Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

FENOMENOS DE PROPAGACION DE ONDAS EN FISICA CLASICA

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

P r e s e n t a

JOSE ALEJANDRO DOMINGUEZ TORRES

Dir. de Tesis: Dr. RICARDO ALBERTO WEDER

México, D. F. 1984

C O N T E N I D O

1.- Generalidades. (c. ref. [43]).

Los fenómenos de propagación de ondas en Física Clásica siempre tienden a estudiarse de manera individual, como tal es el caso de ondas electromagnéticas, ondas acústicas, ondas sísmicas, etc. Estos fenómenos de propagación pueden ser estudiados de una manera unificada si las ecuaciones que gobiernan a cada fenómeno de propagación se pueden escribir en una única ecuación. Esta ecuación tiene que ser 'a fortiori' una ecuación diferencial parcial en forma matricial.

La ecuación general que se sugiere para hacer una descripción, y una discusión, de una manera global es

$$E(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

En esta ecuación $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$(tiempo), $u=u(x,t)$ es una matriz columna real[1)] de $m\times 1$ que describe los estados del medio en la posición x al tiempo t, y $E(x)$, A^1, $A^2,\ldots$, A^n son matrices de $m\times m$ con las siguientes propiedades:

i) $E(x)$ es real, simétrica, positiva definida y tal que existen

---

[1)] En el caso general es a valores complejos, pero en el caso físico es a valores reales.

constantes c_1, c_2 con la propiedad de que

$$c_1 I \leq E(x) \leq c_2 I,$$

donde I es la matriz identidad.

ii) A^1, A^2, ..., A^n son reales, simétricas y constantes.

La matriz $E(x)$ define una forma cuadrática

$$N = uE(x)u, \tag{1.2}$$

que es interpretada como la densidad de energía (energía por -- unidad de volumen) en las aplicaciones. Las matrices A^j definen - las formas cuadráticas

$$\Sigma_j = -uA^j u, \tag{1.3}$$

que son interpretadas como las componentes del vector de Poyn--- ting, que describe el flujo de energía (energía por unidad de á- rea por unidad de tiempo). Las soluciones de (1.1) satisfacen -- una ley de conservación de la energía, que en su forma diferenci al es

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Sigma_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.4}$$

La integración de (1.4) sobre $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$ da la ley de conserva- ción de la energía en su forma integral (si la integral de super ficie para $\frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_j}$ tiende a cero):

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, E(x)\, u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,0)\, E(x)\, u(x,0)\, dx \tag{1.5}$$

Las soluciones de la ecuación (1.1) son determinadas de manera única por sus valores iniciales:

$$u(x,0)=f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

Las solución u(x,t) del problema de valores iniciales (1.1), (1.6) describe la propagación de ondas en un medio cuyos estados son gobernados por (1.1), y cuyos estados iniciales están descritos por f(x); por lo que el problema de valores iniciales (1.1), (1.6) es llamado el problema de propagación de (1.1).

Si $E(x)=E^0$ es una constante, el medio gobernado por (1.1) es homogéneo. En este caso la solución del problema de propagación puede ser construido por el método de la Transformada de Fourier, el método de ondas planas y otros métodos.([10])

Si E(x) es no constante, el medio gobernado por (1.1) es inhomogéneo. Existe una gran literatura concerniente a la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones del problema de valores iniciales que es aplicable en este caso; sin embargo, métodos explicitos de la construcción de la solución comparables al método de la Transformada de Fourier, para medios homogéneos, no son aprovechables para medios inhomogéneos.

Esta tésis está enfocada al problema de propagación para medios inhomogéneos que son 'homogéneos en ∞', en el sentido de que

$$\lim_{|x|\to\infty} E(x)=E^0 \tag{1.7}$$

existe. Si el estado inicial f(x) tiene energía finita, entonces la intuición física sugiere que la energía tienda a $\pm\infty$ cuando $t\to\pm\infty$. Por consiguiente si (1.7) se cumple, para tiempos grandes muchas ondas estarán en la región $|x|>R$, donde $E(x)$ es casí constante. Esto sugiere que $u(x,t)$ puede tender asintóticamente, cuando $t\to\pm\infty$, a una onda que se propaga en un medio homogéneo caracterizado por E^0; i.e.

$$u(x,t)\sim u^0(x,t); \quad t\to\infty. \tag{1.8}$$

Posteriormente daremos una definición précisa del sentido en que (1.8) es válida. (secciones 6 y 7)

La onda $u^0(x,t)$ es solución de

$$E^0\frac{\partial u^0}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} A^j\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\cdot \tag{1.9}$$

con valores iniciales

$$u^0(x,0)=f^0(x); \quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1.10}$$

A dicha onda se le llama 'solución asintótica' del problema de propagación (1.1), (1.6). Más adelante se discutirá con detalle la existencia de soluciones asintóticas. (secciones 6 y 7)

Ya que la matriz $E(x)$ es real, simétrica (entonces Hermitiana) y positiva definida se tiene que $f(x)E(x)f(x)$ es un número positivo definido. Como $E(x)$ es positiva definida, la ecuación $E(x)f(x)=\lambda f(x)$, donde λ son los eigenvalores de $E(x)$, conduce a la ecuación

$$0<f(x)E(x)f(x)=f(x)\lambda f(x). \tag{1.11}$$

Por otro lado, de la propiedad (i) y de $E(x)f(x)=\lambda f(x)$, se tiene que

$$c_1 If(x) \leq \lambda f(x) \leq c_2 If(x),$$

y como esta relación es válida para cualquier $f(x)=u(x,0)$, se -- concluye que

$$c_1 \leq \lambda \leq c_2. \qquad (1.12)$$

Haciendo coincidir a $c_1=\lambda'$ y $c_2=\lambda''$, el mínimo y el máximo de los eigenvalores de $E(x)$ respectivamente, entonces (1.11) y (1.12) - implicaran que

$$f(x)\lambda' f(x) \leq f(x)E(x)f(x) \leq f(x)\lambda'' f(x). \qquad (1.13)$$

Si $f(x) \in L_2^m = \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx < \infty;\ x \in \mathbb{R}^n \right\}$, el espacio - de las funciones medibles de cuadrado integrable con m componentes, de (1.13) se tiene que

$$\lambda' \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)E(x)f(x) \, dx \leq \lambda'' \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx < \infty. \qquad (1.13a)$$

Lo cual significa que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)E(x)f(x) \, dx$ es equivalente a la norma en L_2^m, dada por $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$.

La discusión anterior sugiere definir una norma para los valores iniciales $f(x)$ como

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)E(x)f(x)dx, \qquad (1.14)$$

la cual es equivalente, por (1.13a), a la norma en L_2^m. Entoces, el espacio de valores iniciales con energía finita es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con respecto a esta norma.

La correspondencia $f \to u(\cdot,t)$ define una transformación lineal $U(t)$ que es una isometría (con respecto a la norma (1.14)) por la ley de conservación de la energía (1.5). En efecto, como se mostrará después, $U(t)$ define un grupo monoparamétrico de operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$.

De manera análoga que para $E(x)$, E^0 define una norma:

$$\|f^0\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f^0(x)E^0(x)f^0(x)dx, \tag{1.15}$$

que en general es diferente de (1.14) pero que es equivalente a ésta. El espacio de valores iniciales f^0 con energía finita es - un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$ con respecto a la norma (1.15).

En esta tésis las formas de energía basadas en $E(x)$ y E^0 — son supuestas como equivalentes:

$$c^2 \xi E^0 \xi \leq \xi E(x) \xi \leq c'^2 \xi E^0 \xi, \tag{1.16}$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y $\xi \in \mathbb{R}^m$, donde c y c' son constantes positivas.

Bajo la hipótesis (1.16), las normas (1.14) y (1.15) son - equivalentes; i.e.

$$c \|f\|_0 \leq \|f\| \leq c' \|f\|_0 \tag{1.17}$$

Entonces $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ son los mismos espacios lineales de valores iniciales, y son espacios de Hilbert con respecto a dos diferentes, -

pero equivalentes, normas.

Si $u(x,t)$ y $u^{o}(x,t)$ son soluciones con energía finita de (1.1) y (1.9) respectivamente, entonces $u(x,t)-u^{o}(x,t)$ está en $\mathcal{H}$, y también en $\mathcal{H}_o$, por (1.17). Como se mostrará más adelante, esta diferencia tiende a cero en $\mathcal{H}$ (y equivalentemente en $\mathcal{H}_o$) cuando $t \to \pm\infty$,

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left\| u(\cdot,t)-u^{o}(\cdot,t) \right\| = 0, \tag{1.18}$$

suponiendo que los valores iniciales f y f^{o} están relacionados por un <u>operador de onda apropiado</u>.

2.- Formulación del Problema de Propagación de Ondas Sobre Espacios de Hilbert. (c. ref. [43]).

En esta sección se dará una formulación precisa del problema de propagación

$$E(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^{j}\frac{\partial u}{\partial x_j} \quad , \quad x\in\mathbb{R}^n \quad , \quad t>0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=f(x); \quad x\in\mathbb{R}^n , \tag{2.2}$$

además serán discutidas la existencia y propiedades de la solución. Para la construcción de tal formulación se hará uso de algunos teoremas y definiciones referentes a operadores autoadjuntos y unitarios en un espacio de Hilbert.

Sea U(t) un operador sobre un espacio de Hilbert, tal que:

i) para cada $t\in\mathbb{R}$, U(t) es un operador unitario y U(t+s)=U(t)U(s) para cada $s,t\in\mathbb{R}$;

ii) si g es un elemento del espacio de Hilbert y $t\longrightarrow t_0$, entonces $U(t)g\longrightarrow U(t_0)g$.

Un operador U(t) que satisface (i) y (ii) define un grupo monoparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert.

Si U(t) define un grupo monoparamétrico de operadores unita rios sobre un espacio de Hilbert, entonces por el teorema de Stone ([2]) existe un operador autoadjunto H, definido sobre el espacio de Hilbert, tal que

$$U(t)=\exp(-itH). \tag{2.3}$$

Inversamente, todo operador autoadjunto H, sobre un espacio de Hilbert, genera un grupo monoparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios sobre el mismo espacio.

Si (2.3) define un operador solución para (2.1),(2.2) entonces H es formalmente el operador

$$i\,E(x)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j}\;. \tag{2.4}$$

La solución del problema de propagación es definida por la construcción de una extensión autoadjunta H del operador diferencial (2.4), entonces el operador solución estará definido por (2.3). La construcción se dará primero para el caso del medio homogéneo ($E(x)=E^0$).

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$E^0\frac{\partial u^0}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u^0}{\partial x_j},$$

que describe a un medio honogéneo, puede ser escrito como

$$\frac{\partial u^0}{\partial t}=(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u^0}{\partial x_j}=-i\,H_0 u \tag{2.5}$$

donde

$$H_0=i\,(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.6}$$

El factor $i=\sqrt{-1}$ tiene que ser introducido para hacer a H_0 formalmente un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}_0$; ya que así se puede trabajar con valores iniciales a valores complejos $u^0(x,0)=f^0(x)$ y soluciones $u^0(x,t)$. Por supuesto, estas soluciones incluyen todas las soluciones reales, las cuales corresponden a valores iniciales reales, por que E^0 y las A^j son reales.

Como se señalo en la sección anterior, la matriz E^0 es supuesta real y simétrica (por lo tanto Hermitiana) y positiva definida. Si se hace una construcción análoga a la que se siguio para encontrar (1.13); se tiene que si $z\in\mathbb{C}^m=\left\{ z=(z_1,z_2,\ldots z_m)/ z_\alpha \text{ complejo}\right\}$, $\bar{z}=(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_m)$ es el vector complejo conjugado de z y λ', λ'' son el más pequeño y el más grande eigenvalores de E^0 respectivamente,

$$\lambda'\sum_{\alpha=1}^{m}|z_\alpha|^2 \leq z E^0 \bar{z} \leq \lambda''\sum_{\alpha=1}^{m}|z_\alpha|^2. \tag{2.7}$$

La relación (2.7) implica que

$$\lambda'\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\alpha=1}^{m}|f_\alpha(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) E^0 \overline{f(x)}\, dx \leq \lambda''\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\alpha=1}^{m}|f_\alpha(x)|^2 dx, \tag{2.8}$$

para cada vector $f(x)=f^1(x)+if^2(x)$ Lebesgue medible. Si la energía, para medios homogéneos, de tales vectores se define por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) E^0 \overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^1(x) E^0 f^1(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) E^0 f^2(x)\, dx,$$

entonces (2.8) implica que f(x) tiene energía finita si y sólo - si, para cada α =1,2,...,m $f_\alpha \in L_2(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones - Lebesgue medibles a valores complejos de cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}^n$.

Entonces la suma directa

$$L_0=L_2(\mathbb{R}^n)\oplus \ldots \oplus L_2(\mathbb{R}^n); \text{ m sumandos,}$$

es el espacio lineal apropiado de los valores iniciales con energía finita para (2.5). El espacio lineal L_0 con el producto interno

$$(f,g)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)E^0\overline{g(x)}dx \qquad (2.9)$$

es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$.

Se mostrará, ahora, que el operador diferencial (2.6) tiene una extensión, que es autoadjunta, con respecto al producto interno (2.9) sobre $\mathcal{H}_0$. Para tal construcción se hace uso de la teoría de Plancherel de la Transformada de Fourier.([6])

Si $\varphi(x)\in L_2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\hat{\varphi}(p) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x|\le R} e^{ip\cdot x}\varphi(x)\,dx$$

existe en $L_2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\varphi(x) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|p|\le R} e^{-ip\cdot x}\hat{\varphi}(p)\,dp.$$

Aquí $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}^n$, $p\cdot x=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$, y l.i.m. significa convergencia en $L_2(\mathbb{R}^n)$. Si φ y ψ están en $L_2(\mathbb{R}^n)$, entonces satisfacen la fórmula de Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}(p)\,\overline{\hat{\psi}(p)}\,dp \tag{2.10}$$

i.e. la transformada de Fourier define una transformación unitaria de $L_2(\mathbb{R}^n)$ sobre si mismo.

La transformada de Fourier de una función $f\in\mathcal{H}_0$ está definida por

$$\hat{f}(p)=(\hat{f}_1(p),\hat{f}_2(p),\ldots,\hat{f}_m(p)).$$

Se sigue de esta definición y de (2.10) que

$$(f,g)_0=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)E^0\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(p)E^0\overline{\hat{g}(p)}dp=(\hat{f},\hat{g})_0, \tag{2.11}$$

para toda $f,g\in\mathcal{H}_0$. Entonces la transformada de Fourier también define una tranformación unitaria de $\mathcal{H}_0$ sobre si mismo.

Si $\varphi(x)$ y $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}$ están en $L_2(\mathbb{R}^n)$, se sigue que

$$\left(\widehat{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}}\right)(p)=-ip_j\hat{\varphi}(p)$$

Entonces, si $f(x)$ y $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ están en $\mathcal{H}_0$, para cada $j=1,2,\ldots,n$; se sigue que

$$(H_0f)(x)=i(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n}A^j\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$$

está en $\mathcal{H}_0$ y tiene como transformada de Fourier

$$\widehat{(H_0 f)}(p) = (E^0)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j \right) \hat{f}(p)$$

Esta sugiere el siguiente teorema.

Teorema 2.1. El operador H_0 sobre $\mathcal{H}_0$ con dominio

$$D(H_0) = \left\{ f/ \ \widehat{f(p)} \ \text{y} \ \sum_{j=1}^{n} A^j p_j \widehat{f(p)} \ \text{están en} \ \mathcal{H}_0 \right\}$$

y rango definido por

$$(H_0 f)(x) = \underset{R \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|p| \leq R} e^{-ip\cdot x} (E^0)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^j p_j \widehat{f(p)} dp \qquad (2.12)$$

es un operador autoadjunto con respecto al producto interno (2.9).

Demostración. La teoría de Plancherel implica que (2.12) define un vector $H_0 f \in \mathcal{H}_0$ para cada $f \in D(H_0)$. Si se demuestra que $D(H_0)$ es denso en $\mathcal{H}_0$, entonces el operador adjunto H_0^* está bien definido.

Ya que el espacio de Schwartz[1)] está contenido en $D(H_0)$, se tiene que $D(H_0)$ es denso en $\mathcal{H}_0$. La demostración quedará completa si se muestra que $H_0 \subset H_0^*$ (H_0^* es una extensión de H_0) y $H_0^* \subset H_0$, de donde $H_0 = H_0^*$.

Primero provemos que $H_0 \subset H_0^*$. Sea $f, g \in D(H_0)$, entonces por —
(2.11)

---
1) El espacio de las funciones continuas de soporte compacto infinitamente diferenciables.

$$(H_0 f, g)_0 = (\widehat{H_0 f}, \hat{g})_0 = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{H_0 f})(p) E^0 \overline{\hat{g}(p)}\, dp.$$

Además

$$(\widehat{H_0 f})(p) = \left[(E^0)^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j \Big) \hat{f}(p) \right] = \hat{f}(p) \Big(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j \Big) (E^0)^{-1};$$

entonces

$$(H_0 f, g)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) E^0 \overline{(E^0)^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j \Big) \hat{g}(p)}\, dp = (\hat{f}, \widehat{H_0 g})_0 = (f, H_0 g)_0.$$

Esto muestra que si $g \in D(H_0)$, entonces $g \in D(H_0^*)$ y $H_0^* g = H_0 g$; i.e. $H_0 \subset H_0^*$.

Probemos, ahora, que $H_0^* \subset H_0$. Sea $g \in D(H_0^*)$; i.e. $g \in \mathcal{H}_0$ y

$$(H_0 f, g) = (f, \theta), \text{ para algún vector } \theta \in \mathcal{H}_0 \text{ y todo } f \in D(H_0). \quad (2.13)$$

El vector θ es, por definición, igual a $H_0^* g$. Las ecuaciones (2.11) y (2.13) implican

$$(H_0 f, g)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) \overline{\Big(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j \Big) \hat{g}(p)}\, dp = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) \overline{E^0 \hat{\theta}(p)}\, dp = (f, \theta)_0,$$

para todo $f \in D(H_0)$. Pero $D(H_0)$ es denso en $\mathcal{H}_0$, de donde

$$(E^0)^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j \Big) \hat{g}(p) = \theta(p) \in \mathcal{H}_0 .$$

Entonces $g \in D(H_0)$ y

$$(H_0 g)(x) = \underset{R \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|p|<R} e^{ip\cdot x} \, (E^0)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^j p_j \, \hat{g}(p)\, dp, \text{ en } \mathcal{H}_0 .$$

Esto demuestra que si $g \in D(H_0^*)$, entonces $g \in D(H_0)$ y $H_0 g = \theta = H_0^* g$; i.e. $H_0^* \subset H_0$. Q . E . D .

Hagamos una discusión análoga a la anterior para el problema de propagación para un medio inhomogéneo gobernado por (2.1).

El sistema (2.1) puede ser escrito como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E(x)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^{j}\frac{\partial u}{\partial x_j} = -iHu \qquad .(2.14)$$

donde

$$H = i\,E(x)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^{j}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (2.15)$$

Se mostrará que el operador H tiene una extensión que es autoadjunta con respecto al producto interno

$$(f,g)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)E(x)\overline{g(x)}dx. \qquad (2.16)$$

La relación (1.16) nos dice que las formas de energía basadas en $E(x)$ y E^{o} son supuestas como equivalentes; ésto implica que

$$c^2 zE^{o}\bar{z} \leq zE(x)\bar{z} \leq c'^2 zE^{o}\bar{z};\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n y\ \ z\in\mathbb{C}^m.$$

Combinando este resultado con (2.7) se tiene

$$\mu^2\sum_{\alpha=1}^{m}|z_\alpha|^2 \leq z\,E(x)\,\bar{z} \leq \mu'^2\sum_{\alpha=1}^{m}|z_\alpha|^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^n \text{ y } z\in\mathbb{C}^m \qquad (2.17)$$

donde $\mu^2 = c^2\lambda'$ y $\mu'^2 = c'^2\lambda''$

Lema 2.1. Si $E(x)$ es una matriz real, simétrica y positiva definida que satisface (2.17), con constantes positivas μ, μ'; entonces

$$\frac{1}{\mu'^2}\sum_{\alpha=1}^{m}|z_\alpha|^2 \leq z\,E^{-1}(x)\,\bar{z} \leq \frac{1}{\mu^2}\sum_{\alpha=1}^{m}|z_\alpha|^2,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n \text{ y } z\in\mathbb{C}^m. \qquad (2.18)$$

Demostración. (2.17) es equivalente a la afirmación de que los -- eigenvalores (reales positivos) de $E(x)$ están entre μ y μ';. (2.18) se sigue inmediatamente puesto que los eigenvalores de $E^{-1}(x)$ son los reciprocos de los eigenvalores de $E(x)$. Q . E . D .

Si se supone que las componentes $E_{\alpha\beta}(x)$ de $E(x)$ son funciones Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^n$, se sigue de (2.17) que

$$\mu^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha=1}^{m} |f_\alpha(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) E(x) \overline{f(x)} dx \leq \mu'^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha=1}^{m} |f_\alpha(x)|^2 dx., \quad (2.19)$$

para cada vector complejo medible $f(x)$. Entonces, si la energía, para medios inhomogéneos, de tales vectores está definida por

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)E(x)\overline{f(x)}dx,$$

se sigue que $f(x)$ tiene energía finita si y sólo si, como se dijo anteriormente, $f_\alpha \in L_2(\mathbb{R}^n)$; $\alpha = 1,2,\dots,m$. Entonces L_0 es, también, - el espacio lineal apropiado de valores iniciales con energía finita para (2.14). El espacio L_0 con producto interno (2.16) es un - espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Para mostrar que el operador diferencial (2.15) tiene una extensión , que es autoadjunta con respecto al producto interno -- (2.16) sobre $\mathcal{H}$, hay que hacer notar que formalmente

$$H = i E(x)^{-1} E^0 (E^0)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j} = E(x)^{-1} E^0 H_0 .$$

Teorema 2.2. El operador H sobre $\mathcal{H}$ con dominio $D(H)=D(H_0)$ y rango definido por

$$(Hf)(x)=E^{-1}(x)E^{0}(H_0f)(x) \tag{2.20}$$

es un operador autoadjunto con respecto al producto interno (2.16).

Demostración. La demostración está dividida en dos partes. La primera parte consiste en mostrar que (2.20) define un mapeo de $D(H_0)$ en $\mathcal{H}$. La segunda parte es mostrar que H es autoadjunto.

Para mostrar que (2.20) define un mapeo de $D(H_0)$ en $\mathcal{H}$, hay que notar que, para cada $f\in D(H_0)$, $H_0f\in\mathcal{H}$ y entonces $g=E^{0}(H_0f)\in\mathcal{H}$. Por otro lado, del Lema 2.1 con

$$z=g(x), \qquad E^{-1}(x)z=E^{-1}(x)g(x)=\theta(x)$$

se tiene

$$\frac{1}{\mu'^2}\sum_{\alpha=1}^{m}|g_\alpha(x)|^2 \le \theta E(x)\theta \le \frac{1}{\mu^2}\sum_{\alpha=1}^{m}|g_\alpha(x)|^2,$$

de donde

$$\theta(x)E(x)\theta(x)\in L_2(\mathbb{R}^n), \tag{2.21}$$

puesto que $f\in\mathcal{H}$. De (2.19), reemplazando f por θ, y de (2.21) se tiene que

$$\theta(x)=E^{-1}(x)g(x)=E^{-1}(x)E^{0}(H_0f)(x)\in\mathcal{H} \quad ,$$

i.e. H mapea $D(H)=D(H_0)$ en $\mathcal{H}$.

La demostración del teorema quedará completa si se demuestra que $H\subset H^{*}$ y $H^{*}\subset H$, de donde $H=H^{*}$. Primero notemos que, si f y g están en $\mathcal{H}$

$$(f,g)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)E(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)E^0\overline{(E^0)^{-1}E(x)g(x)}dx=(f,(E^0)^{-1}Eg)_0. \quad (2.22)$$

En particular, si $f\in D(H)$, $g\in \mathcal{H}$, entonces de (2.22) se tiene

$$(Hf,g)=\overline{(g,Hf)}=\overline{(g,(E^0)^{-1}EHf)_0}=\overline{(g,H_0f)_0}=(H_0f,g)_0. \quad (2.23)$$

Para probar que $H\subset H^*$, sean $f,g\in D(H)=D(H_0)$. Entonces, por (2.23) y debido a que H_0 es autoadjunto,

$(Hf,g)=(H_0f,g)_0=(f,H_0g)_0=\overline{(H_0g,f)_0}=\overline{(Hg,f)}=(f,Hg)$.

Entonces $g\in D(H^*)$ y $H^*g=Hg$; i.e. $H\subset H^*$.

Para probar que $H^*\subset H$, sea $g\in D(H^*)$;i.e.$g\in\mathcal{H}$,$(Hf,g)=(f,\theta)$, para algún $\theta\in\mathcal{H}$ y $\forall f\in D(H)$. (2.24)

El vector $\theta=H^*g$, por definición. Las ecuaciones (2.22) y --- (2.23) aplicadas a (2.24) dan

$$(H_0f,g)_0=(f,(E^0)^{-1}E\theta)_0, \quad \forall f\in D(H)=D(H_0).$$

Dado que H_0es autoadjunto, ésto implica que $g\in D(H_0^*)=D(H_0)=$ D(H) y

$$H_0^*g=Hg=(E^0)^{-1}E\theta=(E^0)^{-1}EH^*g.$$

Así

$$H^*g=E^{-1}E^0(H_0g)=Hg;$$

i.e. $H^*\subset H$. Con lo cual se concluye que $H=H^*$. Q . E . D .

El Teorema Espectral ([28]) implica que los operadores autoadjuntos H_0 y H tienen resoluciones espectrales

$$H_0=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_0(\lambda), \qquad H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda);$$

donde $E_0(\lambda)$ y $E(\lambda)$ son las resoluciones de la identidad para H_0 y H, respectivamente.

El operador solución para el problema de propagación está definido por

$$U_0(t)=e^{-itH_0}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}dE_0(\lambda), \tag{2.25}$$

para medios homogéneos, y por

$$U(t)=e^{-itH}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}dE(\lambda), \tag{2.26}$$

para medios inhomogéneos. Así

$$u^0(x,t)=(U_0(t)f^0)(x)$$

$$u(x,t)=(U(t)f)(x)$$

son interpretadas como las soluciones al problema de propagación para medios homogéneos e inhomogéneos, respectivamente.

Definición 2.1. La clase de funciones sobre $-\infty<t<\infty$ con valores en $\mathcal{H}_0$ ó en $\mathcal{H}$ que son continuas junto con sus derivadas de orden $k=1,2,\ldots,m$ son denotadas $C^m(-\infty,\infty;\mathcal{H}_0)$ ó $C^m(-\infty,\infty;\mathcal{H})$.

Las siguientes propiedades de las soluciones se siguen directamente de (2.25),(2.26) y del Teorema Espectral.

Corolario 2.1. (a) $U_0(t)$ y $U(t)$ definen grupos monoparamétricos de operadores unitarios fuertemente continuos sobre $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$, respectivamente. En particular, las siguientes leyes de conservación de energía se cumplen:

$$\|u^0(\cdot,t)\|_0=\|f\|_0 \text{ y } \|u(\cdot,t)\|=\|f\| \;;\forall\; t\in\mathbb{R}.$$

b) $u^0(\cdot,t) \in C(-\infty,\infty;\mathcal{H}_0)$ y $u(\cdot,t) \in C(-\infty,\infty;\mathcal{H})$; i.e. para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\tau \to 0} \|u^0(\cdot,t+\tau)-u^0(\cdot,t)\|_0=0 \quad \text{y} \quad \lim_{\tau \to 0} \|u(\cdot,t+\tau)-u(\cdot,t)\| =0$$

c) Si $f^0 \in D(H_0)$, entonces $u^0(\cdot,t) \in D(H_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, $u^0(\cdot,t) \in C^1(-\infty,\infty,\mathcal{H}_0)$, y

$$\frac{\partial u^0(\cdot,t)}{\partial t} = -i H_0 u^0(\cdot,t), \qquad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

La correspondiente afirmación se cumple para $u(\cdot,t)$.

Demostración. (a)y(b) se siguen inmediatamente: puesto que H_0 y H son operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$, respectivamente; entonces - por el teorema de Stone ([23]), $U_0(t)=e^{-itH_0}$ y $U(t)=e^{-itH}$ generan, cada uno, un grupo monoparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios sobre $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$, respectivamente.

Para la demostración de (c) se utilizan los siguientes hechos. Si $\varphi(\lambda)$ es una función continua a valores complejos, definida para $-\infty<\lambda<\infty$ y $E^0(\lambda)$ es la resolución de la identidad correspondiente a H_0, entonces $\varphi(H_0)$ es el operador con dominio

$$D(\varphi(H_0))=\left\{f^0 / \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 \, d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2<\infty\right\}$$

definido por

$$\varphi(H_0)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dE^0(\lambda).$$

Además

$$\|\varphi(H_0) f^0\|_0^2=\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2 \tag{2.27}$$

para $f^0 \in D(\varphi(H_0))$

En particular,

$$f^0 \in D(H_0) \text{ si y sólo si } \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2<\infty. \tag{2.28}$$

(Las integrales anteriores son integrales de Stieltjes).

Ahora

$$E^0(\lambda)u^0(.,t)=E^0(\lambda)e^{-itH_0}f^0=e^{-itH_0}E^0(\lambda)f^0,$$

porque $E^0(\lambda)$ conmuta con funciones de H_0. Por lo tanto

$$\|E^0(\lambda)u^0(.,t)\|_0=\|E^0(\lambda)f^0\|_0 \tag{2.29}$$

dado que $\exp(-itH_0)$ es unitario. Las ecuaciones (2.28) y (2.29) - implican que $u^0(.,t)\in D(H_0)$ si y sólo si $f^0\in D(H_0)$.

Ahora notemos que si $f^0\in D(H_0)$ entonces $(-itH_0)u^0(.,t)$ satisface $\|(-itH_0)u^0(.,t+\tau)-(-iH_0)u^0(.,t)\|_0^2=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-it\lambda}-1|^2\lambda^2 d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2$

(2.30)

por (2.27). El integrando en (2.30) tiende a cero cuando $\varepsilon\to 0$, y está acotado por una constante múltiplo de λ^2, que es integrable con respecto a $d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2$. Por lo tanto (2.30) tiende a cero - con τ, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue; y se sigue que

$$(-iH_0)u^0(.,t)\in C(-\infty,\infty;\mathcal{H}_0).$$

La demostración de (c) quedará completa si mostramos que $\frac{\partial u^0(\cdot,t)}{\partial t}$ existe y es igual a la función continua $(-iH_0)u^0(.,t)$. La relación (2.27) implica

$$\|[u^0(\cdot,t+\tau)-u^0(\cdot,t)]/\tau-(-iH_0)u^0(\cdot,t)\|_0^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-i\tau\lambda}-1}{\tau\lambda}+i\right|\lambda^2 d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2 .$$

Además, el integrando de esta integral es acotado por un multiplo de $\lambda^2 d\|E^0(\lambda)f^0\|_0^2$ y tiende a cero cuando $\tau\to\infty$. Por lo tanto, si

$f^0 \in D(H_0)$ entonces $\frac{\partial u^0(\cdot,t)}{\partial t}$ existe y es igual a $(-iH_0)u^0(\cdot,t)$, por el teorema de Lebesgue.

Un argumento análogo al anterior se sigue para demostrar la afirmación (c) para $u(\cdot,t)$. Q . E . D .

3.- La Familia Espectral de H_0.(c. ref. [4]).

En esta sección se dará una derivación de las propiedades espectrales del operador diferencial

$$H_0 = i\,(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{3.1}$$

donde las matrices E^0, A^j son (igual que antes) matrices de mxm, reales, simétricas y constantes; y además E^0 es positiva definida.

La derivación de tales propiedades va a ser de gran utilidad ya que, más adelante, aplicaremos estos resultados al estudio del operador H definido en (2.15).

El operador H_0, definido de esta manera, es claramente un -- operador que describe al sistema

$$E^0\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

El sistema (3.2) tiene soluciones de onda plana; i.e. soluciones de la forma

$$u(x,t)=f(zt-x\cdot p)c, \tag{3.3}$$

donde $f(\xi)$ es una función a valores reales de $\xi\in\mathbb{R}$, mientras que $z\in\mathbb{R}$, $p=(p_1,p_2,\dots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ y $c=(c_1,c_2,\dots,c_m)\in\mathbb{R}^m$ son constantes.

Si $f'(\xi)\not\equiv 0$, entonces (3.3) es solución de (3.2) si y sólo si

$$\Big(E^{o}\tau + \sum_{j} A^{j} p_{j}\Big) c = 0$$

Si $c\neq 0$, entonces la ecuación

$$P(p,\tau) = \det\Big(\tau E^{o} + \sum_{j} A^{j} p_{j}\Big) = 0 \tag{3.4}$$

expresa la condición para que el sistema (3.2) tenga una solución de onda plana.

La velocidad de propagación de la onda plana (3.3) es precisamente la velocidad con que los hiperplanos de fase constante se mueven. Fase constante quiere decir, desde luego, que $\tau t - x\cdot p = cte$. A estos planos los llamaremos 'hiperplanos característicos' del sistema (3.2). La onda plana (3.3) se propaga en la dirección del vector p con una velocidad $\tau/|p|$; donde $|p|^{2}=\sum_{i=1}^{n} p_{i}^{2}=1$. Entonces, las posibles 'velocidades normales' de la onda plana (3.3), para el sistema (3.2), están dadas por las raices de τ en (3.4) correspondientes a los vectores unitarios p; i.e. las raices de $\tau=\tau(p)$ de (3.4) con $|p|^{2}=1$, son las velocidades de propagación de la onda en la dirección de p. Estas raices son un número m, de acuerdo a su multiplicidad, y todas son reales, de tal manera que la matriz

$$H_{o}(p) = (E^{o})^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^{j} p_{j} \tag{3.5}$$

es real y simétrica. Enumerando, en orden decreciente de magnitud, aquellas que no son identicamente igual a cero, digamos un total de r:

$$z_1(p) \geq \ldots \geq z_r(p) \tag{3.6}$$

Las m-r raices que quedan son raices que son identicamente cero:

$$z_{r+1}(p) = \ldots = z_m(p) \equiv 0 \tag{3.7}$$

Denotemos con N_j el conjunto de puntos p para los cuales $z_j(p)$ se hace cero, ésto es:

$$N_j = \{ p \in \mathbb{R}^n / z_j(p) = 0 \}$$

Antes de demostrar una propiedad característica del conjunto N_j, enunciemos y demostremos un lema que va a ser de gran utili-- dad para la misma.

Lema 3.1. Si un polinomio P(p) no es identicamente cero, entonces el conjunto de puntos p para los que se hace cero es de medida -- cero.

Demostración. Es suficiente demostrar que el conjunto

$$N = \{ p / P(p) = 0, |p| \leq M \}$$

donde M es un número arbitrario positivo, es de medida cero. De-- mostremos ésto por inducción sobre el grado de P. Si P es de grado 1, N es la intersección de un plano con una esfera, entonces - de medida cero.

Supongamos, ahora, que el grado de P=m>1, y que la proposición es verdadera para polinomios de grado menor que m. Entonces, se sigue que el conjunto

$$N_1 = \left\{ p \in N \,/\, \frac{\partial P(p)}{\partial p_j} = 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

es de medida cero en $\mathbb{R}^n$, pues los polinomios $\partial P/\partial p_j$ son de grado menor que m, y no todos son identicamente cero. Por consiguiente, dada $\epsilon > 0$ podemos definir un conjunto abierto V tal que $N_1 \subset V$ y $m(V) < \epsilon$, con $m(V)$ la medida de Lebesgue en V.

Notemos, ahora, que todo punto del conjuto $N_2 = \{ p \in N / p \notin V \}$ es - un punto regular de la superficie $P(p)=0$. Esto significa que, dado un punto $p \in N_2$ existe una j y una vecindad N_p de p dentro de la cual $\partial P/\partial p_j \neq 0$. Lo anterior sugiere introducir un sistema de coordenadas ([36] pag. 111) en p, de tal manera que la intersección de - I_p de N_p con el lugar geométrico $P(p)=0$ es de medida cero. Puesto que N_2 es compacto, se sigue que un número finito de I_p lo cubren, y cada I_p es de medida cero, con lo cual N_2 es de medida cero. Finalmente, puesto que $N \subset V \cup N_2$, tenemos que $m(N) < \epsilon$, pero ϵ es arbitrario, por lo cual $m(N)=0$. Q . E . D .

Teorema 3.1. Si $z = z_j(p)$ es una raiz de (3.4), que no es identicamente cero, entonces el conjunto N_j donde se hace cero es de medida cero.

Demostración. El polinomio $P(p,z)$ de (3.4) puede escribirse como $P(p,z) = z^m + P_1(p) z^{m-1} + \ldots + P_{m-1}(p) z + P_m(p)$, donde los $P_j(p)$ son polino--

mios homogéneos de grado j en $p_1,\ldots,p_n$, con coeficientes reales. Dado que m-r es el número de raices identicamente cero de (3.4), tenemos que $P_{r+1}(p)\equiv 0,\ldots,P_m(p)\equiv 0$, y $P_r(p)\not\equiv 0$. Las raices en (3.6) son soluciones de la ecuación $\tau^r+P_1(p)\tau^{r-1}+\ldots+P_{r-1}(p)\tau+P_r(p)$. Dado que — $P_r(p)\not\equiv 0$, el Lema 3.1 implica que el conjunto $\{p\in\mathbb{R}^n/P(p)=0\}$ es de medida cero; y puesto que $\{p\in\mathbb{R}^n/\ P_r=0\}\supset N_j$ entonces N_j es de medida cero. Q . E . D .

Observemos que $H_0(p)$ es una matriz homogénea de grado uno, - en efecto

$$H_0(\alpha p)=(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\alpha p_j A^j=\alpha\,(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n}p_j A^j=\alpha H_0(p),$$

para todas las $\alpha\in\mathbb{R}$. Esto implica que si $\tau(p)$ es uneigenvalor de $H_0(p)$, entonces $\alpha\tau(p)$ es un eigenvalor de $H_0(\alpha p)$. Como una consecuencia de ésto y (3.6), las raices $\tau_j(p)$ son homogéneas positivas de grado uno:

$$\tau_j(\lambda p)=\lambda\,\tau_j(p),\quad \lambda\geq 0,\ j=1,\ldots,m. \tag{3.8}$$

Se sigue también que $\{\tau_1(p),\ldots,\tau_r(p)\}$ y $\{-\tau_1(-p),\ldots,-\tau_r(-p)\}$ son el mismo conjunto de números para toda p, por lo tanto en vista de (3.6),

$$\tau_j(p)=-\tau_{r-j+1}(-p),\quad j=1,2,\ldots,r. \tag{3.9}$$

Finalmente notemos que, las raices que no son identicamente cero pueden ser positivas como negativas.

Si estas raices no son nunca cero, entonces el número r es - siempre par, las primeras r/2 de ellas son estrictamente positivas y las restantes $r/2$ son estrictamente negativas.

Por otro lado, empecemos a considerar el problema de determinar la familia espectral del operador H_0, definido en (3.1). Para tal efecto, cosideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y cuya norma está definida a partir del producto interno (2.9).

Sea F el operador tranformada de Fourier en $\mathcal{H}_0$; i.e. $(Ff)(p)=\hat{f}(p)$; como se vio en la sección 2, el operador F es un mapeo unitario sobre si mismo y cambia la diferenciación con respecto a x_j en multiplicación por $-ip_j$, de tal manera que $\partial f/\partial x_j=-iF^{-1}[p_jF(f)]$; utilizando este resultado y (3.5) el efecto del operador H_0 sobre f está dado por

$$\begin{gathered} H_0f=F^{-1}[H_0(.)Ff] \\ D(H_0)=\{f\in\mathcal{H}_0/H_0(\cdot)\hat{f}\in\mathcal{H}_0\} \end{gathered} \tag{3.10}$$

Claramente $H_0=F^{-1}H_0(.)F$, donde el dominio de $H_0(.)$ es simplemente

$$D[H_0(\cdot)]=\{g\in\mathcal{H}_0/H_0(\cdot)g\in\mathcal{H}_0\} \tag{3.11}$$

y como consecuencia inmediata del Teorema 2.1, se sigue que $H_0(.)$ con este dominic es autoadjunta, lo cual nos quiere decir (como ya sabiamos) que H_0 es autoadjunto.

Dado que H_0 y $H_0(.)$ son unitariamente equivalentes bajo F, el problema de determinar la familia espectral de H_0 se reduce a la determinación de la familia espectral de $H_0(.)$. En efecto, denotando estas familias por $\{E_0(\lambda)\}$ y $\{\hat{E}_0(\lambda)\}$ respectivamente, tenemos $E_0(\lambda)=F^{-1}\hat{E}_0(\lambda)F$.

Procedamos, entonces, a construir la familia espectral $\hat{E}_0(\lambda)$ del operador $H_0(.)$. Esta matriz posee un conjunto ortonormal de eigenvectores $v_1(p),\ldots,v_m(p)$:

$$H_0(p)v_j(p)=\zeta_j(p)v_j(p).$$

Los eigenvectores normalizados son elegidos de tal manera que son funciones medibles de p. Claramente, para cualquier elemento $g\in\mathcal{H}_0$

$$g(p)=\sum_{j=1}^{m}g_j(p)v_j(p) \tag{3.12}$$

donde $g_j(p)=(g(p),v_j(p))$, y si $g\in D[H_0(.)]$,

$$H_0(.)g(p)=\sum_{j=1}^{m}\left[\zeta_j(p)g_j(p)\right]v_j(p) \tag{3.13}$$

Debido a la ortonormalidad de los v_j se tiene que

$$\|g\|^2=\sum_{j=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}|g_j(p)|^2dp \tag{3.14}$$

Definamos los operadores $\hat{E}_0(\lambda)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, por

$$\hat{E}_0(\lambda)g(p)=\sum_{j=1}^{k}Y(\lambda-\lambda_j(p))g_j(p)v_j(p), \tag{3.15}$$

donde Y es la función de Heaviside: $Y(\lambda)=1$ para $\lambda\geq 0$ y $Y(\lambda)=0$ para $\lambda<0$. Con el fin de estudiar estos operadores se hará necesaria la utilización de los siguientes dos lemas y algunas definiciones.

Lema 3.2. Sea $\zeta(p)$ cualquier raiz de (3.4), y sea f una función integrable (según Lebesgue) no negativa. Si establecemos que $S(\lambda)=\{p\in\mathbb{R}^n \mid \zeta(p)\leq\lambda\}$; y

$$F(\lambda)=\int_{S(\lambda)}f(p)dp, \tag{3.16}$$

entonces $F(\lambda)$ es absolutamente continua en cualquier intervalo que excluye el origen $\lambda=0$, siendo el intervalo de la forma $[a,b]$.

Demostración. La demostración se hará sólo para $0<a<b$, ya que un razonamiento similar se sigue en el caso $a<b<0$. Excluyamos los casos triviales $z(p)\equiv 0$ ó $z(p)\leq 0\ \forall p$.

Dada $\epsilon>0$, eligimos $M>0$ tal que

$$\int_{|p|>M} f(p)\,dp < \epsilon/2 \tag{3.17}$$

Sea (a_i,b_i), $i=1,\ldots,s$; el conjunto de subintervalos disjuntos de el intervalo $[a,b]$, y sea

$$S_i^M = \{\, p\in \mathbb{R}^n \mid a_i < z(p) \leq b_i\, ,\, |p|\leq M \,\}$$

Entonces tenemos, con $S^M = \bigcup_{i=1}^{s} S_i^M$,

$$\sum_{i=1}^{s} |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon/2 + \int_{S^M} f(p)\,dp \tag{3.18}$$

Dado que la integral indefinida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, existe $\delta>0$ tal que

$$\int_{S} f(p)\,dp \leq \epsilon/2 \tag{3.19}$$

sólo a condición de que $m(S^M)<\delta$.

Escribiendo $p=|p|w$, donde w es un vector unitario y denotando por Ω_n la superficie de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$, entonces en vista de (3.8) se tiene que $p\in S_i^M$ si y sólo si

$$\frac{a_i}{z(\omega)} < |p| < \frac{b_i}{z(\omega)} \quad \text{y} \quad |p|\leq M .$$

Puesto que $a_i > a$ tenemos que $Z(w) > a/M$. Entonces obtenemos, usando coordenadas polares,

$$m(S_i^M) = \int_{|\omega|=1} d\Omega_n \int_{a_i/Z(\omega)}^{b_i/Z(\omega)} \rho^{n-1} d\rho \leq \frac{\Omega_n}{n} \left(\frac{M}{a}\right)^n (b_i^n - a_i^n) \leq \frac{\Omega_n}{b} \left(\frac{bM}{a}\right)^n (b_i - a_i),$$

entonces

$$m(S^M) \leq \frac{\Omega_n}{b} \left(\frac{bM}{a}\right)^n \sum_{i=1}^{s} (b_i - a_i)$$

Por lo tanto, solo tenemos que pedir que

$$\sum_{i=1}^{s} (b_i - a_i) < \frac{\delta b}{\Omega_n} \left(\frac{a}{bM}\right)^n \tag{3.20}$$

para que la integral (3.18) sea menor que $\epsilon/2$. Esto significa que (3.20) implica que $\sum_{i=1}^{s} \left| F(b_i) - F(a_i) \right| < \epsilon$. Q . E . D .

Lema 3.3. La función $F(\lambda)$ de el Lema 3.2 es continua por la derecha en $\lambda = 0$. Y también continua por la izquierda (entonces continua en sentido ordinario) a menos que $Z(p) \equiv 0$. En este caso $F(0-) \neq F(0+)$ ó $f(p) = 0$ casi donde quiera.

Demostración. Primero probemos la continuidad por la derecha, y también excluyamos los casos triviales $Z(p) \equiv 0$ ó $Z(p) \leq 0 \; \forall p$. Dado $\epsilon > 0$ elijamos $M > 0$ tal que (3.17) se cumpla. Por el Teorema 3.1 el conjunto

$$N = \{ p \in \mathbb{R}^n \mid Z(p) = 0, \; |p| \leq M \}$$

es de medida cero, también existe un conjunto abierto V que contiene N y es de medida menor que δ . En vista de (3.19). entonces tenemos que

$$\int_V |f(p)|\,dp < \epsilon/2 \qquad (3.21)$$

Puesto que $\zeta(p)$ es una función continua que no se hace cero en el conjunto compacto $\{p\in\mathbb{R}^n / |p|\leq M,\ p\notin V\}$, alcanza un mínimo - $\lambda_0 > 0$ en él. Como una consecuencia, el conjunto V contiene el conjunto

$$V' = \{p\in\mathbb{R}^n \ /\ 0 < \zeta(p) < \lambda_0\ ,\ |p|\leq M\},$$

entonces por (3.21)

$$\int_{V'} f(p)\,dp < \epsilon/2 \qquad (3.22)$$

Finalmente, para $0<\lambda<\lambda_0$, tenemos, a causa de (3.16), (3.17) y (3.21) que $|F(\lambda)-F(0)|<\epsilon$, y esto prueba la continuidad por la derecha en $\lambda=0$.

Si $\zeta(p)\not\equiv 0$ el razonamiento para establecer la continuidad por la izquierda es análogo al anterior. Sin embargo, si se tiene que $\zeta(p)\equiv 0$, se cumple que $F(0-)\neq F(0)$, a menos que $f(p)=0$ casi donde — quiera. Q. E. D.

Sea O un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$; y sea $\{\xi(\lambda)\}$ la familia espectral continua por la derecha asociada a - O. Claramente la familia espectral $\{\xi(\lambda)\}$ determina una medida espectral ([14] pag. 518). Si $g\in\mathcal{H}$ y S' es un conjunto de Borel en $\mathcal{H}$, entonces decimos que g es 'absolutamente continua' con respecto a O si y sólo si $m(S')=0$ implica que $\xi(S')g=0$. A el conjunto de todos los $g \in \mathcal{H}$ que son absolutamente continuos con respecto a O es denotado por $\mathcal{H}_{ac}$ y es llamado el 'subespacio de continuidad absoluta' de O .([14] pag. 518).

Ahora estamos en posibilidades de discutir las propiedades - de los operadores $\hat{E}_0(\lambda)$.

Teorema 3.2. Los operadores $\hat{E}_0(\lambda)$ definidos en (3.15) constitu-- yen la resolución de la identidad del operador autoadjunto $H_0(.)$. El espectro de $H_0(.)$ consiste de todo el eje real, y

$$(\hat{\mathcal{H}}_0)_{ac} = \mathcal{H}_0 - \hat{P}(0)\mathcal{H}_0, \quad \hat{P}(0) = \hat{E}_0(0) - \hat{E}_0(0-) \tag{3.23}$$

es el subespacio de continuidad absoluta de $H_0(.)$. Coincide con - el espacio $\mathcal{H}_0$ a menos que (3.4) tenga raices $z(p)$ que sean identicamente cero; en este caso $\lambda=0$ es un eigenvalor con eigenespacio $\hat{P}(0)\mathcal{H}_0 = (\hat{E}(0) - \hat{E}(0-))\mathcal{H}_0$ dado por

$$\hat{P}(0)\mathcal{H}_0 = \{g \in \mathcal{H}_0 \,/\, g(p) = \sum_{j=r+1}^{m} g_j(p)\, v_j(p)\}. \tag{3.24}$$

Demostración. De la definición (3.15) se sigue que $\{\hat{E}_0(\lambda)\}$ es una familia monotonamtente creciente de proyecciones ortogonales, y que

$$\underset{\lambda \to -\infty}{\text{s-lim}}\ \hat{E}_0(\lambda) = 0, \qquad \underset{\lambda \to \infty}{\text{s-lim}}\ \hat{E}_0(\lambda) = I.$$

Por lo tanto, para probar que $\{\hat{E}_0(\lambda)\}$ es la resolución de la -- identidad, solamente tenemos que mostrar que $\hat{E}_0(\lambda)$ es continua - por la derecha para todo real λ .

Con la notación introducida en (3.12), y en vista de (3.13) y (3.14), tenemos, para cualquier $g \in \mathcal{H}_0$

$$\|\hat{E}_0(\lambda)g\|^2=\sum_{j=1}^{m}\int_{S_j(\lambda)}|g_j(p)|^2dp, \qquad (3.25)$$

donde $S_j(\lambda)=\{p\in\mathbb{R}^n|\tau_j(p)\leq\lambda\}$. La ecuación (3.25) muestra que la -- función $F_g(\lambda)=\|\hat{E}_0(\lambda)g\|^2$ es una suma finita de funciones del tipo - introducido en (3.16). Notemos también que, dado que $\{\hat{E}_0(\lambda)\}$ es una familia creciente,

$$\|\hat{E}_0(\lambda)g-\hat{E}_0(\lambda')g\|^2=\|\hat{E}_0(\lambda)g\|^2-\|\hat{E}_0(\lambda')g\|^2,$$

siempre que $\lambda\geq\lambda'$. Casi todas las afirmaciones del teorema se siguen facilmente de las observaciones hechas y de los Lemas 3.2 y 3.3. La única afirmación que requiere una consideración especial es la que establece que la familia $\{\hat{E}_0(\lambda)\}$ es la asociada con el operador $H_0(.)$.

Para probar ésto, denotemos momentaneamente con B el operador autoadjunto asociado con la familia espectral $\hat{E}_0(\lambda)$:

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d\hat{E}(\lambda).$$

Se quiere mostrar que $B=H_0(.)$. Para ésto, primero restrinjamos B a un operador B_0 cuyo dominio $D(B_0)$ es el conjunto de aquellos -- $g\in\mathcal{H}_0$ con soporte compacto. Si mostramos que $H_0(.)$ también es una extensión de B_0, y que B_0 es escencialmente autoadjunto, entonces se seguira que $B=H_0(.)$.

Sea

$$C=\max_{j=1,\dots,m}\ \max_{|\omega|=1}|\tau_j(\omega)| \qquad (3.26)$$

Dado un $g\in D(B_0)$ elijamos un R suficientemente grande tal que

$$g(p)=0 \text{ para } |p|>R/c \tag{3.27}$$

Dividamos el intervalo $[-R,R]$ en N partes iguales por los puntos

$$\lambda_k = -R + \frac{2Rk}{N}, \quad k=1,\dots,N, \quad \lambda_0 = -R$$

y formemos la suma de Riemann-Stieltjes

$$S_N g(p) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \Delta_k \hat{E}_0(\lambda)\, g(p) \tag{3.28}$$

en esta expresión los ξ_k son tales que $\lambda_{k-1} < \xi_k < \lambda_k$ y.

$$\Delta_k \hat{E}_0(\lambda) = \hat{E}_0(\lambda_k) - \hat{E}_0(\lambda_{k-1})$$

En vista de (3.15) tenemos

$$\Delta_k \hat{E}_0(\lambda) g(p) = \sum_{j=1}^{2} \left[Y(\lambda_k - z_j(p)) - Y(\lambda_{k-1} - z_j(p)) \right] g_j(p)\, v_j(p) \tag{3.29}$$

Por otro lado, en vista de (3.14), (3.25) y (3.26), obtenemos

$$\hat{E}_0(R) H_0(p) g(p) = g(p), \quad \hat{E}_0(-R) H_0(p) g(p) = 0,$$

tal que

$$H_0(p) g(p) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \hat{E}_0(\lambda) H_0(p)\, g(p) \tag{3.30}$$

De (3.28), (3.30) se sigue que

$$\| S_N g - H_0(\cdot) g \|^2 = \sum_{k=1}^{N} \| \Delta_k \hat{E}_0(\lambda) (H_0(\cdot) - \xi_k I) g \|^2 .$$

Sustituyendo (3.29) en esta expresión , y haciendo uso de (3.13) y (3.14), obtenemos

$$\| S_N g - H_0(\cdot) g \|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j^k} | z_j(p) - \xi_m |^2 \, | g_j(p) |^2 \, dp ,$$

donde $S_j^k=\{p\in\mathbb{R}^n / \lambda_{k-1}<\varepsilon_j(p)\leq\lambda_k\}$. Puesto que $\lambda_k-\lambda_{k-1}=2R/N$, obtenemos finalmente

$$\|S_N g - H_0(\cdot)g\| \leq \left(\frac{2R}{N}\right)\|g\|$$

que tiende a cero cuando $N\to\infty$.

Lo anterior prueba que $H_0(.)$ es una extensión de B_0. Observemos ahora que, dado que, $H_0(p)$ es una matriz real simétrica, — $H_0(p)\pm iI$ es invertible, y para cualquier g $D(B_0)$ la ecuación

$$[H_0(p)\pm iI]h=g$$

tiene una solución $h\in D(B_0)$. Puesto que $D(B_0)$ es denso en $\mathcal{H}_0$, esto prueba que el rango de $H_0(.)\pm iI$ también es denso en $\mathcal{H}_0$, entonces B_0 es escencialmente autoadjunto. Ahora tal operador tiene una extensión única autoadjunta y dado que $H_0(.)$ y B son extensiones - autoadjuntas de B_0, concluimos que $H_0(.)=B$. Q . E . D .

Nuevamente observemos que H_0 y $H_C(.)$ son unitariamente equivalentes bajo la transformación de Fourier, de tal manera que — hay que usar tal transformación para obtener las propiedades espectrales de H_0. Tenemos.

Teorema 3.3. El operador $E_0(\lambda)=F^{-1}\hat{E}_0(\lambda)$, donde $E_0(\lambda)$ está definido en (3.15), constituye la resolución de la identidad para el operador autoadjunto H_0 de (3.10). El espectro de H_0 consiste de todo el eje real, y $(\mathcal{H}_0)_{ac}=F^{-1}(\hat{\mathcal{H}}_0)_{ac}$, donde $(\hat{\mathcal{H}}_0)_{ac}$ esta definido en (3.23), es el subespacio de continuidad absoluta de H_0. Este coincide con todo el espacio $\mathcal{H}_o$, a menos que (3.4) tenga raices $\tau(p)$ que son identicamente cero; en este caso $\lambda=0$ es un eigen-valor con eigenespacio $P(0)\mathcal{H}_o=F^{-1}\hat{P}(0)\mathcal{H}_o$.

4.- Medios Homogéneos Uniformemente Propagativos.(c. ref. [43]).

En la sección 3 se obtuvo la condición para que el sistema

$$E^{0}\frac{\partial u^{0}}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}A^{j}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{j}} \tag{4.1}$$

tuviera soluciones de onda plana (3.3). Tal condición era que

$$P(p,z)=\det\Big(zE^{0}+\sum_{j}A^{j}p_{j}\Big)=0 \tag{4.2}$$

Veamos que nos expresa fisícamente (4.2).

Es bien conocido que existe una matriz no singular T de mxm tal que

$$T'E^{0}T=I, \tag{4.3}$$

con T' la traspuesta de T. Entonces

$$\det T'\,\det\Big(zE^{0}+\sum_{j=1}^{n}A^{j}p_{j}\Big)\det T=\det\Big(Iz-\sum_{j=1}^{n}B^{j}p_{j}\Big)$$

donde

$$B^{j}=-T'A^{j}T \tag{4.4}$$

es una matriz real simétrica.

La función

$$P(p,z)=\det\Big(Iz-\sum_{j=1}^{n}B^{j}p_{j}\Big) \tag{4.5}$$

es un polinomio homogéneo de grado m en la variable $(p_1,\dots,p_n,z)$. Entonces las raices z de (4.5) son funciones algebraicas de — $p=(p_1,\dots,p_n)$. Si las raices z son funciones solamente de $|p|$, el medio gobernado por (4.1) es llamado isotrópico (las velocidades normales son independientes de la dirección de propagación). Si las raices varían con la dirección de propagación el medio es llamado anisotrópico.

La anisotropía de un medio puede ser visualizada por medio de la superficie de velocidad normal, cuyos puntos son los puntos terminales de los vectores velocidad normales, definidos por

$$v=(v_1,\dots,v_n)=\tau(p_1,\dots,p_n),$$

donde τ es una raíz de (4.5) y $|p|=1$. Dado que $\tau^2=|v|^2=v_1^2+\dots+v_n^2$, la superficie de velocidad normal tiene la ecuación

$$P(\sigma,|\sigma|^2)=\det\left(|\sigma|^2 I-\sum_{j=1}^{n}B^j\sigma_j\right)=0 \tag{4.6}$$

Entonces la superficie de velocidad normal es una superficie algebráica[1] de grado 2m.

La anisotropía de un medio, también, puede ser visualizada por medio de su superficie de lentitud S, que puede ser definida como la imagen de la superficie de velocidad normal (4.6) bajo la transformación

$$\eta=\frac{\sigma}{|\sigma|^2}, \quad \sigma=\frac{\eta}{|\eta|^2} \tag{4.7}$$

i.e. inversión en la esfera unitaria. Dado que los puntos η sobre

---

[1] Una superficie algebráica es una superficie que admite una representación paramétrica tal que las funciones coordenadas son funciones algebráicas de los parámetros.

S satisfacen $|\eta||\sigma|=1$, las distancias desde el origen a un punto de S son los recíprocos de las velocidades normales; i.e. la 'lentitud' del sistema (4.1). Una ecuación para S es

$$P(\eta,1)=\det\left(I-\sum_{j=1}^{n}B^{j}\eta_j\right)=0 \tag{4.8}$$

por (4.6) y (4.7). Entonces S es una superficie algebráica de grado no mayor que m.

El polinomio $P(p,\zeta)$ tiene una factorización

$$P(p,\zeta)=Q_1^{m_1}(p,\zeta)Q_2^{m_2}(p,\zeta)\ldots Q_\ell^{m_\ell}(p,\zeta), \tag{4.9}$$

donde los factores $Q_j(p,\zeta)$ son polinomios homogéneos distintos en (p,ζ), irreducibles al campo de los números reales. Los factores $Q_j(p,\zeta)$ son únicos, aparte de su orden y factores constantes. --- $P(p,\zeta)$ es de orden m en ζ y el coeficiente de ζ^m en $P(p,\zeta)$ es 1.- Entonces los factores $Q_j(p,\zeta)$ pueden ser definidos únicamente pidiendo que el coeficiente de la potencia mayor de ζ en cada $Q_j(p,\zeta)$ sea 1. Sea

$$Q(p,\zeta)=Q_1(p,\zeta)Q_2(p,\zeta)\ldots Q_\ell(p,\zeta), \tag{4.10}$$

entonces es claro de (4.8) y (4.9) que S puede ser escrita como el lugar geométrico

$$Q(\eta,1)=Q_1(\eta,1)Q_2(\eta,1)\ldots Q_\ell(\eta,1)=0 \tag{4.11}$$

Las propiedades geométricas de la superficie de lentitud S - juegan una parte decisiva en la determinación de la estructura y propiedades de las ondas gobernadas por el sistema (4.1). Una cla se de sistemas (4.1) para los que su comportamiento asintótico, -para tiempos grandes, pueda ser estimado está descrita en la si--guiente definición.

Definición 4.1. Un sistema (4.1) (y el medio gobernado por él) se dice que es 'uniformemente propagativo' si

-- La superficie de lentitud S es acotada (4.12)

-- $\eta\cdot\nabla Q(\eta,\lambda) = \eta_1 \dfrac{\partial Q(\eta,\lambda)}{\partial \eta_1} + \dots + \eta_n \dfrac{\partial Q(\eta,\lambda)}{\partial \eta_n} \neq 0$ (4.13)

donde $\eta \in S$.

El nombre de 'uniformemente propagativo' es motivado por la -observación de que las velocidades normales de tales sistemas tie nen multiplicidad constante y constante signo algebráico,[1] inde--pendientemente de la dirección de propagación, como se vera más -adelante.

Sea p^0 un vector unitario fijo, y sea $z(p^0)$ su correspondi-ente velocidad normal; i.e., una raíz de

$$Q(p^0,z) = z^r + Q_1(p^0)z^{r-1} + \dots + Q_{r-1}(p^0)z + Q_r(p^0) = 0 \tag{4.14}$$

Lema 4.1. Para medios uniformemente propagativos, si $z(p^0)\neq 0$, en-tonces $\partial Q(p^0,z(p^0))/\partial z \neq 0$. Por lo tanto, las raices distintas de cero de (4.14) son simples.

Demostración. $Q(p,z)$ es homogeneo de grado r en (p,z). Por lo tan

---

1) Un signo algebráico es un signo positivo o negativo.

to por el Teorema de Euler[1)]

$$p\cdot\nabla Q(p,z)+z\frac{\partial Q(p,z)}{\partial z}=r\,Q(p,z)$$

Tomando $p=p^0$, $z=z(p^0)$ en esta ecuación se tiene

$$p^0\cdot\nabla Q(p^0,z(p^0))+z(p^0)\frac{\partial Q(p^0,z(p^0))}{\partial z}=r\,Q(p^0,z(p^0))=0, \qquad (4.15)$$

por definición de $z(p^0)$. Ahora si $\eta^0=z(p^0)^{-1}p^0$, entonces

$$Q(\eta^0,1)=z(p^0)^{-r}Q(p^0,z(p^0))=0,$$

i.e. $\eta^0\in S$. Multiplicando (4.15) por $z(p^0)^{-r}$ y usando la homogeneidad de las derivadas de Q, tenemos

$$\eta^0\cdot\nabla Q(\eta^0,1)+\frac{\partial Q(\eta^0,1)}{\partial z}=0.$$

Entonces

$$\frac{\partial Q(p^0,z(p^0))}{\partial z}=z(p^0)^{r-1}\frac{\partial Q(\eta^0,1)}{\partial z}=-z(p^0)^{r-1}\eta^0\cdot\nabla Q(\eta^0,1)\neq 0$$

por (4.13). Q . E . D

Lema 4.2. Para medios uniformemente propagativos, una de las siguientes dos alternativas se cumple:

Caso 1. Existe un vector unitario p^0, tal que las raices z_1^0, $z_2^0,\dots,z_r^0$ de $Q(p^0,z)$ son todas diferentes de cero (y por lo tanto simples, por el Lema 4.1), ó

Caso 2. $z(p^0)=0$ es una raíz para toda p^0, tal que $Q_r(p^0)\equiv 0$, y existe un vector unitario p^0 tal que las r-1 raices de $z^{-1}Q(p^0,z)$

[1)] Teorema de Euler sobre funciones homogéneas: una función homogénea de grado m en las variables $x_1,\dots,x_n$, multiplicada por m, es igual a x_1 veces la derivada parcial de la función con respecto a x_1, más x_2 veces la derivada parcial de la función con respecto a x_2, etc.

son todas diferentes de cero (y por lo tanto simples).

En particular, existe un vector unitario p^0 tal que $Q(p^0, z)$ tiene r raices simples en ambos casos.

Demostración. Si el caso 1 no se cumple, entonces $Q_r(p) \equiv 0$. Si también $Q_{r-1}(p) \equiv 0$, entonces $Q(p, z) = z^2 Q'(p, z)$ tiene factores irreducibles repetidos, contrario a la definición de $Q(p, z)$. Entonces $Q_{r-1}(p^0) \neq 0$, para algún vector unitario p^0, y las r-1 raices de $z^{-1} Q(p, z)$ son todos diferentes de cero para $p = p^0$. Q . E . D .

Ahora fijemos un vector unitario p^0 como en el Lema 4.2; y sean $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_r^0$ el correspondiente conjunto de raices de $Q(p^0, z)$. Estas son raices simples por el Lema 4.2. Si $p^0 \neq 0$, entonces dado que

$$Q(p^0, z_k) = 0 \; , \; \frac{\partial Q(p^0, z_k^0)}{\partial z} \neq 0 \; ,$$

la ecuación $Q(p, z) = 0$ tiene una solución analítica $z = z_k(p)$ definida en una vecindad de $p = p^0$ y que satisface $z_k(p^0) = z_k^0$ (Teorema de la función implicita para funciones analíticas, [12] pag. 193). Si $z_k^0 = 0$, entonces cero es una raíz de $Q(p, z)$ para toda p, y $z_k(p)$ está definida a ser identicamente cero. Hay que hacer notar que, en ambos casos

$$z_k(\mu p) = \mu \, z_k(p) \; , \; \mu > 0 \tag{4.16}$$

tal como se vió en la ecuación (3.8). Esta igualdad tanbién se sigue por la homogeneidad de $Q(p, z)$ y la unicidad de la función $z_k(p)$

Si $\zeta_k(p) \neq 0$, entonces

$$Q(\zeta_k(p)^{-1}p, 1) = \zeta_k(p)^{-r} Q(p, \zeta_k(p)) = 0,$$

con lo cual

$$\eta = \zeta_k(p)^{-1} p \in S$$

Se sigue que $|\eta| = |\zeta_k(p)|^{-1}$ y entonces, por (4.16)

$$|\zeta_k(\eta)| = |\eta| \, |\zeta_k(p)| = 1 \qquad (4.17)$$

Entonces (4.17) es una ecuación para una porción de S, Este hecho sugiere el siguiente teorema.

Teorema 4.1. Para medios uniformemente propagativos, las r raices $\zeta_1(p), \zeta_2(p), \ldots, \zeta_r(p)$ de $Q(p,\zeta)=0$, definidas antes, son funciones analíticas de p para todo real $p \neq 0$.

Demostración. Cada función $\zeta_k(p)$, $K=1,2,\ldots,r$, está definida por el teorema de la función implicita cerca de $p=p^0$ y, entonces, extendida por continuación analítica. Un obstaculo para la continuación analítica puede ser la aparición de un punto rama. Puntos rama $p^1 \neq 0$ con raices no cero $\zeta_k(p^1)$ no ocurren, por el Lema 4.1. - Si $\zeta_k(p^1)=0$, entonces $\zeta_k(p) \equiv 0$. Si $\zeta_k(p^0) \neq 0$ y $\zeta_k(p) \longrightarrow 0$ cuando $p \longrightarrow p^1$, entonces por (4.17), $|\eta| \to \infty$ cuando $p \longrightarrow p^1$ y S no es - acotada, contrario a la hipotésis. Q . E . D .

El mismo argumento de la demostración del Teorema 4.1 también prueba el siguiente corolario.

Corolario4.1. Cada raíz $\zeta_k(p)$, $k=1,2,\ldots,r$, es de constante signo algebráico. En particular, una raíz puedé tender a cero si es --- identicamente cero.

La aparición de una raíz $\tau_k(p)\equiv 0$ está asociada con la existencia de soluciones estáticas con energía finita del sistema (4.1); i.e. soluciones $u^o=u^o(x)$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u^o}{\partial x_j} = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} u^o(x)\, E^o\, u^o(x)\, dx < \infty .$$

En efecto, puede mostrarse por el método de la transformada de Fourier que tales soluciones existen para sistemas uniformemente propagativos si y sólo si una raíz $\tau_k(p)\equiv 0$ existe. Entonces, el Caso 2(Lema 4.2) es aplicable a sistemas uniformemente propagativos que tienen soluciones estáticas. Es importante incluir este caso en la discusión porque muchos de los sistemas de ecuaciones de onda de Física Clásica tienen soluciones estáticas (como se verá más adelante en los ejemplos).

Corolario 4.2. Si las raices τ_k^o $(k=1,2,\dots,r)$ son enumeradas como $\tau_1^o > \tau_2^o > \dots > \tau_r^o$, entonces

$$\tau_1(p) > \tau_2(p) > \dots > \tau_r(p) , \qquad \text{para todo } p\neq 0 \tag{4.18}$$

Demostración. (4.18) se cumple para $p=p^o$ por hipotésis. Si cualquiera de estas desigualdades no se cumple para algún $p\neq 0$, entonces por continuidad, habra un $p^1\neq 0$ tal que $\tau_j(p^1)=\tau_k(p^1)$ con $1\leq j$, $k\leq r$ y $j\neq k$. Si $\tau_j(p^1)\neq 0$, entonces es una raíz doble, contradiciendo al Lema 4.1. Supongamos que $\tau_j(p^1)=0$. Dado que las funciones $\tau_j(p)$ y $\tau_k(p)$ son distintas, una de ellas no es identicamente cero y se hace cero para $p^1=p$, contradiciendo al Corolario 4.1. Entonces (4.18) se cumple. Q . E . D .

De ahora en adelante se supondrá que las raices $\zeta_\alpha(p)$ son enumeradas como en (4.18). Un polinomio $Q(p,\zeta)$ se dice que es 'estrictamente hiperbólico' (con respecto al vector $(p,\zeta)=(0,0,\ldots,0,1)$) si para cada vector real fijo $p\neq 0$, las raices ζ de $Q(p,\zeta)=0$ son reales, distintas y diferentes de cero. Entonces el Teorema 4.1 implica

Corolario 4.3. Para medios uniformemente propagativos, $Q(p,\zeta)$ es estrictamente hiperbólico (Caso 1) ó $\zeta^{-1}Q(p,\zeta)$ es estrictamente hiperbólico (Caso 2).

Corolario 4.4. Para medios uniformemente propagativos, las r raices distintas $\zeta_1(p),\ldots,\zeta_r(p)$ satisfacen

$$\zeta_k(-p)=-\zeta_{r-k+1}(p), \qquad \text{para } k=1,\ldots,r \text{ y todo } p \tag{4.19}$$

Demostración. Puesto que $Q(-p,-\zeta)=(-1)^r Q(p,\zeta)$, los números $-\zeta_1(p)$, $\ldots,-\zeta_r(p)$ son raices correspondientes al vector $-p$. También por suposición

$$-\zeta_1(p)<-\zeta_2(p)<\cdots<-\zeta_r(p)$$

Entonces se sigue que $-\zeta_1(p)=\zeta_r(-p)$, $-\zeta_2(p)=\zeta_{r-1}(-p),\ldots$; i.e. (4.19) se cumple. Q . E . D .

Corolario 4.5. Para medios uniformemente propagativos, una de las siguientes dos alternativas se cumple:

Caso 1. $r=2\rho$ es par y las raices $\zeta_k(p)$ satisfacen

$$\zeta_1(p)>\cdots>\zeta_\rho(p)>0>\zeta_{\rho+1}=-\zeta_\rho(-p)>\cdots>\zeta_{2\rho}(p)=-\zeta_1(-p) \tag{4.20}$$

Caso 2. $r=2\rho+1$ es impar y las raices $\zeta_k(p)$ satisfacen

$$\zeta_1(p)>\ldots>\zeta_\rho(p)>\zeta_{\rho+1}(p)\equiv 0>\zeta_{\rho+2}=-\zeta_\rho(-p)>\ldots>\zeta_{2\rho+1}(p)=-\zeta_1(-p) \qquad (4.21)$$

Demostración. (4.19) implica que para toda raíz positiva $\zeta_k(p)$ — existe una raíz negativa $\zeta_{r-k+1}(p)$, porque las raices tienen signo constante (Corolario 4.1). De la convención (4.18), $\zeta_1(p)=-\zeta_r(-p)>0$. Similarmente $\zeta_2(p)=-\zeta_{r-1}(-p)>0$, etc. Si $r=2\rho$ (Caso 1), entonces $k=\rho$ implica $r-k+1=\rho+1$. Entonces $\zeta_\rho(p)=-\zeta_{\rho+1}(-p)>0$. En efecto, $\zeta_\rho(p)<0$ puede implicar que $\zeta_{\rho+1}(p)>0>\zeta_\rho(p)$, por (4.19), contrario a (4.18), y $\zeta_\rho(p)=0$ puede implicar que $\zeta_{\rho+1}(p)=0$, contrario al hecho de que las raices son simples. Si $r=2\rho+1$ (Caso 2), entonces $k=\rho$ implica $r-k+1=\rho+2$ y $k=\rho+1$ implica $r-k+1=\rho+1$. Entonces $\zeta_\rho(p)=-\zeta_{\rho+2}(-p)>0$, por el argumento dado en el Caso 1, y $\zeta_{\rho+1}(p)=-\zeta_{\rho+1}(-p)=0$, porque $\zeta_{\rho+1}$ no cambia de signo. Q . E . D .

Las propiedades de las raices, dadas anteriormente, implican el siguiente teorema.

Teorema 4.2. Para medios uniformemente propagativos, la superficie de lentitud S consiste de $\rho=\left[r/2\right]$ capas disjuntas acotadas que son superficies analíticas. Ecuaciones para ellas son

$$\zeta_k(p)=1\,,\quad k=1,2,\ldots,\rho \qquad (4.22)$$

Demostración. (4.22) se sigue de (4.17) y el hecho de que $\zeta_k(p)>0$, para $k=1,2,\ldots,\rho$. Las capas de S son disjuntas porque las raices $\zeta_k(p)$ son distintas. La analiticidad de las capas se sigue del Teorema 4.1. Q . E . D .

Otra ecuación para la capa correspondiente a $z_k(p)$ es, por (4.16) $|\eta| z_k(p)=1$; $|p|=1$. Esto implica.

Corolario 4.6. Las ρ capas de S son superficies cerradas que no se intersectan y encierran al origen. $|\eta| z_1(p)=1$ define la capa más interna, $|\eta| z_2(p)=1$ define la siguiente, etc; y $|\eta| z_\rho(p)=1$ define la capa más exterior.

La discusión anterior muestra que las raices $z_1(p),\ldots,z_r(p)$ son justamente las raices distintas de

$$\det\left(E^0 z + \sum_{j=1}^{n} A^j p_j\right) = 0 \tag{4.23}$$

Lo último puede ser interpretado como las posibles velocidades normales de las ondas planas propagandose en la dirección del vector unitario p. Entonces los Corolarios 4.1 y 4.2 implican

Corolario 4.7. Para sistemas uniformemente propagativos, las m velocidades normales $z_\alpha(p)$, $\alpha=1,2,\ldots,m$, definidas por (4.23) tienen multiplicidad constante y constante signo algebráico, independiente de p.

Estas son las propiedades que motivan el término 'uniformemente propagativo'.

5.- Medios Homogéneos Fuertemente Propagativos. (c. ref. [33]).

Antes de empezar a definir los medios homogéneos fuertemente propagativos consideremos algunos resultados importantes que nos - serán de utilidad posteriormente.

Teorema 5.1. La matriz $B(p)=\sum_{j=1}^{n} B^j p_j$ (ver (4.4)) satisface la identidad

$$Q(p,B(p))=B(p)^r+Q_1(p)B(p)^{r-1}+\ldots+Q_{r-1}(p)B(p)+Q_r(p)I=0 \qquad (5.1)$$

para toda p. Con lo cual $Q(p,z)$ es el polinomio minimal[1)] para $B(p)$.

Demostración. El polinomio $P(p,z)=\det(Iz-B(p))=Q_1^{m_1}(p,\ )\ldots Q_l^{m_l}(p,z)$ - es el polinomio característico de $B(p)$. Entonces por el Teorema de Hamilton-Cayley $P(p,B(p))=0$. Ahora por definición se tiene que

$$Q(p,z)=Q_1(p,z)Q_2(p,z)\ldots Q_l(p,z);$$

entonces, si $m_1=m_2=\ldots=m_l=1$, el resultado obtenido es el mismo que en (5.1). Si $P(p,z)$ tiene un factor repetido irreducible; digamos $m_1>1$, entonces

$$P(p,z)=Q_1^2(p,z)R(p,z).$$

Para obtener (5.1) en este caso, sean $u(p)$, $v(p)$ los vectores de m componentes las cuales dependen de p y escribimos

---

1) El polinomio minimal de una matriz es el polinomio de más pequeño grado que es satisfecho por la matriz.

$$(u(p),v(p))=u_1(p)v_1(p)+\dots+u_m(p)v_m(p).$$

Entonces

$$0=(P(p,B(p))u(p),v(p))=(Q_1^2(p,B(p))R(p,B(p))u(p),v(p))$$

$$=(Q_1(p,B(p))R(p,B(p))u(p),Q_1(p,B(p))v(p)).$$

El último paso se sigue de la simetría de $B(p)$. Tomando $U(p)=\xi$, - una constante, y $v(p)=R(p,B(p))$, tenemos

$$\|Q_1(p,B(p))R(p,B(p))\xi\|^2=0 \quad \text{para toda } \xi ,$$

que implica

$$Q_1(p,B(p))R(p,B(p))=Q_1^{m-1}(p,B(p))Q_2^{m}(p,B(p))\dots Q_\ell^{m\ell}(p,B(p))=0$$

Si $m_1=2$, $m_2=1,\dots,m_\ell=1$, este resultado es el mismo que en (5.1). - Si $m_1>2$, etc; el argumento puede ser repetido hasta que cada exponente m_j sea reducido a 1, lo cual prueba (5.1).

$Q(p,\tau)$ es el polinomio minimal para $B(p)$, por (5.1), porque - cada raíz de $P(p,\tau)$ es una raíz del polinomio minimal, y las raí- ces de $Q(p,\tau)$ son simples y son las raices distintas del polinomio $P(p,\tau)$. Q . E . D .

De (4.3) se tiene que $E^0=TT'$. Por otro lado, sea $H_0(p)=(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n}A^j p_j$ el símbolo del operador $H_0=i(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n}A^j\frac{\partial}{\partial x_j}$. De esto último es fácil ver que, por inducción, si $A(p)=\sum_{j=1}^{n}A^j p_j$ entonces

$$B^k(p)=T'A(p)\{(E^0)^{-1}A(p)\}^{k-1}T.$$

Sustituyendo esta última expresión en (5.1) y notando que $H_0(p)=(E^0)^{-1}A(p)$, se tiene que

$$Q(p,H_0(p)) \equiv H_0^r(p)+Q_1(p)H_0^{r-1}(p)+\ldots+Q_r(p)I=0, \tag{5.2}$$

lo cual implica que el Teorema 5.1. es válido también para (5.2).

$Q(p,H_0(p))$ puede ser considerado como un polinomio en las variables $p_1,p_2,\ldots,p_n$ con coeficientes que son matrices constantes de $m\times m$. El Teorema 5.1. nos dice que el polinomio se hace identicamente cero, entonces sus coeficientes son cero. Se sigue que, si p es reemplazado por $iD=(i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,i\frac{\partial}{\partial x_n})$ en $Q(p,H_0(p))$ el resultado es un operador diferencial que se hace identicamente cero. Esto prueba el siguiente corolario.

Corolario 5.1. El operador $H_0=i(E^0)^{-1}\sum_{j=1}^{n}A^jD_j$ satisface la identidad

$$Q(iD,H_0)=H_0^r+Q_1(iD)H_0^{r-1}+\ldots+Q_r(iD)I=0. \tag{5.3}$$

Notemos que

$$H_0^k=[(H_0-zI)+zI]^k=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(H_0-zI)^j z^{k-j}+z^kI. \tag{5.4}$$

Sustituyendo (5.4) en (5.3) tenemos

Corolario 5.2. El operador H_0 satisface la identidad

$$(H_0-zI)L(iD,z)+Q(z)I=0, \tag{5.5}$$

donde $Q(z)$ es un operador diferencial parcial definido por

$$Q(z)\equiv Q(iD,z)=z^r+Q_1(iD)z^{r-1}+\ldots+Q_{r-1}(iD)z+Q_r(iD).,$$

y

$$\begin{aligned}L(iD,z)= {} & z^{r-1}I+z^{r-2}(H_0+Q_1(iD)I)+z^{r-3}[H_0^2+Q_1(iD)H_0+Q(iD)I]\\ & +\ldots+z[H_0^{r-2}+Q_1(iD)H_0^{r-3}+\ldots+Q_{r-2}(iD)I]+\\ & +[H_0^{r-1}+Q_1(iD)H_0^{r-2}+\ldots+Q_{r-1}(iD)I].\end{aligned} \tag{5.6}$$

Demostración. Es evidente de la sustitución (5.4) que (5.5) se cum ple cuando $L(iD,\zeta)$ es algún polinomio de grado r-1 en ζ y H_0. La fórmula (5.6) para $L(iD,\zeta)$ puede ser verificada por inducción sobre r. Alternativamente, (5.5) puede ser verificada directamente por la multiplicación de (5.6) por $H_0-\zeta I$ y usando (5.3). Q.E.D.

Ahora, hagamos una breve revisión de las definiciones de elipticidad para operadores diferenciales lineales y sistemas de operadores con coeficientes constantes, así como algunas de las propiedades de tales operadores que serán necesarias más adelante.

La notación usual de multi-indices es usada para polinomios y operadores diferenciales parciales. Entonces $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ denota un multi-índice con componentes no negativos α_j, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ es el orden de α, y si $p\in\mathbb{R}^n$ entonces $p^\alpha=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$, $iD=(iD_1,\dots,iD_n)$ y $(iD)^\alpha=(iD)^{\alpha_1}(iD)^{\alpha_2}\cdots(iD)^{\alpha_n}$.

Consideremos primero un operador diferencial escalar de orden arbitrario ℓ,

$$L=\sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(iD)^\alpha, \tag{5.7}$$

con coeficientes complejos a_α. La función

$$L(p)=\sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha p^\alpha,\ p\in\mathbb{R}^n \tag{5.8}$$

es llamada el símbolo de L.

Definición 5.1. Un operador L de la forma (5.7) se dice que es elíptico si y sólo si $L(p)\neq 0$, para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$.

Notemos que, dado que $L(p)$ es homogéneo es suficiente verificar que $L(p)\neq 0$ para p sobre la esfera unitaria $\Omega=\{p/|p|=1\}$. Más -

aún, $|L(p)|$ es continua sobre el conjunto compacto Ω. Estas observaciones implican el siguiente lema.

Lema 5.1. El operador (5.7) es eliptico si y sólo si existe una constante $\mu>0$ tal que

$$|L(p)|=\Big|\sum_{|\alpha|=l} a_\alpha p^\alpha\Big|\geq \mu\,|p|^l, \qquad \text{para toda } p\in\mathbb{R}^n. \tag{5.9}$$

El siguiente es un resultado bien conocido sobre operadores elipticos, el cual admitiremos sin demostración(para su demostración ver [1] p.p. 46-47).

Lema 5.2. Sea L un operador eliptico de orden l para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Si

i) los coeficientes del símbolo de L son reales,

o si

ii) $n\geq 3$,

entonces l es par.

Ahora consideremos un operador diferencial matricial de primer orden,

$$L=i\sum_{j=1}^{n} L_j D_j, \tag{5.10}$$

con coeficientes L_j que son matrices de m'xm sobre el campo de los números complejos. Tales operadores actuan sobre funciones u(x), cuyos valores son matrices de mx1, para producir funciones f(x) que son matrices de m'x1. Entonces la ecuación

$$Lu=f \tag{5.11}$$

representa un sistema de m' ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para m funciones desconocidas $u_1, u_2, \dots, u_m$. La función matriz-valuada

$$L(p)=\sum_{j=1}^{n} L_j p_j; \quad p \in \mathbb{R}^n \tag{5.12}$$

es llamada el símbolo de L.

Definición 5.2. Un operador L de la forma (5.10) se dice que es eliptico si

$$\operatorname{rank} L(p)=m, \text{ para toda } p\in\mathbb{R}^n-\{0\} \tag{5.13}$$

Notemos que, para m'=m=1, la condición (5.13) es equivalente a $L(p)\neq 0$, la condición de elipticidad para operadores escalares. Notemos, también, que una condición necesaria para la elipticidad es $m'\geq m$ (el número de ecuaciones no es menor que el número de variables) por que $\operatorname{rank} L(p)\leq \min(m',m)$.

Pasemos, ahora, a enunciar la definición de medios homogéneos fuertemente propagativos.

Definición 5.3. El operador H_0, y el medio gobernado por él, se dice que es fuertemente propagativos si y sólo si la superficie de lentitud

$$S=\left\{p\in\mathbb{R}^n \,\Big|\, \det\left(E^0+\sum_{j=1}^{n} A^j p_j\right)=0\right\} \tag{5.14}$$

es acotada.(ver (4.8)).

Los operadores fuertemente propagativos gobiernan muchos, pero no todos, de los fenómenos de propagación de ondas que son conocidos en física clásica. Más adelante daremos algunos ejemplos de los mismos. (sección 8)

De acuerdo con las factorizaciones (4.9) y (4.10), es claro - ver que la superficie de lentitud S en (5.14) es equivalente a

$$S=\{p\in\mathbb{R}^n/Q(p,1)=0\}. \tag{5.15}$$

(5.14) y (5.15) nos dicen que, el operador H_0 y el medio go-- bernado por él es fuertemente propagativo si y sólo si cada veloci dad de propagación $\tau_j(p)$ es identicamente cero o nunca es cero para $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$.

En lo que sigue derivaremos algunas de las propiedades de los operadores fuertemente propagativos y su relación que tienen éstos con los operadores elipticos.

Supongamos que H_0 es un operador fuertemente propagativo con símbolo $H_0(p)$ y eigenvalores repetidos $\tau_1(p),\tau_2(p),\dots,\tau_r(p)$. Por suposición cada $\tau_j(p)$ es identicamente cero o nunca es cero para - $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Denotemos por k el número de $\tau_j(p)$ que son identicamente cero. Entonces, puesto que $\mathrm{rank}H_0(p)+\mathrm{nul}H_0(p)=m$, es claro que

$$\mathrm{rank}H_0(p)=m-k, \text{ para todo } p\in\mathbb{R}^n-\{0\} \tag{5.16}$$

Definición 5.4. El operador H_0 se dice que tiene un deficit k si y sólo si (5.16) se cumple.

La Definición 5.4. nos dice que, todos los operadores fuertemente propagativos tienen deficit constante. Inversamente, si $H_0(p)$ tiene deficit constante para cada eigenvalor $\tau_j(p)$ una de las si-- guientes tres alternativas se cumple: $\tau_j(p)>0$ para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, ó $\tau_j(p)\equiv0$ para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, ó $\tau_j(p)<0$ para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. En ---

efecto, sea $p_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y sea $\zeta_{\sigma+1}(p), \ldots, \zeta_{\sigma+k}(p)$ los k eigenvalores que son cero tal que

$$\ldots > \zeta_\sigma(p) > 0 = \zeta_{\sigma+1}(p) = \ldots = \zeta_{\sigma+k}(p) > \zeta_{\sigma+k+1} > \ldots$$

Por lo discutido en la sección 3, existe una vecindad N(p), en la que $\zeta_1(p) \geq \ldots \geq \zeta_\sigma(p) > 0$ y $\zeta_{\sigma+k+1}(p) \geq \ldots \geq \zeta_m(p)$. Dado que $\sigma + \{m-(\sigma+k)\} = m-k$ se sigue de (5.16) que $\zeta_{\sigma+1}(p) = \ldots = \zeta_{\sigma+k} = 0$ en N(p). Entonces - los conjuntos

$$\{p / \zeta_j(p) = 0\}$$

son abiertos en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Dado que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo ($n \geq 2$ es supuesto), $\zeta_j \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ para $j = \sigma+1, \ldots, \sigma+k$. Esto prueba la afirmación puesto que los otros eigenvalores no son cero y entonces no pueden cambiar de signo, por continuidad.

Lo anterior prueba:

Lema 5.3. Un operador H_0 de la forma $H_0 = i(E^0)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ es fuertemente propagativo si y sólo si tiene deficit constante.

Un operador fuertemente propagativo es eliptico si y sólo si tiene un deficit constante k=0. La Definición 5.4. de operadores - con deficit constante es una generalización natural de la Definición 5.2. de operadores elipticos. Es claro, del Lema 5.3., que un operador H_0 deja de tener un deficit constante si y sólo si tiene una velocidad de propagación que se hace cero para cierto $p \neq 0$, pero que no es identicamente cero.

Una conección importante entre los operadores fuertemente propagativos y operadores elipticos está dada en el siguiente teorema.

Teorema 5.2. $Q(\xi)$ es un operador eliptico para cada $\xi\in\mathbb{C}-\{0\}$ si y sólo si H_0 es un operador fuertemente propagativo.

Demostración. Notemos que $Q_r=(-1)^r z_1(p)z_2(p)\ldots z_r(p)$ para toda $p\in\mathbb{R}^n$. El Teorema 5.2. está dividido en dos casos para su demostración.

Caso 1. ξ no es factor de $Q(p,\xi)$. En este caso $Q_r(p)$ no es identicamente cero y entonces $Q(\xi)$ es eliptico si y sólo si $Q_r(p)\neq 0$ para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Si $Q(\xi)$ es eliptico entonces cada $z_j(p)\neq 0$ (para $j=1,\ldots,r$) con $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, y por lo tanto para cada $z_\ell(p)\neq 0$ (para $\ell=1,\ldots,m$) con $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, dado que los conjuntos $\{z_1(p),\ldots,$ - $z_r(p)\}$ y $\{z_1(p),\ldots,z_m(p)\}$ coinciden para cada $p\in\mathbb{R}^n$. Entonces H_0 es fuertemente propagativo. Inversamente, si H_0 es fuertemente propagativo entonces, en el presente caso, $H_0(p)$ no tiene un eigenvalor $z_j(p)\equiv 0$. Con lo cual, todo $z_\ell(p)$ (con $\ell=1,\ldots,m$) y $z_j(p)$ (con $j=1,\ldots,r$) son no cero para toda $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Entonces $Q_r(p)\neq 0$ para $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ y $Q(\xi)$ es eliptico.

Caso 2. ξ es un factor de $Q(p,\xi)$. En este caso $Q_r(p)\equiv 0$ pero --- $Q_{r-1}(p)\neq 0$, porque tiene factores irreducibles simples. Entonces -- $Q(\xi)$ es eliptico si y sólo si $Q_{r-1}(p)\neq 0$ para $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Supongamos que $z_q(p)$ 0, con $1\leq q\leq r$, tal que $Q_{r-1}(p)=\prod_{j\neq q} z_j(p)$. Si $Q(\xi)$ es --- eliptico, entonces, cada $z_j(p)$, con $j\neq q$, es no cero para $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$; ésto es H_0 es fuertemente propagativo. Inversamente, si H_0 es fu--

ertemente propagativo, entonces, toda $\zeta_\ell(p)$ que no es identicamente cero es no cero para $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ y se sigue que $Q_{r-1}(p)\neq 0$ para — $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, con lo cual $Q(\xi)$ es eliptico. Q . E . D .

Larestricción de que $\xi\in\mathbb{C}-\{0\}$ en las hipótesis del Teorema 5.2. es necesaria sólo porque $Q(p,0)\equiv 0$ en el Caso 2.

Corolario 5.3. Sea H_0 fuertemente propagativo. Entonces $Q(\xi)$ es — eliptico para cada $\xi\in\mathbb{C}-\{0\}$ y $Q(p,\xi)$ tiene una de las siguientes dos formas:

Caso 1. Si H_0 es eliptico ($k=0$) entonces $r=2\rho$ es par y

$$Q(p,\xi)=\xi^{2\rho}+Q_1(p)\,\xi^{2\rho-1}+\ldots+Q_{2\rho}(p) \tag{5.17}$$

Caso 2. Si H_0 es no eliptico ($k>0$) entonces $r=2\rho+1$ es impar y

$$Q(p,\xi)=\xi^{2\rho+1}+Q_1(p)\,\xi^{2\rho}+\ldots+\xi\,Q_{2\rho}(p) \tag{5.18}$$

Demostración. Los polinomios $Q_r(p)$, $Q_{r-1}(p),\ldots,$ en (4.14) tienen coeficientes reales, porque las raices de $Q(p,\xi)$ son todas reales.- Entonces en el Caso 1.del Teorema 5.2. el orden r del operador — eliptico $Q_r(iD)$ es par, por el Lema 5.2., y similarmente en el Caso 2. del Teorema 5.2. el orden de $Q_{r-1}(iD)$ es par. Q . E . D .

Con el siguiente corolario terminamos la discusión de los operadores fuertemente propagativos.

Corolario 5.4. Sea H_0 un operador fuertemente propagativo con deficit $k>0$. Entonces

$$\hat{P}_0(p)=\frac{L_{2\rho}(p)}{Q_{2\rho}(p)}\,,\quad p\in\mathbb{R}^n-\{0\} \tag{5.19}$$

es la proyección ortogonal sobre el espacio nulo de $H_0(p)$ en el espacio unitario C_E^mo (el espacio de los vectores columna de m componentes) con el producto interno $(\xi,\eta)=\xi^* E^0 \eta$ (ξ^*denota el adjunto hermitiano de ξ).

Demostración. Por el Corolario 5.2., $(\zeta-H_0(p))^{-1}=L(p,\zeta)/Q(p,\zeta)$. La proyección ortogonal de C_E^mo sobre el espacio nulo de $H_0(p)$ es el residuo de $(\zeta-H_0(p))^{-1}$ en $\zeta=0$ ([14] p.p. 173-183). Para operadores fuertemente propagativos con $k>0$ $Q(p,\zeta)$ tiene un cero simple en $\zeta=0$; por el Corolario 5.3. Caso 2., y el residuo está dado por (5.19). Q . E . D .

6.- Operadores de Onda.(c. ref. [2] , [15]).

La Teoría de Dispersión es el estudio de un sistema interactuando sobre una escala de tiempo y/o distancia que es grande comparada con la escala de la interacción misma.

El proposito de esta sección es dar una teoría general de dispersión que puede ser aplicada, entre otras, a la dispersión para ecuaciones de onda; que es el caso que nos ocupa en esta tésis.

En algunos textos se ha desarrollado la Teoría de Dispersión aplicable a 'ecuaciones de Schrödinger' (v.g. [2] , [14] y [25]). En esta teoría se consideran dos grupos unitarios $U_j(t)=\exp(itH_j), -\infty<t<\infty$, $j=1,2$, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Estos grupos unitarios son utilizados para construir los operadores de onda

$$W_{\pm}=\underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, U_2(-t)U_1(t)P_1, \tag{6.a}$$

dondé P_j denota la proyección de $\mathcal{H}$ sobre el subespacio de continuidad absoluta de H_j. Si W_+ existe, éste es una isometría parcial en $\mathcal{H}$ con proyección inicial P_1 y proyección final $\leq P_2$. W_+ se dice 'completo' si la proyección final es igual a P_2. Resultados similares se cumplen para W_-. Si $W_{\pm}$ existen y son completos, el 'operador de dispersión' $S=W_+^*W_-$ es unitario sobre $P_1\mathcal{H}$ (más adelante se dará la interpretación de S).

Teorías de dispersión de diferentes tipos han aparecido recientemente. Estas teorías están referidas a ecuaciones de onda, en el sentido ordinario así como en el sentido generalizado. En tal caso, se consideran dos grupos unitarios $U_j(t)$ actuando en 'diferentes espacios de Hilbert $\mathcal{H}_j$', j=1,2. Estos espacios son el mismo espacio vectorial provisto de dos diferentes productos internos, de tal forma que los operadores de onda se pueden definir como en (6.a). En casos más generales, sin embargo, (6.a) no tiene sentido y tiene que ser reemplazada por una definición diferente:

$$W_{\pm} = \underset{t \to \pm\infty}{\text{s-lim}}\, U_2(-t) J U_1(t) P_1, \tag{6.b}$$

donde $J \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. (Para cualquiera dos espacios de Banach X,Y, denotamos por B(X,Y) el conjunto de todos los operadores lineales acotados de X a Y y escribimos B(X) para B(X,X)). Llamamos a J el 'operador de identificación', aunque no siempre sucede que J sea biyectivo ni inyectivo. A los operadores de onda definidos por (6.a) sobre un solo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ los llamaremos 'operadores de onda tipo Schrödinger', para distinguirlos de los más generales (6.b) con dos espacios.

En lo que sigue nos propondremos a estudiar propiedades generales de los operadores de onda (6.b), y condiciones suficientes para su existencia y completitud. En general $W_{\pm}$ no es parcialmente isométrico, a diferencia de los operadores tipo Schrödinger, pero en muchos casos de interés práctico lo son.

Hay que hacer notar la importancia del operador de identificación. A saber, J no está únicamente determinado en base a la física de problemas específicos. Este hecho ha sido opacado por la definición (6.a), la cual es usada bajo la suposición tácita de que el operador de identificación y el operador identidad coinciden.

Pero , una pequeña reflexión revela que ésto no es así. Para ilustrar este hecho, consideremos las ecuaciones de Maxwell (las cuales se discuten ampliamente en el ejemplo dos de la sección 8). Para ésto es suficiente notar que los campos electromagnéticos no perturbados y perturbados están descritos por grupos unitarios $U_j(t)$, actuando en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_j$ que son $\left[L^2(\mathbb{R}^3)\right]^6$, con ciertas matrices de densidad, positivas definidas, $E_j(x)$, $j=1,2$; donde $E_1(x)=E_1$ es constante. Se supone que $E_2(x)$ está uniformemente acotada inferior y superiormente, tal que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son el mismo espacio vectorial L con diferentes métricas. El elemento $u=u(x,t)$ de L_2 es el agregado del campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{H}$.

De manera natural, se podría decir que la identificación está hecha por la identidad de $u(x,t)$ con un elemento de L_2. Esta identificación nos dice que los estados de los campos no perturbados y perturbados son identificados si ellos tienen los mismos

$\vec{E}$ y $\vec{H}$ en todo $\mathbb{R}^3$. Pero, ¿porqué no podemos identificar los dos estados por $\vec{D}$ y $\vec{B}$ (el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética), por ejemplo, en lugar de $\vec{E}$ y $\vec{H}$?. Estos dos modos de identificación son claramente diferentes, ya que $E_1 \neq E_2(x)$ implica que la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética son diferentes para los dos campos. Por supuesto, existen muchas otras maneras diferentes de identificación que se pueden exigir iguales a alguna de las anteriores.

Es inútil intentar decir que identificación es la 'correcta', ya que ésto no es un problema matemático y quizas no siempre uno físico. Entonces se puede admitir en general que existen muchas teorías de dispersión para un par dado U_1, U_2, de acuerdo a las diferentes elecciones del operador de identificación J.

Afortunadamente, sin embargo, existen pocas teorías de dispersión diferentes para un par de grupos dados U_1, U_2, debido a que la diferencia en J es frecuentemente irrelevante 'asintóticamente', y es exactamente el comportamiento asintótico del sistema lo que concierne a la Teoría de Dispersión. Matemáticamente, dos operadores de identificación J y $\bar{J}$ son (asintóticamente) equivalentes si $s\text{-}\lim(J-\bar{J})U_1(t)P_1=0$. En tal caso los operadores de onda obtenidos usando J y $\bar{J}$ son los mismos, como se puede ver facilmente de (6.b). Se puede mostrar en muchos casos que todas las identificaciones razonables son equivalentes, tal que tenemos esencialmente una única teoría de dispersión. En particular, este es el caso con las ecuaciones de Maxwell, mencionadas anteriormente. Intuitivamente ésto es debido al hecho de que las ondas se van al infinito, donde E_1 y $E_2(x)$ son supuestos iguales asintóticamente, y entonces las identificaciones para $\vec{E}$ y $\vec{H}$, y para $\vec{D}$ y $\vec{B}$ son equivalentes.

Puede parecer, después de todo, que hemos llegado a una conclusión trivial. Pero existe por lo menos un resultado positivo de esas consideraciones. Digamos, entre todas las identificaciones equivalentes se puede elegir una J particular, la cual sea matemáticamente más conveniente. Por ejemplo, frecuentemente sucede que existe una J 'unitaria' de $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$, entre identificaciones equivalentes. En este caso (6.b) dá

$$J^{-1}W_{\pm}=\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\ \hat{U}_2(-t)U_1(t)P_1, \qquad (6.c)$$

donde $\hat{U}_2(t)=J^{-1}U_2(t)J$ es un grupo unitario que actúa en el mismo espacio $\mathcal{H}_1$, de la misma forma que $U_1(t)$. Entonces hemos reducido el problema a uno del tipo de los operadores de onda tipo Schrödinger, para los cuales posiblemente existan resultados aplicables. Esto explica también porque los operadores de onda son parcialmente isométricos en muchos casos.

Si la reducción (6.c) para el caso del tipo Schrödinger es válida, no necesariamente se sigue que la dispersión para las ecuaciones de onda pueda ser manejada por resultados conocidos.

La dificultad es que la desviación de U_2 de U_1 es, algunas veces, más grande que una desviación encontrada en las ecuaciones ordinarias de Schrödinger; sobre todo porque, uno o ambos generadores de estos grupos son operadores diferenciales de primer orden con coeficientes variables. Pero ésto no es más que una dificultad técnica, que puede existir en las ecuaciones de Schrödinger y si se consideran tipos más generales de ecuaciones.

Para finalizar esta discusión, veamos cual es el significado del operador de dispersión $S=W_+^*W_-$. Para tal efecto consideremos un sistema físico en el cual t designa el tiempo.

En la presencia de la interacción, la evolución en el tiempo de un vector de estado $g\epsilon\mathcal{H}_2$ está gobernada por el grupo $U_2(t)$; i.e. el vector correspondiente a un tiempo t es $U_2(t)g$. En una situación típica de dispersión lo que se quiere es aproximar la evolución total, en algún sentido, por la evolución libre cuando $t\to\pm\infty$. Esto es más fácil de hacer suponiendo que, dado $g\epsilon\mathcal{H}_2$ existen dos vectores de estado $f_\pm\epsilon\mathcal{H}_1$, tales que $f_\pm=P_1f_\pm$ y $W_\pm f_\pm=g$ (ver ec. (6.b)); i.e. $U_2(t)g$ converge fuertemente a $U_1(t)f_\pm$ cuando $t\to\pm\infty$:

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|U_2(t)g-JU_1(t)f_-\right\|=0 \tag{6.d}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|U_2(t)g-JU_1(t)f_+\right\|=0.$$

(6.d) nos dice que $U_2(t)g$ es prácticamente indistinguible - de $U_1(t)f_-$ en un pasado remoto y de $U_1(t)f_+$ en un futuro distante. El requisito de la existencia de los vectores $f_\pm$, los cuales satisfacen (6.d), es una restricción severa de los grupos $U_1(t)$, $U_2(t)$ y corresponden esencialmente a la imposición de la condición asintótica para el sistema de dispersión dado.

En una situación práctica de dispersión se empieza en tiempos grandes negativamente de un vector de estado dado, cuya evolución en el tiempo se supondra gobernada por el grupo (de evolución no perturbado) $U_1(t)$. Esto corresponde a dar un vector de - estado f_- en (6.d). Hay que hacer notar que en (6.d) f_- es interpretado como el estado inicial al <u>tiempo</u> <u>t=0</u>; i.e. el estado dado en un tiempo negativo t es $U_1(t)f_-$. f_- es elemento del subespacio de continuidad absoluta de $\mathcal{H}_1$. La primera parte de la condición asintótica entonces requiere de la existencia de un vector $g\epsilon\mathcal{H}_2$, tal que la primera ecuación en (6.d) se cumple. La segunda parte de la condición asintótica demanda la existencia de un vector f_+, elemento del subespacio de continuidad absoluta de $\mathcal{H}_1$, que satisfaga la segunda condición en (6.d), donde g es un vector abtenido a partir de f_-. Esto se puede representar gráficamente (Fig. 6.1), considerando J=I, donde I es el operador identidad.

Entonces, el efecto de dispersión en esta gráfica es el de - asociar con cada vector de estado inicial f_-, elemento del subes pacio de continuidad absoluta de $\mathcal{H}_1$, un vector de estado final f_+; con lo cual la correspondencia $f_- \longmapsto f_+$ define un operador lineal sobre el subespacio de continuidad absoluta de $\mathcal{H}_1$. Este operador es llamado el operador de dispersión S y es el objeto matemático central de la Teoría de Dispersión. De acuerdo con lo anterior se tiene que $S=W_+^* W_-$. La diferencia entre S y el operador identidad es expresada por el efecto de interacción, ya que si no existe interacción esta diferencia es cero.

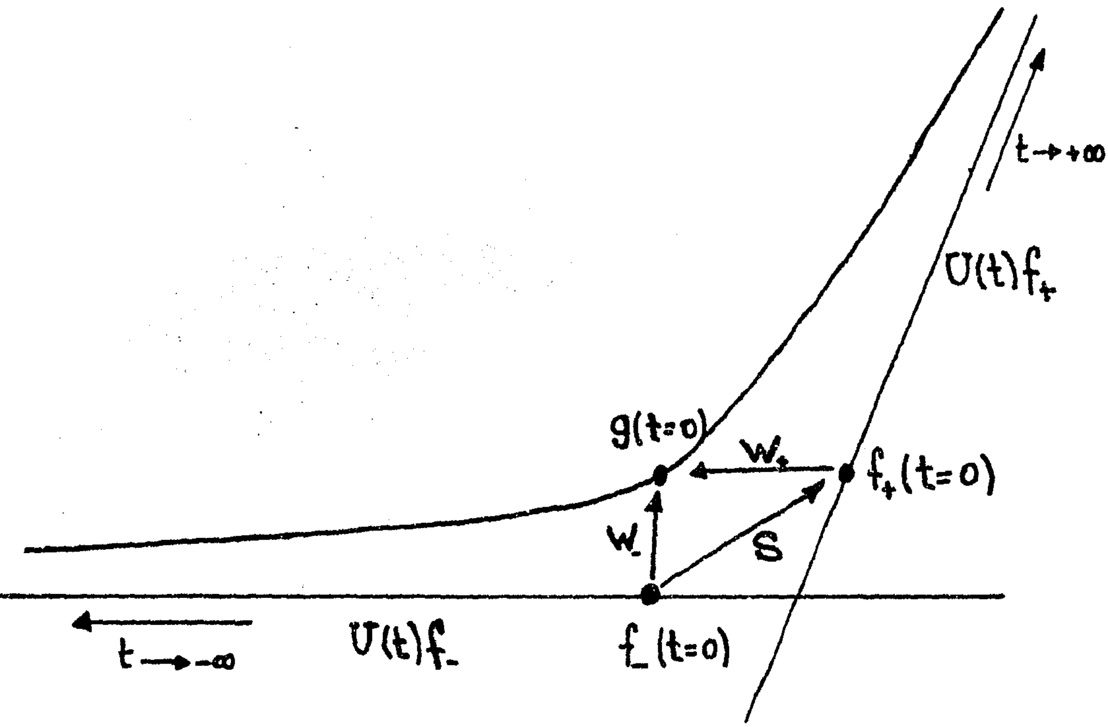

Figura 6.1. Representación gráfica de la condición asintótica.

6.1. Operadores de Entrelazamiento.

Sean $\mathcal{H}_j$, j=1,2, dos espacios de Hilbert separables. Usemos los mismos símbolos $\| \ \|$ y $(\ , \ )$ para las normas y los productos internos en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Para cada j consideremos un grupo unitario fuertemente continuo $U_j= U_j(t)$, $-\infty<t<\infty$. Denotemos por H_j el generador autoadjunto de U_j tal que $U_j(t)=\exp(-itH_j)$. La familia espectral asociada con H_j es denotada por $\{E_j(\lambda)\}$.

Definición 6.1. $T\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ es llamado un 'operador de entrelazamiento' para el par U_1, U_2 (o para el par H_1, H_2) si

$$U_2(t)T=TU_1(t), \quad -\infty<t<\infty \ . \tag{6.1}$$

Proposición 6.1. (6.1) es equivalente a

$$H_2T\supset TH_1, \tag{6.2}$$

$$E_2(\lambda)T = TE_1(\lambda), \quad -\infty<\lambda<\infty \ ; \tag{6.3}$$

i.e. (6.1), (6.2) y (6.3) son equivalentes.

Demostración. Sea $f\in D(H_1)$. Por el Teorema de Stone ([23]), se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \frac{U_1(t)f-f}{t}$$

existe y es igual a $-itH_1U_1(t)f$; un argumento análogo se cumple para $g\in D(H_2)$. Dado que $T\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ no depende del parámetro t, se tiene de (6.1) (aplicando el Teorema de Stone y tomando $g=Tf$ en el primer miembro de la igualdad)que

$$H_2U_2(t)Tf=TH_1U_1(t)f, \quad -\infty<t<\infty.$$

Tomando, en particular, $t=0$ en esta última igualdad se llega a

$$H_2T\supset TH_1.$$

Lo cual demuestra la equivalencia de (6.1) con (6.2).

Por otro lado, multiplicando ambos miembros de (6.1) por $e^{i\zeta s}$; $\mathrm{Im}\zeta>0$, e integrando de $0<s<\infty$ (transformación de Laplace), entonces

$$(H_2-\zeta)^{-1}T=T(H_1-\zeta)^{-1}. \qquad (6.1a)$$

Lo mismo se cumple para $\mathrm{Im}\zeta<0$, solo necesitamos integrar de $-\infty<s<0$

Para toda λ para las que $E_j(\lambda)$ es continua, $E_j(\lambda)$ puede ser expresada como una integral de $(H_j-\zeta)^{-1}$ a lo largo de cierta curva ([14] , Lema VI-5.6. pag. 359). Dado que existe a lo más un número numerable de discontinuidades de $E_j(\lambda)$, se sigue de (6.1a) que

$$E_2(\lambda)T=TE_1(\lambda), \qquad (6.1b)$$

excepto para las discontinuidades de $E_j(\lambda)$. Pero, por definición, $E_j(\lambda)$ es continua por la derecha, con lo cual (6.1b) es válida para toda λ en la recta real; i.e.

$$E_2(\lambda)T=TE_1(\lambda), \quad -\infty<\lambda<\infty.$$

Lo cual demuestra que (6.1) implica (6.3). La implicación inversa se sigue inmediatamente de la definición de $E_j(\lambda)$. Q . E . D.

Para continuar con la discusión de los operadores de entrelazamiento, es necesario revisar la noción de descomposición polar de un operador.

Sea $T\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ un operador densamente definido; i.e. su dominio es denso en $\mathcal{H}_1$. Consideremos la forma simétrica $h[u,v]=(Tu,Tv)$; es fácil ver que h es no negativa y cerrada, con el operador autoadjunto asociado $T_h=0=T^*T$ ([14] , pag.326). Sea $0^{1/2}=G$. El segundo teorema de representación ([14] , pag.331) nos dice: $(Tu,Tv)=(Gu,Gv)$, $\|Tu\|=\|Gu\|$; $u,v\in D(T)=D(G)$. Esto implica que - $Gu\longrightarrow Tu$ define un mapeo isométrico V de $R(G)\subset\mathcal{H}_1$, sobre $R(T)\subset\mathcal{H}_2$: $Tu=VGu$. Por continuidad, V puede ser extendido a un operador isométrico de $\overline{R(G)}$ (la clausura de R(G)) sobre $\overline{R(T)}$. Más aún, V puede ser extendido a un operador de $B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, al cual denotamos — también por V, tomando $Vu=0$ para $u\in R(G)^{\perp}=N(G)$ (núcleo de G). Entonces V, así definido, es parcialmente isométrico con conjunto inicial $\overline{R(G)}$ y conjunto final $\overline{R(T)}$, y tenemos: $T=VG$, $D(T)=D(G)$. - Esta descomposición del operador T es llamada la 'descomposición polar de T'; aquí G es autoadjunto no negativo y V es parcialmente isométrico. Si a V se le pide , como antes, tener conjunto - inicial $\overline{R(G)}$, la descomposición polar del operador T es única — ([14] , pag.334). Por analogía con el caso de los números complejos, G es llamado el 'valor absoluto de T', y es denotado por $|T|$.

Tal descomposición del operador T nos pone en posibilidad de demostrar un lema referente a los operadores de entrelazamiento.

Lema 6.1. Sea T un operador de entrelazamiento para el par U_1,U_2.

Sea $T=V|T|$ la descomposición polar de T; entonces $|T|=(T^*T)^{1/2}$ es autoadjunto no negativo en $\mathcal{H}_1$ y $V\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ es una isometría parcial con proyección inicial $E_1=V^*V$, igual al soporte[1)] de T (y también de $|T|$). Entonces $|T|$ y E_1 conmutan con H_1, y $|T^*|$ y $E_2=VV^*$ (proyección final para V) conmutan con H_2. V es también un operador de entrelazamiento para el par U_1, U_2. Las partes de H_1 y H_2 en los subespacios reducidos $E_1\mathcal{H}_2$ y $E_2\mathcal{H}_2$, respectivamente, son unitariamente equivalentes.

Demostración. La ecuación (6.1) implica que $T^*U_2(t)T=|T|^2U_1(t)$. Tomando los adjuntos y reemplazando t por -t, obtenemos $T^*U_2(t)T=U_1(t)|T|^2$. Entonces $|T|^2$, y por lo tanto $|T|$ también, conmuta con H_1 ([22] , p.p. 357-360). Esto implica que E_1, el soporte de $|T|$, también conmuta con H_1. Puesto que T^* es un operador de entrelazamiento para el par U_2, U_1 y $T^*=V^*|T^*|$ es su descomposición polar canónica, se sigue que $|T^*|$ y E_2 conmutan con H_2.

Sustituyendo $T=V|T|$ en (6.1) y usando la conmutatividad de $|T|$ con $U_1(t)$, obtenemos $[U_2(t)V-VU_1(t)]\,|T|=0$. Puesto que el rango de $|T|$ tiene clausura $E_1\mathcal{H}_1$, se sigue que $[U_2(t)V-VU_1(t)]\,E_1=0$. Dado que E_1 conmuta con $U_1(t)$ y $VE_1=V$, obtenemos la relación de entrelazamiento

$$U_2(t)V=VU_1(t),\quad -\infty<t<\infty. \tag{6.4}$$

[1)] El soporte de $T\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ es el complemento ortogonal en $\mathcal{H}_1$ de N(T), el espacio nulo de T, o la proyección asociada.

(6.4) implica que la parte de H_2 en $E_2\mathcal{H}_2$ es unitariamente equivalente a la parte de H_1 en $E_1\mathcal{H}_1$. Q . E . D.

6.2. Operadores de Onda en Dos Espacios de Hilbert.

Sean los grupos unitarios U_j, $j=1,2$, dados en 6.1. Denotemos por P_j la proyección de $\mathcal{H}_j$ sobre el subespacio de continuidad absoluta de H_j. Esto es, $P_j\mathcal{H}_j$ es el conjunto de todos los $\phi\in\mathcal{H}_j$ tal que $\|E_j(S)\phi\|=0$ cada vez que $m(S)=0$ ($m(S)$ denota la medida de Lebesgue de S); aquí $S\to E_j(S)$ es la medida espectral sobre los conjuntos de Borel $S\subset\mathbb{R}$ construida a partir de $\{E_j(\lambda)\}$.

Definición 6.2. Sea $J\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Si

$$W_+=\underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\ U_2(-t)JU_1(t)P_1\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) \tag{6.5}$$

existe, W_+ es llamado el (+)-operador de onda para la tercia U_1, U_2, J y es denotado por $W_+(U_2,U_1;J)$ o algunas veces por $W_+(H_2,H_1;J)$. Similarmente definimos el (-)-operador de onda $W_-(U_2,U_1;J)$ reemplazando $t\to\infty$ por $t\to-\infty$.

En lo que sigue sólo se harán consideraciones para W_+, ya que las mismas consideraciones se pueden hacer para W_- de una manera obvia.

Teorema 6.1. Si $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ existe, éste es un operador de entrelazamiento para el par U_1, U_2. Sea E_{1+} y E_{2+} los soportes de W_+ y W_+^*, respectivamente. Entonces $|W_+|$ y E_{1+} conmutan con H_1, y $|W_+^*|$ y E_{2+} conmutan con H_2. Las partes de H_1 y H_2 en los subespacios reducidos $E_{1+}\mathcal{H}_1$ y $E_{2+}\mathcal{H}_2$, respectivamente, son unitariamente equivalentes. Más aún, tenemos

$$W_+=W_+P_1=P_2W_+; \quad E_{1+}\leq P_1, \quad E_{2+}\leq P_2. \tag{6.6}$$

Demostración. Puesto que $U_1(t)$ y P_1 conmutan, la propiedad de entrelazamiento de W_+ se sigue directamente de (6.5). $W_+=W_+P_1$ es también una consecuencia directa de (6.5). Las dos desigualdades en (6.6) son equivalentes a las dos igualdades allí. Entonces todas las afirmaciones del teorema se siguen del Lema 6.1, excepto $W_+=P_2W_+$.

(6.3) para $T=W_+$ implica que $E_2(S)W_+\phi=W_+E_1(S)\phi$ para todo conjunto de Borel S y $\phi\in\mathcal{H}_1$. Dado que $W_+\phi=W_+P_1\phi$, tenemos

$$\|E_2(S)W_+\phi\|\leq \|W_+\| \, \|E_1(S)P_1\phi\| =0$$

si $m(S)=0$. Entonces $W_+\phi\in P_2\mathcal{H}_2$, para cada $\phi\in\mathcal{H}_1$ tal que $W_+=P_2W_+$.

Q . E . D .

Definición 6.3. El operador de onda $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ se dice que es semicompleto si $E_{1+}=P_1$. Se dice que es completo si además $E_{2+}=P_2$.

En general W_+ mapea $P_1\mathcal{H}_1$ en $P_2\mathcal{H}_2$. W_+ es semicompleto si y sólo si el mapeo es inyectivo y tiene rango denso $P_2\mathcal{H}_2$.

Corolario 6.1. Si $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ existe y es semicompleto, la parte absolutamente continua de H_1 es unitariamente equivalente a una parte de la parte asolutamente continua de H_2. Si W_+ es completo, las partes absolutamente continuas de H_1 y H_2 son unitariamente equivalentes.

Hay que hacer notar que, si $T\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ es un operador de entrelazamiento para el par U_1, U_2, entonces $W_\pm(U_2,U_1;T)$ existe y es igual a TP_1. En particular, si $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ existe, entonces $W_\pm(U_2,U_1;W_+)$ existe y es igual a $W_+=W_+P_1$ mismo.

Dados dos grupos unitarios U_1, U_2, se puede en general construir muchos operadores de onda por diferentes elecciones del operador de identificación $J\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$; pero algunos J diferentes generan el mismo operador de onda.

Definición 6.4. Sean J, $\bar{J}\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Decimos que J y $\bar{J}$ son $(U_1,+)$-equivalentes si

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}(J-\bar{J})U_1(t)P_1=0 \tag{6.7}$$

Teorema 6.2. Sean J, $\bar{J}\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Entonces

$$W_+(U_2,U_1;J)=W_+(U_2,U_1;\bar{J}) \tag{6.8}$$

si y sólo si J y $\bar{J}$ son $(U_1,+)$-equivalentes. Aqui (6.8) significa que si uno de los dos miembros existe, entonces el otro también existe y es igual al primero.

Demostración. La demostración es trivial; en efecto, ésta se sigue inmediatamente de

$$\left\| U_2(-t)JU_1(t)P_1\phi-U_2(-t)\bar{J}U_1(t)P_1\phi \right\| = \left\|(J-\bar{J})U_1(t)P_1\phi\right\| . \qquad \text{Q.E.D.}$$

En virtud del Teorema 6.2; $W_+(U_2,U_1;J)$ depende solamente de la $(U_1,+)$-clase de equivalencia a la que J pertenece. Practicamente ésto reduce grandemente el número de operadores que pueden ser construidos para un par dado U_1, U_2.

Teorema 6.3 (Regla de la Cadena). Sean U_j, $j=1,2,3$, tres grupos unitarios actuando respectivamente en espacios de Hilbert $\mathcal{H}_j$. Sea $J\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ y $J'\in B(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3)$. Si $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ y $W'_+=W_+(U_3,U_2;J')$ existen y si $J''\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_3)$ es $(U_1,+)$-equivalentes a $J'J$, entonces $W''_+=W_+(U_2,U_1;J'')$ existe y es igual a W'_+W_+. W''_+ es (semi)completo si tanto W_+ y W'_+ son (semi)completos.

Demostración. Multiplicando las dos expresiones definidas por W'_+ y W_+, obtenemos

$$W'_+W_+=\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\ U_3(-t)J'P_2JU_1(t)P_1,$$

donde hemos usado la conmutatividad de P_2 con $U_2(t)$. Para probar la existencia de W''_+ y su identidad con W'_+W_+, es suficiente mostrar que

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}(J'P_2J-J'')U_1(t)P_1=0.$$

Puesto que J'' es $(U_1,+)$-equivalente a $J'J$, es suficiente, entonces, probar que

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}(1-P_2)JU_1P_1=0.$$

Pero ésto es equivalente a

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}U_2(-t)(1-P_2)JU_1(t)P_1=(1-P_2)\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}U_2(-t)JU_1(t)P_1=(1-P_2)W_+=0$$

(ver (6.6)).

W_+ mapea $P_1\mathcal{H}_1$ en $P_2\mathcal{H}_2$ y W'_+ mapea $P_2\mathcal{H}_2$ en $P_3\mathcal{H}_3$. Si ambos mapeos son inyectivos lo mismo es cierto para $W''_+=W'_+W_+$. Esto prueba la afirmación de semicompletes. Si W_+ y W'_+ son completos, entonces $W_+P_1\mathcal{H}_1$ es denso en $P_2\mathcal{H}_2$ y W'_+ es denso en $P_3\mathcal{H}_3$. Entonces $W''_+P_1\mathcal{H}_1 = W'_+W_+P_1\mathcal{H}_1$ es denso en $P_3\mathcal{H}_2$:W''_+ es completo. Q . E . D .

Supongamos, ahora, que $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ existe. Si J es invertible con $J^{-1}\in B(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$, podemos considerar el operador de onda

$$W'_+ = W_+(U_1,U_2;J^{-1})$$

y suponer que este operador es el inverso de W_+ en cierto sentido. Cuando J^{-1} no existe a veces es imposible definir una inversa para el operador de onda.

Definición 6.5. Sea $J\in B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ y $J'\in B(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$. J' es llamado un $(U_1,+)$-asintótico inverso izquierdo para J si J'J es $(U_1,+)$-equivalente a I (la identidad en $\mathcal{H}_1$); ésto es, si

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}(J'J-I)U_1(t)P_1=0 \tag{6.9}$$

Teorema 6.4. Sea $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ y supongamos que existe, y sea J' un $(U_1,+)$-asintótico inverso izquierdo para J. Entonces W_+ es semicompleto y

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\ U_1(-t)J'U_2(t)W_+=P_1, \tag{6.10}$$

$$\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}(JJ'-I)U_2(t)W_+=0. \tag{6.11}$$

Demostración. Se sigue de la definición de W_+ que

$$JU_1(t)P_1\sim U_2(t)W_+,\ t\to\infty \tag{6.12}$$

donde $\sim$ significa que la diferencia de los dos miembros tiende a cero fuertemente. Aplicando J' a (6.12) y usando (6.9), obtenemos

$$U_1(t)P_1\sim J'U_2(t)W_+, \tag{6.13}$$

que implica (6.10). (6.11) se sigue de (6.9) multiplicando por la izquierda con J y usando (6.12). W_+ es semicompleto porque $W_+\emptyset=0$ implica $P_1\emptyset=0$, por (6.10). Q . E . D .

Teorema 6.5. Supongamos que las hipótesis del Teorema 6.4 se satisfacen, tal que W_+ existe y es semicompleto. W_+ es completo si y sólo si las siguientes dos condiciones se satisfacen: (i) J es un $(U_2,+)$- asintótico inverso izquierdo para J', y (ii) $W'_+=W_+(U_1, U_2;J')$ existe, cuando estas condiciones se tienen, W'_+ es también completo y

$$W'_+W_+=P_1, \quad W_+W'_+=P_2. \tag{6.14}$$

Demostración. Supongamos que (i) y (ii) son verdaderas. Se sigue del Teorema 6.4, aplicado a la tercia U_2, U_1, J', que W'_+ es semicompleto. Más aún, en vista de que $W_+=P_2W_+$, (6.10) dá $W'_+W_+=P_1$. Esto implica que $R(W'_+)\supset P_1\mathcal{H}_1$. Pero, dado que la inclusión opuesta también es verdadera, tenemos $R(W'_+)=P_1\mathcal{H}_1$. Entonces W'_+ es completo. Puesto que existe una simetría completa entre W_+ y W'_+, tenemos también, $W_+W'_+=P_2$ y W_+ es completo.

Inversamente, supongamos que W_+ es completo. Entonces $R(W_+)$ es denso en $P_2\mathcal{H}_2$ y tal que (6.10) implica la existencia de W'_+, con $W'_+W_+=P_1$. Similarmente, (6.11) implica que s-lim$(JJ'-I)U_2(t)P_2=0$; ésto es, (i) es verdadera. Q . E . D .

Teorema 6.6. Sea $W_+=W_+(U_2,U_1;J)$ y supongamos que existe y es completo. Sea J' un $(U_1,+)$-asintótico inverso izquierdo para J. Entonces, $J' \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ es $(U_2,+)$-equivalente a J' si y sólo si $\bar{J}'$ es un $(U_1,+)$-asintótico inverso izquierdo para J'.

Demostración. Dado que J' es un $(U_1,+)$-asintótico inverso izquierdo para J lo mismo es verdad para $\bar{J}'$ si y sólo si $(J'-\bar{J}')U_1(t) P_1 \sim 0$, que es equivalente a $(J'-\bar{J}')U_2(t)W_+ \sim 0$, por (6.12). Pero la última relación implica la $(U_2,+)$-equivalencia de J' y $\bar{J}'$, porque $W_+ W_+^* = P_2$ por el Teorema 6.5. Q . E . D .

Por varias razones estamos particularmente interesados en el caso en el que el operador de onda es parcialmente isométrico.

Teorema 6.7. Supongamos que $W_+ = W_+(U_2, U_1; J)$ existe. Para que W_+ sea una isometría parcial con proyección inicial P_1, es necesario y suficiente que

$$\lim_{t\to\infty} \|JU_1(t)P_1\phi\| = \|P_1\phi\| , \quad \phi \in \mathcal{H}_1 \tag{6.15}$$

Demostración. Trivial. En efecto, se sigue de una manera obvia de $\|W_+\phi\| = \lim \|U_2(-t)JU_1(t)P_1\phi\| = \lim \|JU_1(t)P_1\phi\|$. Q . E . D .

Teorema 6.8. Supongamos que $W_+ = W_+(U_2, U_1; J)$ existe. W_+ es una isometría parcial con proyección inicial P_1, si existe un operador unitario $\bar{J}$ de $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ que es $(U_1,+)$-equivalente a J.

Demostración. (6.15) se satisface si J es reemplazado por $\bar{J}$, lo cual es permitido porque J es equivalente a $\bar{J}$. Q . E . D .

Teorema 6.9. Supongamos que $W_+ = W_+(U_2, U_1; J)$ existe. Supongamos que J^* (el adjunto de J) es un $(U_1,+)$-asintótico inverso izquierdo para J. Entonces W_+ es semicompleto y parcialmente isométrico —

con proyección inicial P_1. W_+ es completo si y sólo si $W'_+=W_+(U_1,U_2;J^*)$ existe y J es un $(U_2,+)$-asintótico inverso izquierdo para J^*. Si estas condiciones se satisfacen, entonces $W'_+=W^*_+$.

Demostración. La primera afirmación se sigue ya que (6.15) se satisface, en efecto

$$\lim \|JU_1(t)P_1\phi\|^2=\lim(U_1(-t)J^*U_1(t)P_1\phi,P_1\phi)=(P_1\phi,P_1\phi)$$

puesto que $J^*JU_1(t)P_1 \sim U_1(t)P_1$. La segunda afirmación se sigue del Teorema 6.5. El Teorema 6.5 también muestra que $W_+W'_+=P_2$. Multiplicando por la izquierda con W^*_+ se tiene que $W'_+=W^*_+$, porque -- $W^*_+W_+=P_1$; $P_1W'_+=W'_+$, y $W^*_+P_2=W^*_2$. Q . E . D .

7.- La Existencia del Operador de Onda.(c. ref. [4]).

Antes de empezar nuestra discusión, hagamos enfasis en algunas abservaciones y resultados obtenidos hasta ahora.

Dado el operador perturbado

$$H=iE(x)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^{j}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{7.1}$$

la matriz E(x) es tal que:

i) existen constantes c y c' tales que

$$cI\leq E(x)\leq c'I; \text{ para toda } x, \tag{7.a}$$

y además supondremos que

ii) $(1+|x|^2)\ \left|(E^o)^{-1}E(x)-I\right|\in L_2.$ (7.b)

El operador H, definido en (7.1), puede ser redefinido por (ver (2.20))

$$D(H)=D(H_0),\ y$$
$$Hf=E(x)^{-1}E^oH_0f; \tag{7.2}$$

y debido al Teorema 2.2 H es autoadjunto.

En términos de estos operadores, las soluciones al problema de Cauchy

$$E^o\frac{\partial u^o}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}A^j\frac{\partial u^o}{\partial x_j}\quad ;\ u^o(x,0)=f^o(x) \tag{7.3}$$

$$E(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}A^j\frac{\partial u}{\partial x_j}\quad ;\ u(x,0)=f(x)$$

están dadas (ver (2.25) y (2.26)) por

$$u^{o}=\exp(-itH_{0})f^{o} \quad \text{y} \quad u=\exp(-itH)f,$$

respectivamente.

El operador de onda W aparece de manera natural al estudiar la igualdad asintótica de u^{o} y u para valores grandes de t. - La condición de ésto es simplemente

$$\lim_{t\to\infty} \| e^{-itH}f-J\,e^{-itH_{o}}f^{o} \| =0,$$

donde J es la identificación de $\mathcal{H}_{o}$ en $\mathcal{H}$: Jg=g. Dado que $\|e^{-itH}\|=1$, esta condición es equivalente a

$$\lim_{t\to\infty} \| f-e^{-itH}Je^{-itH_{o}}f^{o} \| =0 \qquad (7.4)$$

Dado f^{o}, es natural suponer que, la proyección ortogonal de f^{o} en el eigenespacio de H_{O} es cero, ya que tal proyección puede sólo generar soluciones estáticas de (7.3). En vista de esta observación y de (7.4), el operador de onda está definido por

$$W=W(H,H_{0};J)=\text{s-}\lim_{t} e^{-itH}Je^{-itH_{o}}P, \qquad (7.5)$$

(ver Definición 6.2) donde P es la proyección en el subespacio - de continuidad absoluta de H_{0}. Se sigue que u y u^{o} son asintóticamente iguales para $t\to\infty$ si y sólo si $f^{o}=Pf^{o}$ y $f=Wf^{o}$.

De acuerdo con la Definición 6.2, (7.5) es el (+)-operador de onda para la tercia H, H_{O} y J. En lo que sigue sólo se harán consideraciones para este operador, ya que las mismas consideraciones se pueden hacer para el (-)-operador de onda de una manera obvia.

Antes de continuar con nuestra discusión daremos dos definiciones relativas a conjuntos.

Para cualquier subconjunto no vacío $S \subset X$ (X espacio vectorial), el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S es llamado el 'conjunto generado por S'. Un subconjunto $S \subset X$ se dice 'fundamental' si la clausura del conjunto generado por S es todo el espacio X; i.e. la clausura del conjunto generado por S es siempre denso.

El siguiente teorema nos expresa una condición suficiente para la existencia de operadores de onda. Este teorema y su demostración están basados en el llamado 'Método de Cook'. Este método usa como principio: si f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ con f' en $L_1(\mathbb{R})$, entonces $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, dado que

$$\left|f(t)-f(s)\right| = \left|\int_s^t f'(u)du\right| \leq \int_s^t \left|f'(u)du\right| \longrightarrow 0,$$

cuando s,t se van a ∞ $(s<t)$.

Teorema 7.1 ([14] , pag. 535). Sean H_1 y H_2, dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert; y sea D un subconjunto fundamental del subespacio de continuidad absoluta de H_1, con las siguientes propiedades: si $u \in D$, existe un real s tal que $e^{-itH_1}u \in D(H_1) \cap D(H_2)$; para toda $s \leq t < \infty$, $(H_2-H_1)e^{-itH_1}u$ es continua en t, y $\|(H_2-H_1)e^{-itH_1}u\|$ es integrable sobre (s,∞). Entonces, si P_1 es la proyección ortogonal en el subespacio de continuidad ab soluta de H_1 se sigue que $W(H_2,H_1)=s\text{-}\lim e^{-itH_2}\, e^{-itH_1}P_1$ existe.

Demostración. Sea $W(t)=\exp(itH_2)\,\exp(-itH_1)$, entonces $W(H_2,H_1)=$ $\underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\, W(t)P_1$. Si $u\in D$, tenemos que

$$\frac{dW(t)u}{dt}=\frac{d}{dt}\left(e^{itH_2}e^{-itH_1}u\right)=i\,e^{itH_2}(H_2-H_1)\,e^{-itH_1}u,$$

y esta derivada es continua por hipótesis. Entonces por integración

$$W(t'')u-W(t')u=i\int_{t'}^{t''} e^{itH_2}(H_2-H_1)e^{-itH_1}u\,dt.$$

Puesto que $\left\| e^{itH_2}\right\| =1$, tenemos

$$\left\|W(t'')u-W(t')u\right\|\leq\int_{t'}^{t''}\left\|(H_2-H_1)e^{-itH_1}u\right\|dt.$$

Dado que el integrando de la derecha es intagrable sobre (s,∞), el miembro de la derecha tiende a cero cuando $t',t''\to\infty$ y $\underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}$ $W(t)u$ existe.

Puesto que ésto es cierto para toda $u\in D$, que es fundamental en el subespacio de continuidad absoluta de H_1, y dado que $W(t)$ es uniformemente acotada, se sigue que el mismo límite existe para toda u del subespacio de continuidad absoluta de H_1 [1]. Esto es equivalente a la existencia de $W(H_2,H_1)=\underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_2}e^{-itH_1}P_1$. Q.E.D.

---

[1] Esto es consecuencia del siguiente lema ([14] , pag. 151):'sea $\{T_n\}$ uniformemente acotada. Entonces $\{T_n\}$ converge fuertemente (a T) si $\{T_n u\}$ converge fuertemente (a Tu) para toda u de un subconjunto fundamental del espacio X'. Aquí los operadores pertenecen a B(X,Y).

Ahora estamos en posibilidad de demostrar la existencia del operador de onda (7.5) bajo las suposiciones (7.a) y (7.b), dadas anteriormente sobre la matriz $E(x)$.

Teorema 7.2. Bajo las condiciones (7.a) y (7.b) sobre $E(x)$ el operador de onda W definido en (7.5) existe.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 7.1, es suficiente probar que para f en un cierto conjunto denso en el subespacio de continuidad absoluta de H_0, la expresión $\Gamma = \left\| (HJ-JH_0)e^{-isH_0}f \right\|$ es integrable en (T,∞), $T>0$; para que el operador de onda (7.5) exista.

En lo que sigue C denota una constante, no necesariamente la misma cada vez que aparezca. Observemos que

$$\|g\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} g\, E\, \bar{g}\, dx \le \|g\|_0 \, \|(E^0)^{-1} E(x) g\|_0 \le C\|g\| \, \|(E^0)^{-1} E g\|_0 .$$

Entonces $\|g\| \le C\|(E^0)^{-1}E(x)g\|_0$. De ésto y de (7.2) obtenemos

$$\Gamma^2 = \|(HJ-JH_0)e^{-isH_0}f\|^2 = \|(E(x)^{-1}E^0H_0 - H_0)e^{-isH_0}f\|^2 =$$

$$= \|(E(x)^{-1}E^0 - I)H_0 e^{-isH_0} f\|^2 \le$$

$$\le C\|(E^0)^{-1}E(x)\left(E(x)^{-1}E^0 - I\right)H_0 e^{-isH_0}f\|_0^2 =$$

$$= C\|(I - (E^0)^{-1}E(x))H_0 e^{-isH_0} f\|_0^2 =$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^n} (I-(E^0)^{-1}E(x))H_0 e^{-isH_0} f E^0 \overline{(I-(E^0)^{-1}E(x))H_0 e^{-isH_0} f}\,dx$$

$$\leq c\int_{\mathbb{R}^n} (I-(E^0)^{-1}E(x))H_0 e^{-isH_0} f \overline{(I-(E^0)^{-1}E(x))H_0 e^{-isH_0} f}\,dx$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^n} |(E^0)^{-1}E(x)-I|^2\,|H_0 e^{-isH_0} f|^2\,dx, \qquad (7.6)$$

Usando la notación de la sección 3, con $\hat{f}(p)=\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(p)v_j(p)$, se tiene que

$$H_0 e^{-isH_0} f = c\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip\cdot x}\sum_{j=1}^{n} \tau_j(p)\, e^{-is\tau_j(p)}\hat{f}_j(p)\,dp$$

y en coordenadas polares, $p=\sigma\omega,\ \sigma>0$

$$H_0 e^{-isH_0} f = c\sum_{j=1}^{n}\int_{|\omega|=1}\left[\int_0^\infty e^{-is\sigma\tau_j(\omega)}\, e^{i\sigma\omega\cdot x}\,\tau_j(\omega)\,\hat{f}_j(\sigma\omega)\,v_j(\omega)\,\sigma^n\,d\sigma\right]dS_\omega \qquad (7.7)$$

Dado que f es un elemento del subespacio de continuidad absoluta de H_0, $\hat{f}_j=0$ para aquellos j que corresponden a cualquier raíz $\tau_j(p)$ que es cero. Tales subíndices son excluidos en la suma dada en (7.7). Restrinjamos a f de tal forma que los $\hat{f}_j(\sigma\omega)$ son - supuestos de la forma $\hat{f}_j(\sigma\omega)=\psi_j(\omega)\phi(\sigma)$, donde el factor $\phi\in$ - $C_0^{\infty}(0,\infty)$ (el conjunto de todas las funciones infinitamente dife renciables con soporte compacto), y ψ es elemento del conjunto de funciones continuas sobre la esfera unidad y tal que existe - $\epsilon>0$ que satisface la condición de que $\psi(\omega)$ es identicamente cero si la distancia de ω al conjunto N_j^0 es menor que ϵ , donde $N_j^0=\{\omega\in\mathbb{R}^n : |\omega|=1, z_j(\omega)=0\}$. Retomando el Teorema 3.1, se sigue que las funciones f bajo estas consideraciones forman un conjunto — denso en el subespacio de continuidad absoluta de H_0.

Con ésto podemos ya estimar la expresión (7.7). Estimemos - primero la integral de 0 a ∞ que aparece en tal expresión, esta integral es

$$I=\int_0^{\infty} e^{-is\sigma z_j(\omega)}\, e^{i\sigma\omega\cdot x}\, z_j(\omega)\,\phi(\sigma)\,\psi_j(\omega)\,\sigma^n d\sigma$$

la cual puede transformarse en

$$I=z_j(\omega)\,\psi_j(\omega)\int_0^{\infty} e^{-is\sigma z_j(\omega)}\,F(\sigma)d\sigma$$

donde $F(\sigma)=\phi(\sigma)\sigma^n e^{i\sigma\omega\cdot x}$ es una función que pertenece a $C_0^{\infty}(0,\infty)$. Integrando por partes se tiene

$$I=z_j(\omega)\psi_j(\omega)\left[\frac{-1}{s^2 z_j^2}\int_0^{\infty} e^{-is\sigma z_j(\omega)}\,F''(\sigma)d\sigma\right]=$$

$$=\frac{c}{s^2 z_j(\omega)}\int_0^{\infty} e^{-is\sigma z_j(\omega)}\,F''(\sigma)d\sigma\,.,$$

pero $F''(\sigma) = e^{i\sigma\omega\cdot x}\left\{ h''(\sigma) + 2i\omega\cdot x\, h'(\sigma) - (\omega\cdot x)^2 h(\sigma) \right\}$; donde $h(\sigma)$ $= \phi(\sigma)\sigma^n$. Entonces

$$I = \frac{C}{s^2 z_j(\omega)} \int_0^\infty e^{-is\sigma z_j(\omega)}\, e^{i\sigma\omega\cdot x}\left\{ h''(\sigma) + 2i\omega\cdot x\, h'(\sigma) - (\omega\cdot x)^2 h(\sigma) \right\} d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{C}{s^2 z_j(\omega)} \left(1 + |x| + |x|^2 \right).$$

En vista de la elección de los $\psi_j(\omega)$ y de la continuidad de $z_j(\omega)$ tenemos que (tomando la integración con respecto a ω, sumando sobre j y sustituyendo en (7.7), y (7.7) en (7.6)):

$$\Gamma^2 = \frac{C}{s^4} \int_{\mathbb{R}^n} |(E^0)^{-1} E(x) - I|^2 (1 + |x| + |x|^2)^2\, dx.$$

Finalmente, usando la condición (7.b), concluimos que $\Gamma \leq C/s^2$ mostrando así que Γ es integrable en (T,∞), con lo cual el operador de onda (7.5) existe. Q . E . D .

8.- Algunas Ecuaciones de la Física Clásica en Forma Matricial.

El proposito de esta sección es el de exhibir tres ecuaciones de onda de la Física Clásica en la forma (1.1), y hacer una discusión, con base a ésta, de acuerdo a los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

En los ejemplos, se hace una derivación y una discusión de las ecuaciones que gobiernan a cada fenómeno de propagación. En cada caso se hace énfasis en los siguientes puntos:

i) las ecuaciones que gobiernan a cada fenómeno de propagación pueden ser escritas en la forma (1.1);

ii) si las ecuaciones que gobiernan a cada fenómeno de propagación son de segundo orden, bajo que condiciones el sistema de primer orden (1.1) implica el sistema de segundo orden;

iii) si el sistema de ecuaciones (1.1), y el medio gobernado por él, son fuertemente o uniformemente propagativos.

Los ejemplos que se presentan son (en este orden): Las Ecuaciones de Acústica, Las Ecuaciones de Optica Cristalina y Las Ecuaciones de Ondas Elásticas en Cristales.

8.1. Las Ecuaciones de Acústica.

Consideremos un elemento de volumen de un medio fluido, con respecto al sistema de coordenadas x_1, x_2 y x_3. En general, este elemento de volumen se puede mover en cualquier dirección y su desplazamiento es representado por el vector d, que tiene componentes ξ, η y γ en las direcciones x_1, x_2 y x_3 respectivamente. El vector velocidad correspondiente a este elemento de volumen es $q=\frac{\partial d}{\partial t}$, y tiene componentes $u=\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $v=\frac{\partial \eta}{\partial t}$ y $w=\frac{\partial \gamma}{\partial t}$. Todas estas cantidades junto con la presión acústica p y la condensación s son funciones de x_1, x_2, x_3 y t[1].

Supongamos que una onda de sonido atraviesa cada par de planos paralelos del elemento de volumen rectangular del medio fluido, $dx_1 dx_2 dx_3$, como se muestra en la Figura 8.1.

---

1) El exceso de presión o presión acústica, en cualquier punto, está definida por $p=P-P_0$; donde P es la presión instantanea en cualquier punto y P_0 la presión en el equilibrio del medio.

La condensación s está definida por $s=(\rho-\rho_0)/\rho_0$; donde ρ es la densidad instantanea en cualquier punto y ρ_0 la densidad en el equilibrio del medio. Si el fluido es inhomogéneo, en general, se tiene que ρ_0 es función de x_1, x_2 y x_3; es decir $\rho_0=\rho_0(x_1,x_2,x_3)\equiv\rho_0(x)$.

Al pasar estas ondas, cada una de las caras es presionada de tal forma que sufren un desplazamiento, por lo que el elemento de volumen se transforma en

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\right)\left(1+\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)\left(1+\frac{\partial \gamma}{\partial x_3}\right).$$

Correspondientemente, la expresión de la conservación de la masa dentro de este elemento de volumen es

$$(1+s)\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\right)\left(1+\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)\left(1+\frac{\partial \gamma}{\partial x_3}\right) = 1 \qquad (8.1a)$$

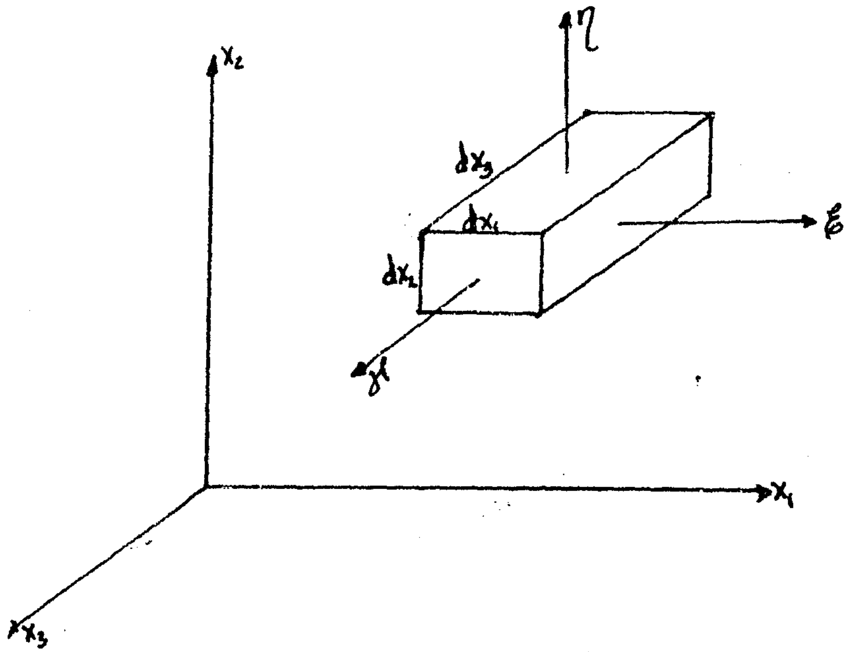

Figura 8.1.

Suponiendo que, tanto los cambios de densidad así como los desplazamientos son pequeños, los términos tales como $s\frac{\partial\xi}{\partial x_1}$, -- $\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}$, etc; pueden ser despreciados, y la ecuación (8.1a) se simplifica a

$$s = -\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta}{\partial x_2} + \frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\right)$$

Esta ecuación es una forma especial, tridimensional, de la 'ecuación de continuidad' más general de hidrodinámica. Esta puede ser escrita en forma vectorial como

$$s = -\nabla\cdot d \qquad (8.1b)$$

donde $\nabla\cdot d = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta}{\partial x_2} + \frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\right)$ representa la 'divergencia del vector desplazamiento d.

La ecuación que relaciona la presión acústica y la condensación ([16] , pag. 112) es

$$p = \rho_0 c^2 s,$$

donde c es la velocidad de la onda de sonido. Si el fluido es inhomogéneo, esta ecuación se transforma en

$$p = \rho(x) c^2(x) s,$$

ó

$$p/\rho(x) = c^2(x) s, \qquad (8.1c)$$

donde $\rho(x) \equiv \rho(x_1, x_2, x_3)$ es la densidad en el equilibrio en el punto (x_1, x_2, x_3) y $c(x) \equiv c(x_1, x_2, x_3)$ es la velocidad local de la on da de sonido.

De las ecuaciones (8.1b) y (8.1c), eliminando la condensación s, se obtiene

$$\frac{p}{\rho(x)} = -c^2(x)\,(\nabla\cdot d) \tag{8.1d}$$

Considerando las diferencias de presión externa sobre cada par de planos paralelos del elemento de volumen $dx_1dx_2dx_3$ representado en la Figura 8.1, se pueden obtener las tres ecuaciones de la fuerza (una para cada dirección):

$$-\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\ ;\quad -\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\ ;\quad -\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,.$$

Si la primera de estas ecuaciones es diferenciada con respecto a x_1, la segunda con respecto a x_2, la tercera con respecto a x_3, y estas son sumadas se obtiene

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}+\frac{\partial \eta}{\partial x_2}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_3}\right).$$

Esta ecuación puede ser expresada más simplemente en forma vectorial como

$$-\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho(x)}\nabla p\right) = \frac{\partial^2(\nabla\cdot d)}{\partial t^2} \tag{8.1e}$$

Finalmente, de la ecuación (8.1d) se tiene que $\nabla\cdot d = -p/\rho(x)\,c^2(x)$ entonces (8.1e) puede ser escrita como

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho(x)\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho(x)}\nabla p\right) \qquad (8.1f)$$

que es la ecuación general de ondas acústicas en un fluido inhomogéneo en reposo.

La ecuación (8.1f) puede ser escrita como un sistema de matrices de 4x4 como

$$\begin{pmatrix} \rho(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho(x)c^2(x)} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} \qquad (8.1g)$$

que evidentemente es de la forma (con $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$) (1.1). La matriz - E(x) es en este caso

$$E(x) = \begin{pmatrix} \rho(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho(x)c^2(x)} \end{pmatrix}$$

Inversamente, sea (v_1, v_2, v_3, v_4) una solución del sistema de primer orden (8.1g). Entonces de éste se derivan las ecuaciones

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial v_4}{\partial x_i} \quad ., \; i = 1,2,3. \tag{8.1h}$$

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial v_4}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{8.1i}$$

Por otro lado definamos

$$p(x,t) = \int_0^t v_4(x,s)\, ds + p(x,0)$$

con $p(x,0)$ una función arbitraria. Entonces las ecuaciones (8.1h) implican (integrando de 0 a t)

$$\rho v_i(x,t) - \rho v_i(x,0) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(x,0)}{\partial x_i}$$

finalmente

$$\rho v_i(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_i} p(x,t) + \rho v_i(x,0) - \frac{\partial}{\partial x_i} p(x,0) \quad ., \; i = 1,2,3 .$$

De esta última expresión se tiene que, la <u>condición inicial subsidiaria</u> para que (v_1, v_2, v_3, v_4) sea solución de la ecuación de segundo orden es que

$$\rho v_i(x,0) = \frac{\partial}{\partial x_i} p(x,0) \quad ., \; i = 1,2,3. \tag{8.1j}$$

En dicho caso (8.1i) implica

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x,t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\rho(x)} p \right],$$

i.e. la ecuación de segundo orden es válida.

Sea, por otro lado, una solución estática en el caso homogé neo; i.e. el vector $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ sólo depende del vector x. - En tal situación se tiene que (8.1j) es

$$v_i(x)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\,,\quad i=1,2,3\,,$$

ésto implica que

$$\mathrm{rot}\,v=0;$$

además de (8.1g), suponiendo una solución estática se tiene que

$$\frac{\partial v_4}{\partial x_i}=0\,,\quad i=1,2,3\,.$$

y

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \quad \text{ó} \quad \mathrm{div}\ v=0$$

Entonces, como rotv=0, div v=0 y como $v\in L_2$, se cumple que v=0. Luego, sólo la solución trivial es compatible con la condición subsidiaria. Notemos además que, en el caso estático se tiene que v_4=cte; y como $v_4\in L_2$ se tiene que $v_4=0$, con lo cual p(x,t) =p(x,0).

Considerando al caso homogéneo, el polinomio (3.4) es escrito como

$$P(p,z)=\begin{vmatrix} z\rho & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & z\rho & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & z\rho & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & -\frac{z}{\rho c^2} \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando este determinante se obtiene

$$P(p, \ )=\left(\frac{\zeta^2}{c^2}p_3^2-p_2^2-p_1^2\right)\zeta^2\rho^2=0,$$

en el cual dos raices son identicamente cero y las otras dos raices son $\zeta=\pm c|p|$; estas raices nos dicen que la onda plana se propaga en la dirección del vector p con una velocidad

$$\frac{\zeta}{|p|}=\pm c.$$

Tomando $|p|=1$, se tiene que los vectores velocidad normales son

$$v=(v_1,v_2,v_3)=\pm c(p_1,p_2,p_3).$$

Entonces el vector η definido en (4.7) tiene la forma

$$\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{c^2}(p_1,p_2,p_3).$$

De acuerdo con (4.8) una ecuación para la superficie de lentitud S es

$$\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=\frac{1}{c^2},$$

que representa una esfera de centro en el origen y radio 1/c, la cual evidentemente es acotada para cualquier valor de c distinto de cero.

Por otro lado $Q(\eta,1)=0$ es igual a

$$\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2-\frac{1}{c^2}=0,$$

entonces

$$\eta\cdot\nabla Q(\eta,1)=2(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)=2\left(\frac{1}{c^2}\right)\neq 0$$

De lo anterior se concluye que (de acuerdo con la Definición

4.1) el sistema (8.1g), y el medio gobernado por él, es uniformemente propagativo.

La densidad de energía está dada por (ver (1.2))

$$N = \frac{1}{\rho(x)} \left\{ (\nabla p)^2 + \frac{1}{c^2(x)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 \right\},$$

y el vector de Poynting es (ver (1.3))

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = \frac{2}{\rho(x)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_3} \right).$$

8.2.- Las Ecuaciones de Optica Cristalina.

Consideremos dos cargas aisladas Q y Q_1 moviéndose en el espacio libre. La carga Q siente cierta fuerza eléctrica debida a Q_1. Si Q está en reposo, la fuerza eléctrica sobre ésta es QE. El vector E es llamado la 'intensidad eléctrica'. Si Q está moviendose con velocidad v, existe una fuerza adicional $Qv\wedge B$, donde $\wedge$ es el símbolo para el producto vectorial. El vector B es llamado la 'densidad de flujo magnético'. Otros dos vectores juegan un papel importante en la descripción del campo electromagnético y ellos están relacionados a las lineas de fuerza que emanan de cargas y corrientes. El vector D, que es llamado la'densidad de flujo eléctrico', mide el número de lineas de fuerza que se originan desde una carga. El vector H, que es llamado la 'intensidad magnética', es tal que su valor sobre una cuerva cerrada mide efectivamente la corriente que pasa a través de la curva.

Supondremos que los vectores E, B, D y H son continuos y poseen derivadas continuas en todos los puntos del espacio (puntos ordinarios). Ahora, postularemos que en puntos ordinarios las ecuaciones de Maxwell

$$\mathrm{rot}E+\frac{\partial B}{\partial t}=0 \tag{8.2a}$$

$$\mathrm{rot}H-\frac{\partial D}{\partial t}=J \tag{8.2b}$$

$$\mathrm{div}D=\rho \tag{8.2c}$$

$$\mathrm{div}B=0 \tag{8.2d}$$

se satisfacen, en donde J es la densidad de corriente y ρ la densidad de carga.

La justificación de este postulado se basa en los hechos de que, primero, en los casos particulares de electrostática y magnetostática ciertos términos de estas ecuaciones pueden ser despreciados y los fenómenos presentados por estas nuevas ecuaciones están de acuerdo con el experimento. Segundo, para corrientes que varían rapidamente y para propagación de perturbaciones, todos los términos en las ecuaciones son tomados y lo predecido por éstas está de acuerdo con el experimento.

Dado que la divergencia de un rotacional es cero para cualquier vector, obtenemos (tomando la divergencia de (8.2b))

$$\operatorname{div} J = -\operatorname{div}\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} D.$$

El intercambio de los operadores div y $\frac{\partial}{\partial t}$ es permitible porque hemos supuesto la continuidad de D y sus derivadas en puntos ordinarios. La sustitución de (8.2c) en esta última ecuación dá

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{8.2e}$$

que es llamada la 'ecuación de continuidad'.

En flujos 'estacionarios'; i.e. en flujos que son independientes del tiempo

$$\operatorname{div} J = 0,$$

tal que el vector J es solenoidal.

Si tomamos la divergencia de (8.2a) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}B)=0. \qquad (8.2f)$$

De una manera análoga, tomando la divergencia de (8.2b) y usando (8.2e), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}D-\rho)=0. \qquad (8.2g)$$

Si suponemos inicialmente que $\mathrm{div}D=\rho$ y $\mathrm{div}B=0$, entonces las ecuaciones (8.2f) y (8.2g) nos indican que para cualquier tiempo y para todos los puntos ordinarios siempre se cumplirá que

$$\mathrm{div}D=\rho \quad , \quad \mathrm{div}B=0.$$

En las ecuaciones (8.2a)-(8.2d) existen doce cantidades escalares desconocidas , si uno supone que las densidades de carga y de corriente son dadas, para ser determinadas(a lo más) ocho ecuaciones escalares. Existen otras relaciones entre los vectores -que pueden ser sumadas al sistema de ecuaciones que reduce en --gran parte la inconsistencia del número de cantidades desconocidas y el número de ecuaciones. Estas relaciones surgen de evidencias experimentales concernientes a la naturaleza del medio material. Las relaciones toman una forma simple en muchos casos que serán discutidas brevemente en lo que sigue.

En el espacio libre

$$D=\epsilon_0 E, \qquad B=\mu_0 H$$

donde ϵ_0 y μ_0 son constantes. Los valores y dimensiones de estas componentes dependen del sistema de unidades adoptado. En lo que sigue el sistema racionalizado M.K.S. es empleado. En este sistema

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \text{Farad}/m \quad , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Henry}/m .$$

Medios isotrópicos son aquellos en los que las propiedades físicas en la vecindad de un punto interior son las mismas en todas las direcciones. Para medios isotrópicos (que no son ferromagnéticos) tenemos

$$D = \epsilon E, \qquad B = \mu H.$$

Las razones dimensionales

$$\chi = \epsilon/\epsilon_0 \quad , \quad \chi_m = \mu/\mu_0 ,$$

son independientes de la elección de las unidades y son usualmente llamadas las 'capacidades especificas inductivas'. Un medio homogéneo es aquel en que las propiedades físicas son constantes de punto a punto, y en este caso χ es usualmente llamada la 'constante dieléctrica', y χ_m la 'permeabilidad' (aunque se usan también estos términos si el medio no es homogéneo).

Las propiedades de un medio 'anisotrópico' varían en manera diferente a lo largo de diferentes direcciones en un punto. En cuerpos tales como un cristal dieléctrico tenemos

$$
\begin{aligned}
D_{x_1} &= \epsilon_{11} E_{x_1} + \epsilon_{12} E_{x_2} + \epsilon_{13} E_{x_3}, \\
D_{x_2} &= \epsilon_{21} E_{x_1} + \epsilon_{22} E_{x_2} + \epsilon_{23} E_{x_3}, \qquad (8.2h) \\
D_{x_3} &= \epsilon_{31} E_{x_1} + \epsilon_{32} E_{x_2} + \epsilon_{33} E_{x_3},
\end{aligned}
$$

donde D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3} son las componentes cartesianas de D. Los coeficientes ϵ_{ij} de la transformación son componentes de un tensor simétrico $\underline{\epsilon}$ y (8.2h) puede ser convenientemente escrita como

$$D = \underline{\epsilon} \cdot E. \qquad (8.2i)$$

La correspondiente relación para campos magnéticos es

$$B = \underline{\mu} \cdot H. \qquad (8.2j)$$

Por último discutamos más ampliamente el caso en el que el medio es anisotrópico e inhomogéneo. Por simplicidad supongamos que la conductividad[1] es cero y que el medio es isotrópico con respecto a las propiedades magnéticas: $\mu = \mu_0$; i.e. el medio es giroeléctrico. Como sabemos, la densidad de flujo eléctrico esta relacionada con la intensidad eléctrica por (8.2 i), donde $\underline{\epsilon}$ es un tensor real. Si suponemos que la densidad de energía es 1/2 D·E y su razón de cambio es D·E, entonces $\underline{\epsilon}$ puede ser simétrico. Dado que la densidad de energía no puede ser negativa; i.e. D·E > 0

---

[1] La densidad de corriente y el campo aplicado están conectados por $J = \sigma E$. La cantidad σ es llamada la conductividad, y la ecuación $J = \sigma E$ es conocida como la 'Ley de Ohm'.

se sigue que la cuádrica

$$\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ij} x_i x_j = \text{constante},$$

donde x_1, x_2 y x_3 son las coordenadas, puede ser un elipsoide. Si elegimos los ejes principales del elipsoide como los ejes coordenados, la ecuación de la cuádrica es

$$\epsilon_1 x_1^2 + \epsilon_2 x_2^2 + \epsilon_3 x_3^2 = \text{constante}.$$

Con estos ejes tenemos

$$D_{x_1} = \epsilon_1 E_{x_1}, \quad D_{x_2} = \epsilon_2 E_{x_2}, \quad D_{x_3} = \epsilon_3 E_{x_3},$$

donde ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 son conocidas como las 'constantes dieléctricas principales del medio anisotropico (o cristal)'. En el caso particular de un medio isotrópico el elipsoide degenera en una esfera y $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$.

En un medio anisotrópico (cristal) las ecuaciones de Maxwell son escritas como

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = \epsilon_1 \frac{\partial E_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = \epsilon_2 \frac{\partial E_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = \epsilon_3 \frac{\partial E_3}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = -\mu_0 \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = -\mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = -\mu_0 \frac{\partial H_3}{\partial t}$$

Las cuales, evidentemente pueden ser escritas como

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -D_3 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & -D_1 \\ 0 & 0 & 0 & -D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_3 & -D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -D_3 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & -D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \qquad (8.2k)$$

donde $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $i=1,2,3$, que es de la forma (1.1).

Si suponemos que las soluciones no dependen del tiempo, se tiene que (8.2k) se transforma en

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -D_3 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & -D_1 \\ 0 & 0 & 0 & -D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_3 & -D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -D_3 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & -D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

Desarrollando obtenemos que

$$\mathrm{rot}E=0 \quad \text{y} \quad \mathrm{rot}H=0.$$

Pero como también debemos imponer que $\mathrm{div}H=0=\mathrm{div}E$, y como H y E $\in L_2$ obtenemos que $E=H=0$. Lo anterior nos dice que la solución estática desaparece y no está en el subespacio de soluciones admisibles físicamente.

El polinomio (3.4) es en este caso

$$P(p,\ )=\det\begin{pmatrix} \zeta\epsilon_1 & 0 & 0 & 0 & -p_3 & p_2 \\ 0 & \zeta\epsilon_2 & 0 & p_3 & 0 & -p_1 \\ 0 & 0 & \zeta\epsilon_3 & -p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_2 & \zeta\mu_0 & 0 & 0 \\ -p_3 & 0 & p_1 & 0 & \zeta\mu_0 & 0 \\ p_2 & -p_1 & 0 & 0 & 0 & \zeta\mu_0 \end{pmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante obtenemos

$$P(p,\zeta)=\frac{\zeta^2}{v_1^2 v_2^2 v_3^2}\left[\zeta^4-\phi(p)\zeta^2+p^2\Psi(p)\right]=0, \tag{8.21}$$

$$\phi(p)=v_1^2(p_2^2+p_3^2)+v_2^2(p_1^2+p_3^2)+v_3^2(p_1^2+p_2^2),$$

$$\Psi(p)=v_2^2 v_3^2 p_1^2+v_1^2 v_3^2 p_2^2+v_1^2 v_2^2 p_3^2,$$
$$v_i^2=(\mu_0\epsilon_i)^{-1}.,\ i=1,2,3.,\quad p^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2.$$

En este caso tenemos dos raices que son identicamente cero y cuatro raices que son soluciones de la ecuación

$$\zeta^4-\phi(p)\zeta^2+p^2\Psi(p)=0. \tag{8.2n}$$

El discriminante de esta ecuación es

$$X(p)=\phi^2(p)-4\Psi(p)p^2.$$

Si elegimos

$$A_1^2=v_2^2-v_3^2, \quad A_2^2=v_3^2-v_2^2, \quad A_3^2=v_1^2-v_2^2;$$

un simple cálculo muestra que para $p^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$

$$X(p)=\prod(p_1A_1\pm p_2A_2\pm p_3A_3),$$

donde el producto es extendido a las cuatro posibles combinaciones de signos. Dado que A_1 y A_3 son reales, y A_2 es imaginario puro, los factores de $X(p)$ pueden ser apareados con sus complejos conjugados. Entonces $X(p)\geqslant 0$. En efecto, $X(p)=0$ si y sólo si $p_2=0$ y $p_1A_1\pm p_3A_3=0$. Entonces las cuatro raices de (8.2m) son reales y distintas excepto si

$$p_1A_1\pm p_3A_3=0. \qquad (8.2n)$$

De acuerdo con (3.9), las cuatro raices distintas de cero son tales que dos de ellas son estrictamente positivas y dos estrictamente negativas.

Resolviendo (8.2m) para z^2, (8.21) se puede escribir como

$$P(\rho,z)=z^2\left[z^2-\left(\frac{\Phi(p)+\sqrt{X(p)}}{2}\right)\right]\left[z^2-\left(\frac{\Phi(p)-\sqrt{X(p)}}{2}\right)\right]=0$$

De acuerdo con esta última expresión, una ecuación para la superficie de lentitud S es (según (4.8))

$$P(\eta,1)=\left[1-\left(\frac{\Phi(\eta)+\sqrt{X(\eta)}}{2}\right)\right]\left[1-\left(\frac{\Phi(\eta)-\sqrt{X(\eta)}}{2}\right)\right]=0$$

o equivalentemente

$$\phi(\eta) + \sqrt{X(\eta)} = 2$$

(8.2o)

$$\phi(\eta) - \sqrt{X(\eta)} = 2$$

(8.2o) nos dice que la superficie de lentitud S está formada por dos hojas o mantos. Estos mantos se tocan sólo en cuatro puntos los cuales pertenecen a las rectas (ver (8.2n))

$$\eta_1^2(v_2^2-v_3^2)=\eta_3^2(v_1^2-v_2^2)$$

en el plano η_1-η_3(Fig.8.1).

Con el fín de visualizar la superficie de lentitud, intersectemos ésta con los ejes coordenados. La intersección con el plano $\eta_2=0$ es un círculo y una elipse con cuatro puntos de intersección:

$$\eta_1^2 + \eta_3^2 = \frac{1}{v_2^2}$$

y

$$v_3^2\eta_1^2 + v_1^2\eta_3^2 = 1.$$

Por lo tanto, estos puntos de intersección son los puntos donde los mantos se juntan. En los otros dos planos coordenados las intersecciones son, también, un círculo y una elipse; en este caso el círculo y la elipse no se intersectan. En el plano $\eta_1=0$, tenemos

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 - \frac{1}{v_1^2} = 0$$

y

$$v_3^2\eta_2^2 + v_2^2\eta_3^2 - 1 = 0.,$$

similarmente en el plano $\eta_3=0$ tenemos

$$\eta_1^2+\eta_2^2-\frac{1}{v_3^2}=0, \text{ y } \quad v_2^2\eta_1^2+v_1^2\eta_2^2-1=0.$$

De acuerdo con la discusión anterior y al Teorema 4.2, el sistema (8.2k), y el medio gobernado por él, no pueden ser uniformemente propagativos. Sín embargo, cada uno de los mantos de la superficie de lentitud son acotados; por lo que, de la Definición 5.3, el sistema (8.2k), y el medio gobernado por él, es fuertemente propagativo.

En tal caso, la densidad de energía está dada por

$$N=\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i E_i^2+\mu_0|H|^2,$$

y el vector de Poynting por

$$(\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3)=2\left(E_2H_3-E_3H_2,\, E_3H_1-E_1H_3,\, E_1H_2-H_1E_2\right).$$

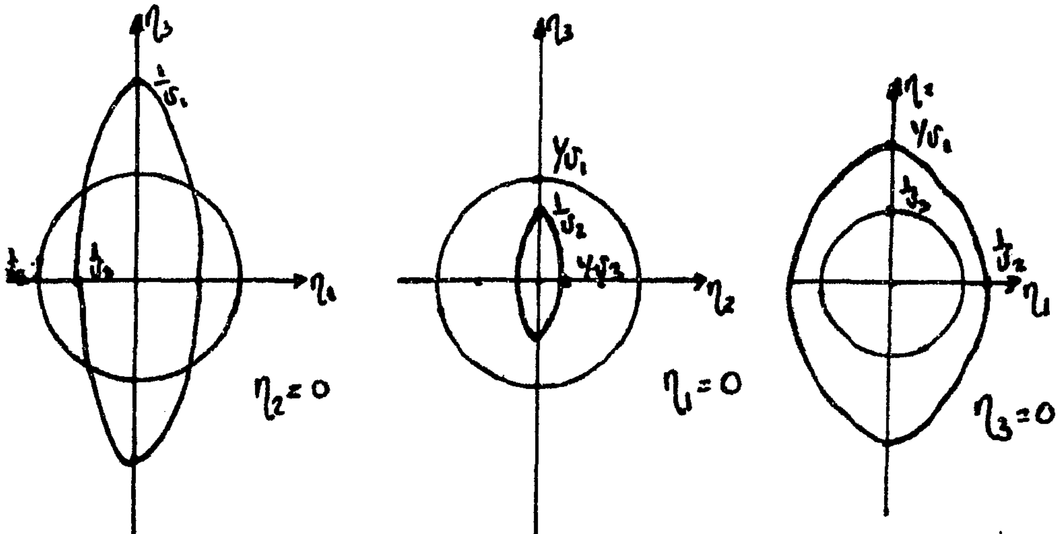

Fig. 8.1. Intersecciones de la superficie de lentitud con los planos coordenados.

En el caso particular en el que

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \equiv \epsilon_0 ,$$

el sistema (8.2k) es uniformemente propagativo, así como también lo es el medio gobernado por él. En efecto, la superficie de lentitud ya no viola al Teorema 4.2, ya que es una esfera con ecuación

$$Q(\eta,1) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - \frac{1}{v^2} = 0 ,$$

y además $\eta \cdot \nabla Q(\eta,1) = \eta_1 \frac{\partial Q(\eta,1)}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial Q(\eta,1)}{\partial \eta_2} + \eta_3 \frac{\partial Q(\eta,1)}{\partial \eta_3} \neq 0 .$

En este caso la densidad de energía es

$$N = \epsilon_0 |E|^2 + \mu_0 |H|^2$$

y el vector de Poynting sigue siendo el mismo que en el caso anterior.

8.3.-Las Ecuaciones de Ondas Elásticas en Cristales.

Bajo la acción de fuerzas aplicadas, los cuerpos sólidos - exhiben deformaciones para algunas extensiones; i.e. cambian en forma y en volumen. La deformación de un cuerpo está descrita — matemáticamente de la siguiente manera. La posición de cualquier punto en el cuerpo está definida por su radio vector r (con componentes $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$) en algún sistema de coordenadas. Cuando el cuerpo es deformado, todos los puntos son en general desplazados. Consideremos un punto en particular cuyo radio vector antes de la deformación es r y después de la deformación es r'(con componentes x_i'). El desplazamiento de este punto debido a la deformación está dado por el vector r'-r, que denotaremos por w:

$$w_i=x_i'-x_i .$$

El vector w es llamado el 'vector desplazamiento'. Las coordenadas x_i' del vector desplazado son, por supuesto, funciones de las coordenadas x_i del punto antes del desplazamiento. El vector desplazamiento w_i es, por lo tanto, función de las coordenadas x_i. Si el vector w está dado como función de x_i, la deformación del cuerpo está enteramente determinada.

Cuando un cuerpo es deformado, la distancia entre sus puntos cambia. Consideremos dos puntos extremadamente cercanos. Si el radio vector que los une antes de la deformación es dx_i, el - radio vector que los une en el cuerpo deformado es $dx_i'=dx_i+dw_i$.

La distancia entre los puntos es $dl=(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)^{1/2}$ antes de la deformación, y es $dl'=(dx_1'^2+dx_2'^2+dx_2'^2)^{1/2}$ después de ella. Usando la regla general de suma, podemos escribir $dl^2=dx_i^2$, $dl'^2=dx_i'^2=(dx_i+dw_i)^2$. Sustituyendo $dw_i=(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k})dx_k$, podemos escribir

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k}dx_i dx_k + \frac{\partial\omega_i}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_l}dx_k dx_l .$$

Dado que la suma es tomada sobre los sufijos i,k en el segundo término de la derecha, podemos poner $(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k})dx_i dx_k=(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_i})dx_i dx_k$. En el tercer término intercambiamos los sufijos i,l. Entonces dl'^2 toma la forma final

$$dl'^2 = dl^2 + 2\,\omega_{ik}\,dx_i dx_k ,$$

donde el tensor w_{ik} está definido como

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\omega_k}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega_l}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_l}{\partial x_k}\right) \qquad (8.3a)$$

Estas expresiones dan el cambio en un elemento de longitud cuando el cuerpo es deformado.

El tensor w_{ik} es llamado el 'tensor de deformación'. Vemos de esta definición que éste es simétrico; i.e.

$$w_{ik}=w_{ki}.$$

En la mayoría de los casos w_i es pequeño para pequeñas deformaciones , de tal manera que podemos despreciar los últimos términos de la expresión (8.3a), yaque éstos serán demasiado pequeños. Entonces, para deformaciones pequeñas, el tensor de deformación está dado por

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i}\right) \qquad (8.3b)$$

Cosideremos la fuerza total en alguna porción del cuerpo. - Primero, esta fuerza total es igual a la suma de tadas las fuerzas sobre todos los elementos de volumen en esa porción del cuerpo; i.e. puede ser escrita como la integral de volumen (donde F es la fuerza por unidad de volumen y FdV es la fuerza sobre el - elemento de volumen dV):

$$\int F dV.$$

Segundo, las fuerzas que actúan sobre varias partes de la porción considerada tienen un valor determinado, pero cero es la fuerza resultante total, dado que ellas se cancelan por la Tercera - Ley de Newton. De lo anterior, estas fuerzas actúan sobre la superficie de esa porción, y tal que la fuerza resultante puede — ser representada como la suma de fuerzas actuando sobre todos — los elementos de superficie; i.e. como una integral sobre la superficie.

Entonces, para cualquier porción del cuerpo, cada una de — las tres componentes $\int F_i dV$ de la resultante de todas las tensiones internas pueden ser transformadas a una integral sobre la superficie. Como es bien conocido del análisis vectorial, la integral de un escalar sobre un volumen arbitrario puede ser transformado en una integral sobre la superficie, si el escalar es la divergencia de un vector. En el presente caso, tenemos la inte—

gral de un vector y no de un escalar. Entonces, el vector F_i es la divergencia de un tensor de rango dos; i.e. de la forma

$$F_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$$

Entonces la fuerza para cualquier volumen puede ser escrita como una integral sobre una superficie cerrada que acota al volumen:

$$\int F_i \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \, dV = \oint \sigma_{ik} \, df_k \qquad (8.3c)$$

donde df_i son las componentes del vector normal df al elemento - de superficie, el cual está dirigido hacia el exterior de la misma. El tensor σ_{ik} es llamado el 'tensor de tensión'. De la ecuación (8.3c) se ve que $\sigma_{ik} df_k$ es la i-ésima componente de la fuerza sobre el elemento de superficie df.

Supongamos que un cuerpo está en proceso de deformación, de tal manera que este proceso ocurre tan lentamente que el equilibrio termodinámico se establece en el cuerpo en todo instante, - de acuerdo a las condiciones externas. Entonces σ_{ik} puede expresarse como ([19] , p.p. 8-9)

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial E}{\partial \omega_{ik}} \right)_T \qquad (8.3d)$$

donde $E = \mathcal{E} - TS$ es la energía libre del cuerpo, con $\mathcal{E}$ la energía interna del mismo, T su temperatura y S su entropía.

Si el cuerpo que está en proceso de deformación es un cristal, el cambio en la energía libre en compresiones isotérmicas -

es, como con cuerpos isotrópicos, una función cuadrática del tensor de deformación, esta función contiene no sólo dos coeficientes, sino un gran número de ellos. La forma general de la energía libre de un cristal deformado es

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm} w_{ik} w_{lm} \tag{8.3e}$$

donde λ_{iklm} es un tensor de rango cuatro, llamado el 'tensor elástico'. Puesto que el tensor de deformación es simétrico, el producto $w_{ik}w_{lm}$ es igual cuando los sufijos i,k ó l,m ó i,l y k,m son intercambiados. Entonces el tensor λ_{iklm} puede ser definido de tal manera que cumpla las mismas propiedades simétricas:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}.$$

Un simple cálculo muestra que el número de componentes diferentes de un tensor de rango cuatro, que cumpla con estas propiedades, es veintiuno.

De acuerdo con las expresiones (8.3d), (8.3e), el tensor de tensión para un cristal está dado en términos del tensor de deformación por

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial w_{ik}} = \lambda_{iklm} w_{lm} \tag{8.3f}$$

Si hay movimiento en un cuerpo deformado, su temperatura no es en general constante: varía en tiempo y espacio. Esto complica considerablemente las ecuaciones exactas de movimiento en el caso general de movimientos arbitrarios.

Usualmente, sín embargo, lo anterior se simplifica si la transferencia de calor de una parte del cuerpo a otra (por simple conducción térmica) ocurre muy lentamente. Si el calor intercambiado durante este tiempo es del orden de un periódo del movimiento oscilatorio del cuerpo, éste es despreciable, y podemos considerar que cualquier parte del cuerpo está térmicamente aislada; i.e. 'el movimiento es adiabático'.

Con el fín de obtener las ecuaciones de movimiento para un medio elástico, igualemos la tensión interna $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ a el producto de la aceleración $\ddot{w}_i$ y la masa por unidad de volumen del cuerpo; i.e. su densidad ρ :

$$\rho \ddot{\omega}_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k \tag{8.3g}$$

Esta es la ecuación general de movimiento.

La propagación de ondas elásticas en medios anisotrópicos; i.e. en un cristal, es más complicada que para el caso de medios isotrópicos. Para investigar tales ondas fijémonos en la ecuación general de movimiento (8.3g), y usemos para σ_{ik} la expresión general (8.3f).

Sustituyendo σ_{ik} en las ecuaciones de movimiento, obtenemos

$$\rho \ddot{\omega}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial \omega_{lm}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \omega_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \omega_m}{\partial x_l} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 \omega_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_k \partial x_l} .$$

Dado que el tensor λ_{iklm} es simétrico con respecto a los sufijos l y m, podemos intercambiar éstos en el primer término, — los cuales serán identicos a los del segundo término. Entonces - las ecuaciones de movimiento son

$$\rho \ddot{\omega}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_k \partial x_l}$$

ó

$$\ddot{\omega}_i = c_{iklm} \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_k \partial x_l}, \quad c_{iklm} = \rho^{-1} \lambda_{iklm}. \tag{8.3h}$$

Por simplicidad de notación, definamos un nuevo tensor de rango dos:

$$s_{ik} = c_{iklm} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_m} \tag{8.3i}$$

Si definimos al vector u=u(x,t) como

$$u = (s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{23}, s_{31}, v_1, v_2, v_3)$$

(con $v_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t}$; i=1,2,3.), y a la matriz Γ' , de 6x6, como

$$(\Gamma')^{-1} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1123} & c_{1131} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2223} & c_{2231} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3323} & c_{3331} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1223} & c_{1231} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2323} & c_{2331} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3112} & c_{3123} & c_{3131} \end{pmatrix}$$

entonces las ecuaciones (8.3h) pueden ser escritas como un sistema de la forma (1.1), con

$$
E^{0} = \begin{pmatrix}
\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & 0 & 0 & 0 \\
\Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} & 0 & 0 & 0 \\
\Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} & 0 & 0 & 0 \\
\Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{43} & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} & 0 & 0 & 0 \\
\Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{53} & \Pi_{54} & \Pi_{55} & \Pi_{56} & 0 & 0 & 0 \\
\Pi_{61} & \Pi_{62} & \Pi_{63} & \Pi_{64} & \Pi_{66} & \Pi_{66} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

y

$$
\sum_{j=1}^{3} \lambda^{j} D_{j} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & D_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 & D_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & D_1 \\
D_1 & 0 & 0 & D_2 & 0 & D_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & D_2 & 0 & D_1 & D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & D_3 & 0 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

donde Γ_{ik} es el determinante menor complementario con su signo del elemento c_{iklm} de la matriz Γ^{-1}, dividido por $\det(\Gamma^{-1})$; y $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $i=1,2,3$.

Lo anterior nos dice que, si $w_i(x,t)$ es una solución de la ecuación de segundo orden, entonces

$$u(x,t)=\left(c_{11lm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}, c_{22lm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}, c_{33lm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}, c_{12lm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}, c_{23lm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}, c_{31lm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}, \frac{\partial w_1}{\partial t}, \frac{\partial w_2}{\partial t}, \frac{\partial w_3}{\partial t}\right)$$

es solución del sistema de primer orden.

Inversamente, supongamos que $\emptyset=(s,v)$ es solución del sistema de primer orden, donde

$$s=(s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{23}, s_{31})$$

y

$$v=(v_1, v_2, v_3).$$

Entonces, desarrollando el sistema de primer orden obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma s)_i = D_i v_i, \quad i=1,2,3, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma s)_4 = D_2 v_1 + D_1 v_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma s)_5 = D_3 v_2 + D_2 v_3, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma s)_6 = D_3 v_1 + D_1 v_3$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = D_1 s_{11} + D_2 s_{12} + D_3 s_{31} \tag{8.3j}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = D_2 s_{22} + D_1 s_{12} + D_3 s_{23}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = D_3 s_{33} + D_2 s_{23} + D_1 s_{31}$$

Definamos $w_i(x,t)=\int_0^t v_i(x,y)dy + w_i(x,0)$, donde los $w_i(x,0)$ — son arbitrarios. Entonces

$$(\Gamma S)_i(x,t)= D_i\omega_i(x,t) + (\Gamma S)_i(x,0) - D_i\omega_i(x,0) \quad , \quad i=1,2,3.,$$

$$(\Gamma S)_4(x,t) = (D_2\omega_1 + D_1\omega_2)(x,t) + (\Gamma S)_4(x,0) - (D_2\omega_1 + D_1\omega_2)(x,0)$$

$$(\Gamma S)_5(x,t) = (D_2\omega_3 + D_3\omega_2)(x,t) + (\Gamma S)_5(x,0) - (D_2\omega_3 + D_3\omega_2)(x,0)$$

$$(\Gamma S)_6(x,t) = (D_3\omega_1 + D_1\omega_3)(x,t) + (\Gamma S)_6(x,0) - (D_3\omega_1 + D_1\omega_3)(x,0)$$

Si definimos

$$\mathcal{E}(x,t)=(D_1w_1, D_2w_2, D_3w_3, D_1w_2+D_2w_1, D_3w_2+D_2w_3, D_3w_1+D_1w_3),$$

estas últimas ecuaciones pueden ser expresadas como

$$(\Gamma S)(x,t)= \mathcal{E}(x,t) + (\Gamma S)(x,0) - \mathcal{E}(x,0),$$

con lo cual si

$$(\Gamma S)(x,0)= \mathcal{E}(x,0)$$

se cumple que

$$(\Gamma S)(x,t) = \mathcal{E}(x,t)$$

ó

$$S = \Gamma^{-1}\mathcal{E}(x,t)$$

y las ecuaciones (8.3j) son equivalentes a

$$\frac{\partial^2\omega_i(x,t)}{\partial t^2} = C_{iklm}\frac{\partial^2\omega_m}{\partial x_k\partial x_l}$$

Esto nos expresa que las ecuaciones de segundo orden son válidas; i.e. el sistema de primer orden implica el sistema de segundo orden, si la condición inicial $\phi(x,0)$ satisface la ecuación subsidiaria

$$(\Gamma S)(x,0) = \mathcal{E}(x,0)$$

Por otro lado, supongamos una solución independiente del tiempo del sistema de primer orden, entonces se tiene que

$$D_1v_1=D_2v_2=D_3v_3=0 \qquad (8.3k)$$

$$D_2v_1+D_1v_2=0$$

$$D_3v_1+D_1v_3=0$$

$$D_1s_{11}+D_2s_{12}+D_3s_{31}=0$$

$$D_2s_{22}+D_1s_{12}+D_3s_{23}=0 \qquad (8.3l)$$

$$D_3s_{33}+D_2s_{23}+D_1s_{31}=0$$

Las ecuaciones (8.3k) nos dicen que v_i=cte; i=1,2,3, pero como $v_i \in L_2$ entonces $v_i=0$.

Ya que

$$w_i(x,t)=tv_i(x)+w_i(x,0),$$

y como $v_i=0$, entonces

$$w_i(x,t)=w_i(x,0)\equiv w_i(x).$$

Esta relación y (8.3l) nos expresan que

$$c_{iklm}\frac{\partial^2 \omega_m(x)}{\partial x_k \partial x_l}=0$$

Si tomamos la Transformada de Fourier de esta ecuación

$$c_{iklm}p_kp_l\hat{w}_m(p)=0,$$

ésta es equivalente a

$$c_{iklm}p_k(p_l\hat{w}_m(p)+\hat{w}_m(p)p_l)=0,$$

ó

$$c_{iklm}\hat{w}_i(p)p_k(p_l\hat{w}_m(p)+\hat{w}_m(p)p_l)=0,$$

finalmente

$$c_{iklm}(\hat{w}_i(p)p_k+p_k\hat{w}_i(p))(\hat{w}_m(p)p_l+p_m\hat{w}_l(p))=0.$$

Como suponemos que c_{iklm} es positivo definido, se tiene que

$$\hat{w}_i(p)p_k+p_k\hat{w}_i(p)=0.$$

Esta ecuación nos dice que (por Transformada Inversa de Fourier)

$$\mathcal{E}(x,0)=0,$$

y puesto que $(\Gamma s)(x,0)=\mathcal{E}(x,0)=0,$

lo cual implica que $s(x,0)=0$, ya que Γ es invertible.

En conclusión, la solución estática (de primer orden) no satisface la condición subsidiaria a menos que sea cero.

Suponiendo que el sistema (8.3h) admite una solución de onda plana de la forma[1)]

$$w_i=f(\zeta t-x\cdot p)c_i;\ i=1,2,3.$$

(c_i=vector constante), el polinomio $P(p,\zeta)$ definido por (3.4) toma la forma

$$P(p,\zeta)=\det(\zeta^2\delta_{im}-c_{iklm}p_kp_l)=0 \qquad (8.3m)$$

1) En realidad hay que suponer que es el sistema de primer orden es el que admite una solución de onda plana, pero por simplicidad de cálculo y notación se supone para el sistema de segundo orden. Lo anterior es admitido suponiendo que el polinomio $P(p,\zeta)$ y $\det(\zeta^2\delta_{im}-c_{iklm}p_kp_l)$ son en realidad la misma expresión algebráica representadas en dos formas diferentes. Esta suposición está fundamentada en el hecho (el cual admitiremos sin demostración) de que la matriz $\sum_j A^j p_j$ tiene rango igual a seis.

Este polinomio es una ecuación cúbica en ζ^2 , la cual tiene tres raices que en general son diferentes. Entonces para p_k; $k=1,2,3$, dado existen en general tres valores de ζ^2 para los que (8.3m) - se satisface. Denotemos a éstas por

$$\zeta^2 = \zeta_N^2(p), \qquad N=1,2,3;$$

donde las funciones $\zeta_N(p)$ son etiquetadas de tal forma que

$$\zeta_1^2(p) \geqslant \zeta_2^2(p) \geqslant \zeta_3^2(p) \tag{8.3n}$$

Las $\zeta_N^2(p)$ son homogéneas positivas de primer grado (por (3.8)): $\zeta_N(\alpha p)=|\alpha|\zeta_N(p)$. Claramente las $\zeta_N(p)$ son raices características de la matriz

$$K_{im}(p)=c_{iklm}p_k p_l.$$

Si mostramos que esta matriz es positiva definida, se tendra, entonces, que sus tres raices características $\zeta_N^2(p)$ son todas positivas. Esto se seguira inmediatamente si suponemos que la forma de energía libre, definida en (8.3e), es positiva definida. Tomando

$$w_{ik}=x_i p_k+p_i x_k$$

en (8.3e), y rearreglando los términos con ayuda de la propiedad de simetría del tensor λ_{iklm}, tenemos

$$c_{iklm}x_i x_m p_k p_l > 0,$$

a menos de que todas las x_m ó todas las p_l sean cero. Esto prueba que $K_{im}(p)$ es positiva definida, como se quería .

El lugar geométrico (8.3m) consta de tres hojas o mantos, - donde cada manto está definido por

$$\tau^2 = \tau_N^2(\rho),$$

donde N es uno de los valores 1,2,3. Si dos de las $\tau_N(p)$ coinciden, entonces los correspondientes mantos concuerdan, ya que de nuestra suposición (8.3n) los mantos no se cortan uno con otro.

Se pueden distinguir dos tipos de lugares geométricos en (8.3m). Si los signos de igualdad en (8.3n) nunca se dan, a $P(p,\tau)$ lo llamamos 'regular'. Por otro lado, si los mantos de $P(p,\tau)$ -- coinciden en uno ó más puntos, a $P(p,\tau)$ lo llamamos'singular'.

Si tomamos $\tau=1$ y $p_m=\eta_m|p|$, con $|\eta|=1$, (8.3m) toma la forma

$$P(\eta,1) = \det\left[\frac{1}{|p|^2}\delta_{im} - c_{iklm}\eta_k\eta_l\right] = 0 \tag{8.3o}$$

que de acuerdo a (4.8) es una ecuación para la superficie de lentitud del sistema (8.3h) y el medio gobernado por él.

Como se discutio arriba, esta es una superficie algebráica de sexto grado, y acotada ([8]). En el caso regular consiste de tres mantos concéntricos que no se intersectan, cada uno de los cuales es una superficie simple cerrada ([8]). En el caso singular, las tres superficies tienen puntos comunes, que son puntos múltiples de la superficie de lentitud $P(\eta,1)=0$.

En general cada manto S_N de S, es una superficie simple cerrada, análitica a trozos que no tiene puntos múltiples, dado que si un punto múltiple existiera, la linea que une a éste a el origen coincide con los tres mantos en más que seis puntos. Sin embargo, dos, ó todos los tres mantos, pueden cortarse, tal que la superficie de lentitud como un todo puede tener puntos dobles o triples.

De acuerdo a esta discusión y al Teorema 4.2, el sistema (8.3h), y el medio gobernado por él, no pueden ser uniformemente -- propagativos. Sin embargo, cada uno de los mantos de la superficie de lentitud son acotados; por lo que, de la Definición 5.3, el sistema (8.3h), y el medio gobernado por él, es fuertemente - propagativo.

La densidad de energía para un medio gobernado por (8.3h) es

$$N = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \left(c_{iklm} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_l} \right).$$

Consideremos un caso particular de (8.3h), ecuación que es consecuencia directa de (8.3g). Este caso consiste en considerar a (8.3g) como un sistema de ecuaciones bidimensionales, y al medio homogéneo e isotrópico. Entonces (8.3g) es explicitamente escrita como

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2},$$

$$(\sigma_{12} = \sigma_{21})$$

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \qquad (8.3p)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

En este sistema de ecuaciones, ρ representa la densidad del medio, $v_1 = \frac{\partial \omega_1}{\partial t}$, $v_2 = \frac{\partial \omega_2}{\partial t}$ son las componentes del vector velocidad, σ_{ik} son las componentes del tensor de tensión. Los coeficientes, constantes K y μ, se llaman 'módulo de compresibilidad uniforme' y 'módulo de desplazamiento', respectivamente.[1)]

El sistema escrito no es simétrico, y por lo tanto, resulta incomodo para nuestros fines. Dividiremos la última ecuación entre μ y escribiremos, en lugar de la tercera y la cuarta, algunas combinaciones lineales de éstas.

---

1) El módulo de compresibilidad uniforme ó módulo de compresión hidrostática (ó simplemente módulo de compresión), está definido por la relación

$$K^{-1} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

donde V es el volumen del cuerpo, p es la presión ejercida sobre éste y T su temperatura.

El módulo de desplazamiento ó módulo de rigidez, está definido como la razón de la presión ejercida sobre el cuerpo a la deformación del mismo.

Después de tales transformaciones, las ecuaciones de ondas elásticas se escriben en la siguiente forma definitiva:

$$\frac{\partial\left[\frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)}\sigma_{11}-\frac{3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)}\sigma_{22}\right]}{\partial t}-\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial\left[-\frac{3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)}\sigma_{11}+\frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)}\sigma_{22}\right]}{\partial t}-\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=0$$

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=0$$

$$\rho\frac{\partial v_2}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}-\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0$$

Este ya es un sistema simétrico del tipo (1.1). En efecto, es fácil comprobarlo si escribimos las matrices E^0, A^1, A^2 como (designando $u=u(x,t)=(s_{11},s_{22},s_{12},v_1,v_2)$)

$$\sum_{j=1}^{2}A^jD_j=\begin{pmatrix}0&0&0&D_1&0\\0&0&0&0&D_2\\0&0&0&D_2&D_1\\D_1&0&D_2&0&0\\0&D_2&D_1&0&0\end{pmatrix}$$

$$E^{0}=\begin{pmatrix} \frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)} & -\frac{3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{+3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)} & \frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

La ecuación $P(p,\zeta)=\det(\zeta E^{0}+\sum_{j=1}^{2}A^{j}p_{j})=0$ para este sistema tiene la forma

$$P(p,\zeta)=\det\begin{pmatrix} \zeta\frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)} & -\zeta\frac{3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)} & 0 & p_1 & 0 \\ -\zeta\frac{3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)} & \zeta\frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)} & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{\mu} & p_2 & p_1 \\ p_1 & 0 & p_2 & \zeta\rho & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & 0 & \zeta\rho \end{pmatrix}=0$$

Desarrollando este determinante se obtiene

$$P(p,\zeta)=\frac{\rho^2\zeta}{4\mu^2(k+\frac{4}{3}\mu)}\left[\zeta^2-\frac{k+\frac{4}{3}\mu}{\rho}(p_1^2+p_2^2)\right]\left[\zeta^2-\frac{\mu}{\rho}(p_1^2+p_2^2)\right]=0$$

Como se puede ver de esta expresión, esta ecuación tiene una raíz que es identicamente cero y cuatro raices de las cuales dos de ellas son estrictamente positivas y dos estrictamente negativas.

Consideremos ahora la superficie de lentitud, cuya ecuación está dada por

$$P(1,\eta)=\left[1-\left(\frac{k+\frac{4}{3}\mu}{\rho}\right)\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)\right]\left[1-\frac{\mu}{\rho}\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)\right]=0,$$

y en la cual se ve que ésta consta de dos mantos, que son en este caso eferas cuyas ecuaciones son

$$\eta_1^2+\eta_2^2=\frac{\rho}{k+\frac{4}{3}\mu}$$

$$\eta_1^2+\eta_2^2=\rho/\mu$$

Estas esferas (circunferencias) son superficies disjuntas, una a otra, y acotadas.

El polinomio $Q(\eta,1)=0$ tiene por ecuación

$$Q(\eta,1)=\left[1-\left(\frac{k+\frac{4}{3}\mu}{\rho}\right)\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)\right]\left[1-\frac{\mu}{\rho}\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)\right]=0$$

ó equivalentemente

$$Q(\eta,1)=\mu\left(\eta_1^4+\eta_2^4\right)+2\mu\eta_1^2\eta_2^2-\rho\left(1+\frac{\mu}{k+\frac{4}{3}\mu}\right)\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)+\frac{\rho^2}{k+\frac{4}{3}\mu}=0$$

Entonces

$$\eta\cdot\nabla Q(\eta,1) = \eta_1 \frac{\partial Q(\eta,1)}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial Q(\eta,1)}{\partial \eta_2} =$$

$$= 3\mu\left(\eta_1^4+\eta_2^4\right) + 4\mu\eta_1^2\eta_2^2 - 2\rho\left(1+\frac{\mu}{k+\frac{4}{3}\mu}\right)\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right) =$$

$$= \mu\left(\eta_1^4+\eta_2^4\right) + 2\left[\mu\left(\eta_1^2+\eta_2^4\right) + 2\mu\eta_1^2\eta_2^2 - \rho\left(1+\frac{\mu}{k+\frac{4}{3}\mu}\right)\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)\right] =$$

$$= \mu\left(\eta_1^4+\eta_2^4\right) - \frac{2\rho^2}{k+\frac{4}{3}\mu} \neq 0$$

De la discusión anterior se sigue, entonces, que el sistema (8.3p), y el medio gobernado por él, es uniformemente propagativo.

La densidad de energía para un medio gobernado por (8.3p) es

$$N = \rho\left(v_1^2+v_2^2\right) + \left(\frac{3k+4\mu}{4\mu(3k+\mu)}\right)\left(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2\right) - 2\left(\frac{3k-2\mu}{4\mu(3k+\mu)}\right)\left(\sigma_{11}\sigma_{22}\right) + \frac{1}{\mu}\sigma_{12}^2 .$$

9.- Conclusiones.

El planteamiento de la solución de un problema de propagación de ondas en Física encierra una serie de resultados que conducen a nuevas teorías y enfoques sobre el mismo problema.

En el presente trabajo se da una solución al problema de propagación de ondas. Esta solución no es la más general del problema, ya que existen una serie de resultados más generales que los expuestos anteriormente. En lo que sigue se mencionaran algunas de las generalizaciones más inmediatas que provee el planteamiento del problema expuesto en este trabajo.

Una de las suposiciones básicas, que encierra la anterior exposición, es la de considerar al medio de propagación como aquel en el cual no existen fuentes actuando en él. Esto se refleja matemáticamente en la forma de la ecuación (1.1). La ecuación (1.1) es un caso particular de ([43])

$$E(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_j A^j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u + g(x,t), \qquad (9.1)$$

en la cual las matrices A^j dejan de ser constantes, $B(x)$ es una matriz característica del medio y $g(x,t)$ es una matriz columna que describe a las fuentes actuando sobre el medio.([5] , [40]).

En 40 se plantea la solución del problema de describir las ondas producidas en un medio por la acción de fuentes dadas en el caso particular en el que (9.1) es tal que E, A^j y B son matrices constantes y las fuentes tienen una dependencia en el tiempo sinusoidal o armónica. El problema planteado en [40] es más general que el estudiado en este trabajo.

Existen una clase de medios los cuales no caen dentro de las clases de los uniformemente propagativos y fuertemente propagativos. Esta clase de medios no ha sido aún discutida ampliamente y sólo ha sido mencionada implicitamente en la literatura (v.g. [4]). Un ejemplo de esta clase de medios es el gobernado por las ecuaciones de Magnetogasdinamica.

En la sección 6, se hace mención a la existencia de más operadores de identificación diferentes a la identificación trivial: la identidad. En [15] se dan dos ejemplos de operadores de identificación para medios uniformemente propagativos, y uno de los cuales se refiere explicitamente a la identificación de los campos electromagnéticos perturbado y no perturbado en términos de D y B. Este operador de identificación es

$$\bar{J}=E_2(x)^{-1}E_1.$$

El segundo ejemplo es el de considerar una identificación $\hat{J}$ dada por

$$\hat{J}\phi(x)=E_2(x)^{-1/2}E_1^{1/2}\phi(x),$$

que es el operador 'intermedio' entre J y $\bar{J}$.

$\hat{J}$ no es sólo $(U_1,\pm)$-equivalente a J y $\bar{J}$ sino que además es unitario y nos conduce al mismo operador de onda. De acuerdo al Teorema 6.8, se sigue que los operadores de onda $W_\pm$ (que son — identicos para J, $\bar{J}$ y $\hat{J}$) son parcialmente isometricos si ellos - existen. La unitariedad de $\hat{J}$ se sigue fácilmente de la siguiente identidad, en la que se ha escogido $\Psi(x)=\hat{J}\phi(x)=E_2(x)^{-1/2}E_1^{1/2}\phi(x)$:

$$\|\psi\|_2^2=\int\psi(x)E_2(x)\psi(x)\,dx=\int\phi(x)E_1^{1/2}E_2^{-1/2}E_2(x)E_2(x)^{-1/2}E_1^{1/2}\phi(x)\,dx=$$

$$=\int\phi(x)\,E_1\,\phi(x)\,dx=\|\phi\|_1^2$$

La equivalencia de $\hat{J}$ con J y $\bar{J}$ puede ser probada por medio de un cálculo fácil notando que $E_2(x)^{1/2}\longrightarrow E_1^{1/2}$ cuando $|x|\rightarrow\infty$

Como se menciono al principio de la sección 6, la existencia de un operador de identificación unitario $\hat{J}$ equivalente a J hace posible reducir el problema a uno del tipo Schrödinger de acuerdo a la relación

$$\hat{J}^{-1}W_\pm=\text{s-lim}\,\hat{U}_2(-t)\,U_1(t)\,P_1\,.,\quad \hat{U}_2(t)=\hat{J}^{-1}U_2(t)\,\hat{J}$$

La reducción anterior aumenta la posibilidad de que algunos de los criterios deducidos en la sección 6 para tales operadores de onda puedan der aplicables. Pero ésto no es tan fácil, ya que el generador autoadjunto del grupo $U_2(t)$ está dado por

$$\hat{H}_2 = \hat{J}^{-1} H_2 \hat{J} = E_1^{-1/2} E_2(x)^{-1/2} \left(\sum_k A^k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) E_2(x)^{-1/2} E_1^{1/2},$$

que es una expresión bastante complicada.

El Teorema 7.2 para la existencia del operador de onda bajo las suposiciones (7.a) y (7.b) se puede generalizar si (7.b) es cambiada por la condición de que $|E(x)-E^0|$ se comporta como $|x|^{-1-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, cuando $|x| \to \infty$. La generalización del Teorema 7.2 y su demostración están dadas en : Avila, G.S.S. y Costa, D.G. Asymptotic Properties of General Symmetric Hyperbolic Systems. Journal of Functional Analysis, 35 (1980) 49-63.

Lo anterior mustra un panorama general de las extenciones y generalizaciones que se pueden hacer al considerar los Fenomenos de Propagación de Ondas en Física Clásica considerados desde un punto de vista de la teoría expuesta en este trabajo.

B I B L I O G R A F I A

1 Agmon, S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nostrand, 1965.

2 Amrein, W.O., Jauch, J.M. y Sinha, K.B. Scattering Theory in Quantum Mechanics. Benjamin, 1977.

3 Akhiezer, N.I. y Glazman, I.M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space,Vol.I. Frederick Ungar Publishing Co.,1966.

4 Avila, G.S.S. Spectral Resolutions of Differential Operators Associated with Symmetric Hyperbolic Systems. Applicable Analysis; 1 (1972) 283-299.

5 Avila, G.S.S. y Wilcox, C.H. The Near-Field Behavior of The Green's Matrix in Anisotropic Wave Motions. Journal of Mathematics and Mechanics; No. 8 (1967) 867-883.

6 Bochner, S. y Chandrasekharan, K. Fourier Transforms. Annals of Math. Studies, No. 19. Princeton Univ. Press, 1949.

7 Courant, R. y Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics, Vol. 2. Interscience Publishers, 1962.

8 Duff, G.F.D. The Cauchy Problem for Elastic Waves in an Anisotropic Medium. Phil. Trans. Roy. Soc., Series A, 252 (1960) 249-273.

9 Friedrichs, K.O. Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations. Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954) 345-393.

10 Godunov, S.K. Ecuaciones de la Física Matemática. Editorial Mir, 1978.

11 Jackson, J.D. Classical Electrodynamics. John Wiley and Sons, 1975.

12 James-James. Mathematics Dictionary. Van Nostrand Reinhold, 1976.

13 Jones, D.S. The Theory of Electromagnetism. Pergamon Press, 1964.

14 Kato, T. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer Verlag, 1966.

15 Kato, T. Scattering Theory with Two Hilbert Spaces. Journal of Functional Analysis, 1 (1967) 342-369.

16 Kinsler, L.E. y Frey, A.R. Fundamentals of Acoustics. Jonh Wiley and Sons, 1976.

17 Kolmogorov, A.N. y Fomín, S.V. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial Mir, 1975.

18 Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications. Jonh Wiley and Sons, 1978.

19 Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. Theory of Elasticity, Vol. 7. Pergamon Press, 1970.

20 Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. Electrodynamics of Continuos Media, Vol. 8. Pergamon Press, 1970.

21 Loomis, L.H. y Sternberg, S. Advanced Calculus. Addison-Wesley, 1968.

22 Putman, C.R. On Normal Operators in Hilbert Space. Am. J. Math., 73 (1951) 357-362.

23 Reed, M. y Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis. Academic Press, 1972.

24 Reed, M. y Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, 1972.

25 Reed, M. y Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 3: Scattering Theory. Academic Press, 1972.

26 Reed, M. y Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 4: Analysis of Operators. Academic Press, 1972.

27 Reitz, J.R., Milford, F.J. y Christy, R.W. Foundations of Electromagnetic Theory. Addison-Wesley, 1980.

28 Riesz, F. y Sz-Nagy, B. Functional Analysis. Frederick Ungar Publishing Co., 1955.

29 Royden, H.L. Real Analysis. Collier MacMillan International Editions, 1968.

30 Schechter, M. Scattering in Two Hilbert Spaces. J. London Math. Soc., 19 (1979) 175-186.

31 Schulenberger, J. y Wilcox, C.H. A Coerciveness Inequality for A Class on Nonelliptic Operators of Constant Deficit. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 92 (1972) 77-84.

32 Schulenberger, J. y Wilcox, C.H. Coerciveness Inequalities for Nonelliptic Systems of Partial Differential Ecuations. Ann. Mat. Pura ed Appl., 88 (1971) 229-306.

33 Schulenberger, J. y Wilcox, C.H. The Singularities of The Green's Matrix in Anisotropic Wave Motions. Indiana University Mathematics Journal, 20 (1971) 1093-1117.

34 Schwartz, L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann Paris, 1961.

35 Smirnov, V.I. A Course of Higher Mathematics, Vol. 5. Pergamon Press, 1964.

36 Spivak, M. Calculus on Manifolds. W.A. Benjamin Inc., 1965.

37 Weder, R. Reduction to First Order, Relevance of The Zero Modes. Inédito (Apuntes).

38 Weder, R. Spectral Analysis Scattering Theory and Eigenfunctions Expansion for Strongly Propagative Systems. Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Serie Naranja: Investigaciones, No. 342 (1983).

39 Wilcox, C.H. Asymptotic Wave Functions and Energy Distributions in Strongly Propagative Anisotropic Media. J. Math. Pure et Apliquées, 57 (1978) 275-321.

40 Wilcox, C.H. Steady-State Wave Propagation in Homogeneous Anisotropic Media. Arch. Rat. Mech. and Annal., 25 (1967) 201-242.

41 Wilcox, C.H. Transient Wave Propagation in Homogeneous Anisotropic Media. Arch. Rat. Mech. Annal., 37 (1970) 323-343.

42 Wilcox, C.H. Uniform Asymptotic Estimates for Wave Packets in The Quantum Theory of Scattering. J. Math. Physics, 6 No. 4 (1965) 611-620.

43 Wilcox, C.H. Wave Operators and Asymptotic Solutions of Wave Propagation Problems of Classical Physics. Arch. Mech. Annal., 22 (1966) 37-77.

44 Wilf, H.S. Mathematics for The Physical Sciences. Dover Publications Inc. 1962.