la notación del problema anterior, la longitud del péndulo ( $\rho$ ), de acuerdo con la figura II.7, será:

$$\rho = \rho_0 - R\beta + R\theta \quad (2)$$

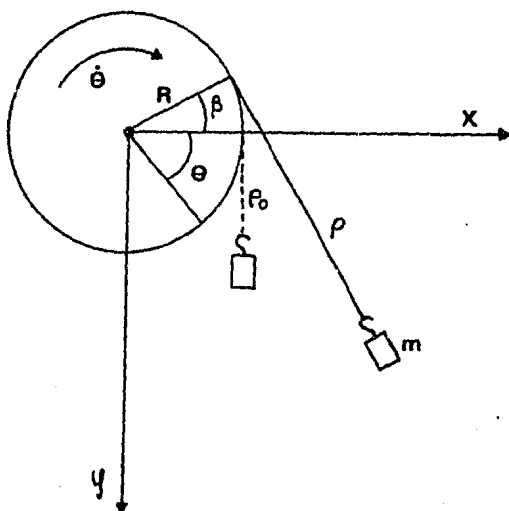


Fig. II.7. Cilindro giratorio con péndulo que se alarga.

Como la variación de  $\theta$  es conocida e impuesta al sistema por el motor, este problema tiene un sólo grado de libertad; el ángulo de oscilación  $\beta$  del péndulo formado por la pesa.

La nueva energía cinética de la pesa será:

$$T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \dot{\beta}^2)$$

y la energía potencial  $V$ , estará dada por:

$$V = -mg(y - \rho_0)$$

en donde

$$y = \rho \cos \beta + R \sin \beta$$

La lagrangiana del sistema,  $L = T - V$  resulta:

$$L = \frac{1}{2}m\{\dot{R}^2\theta^2 + (\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta})^2\dot{\beta}^2\} - mg\{\rho_0 + R \text{ sen } \beta - (\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta}) \cos \beta\} \quad (2)$$

Las ecuaciones de Lagrange, derivando respecto de  $\beta$  y  $\dot{\beta}$  son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{2}m\{2(\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta})\dot{\beta} + 4(\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta})(R\dot{\theta} - R\dot{\beta})\dot{\beta} + 2R\dot{\beta}^2(\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta})\} + (\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta})mg \text{ sen } \beta = 0$$

Después de simplificar, la ecuación diferencial buscada resulta ser:

$$(\rho_0 - R\beta + R\dot{\theta})\ddot{\beta} + 2R\dot{\theta}\dot{\beta} - R\dot{\beta}^2 + g \text{ sen } \beta = 0 \quad (3)$$

En términos de  $\rho$  y  $\dot{\rho}$ :

$$\rho\ddot{\beta} + 2\dot{\rho}\dot{\beta} + R\dot{\beta}^2 + g \text{ sen } \beta = 0 \quad (4)$$

Si se hace pasar el hilo a través de un agujero como se indica en la figura II.7, la oscilación sobre el cilindro desaparece ( $R\dot{\beta} = 0$ ) y la ecuación (4) se simplifica reduciéndose a:

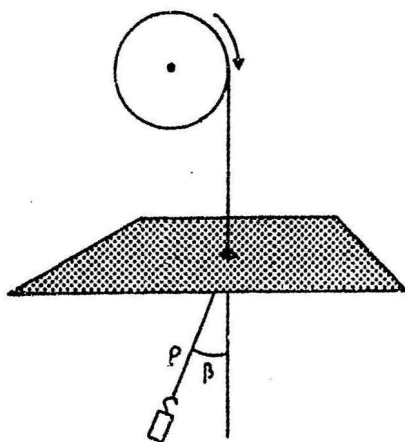


Fig. II.8. Arreglo experimental para eliminar  $R\dot{\beta}^2$

$$\rho \ddot{\beta} + 2\dot{\rho} \dot{\beta} + g \operatorname{sen} \beta = 0 \quad (5)$$

Ecuación diferencial correspondiente a un péndulo de longitud variable  $\rho$  que oscila con un ángulo  $\beta$ .

### II.1.6.- Péndulo que se Alarga con Velocidad Constante <sup>(6)</sup>

Si suponemos que el péndulo del problema anterior aumenta su longitud con velocidad constante  $v$ , o sea que  $\rho$  puede expresarse como  $\rho = \rho_0 + vt$  y consideramos ángulos pequeños (si  $\beta \ll 1$  radián entonces  $\operatorname{sen} \beta \approx \beta$ ).

La ecuación (5) anterior se reduce a

$$\rho \ddot{\beta} + 2\dot{\rho} \dot{\beta} + g \beta = 0$$

dividiendo entre  $\rho$  obtenemos

$$\ddot{\beta} + \frac{2\dot{\rho}}{\rho} \dot{\beta} + \frac{g}{\rho} \beta = 0 \quad (1)$$

Ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables. Vamos a modificar la forma de la ecuación haciendo un cambio de variable:

$$\text{si } \rho = \rho_0 + vt \text{ obtenemos } t = \frac{\rho - \rho_0}{v} \text{ con } v = \text{cte}$$

Si consideramos ahora a  $\rho$  como variable independiente:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \dot{\beta} \frac{1}{v} \quad \dot{\beta} = v \frac{d\beta}{d\rho}$$

$$\frac{d^2 \beta}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\dot{\beta}}{v} \right) = \frac{1}{v} \frac{d\dot{\beta}}{dx} \frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{v^2} \ddot{\beta} \quad \ddot{\beta} = v^2 \frac{d^2 \beta}{d\beta^2}$$

Sustituyendo en (1) y dividiendo entre  $v^2$  tenemos

$$\frac{d^2 \beta}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\beta}{d\rho} + \frac{g}{\rho v^2} \beta = 0 \quad (2)$$

La expresión (2) corresponde a una ecuación diferencial de Bessel, como puede probarse comparando con la siguiente forma general:

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left[ (\delta \gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - n^2 \gamma^2}{x^2} \right] y = 0 \quad (3)$$

que corresponde a la ecuación diferencial de Bessel de orden  $n$ . En el caso de que  $n$  sea entero, la solución general es:

$$y = x^\alpha [A J_n(\delta x^\gamma) + B Y_n(\delta x^\gamma)]$$

en donde  $J_n$  es la función de Bessel de orden  $n$  y  $Y_n$  es la función de Neumann de orden  $n$

Si comparamos las ecuaciones (2) y (3), en:

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = 1$$

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{g}{v^2}}$$

$$n = 1$$

En resumen, la expresión (2) es una ecuación de Bessel cuya solución es:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\rho(z)}} \left[ A J_1 \left( 2\sqrt{\frac{g}{v^2}} \rho(z) \right) + B Y_1 \left( 2\sqrt{\frac{g}{v^2}} \rho(z) \right) \right]$$

en donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales, mientras que  $J_1$  y  $Y_1$  son las funciones de Bessel y de Neumann de orden uno, respectivamente.

## II.2 EL CILINDRO RODANTE

### II.2.1.- Obtención de las Ecuaciones de Movimiento Mediante la Formulación de Lagrange

Un cilindro de densidad uniforme está colocado sobre dos rieles horizontales, según muestra la figura II.9. Un hilo enrollado en el cilindro tiene en su extremo una pesa suspendida. Suponemos que el cilindro rueda sin resbalar y que la masa del hilo es despreciable. Obtener las ecuaciones de movimiento.

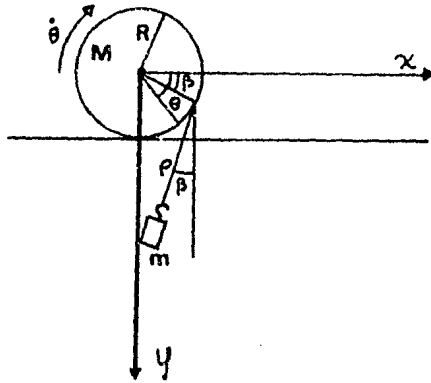


Fig. II.9 El cilindro rodante: notación usada

Sean:

- $\rho$ , la longitud del péndulo formado por la pesa
- $\beta$ , el ángulo que el hilo forma con la vertical
- $M$ , la masa del cilindro
- $R$ , el radio del cilindro
- $m$ , la masa de la pesa
- $\rho_0$ , la longitud inicial del péndulo



$\theta$ , el ángulo girado por el cilindro

$x_c$ , la distancia recorrida por el cilindro

$x_p, y_p$ , las coordenadas de la pesa

El ángulo se considera positivo en el sentido de las manecillas del reloj.

El sistema tiene dos grados de libertad y las coordenadas generalizadas que escogimos para describirlo son  $x_c$  y  $\beta$

Si el cilindro rueda sin deslizar, entonces:

$$x_c = R\theta \quad (1)$$

A partir de la figura II.9:

$$p = p_0 + x_c - R\beta \quad (2)$$

Sea  $T_p$  la energía cinética de la pesa. De acuerdo con la figura II.10.

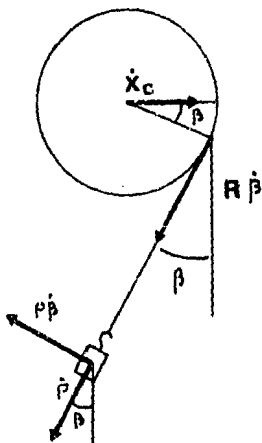


Fig. II.10 Las velocidades del cilindro y la pesa.

$$T_p = \frac{1}{2} m \{ [(R\dot{\beta})_x + (\rho\dot{\beta})_x + (\dot{\rho})_x + \dot{\chi}_c]^2 + [(R\dot{\beta})_y + (\rho\dot{\beta})_y + (\dot{\rho})_y]^2 \}$$

$$T_p = \frac{1}{2} m \{ [-R\dot{\beta} \sin \beta - \rho\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\rho} \sin \beta + \dot{\chi}_c]^2 + [R\dot{\beta} \cos \beta - \rho\dot{\beta} \sin \beta + \dot{\rho} \cos \beta]^2 \} \quad (3)$$

Si derivamos (2) con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{\rho} = \dot{\chi}_c - R\dot{\beta} \quad (4)$$

Desarrollando la expresión (3) y usando (4) y (2), conseguimos expresar  $T_p$  en términos de  $\chi_c$  y  $\beta$ :

$$T_p = m \{ \dot{\chi}_c^2 (1 - \sin^2 \beta) - (\rho_0 + \chi_c - R\beta)\dot{\beta} \dot{\chi}_c \cos \beta + \frac{1}{2} (\rho_0 + \chi_c - R\beta)^2 \dot{\beta}^2 \} \quad (5)$$

Para el cilindro:

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{\chi}_c^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (6)$$

El momento de inercia del cilindro respecto de su eje de simetría es:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (7)$$

De la condición de rodadura obtenemos  $\dot{\chi}_c = R\dot{\theta}$  (8)

y la energía cinética del cilindro será:

$$T_c = \frac{3}{4} M \dot{\chi}_c^2 \quad (9)$$

Procederemos a calcular la energía potencial  $V$  de la pesa.

Recordemos que el sentido positivo del eje  $y$  es hacia abajo

De la figura II.11

$$V = -mg(y - c_0) \quad (10)$$

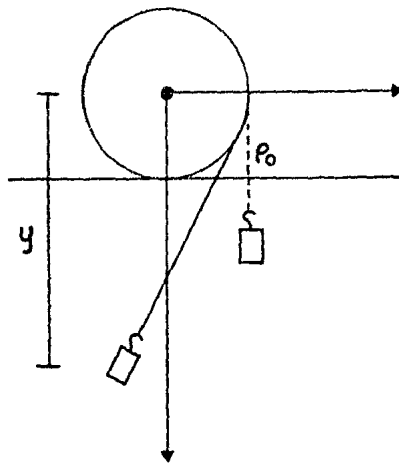


Fig. II.11. La pesa y su energía potencial

si expresamos  $y$  en términos de  $\rho$  y  $\beta$ :

$$y = \rho \cos \beta + R \operatorname{sen} \beta \quad (11)$$

sustituyendo (11) en (10):

$$V = -mg[(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \cos \beta + R \operatorname{sen} \beta - \rho_0] \quad (12)$$

La lagrangiana  $L$  del sistema será por tanto:

$$L = \frac{3}{4} M \dot{\chi}_c^2 + m (\dot{\chi}_c^2 (1 - \operatorname{sen} \beta) - (\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\beta} \dot{\chi}_c \cos \beta + \frac{1}{2} (\rho_0 + \chi_c - R\beta)^2 \dot{\beta}^2) + mg[(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \cos \beta + R \operatorname{sen} \beta - \rho_0] \quad (13)$$

Si aplicamos las ecuaciones de Lagrange derivando con respecto a  $\chi_c$  y  $\dot{\chi}_c$ , obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_c} = 2\dot{\chi}_c \left( \frac{3}{4} M + m (1 - \operatorname{sen} \beta) \right) - m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\beta} \cos \beta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_c} = \ddot{\chi}_c \left( \frac{3}{2} M + 2m(1 - \sin \beta) \right) - (3\dot{\chi}_c \dot{\beta} + (\rho_0 + \chi_c - R\beta) \ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) m \cos \beta + (\rho_0 + \chi_c - R\beta) m \dot{\beta}^2 \sin \beta \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \chi_c} = m(g - \dot{\chi}_c \dot{\beta}) \cos \beta + m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\beta}^2 \sin \beta \quad (15)$$

Si ahora restamos (15) de (14) y reagrupamos términos, la primera ecuación de movimiento resulta ser:

$$\ddot{\chi}_c \left\{ \frac{3}{2} M + 2m(1 - \sin \beta) \right\} + \{-2\dot{\chi}_c \dot{\beta} + R\dot{\beta}^2 - (\rho_0 + \chi_c - R\beta) \ddot{\beta} - g\} m \cos \beta - m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\beta}^2 (1 - \sin \beta) = 0 \quad (16)$$

Repetiendo el procedimiento con  $\beta$  y  $\dot{\beta}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = -m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\chi}_c \cos \beta + m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\beta}^2 \sin \beta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = \{-(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \ddot{\chi}_c + R\dot{\chi}_c \dot{\beta} - \dot{\chi}_c^2\} m \cos \beta + m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \{\dot{\chi}_c \dot{\beta} (2 + \sin \beta) - 2R\dot{\beta}^2\} + (\rho_0 + \chi_c - R\beta) \ddot{\beta} \sin \beta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = (-\dot{\chi}_c^2 + R\dot{\chi}_c \dot{\beta}) m \cos \beta + m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) (\dot{\beta} \dot{\chi}_c - g) \sin \beta - m(\rho_0 + \chi_c - R\beta) \dot{\beta}^2$$

Después de efectuar la resta y simplificar, la segunda ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\chi}_c \cos \beta = (\rho_0 + \chi_c - R\beta) \ddot{\beta} + 2\dot{\chi}_c \dot{\beta} - R\dot{\beta}^2 + g \sin \beta \quad (17)$$

Si mezclamos las ecuaciones diferenciales obtenidas, llegamos a una expresión más simple para  $\ddot{\chi}_c$ .

Sustituyendo (17) en (16) y simplificando llegamos a:

$$\ddot{x}_c = \frac{m(1-\text{sen}\beta)(g \cos \beta + \rho\dot{\beta}^2)}{\frac{3}{2}M+m(2(1-\text{sen}\beta)-\cos^2 \beta)} \quad (18)$$

Como puede verse, la expresión anterior es bastante más sencilla que las dos ecuaciones originales: no aparece la aceleración angular  $\ddot{\beta}$ , ni la de Coriolis  $2\dot{x}_c\dot{\beta}$ , aunque sí figura la aceleración centrípeta  $\rho\dot{\beta}^2$ .

La aceleración del cilindro en la forma (18) es la base del análisis que haremos adelante y nos estaremos refiriendo a ella continuamente.

### II.2.2.- Relación entre las Coordenadas, Velocidades y Aceleraciones del Cilindro y la Pesa

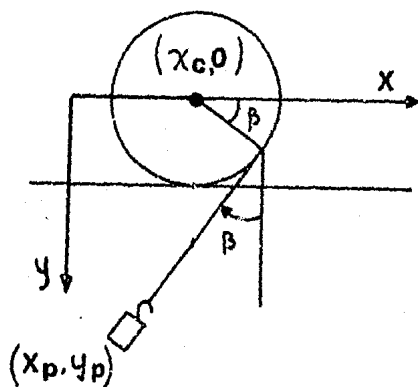


Fig. II.12. Las coordenadas del cilindro y la pesa

Tal y como se indica en la fig. II.12, el centro del cilindro tiene como coordenadas  $(x_c, 0)$  mientras que a la pesa le co-

responden las coordenadas  $(x_p, y_p)$ .

Sean  $\dot{x}_c$  la velocidad del cilindro y  $\ddot{x}_c$  la aceleración del cilindro,  $\dot{x}_p$  y  $\dot{y}_p$  las velocidades horizontal y vertical de la pesa,  $\ddot{x}_p$  y  $\ddot{y}_p$  las aceleraciones horizontal y vertical de la pesa.

A partir de la fig. II.12, las coordenadas de la pesa expresadas en términos de  $x_c$  y  $\beta$ , resultan ser:

$$x_p = x_c + R \cos \beta - \rho \operatorname{sen} \beta \quad (1)$$

$$y_p = R \operatorname{sen} \beta + \rho \cos \beta \quad (2)$$

en donde

$$\rho = \rho_0 + x_c - R\beta$$

Para obtener las velocidades horizontal y vertical de la pesa, derivamos (1) y (2) respecto del tiempo:

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c (1 - \operatorname{sen} \beta) - \rho \dot{\beta} \cos \beta \quad (4)$$

$$\dot{y}_p = \dot{x}_c \cos \beta - \rho \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \quad (5)$$

Si ahora derivamos (4) y (5) respecto del tiempo, las aceleraciones vertical y horizontal de la pesa quedan expresadas como:

$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_c (1 - \operatorname{sen} \beta) + \rho \dot{\beta}^2 \operatorname{sen} \beta - (2\dot{x}_c \dot{\beta} \cos \beta - R\dot{\beta}^2) \cos \beta \quad (6)$$

$$\ddot{y}_p = (\ddot{x}_c - \rho \dot{\beta}^2) \cos \beta - (2\dot{x}_c \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta - R\dot{\beta}^2 + \rho \ddot{\beta}) \operatorname{sen} \beta \quad (7)$$

Con ayuda de los resultados que hemos obtenido anteriormen-

te, podemos derivar otras expresiones útiles ;

Si sustituimos la ecuación (17) de II.2.1 en (6) obtenemos :

$$\ddot{x}_p = \{g \cos \beta - \ddot{x}_c (1 - \sin \beta) + \rho \dot{\beta}^2\} \sin \beta \quad (8)$$

La misma ecuación (17) sustituida en (7) nos conduce a :

$$\ddot{y}_p = \{\ddot{x}_c (1 - \sin \beta) - \rho \dot{\beta}^2\} \cos \beta + g \sin^2 \beta \quad (9)$$

### II.2.3.- Soluciones Aproximadas

Para el análisis subsecuente y la presentación y discusión de algunos resultados, es muy conveniente simplificar las ecuaciones generales, considerando casos particulares sencillos :

a) Primera aproximación : ángulos pequeños.

$$\text{si } \beta \ll 1 \text{ radián, } \quad \sin \beta = \beta, \quad \cos \beta = 1$$

la ecuación II.2.18 se reduce a :

$$\ddot{x}_c = \frac{m(1-\beta) (g + \rho \dot{\beta}^2)}{\frac{3}{2} M + m(1-2\beta)} \quad (1)$$

mientras que las componentes horizontal y vertical de la aceleración de la pesa (ver ecuaciones (8) y (9) de II.2.2) dan:

$$\ddot{x}_p = \{g - \ddot{x}_c (1 - \beta) + \rho \dot{\beta}^2\} \beta \quad (2)$$

$$\ddot{y}_p = \ddot{x}_c (1 - \beta) - \rho \dot{\beta}^2 + g \beta^2 \quad (3)$$

•

Las ecuaciones anteriores son aplicables a la mayoría de los experimentos realizados en donde  $m$  es aproximadamente 10 veces menor que  $M$ .

b) Segunda aproximación: ángulos pequeños y velocidad angular despreciable.

La aceleración del cilindro (de acuerdo con (1)) se reduce a:

$$\chi_c = \frac{m(1-\beta)g}{\frac{3}{2}M+m(1-2\beta)} \quad (4)$$

y las velocidades y aceleraciones de la pesa (ver ecuaciones (4), (5), (6) y (7) de II.2.2) dan:

$$\dot{\chi}_p = \dot{\chi}_c (1-\beta) \quad (5) \quad \ddot{\chi}_p = \ddot{\chi}_c (1-\beta) \quad (6)$$

$$\dot{V}_p = \dot{\chi}_c \quad (7) \quad \ddot{V}_p = \ddot{\chi}_c \quad (8)$$

En esta segunda aproximación, la velocidad y la aceleración vertical de la pesa son iguales a la velocidad y aceleración del cilindro, resultado que se usa en el programa de video.

#### II.2.4.- Obtención de las Ecuaciones de Movimiento a partir de las Leyes de Newton

Además de los términos que hemos definido anteriormente, es necesario agregar:  $f$ , la fricción sobre el cilindro y  $T$ , la tensión en el hilo, según se indica en la figura II.13.



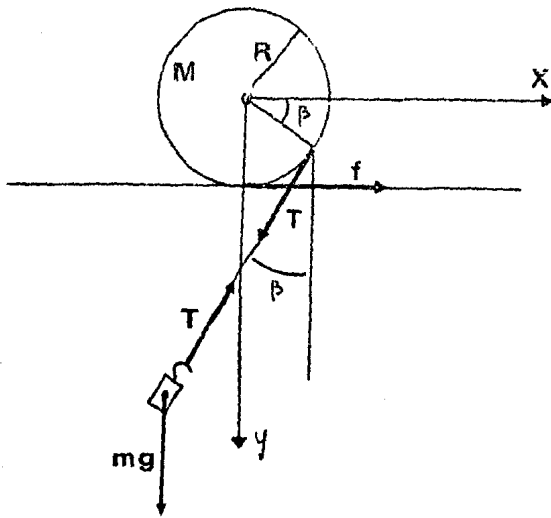


Fig. II.13. Las fuerzas sobre el sistema pesa-cilindro

En el caso del cilindro, las fuerzas que actúan en dirección horizontal, de acuerdo con la 2a ley, nos conducen a:

$$f - T \operatorname{sen} \beta = M \ddot{x}_c \quad (1)$$

Tomando en cuenta las torcas sobre el cilindro:

$$TR - fR = I \ddot{\theta} \quad (2)$$

$$\text{Según vimos, } I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (3)$$

y si suponemos que el cilindro rueda sin resbalar  $x_c = R\theta$  y de aquí:

$$\ddot{x}_c = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

sustituyendo (3) y (4) en (2) y despejando  $f$ :

$$f = T - \frac{1}{2} M \ddot{x}_c \quad (5)$$

sustituyendo en (1):

$$\frac{3}{2} M \ddot{x}_c = T(1 - \operatorname{sen} \beta) \quad (6)$$

Si ahora consideramos las fuerzas que actúan sobre la pesa en dirección vertical y horizontal llegamos a ;

$$m\ddot{x}_p = T \text{ sen } \beta \quad (7)$$

$$m\ddot{y}_p = mg - T \text{ cos } \beta \quad (8)$$

Si eliminamos  $T$  a partir de (6), (7) y (8) obtenemos :

$$\frac{3}{2} M\ddot{x}_c \text{ sen } \beta - m\ddot{x}_p (1 - \text{sen } \beta) = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{3}{2} M\ddot{x}_c + m\ddot{x}_p\right) \text{ cos } \beta + m(\ddot{y}_p - g) = 0 \quad (10)$$

En el par de ecuaciones anteriores figuran cuatro variables :  $\ddot{x}_c$ ,  $\beta$ ,  $\ddot{x}_p$ ,  $\ddot{y}_p$ . Podemos eliminar  $\ddot{x}_p$  y  $\ddot{y}_p$  expresándolas en términos de  $\ddot{x}_c$  y  $\beta$  a partir de las relaciones (6) y (7) de II.2.2.

$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_c (1 - \text{sen } \beta) + \rho \dot{\beta}^2 \text{ sen } \beta - (2\dot{x}_c \dot{\beta} + \rho \ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) \text{ cos } \beta \quad (11)$$

$$\ddot{y}_p = (\ddot{x}_c - \rho \dot{\beta}^2) \text{ cos } \beta - (2\dot{x}_c \dot{\beta} + \rho \ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) \text{ sen } \beta \quad (12)$$

Sustituyendo (11) en (9) y reagrupando términos :

$$\frac{3}{2} M\ddot{x}_c \text{ sen } \beta - m \ddot{x}_c (1 - \text{sen } \beta)^2 - m\rho \dot{\beta}^2 \text{ sen } \beta (1 - \text{sen } \beta) + m(2\dot{x}_c \dot{\beta} + \rho \ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) \text{ cos } \beta (1 - \text{sen } \beta) = 0$$

$$\uparrow$$

$$(13)$$

Sustituyendo (11) y (12) en (10) y simplificando, llegamos a :

$$\frac{3}{2} M\ddot{x}_c \text{ cos } \beta + m\ddot{x}_c \text{ cos } \beta (2 - \text{sen } \beta) - m\rho \dot{\beta}^2 \text{ cos } \beta (1 - \text{sen } \beta) - m(2\dot{x}_c \dot{\beta} + \rho \ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) (\text{cos}^2 \beta + \text{sen } \beta) - mg = 0 \quad (14)$$

Hagamos ahora lo siguiente ;

Si multiplicamos (13) por  $\cos \beta$ , luego (14) por  $\sin \beta$  y después efectuamos la diferencia, obtenemos :

$$m\ddot{x}_c \{ \cos \beta (1 - \sin \beta) + \sin \beta \cos \beta (2 - \sin \beta) - mg \sin \beta \\ - m(2\dot{x}_c \dot{\beta} + c\ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) (\cos^2 \beta (1 - \sin \beta) + \sin \beta (\cos^2 \beta + \sin \beta)) = 0$$

Simplificando, dividiendo entre  $m$  y despejando  $\ddot{x}_c$ , el resultado será :

$$\ddot{x}_c \cos \beta = 2\dot{x}_c \dot{\beta} + c\ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2 + g \sin \beta \quad (15)$$

que corresponde a la segunda ecuación diferencial obtenida a través de las ecuaciones de Lagrange. (Ver ecuación 17 de II.2.1.).

Para la ecuación restante, procedamos como se indica a continuación :

Multipliquemos (13) por  $\sin \beta$ , después multipliquemos (14) por  $\cos \beta$  y enseguida sumemos las dos expresiones. Reagrupando términos obtendremos :

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_c (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + m\ddot{x}_c (\cos^2 \beta (2 - \sin \beta) - \sin \beta (1 - \sin \beta)^2) \\ - m\dot{x}_c \dot{\beta} (1 - \sin \beta) (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - mg \cos \beta \\ - m(2\dot{x}_c \dot{\beta} + c\ddot{\beta} - R\dot{\beta}^2) (\cos \beta (\cos^2 \beta + \sin \beta) - \sin \beta \cos \beta (1 - \sin \beta)) = 0$$

Simplificando, el resultado final será :

$$\frac{3}{2} M \ddot{x}_c + 2m \ddot{x}_c (1 - \sin \beta) - m(2x_c \dot{\beta} + \rho \ddot{\beta} - R \dot{\beta}^2 + g) \cos \beta - m \rho \dot{\beta}^2 (1 - \sin \beta) = 0$$

que corresponde a la primera ecuación diferencial derivada a partir de la formulación de Lagrange. (Ecuación 16 de II.2.1.).

### II.2.5.- Análisis Cualitativo del Problema.

Podemos ahora dar una interpretación dinámica que nos ayude al propósito declarado de lograr una presentación clara y simple del asunto en el programa de video:

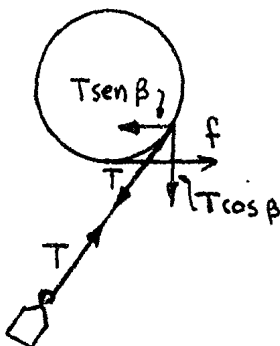


Fig. II.14. La interacción cilindro-pesa

Cuando el cilindro está en reposo y la pesa cuelga en dirección vertical sin oscilar, la tensión en el hilo es igual al peso suspendido. En cuanto se suelta el cilindro, la tensión disminuye y la pesa empieza a caer. Esta tensión jala al cilindro hacia abajo, los rieles impiden que caiga y la torca producida lo hace girar. La fricción evita que patine y hace que el cilindro empiece a rodar aceleradamente.

Debido a su inercia, la pesa empieza a quedarse atrás, formando el hilo un ángulo con la vertical y de este modo se genera una componente horizontal de la tensión que frena al cilindro y acelera a la pesa. Al disminuir la aceleración del cilindro e incrementarse la aceleración horizontal de la pesa, ésta tiende entonces a emparejarse con el cilindro aproximándose a la vertical, pero a medida que lo consigue, el jalón vertical sobre el cilindro aumenta haciendo que éste incremente su aceleración y vuelva a adelantarse, comenzando de nuevo el ciclo. El ángulo  $\beta$  por tanto, primero aumenta, luego disminuye, vuelve a aumentar y así sucesivamente.

La pesa se comporta de una manera bastante peculiar: se asemeja a un péndulo que oscila al mismo tiempo que aumenta su longitud aceleradamente, mientras es arrastrado en dirección horizontal por el cilindro también en forma acelerada. El punto de suspensión de este péndulo está oscilando a su vez sobre un arco de círculo en el cilindro.

Como ocurre en el caso del péndulo que se alarga con velocidad constante<sup>(6)</sup>, a medida que el tiempo transcurre y la longitud aumenta, las fluctuaciones de  $\beta$  son cada vez menores, de tal manera que el ángulo de oscilación tiende a un valor límite que es justamente el ángulo del acelerómetro, según se discute más adelante (II.2.8).

Por otro lado, las oscilaciones del ángulo  $\beta$  no son armóni-

cas ya que el péndulo formado por la pesa está aumentando su longitud aceleradamente y los tiempos invertidos en completar una oscilación (los cuasiperiodos), van también aumentando.

Para resumir: los ángulos oscilan con el tiempo en una forma muy particular: la amplitud decrece y los cuasiperiodos crecen conforme al tiempo transcurre, como se muestra en la figura II.15.

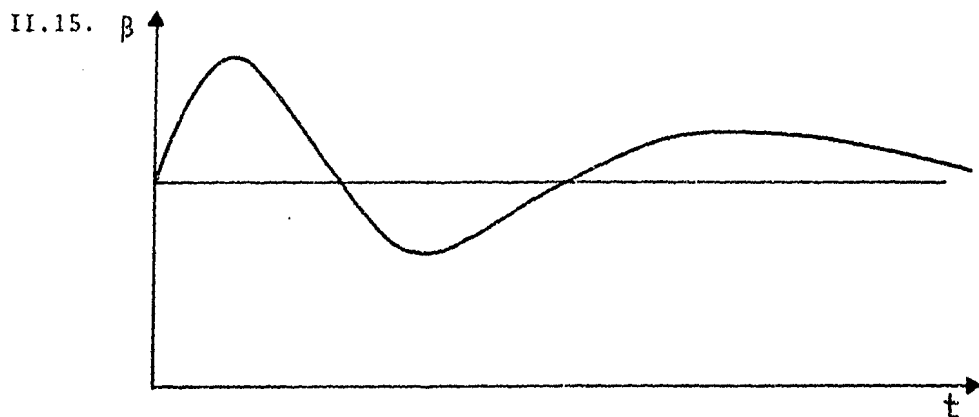


Fig. II.15. Variación de  $\beta$  con el tiempo.

#### II.2.6.- Análisis de las Ecuaciones de Movimiento

Tomemos como punto de partida la expresión correspondiente a la aceleración del cilindro, en el caso de ángulos pequeños (ver II.2.3.1.):

$$\ddot{x}_c = \frac{m(1-\beta)(g + \rho\dot{\beta}^2)}{\frac{3}{2}M + m(1-2\beta)} \quad (1)$$

¿Cuál es la contribución de la aceleración centrípeta  $\rho\dot{\beta}^2$ ? En los extremos de la oscilación  $\dot{\beta}$  vale cero, en cualquier otro punto  $\rho\dot{\beta}^2$  es siempre positiva y en nuestras condiciones experimentales (ángulos pequeños y sin oscilación inicial)  $\rho\dot{\beta}^2 \ll g$ , de tal

manera que en principio el análisis no cambia sustancialmente si usamos la relación

$$\ddot{\chi}_c = \frac{m(1-\beta)g}{\frac{3}{2}M+m(1-2\beta)} \quad (2)$$

Si no hubiera variación en el ángulo la aceleración del cilindro sería constante. Las fluctuaciones de  $\beta$  determinan que la aceleración aumente y disminuya en torno de un cierto valor, como lo confirma la solución numérica de la sección III.4. Puede verse de la ecuación (2) que  $\ddot{\chi}_c$  es mínima cuando  $\beta$  tiene el máximo atraso ( $\beta_{\max}$ ) y tiene un valor máximo cuando el ángulo es menor ( $\beta_{\min}$ ), según se ilustra en la fig. II.16.

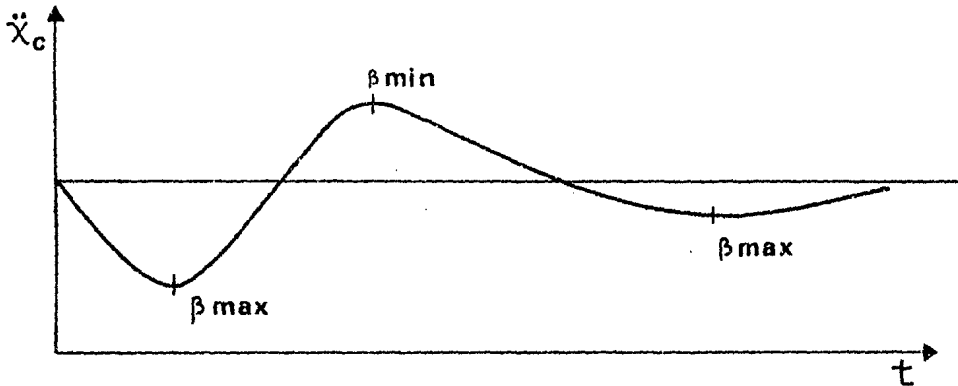


Fig. II.16. La aceleración oscilante del cilindro.

La velocidad del cilindro aumenta continuamente con el tiempo, pero no de manera uniforme como sería si la pesa no oscilara. En nuestro caso la velocidad también está fluctuando y la forma en que varía puede obtenerse inmediatamente a partir de la gráfica de la aceleración en función del tiempo, tomando en cuenta que la aceleración alcanza su menor valor en  $\beta_{\max}$  y llega a un máximo en  $\beta_{\min}$ . Suponemos que la velocidad inicial del cilindro es cero. La curva de la velocidad fluctúa en torno a una recta que representa el MUA, como lo muestra la figura II.17.

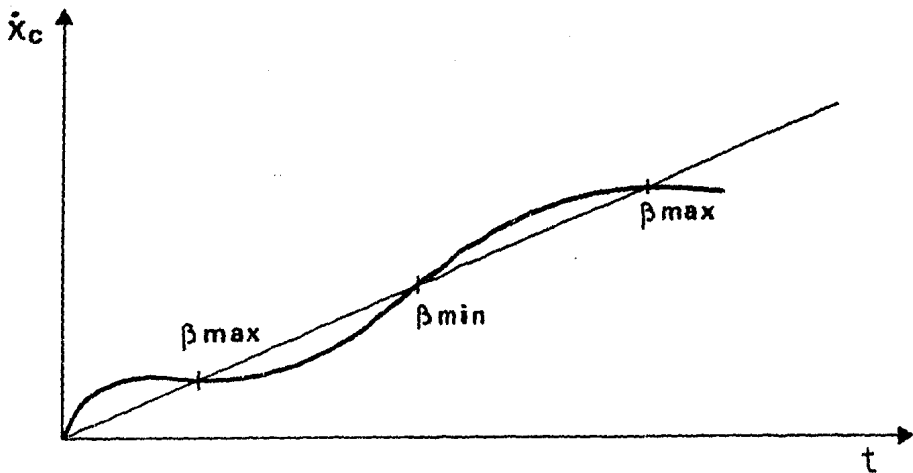


Fig. II.17. La velocidad del cilindro en función del tiempo.

¿Cómo son las velocidades horizontal y vertical de la pesa, comparadas con la del cilindro?. Según las ecuaciones (4) y (5) de II.2.2, en la aproximación de ángulos pequeños:

$$\dot{\chi}_p = \dot{\chi}_c (1 - \beta) - \rho \dot{\beta} \quad (3)$$

$$\dot{y}_p = \dot{\chi}_c - \rho \beta \dot{\beta} \quad (4)$$

Si la pesa está inicialmente en reposo con el hilo en dirección vertical, para cualquier tiempo distinto de cero el ángulo será siempre positivo ( $\beta > 0$ ), de acuerdo con nuestra convención de signos y la única manera de que  $\dot{y}_p = \dot{\chi}_c$ , como lo indica la ecuación (4), es que  $\dot{\beta}$  sea igual a cero y esto ocurre en los extremos de la oscilación. Luego entonces para  $\beta_{max}$  y  $\beta_{min}$  la velocidad vertical de la pesa es igual a la velocidad del cilindro.

Quando la pesa se mueve de  $\beta_{max}$  a  $\beta_{min}$ , aproximándose a la vertical, se cumple que  $\dot{\beta} < 0$ , de tal manera que  $\rho \beta \dot{\beta} < 0$  y, de acuerdo con (4):



$$\dot{\gamma}_p > \dot{\chi}_c$$

Entre  $\beta_{\min}$  y  $\beta_{\max}$ , mientras la pesa se aleja de la vertical,  $\dot{\beta}$  es positiva y

$$\dot{\gamma}_p < \dot{\chi}_c$$

En el caso de la componente horizontal de la velocidad de la pesa, para los ángulos extremos ( $\beta_{\max}$  y  $\beta_{\min}$ ) la velocidad angular es cero, el producto  $\dot{\chi}_c \beta$  es positivo y de acuerdo con la ecuación (3), se tiene que:

$$\dot{\chi}_p < \dot{\chi}_o$$

Mientras la pesa viaja desde  $\beta_{\min}$  a  $\beta_{\max}$ ,  $\dot{\beta}$  es positiva, los productos  $\rho \dot{\beta}$  y  $\dot{\chi}_c \beta$  también son positivos y recorriendo una vez más a (3) se cumple que:

$$\dot{\chi}_p < \dot{\chi}_o$$

Cuando la pesa oscila de  $\beta_{\max}$  a  $\beta_{\min}$ , si se cumple que:

$$\dot{\chi}_c \beta < \rho \dot{\beta} \quad ,$$

entonces:

$$\dot{\chi}_p > \dot{\chi}_o$$

Examinemos ahora las componentes vertical y horizontal correspondientes a la aceleración de la pesa. Como ya establecimos, las ecuaciones aproximadas son (ecuaciones 8 y 9 de II.2.2.):

$$\ddot{\chi}_p = [g - \ddot{\chi}_c (1 - \beta) + \rho \dot{\beta}^2] \beta$$

$$\ddot{y}_p = \ddot{x}_c (1 - \beta) - \rho \dot{\beta}^2 + g \beta^2$$

Del examen de las expresiones anteriores se desprende que:

$$\begin{array}{l} \text{si } \beta = \beta_{max} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_c \text{ es m\u00e1xima} \\ \ddot{x}_p \text{ es m\u00ednima} \text{ y } \ddot{x}_c > \ddot{y}_p \\ \ddot{y}_p \text{ es m\u00e1xima} \end{array} \right. \\ \\ \text{si } \beta = \beta_{min} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_c \text{ es m\u00ednima} \\ \ddot{x}_p \text{ es m\u00e1xima} \text{ y } \ddot{y}_p > \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_p \text{ es m\u00ednima} \end{array} \right. \end{array}$$

### II.2.7 Gr\u00e1ficas del Movimiento (para \u00e1ngulos peque\u00f1os)

Con la informaci\u00f3n disponible, podemos graficar las diferentes velocidades en funci\u00f3n del tiempo y a partir de estas gr\u00e1ficas y usando el an\u00e1lisis anterior es posible construir las gr\u00e1ficas de la aceleraci\u00f3n en funci\u00f3n del tiempo. La fig. II.18 resume la situaci\u00f3n.

Las gr\u00e1ficas de la distancia en funci\u00f3n del tiempo son tambi\u00e9n inmediatas si suponemos adicionalmente que tanto la pesa como el cilindro estaban en reposo inicialmente. Para comparar mejor las diferentes curvas entre s\u00ed, se trazaron con un origen com\u00fan, como si la pesa y el cilindro hubieran partido del mismo punto. Los resultados se presentan en la fig. II.19

### II.2.8.- Gr\u00e1ficas del Movimiento: Caso general

El caso general y, por supuesto, el mas interesante tiene -

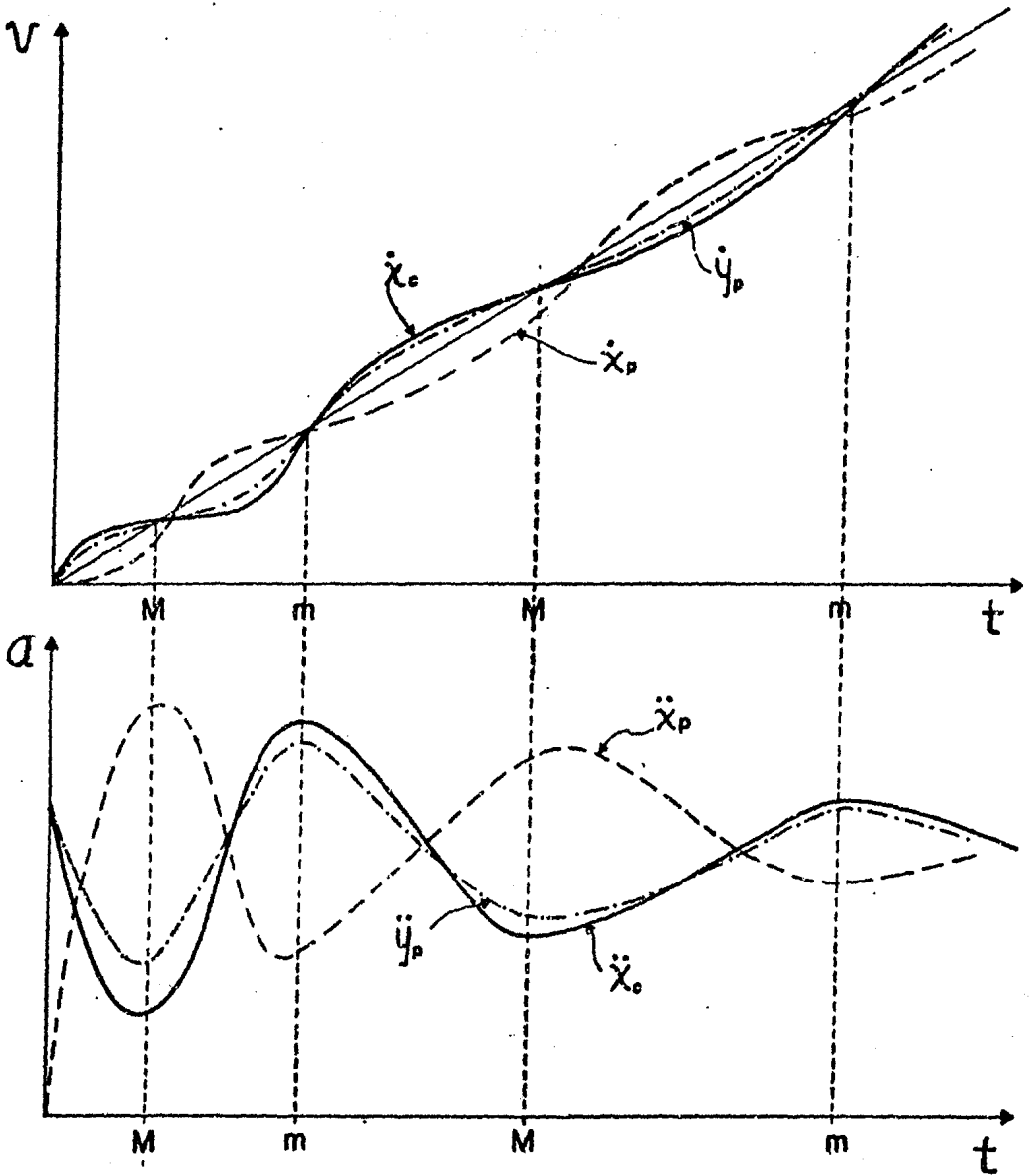


Fig. II.18. Gráficas de las velocidades y aceleraciones del cilindro y la pesa para ángulos pequeños.

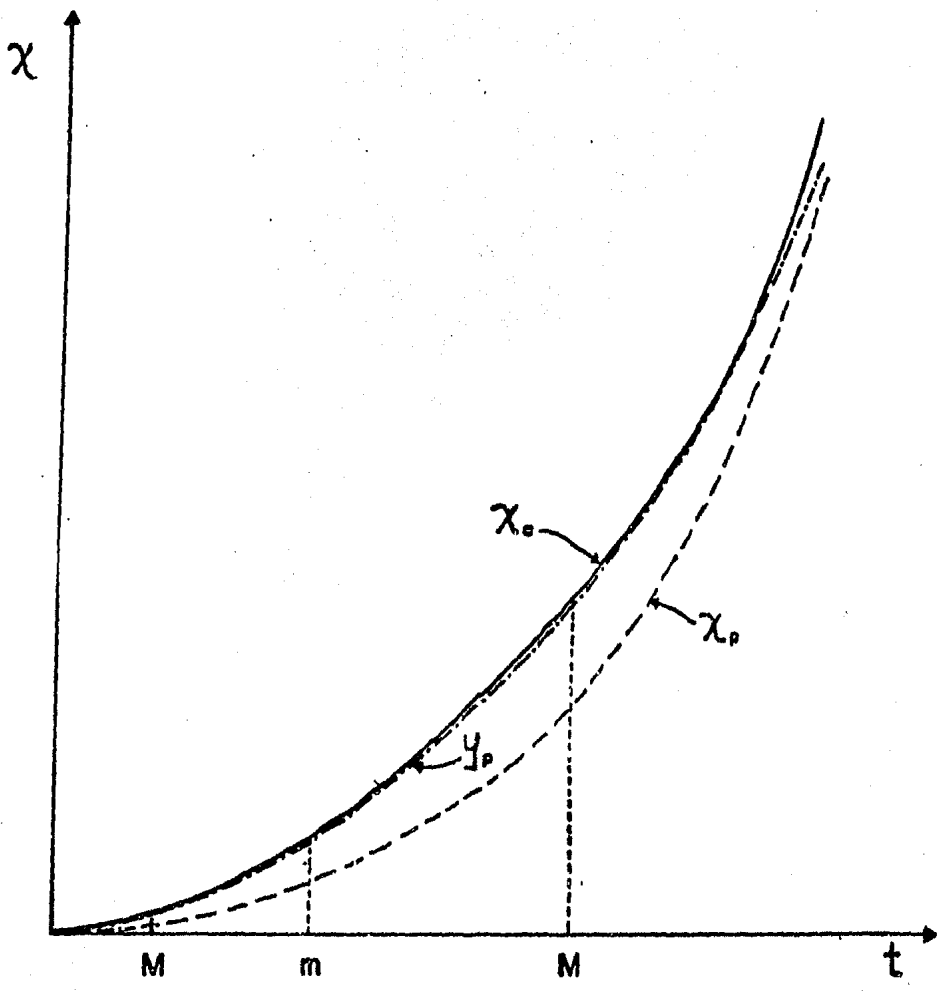


Fig. II.19. Gráfica de los desplazamientos del cilindro y la pesa para ángulos pequeños.

lugar cuando a la pesa se le comunica una oscilación inicial, de tal manera que los ángulos fluctúan en un mayor intervalo llegando a tomar valores negativos, es decir que en un momento dado la pesa adelanta al cilindro. Hay algunas modificaciones que vamos a examinar y parece, en principio, que podemos trabajar con las ecuaciones completas sin tener que restringirnos a los ángulos pequeños.

Un primer cambio cualitativo se infiere de la ecuación general para la velocidad vertical de la pesa, dada por la ecuación (5) de II.2.2.

$$\dot{y}_p = \dot{\chi}_c \cos \beta - \rho \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta$$

Según vimos antes, para que  $\dot{y}_p = \dot{\chi}_c$  bastaba que  $\beta=0$ . Ahora existe una nueva posibilidad: al pasar por la vertical ( $\beta=0$ ) también  $\dot{y}_p = \dot{\chi}_c$ .

La situación se ilustra en la fig. II.20 en donde se comparan la velocidad del cilindro y la velocidad vertical de la pesa mientras ésta viaja de  $\beta_{max}$  a  $\beta_{min}$  (cuando la pesa se adelanta al cilindro). Como referencia se agrega la línea punteada que corresponde al caso anterior (cuando la pesa no alcanzaba la vertical y en consecuencia  $\beta$  siempre era positivo).

En términos generales  $\dot{\chi}_c$  se mantiene variando en la misma forma mientras que  $\dot{\chi}_p$  y  $\dot{y}_p$  aumentan notablemente su amplitud debido a que el rango de  $\beta$  es mayor y  $\rho \dot{\beta}$  es ahora comparable o mayor que  $\dot{\chi}_c$ .

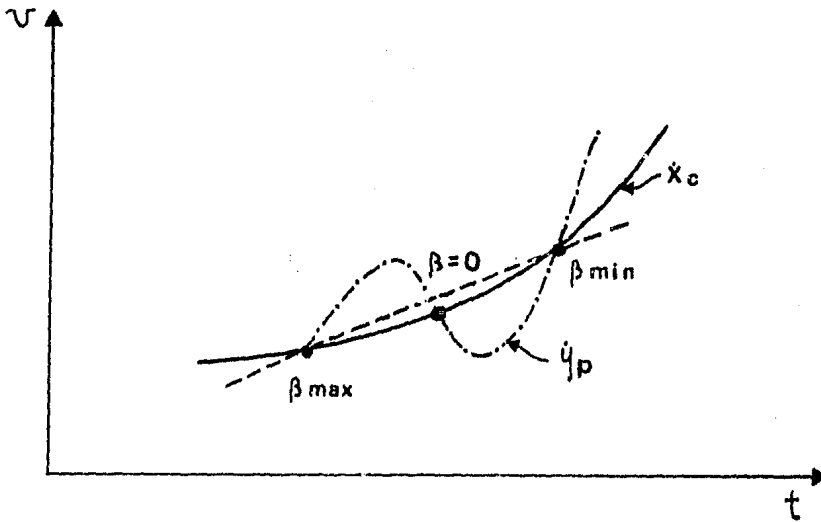


Fig. II. 20. La velocidad vertical de la pesa en  $\beta=0$

En la figura II. 21 se resume toda la información disponible sobre las velocidades. A lo largo del eje horizontal se han colocado los símbolos  $M$ ,  $m$  y  $0$  que representan los tiempos para los cuales el ángulo  $\beta$  toma los valores máximo, mínimo y cero respectivamente.

Se nota en la gráfica que al transcurrir el tiempo llega un momento en que la pesa ya no alcanza la vertical (el cero desaparece) y de ahí en adelante las curvas se reducen al caso particular de los ángulos pequeños.

¿Qué ocurre con las aceleraciones? Las expresiones completas son las siguientes (ver ecuaciones 6 y 7 de II.2.2.):

$$\ddot{x}_p = \{g \cos \beta - \ddot{x}_c (1 - \sin \beta) + \rho \dot{\beta}^2\} \sin \beta$$

$$\ddot{y}_p = \{\ddot{x}_c (1 - \sin \beta) - \rho \dot{\beta}^2\} \cos \beta + g \sin^2 \beta$$

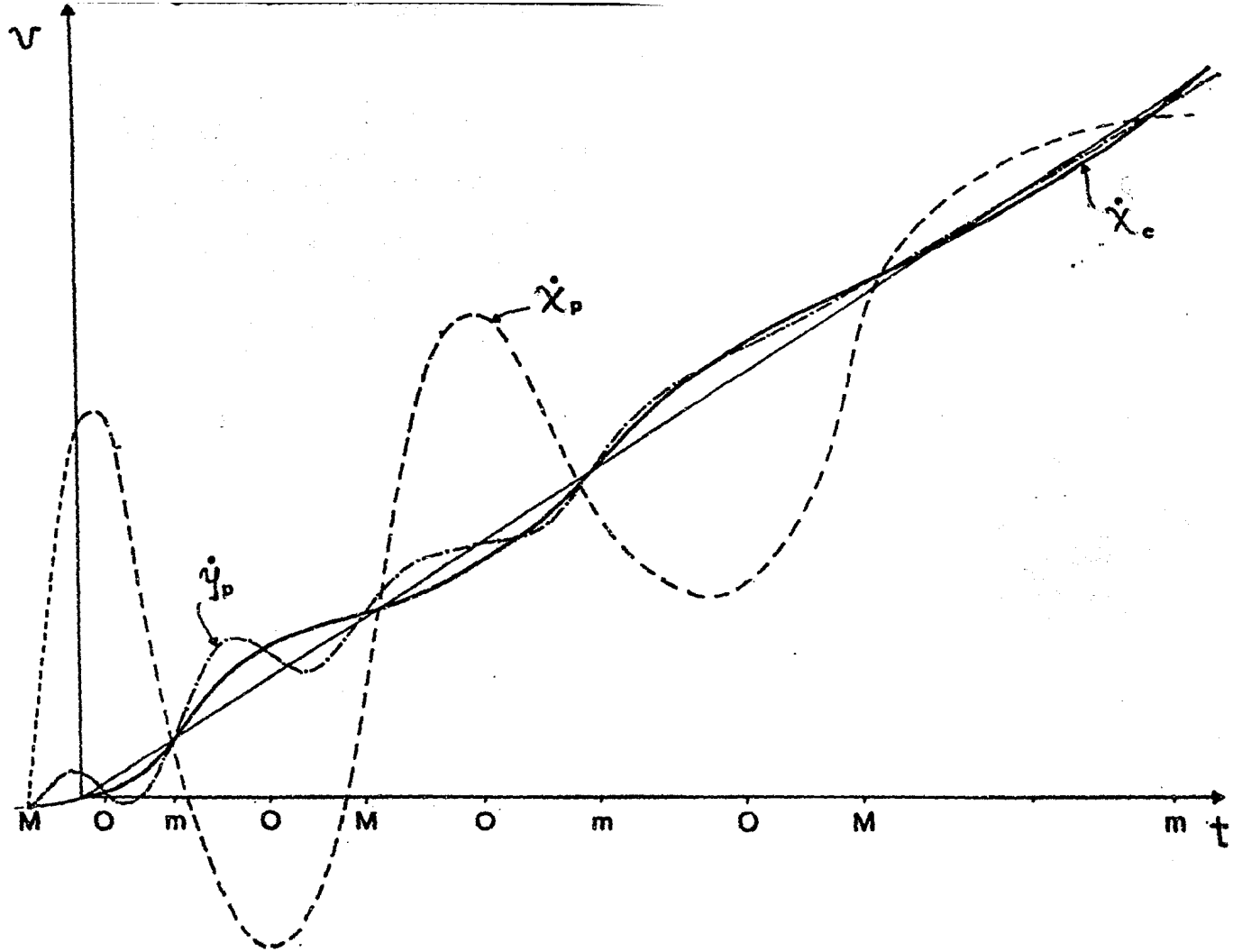


Fig. II.21. Las velocidades del cilindro y la pesa en el caso general.

El análisis que hicimos anteriormente para los ángulos pequeños sigue siendo válido: máximos, mínimos, puntos de intersección, etc. En la nueva situación, sin embargo, la aceleración centrípeta  $\rho\dot{\beta}^2$  lo mismo que  $g \text{ sen}^2\beta$  son determinantes en los valores de  $\ddot{x}_p$  y  $\ddot{y}_p$ .

En la figura II.22 se muestran esquemáticamente las distintas aceleraciones que contribuyen a  $\ddot{x}_p$  y  $\ddot{y}_p$ . Como era de esperarse,  $\rho\dot{\beta}^2$  se anula en los extremos de la oscilación, mientras que  $g \text{ sen}^2\beta$  alcanza sus máximos precisamente en  $\beta_{max}$  y  $\beta_{min}$  y se hace cero para  $\beta=0$ . Conforme el tiempo pasa estas aceleraciones disminuyen. Como referencia se trazan la aceleración del cilindro y  $g$ , la aceleración de la gravedad.

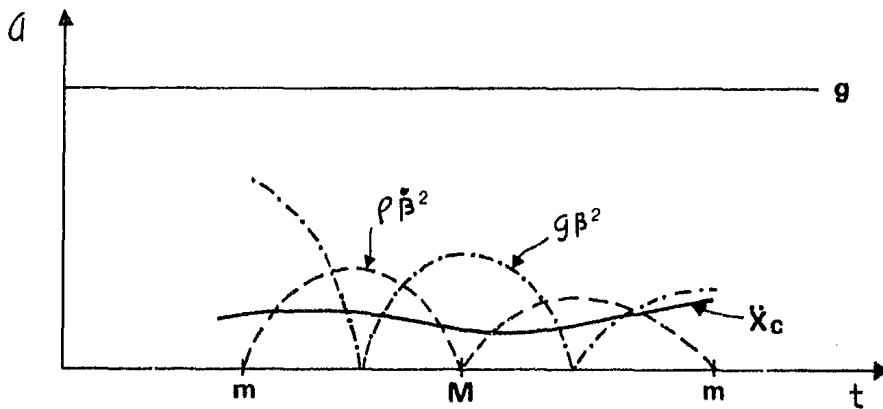


Fig. II.22. Componentes de la aceleración de la pesa.

El resultado final se condensa en la fig. II.23. Los puntos 0, M y m se especifican como referencias para comparar con la gráfica de las velocidades.



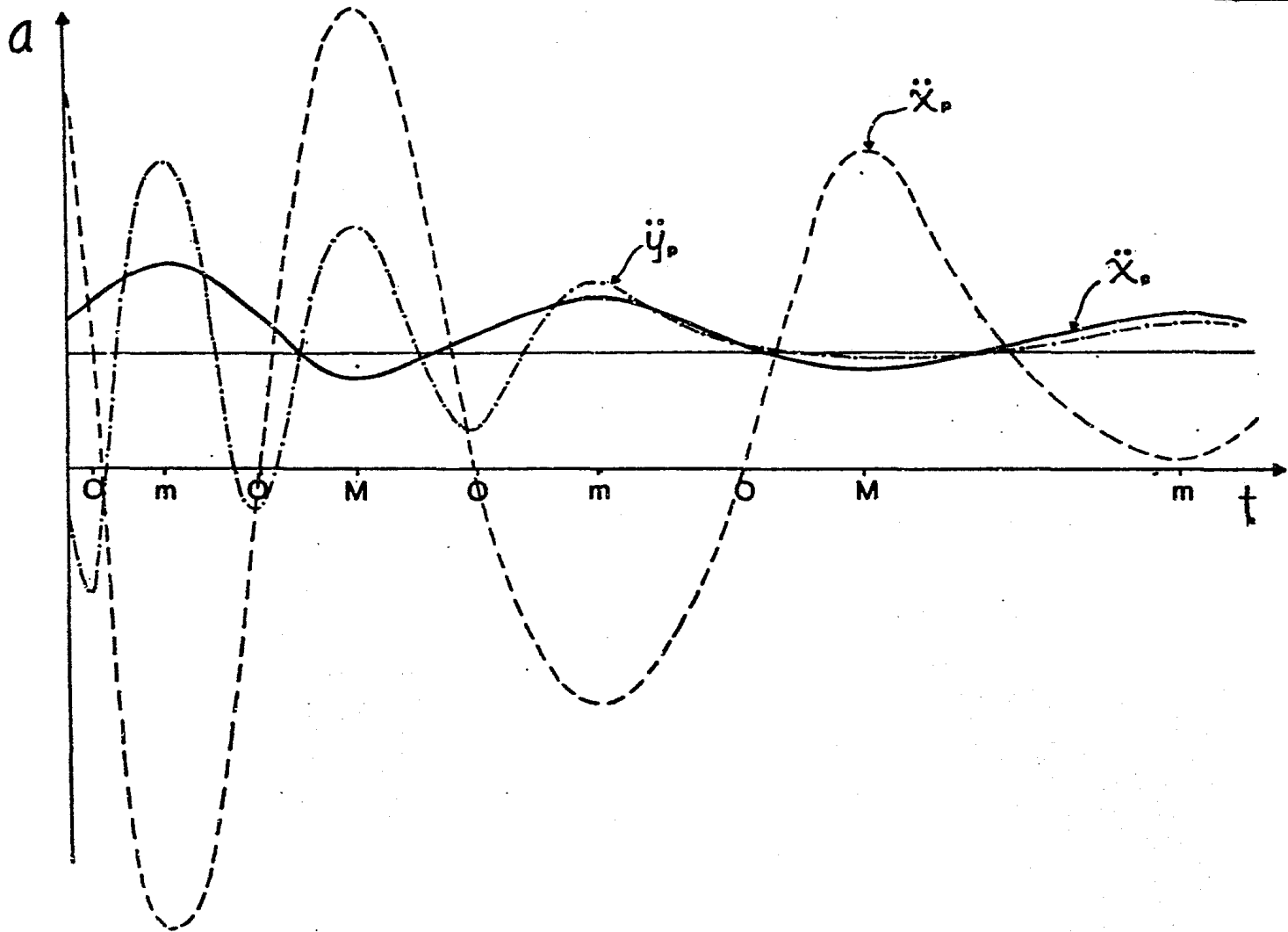


Fig. II.23. Las aceleraciones del cilindro y la pesa en el caso general.

Para completar la serie, en la fig. II.24 se presentan las gráficas de las diferentes distancias en función del tiempo. Como se hizo anteriormente se trazan a partir de un origen común para facilitar la comparación de las posiciones relativas.

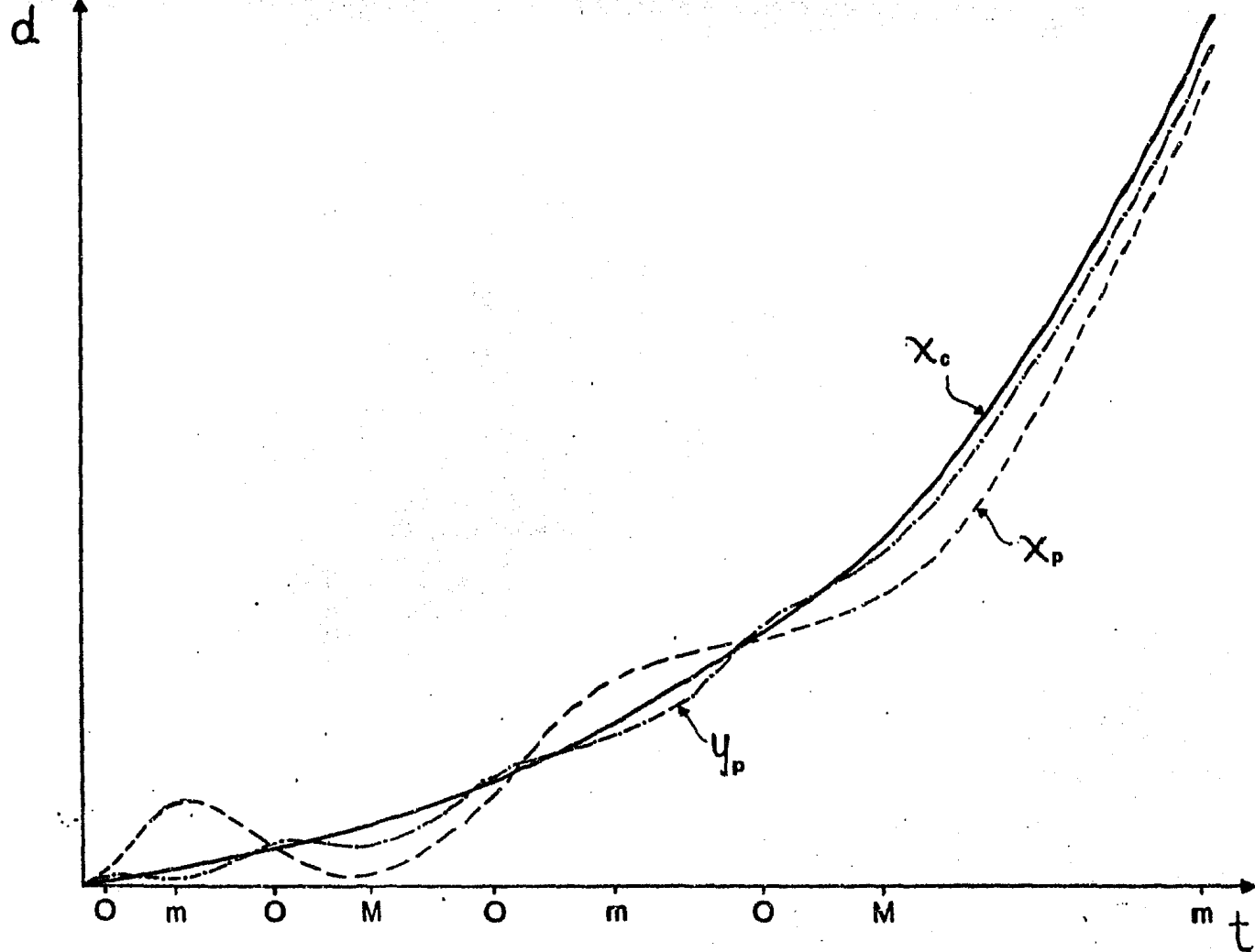
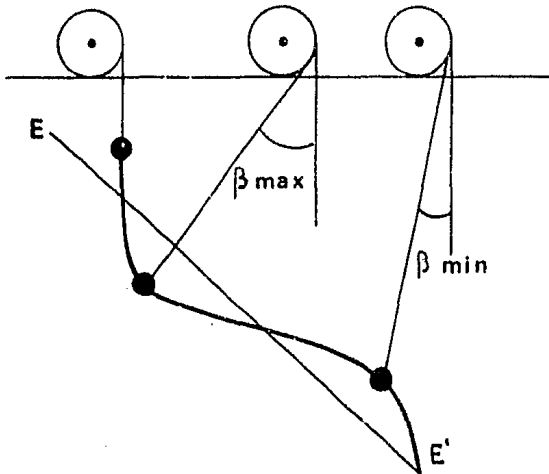


Fig. II.24. Los desplazamientos del cilindro y la pesa como función del tiempo en el caso general

## II.2.9. Línea de oscilación de la pesa

Si examinamos la trayectoria de la pesa notaremos que oscila por encima y por debajo de una línea recta que forma un ángulo de aproximadamente  $45^\circ$  con la horizontal (para ángulos pequeños). Esta recta que distribuye los puntos máximos y mínimos de las fluctuaciones la denominaremos línea de oscilación de la pesa. (ver fig. II.25).



*Fig. II.25. La oscilación de la pesa*

La pesa intersecta esta línea en puntos que corresponden a un valor bien definido del ángulo  $\beta$ . Sabemos por otro lado que las oscilaciones de la pesa se amortiguan con el tiempo y en principio parece plausible que después de algún tiempo, la pesa tendería a moverse a lo largo de la línea de oscilación, formando el hilo un ángulo constante respecto de la vertical. Veamos que nos dicen las ecuaciones:

Las expresiones generales para el movimiento del sistema fue-

ron (ver ecuaciones 16 y 17 de II.2.1)

$$\ddot{\chi}_c = \frac{m(1-\text{sen}\beta)(g \cos \beta + \rho \dot{\beta}^2)}{\frac{3}{2} M + m\{2(1-\text{sen} \beta) - \cos^2 \beta\}} \quad (1)$$

$$\ddot{\chi}_c \cos \beta = (\rho_0 + \chi_c - R\beta) \ddot{\beta} + 2\dot{\chi}_c \dot{\beta} - R\dot{\beta}^2 + g \text{sen} \beta \quad (2)$$

Supongamos al sistema inicialmente en reposo con el hilo formando un ángulo  $\beta_0$  con la vertical y vamos a suponer adicionalmente que con el sistema en movimiento el ángulo permanece constante. De este modo  $\dot{\beta} = 0$  y  $\ddot{\beta} = 0$ .

Si sustituimos estas condiciones en (2) tenemos que:

$$\chi \cos \beta_0 - g \text{sen} \beta_0 = 0$$

y de aquí

$$\tan \beta_0 = \frac{\chi_c}{g}$$

que es justamente la ecuación del acelerómetro.

Si  $\beta = \text{constante}$  puede verse de (1) que  $\ddot{\chi}_c$  tampoco cambia y por supuesto  $\ddot{\chi}_p$  y  $\ddot{y}_p$  también son constantes como puede verse a partir de las ecuaciones (8) y (9) de II.2.2. Ahora: ¿Cuál es el valor de  $\beta_0$  en términos de  $M$  y  $m$ , las masas del cilindro y de la pesa?

Sustituyendo  $\chi_c = g \tan \beta_0$  en (1) tenemos que:

$$g \tan \beta_0 = \frac{m(1-\text{sen} \beta_0)(g \cos \beta_0)}{\frac{3}{2} M + m\{2(1-\text{sen} \beta_0) - \cos^2 \beta_0\}}$$

haciendo las operaciones indicadas y simplificando se llega a:

$$\operatorname{sen}^2 \beta_0 - \left(\frac{3}{2} \frac{H}{m} + 2\right) \operatorname{sen} \beta_0 + 1 = 0 \quad (3)$$

Con ayuda de esta expresión podemos, para un cilindro y una pesa dados, calcular el ángulo de atraso inicial para que el sistema se mueva sin oscilación, con movimiento uniformemente acelerado.

Para verificar los supuestos anteriores, en la parte III.5, a partir del programa elaborado para resolver numéricamente el problema se dan los resultados correspondientes a un caso particular y la hipótesis que manejamos se confirma: para un sistema cilindro-pesa cualquiera, existe un ángulo de atraso  $\beta_0$  tal que el sistema se mueve sin oscilar, con aceleración constante.

#### II.2.10. Un resultado inesperado: $a_c > g$

¿Qué sucede si al cilindro le colgamos un piano? Por supuesto, en condiciones normales el cilindro patinaría y el piano se haría pedazos después de descender en caída libre (o casi). Supongamos, por tanto, que entre el cilindro y los rieles existe un sistema de engranes que impide el deslizamiento. En estas condiciones: ¿Qué le ocurre a la aceleración del cilindro?

Sabemos que al incrementarse la masa del objeto que cuelga, la aceleración aumenta y también el ángulo de atraso. Todo parece indicar que con el piano el ángulo  $\beta$  ya no sería despreciable y que la relación aproximada:

$$\ddot{\chi}_c = \frac{m(1-\beta)(g + \rho\dot{\beta}^2)}{\frac{3}{2}M+m(1-2\beta)} \quad (1)$$

ya no sería muy confiable. (De hecho, para  $\beta > 28.6^\circ$ ,  $1-2\beta$  se hace negativo y  $\ddot{\chi}_c$  crece y tiende a infinito). La usaremos, no obstante, con las debidas precauciones.

A mayor abundamiento, vamos a simplificar mas aún, suponiendo que la contribución de  $\rho\dot{\beta}^2$  es muy pequeña (esto no es cierto, pero  $\rho\dot{\beta}^2$  es cero o siempre positiva y en todo caso contribuye a aumentar la aceleración del cilindro). En tal suposición tenemos:

$$\ddot{\chi}_c = \frac{m(1-\beta)g}{\frac{3}{2}M+m(1-2\beta)} \quad (2)$$

¿Es posible que  $\ddot{\chi}_c > g$ ?

De acuerdo con la ecuación aproximada (2) existe esa posibilidad si:

$$\frac{m(1-\beta)}{\frac{3}{2}M+m(1-2\beta)} > 1$$

la desigualdad conduce a:

$$\beta > \frac{3}{2} \frac{m}{M} \quad (3)$$

Parece en principio, que el cilindro puede superar la aceleración de la gravedad con tal que  $m \gg M$  y se cumpla la desigualdad (3). Enfatizemos, no obstante, que el análisis se hizo a partir de una relación válida para ángulos pequeños. En la sección III.6.,

a partir de la solución obtenida por métodos numéricos, se analiza un caso particular con las ecuaciones completas, y se confirma la predicción.



### III. SOLUCIONES NUMERICAS

#### III.1 Una Solución General

Para resumir la situación: Tenemos un par de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones desconocemos. Aún en condiciones restringidas (aproximando para ángulos pequeños y simplificando para situaciones particulares) las ecuaciones resultantes no corresponden a formas conocidas que permitan proponer alguna solución analítica.

Hemos podido extraer una buena cantidad de información del análisis de los distintos elementos que componen el problema. Sería deseable no obstante, resolver el problema para poder contrastar experimentalmente los resultados. En este sentido tenemos una alternativa: resolver las ecuaciones diferenciales empleando métodos numéricos con la ayuda de una computadora. Es un procedimiento muy efectivo y tiene la gran ventaja que podemos manejar las ecuaciones generales, completas, sin tener que limitarnos considerando casos particulares y, aunque los resultados son aproximados, siempre podemos escoger la aproximación que satisfaga nuestros requerimientos<sup>(7)</sup>.

#### III.2.- Método Empleado para el Cálculo Numérico

Solucionar el problema significa conocer, para cualquier tiempo, las posiciones, velocidades y aceleraciones del cilindro y la pesa, a partir de condiciones iniciales conocidas y mediante las ecuaciones disponibles.

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan nuestro problema son las siguientes (ecuaciones 17 y 18 de II.2.1.):

$$\ddot{\chi}_c = \frac{m(1-\text{sen } \beta) (g \cos \beta + \rho \dot{\beta}^2)}{\frac{3}{2} M+m \{2(1-\text{sen } \beta) - \cos^2 \beta\}} \quad (1)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\ddot{\chi}_c \cos \beta - g \text{sen } \beta - 2\dot{\chi}_c \dot{\beta} + R\dot{\beta}^2}{\rho_0 + \chi_c - R\beta} \quad (2)$$

Como se ve, tanto  $\ddot{\chi}_c$  como  $\ddot{\beta}$  son funciones de  $\chi_c$ ,  $\dot{\chi}_c$ ,  $\beta$  y  $\dot{\beta}$ , que a su vez son funciones desconocidas del tiempo. No obstante, si conocemos las condiciones iniciales  $\chi_c(t=0)$ ,  $\dot{\chi}_c(0)$ ,  $\beta(0)$  y  $\dot{\beta}(0)$ , nuestro problema empieza a tener solución: para comenzar, con los datos iniciales sustituidos en (1) y (2) podemos determinar  $\ddot{\chi}_c(0)$  y  $\ddot{\beta}(0)$ .

El siguiente paso del procedimiento aproximado consiste en calcular las velocidades a la mitad del intervalo inicial. Sean  $v_c$  la velocidad del cilindro y  $v_\beta$  la velocidad angular a la mitad de  $\epsilon$ , el intervalo de tiempo considerado.<sup>(8)</sup>

$$v_c \left( \frac{\epsilon}{2} \right) = \dot{\chi}_c(0) + \frac{\epsilon}{2} \ddot{\chi}_c(0) \quad (3)$$

$$v_\beta \left( \frac{\epsilon}{2} \right) = \dot{\beta}(0) + \frac{\epsilon}{2} \ddot{\beta}(0) \quad (4)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, podemos calcular la posición del cilindro y el ángulo para el tiempo  $\epsilon$ .

$$\chi_c(\epsilon) = \chi_c(0) + \epsilon v_c\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad (5)$$

$$\beta(\epsilon) = \beta(0) + \epsilon v_\beta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad (6)$$

Además de las velocidades a medio intervalo, necesitamos la velocidad del cilindro y la velocidad angular al final del intervalo  $\epsilon$ . Para evitar confusiones, designaremos mediante  $\dot{\chi}_c$  y  $\dot{\beta}$  estas velocidades al final de  $\epsilon$ .

$$\dot{\chi}_c(\epsilon) = \dot{\chi}_c(0) + \epsilon \ddot{\chi}_c(0) \quad (7)$$

$$\dot{\beta}(\epsilon) = \dot{\beta}(0) + \epsilon \ddot{\beta}(0) \quad (8)$$

Ahora, mediante (5), (6), (7) y (8), calculamos las aceleraciones para  $t=\epsilon$ .

$$\ddot{\chi}_c(\epsilon) \text{ y } \ddot{\beta}(\epsilon)$$

Reiniciamos el proceso encontrando las velocidades en el centro del siguiente intervalo:

$$v_c\left(\epsilon + \frac{\epsilon}{2}\right) \text{ y } v_\beta\left(\epsilon + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

y así sucesivamente...

### III. 3.- EL PROGRAMA

A continuación se detalla en lenguaje Basic el programa elaborado para resolver, mediante el método delineado antes, las ecuaciones diferenciales del cilindro rodante:

```
100 REM <CILINDRO>
110 REM EL CILINDRO RODANTE: SOLUCION NUMERICA
120 REM DISCO SIEBEN
130 REM C.E.F.
140 REM JUAN JOSE ESPINOSA R.
150 P $ = "PROGRAMA: CILINDRO": H $ = "20 SEPT. 1983"
160 REM TABULAR VALORES CALCULADOS
170 V $ = "
180 U $ + " -----"
190 TEXT: HOME: PRINT P $ : PRINT H $: PRINT V $: PRINT V $
200 V1$ = "      " : A $ ( 1 ) = "T": A $ ( 2 ) = "BETA": A $ ( 3 ) =
      "X (CIL) : A $ ( 4 ) = "V (CIL)": A $ ( 5 ) = "A (CIL): A$ ( 6 ) =
      "X(P)": A$ ( 7 ) = "Y (P)"
210 FOR J=1 TO 7: SS * = SS * + A$ ( J ) + VJ$: NEXT
220 PRINT SS $: PRINT U $
230 DD= 1000
240 REM
250 REM NOTACION USADA: H= INTERVALO DE TIEMPO: MP=MASA CILIN-
      DRO: RO= LONGITUD INICIAL: G= ACELERACION GRAVEDAD
260 REM T=TIEMPO: X=XC : X1=XC PUNTO: X2=XC DOS PUNTOS : Y=
      BETA: Y1= BETA PUNTO: Y2=BETA DOS PUNTOS
270 REM DATOS EN UNIDADES MKS
280 REM
290 M=      : MP=      : RO=      : R=      : G=9.8: RR=180/3.1415
      92
300 H=.01
310 REM CONDICIONES INICIALES
320 X=      : XJ=      : Y =      : Y1=
```

```

330 GOSUB 630 : REM CALCULA A CIL PARA T=0
340 GOSUB 660 : REM BETA DOS PUNTOS PARA T=0
350 REM CALCULO INICIAL DE LAS VELOCIDADES PARA T=H/2
360 VX= X1+ (H/2) * X2: VY=V1+ (H/2) * Y2
370 GOSUB 500: REM IMPRIME VALORES
380 REM CALCULO DE POSICIONES Y VELOCIDADES PARA T=H
390 X=X+H*VX : Y=Y+H*VY
400 X1=X1+H*X2 : Y1=Y1+H*Y2
410 GOSUB 630 : REM CALCULA A CIL PARA T=H
420 GOSUB 660 REM BETA DOS PUNTOS PARA T=H
430 T=T+H
440 REM CALCULO DE LAS VELOCIDADES PARA T=T+H/2
450 VX= VX+H*X2 : VY=VY+H*Y2
460 IF T>2 THEN END
470 GOTO 370
480 REM IMPRIME VALORES DE T, X(CIL), Y BETA REDONDEADOS A MILESI
MAS
490 GOTO 520
500 REM
510 B=RR*Y : BE=INT (DD*B+.5) /DD
520 REM CALCULO DE XP Y YP
530 CI= X+R*COS(Y) - (RO+X-R*Y) * SIN (Y)
540 C2= R*SIN (Y) + (RO*X-R*Y) * COS (Y)
550 C1= INT (1000 * C1+ .5) /1000: C2= INT (1000*C2+.5)/1000
560 TT= INT (100*T+.5) /100 : AA= INT (DD*X2+.5) /DD: VV=INT
(DD*X1+.5) /DD
570 REM IMPRIME VALORES DE XP, YP, V (CIL) Y A ( CIL) REDONDEADOS
580 ZZ (1)= TT: ZZ (2)= BE : ZZ (3)= INT (DD*X+.5) /DD: ZZ (4)=VV:
ZZ (5) = AA: ZZ (6) = C1: ZZ (7)= C2
590 FOR LL=1 TO 7 : PRINT ZZ (LL), SPC (6), : NEXT LL
600 PRINT: RETURN
610 REM

```

```

62Ø REM ECUACIONES DIFERENCIALES DEL CILINDRO RODANTE
63Ø X2= (MP* (1- SIN (Y)* (G* COS (Y) + (RO+X-R*Y)* Y1* Y1))/
      (3*M/2 + MP* (2* (1-SIN (Y)) - COS (Y) * COS (Y)))
64Ø RETURN
65Ø REM
66Ø Y2= (X2*COS (Y) - G* SIN (Y) - 2* X1* Y1 + R* Y1*Y1)/ (RO+X-
      R*Y)
67Ø RETURN

```

### III.4.- Solución numérica con las condiciones iniciales de "El Arpa"

Los valores que a continuación se detallan fueron calculados a partir de las condiciones iniciales especificadas en la sección IV.5 que se refieren a la fotografía IV.11, conocida como "El Arpa". El programa da los valores de la posición ( $X_c$ ), la velocidad ( $V_c$ ) y la aceleración ( $A_c$ ) del cilindro, la posición horizontal ( $X_p$ ) y vertical ( $Y_p$ ) de la pesa además del ángulo  $\beta$ , cada centésima de segundo. Se enlistan los resultados correspondientes a los primeros 1.2 segundos que se usaron para comparar con los valores experimentales.

Datos:

$M = 1.034$  kg.

$M = .05$  kg.

$R = .03$  m.

Condiciones iniciales:

$\rho_0 = .154$  m.

$X_c(0) = 0$

$\dot{X}_c(0) = .084$  m/seg.

$\dot{\beta}(0) = - 2.7$  rad/seg.

Las unidades de la tabla corresponden al sistema M.K.S.

$t$	$B$	$x_c$	$v_c$	$a_c$	$x_p$	$y_p$
0	6.20	0.	.084	.304	.014	.153
.01	4.64	.001	.084	.304	.018	.154
.02	3.100	.002	.087	.314	.023	.156
.03	1.577	.003	.090	.323	.028	.157
.04	.083	.004	.093	.332	.033	.158
.05	-1.374	.005	.097	.339	.038	.159
.06	-2.784	.006	.100	.346	.043	.159
.07	-4.140	.007	.104	.351	.048	.160
.08	-5.435	.008	.107	.356	.053	.161
.09	-6.662	.009	.111	.360	.058	.162
.10	-7.816	.010	.114	.363	.063	.163
.11	-8.882	.011	.118	.363	.067	.163
.12	-9.886	.012	.122	.365	.072	.164
.13	-10.794	.014	.125	.367	.076	.165
.14	-11.613	.015	.129	.368	.080	.166
.15	-12.342	.016	.133	.368	.084	.166
.16	-12.978	.018	.136	.269	.087	.167
.17	-13.521	.019	.140	.368	.091	.168
.18	-13.970	.021	.144	.368	.094	.169
.19	-14.326	.022	.147	.367	.097	.171
.20	-14.598	.024	.151	.367	.099	.172
.21	-14.760	.025	.155	.366	.102	.173
.22	-14.840	.027	.158	.366	.104	.175
.23	-14.832	.029	.162	.365	.106	.176
.24	-14.738	.030	.166	.365	.108	.178
.25	-14.561	.032	.169	.365	.110	.180
.26	-14.304	.034	.173	.365	.111	.182
.27	-13.969	.035	.177	.365	.112	.184
.28	-13.561	.037	.180	.365	.113	.186
.29	-13.083	.039	.184	.365	.114	.188
.30	-12.540	.041	.187	.365	.114	.190
.31	-11.936	.043	.191	.365	.114	.193
.32	-11.276	.045	.195	.365	.114	.195
.33	-10.563	.047	.198	.364	.114	.197
.34	-9.804	.049	.202	.263	.114	.200
.35	-9.002	.051	.206	.262	.114	.202
.36	-8.163	.053	.209	.361	.113	.205
.37	-7.291	.055	.213	.359	.112	.208
.38	-6.393	.058	.217	.356	.111	.210
.39	-5.472	.060	.220	.354	.110	.213
.40	-4.535	.062	.224	.351	.109	.215
.41	-3.585	.064	.227	.347	.108	.218
.42	-2.628	.067	.231	.343	.107	.220
.43	-1.669	.069	.234	.339	.105	.223
.44	-.713	.071	.237	.334	.104	.225
.45	-.237	.074	.241	.329	.103	.228

$t$	$B$	$x_c$	$v_c$	$a_c$	$x_p$	$y_p$
.46	1.176	.076	.244	.324	.102	.230
.47	2.100	.079	.247	.319	.100	.233
.48	3.004	.081	.250	.313	.099	.235
.49	3.886	.084	.254	.308	.098	.237
.50	4.741	.086	.257	.302	.097	.240
.51	5.567	.089	.260	.296	.096	.242
.52	6.361	.092	.263	.291	.095	.244
.53	7.119	.094	.266	.285	.094	.246
.54	7.840	.097	.268	.280	.093	.249
.55	8.522	.100	.271	.275	.092	.251
.56	9.163	.102	.274	.269	.092	.253
.57	9.761	.105	.277	.265	.092	.256
.58	10.314	.108	.279	.260	.092	.258
.59	10.823	.111	.282	.256	.092	.260
.60	11.286	.114	.284	.252	.092	.263
.61	11.702	.117	.287	.248	.092	.265
.62	12.072	.120	.290	.245	.093	.268
.63	12.396	.122	.292	.242	.094	.270
.64	12.673	.125	.294	.240	.095	.273
.65	12.903	.128	.297	.238	.096	.275
.66	13.088	.131	.299	.236	.098	.278
.67	13.228	.134	.302	.234	.099	.281
.68	13.325	.137	.304	.233	.101	.284
.69	13.378	.141	.306	.232	.103	.287
.70	13.389	.144	.309	.232	.106	.290
.71	13.360	.147	.311	.232	.108	.293
.72	13.292	.150	.313	.232	.111	.296
.73	13.187	.153	.315	.232	.114	.299
.74	13.045	.156	.318	.233	.117	.302
.75	12.869	.159	.320	.234	.120	.306
.76	12.660	.163	.322	.236	.124	.309
.77	12.420	.166	.325	.237	.128	.313
.78	12.150	.169	.327	.239	.132	.316
.79	11.855	.173	.330	.241	.136	.320
.80	11.533	.176	.332	.243	.141	.323
.81	11.188	.179	.334	.245	.145	.327
.82	10.821	.183	.337	.248	.150	.331
.83	10.434	.186	.339	.250	.155	.334
.84	10.029	.189	.342	.253	.160	.338
.85	9.608	.193	.344	.256	.165	.342
.86	9.173	.196	.347	.259	.171	.346
.87	8.725	.200	.350	.262	.177	.350
.88	8.267	.203	.352	.265	.182	.354
.89	7.799	.207	.355	.268	.188	.358
.90	7.325	.211	.357	.271	.194	.362



$t$	$B$	$x_c$	$v_c$	$a_c$	$x_p$	$y_p$
.91	6.844	.214	.360	.274	.200	.366
.92	6.360	.218	.363	.277	.207	.370
.93	5.873	.221	.366	.280	.213	.373
.94	5.384	.225	.368	.283	.220	.377
.95	4.897	.229	.371	.285	.226	.381
.96	4.410	.233	.374	.288	.233	.385
.97	3.927	.236	.377	.291	.240	.389
.98	3.448	.240	.380	.294	.247	.394
.99	2.975	.244	.383	.296	.253	.398
1.00	2.507	.248	.386	.299	.260	.402
1.01	2.048	.252	.389	.301	.267	.406
1.02	1.597	.256	.392	.303	.274	.410
1.03	1.155	.260	.395	.306	.281	.414
1.04	.724	.264	.398	.308	.288	.418
1.05	.304	.268	.401	.310	.296	.422
1.06	-.104	.272	.404	.312	.303	.426
1.07	-.500	.276	.407	.313	.310	.430
1.08	-.883	.280	.410	.315	.317	.434
1.09	-1.252	.284	.414	.317	.324	.438
1.10	-1.607	.288	.417	.318	.331	.442
1.11	-1.947	.293	.420	.319	.338	.446
1.12	-2.272	.297	.423	.321	.345	.450
1.13	-2.582	.301	.426	.322	.352	.455
1.14	-2.877	.305	.429	.323	.359	.459
1.15	-3.155	.310	.433	.324	.365	.463
1.16	-3.418	.314	.436	.325	.372	.467
1.17	-3.665	.319	.439	.326	.379	.472
1.18	-3.895	.323	.442	.327	.385	.476
1.19	-4.109	.327	.446	.327	.392	.480
1.20	-4.307	.332	.449	.328	.399	.485

III.5. Solución numérica para el sistema cilindro-pesa sin oscilación.

En la sección II.2.8. se establecieron las condiciones que deben cumplirse para que el conjunto pesa cilindro se mueva con aceleración constante. El ángulo de atraso  $\beta_0$  está dado por la ecuación II.2.8.3.:

$$\text{sen}^2 \beta_0 - \left(\frac{3}{2} \frac{M}{m} + 2\right) \text{sen} \beta_0 + 1 = 0 \quad (1)$$

Si usamos los datos del problema anterior:

$$M = 1.034 \text{ kg}$$

$$m = 0.05 \text{ kg}$$

Al sustituir en la ecuación (1), se encuentra que  $\beta_0$  debe valer 1.737 grados.

El programa se corrió conservando las restantes condiciones - iniciales del caso anterior. Los resultados se dan a continuación, en intervalos de 0.1 seg.

Las unidades corresponden al sistema M.K.S.

t	$\beta$ (grados)	$x_c$	$v_c$	$a_c$	$x_p$	$y_p$
0	1.737	0	.084	.297	.014	.157
.10	1.737	.001	.027	.297	.027	.155
.20	1.737	.006	.056	.297	.031	.160
.30	1.737	.013	.086	.297	.038	.167
.40	1.737	.024	.116	.297	.048	.178
.50	1.737	.037	.146	.297	.061	.191
.60	1.737	.053	.175	.297	.077	.207

Según se desprende de la tabla anterior, la aceleración del cilindro permanece constante y el ángulo de atraso de la pesa es el mismo. O sea que el sistema cilindro-pesa se mueve sin oscilar.

### III.6. Un caso particular: $a_c > g$

Vamos a suponer que la masa de la pesa es 10 veces mayor que la del cilindro:

$$m = 10 M$$

Los valores para  $\rho_0$  y  $R$  son los mismos de los casos anteriores y fijamos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_c(0) = v_c(0) = \beta(0) = \dot{\beta}(0) = 0$$

Los resultados obtenidos al correr el programa en estas condiciones se muestran enseguida, en unidades M K.S, cada 5 centésimos de segundo.

$t$	$\beta(\text{grados})$	$x_c$	$v_c$	$a_c$
0	0	0	0	8.52
.05	3.84	.011	.35	9.45
.10	13.74	.047	.88	12.83
.15	25.72	.118	1.76	16.23
.20	35.63	.228	2.42	15.73
.25	41.90	.376	3.14	12.48
.30	45.20	.554	3.71	9.95
.35	46.66	.757	4.18	8.71
.40	47.06	.981	4.60	8.29
.45	46.86	1.225	5.01	8.14
.50	46.33	1.490	5.42	8.24

$t$	$\beta(\text{grados})$	$X_c$	$V_c$	$a_c$
.55	45.61	1.776	5.84	6.41
.60	44.80	2.082	6.26	8.61
.65	43.95	2.411	6.69	8.82
.70	43.09	2.761	7.14	9.02
.75	42.25	3.134	7.59	9.20
.80	41.42	3.531	8.06	9.37
.85	40.62	3.950	8.53	9.52
.90	39.86	4.390	9.11	9.69
.95	39.11	4.862	9.50	9.78
1.00	38.40	5.354	9.99	9.90

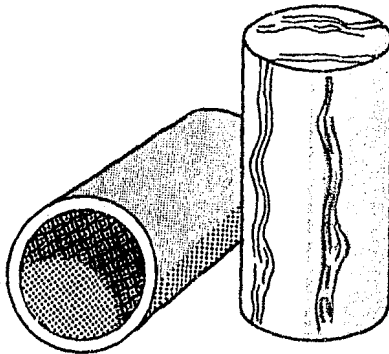
La solución numérica asegura que el cilindro puede alcanzar aceleraciones mayores que las de la gravedad.

## IV LA PARTE EXPERIMENTAL

### IV.1.- Experimentos Cualitativos

Las pruebas realizadas se refieren no tan sólo al problema central, sino a otros experimentos sencillos que están relacionados con el cilindro rodante y que se presentan en el programa de video. A continuación se describen, uno por uno.

a) Tubo negro y cilindro de madera. Para destacar la influencia de la distribución de masa en el movimiento del cilindro, se realizó la siguiente prueba: a un tubo metálico y a un cilindro de madera, del mismo diámetro y longitud y de igual masa, según muestra la figura IV.1., se les colgaron pesas iguales para comparar los movimientos resultantes. En el video se detalla el experimento y se observa que el cilindro de madera adquiere mayor aceleración.



*Fig. IV.1 Tubo y Cilindro de igual tamaño y masa.*

La explicación se encuentra a partir del momento de inercia: mientras que para el cilindro  $I = \frac{1}{2} MR^2$ , para el tubo  $I = MR^2$ .

La solución aproximada para la aceleración del cilindro es - según II.2.3,4, con  $\beta=0$ .

$$\ddot{x}_c = \frac{3}{2} \frac{mg}{M+m}$$

En el caso del tubo, la aceleración correspondientes es

$$\ddot{x}_c = \frac{mg}{2(M+m)}$$

y por supuesto, si salen iguales, el tubo metálico se queda atrás.

b) Cilindro con polea. Es muy sugerente comparar los movimientos de dos cilindros iguales sobre superficies idénticas con pesas iguales, con la diferencia de que, en un caso, la pesa cuelga directamente, mientras que en el otro se coloca una polea entre el cilindro y la pesa, como se indica en la figura IV.2.

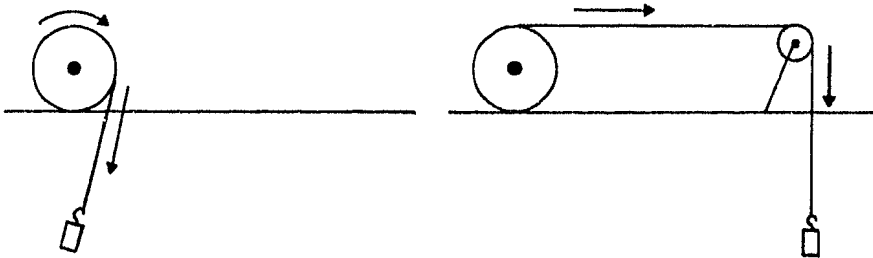


Fig. IV.2 Cilindros y pesas iguales en montajes distintos

La pregunta es: ¿Cuál recorre mayor distancia en el mismo tiempo?

Según se muestra en el programa de video, el cilindro con po

lea se acelera más. La explicación se detalla en seguida:

Las ecuaciones para las aceleraciones, según se derivaron en la primera parte, (ecuaciones II.2.3.4 y II.1.2.6) son:

$$\ddot{x}_c = \frac{mg}{\frac{3}{2} M+m} \quad \text{para el cilindro rodante}$$

$$\ddot{x}_c = \frac{mg}{\frac{3}{4} M+2m} \quad \text{para el cilindro con polea}$$

Para el caso particular considerado en el video, en donde  $m \ll M$ , se cumple que:

$$\frac{3}{2} M + m > \frac{3}{4} M + 2m$$

y la aceleración del cilindro rodante es menor.

c) El péndulo que se alarga con velocidad constante. Este problema que se puede considerar como un caso muy particular del cilindro rodante, cuya descripción teórica es bien conocida y que constituye por si mismo un buen asunto, se aborda en el video como una variante del cilindro y se ilustra aquí con un par de fotografías.

El montaje experimental consistió de una polea insertada en el eje de un motor de velocidad angular constante. Se colgó una pesa en el extremo de un hilo enrollado en la polea, se le dió a la pesa una oscilación inicial y luego se echó a andar el motor.

En un caso se obtuvieron fotografías estroboscópicas con una frecuencia suficientemente elevada para mostrar una trayectoria casi continua, según se muestra en la fotografía IV.3.a. En otro caso se colocó un pequeño foco encendido con sus pilas en lugar de la pesa y se tomó la fotografía en un cuarto a oscuras dejando la cámara con el obturador abierto, el resultado está ilustrado en la fotografía IV.3.b.

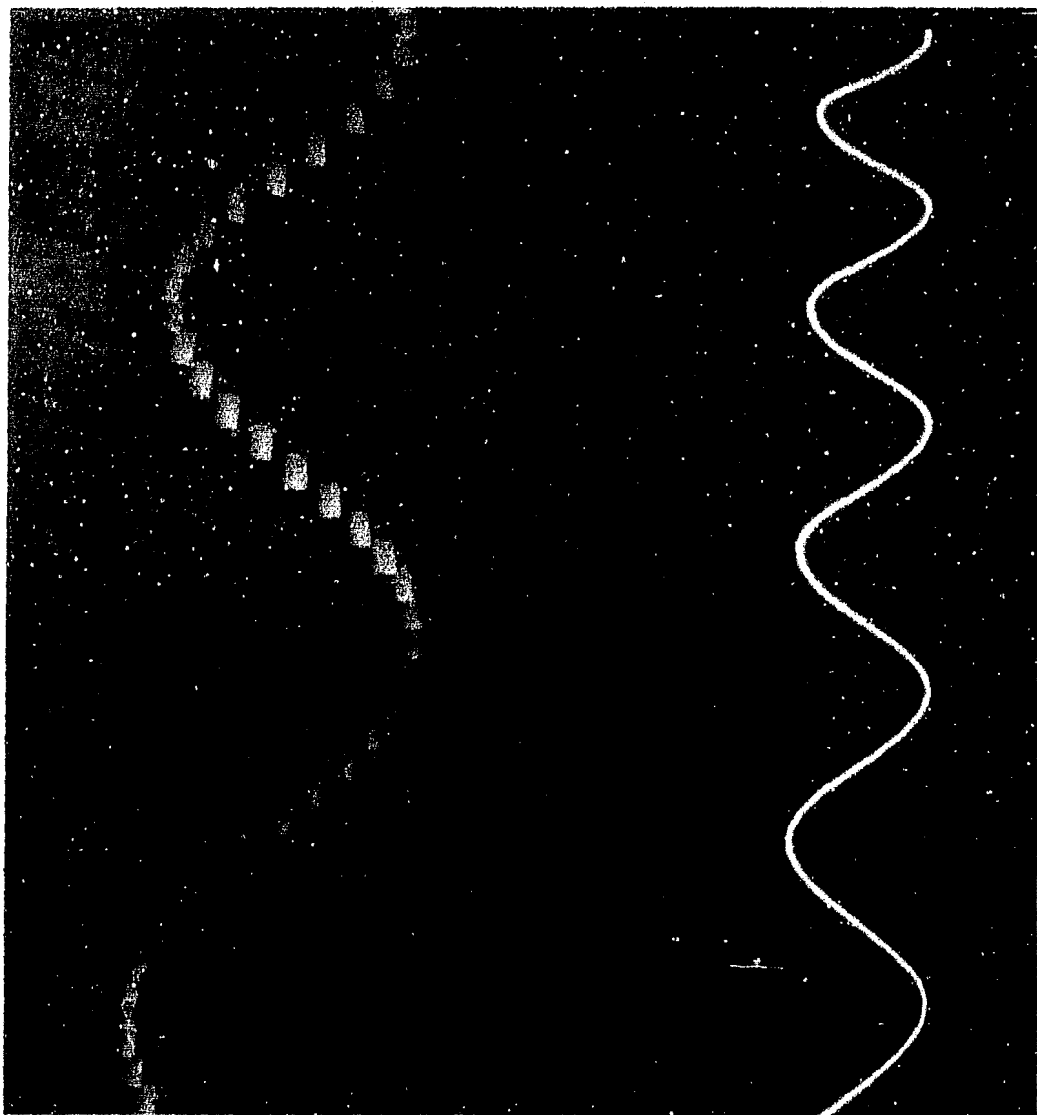
#### IV.2. El cilindro rodante: Diseño Experimental

De acuerdo con el análisis de la parte teórica, tanto la pesa como el cilindro se mueven con aceleración variable. El dispositivo experimental debía permitirnos, en principio, calcular estas aceleraciones a partir de posiciones y tiempos obtenidos mediante fotografías de destello múltiple.

Las primeras pruebas tuvieron como propósito seleccionar los mejores cilindros en función de su comportamiento y de algunas de sus características: diámetro, longitud, masa, distribución de la misma, material de que estaban hechos. Probamos con cilindros de varios tamaños, tanto tubos como cilindros sólidos, con volantes y carretes, con cilindros metálicos, plásticos y de madera. La razón fundamental por la que descartamos a la mayoría de los cilindros fue que sus centros de masas estaban fuera de los correspondientes ejes de simetría, de manera que los cilindros estaban "cargados" y su rodadura no era uniforme.

En relación con la superficie de rodadura, la dificultad prin





(a)

(b)

Fig. IV.3. Fotografías de un péndulo que se alarga con velocidad constante, a) se tomó con luz estroboscópica y b) manteniendo abierto el obturador.

cial se refería a la horizontalidad de la misma en distancias superiores a un metro. Finalmente encontramos un par de gruesas varillas metálicas de un poco más de un metro de longitud.

Una vez seleccionados los cilindros y las varillas, tuvimos que tomar en cuenta otro factor: la fricción entre las partes en contacto, que proporciona un límite a la relación entre la masa de la pesa y la del cilindro, más allá de la cual el cilindro desliza, además de rodar: las máximas aceleraciones que manejamos fueron del orden de 0.1 g.

Por lo que se refiere a la técnica de destello, para conseguir una iluminación uniforme tuvimos que usar tres lámparas intermitentes en serie\*. Las fotografías con mayor nitidez y definición correspondieron a frecuencias de 1200 y 1500 destellos por minuto, - como se muestra en las figuras IV.4 y IV.5.

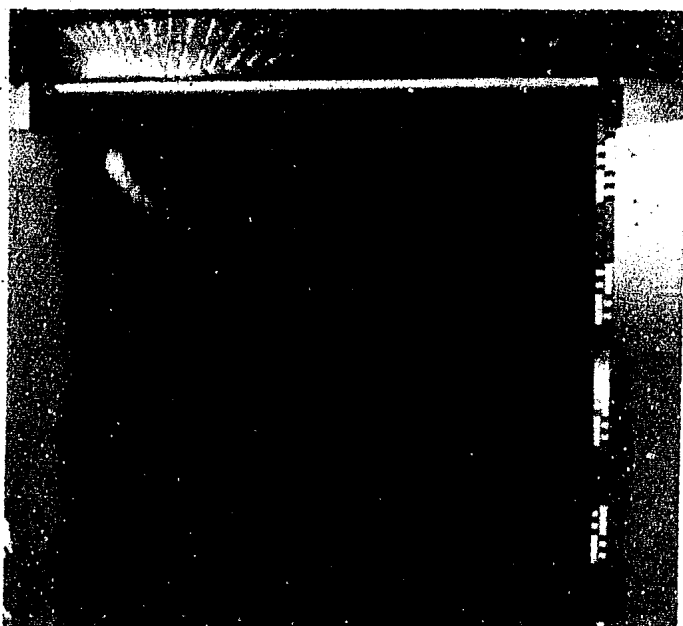
#### Cálculo de la aceleración y de la incertidumbre asociada.

Por medio de las fotografías se obtuvo un registro de las distintas posiciones ocupadas por el objeto en intervalos regulares de tiempo. Midiendo directamente intervalos de distancia y los correspondientes tiempos, se calcularon las velocidades medias de cada intervalo y de allí las aceleraciones medias.

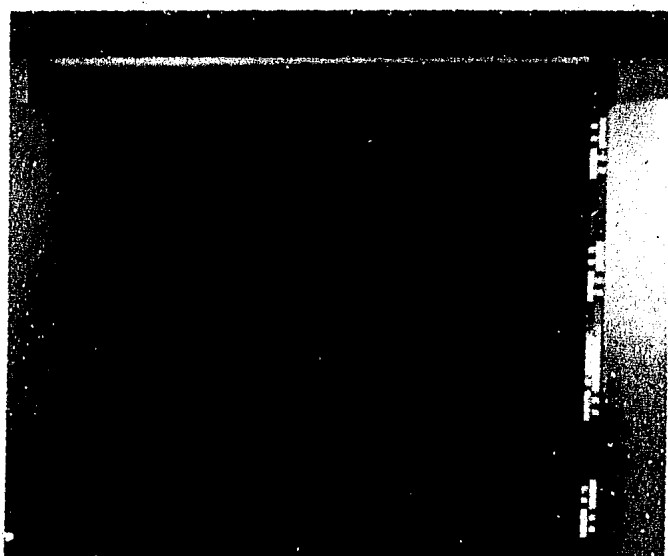


Sean  $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$  los intervalos de distancia,  $\delta(\Delta x_1)$  y  $\delta(\Delta x_2)$  las correspondientes incertidumbres y  $t_1$  y  $t_2$  los tiempos de dura

\*Estroboscopio electrónico STROBOTAC. Tipo 1531-AB. General Radio



*Fig. IV.4. Cilindro de aluminio con pesa de 200 gr. Frecuencia: 1200 destellos por minuto.*



*Fig. IV.6. Tubo metálico con pesa de 20 gr. Frecuencia 1500 destellos por minuto.*

ción de cada intervalo. Suponemos, además, que las incertidumbres relativas en los tiempos son pequeñas comparadas con las correspondientes incertidumbres en las distancias. En símbolos

$$\frac{\delta t}{t} \ll \frac{\delta(\Delta X)}{\Delta X}$$

Las velocidades medias para cada intervalo estarán dadas por :

$$v_1 = \frac{\Delta X_1}{t_1} \qquad v_2 = \frac{\Delta X_2}{t_2}$$

y las incertidumbres correspondientes serán:

$$\frac{\delta v_1}{v_1} = \frac{\delta(\Delta X_1)}{\Delta X_1} + \frac{\delta(t_1)}{t_1} = \frac{\delta(\Delta X_1)}{\Delta X_1} \qquad \frac{\delta v_2}{v_2} = \frac{\delta(\Delta X_2)}{\Delta X_2}$$

Las incertidumbres absolutas en las velocidades son, por supuesto:

$$\delta v_1 = \frac{\delta(\Delta X_1)}{t_1} \qquad \delta v_2 = \frac{\delta(\Delta X_2)}{t_2}$$

La aceleración media es, por definición :

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

y su incertidumbre absoluta :

$$\delta a = \frac{t_2 \delta(\Delta X_1) + t_1 \delta(\Delta X_2)}{t_1 t_2 t}$$

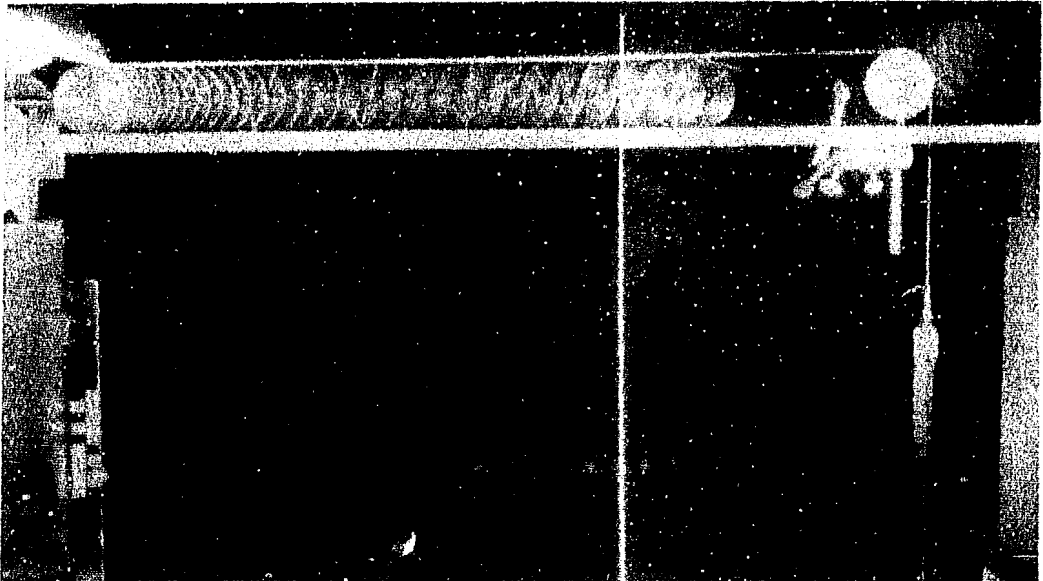
Si los tiempos considerados son iguales, es decir:  $t_1 = t_2 = t$ , entonces la incertidumbre relativa de la aceleración estará dada por:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta(\Delta x_1) + \delta(\Delta x_2)}{\Delta x_2 - \Delta x_1}$$

Mientras más precisa sea la medición de los intervalos de distancia y mayor sea la diferencia entre los intervalos medidos, menor será la incertidumbre en la aceleración.

#### IV.3.- Movimiento Uniformemente Acelerado

Antes de pasar al caso del cilindro rodante, consideramos necesario poner a prueba nuestras condiciones experimentales examinando un movimiento con aceleración constante: el cilindro accionado por la pesa con una polea intermedia, como se muestra en la fig. IV.6.-



*Fig. IV.6. Cilindro-pesa con polea*

En el arreglo experimental usado, se colocó el cilindro azul (M=1.034 Kg.) con una pesa de 50 gr. La frecuencia fue de 1500 - destellos por minuto. La masa de la polea era de 10 gr.

No fue posible hacer repeticiones del experimento para tomar fotografías en las mismas condiciones iniciales, así que el análisis de datos se hizo a partir de una sola transparencia de 35 mm. Los datos obtenidos se muestran en la Tabla IV.1.

Tabla IV.1. Datos Correspondientes a Cilindro-Pesa con Polea

Punto	$t$ (seg)	$t^2$ (seg <sup>2</sup> )	$X_c$ (cm)
0	0	0	0
1	.08	.0064	.50 ± .05
2	.16	.026	1.3 ± .05
3	.24	.058	2.4 ± .05
4	.32	.10	3.9 ± .05
5	.40	.16	5.7 ± .05
6	.48	.25	7.8 ± .05
7	.56	.31	10.3 ± .05
8	.64	.41	13.1 ± .05
9	.72	.52	16.3 ± .05
10	.80	.64	19.7 ± .05
11	.88	.77	23.5 ± .05
12	.96	.92	27.6 ± .05
13	1.04	1.08	32.1 ± .05
14	1.12	1.25	36.9 ± .05
15	1.20	1.44	42.0 ± .05
16	1.28	1.64	47.5 ± .05

En lugar de calcular las aceleraciones a partir de las velocidades medias, partimos del supuesto de que el movimiento tenfa aceleración constante y simplemente verificamos la hipótesis gra-

ficando  $x_c$  VS  $t^2$ . La aceleración la calculamos a partir de la pendiente y su incertidumbre está determinada por la incertidumbre de la pendiente. La gráfica se muestra en la fig. IV.7.

En estas condiciones, la aceleración experimental resultó ser:

$$a = 54 \pm 3 \text{ cm/seg}^2$$

La aceleración teórica está dada por la expresión II.1.2.6:

$$a = \frac{mg}{\frac{3}{4}M + 2m}$$

en donde

$$M = 1034 \text{ kg.}$$

$$m = 0.05 \text{ kg.}$$

El efecto de la polea es pequeño y no altera sustancialmente los cálculos.

Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene:

$$a_{teórica} = 56 \text{ cm/seg}^2$$

Podemos concluir que el movimiento es uniformemente acelerado en el intervalo que se considera, con una incertidumbre de 6%.

#### IV.3.(a). El Acelerómetro

En la fotografía IV.8 se observan las imágenes de un péndulo de 24 cm de longitud. Dicho péndulo está suspendido del eje de simetría del cilindro, como se indica en la fig. IV.9, de tal manera que el punto de suspensión desliza en el eje y no se enrolla

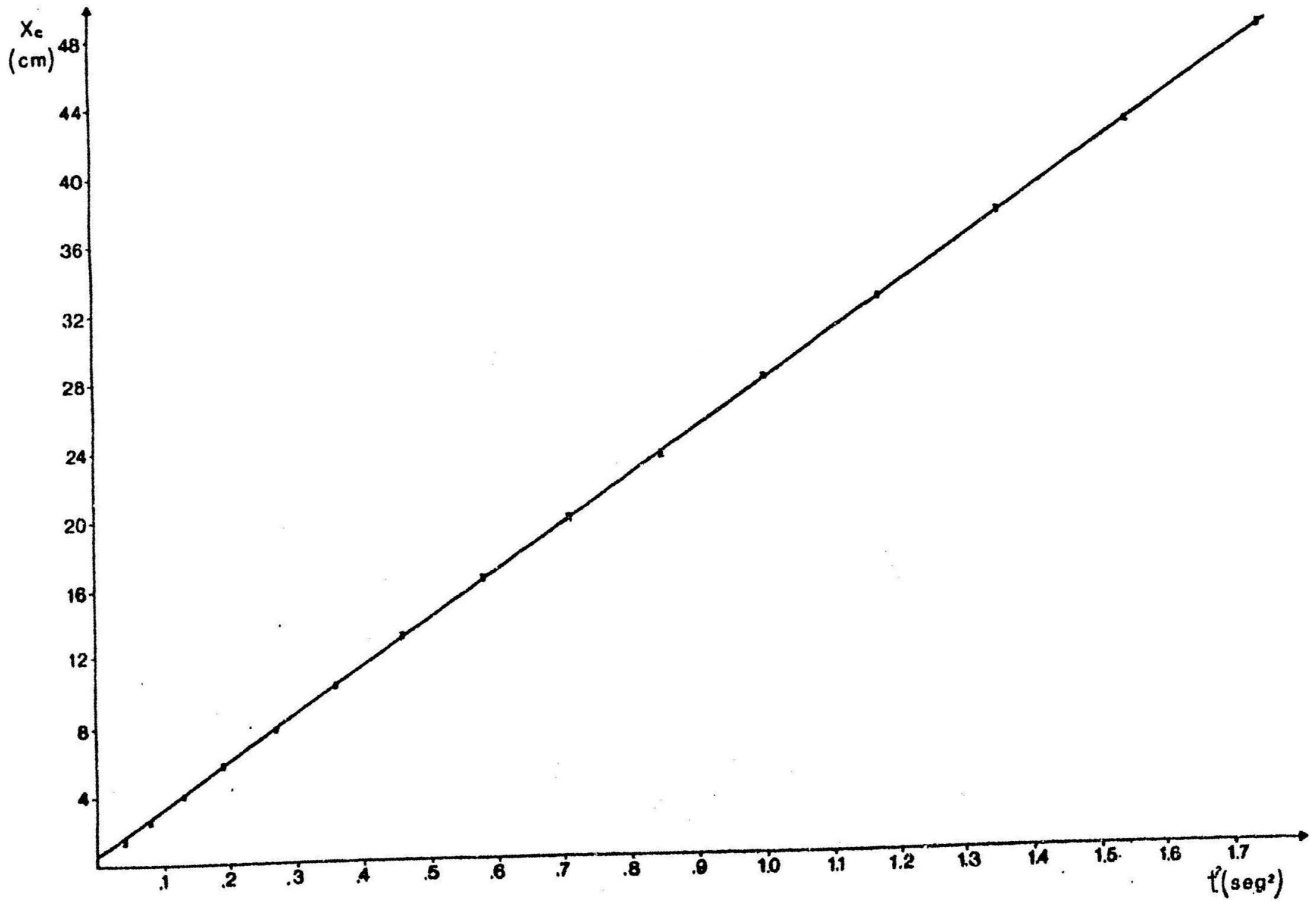
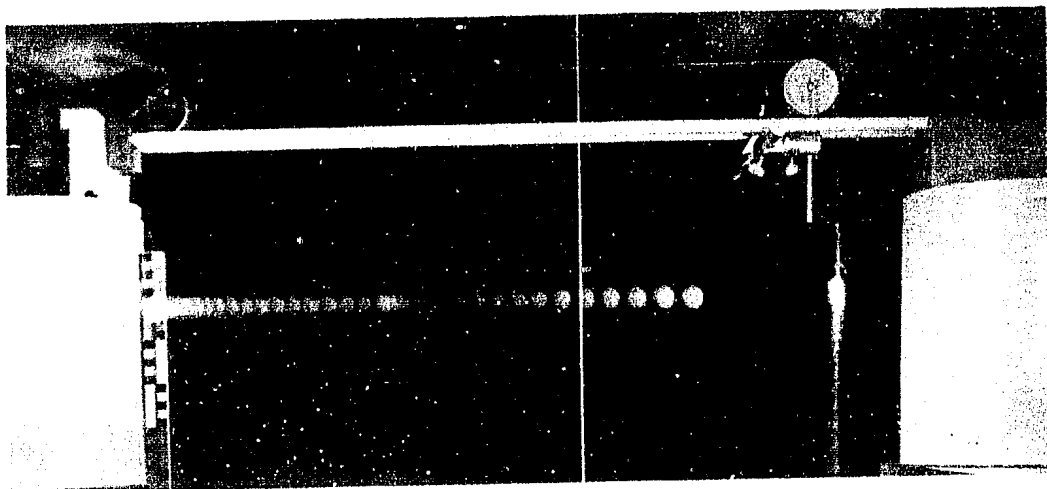


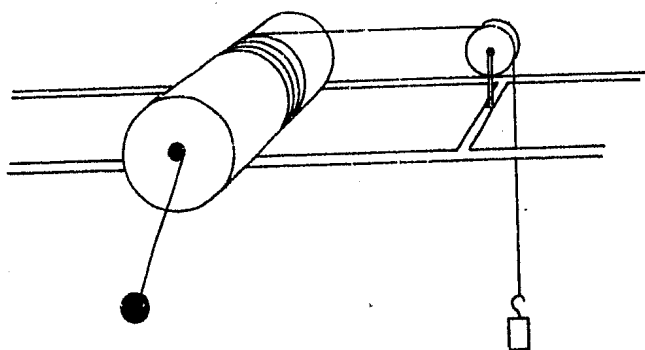
Fig. IV.7. Gráfica de  $X_c$  vs  $t^2$  para el cilindro pesa con polea.





*Fig. IV.8. El acelerómetro del conjunto cilindro-pesa*

al rodar el cilindro. Tiene una masa suficientemente pequeña - -  
 ( $m < 1 \text{ gr}$ ) para no afectar el movimiento del sistema. Se colocó allí  
 para usarlo como acelerómetro.



*Fig. IV.9. Montaje del péndulo en el eje del cilindro*

Las mediciones efectuadas a partir de la fotografía indican  
 que el péndulo oscila entre un ángulo máximo de atraso de  $5.2^\circ$  y

uno mínimo de  $1,8^\circ$ . En otras palabras oscila en torno de una nueva vertical con un ángulo  $\beta_0$  que corresponde al promedio de los valores extremos:  $\beta_0=3,5^\circ$ .

De la teoría del acelerómetro,  $\ddot{x}_c = g \tan \beta_0$  y  $\ddot{x}_c = 60 \text{ cm/seg}^2$ , valor que se aproxima a la aceleración de  $54 \text{ cm/seg}^2$  que el cilindro tiene.

Incidentalmente, el período de oscilación de este péndulo es de aproximadamente 0.96 seg, que está en buen acuerdo con el período correspondiente a un péndulo de 24 cm de longitud, que es de 0.98 seg.

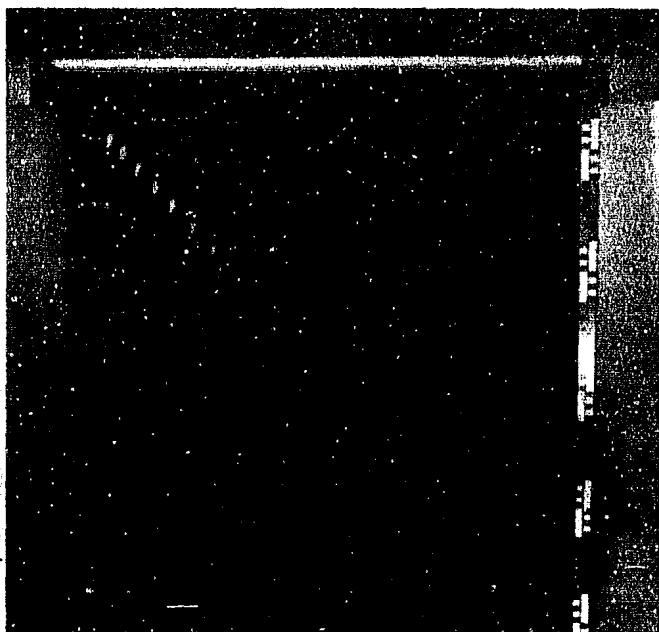
#### IV.4. El Cilindro Rodante con Angulos de Oscilación Pequeños

Con la idea en mente de una presentación didáctica del problema a estudiantes de nivel medio superior, las ecuaciones generales debían restringirse al caso particular de ángulos pequeños, mucho más fácil de entender y explicar, pero más difícil de discriminar experimentalmente. En estas condiciones se esperaban variaciones teóricas en las aceleraciones de 5 a 10% aproximadamente y según acabamos de mostrar en el caso anterior, la incertidumbre experimental es comparable a las variaciones esperadas en la aceleración. En otras palabras: el experimento en estas condiciones no nos permite detectar las fluctuaciones en la aceleración para ángulos pequeños.

Sin embargo, en el programa de video se hace una afirmación: que en el caso de ángulos pequeños la velocidad del cilindro es igual a la velocidad vertical de la pesa y diferente a la veloci-

dad horizontal de la misma pesa. El experimento realizado aquí, tenía como propósito calcular y comparar las velocidades medias - del cilindro y de la pesa.

La fotografía IV.10 muestra el experimento realizado: un tubo metálico de 115 gr. de masa y una pesa de 20 gr. La frecuencia es de 900 destellos por minuto. En la tabla IV.2 se enlistan los valores obtenidos y la incertidumbre asociada.



*Fig. IV.10. Tubo Metálico con pesa de 20 gr: corresponde al caso de ángulos de oscilación pequeños*

Tabla IV.2

Valores experimentales de ángulos y velocidades.

Tubo metálico con pesa de 20 gr.

Punto	$t$ (seg)	$\beta$ (grados)	$\dot{\chi}_c$ (cm/seg)	$\dot{\chi}_p$ (cm/seg)	$\dot{y}_p$ (cm/seg)
1	3/15	5.7	15	13	16
2	4/15	7.3	21	17	21
3	5/15	7.5	25	24	24
4	6/15	6.7	30	32	30
5	7/15	5.3	35	38	36
6	8/15	4.0	40	44	41
7	9/15	3.0	45	48	45
8	10/15	2.4	50	51	51
9	11/15	2.2	55	54	55
10	12/15	2.4	61	59	61
11	13/15	2.5	66	63	66
12	14/15	2.9	72	68	71
13	15/15	3.3	77	72	77
14	16/15	3.6	82	77	81
15	17/15	3.9	87	82	86

La incertidumbre en los ángulos es:  $\delta\beta = 0.2^\circ$

La incertidumbre en las velocidades es:  $\delta V = 1 \text{ cm/seg.}$

Los resultados confirman la hipótesis: dentro de la incertidumbre experimental la velocidad vertical de la pesa y la velocidad del cilindro son iguales, mientras que la velocidad horizontal de la pesa es, en general, diferente.

#### IV.5. El Cilindro Rodante: Caso General:

Con el propósito de obtener mayores variaciones en la aceleración del cilindro se le dió a la pesa una oscilación inicial. -

De esta manera los ángulos crecieron hasta  $15^\circ$  y las fluctuaciones en la aceleración eran ya considerables (aproximadamente 30%), sobre todo para las primeras oscilaciones, pues según sabemos, la amplitud de las oscilaciones angulares se amortigua rápidamente. Por esta razón para el análisis experimental se tomaron en cuenta sólo los primeros 30 destellos.

La fotografía IV.11, que llamaremos "El Arpa" corresponde al experimento estudiado: el cilindro azul ( $M=1034$  gr) con una pesa - de 50 gr. La frecuencia empleada fué de 1500 destellos por minuto. El radio del cilindro es de 3 cm. El punto marcado con cero se tomó como origen y las condiciones iniciales calculadas se refieren a esa imagen:

$$\rho_0 = 15.4 \pm 0.5 \text{ cm}$$

$$\chi_c(0) = 0$$

$$\dot{\chi}_c(0) = 8.4 \pm 2 \text{ cm/seg}$$

$$\beta(0) = 6.2 \pm .2^\circ = .108 \pm .003 \text{ radianes}$$

$$\dot{\beta}(0) = -2.7 \pm .2 \text{ rad/seg}$$

Los datos anteriores se suministraron a la computadora para obtener la solución numérica presentada en la sección III.4.

El análisis de datos se hizo a partir de una sola transparencia de 35 mm., con el microscopio viajero\* que permite lecturas directas hasta de centésimas de milímetro y sólo se consideran los primeros 1.2 segundos del movimiento.

Para cada uno de los destellos se midieron: la distancia re-

\*Marca Ealing # 23-0805

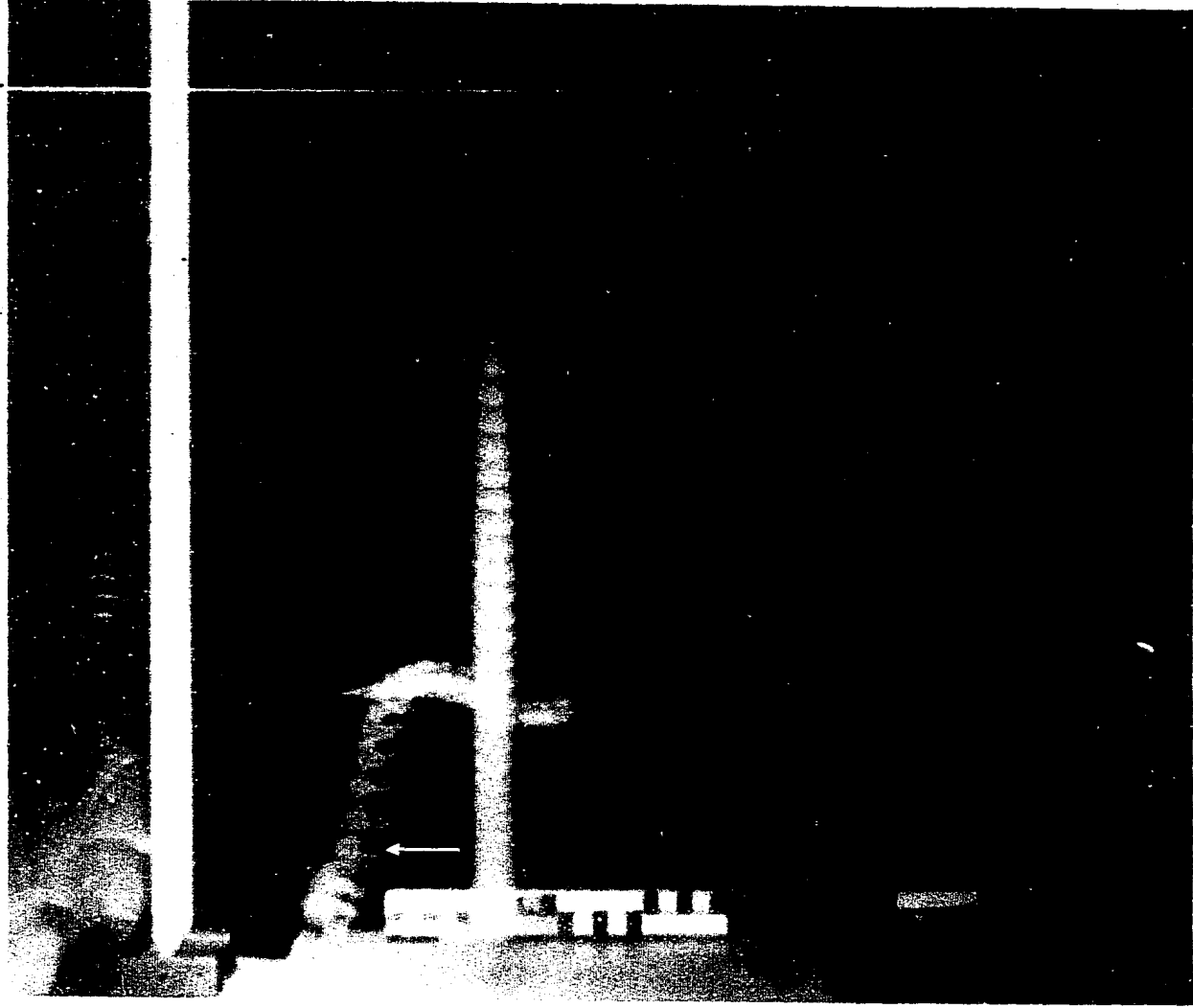


Fig. IV.11. "El Arpa" ilustra el caso general: cilindro rodante con oscilación inicial.

corrida por el cilindro, las distancias horizontal y vertical cubiertas por la pesa y el ángulo entre el hilo y la vertical. Las velocidades medias y las aceleraciones se calcularon sólo en el caso del cilindro.

Para el cálculo de las velocidades y las aceleraciones se consideraron intervalos de tiempo lo suficientemente grandes para que la incertidumbre relativa de la distancia fuera lo más pequeña posible, pero también lo suficientemente pequeños para que no hubiera variaciones apreciables en la aceleración. De esta manera se escogieron intervalos de tiempo correspondientes a 3 y 4 destellos (tiempos de 0.12 seg y 0.16 seg. respectivamente).

Todos los valores medidos directamente o calculados a partir de las mediciones hechas, se presentan en la tabla IV.3 con sus correspondientes incertidumbres.

Para contrastar los resultados experimentales con los teóricos se procede, en general, de la manera siguiente:

Se traza primero la curva teórica construida a partir de la solución numérica (ver sección III, 4) y sobre ella se representan los valores experimentales correspondientes, con su respectiva incertidumbre. En la figura IV.12 se presenta la gráfica de la distancia en función del tiempo para el cilindro. Los puntos experimentales con su incertidumbre apenas si se notan. La curva teórica se "asemeja" a una parábola y parece que el movimiento puede ser considerado como uniformemente acelerado para la precisión ma

Tabla IV.3

Valores experimentales correspondientes a "El Arpa"  
 Registro de tiempos, ángulos y posiciones de la pesa y el cilindro  
 Cálculo de velocidades y aceleraciones del cilindro

Punto	$t$ (seg)	$x_c$ (cm)	$\beta$ (°)	$x_p$ (cm)	$y_p$ (cm)	$v_c$ ( $\frac{cm}{seg}$ )	$a_c$ ( $\frac{cm}{seg^2}$ )
0	0	0	6.2+.2	1.3+.1	15.4+.1	8.4+.3	
1	.04	.4+.05	.1+.2	3.2+.1	15.9+.1		
2	.08	.8+.05	-5.5+.2	5.4+.1	16.3+.1	11.3+.6	
3	.12	1.3+.05	-10.2+.3	7.3+.1	16.5+.1		
4	.16	1.8+.05	-13.3+.3	8.8+.1	16.8+.1	13.8+.3	35+17%
5	.20	2.4+.05	-14.8+.5	10.0+.2	17.2+.1		
6	.24	3.0+.05	-15.2+.5	10.9+.2	17.6+.2	16.9+.3	34+22%
7	.28	3.7+.05	-13.7+.5	11.3+.2	18.4+.2		
8	.32	4.5+.05	-10.7+.5	11.3+.2	19.3+.2	19.4+.6	31+19%
9	.36	5.3+.05	-8.7+.5	11.3+.2	20.3+.2		
10	.40	6.1+.05	-4.1+.5	10.7+.2	21.4+.2	21.9+.9	39+20%
11	.44	7.0+.05	-1.0+.5	10.5+.2	22.4+.2		
12	.48	8.0+.1	2.3+.8	9.7+.2	23.5+.2	25.6+.3	38+19%
13	.52	9.0+.05	6.3+.5	9.3+.2	24.4+.2		
14	.56	10.2+.05	9.2+.5	9.2+.2	25.2+.2	28.1+.6	28+18%
15	.60	11.3+.05	10.8+.5	9.3+.2	26.2+.2		
16	.64	12.5+.05	12.7+.5	9.5+.2	27.3+.2	30.0+.3	24+25%
17	.68	13.7+.05	13.5+.5	10.0+.2	28.3+.2		
18	.72	15.0+.1	13.3+.5	11.1+.2	29.5+.2	31.9+.6	20+26%
19	.76	16.3+.05	12.2+.5	12.5+.2	30.8+.2		
20	.80	17.6+.05	11.2+.5	14.1+.2	32.1+.2	33.1+.3	23+18%
21	.84	19.1+.1	9.5+.5	16.1+.2	33.8+.2		
22	.88	20.4+.05	7.7+.5	18.3+.2	35.3+.2	35.6+.3	24+25%
23	.92	21.8+.05	6.1+.5	20.8+.2	36.4+.2		
24	.96	23.3+.05	3.9+.5	23.5+.2	36.4+.2	36.9+.9	25+20%
25	1.00	24.8+.1	2.1+.5	26.2+.2	39.9+.2		
26	1.04	26.3+.05	.2+.5	29.0+.2	41.7+.2	39.4+.9	31+18%
27	1.08	27.9+.10	-1.4+.5	31.9+.2	43.3+.2		
28	1.12	29.6+.05	-2.7+.5	34.7+.2	44.9+.2	41.9+.9	26+20%
29	1.16	31.3+.05	-3.7+.5	37.5+.2	46.5+.2		
30	1.20	33.1+.1	-4.3+.5	40.0+.2	48.3+.2	43.8+.3	



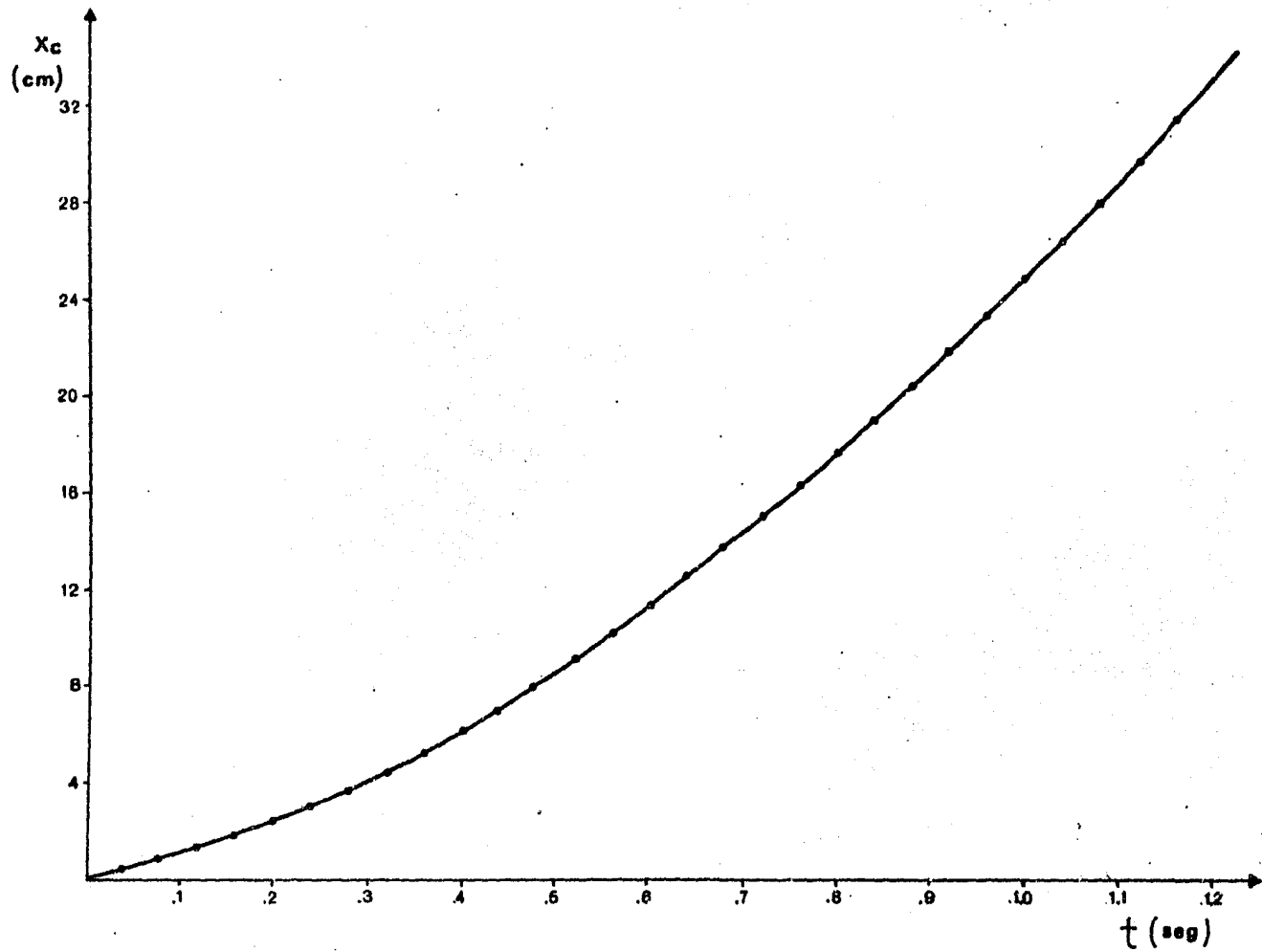


Fig. IV.12. Gráfica de la distancia en función del tiempo para el cilindro.

nejada. Por esta razón, en la tabla IV.4 se calculan los cuadrados de los tiempos y en la fig. IV.13 está representada la gráfica de la distancia en función del cuadrado del tiempo. Puede verse claramente que el movimiento no es uniformemente acelerado.

Tabla IV,4

Punto	$t(\text{seg})$	$t^2(\text{seg}^2)$	$\chi_c(\text{cm})$
0	0	0	0
1	.04	.0016	.4±.05
2	.08	.0064	.8±.05
3	.12	.014	1.3±.05
4	.16	.026	1.8±.05
5	.20	.040	2.4±.05
6	.24	.058	3.0±.05
7	.28	.078	3.7±.05
8	.32	.10	4.5±.05
9	.36	.13	5.3±.05
10	.40	.16	6.1±.05
11	.44	.19	7.0±.05
12	.48	.23	8.0±.1
13	.52	.27	9.0±.05
14	.56	.31	10.2±.05
15	.60	.36	11.3±.05
16	.64	.41	12.5±.05
17	.68	.46	13.7±.05
18	.72	.52	15.0±.1
19	.76	.58	16.3±.05
20	.80	.64	17.6±.05
21	.84	.71	19.1±.1
22	.88	.77	20.4±.05
23	.92	.85	21.8±.05
24	.96	.92	23.3±.05
25	1.00	1.00	24.8±.05
26	1.04	1.08	26.3±.05
27	1.08	1.17	27.9±.05
28	1.12	1.25	29.6±.05
29	1.16	1.35	31.3±.05
30	1.20	1.44	33.1±.1

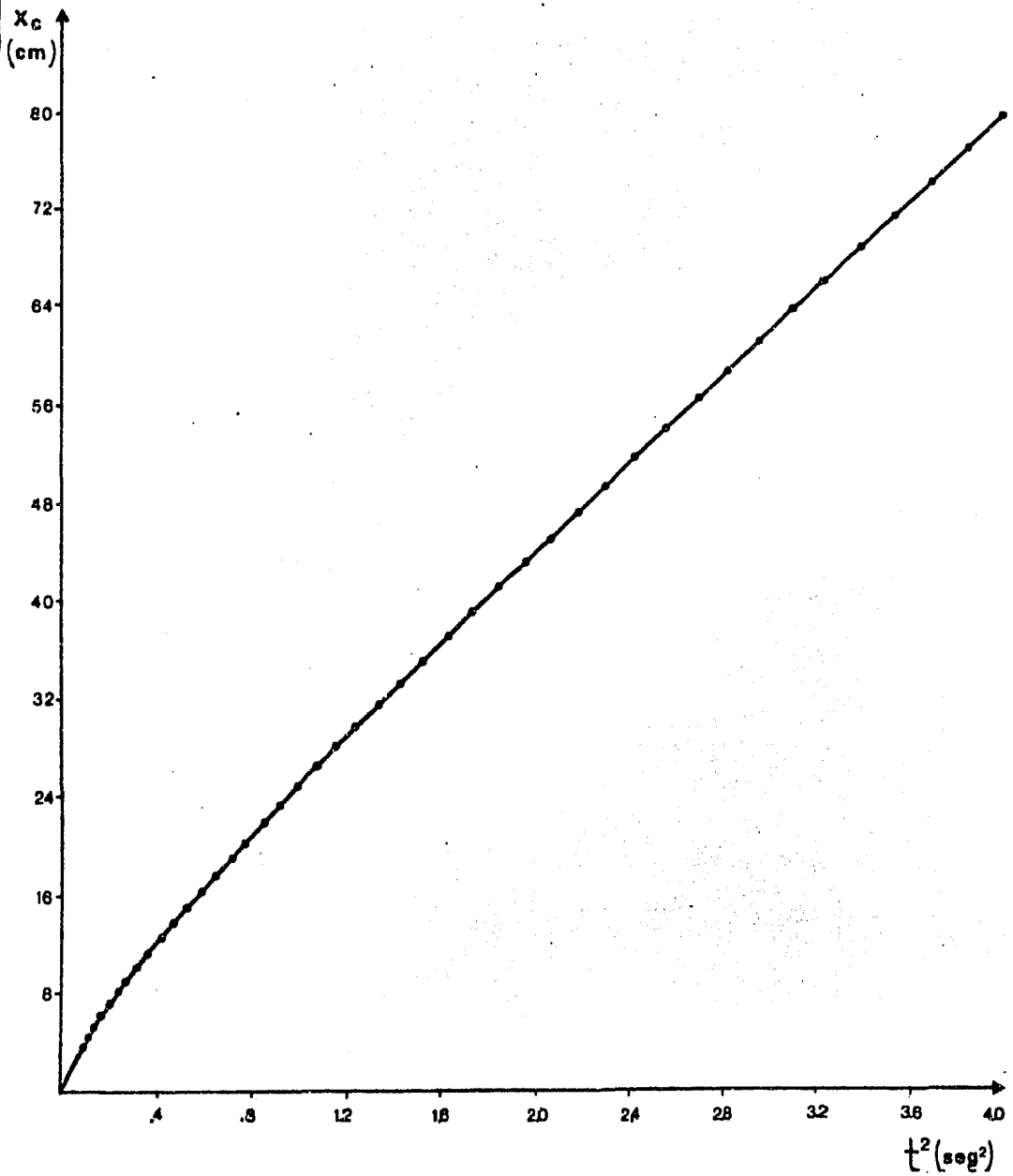


Fig. IV.13. Gráfica de  $X_c$  vs  $t^2$  para el cilindro. Se ve claramente que no es una recta.

Las posiciones horizontal y vertical de la pesa en función - del tiempo están representadas en las figuras IV.14 y IV.15, respectivamente.

La comparación entre los valores experimentales y teóricos de  $\beta$  se muestra en la figura IV.16. Después de 1.2 seg., el ángulo decrece muy rápidamente.

En la fig. IV.17. se indican las velocidades experimentales del cilindro, correspondientes a la mitad de los puntos.

Finalmente, en la figura IV.18 se presentan las aceleraciones experimentales contrastadas con la curva teórica para el caso del cilindro.

Es necesario enfatizar que el excelente acuerdo entre la teoría y el experimento se logró sólo en -prácticamente- el primer segundo del movimiento. A partir de allí las discrepancias empiezan a ser significativas.

Los resultados experimentales se usan parcialmente en el programa de video, aunque sin hacer mención explícita de ellos, particularmente la gráfica de la aceleración en función del tiempo para el cilindro y las gráficas de las distancias en función del tiempo para la pesa y el cilindro.

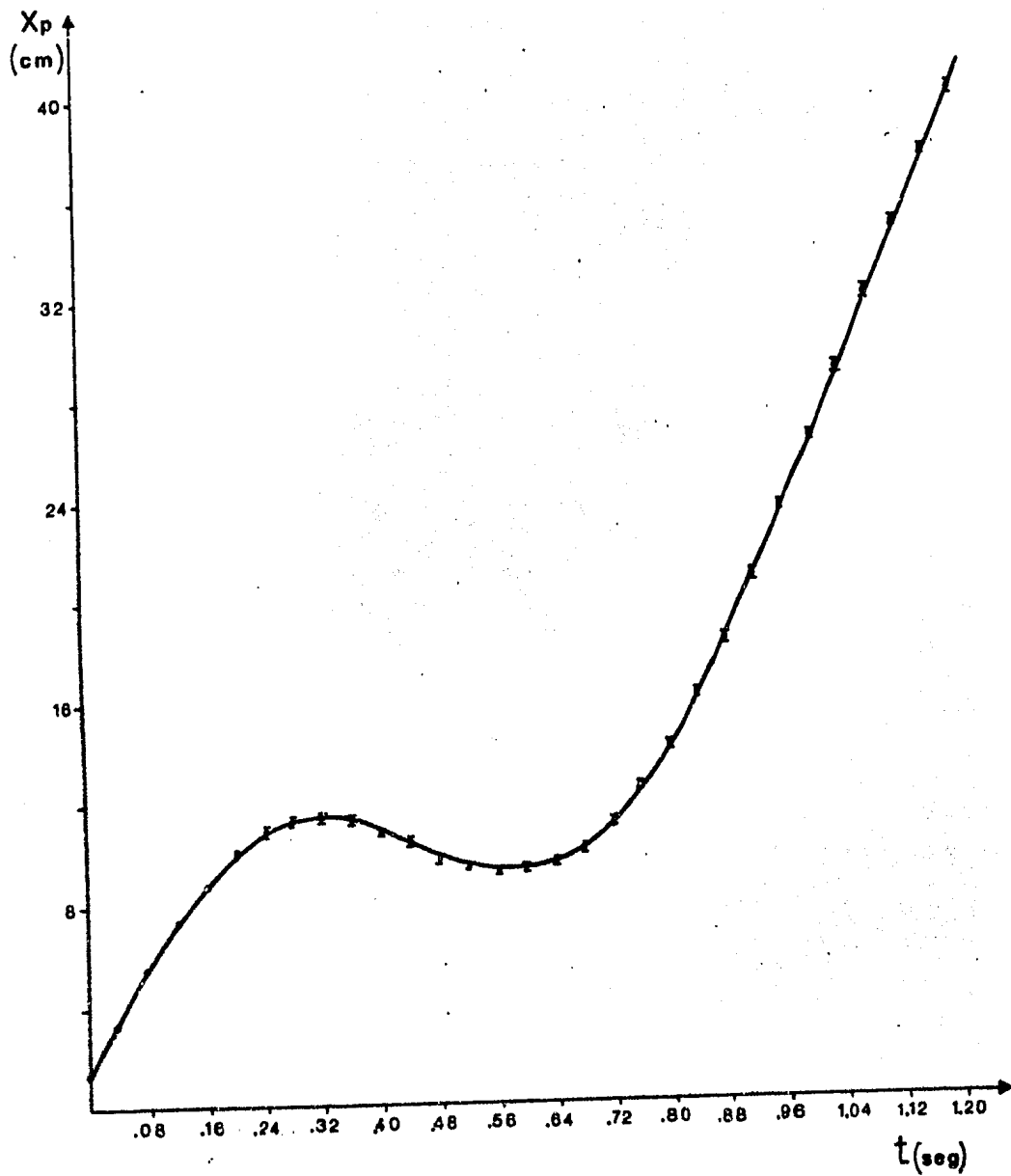


Fig. IV.14. El desplazamiento horizontal de la pesa en función del tiempo.

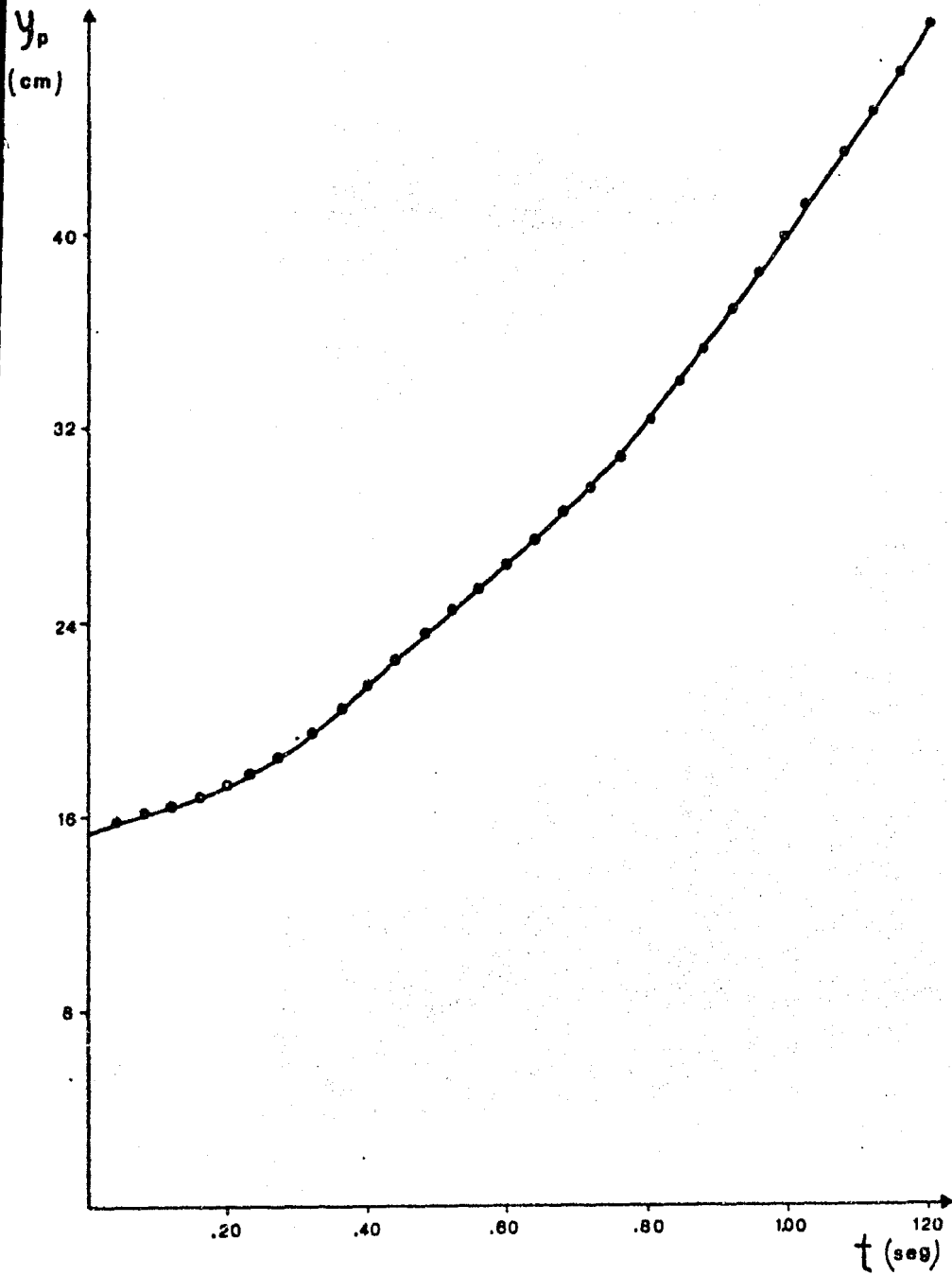


Fig. IV.15. El desplazamiento vertical de la pesa en función del tiempo.

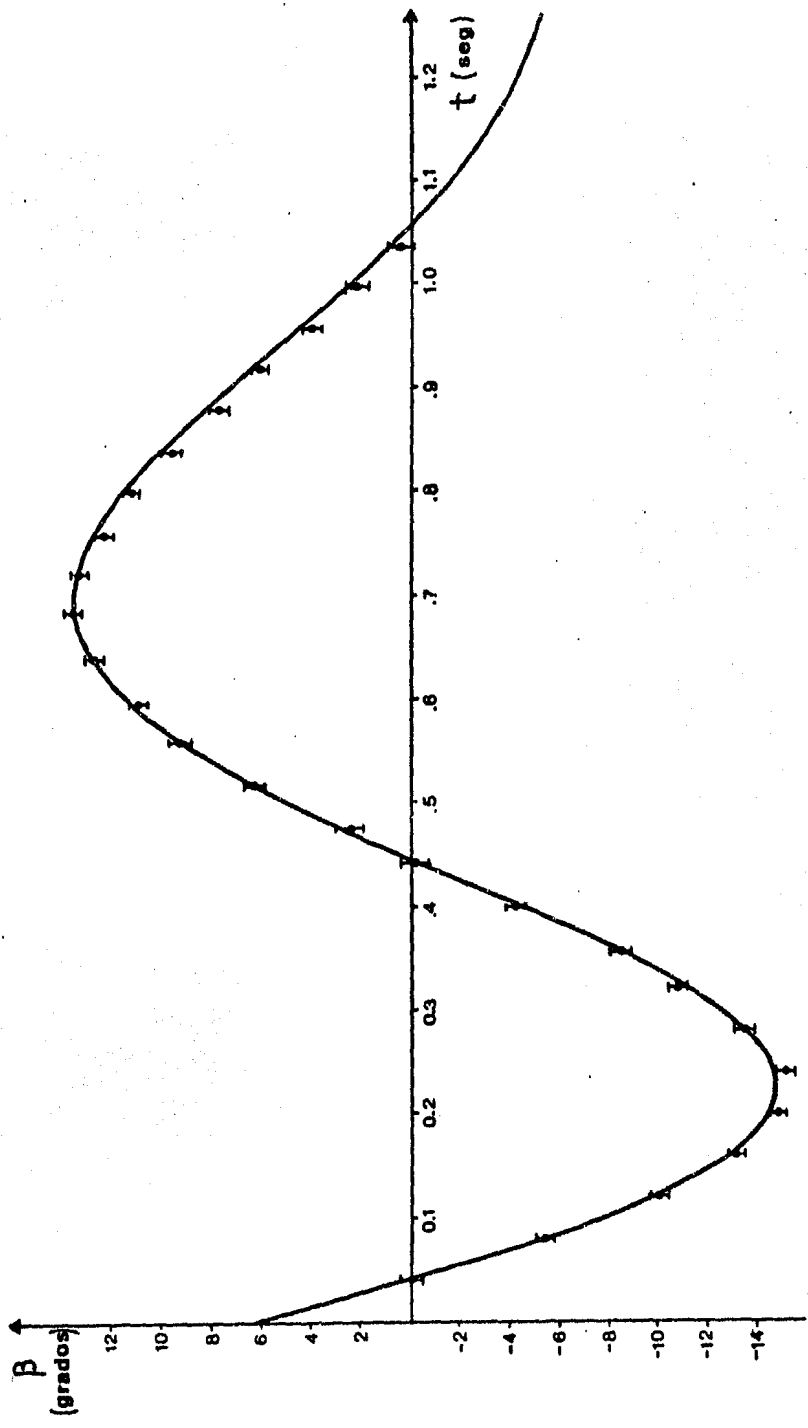


Fig. IV.16. Variación de  $\beta$  con el tiempo en el caso de "El Arpa"

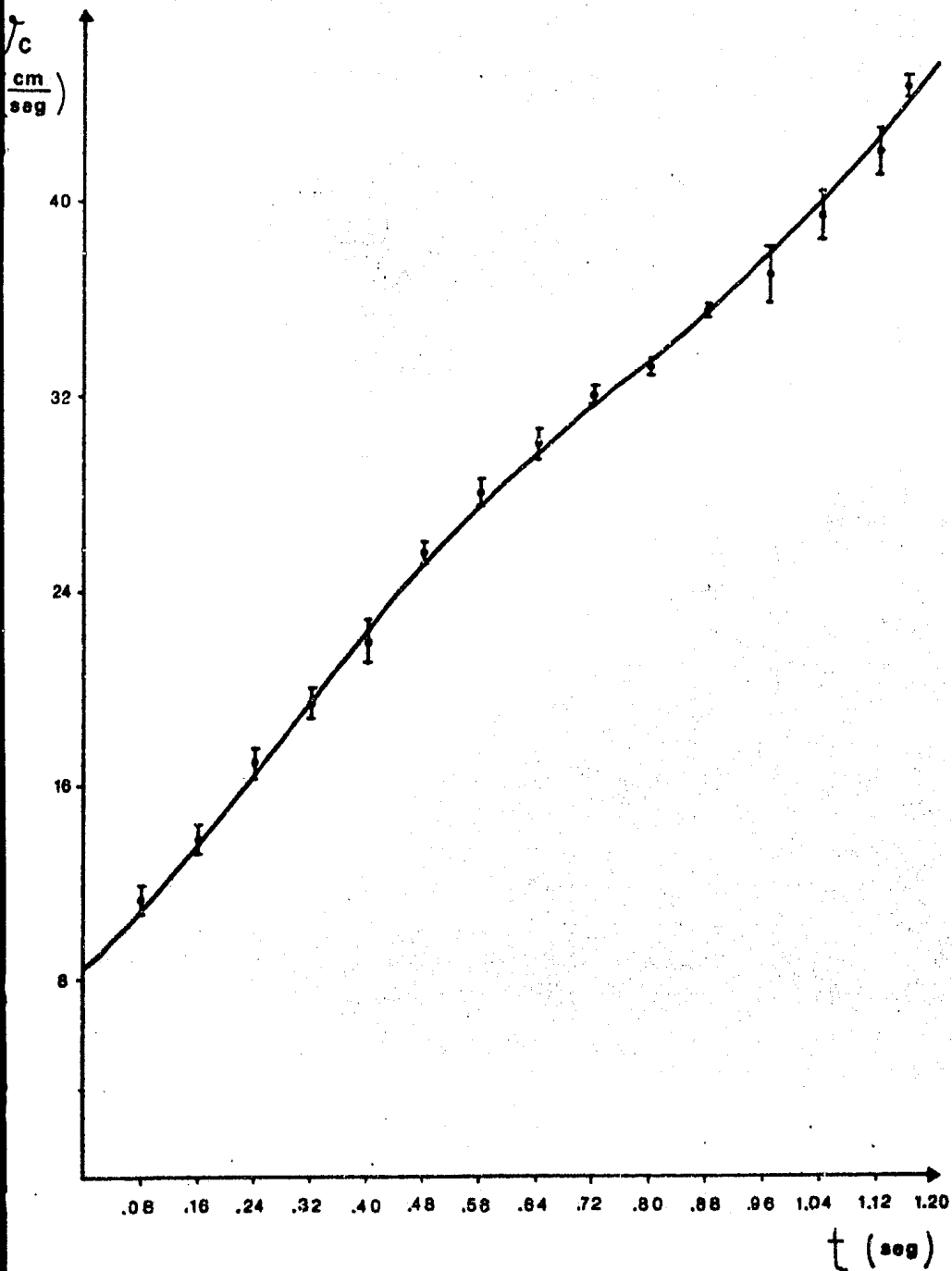


Fig. IV.17. Gráfica de la velocidad del cilindro en función del tiempo.



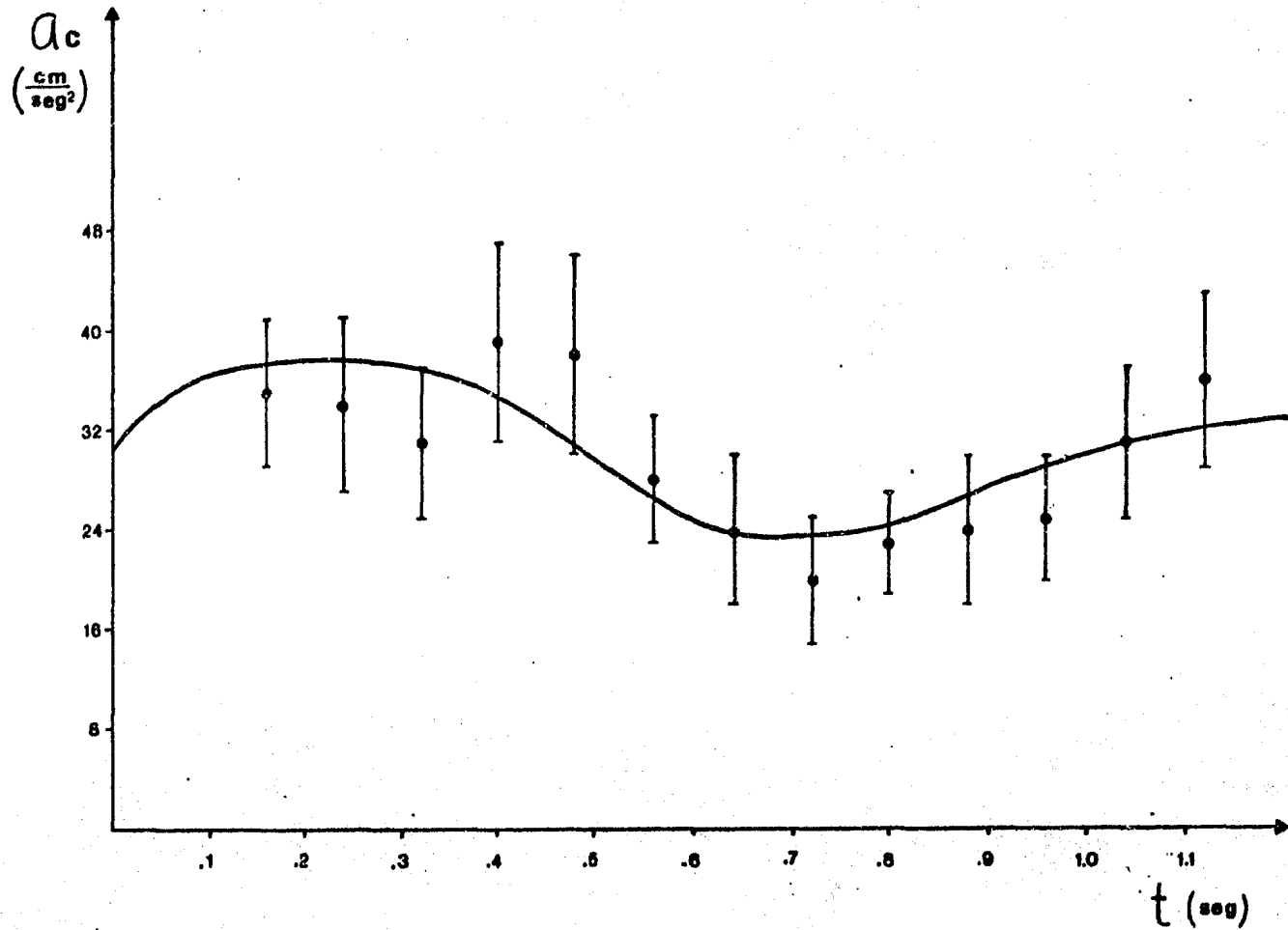


Fig. IV.18. La aceleración del cilindro en función del tiempo.

## V.- LA PARTE DIDACTICA

### V.1. ¿Por qué un Programa de Video?

El objetivo central de esta parte es presentar en una forma -- clara, simple y atractiva el problema del cilindro. Aunque en prin cipio existen muchas maneras de conseguirlo, la decisión de hacer un video estuvo apoyada en las siguientes razones:

a) La naturaleza del problema: se trata de mostrar experimentos que involucran sucesos de corta duración, movimientos que es necesario congelar y retardar, detalles que la simple fotografía no basta para ilustrar y que el video suministra con ventaja.

b) El contenido del problema y el equipo especializado que el asunto requiere: cámara fotográfica, lámparas de destello, etc., hacen inaccesible el problema a los alumnos a los que va dirigido.

c) La presentación de algunos conceptos y la ilustración de resultados se facilitan con los recursos propios de este medio: di bujos animados, sobreimposiciones, etc.

d) El auditorio potencial: la presentación del problema a estudiantes de Mecánica de la Facultad es relativamente simple. Hacerlo accesible en cambio, a gentes que apenas empiezan a asomarse a la Física representa un buen desafío y obliga al empleo de todos los recursos disponibles.

e) En los últimos tiempos he trabajado en la elaboración de -

audiovisuales. En este sentido mi interés básico es explorar algunas posibilidades sobre el uso de este medio en la enseñanza de la Física.

## V.2.- ¿Cómo presentar el Problema?

Desde el principio se consideró la posibilidad de que los expositores fueran estudiantes del mismo nivel que el auditorio potencial del programa. Había por supuesto algunos inconvenientes, pero las posibles ventajas eran sustanciales: proporcionar elementos de identificación no tan sólo con la edad y conocimientos de los presentadores, sino también con la Física involucrada y la herramienta matemática que se maneja. Permite por otro lado una estructura atrayente y bastante apegada al desarrollo de los acontecimientos y hace posible ensayar enfoques distintos en este terreno: los audiovisuales en la enseñanza.

## V.3.- Características y Desarrollo del Programa

Título: El Misterio del Cilindro Rodante

Auditorio:

Estudiantes de nivel medio superior que han llevado al menos un curso de Física.

Objetivos:


Analizar y resolver cualitativa y experimentalmente el problema del cilindro rodante, con los conceptos que se manejan en un curso introductorio de Física.

Argumento:

Tomando como punto de partida el juego del yoyo, un equipo de tres estudiantes de Biología introducen y plantean el problema del cilindro, detallan cómo se interesaron en el asunto, la forma en que abordaron el tema reuniendo información sobre problemas parecidos pero más sencillos, el análisis que hicieron de las distintas partes, la interpretación de los resultados experimentales y una síntesis y conclusión del problema.

GUIÓN LITERARIO

Programa: EL MISTERIO DEL CILINDRO RODANTE

Tono 



JUGANDO CON EL YOYO

1



B.- Aquí tenemos un yoyo....  
.... este es su movimiento fundamental....  
.... y estas son algunas de las posibles combinaciones.... ¿Quién no ha disfrutado de este entretenimiento?

2



YOYO SOBRE LA MESA  
A.- Juguemos ahora en una forma distinta:  
..... Simplemente lo pongo en la mesa y jalo el hilo hacia arriba. El yoyo se mueve hacia este lado....  
..... Si ahora inclino el hilo y vuelvo a jalar, el yoyo se mueva en la misma dirección.

3



Un nuevo ensayo, bajando mas el hilo....  
..... Ahora el yoyo se movió hacia el otro lado.  
..... ¿En donde se invirtió el movimiento?  
..... Regresemos: parece que aquí es.... el yoyo está indeciso.... no "sabe" si avanzar o retroceder.

4



¿Por qué el yoyo se comporta así?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5



B.- La respuesta es sencilla y nos la dá la Física.  
..... En cualquier libro sobre el tema podemos encontrar la solución a este problema.  
.....

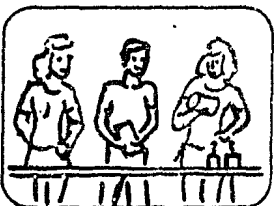
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

6



A. - Vayamos mas adelante: ¿Qué sucede si seguimos variando la inclinación del hilo?  
¿Y si de plano jalamos hacia abajo, de esta manera?

7



C. - Hagámoslo de otra forma para tener mayor control: en lugar del yoyo utilicemos este cilindro sobre unos rieles y en vez de jalar con las manos vamos a colgarle una pesita.

8



B. - Ahora tenemos definido nuestro problema: ¿Qué sucede si soltamos el cilindro? Nuestro objetivo es describir y explicar cualitativamente los movimientos y efectos resultantes. Los invitamos a que nos acompañen a resolver este misterio.

9



CREDITOS

10

Cupra

11

Facultad  
de  
Ciencias

12

Departamento  
de  
Física (CEF)

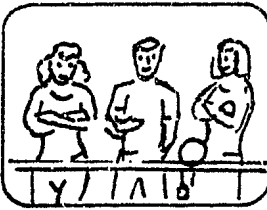
13

presentan

14

EL MISTERIO DEL CILINDRO RODANTE

15

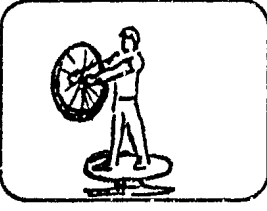


Yo soy Áraoeli... y yo Evelio... y yo Argelia.

B.- Somos estudiantes del primer semestre de La Carrera de Biología, tratando de resolver un problema físico ¿Cómo fué que nos metimos en esto?

Bien... se los diremos:

16



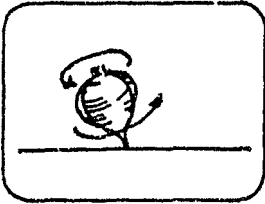
C.- Alguna vez, durante el curso, tuvimos oportunidad de observar un par de efectos obtenidos con ayuda de la plataforma giratoria. Surgieron algunas interrogantes:

17



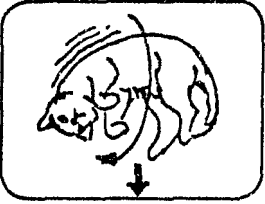
A.- ¿Por qué una bailarina gira mas rápido cuando pega los brazos al cuerpo?

18



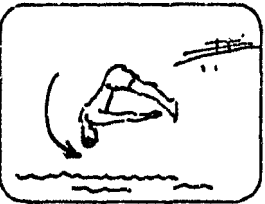
B.- ¿Por qué un trompo no se cae cuando gira?

19



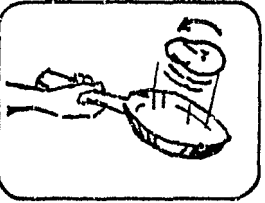
C.- ¿Por qué un gato cae siempre parado, independientemente de como se suelte?

20



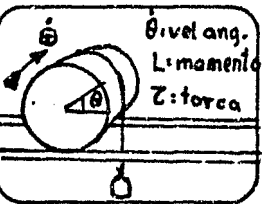
A.- Cuando mostramos interés en estos asuntos, descubrimos que corresponden a temas que no se cubren en los cursos introductorios de Física.

21



C.- Nos dijeron que involucran conceptos nuevos: torques, momentos de inercia y otras cosas parecidas.

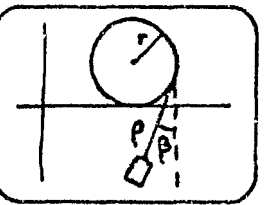
22



¿POR QUÉ LES GUSTÓ?

B.- El problema del cilindro contiene muchos de estos elementos. Es particularmente interesante porque no está resuelto en los libros y se puede realizar en el laboratorio.

23

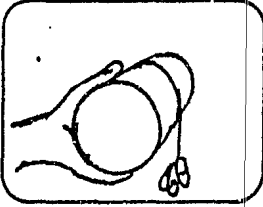


A.- Y aunque la solución teórica implica herramienta matemática complicada que no tenemos, la Física que conocemos es suficiente para explicarla... al menos eso creemos.



## PRUEBAS INICIALES

24



C.- Para comenzar lo hicimos con un cilindro y unos  
cables...

A.- Probamos con cilindros y tubos de distintos ta-  
maños y materiales... metálicos, de cartón, de made-

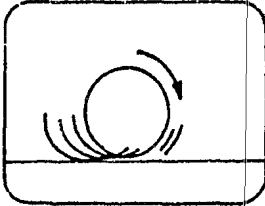
25



ra...

A.- Hicimos muchas ensayos... Aquí tenemos una mues-  
tra del equipo que utilizamos.

26



### EL PAPEL DE LA FRICCIÓN

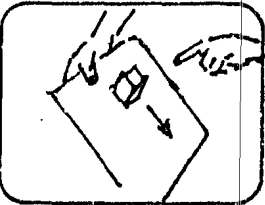
B.- Encontramos que en general el cilindro  
rueda, pero en ocasiones resbala o se desli-  
za sin rodar.

27



C.- Esto nos llevó a estudiar un poco acerca de la  
fricción, de que factores depende. Aprendimos a de-  
terminar coeficientes de fricción.

28



A.- Quizá lo más interesante fue descubrir que la  
idea común de que la fricción es una fuerza que se  
opone al movimiento, no siempre está muy clara.

29



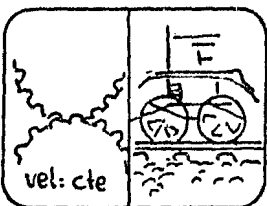
C.- En el caso de un objeto en movimiento, la fricción  
puede actuar hacia adelante...

30



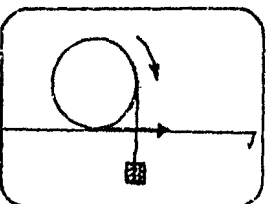
C.- .... O hacia atrás....

31



C.- .... o prácticamente no existir si se mueve con velocidad constante.

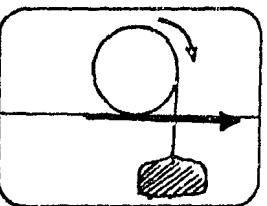
32



¿RUEDA O RESBALA?

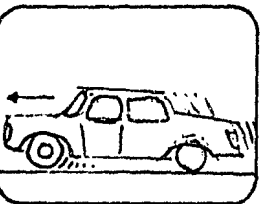
C.- Para nuestro cilindro en particular la fricción actúa hacia adelante; el cilindro empuja a los rieles hacia atrás y estos empujan al cilindro hacia el frente.

33



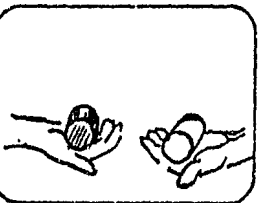
B.- Si la masa suspendida aumenta, el cilindro girará cada vez más rápido, hasta llegar un momento en que en lugar de rodar, resbala....

34



B.- .... Como le ocurre a un automóvil cuando se oprime a fondo el acelerador, sobre todo si las llantas están lisas.

35

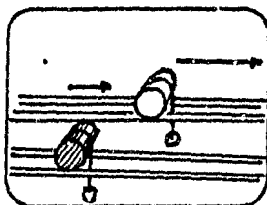


CILINDRO NEGRO Y DE MADERA

C.- Mientras hacemos pruebas con diferentes cilindros, obtuvimos un resultado interesante:

Aquí tenemos dos cilindros, uno negro y el otro de madera. Tienen el mismo diámetro y, como indica, en la balanza, la misma masa.

36



C.- Vamos a hacer una prueba con ellos:

A cada uno le colgamos pesas iguales y los soltamos en estos rieles.

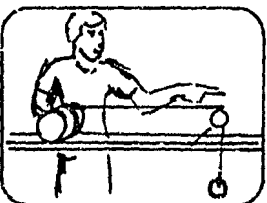
¡Listos... ¡Ahora!

37



C.- Fue bastante claro que el cilindro de madera llegó primero. ¿Cómo es posible? Para explicar lo ocurrido, podemos darles una pista: el negro es en realidad un tubo metálico, no un cilindro sólido.

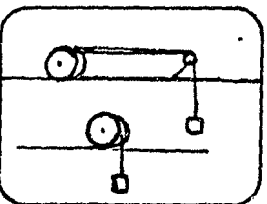
38



CILINDRO CON POLEA

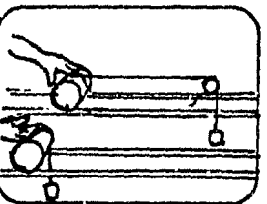
B.- Con el propósito de simplificar nuestro problema, empezamos a buscar problemas parecidos, pero más fáciles de resolver. Aquí tenemos un ejemplo: la pesa no cuelga directamente, sino a través de una polea.

39



C.- Este problema tiene muchas similitudes con el nuestro: la pesa suspendida, la fricción, la torca que hace girar al cilindro que también se mueve horizontalmente.

40

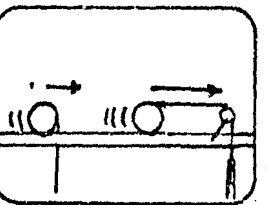


A.- Tal parece que los resultados deben ser los mismos. ¿Por qué no hacemos una prueba?

Aquí tenemos dos cilindros iguales y les hemos colgado pesas idénticas. Veamos que ocurre si los soltamos...

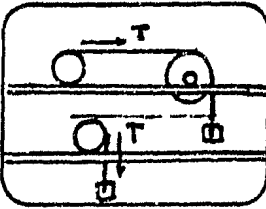
¡Ya!... Ganó el cilindro con polea

41



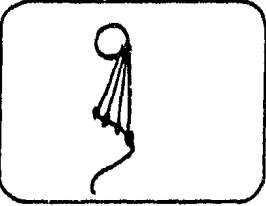
¿Qué ocurrió en este caso?

42



A.- Noten que la única diferencia es que la tensión sobre el cilindro con polea actúa horizontalmente y en nuestro problema es vertical. Allí debe hallarse la explicación.

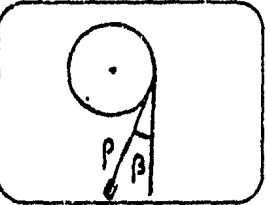
43



#### PENDULO QUE SE ALARGA

B.- Buscando por otros caminos encontramos otro problema parecido. En este caso el cilindro no rueda, sino que gira en torno de un eje que pasa por su centro. Aquí tenemos ya dispuesto el montaje. La pesa suspendida es libre de oscilar. Esto es en realidad

44



un yoyo invertido o un péndulo que se alarga.

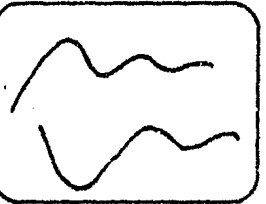
45

$$\frac{d^2\beta}{dp^2} + \frac{2}{p} \frac{d\beta}{dp} + \frac{g\beta}{pv^2} = 0$$

C.- En el caso particular de que la longitud aumente con velocidad constante, las ecuaciones resultantes son un poco complicadas y la solución está dada en términos de funciones de Bessel.

Parecidas a estas que obtuvimos experimentalmente.

46



Esto nos da idea de que nuestro problema no es tan sencillo.

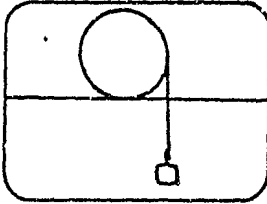
47



#### MOVIMIENTO DE LA PESA

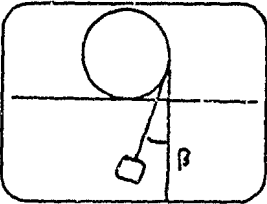
A.- volvamos ahora a nuestro problema original: sabemos que el cilindro rueda horizontalmente, pero ahora: ¿Qué sucede con la pesa? ¿Cómo es su movimiento?

48



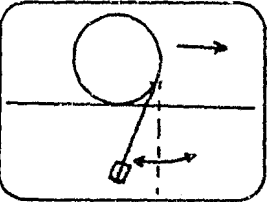
B.- Igual que el del cilindro, simplemente cae y en todo momento estará debajo del cilindro, como una bomba soltada por un avión.

49



C.- Yo supongo que la masa colgante "tarda en enterarse" del movimiento del cilindro, en consecuencia se queda atrás y el hilo debe formar un cierto ángulo respecto de la vertical.

50



A.- Estoy de acuerdo en que la masa debe quedarse, pero no creo que el ángulo sea fijo, debe estar variando.

51



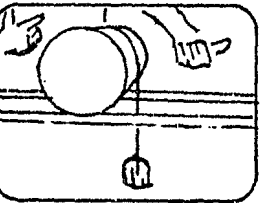
C.- Para salir de dudas, hagamos el experimento.

52



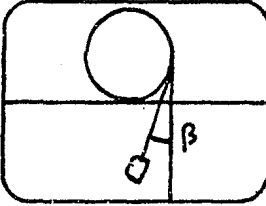
C.- Alcancé a notar que la pesa se quedaba, pero no fue posible distinguir si el ángulo variaba o no. Todo sucedió muy rápidamente...

53



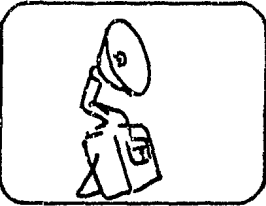
B.- Sería conveniente retardar el movimiento...  
Veámoslo....

54



B. - ¡Bién! Existe el ángulo, pero no sabemos su valor.  
Necesitamos determinaciones más precisas.

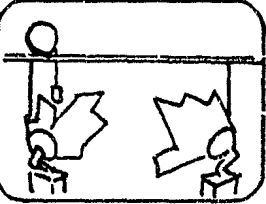
55



### LAMPARA ESTROBOSCOPICA

A. - Podemos averiguarlo con la fotografía (estroboscópica) de destello múltiple: esta lámpara emite luz a intervalos regulares de tiempo. Si usamos una cámara fotográfica con el obturador abierto, la película sólo registrará lo que ocurra cuando la lámpara esté encendida.

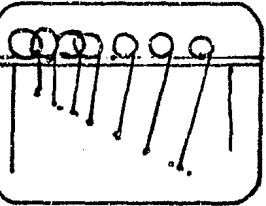
56



C. - Hemos dispuesto todo: la cámara fotográfica, las lámparas de destello, la plumada....

Estamos listos.... ¡Ahora!

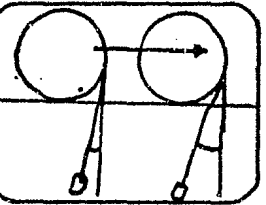
57



### FOTOGRAFÍA DE DESTELLO

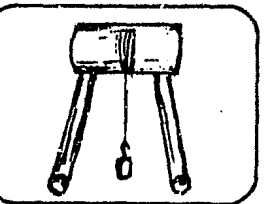
A. - Aquí tenemos el resultado (la plumada se colocó para tener una vertical de referencia para medir los ángulos). La lámpara tenía una frecuencia de 900 destellos por minuto.

58



Puede verse que el ángulo va aumentando y luego empieza a disminuir... ahora vuelve a crecer. Este es un movimiento bastante peculiar: un péndulo que aumenta su longitud y que además es arrastrado o algo así.

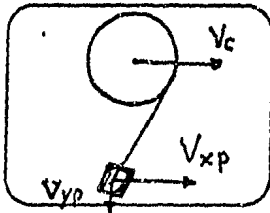
59



### EL MOVIMIENTO DEL CILINDRO

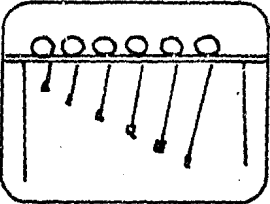
¿Qué sucede con el cilindro? En los ensayos realizados, independientemente del cilindro o de la pesa, despacio o rápido, la pesa se mueve oscilando en torno a una línea a 45°. En otras palabras, el movimiento del cilindro es paralelo al movimiento vertical de la pesa.

60



La solución aproximada del problema, suponiendo que la pesa oscila con ángulos pequeños, es bastante sencilla. Aquí tenemos los resultados: la velocidad del cilindro y la velocidad vertical de la pesa son iguales en primera aproximación. La velocidad horizontal es afectada por otros términos.

61

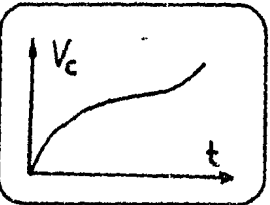


La velocidad horizontal de la pesa...

... la velocidad vertical de la pesa...

... y la velocidad del cilindro.

62



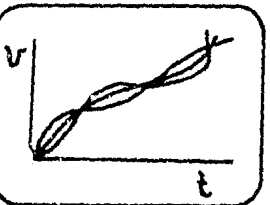
### GRÁFICAS V VS t

A partir del análisis de esta fotografía, se calcularon: la velocidad horizontal de la pesa...

... la velocidad vertical de la pesa...

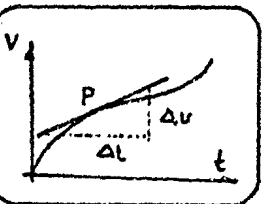
... y la velocidad del cilindro.

63



Dentro de la incertidumbre experimental, confirmamos que el cilindro tiene el mismo movimiento que la pesa verticalmente.

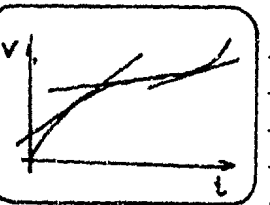
64



### GRÁFICAS a VS t

Examinemos con cuidado la gráfica: la velocidad está variando y en consecuencia el movimiento es acelerado. Recordemos que en una gráfica de la velocidad en función del tiempo, la aceleración en un punto P está representada por la pendiente de la tangente a

65



La curva en ese punto.

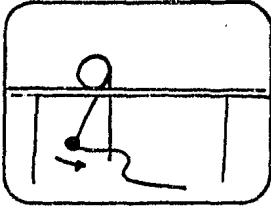
Aquí la aceleración disminuye... se hace mínima...

... aumenta... llega a un máximo... empieza a disminuir.

Con esta información podemos trazar la gráfica de la aceleración en función del tiempo.

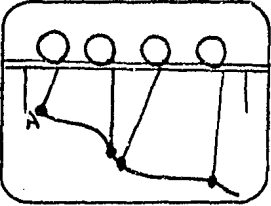
LA PESA COMO UN PENDULO QUE SE ALARGA

66



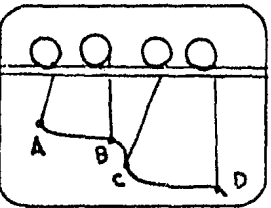
En este experimento a la pesa se le dió una oscilación inicial para acentuar la curvatura de la trayectoria de la pesa; se asemeja a una sucesión de eses que se alargan.

67



Los valles corresponden a los puntos de máximo atraso de la pesa respecto del cilindro y allí los ángulos son mayores. Las crestas indican el máximo adelantamiento de la pesa y los ángulos son mínimos.

68



Entre los puntos A y C la pesa ha completado una oscilación. Igual acontece entre C y E ó entre B y D. Recordemos que entre imágenes sucesivas el tiempo transcurrido es el mismo. Simplemente contando el número de imágenes se puede comprobar que conforme aumenta la longitud, el tiempo de la oscilación también aumenta.

69

$$\tau_{AB} = 22i$$

$$\tau_{CD} = 28i$$

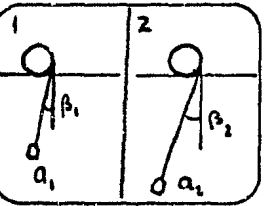
Resultado que está de acuerdo con el comportamiento de los péndulos normales: si la longitud crece, la oscilación se hace mas lenta.

70

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

RELACION ENTRE  $a_c$  Y  $B$

71



Tenemos aquí dos fotografías: en los dos casos el cilindro es el mismo, mientras que las pesas son diferentes. En la fotografía 2 el peso es mayor que en 1 y correspondientemente, la aceleración es mayor del lado derecho. Como puede verse, a mayor ace-



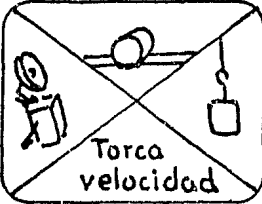
72

$$\beta_2 > \beta_1$$

$$a_2 > a_1$$

*La aceleración le corresponde mayor ángulo de atraso.*

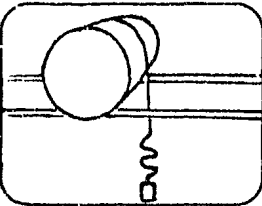
73



SINTESIS: LA DINAMICA DEL PROBLEMA

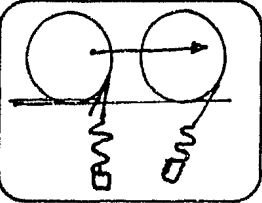
*Hemos realizado el análisis de las diversas partes del sistema y tenemos ahora elementos para explicar lo que ocurre:*

74



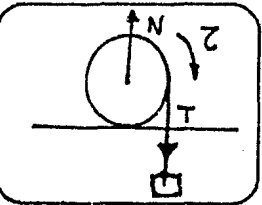
*Al principio la tensión es igual al peso suspendido....*

75



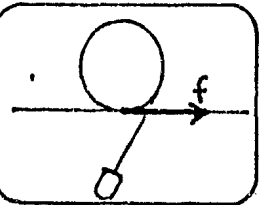
*Cuando el cilindro se suelta, la tensión disminuye bruscamente y la pesa empieza a caer....*

76



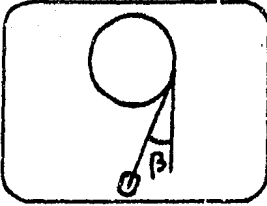
*...esta tensión jala al cilindro hacia abajo, los rieles impiden que caiga y la torca producida lo hace girar...*

77



*...la fricción evita que patine y hace que el cilindro empiece a rodar aceleradamente...*

78



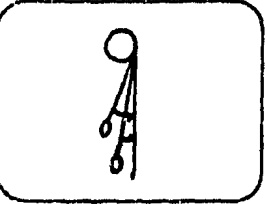
Debido a su inercia, la masa suspendida se queda atrás, formando el hilo un ángulo con la vertical, lo mismo que sucede con un objeto colgado dentro de un automóvil cuando éste acelera.

79



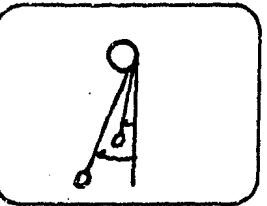
Como la pesa tiene una masa apreciable, al quedarse atrás actúa como un lastre para el cilindro, haciendo que se frene y que disminuya su velocidad...

80



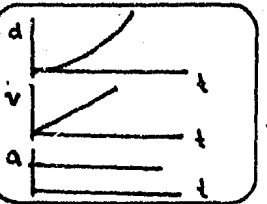
...la pesa tiende entonces a emparejarse con el cilindro aproximándose a la vertical...

81



...pero a medida que lo consigue, el jalón vertical sobre el cilindro aumenta haciendo que este incremente su aceleración y vuelva a adelantarse, comenzando de nuevo el ciclo...

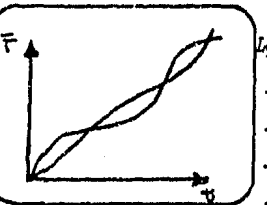
82



#### GRAFICAS DEL MOVIMIENTO (INTERPRETACION)

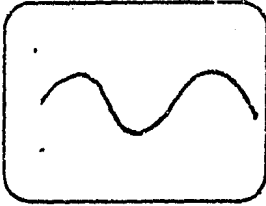
Si la pesa no oscilara, el movimiento del conjunto sería uniformemente acelerado y las gráficas del movimiento serían estas, bastante conocidas.

83



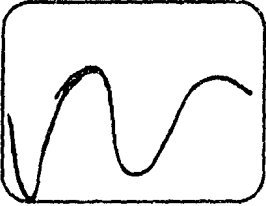
La acción mutua pesa-cilindro origina que la distancia, la velocidad, la aceleración y la fuerza oscilen sobre las curvas originales.

84



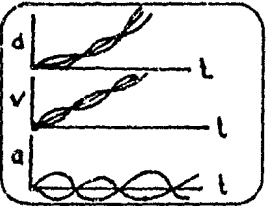
Pero estas oscilaciones son un tanto peculiares:  
no son de la familiar forma senoidal, sino curvas que  
se alargan y cambian su amplitud...

85



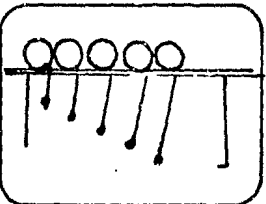
Como esta que genera la pesa al oscilar y alargarse  
y que recibe el nombre de función de Bessel.

86



De tal manera que las gráficas correspondientes a  
nuestro problema serían éstas.

87

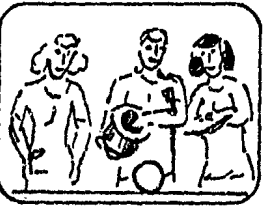


¿Qué sucede después de mucho tiempo?...

¿Cuál es la máxima aceleración de la pesa?...

¿Cómo se mueve el centro de masa?...

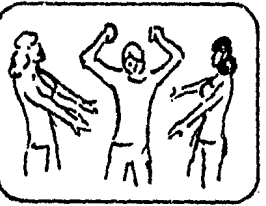
88



Hay muchas mas cosas que se pueden extraer...

hemos mostrado sólo algunas de ellas.... pensamos que  
tenamos un buen asunto entre manos y que valga la  
pena darlo a conocer.

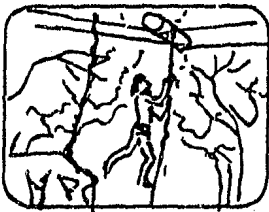
89



### LA MOTIVACION BIOLOGICA

¡ah! ¿y por qué nosotros, biólogos en un problema de Física?

Bien, en particular el problema nos interesó por lo  
siguiente:



Ocurre que un día Tarzán, el rey de la selva, medio dormido después de la siesta, se colgó de una liana enrollada en un tronco apoyado sobre otras dos lianas. - De aquí nació el problema y según parece el grito de TARZAN: ésta es la motivación biológica.

FIN

## VI. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

### VI.1 Sobre la realización del programa de video

No es mi intención hacer un recuento detallado de esta parte, sin duda la mas laboriosa y extensa de este trabajo. Algunos puntos, sin embargo, merecen destacarse:

El programa se realizó en las instalaciones del Centro Universitario para la Producción de Recursos Audiovisuales (CUPRA) donde, además del local (ver fig. VI.1.), equipo y personal especializado proporcionan la asesoría y la asistencia técnica a gentes que, como yo, desean producir programas partiendo prácticamente de cero.



Fig. VI.1. Durante la grabación del programa de video en CUPRA.

Durante un par de meses participé en un curso sobre la elaboración de programas de televisión: los secretos de una buena iluminación, el uso de las lentes, la diversidad de encuadres, la -- continuidad de las escenas, algunas características del lenguaje audiovisual, las técnicas elementales de animación, además de una valoración de los recursos disponibles y las limitaciones existentes.

El material y equipo utilizado en los experimentos tuvo que diseñarse en función de los requerimientos del video, desde pintar varillas hasta tomar fotografías en color de los experimentos realizados (ver figura VI.2.).

Una parte importante del programa se estructuró a base de --



Fig. VI.2. Arreglos previos al experimento del cilindro en el CEF.

gráficas, dibujos, animaciones y sobreimposiciones que pudieron lograrse gracias al apoyo de los diseñadores gráficos de CUPRA.

Para presentar el problema y explicarlo conté con la inapreciable colaboración de tres alumnos míos, estudiantes de Preparatoria. Fueron ocho semanas de estudios, ensayos y agotadoras sesiones de grabación.

Tal vez un detalle sirva para ilustrar la clase de cosas que se hicieron: en el programa se menciona a los gatos que cuando se sueltan en el aire regularmente caen parados. Conseguir la gatita (se llama Vanessa), esperar las condiciones propicias (es muy temperamental) hasta tener aproximadamente 10 minutos de grabación, nos llevó una semana de tiempo. La escena correspondiente

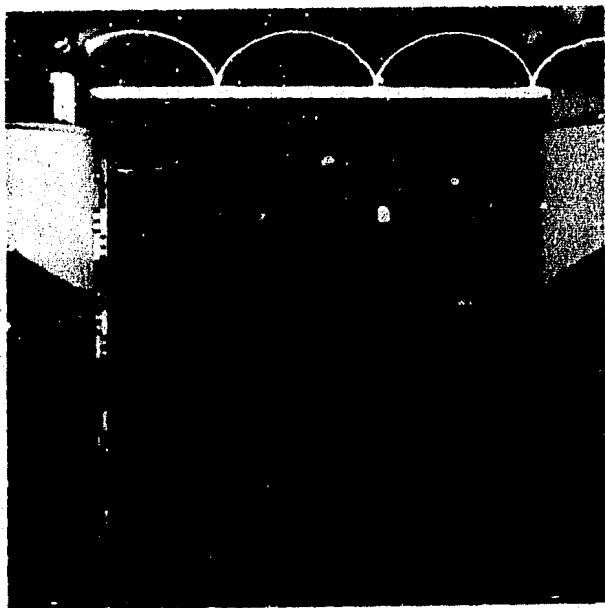


Fig. VI.3. Una fotografía usada en el programa: Al cilindro se le fijó un foco en el borde y a la pesa también se le colocó una fuente luminosa.

en el programa dura 7 segundos.

## VI.2. Conclusiones

Para empezar, un intento por situarme: el problema del cilindro me interesó porque no estaba resuelto en los libros y porque podía atacarse experimentalmente. Sé, por otro lado, que es un problema muy particular de escasa importancia por si mismo o dentro del marco amplio de la Mecánica. Contiene, sin embargo, algunos ingredientes que le confieren atractivo e interés. De esta manera, el audiovisual fue concebido de tal manera que resaltan los ángulos novedosos y que permitiera explicar el problema en forma clara y simple a estudiantes del último año del nivel medio superior.

Después de escuchar los comentarios de algunos estudiantes y profesores que conocen tanto el video como este material impreso, se obtienen en conclusión los siguientes puntos:

Contienen suficientes elementos de Mecánica para interesar a estudiantes de esta asignatura o de Física General, no tan sólo por el problema central, sino también por su evidente conexión con otros problemas parecidos.

Plantea algunas situaciones que no están resueltas y que podrían ser el punto de partida de algunos experimentos (la aceleración del cilindro mayor que  $g$ , el movimiento sin oscilación del conjunto, la generación de funciones de Bessel, etc.).



La obtención de las ecuaciones de movimiento por dos métodos distintos permite comparar la contundencia y efectividad de la -- formulación de Lagrange con el camino largo pero mas accesible de las leyes de Newton.

Contribuye a perderle el miedo a las ecuaciones diferenciales complicadas: los programas para resolverlas están al alcance de los estudiantes desde los primeros semestres de Facultad.

No se han realizado evaluaciones con estudiantes de nivel me dio superior para determinar en que medida se consigue el objetivo central.

En el marco general de los audiovisuales destinados a la enseñanza, es un hecho que estos recursos se usan muy poco en la -- educación y en la enseñanza de la Física todo está por hacerse. En este sentido el programa de video es sólo una muestra, una exploración de las posibilidades que este medio ofrece.

Mi participación directa en todas y cada una de las fases de la realización del video me ha permitido valorar la preparación -- previa y el trabajo de equipo que hay detrás de este tipo de programas. Producir material didáctico adecuado a nuestras necesida des es todo un desafío y mas que recursos económicos o equipo -- complicado se requiere de ideas y de mucho trabajo

## LISTA DE REFERENCIAS

1. Mesherski, I. Problemas de Mecánica Teórica. Editorial MIR. Moscú. 1974. (pág. 396)
2. Shaw, D.E. Frictional Force on Rolling Objects. American -- Journal of Physics. Octubre 1979.
3. Kittel, Ch. Knight, W. Mecánica. Berkeley Physics Course. - Volumen I. Editorial Reverté. Barcelona. 1968. (pág. 76)
4. Mesherski, I. Problemas de Mecánica Teórica. Editorial MIR. Moscú. 1974 (pág. 463)
5. Wells, D.A. Theory and Problems of Lagrangian Dynamics (Schaum's Outline Series). McGraw-Hill Book Company. Nueva York. 1967 (pág. 55).
6. Relton, F.E. Applied Bessel Functions. Blackie and Son Limited. London. 1946. (cap. III).
7. Bachvalov, Nikolaj S. Metodo Numerici. Edizione Mir. Moscú. 1980. Parte tercera
8. Feynman, R. Leighton, R. Sands, M. Física. Volumen I. Fondo Educativo Interamericano S.A. México. 1971. (capítulo 9)