UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

MODELADO BIDIMENSIONAL POR DIFERENCIAS FINITAS PARA LA INTERPRETACION DE DATOS DE GEORESISTIVIDAD EN EXPLORACIONES GEOFISICAS.

T E S I S

Que para obtener el Título de:

F I S I C O

P r e s e n t a:

HUMBERTO SAINT MARTIN POSADA

México, D. F. 1983

INDICE

RESUMEN

Se desarrolla una técnica numérica para obtener la distribución tridimensional eléctrico, producida por una fuente puntual localizada en la superficie de un semiespacio con distribución bidimensional de conductividad.

Esta técnica se aplica en la interpretación de datos de georesistividad, permitiendo introducir variaciones en dos direcciones de la propiedad conductora en el subsuelo.

Se presentan conceptos básicos de exploración geofísica, con especial énfasis en los métodos geoeléctricos con corriente continua, a los cuales son aplicables los algoritmos desarrollados.

Con la introducción de algunas nociones de Teoría Electromagnética y de un tratamiento termodinámico de la conducción eléctrica, se plantea la ecuación diferencial de Poisson que describe el fenómeno.

Se emplea una transformación de Fourier con el fin de facilitar el cálculo de la distribución tridimensional de potencial, considerando una bidimensional de conductividad, ya que el problema puede tratarse entonces en dos dimensiones, parametrizando la tercera por el valor del número de onda Ky.

Se utilizan condiciones de frontera de tipo Dirichlet, pues un tratamiento formal muestra que la ecuación de Poisson es elíptica y autoadjunta, requiriendo de condiciones de este tipo (o, alternativamente, de tipo Neumann) para que la solución sea estable.

Las condiciones de frontera son proporcionadas por un modelo inicial de capas horizontales homogéneas; las heterogeneidades laterales son vistas como perturbaciones sobre ese modelo inicial.

Luego de una introducción al método de diferencias finitas, se discretiza la ecuación de Poisson, tanto por puntos como por áreas, generando sendos sistemas de ecuaciones lineales. Las matrices de coeficientes asociadas a estos sistemas se denominan "Matrices de Capacitancias".

La Matriz de Capacitancias obtenida de la discretización por áreas resulta ser positiva definida y tener una gráfica dirigida fuertemente conectada; estas características permiten el empleo de la factorización Choleski para resolver el sistema, además de asegurar que este últi-

mo es estable, independientemente de la malla de discretización.

Puesto que las soluciones se obtienen en el dominio de la -- transformada de Fourier, es necesario resolver el sistema para varios números de onda y luego integrar, con el fin de regresar al dominio del espacio.

El método desarrollado se aplica al caso de un modelo homogéneo, obteniéndose un error relativo r.m.s. entre potencial analítico y potencial numérico de $e_{rms} = 2.3\%$.

En un caso de dos capas horizontales, el error relativo r.m.s. respecto de la solución analítica es de $e_{rms} = 3.9\%$.

INTRODUCCION

1. Motivos y metas.

La Física es la ciencia que intenta describir el universo, por medio del estudio de las relaciones que existen entre los diversos fenómenos que en él ocurren. Para ello se apoya en un lenguaje matemático, con el cual establece ecuaciones, que le permiten cuantificar los resultados de las teorías que formula y, de esta forma, poder compararlos con mediciones que se hagan de lo que sucede en la realidad. De esta manera, paulatinamente se ha logrado un mejor entendimiento de la naturaleza.

La Geofísica es la disciplina científica cuyo objetivo es recabar, procesar e interpretar la información que se obtiene de nuestro planeta acerca de los procesos que en él se desarrollan y, de manera similar, contribuye a una mejor y más completa comprensión del universo. Para hacerlo, precisa de conocimientos físicos, químicos, matemáticos y geológicos.

Como parte importante del entendimiento del planeta, está la descripción de su estructura interna; para estos fines, la Geofísica se vale de la interpretación de medidas de las propiedades, o de contrastes de ellas, de los materiales que forman la Tierra.

Cuando las mediciones se aplican a materiales del subsuelo en sus capas más someras, tienen un impacto social y económico inmediato, ya que permiten el descubrimiento, la localización, la delimitación y la cuantificación de yacimientos de recursos naturales.

Con estos propósitos (descripción de la estructura interna y búsqueda de recursos naturales), se han desarrollado métodos geofísicos de exploración que, según las propiedades cuyos contrastes midan, suelen clasificarse como sigue:

- Métodos Sísmicos, que miden contrastes de propiedades elásticas.
- Métodos Gravimétricos, que miden contrastes de densidad.
- Métodos Magnetométricos, que miden contrastes de propiedades magnéticas.
- Métodos Electromagnéticos, que miden contrastes de propiedades electromagnéticas.

- Métodos Radiométricos, que miden decaimiento radiactivo. (Tambien se denomina de esta forma a la Percepción Remota, pues se trata de mediciones de radiación electromagnética, principalmente luz visible e infrarrojo).

- Métodos Termométricos, que miden flujo de calor.

A pesar de que el estudio de la Geofísica y sus implicaciones colaterales son de importancia nacional, mucha de la tecnología utilizada no es mexicana y, en algunos casos, resulta obsoleta.

Uno de los motivos para la elección de este tema de investigación es el deseo de cooperar con los esfuerzos para que el país logre su independencia tecnológica.

En este sentido, con el presente trabajo se pretende introducir al ambiente de la geofísica de exploración nacional una técnica de procesamiento de datos, obtenidos mediante el uso de uno de los métodos electromagnéticos: el de resistividad. Los beneficios del empleo de una técnica como ésta van más allá de la industria de los recursos naturales, pues es también útil en el apoyo a estudios científicos del interior de la Tierra, e. g. de las variaciones en el comportamiento de las cámaras magmáticas de volcanes y sus relaciones tectónicas, lo cual puede auxiliar a la prevención de desastres y a aumentar el conocimiento sobre el territorio nacional.

En el aspecto industrial, su utilidad se encuentra en la localización de sitios para la construcción de obras civiles; en la localización, delimitación y cuantificación de recursos minerales; en la exploración de recursos petroleros y geotérmicos.

Organismos nacionales, industria minera estatal y privada, organizaciones de ingeniería civil y grupos de ingeniería geofísica, geología y geohidrología pueden beneficiarse con el procesamiento de sus datos de georesisitividad mediante el uso de programas de computadora diseñados bajo los algoritmos de cálculo aquí presentados. Estos son lo suficientemente simples y eficientes para implementarse en minicomputadoras, con unidades de almacenamiento masivo de datos, sistemas accesibles a la mayoría de los posibles usuarios.

Con el método geofísico de resistividad se pretende obtener información sobre la estructura del subsuelo, a través de la conductivi--

dad eléctrica de las rocas que lo componen. Estas pueden presentar variaciones arbitrarias en cualquier dirección (fig. 1). Para encontrar matemáticamente la respuesta de un medio así, es necesario simplificarlo, diseñando modelos que hagan accesible su tratamiento analítico o numérico.

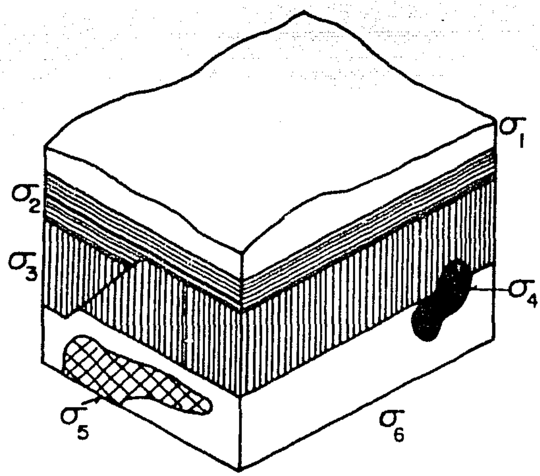


Figura 1. Variaciones arbitrarias de conductividad en el subsuelo.

Una primera aproximación simplifica la situación a la de un modelo donde se admiten variaciones en una sola dirección (fig. 2). En este caso, se intenta describir el cambio de conductividad en función de la profundidad (modelos unidimensionales).

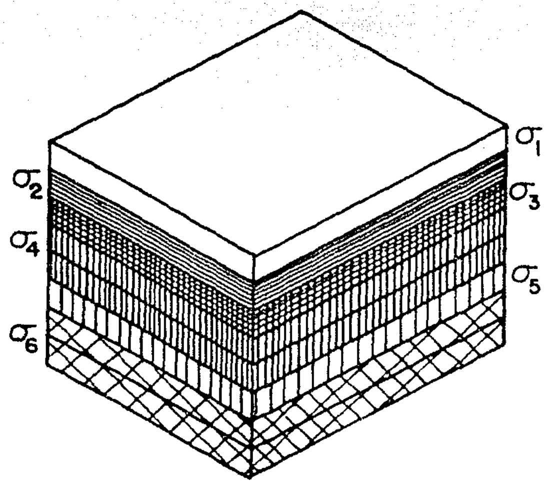


Figura 2. Variación de la conductividad con la profundidad (modelo unidimensional).

Un caso más complicado se tiene cuando se aceptan cambios en dos direcciones: con la profundidad y lateralmente (modelos bidimensionales, fig. 3)

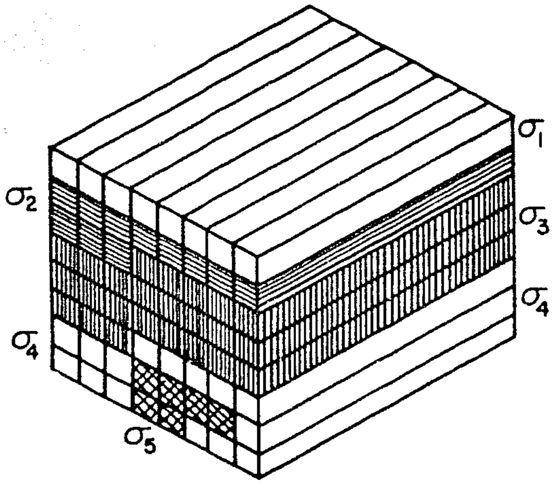


Figura 3. Variación de la conductividad en dos direcciones: con la profundidad y lateralmente (modelo bidimensional).

Un mayor acercamiento al caso real lo proporciona un modelo donde se permiten variaciones en tres direcciones (modelos tridimensionales, fig. 4).

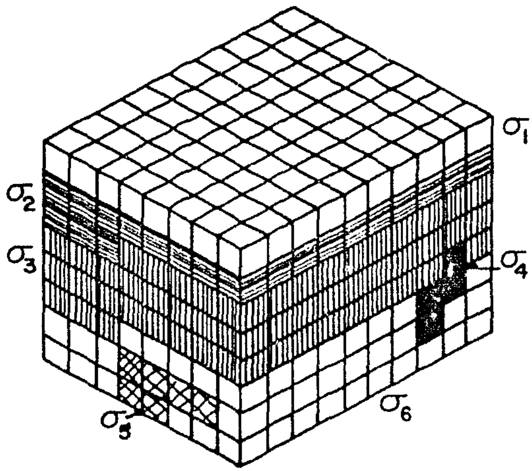


Figura 4. Variación de la conductividad en tres direcciones (modelo tridimensional).

El primer tipo de modelo ha sido estudiado por muchos investigadores y, a la fecha, no está resuelto completamente (cfr. Orellana, 1982, pp. 161 - 163).

Para casos con geometrías muy simples, se han encontrado soluciones analíticas de las ecuaciones que describen el fenómeno de conducción eléctrica (cfr. Grant y West, 1976, pp. 402-442; cfr. Hermance, 1982); sin embargo, los métodos numéricos, aunque son aproximaciones a las soluciones verdaderas, ofrecen una herramienta poderosa y pueden aplicarse a muchas situaciones que se encuentran en la realidad.

Los siguientes se han utilizado para simular la respuesta de distribuciones de conductividad en una, dos y tres dimensiones, y, en algunos casos, con fines de interpretación (Aiken et al., 1973):

a) Método de elementos finitos, que, luego de discretizar el dominio en que se resuelven las ecuaciones, adapta una función simple en cada elemento, enlazándolas de forma que se minimice la energía del sistema (Coggon, 1971).

b) Método de ecuación integral, que, tras la discretización, proporciona soluciones analíticas en cada elemento y luego las une por condiciones de frontera entre ellos.

c) Método de diferencias finitas, en que operadores diferenciales se substituyen por operadores finitos, basándose en la expansión en serie de Taylor de las funciones sobre las que se opere.

El presente trabajo intenta proporcionar un método de análisis, que permita un procesamiento e interpretación de datos de georesistividad, en que se dé cabida a heterogeneidades bidimensionales del subsuelo sobre cuya superficie se hayan hecho mediciones.

El problema fundamental en interpretación geofísica es de tipo inverso; es decir que, dadas una señal y una respuesta, se intenta encontrar cuál es la distribución en el subsuelo de la propiedad que las relaciona, o bien, la fuente que las produce. Es usual que un mismo conjunto de observaciones geofísicas de campo admita soluciones diversas, o más exactamente, todo un dominio de soluciones válidas.

En el método de análisis que se desarrolla, se resuelve un problema directo: tras la proposición de diferentes distribuciones de conductividad en el subsuelo, se obtiene la respuesta a una señal dada. Puesto que el problema inverso admite diversas soluciones, al resolver el problema directo, distintas distribuciones pueden adecuarse a los valores observados. Con el fin de disminuir esta ambigüedad, es necesario recurrir a datos de otros métodos de prospección y a conocimientos de la geología superficial, para converger a un modelo que satisfaga la mayor parte de las observaciones.

2. Antecedentes

Los métodos eléctricos de exploración geofísica comenzaron a usarse a partir de la segunda década de este siglo, cuando Conrad Schlumberger efectuó las primeras mediciones de este tipo, en Francia (cfr. Orellana, 1982, pp. 29-35). Estos métodos se emplearon en la búsqueda de petróleo, de minerales y de agua subterránea.

En un principio, la interpretación de los datos de campo era cualitativa y requería de gran experiencia por parte de la persona que la hiciera.

Con el afán de lograr interpretaciones sistemáticas y cuantitativas, se intenta usar diversos modelos del fenómeno. Estos pueden ser reproducciones experimentales de laboratorio o modelos puramente matemáticos.

Los modelos experimentales de laboratorio consisten de simulaciones del subsuelo, logradas con cuerpos de distintas conductividades, inmersos en un medio homogéneo (fig. 5).

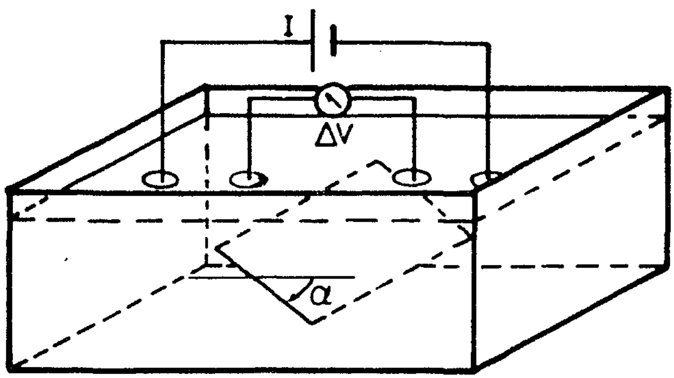


Figura 5. Modelado del subsuelo con un "tanque electrolítico".

La experimentación de laboratorio se lleva a cabo entonces, tratando de reproducir a escala el procedimiento seguido en el campo, leyendo, bajo condiciones controladas, la distribución de potencial creada por una corriente eléctrica. Se repiten las mediciones, variando la distribución de conductividades del modelo, hasta lograr un tipo de respuesta similar a la obtenida en el campo.

Otro tipo de modelo de laboratorio es aquél que emplea una hoja conductora, cubierta con grafito y sobre la cual se simulan distribuciones de conductividad, pintándolas con tintura metálica de oro, de plata o de cobre (fig. 6).

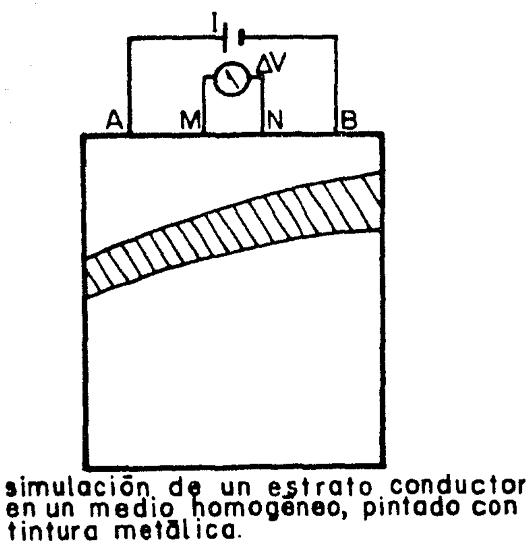


Figura 6. Modelado del subsuelo con una hoja conductora.

Las dificultades que presentan estos procedimientos son: su alto costo (pues es necesario diseñar todo un experimento de laboratorio, precisando de amplias facilidades de equipo), la elección de factores de escala adecuados, para poder comparar mediciones en el modelo con las de campo; la calidad de los materiales usados, que puede variar de un modelo a otro, obstaculizando la posibilidad de repetición de condiciones. Además, cuando un patrón falla (i.e. no reproduce las medidas de campo), es necesario volver a montar todo el aparato experimental de laboratorio.

La experimentación numérica no presenta estas desventajas, aunque también encierra algunas dificultades, pues se apoya en modelos matemáticos, que se basan en el establecimiento de ecuaciones que describan el fenómeno en estudio. En el caso de fenómenos eléctricos, se cuenta con tales ecuaciones, gracias al desarrollo de la Electrodinámica. Estas deben solucionarse, simulando las condiciones del problema real, para luego comparar los resultados con las mediciones de campo.

En los años treintas apareció una publicación debida a C. Schlumberger y S. Stefanescu (Stefanesco y Schlumberger, 1930 *), dando la solución al problema en que la distribución vertical de conductividades se simula usando modelos estratificados en capas horizontales, infinitas lateralmente, cada una homogénea e isotrópica en su propiedad conductora.

Los métodos numéricos que se han usado para interpretación de datos de georesistividad son el de elementos finitos, el de ecuación integral y el de diferencias finitas, como se mencionó anteriormente.

El método de diferencias finitas ha sido aplicado a muchos problemas de ingeniería desde 1930, para encontrar distribuciones de esfuerzos, simular campos de velocidades y estados termodinámicos en fluidos, y en problemas de flujo de calor.

La teoría de la técnica de diferencias finitas se basa en la expansión en serie de Taylor de una función.

La primera aplicación de esta técnica a datos de georesistividad la hizo Jepsen (1969), en su disertación de tesis doctoral.

---

*Nota: se utiliza la grafía "Stefanescu", que es la auténtica, frente a la afrancesada "Stefanesco"; sin embargo, en el artículo escrito con C. Schlumberger, se le encuentra como "Stefanesco", pues la revista en que fue editado es francesa. Sabba S. Stefanescu era rumano.

Aiken et al. (1973), para resolver un problema práctico de exploración, emplean modelos experimentales de laboratorio (tanque electrolítico y hoja conductora, figuras 5 y 6), con el fin de lograr la interpretación; pero concluyen que es más útil y eficiente usar un modelo matemático. Establecen la ecuación de Laplace que describe el fenómeno y la tratan considerando variaciones, tanto de potencial como de conductividad, sólo a profundidad y laterales. En la discretización que hacen del problema, utilizan una malla regular de 50 X 40 nodos. Este enfoque resulta en el tratamiento de matrices para encontrar la solución. Basan las condiciones de frontera en la malla, en una onda plana a través de un medio homogéneo (condiciones de frontera tipo Dirichlet), excepto en la frontera que corresponde a la superficie del terreno, en la cual se determina que la corriente no fluye hacia el aire (condición tipo Neumann). La solución de las ecuaciones se efectúa con un método iterativo de relajación. Sugieren la aplicación de la técnica a soluciones tridimensionales, expresando la necesidad de una computadora con una gran capacidad de memoria.

Posteriormente, Mufti (1976), introduce una malla de discretización con espaciamiento no uniforme. El tratamiento de las ecuaciones es bidimensional, considerando que los electrodos de corriente son fuentes lineales infinitas perpendiculares a la línea del perfil. Permitiendo variaciones de potencial y de conductividad en sólo dos dimensiones, analiza las características de la matriz asociada con la evaluación de los potenciales, demostrando que el procedimiento que usa es estable para cualesquier geometría y distribución de conductividades. Introduce, además, el método iterativo de sobrerelajación sucesiva (SOR, por sus siglas en inglés), y una extensión del mismo, conocida como sobrerelajación lineal sucesiva (SLOR). El espaciamiento de la malla empleada, al aproximarse a las fronteras, se incrementa, con el propósito de que la zona en que la malla es fina pueda tratarse como una perturbación "local" dentro de un área mayor.

En un nuevo intento de abatir tiempo de cálculo y necesidades de memoria, Mufti (1978) introduce el uso de una malla mucho más abierta, cuyos nodos van incrementando en forma logarítmica la distancia a las fuentes. Para ello utiliza los parámetros de Dar Zarrouk (cfr.

Orellana, 1982, pp. 169-175), que permiten que varias capas de diferentes conductividades queden comprendidas entre dos nodos sucesivos de la malla, ya que definen una conductividad efectiva para cada nodo, tomando en cuenta las distintas capas. Con el objetivo de comparar los resultados del método numérico que usa, resuelve con él situaciones que también tienen solución analítica, para modelos con simetría radial, empleando coordenadas cilíndricas.

Una nueva forma de discretización permite a Dey y Morrison (1979a) establecer una matriz positiva definida, asociada a la evaluación de los potenciales. La solución se obtiene por un método directo, utilizando la factorización Choleski. Además, con el empleo de una transformación de Fourier, es posible considerar una distribución tridimensional de potenciales, sobre una bidimensional de conductividades, suponiendo que hay simetría en una dirección. Se emplean condiciones de frontera mixtas, considerando al modelo bidimensional inmerso en un medio homogéneo.

Los mismos autores ya han realizado un programa que permite modelado tridimensional (Dey y Morrison, 1979b), corriéndolo en una computadora CDC 7600, pues se trata de un caso que requiere de gran cantidad de memoria y de un procesador muy rápido, debido al número de operaciones que deben realizarse.

Otros autores han logrado refinamientos para modelos de 2 y 3 dimensiones (Das y Verma, 1981; Hermance, 1982).

3. Planteamiento general

El objetivo de este trabajo es la presentación de un método de interpretación cuantitiativa de datos de georesistividad, el cual permita considerar variaciones de conductividad eléctrica en dos direcciones.

El método se implementa con las siguientes características:

Se sigue el planteamiento de Dey y Morrison (1979a), salvo que el modelo bidimensional está inmerso en otro de capas horizontales, el cual proporciona las condiciones de frontera laterales y a profundidad, con valores de potencial en los nodos correspondientes (condiciones de tipo Dirichlet). En la superficie se mantiene la condición tipo

Neumann, en que se piensa que no hay flujo de corriente hacia el aire. Las heterogeneidades bidimensionales son consideradas perturbaciones sobre el modelo de capas horizontales.

De esta manera se logra un algoritmo que opera sin consumir demasiado tiempo de procesador al ajustar modelos teóricos a datos de -- campo; esto se debe a que con las condiciones de frontera que se emplean no es necesario hacer un cálculo de funciones Bessel, como ocurre con las que utilizan Dey y Morrison (1979a).

El método es interactivo, es decir, requiere que la persona - que haga la interpretación proponga una distribución bidimensional de conductividades; el programa calcula valores del parámetro conocido como "resistividad aparente", los cuales se comparan con valores del mismo parámetro obtenidos en el campo, con el fin de determinar si el modelo propuesto representa, adecuadamente, la distribución real de conductividades en el subsuelo. Hay que recordar que diferentes modelos pueden reproducir - los valores observados, así que el "mejor" debe elegirse ayudándose con datos de otras mediciones y de la geología de la superficie.

Está diseñado para ser corrido en minicomputadoras, las que deberán tener unidades de almacenamiento masivo de datos (se ha pensado, en especial, en unidad de disco duro), debiso a la gran cantidad de memoria que requiere la solución del problema. (Una malla de 40 X 50 nodos - produce una matriz de 2000 X 2000, necesitando de 8 megabytes para almacenarla).

Las pruebas y resultados aquí presentados se realizaron en una minicomputadora Eclipse, de Data General, que tiene 32 kilopalabras de memoria central, con palabras de 16 bits.

El temario y la descripción del procedimiento son los siguientes:

Debido a la necesidad de usar conocimientos de diversos campos, el trabajo se estructura de forma que el problema se vea ubicado, en cada campo, como caso particular de una teoría general.

De esta forma, en el primer capítulo se presentan los métodos electromagnéticos de exploración geofísica, señalando aquéllos a los cuales serán aplicables los procedimientos que han sido desarrollados. Después de una sinopsis sobre Teoría Electromagnética, se llega a la ecuación diferencial cuyas soluciones se intenta proporcionar; ésta es ---

simplemente la ecuación de continuidad para flujo de carga eléctrica, combinada con la ley de Ohm en forma vectorial, la cual requiere del tensor de conductividad. Con algunos artificios de cálculo la ecuación se escribe de dos formas diferentes. En el mismo capítulo, se muestra el modelo bidimensional empleado, consistente de prismas rectangulares homogéneos, isotrópicos e infinitos en dirección "y" (el modelo de la fig. 3), en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z).

Con tales idealizaciones se modifican las dos formas de la ecuación a resolver. Como se tienen operadores diferenciales en tres dimensiones y el modelo es en dos, se aplica una transformada de Fourier, que es un artificio matemático que permite manejar el problema en dos dimensiones, parametrizando la coordenada "y" por valores de Ky (que se denomina "número de onda").

En el segundo capítulo se presenta el método de diferencias finitas, con el que se efectúa la discretización del dominio de soluciones, considerando en el modelo un corte perpendicular a la dirección "y", con lo que se origina una malla rectangular. A cada nodo de la malla se le asigna una conductividad.

Cada una de las dos formas de la ecuación se discretiza de manera diferente. Como consecuencia, se pasa de ecuaciones diferenciales a sistemas lineales, que están en función de la asignación del parámetro Ky.

Se intenta obtener valores de potencial transformado en cada nodo, por lo que se trata de un problema matricial, con los coeficientes de los sistemas de ecuaciones; con ellos se genera la "matriz de capacitancias" para cada discretización y para cada número de onda Ky. Luego de analizar las propiedades de las matrices debidas a una y otra formas de discretización, se muestra que una de ellas resulta la más conveniente para resolver el sistema, de un modo más adecuado al propósito de este trabajo, ya que permite aplicar la factorización Choleski.

Se ha elegido el método de diferencias finitas porque permite, en este caso, sustituir derivadas por cocientes de diferencias, la cual es una forma de discretización de fácil implementación. La factorización Choleski es un algoritmo para solución de sistemas lineales de ecuaciones, que resulta muy eficiente para sistemas grandes (de orden $\sim$100), ya que permite particionar la matriz de forma que no es necesario resolver todo al mismo tiempo; además, una vez obtenido el factor Choleski de una matriz, se pueden procesar distintos vectores independientes, usando únicamente sustituciones directa e inversa.

En el capítulo III, se presentan los algoritmos que resolverán el sistema para cada asignación de Ky. Una vez que se tengan soluciones en cada nodo, para 8 diferentes Ky, se aplica una transformación inversa de Fourier, a fin de obtener valores de potencial en el espacio -- (x, y, z). Los valores de Ky son 0.006, 0.200, 0.400, 0.750, 1.000, 1.500, 2.000 y 5.000; elegidos considerando que el comportamiento del potencial transformado es de decaimiento exponencial. Los valores primero y último se escogen tratando de truncar secciones en las cuales el área bajo la - curva puede despreciarse, en la integración de la transformada inversa.

Entonces es posible calcular diferencias de potencial en superficie, para distintas localizaciones de fuentes. Estas diferencias de potencial teórico podrán compararse con las medidas en el campo, por medio de un parámetro conocido como "resistividad aparente" (que se define en el capítulo I), con el fin de decidir si el modelo propuesto es adecuado.

El procedimiento se ilustra con aplicaciones a distintos casos, en el capítulo IV.

El análisis de los resultados permite concluir que se cumplen los objetivos trazados, ya que el programa consume 10 minutos de -- tiempo real al procesarse en una minicomputadora Eclipse, usando una malla de 10 nodos en profundidad por 30 laterales; además se corren ejemplos con mallas de 20 X 80 y de 15 X 75 nodos, comparando los valores obtenidos numéricamente con la solución analítica para casos simples. Este análisis de resultados se efectúa considerando el error relativo entre - la solución numérica y la analítica.

CAPITULO I
METODOS ELECTROMAGNETICOS DE EXPLORACION GEOFISICA

Resumen

En este capítulo se presenta un resumen sobre los métodos geoeléctricos de exploración, enfatizando aquéllos más relacionados con el tema de este trabajo. Se hace también una presentación de las ecuaciones electromagnéticas que serán usadas como base para el desarrollo de las matemáticas necesarias para lograr el objetivo que se persigue.

Una disertación termodinámica sobre la ley de Ohm, y la presentación del tipo de modelo que se empleará, permitirán plantear las ecuaciones cuyas soluciones numéricas se intenta proporcionar en este trabajo.

I.1 Métodos geoeléctricos de exploración

Existen tres magnitudes electromagnéticas principales que en principio podrían utilizarse para identificar los cuerpos situados en el subsuelo; estas magnitudes son la permeabilidad magnética μ, la permitividad eléctrica ε y la conductividad eléctrica σ. Entre ellas, y hasta ahora, es casi exclusivamente la conductividad la propiedad cuya distribución en el subsuelo se estudia. (cfr. Orellana, 1982, p. 28).

El conocimiento de estas propiedades, o de su variación ya sea lateral o vertical, aunado al de otros factores geológicos, permite, en cierto grado, modelar el subsuelo o bien el descubrimiento, la delimitación y la estimación de posibles yacimientos de recursos naturales.

Para poder determinar los contrastes de las propiedades eléctricas arriba mencionadas es necesario que una fuente de energía electromagnética las excite y que entonces se produzca en la superficie del terreno algún tipo de respuesta medible (campo eléctrico, campo magnético, defasamiento entre señal y respuesta, transitorios, etc.), dependiente de la propiedad buscada. La fuente de excitación puede ser de origen natural o artificial y de acuerdo con ella, los métodos electromagnéticos pueden dividirse como se mostrará a continuación; cabe hacer notar que es costumbre muy extendida llamar métodos electromagnéticos únicamente a aquéllos que inducen un campo magnético por medio de una fuente variable en el tiempo; los de campo constante usualmente se denominan eléctricos. En rigor (Orellana, 1982, p. 35), todos son electromagnéticos. La clasificación que aquí se da se basa en las ideas de Orellana y en una compilación de diferentes libros y publicaciones (Lima, comunicación personal).

I.- Métodos que utilizan fuentes de excitación naturales
   1. Método del potencial espontáneo (SP)
   2. Método de corrientes telúricas (T)
   3. Métodos magneto-telúricos (MT y AMT)
   4. Método de audiofrecuencias magnéticas (AFMAG)
   5. Método de muy bajas frecuencias (VLF)

II.- Métodos que utilizan fuentes de excitación artificiales
   1. Métodos de fuente constante (corriente directa)
      a) Sondeos eléctricos verticales (simétricos y dipolares, VES)
      b) Perfilajes eléctricos (EP)
      c) Método del cuerpo cargado (mise-á-la-masse)
   2. Métodos de fuente variable (corriente alterna)
      2.1 Métodos con fuente propia
      a) Sondeos electromagnéticos (EMS)
         a.1 Sondeos geométricos (una sola frecuencia)
         a.2 Sondeos de frecuencia variable
         a.3 Sondeos por establecimiento de campo
      b) Perfilajes electromagnéticos (EMP)
         b.1 Emisor fijo, receptor móvil
            b.1.1 Método Turam
            b.1.2 Compensador Sundberg
            b.1.3 Método del cable largo
         b.2 Emisor móvil, receptor fijo
            b.2.1 Métodos de inclinación de campo:
               i) Método de las líneas paralelas
               ii) Método de la medición recíproca
         b.3 Emisor y receptor móviles
            b.3.1 Método Slingram

c) Perfilajes electromagnéticos aéreos

c.1 Sistemas de medida de componentes en fase

c.2 Sistema de cuadratura

c.3 Método del cable largo

c.4 Método de las dos antenas

c.5 Método de formación de campo

2.2 Métodos con fuentes destinadas a otro fin (como emisores de radio, etc.)

a) Método Radio-Kip

b) Método de radiografía hertziana

3. Métodos que utilizan la parte transitoria de una fuente artificial

a) Método de polarización inducida y resistividad compleja (IP)*

Para una explicación de todos los métodos enunciados, se pueden consultar los trabajos de Orellana (1982), Koefoed (1980), Patra y Mallick (1981) y Grant y West (1976), que aparecen en las referencias.

En la siguiente sección se hace una explicación más detallada de los métodos que excitan el medio con corriente continua, para los cuales los resultados de este trabajo son perfectamente aplicables.

I.1.1 Sondeos y perfilajes eléctricos con corriente continua

Para determinación de contrastes en la conductividad eléctrica del subsuelo se utilizan básicamente dos procedimientos: el sondeo eléctrico vertical (VES) y el perfilaje eléctrico (EP), el primero para determinar cambios verticales y el segundo para los cambios horizontales.

---

*Nota: las siglas empleadas para designar los diferentes métodos de exploración son las iniciales de sus nombres en inglés; éstas, así como la designación francesa mise-á-la-masse, son las que se emplean comúnmente en la literatura.

Cuando una zona de anomalía eléctrica tanto horizontal como vertical se ha detectado, se puede emplear un tercer procedimiento para delimitar la forma y la extensión del objeto que la produce: el método - de cuerpo cargado o de mise-á-la-masse.

Para realizar VES o EP se excita el medio con una corriente eléctrica (continua o alterna) a través de dos electrodos conectados a - una fuente. Entonces se llevan a cabo mediciones del potencial generado entre dos puntos. El valor del potencial depende de la conductividad (o de la resisitividad) eléctrica - o de cambios en la misma - en la zona - del subsuelo que atraviesa la corriente inyectada, para una distancia dada desde los puntos de inyección. Tales mediciones son utilizadas para - calcular el parámetro conocido como resistividad aparente. Esta se define como la resistividad que debería tener un semiespacio homogéneo, isotrópico e infinito, para crear, con el mismo arreglo de electrodos y la misma corriente inyectada, la misma diferencia de potencial que se mide en la superficie de un semiespacio real (fig. I-1a y I-1b).

La resistividad aparente se expresa matemáticamente como:

$$\rho_a = 2\pi\left[\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}\right]^{-1} \frac{\Delta V}{I} \qquad (I.1)$$

donde ΔV es la caída de potencial entre los electrodos M y N, e I es la corriente eléctrica inyectada a través de los electrodos A y B.

Para hacer levantamientos eléctricos existe una gran variedad de arreglos de electrodos. Una clasificación sencilla los separa en tres grupos, dependiendo de las relaciones geométricas entre los electrodos. Estos grupos son:

1) Arreglos colineales. Se caracterizan por tener todos los electrodos en una misma línea, con los de potencial entre los de corriente. En la tabla I.1.1 se presentan los principales tipos, junto con un - bosquejo de sus características.

2) Arreglos dipolares. En esta modalidad se forman dos dipolos, uno con los electrodos de potencial y otro con los de corriente. Hay seis tipos de arreglos dipolares, diferenciados por las relaciones - angulares entre los dipolos. Estos se presentan en la tabla I.1.2*

---

*Nota: las expresiones para el cálculo de resistividad apa-

(continúa en la sig. pág.)

3) Arreglos compuestos. Pueden considerarse como superposición de dos o más dispositivos simples; debido a ello su análisis se reduce a considerar cada uno de los arreglos simples por separado y superponer sus efectos. Existen tres modalidades de arreglos compuestos, a saber: agrupación, cuando se agrega un electrodo de potencial; apantallamiento, cuando el electrodo adicional es de corriente, y los apantallados de agrupación, en que se añaden un electrodo de corriente y uno de potencial. Aunque en la práctica se usan poco, estos arreglos pueden emplearse eficientemente para detectar heterogeneidades laterales del terreno. Se muestran algunos en la tabla I.1.3.

Todos estos arreglos se usan para levantamientos de VES o de EP, con excepción de los arreglos colineales asimétricos, que suelen emplearse sólo para levantamientos de líneas equipotenciales.

La profundidad del estudio, cuando se usan VES con arreglos colineales, se controla aumentando, para cada medida, la separación entre los electrodos de corriente y conservando, hasta donde la resolución del instrumental lo permita, la separación entre los electrodos de potencial. Con arreglos dipolares, la profundidad se controla variando la distancia entre dipolos.

Una curva de VES resulta de elaborar una gráfica de resistividad aparente ρ_a contra distancia (entre electrodos de corriente, para el caso colineal, y entre dipolos, para el caso dipolar) (fig. I-2).

(continuación)

rente que se presentan con los arreglos dipolares se obtienen con la suposición de que las separaciones entre electrodos ℓ y L son mucho menores que la distancia entre los centros de los dipolos R (cfr. Orellana, 1982). Cuando se considera el caso general, sin suponer ℓ y L mucho menores que R, no hay una fórmula compacta para calcular ρ_a, sino que es necesario seguir el algoritmo mostrado en la tabla I.1.4.

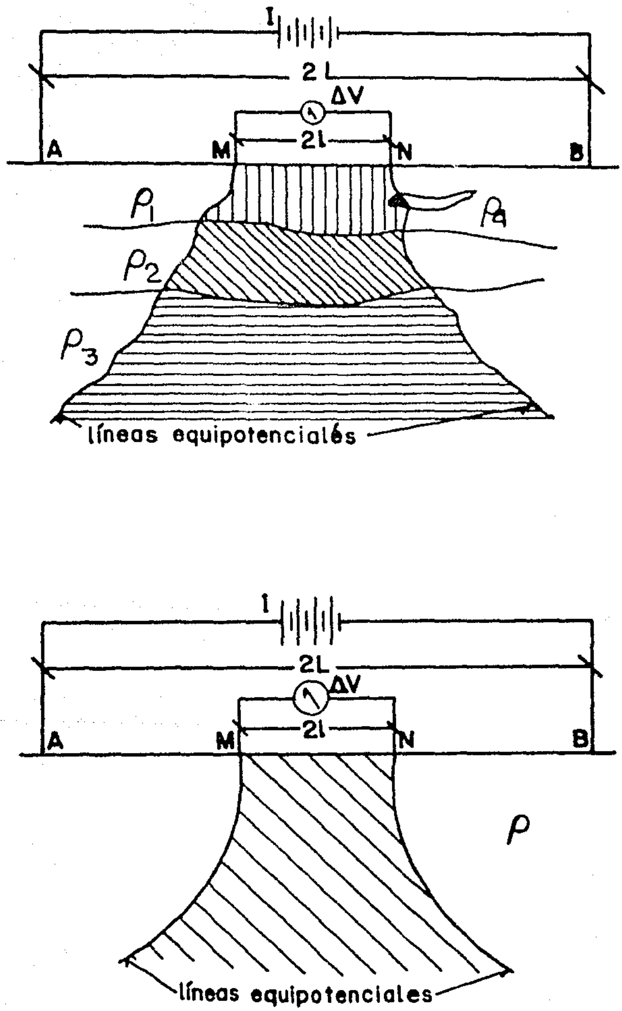


Figura 1-1. Concepto de resistividad aparente:
a) Semiespacio real, heterogéneo y anisotrópico. b) Semiespacio homogéneo, isotrópico e infinito.

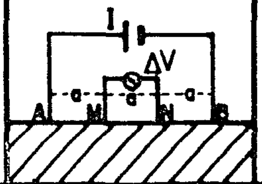
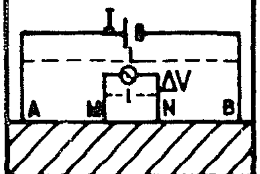
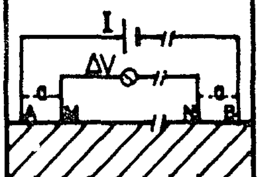
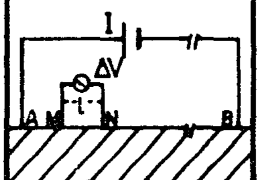
	NOMBRE	VISTA LATERAL	CARACTERISTICA PRINCIPAL	RESISTIV. APARENTE
SIMETRICOS	WENNER		Las separaciones AM, MN y NB entre los electrodos son iguales.	$\rho_a = 2\pi a \Delta V/I$
	SCHLUM-BERGER		Las separaciones entre los electrodos de potencial (ℓ) es mucho menor que la que hay entre los electrodos de corriente (L)	$\rho_a = \pi \frac{L^2 - l^2}{2l} \frac{\Delta V}{I}$
ASIMETRICOS	SEMI-WENNER		La separación entre los electrodos AM es la misma que NB; pero estos últimos se colocan muy alejados de los primeros (i.e. $MN \to \infty$)	$\rho_a = \pi a \Delta V/I$
	SEMI-SCHLUM-BERGER		El electrodo de corriente B se lleva a gran distancia de los demás, de modo que no influya sobre el valor ΔV observado (i.e. $BN \to \infty$)	$\rho_a = \pi \frac{L^2 - l^2}{l} \frac{\Delta V}{I}$

TABLA I.1.1: ARREGLOS ELECTRODICOS COLINEALES

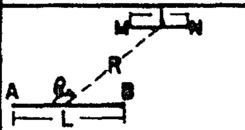
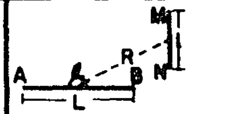
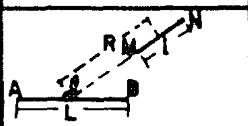
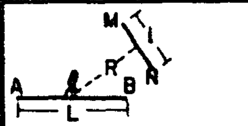
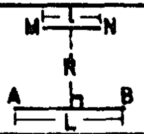
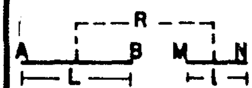
NOMBRE	VISTA EN PLANTA	CARACTERISTICA PRINCIPAL	RESISTIV. APARENTE
PARALELO		Los dipolos se colocan paralelos uno respecto del otro	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L \cdot l} \frac{(\Delta V/I)}{2\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}$
PERPENDI-CULAR		Los dipolos forman ángulo recto	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L \cdot l} \frac{4(\Delta V/I)}{3\,\text{sen}\,2\theta}$
RADIAL		El dipolo de electrodos de potencial MN está situado sobre la recta que une los centros de ambos dipolos	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L \cdot l} \frac{(\Delta V/I)}{\cos\theta}$
AZIMUTAL		El dipolo de electrodos de potencial MN es perpendicular a la recta que une los centros de ambos dipolos	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L \cdot l} \frac{(\Delta V/I)}{\text{sen}\,\theta}$
ECUATO-RIAL		El dipolo de potencial MN es paralelo al de corriente AB, a la vez que perpendicular a la línea que une los centros	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L \cdot l} \frac{\Delta V}{I}$
AXIAL		Los dipolos se colocan colinealmente sin intersectarse	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L \cdot l} \frac{\Delta V}{I}$

TABLA I.1.2: ARREGLOS ELECTRODICOS DIPOLARES

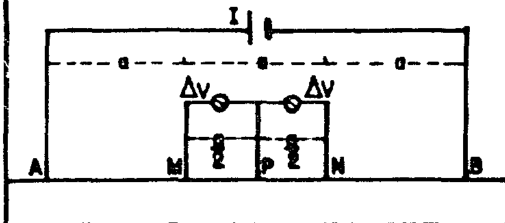
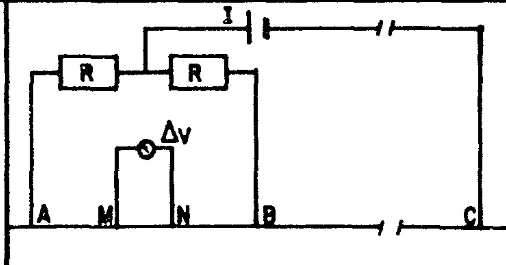
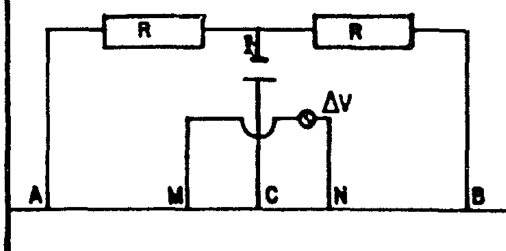
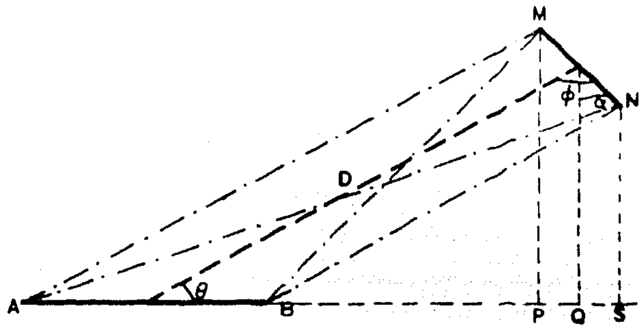
<table>
<tr><th></th><th>NOMBRE</th><th>VISTA LATERAL</th><th>CARACTERISTICA PRINCIPAL</th></tr>
<tr><td>AGRUPACION</td><td>LEE</td><td>
</td><td>Se deriva de un arreglo colineal tipo Wenner, con un electrodo adicional de potencial en el centro del arreglo, con el fin de tomar dos medidas de potencial, una entre M y P, y otra entre P y N</td></tr>
<tr><td rowspan="2">APANTALLAMIENTO</td><td>HOMOPOLAR</td><td>
</td><td>Un electrodo adicional de corriente (C) se coloca alejado del arreglo (Wenner o Schlumberger). Las resistencias R sirven para compensar la resistencia de contacto y la de la línea a (C). Para un medio homogéneo isotrópico, $\Delta V = 0$</td></tr>
<tr><td>DIFERENCIAL O BLOKH</td><td>
</td><td>Es similar al homopolar, sólo que el electrodo adicional de corriente (C) se coloca en el centro del arreglo. Nuevamente, las resistencias R tienen el objetivo de hacer pasar la misma corriente I por las líneas que van a A y a B</td></tr>
</table>

TABLA I.1.3: ARREGLOS ELECTRODICOS COMPUESTOS.

TABLA 1.1.4 Cálculo de resistividad aparente para arreglos dipolares



El factor geométrico que se considera en el cálculo de resistividad aparente depende de las distancias AM, AN, BM y BN. El algoritmo que aquí se describe tiene por objetivo encontrar esas distancias para cualquier posición de los electrodos, conociendo los parámetros AB (separación entre electrodos de corriente), MN (separación entre electrodos de potencial), D (distancia entre los centros de los dipolos) y los ángulos θ y ϕ. Para tal efecto se define el ángulo α como

$$\alpha = (\phi - (\pi/2 - \theta)) = \phi + \theta - \pi/2,$$

con lo que

$SN = |D\,\mathrm{sen}\theta - (MN/2)\cos\alpha|$;

$BS = |D\cos\theta + (MN/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha - (AB)/2|$

$BN = \{ BS^2 + SN^2\}^{1/2}$, del triángulo BNS.

Del triángulo ANS se tiene que

$AS = |D\cos\theta + (MN/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha + (AB/2)|$

$AN = \{ AS^2 + SN^2\}^{1/2}$, y así $V_N=(I\rho/2\pi)(AN^{-1}-BN^{-1})$.

Análogamente, para el potencial en M, se tiene que

$MP = |D\,\mathrm{sen}\theta+(MN/2)\cos\alpha|$; $BP = |(AB/2) - (D\cos\theta - (MN/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha|$

$BM = \{ MP^2 + BP^2\}^{1/2}$

$AP = |(AB/2) + (D\cos\theta - (MN/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha)|$, $AM = \{ AP^2 + MP^2\}^{1/2}$

$V_M = (I\rho/2\pi)(AM^{-1} - BM^{-1})$; de donde, por último,

$\Delta V = V_M - V_N$ y $\rho_a = 2\pi(\Delta V/I)$

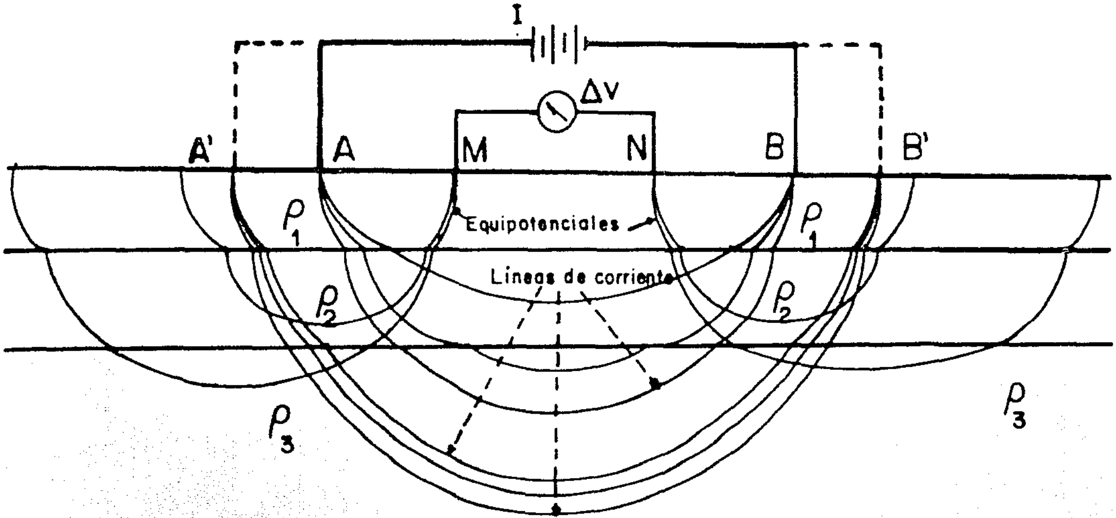


Figura I-2. a) Representación gráfica de la penetración de las equipotenciales al separar los electrodos de corriente. (En la figura $\rho_1 < \rho_2$; $\rho_2 > \rho_3$).

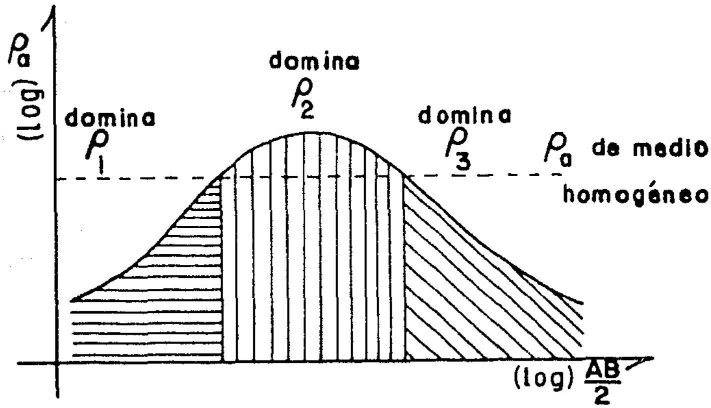


Figura I-2. b) Curva de VES que muestra la variación de ρ_a al ir penetrando más la corriente en el subsuelo.

En los EP lo que se persigue es el conocimiento de la variación lateral de la resistividad. Para esto el arreglo completo se desplaza lateralmente sin modificar la distancia entre los electrodos, por lo que se consigue una sola profundidad de penetración, y para cada posición se obtiene un valor de ρ_a. A la gráfica de ρ_a contra las posiciones se le llama curva de perfilaje o calicata eléctrica (fig. I-3).

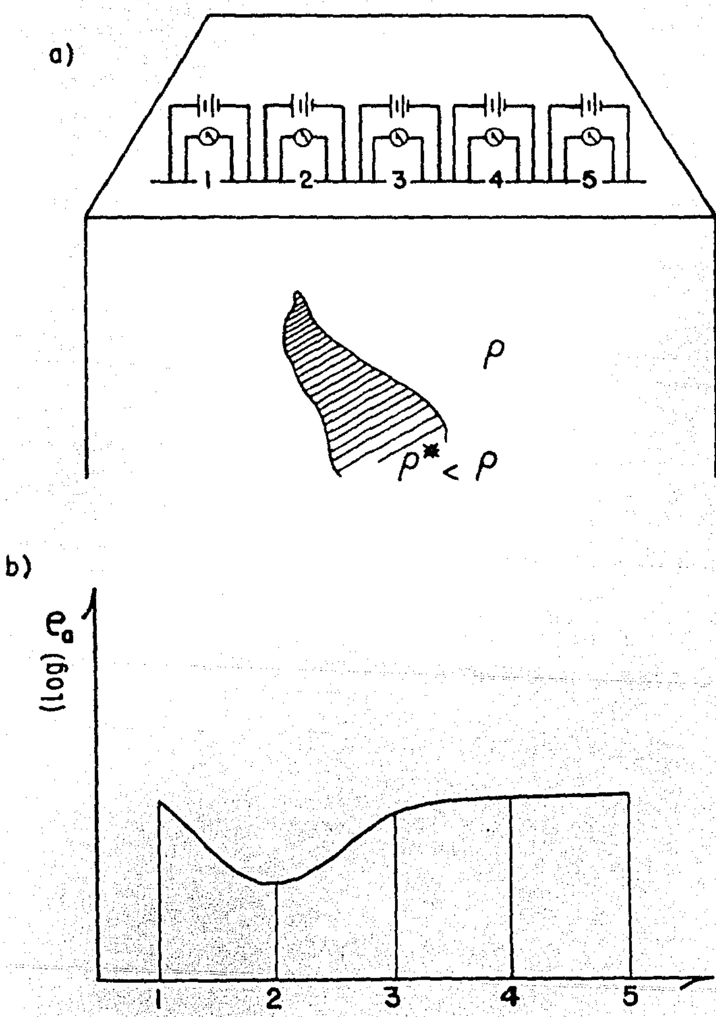


Figura I-3. a) Colocación de electrodos en el campo.
b) Supuesta curva de EP correspondiente al modelo en (a).

I.1.2 Conducción eléctrica en el subsuelo

La capacidad para conducir electricidad es la propiedad física con mayor intervalo de variación en rocas y minerales. Las conductividades eléctricas en minerales varían en magnitudes cuyos valores extremos difieren por un factor cercano a 10^{20}. Los minerales más conductivos son los metales nativos, como plata y cobre; les siguen las vetas de minerales semimetálicos, areniscas con salmuera, arcillas glaciales, arenas, pizarras y calizas, en más o menos ese orden. En la parte inferior de la escala están los cristales iónicos, tales como el cuarzo, cuyas conductividades son tan pequeñas que apenas pueden medirse.

Para la mayoría de las rocas, de cualquier manera, la composición química es de tan poca importancia en relación a otros factores - tales como la porosidad y el fracturamiento, que es impráctico tratar de colocar las diferentes clases en la escala de conductividad. Por otro lado, puesto que los factores que determinan la conductividad promedio de una formación rocosa suelen conservarse a través de ella, es natural que los métodos geoeléctricos hayan de usarse para explotar estos efectos, - como una ayuda en el mapeo de contactos geológicos bajo la superficie. La diferencia entre los métodos eléctricos y otros métodos geofísicos es la peculiar dificultad en relacionar las mediciones con características litológicas reconocibles.

En materiales terrestres no sólo se presenta el proceso de conducción óhmica, sino que también se observan efectos eléctricos más - complicados, que incluyen una amplia variedad de fenómenos electroquímicos. Por ejemplo, pueden producirse diferencias de potencial eléctrico en interfases entre minerales que tengan potenciales químicos diferentes, o pueden producirse donde los minerales están en contacto con algún electrolito. También son causados por gradientes en la concentración de ciertos solutos en aguas intersticiales, o incluso pueden ser originadas por el movimiento de fluidos en materiales permeables. La detección de estos efectos forma la base del método de autopotencial. Además, a veces se acumulan cargas eléctricas en las interfases entre ciertos materiales, como un resultado del flujo de corriente eléctrica desde una fuente externa. El método de polarización inducida se ha diseñado para sacar prove--

cho de este fenómeno en la búsqueda de minerales metálicos y agua subterránea.

Con la excepción de los minerales semimetálicos, casi todos los que forman las rocas son compuestos con ligaduras iónicas o covalentes, por lo que son aislantes eléctricos fundamentalmente y, cuando están en su forma cristalina pura, su conductividad, si medible, queda en el intervalo de 10^{-12} a 10^{-17} mho/m, pudiendo ser modificada por impurezas y defectos. Sin embargo, resulta que las conductividades que se encuentran en rocas in situ quedan en el intervalo de 10^{-1} a 10^{-8} mho/m. Esto se debe a que todas las rocas contienen suficiente humedad en microfracturas y a lo largo de fronteras de grano para conducir electricidad por transporte electrolítico. Como resultado de este efecto, la conductividad en una formación rocosa es poco dependiente de su composición mineral. Depende más bien de su porosidad y permeabilidad, y de la conductividad del fluido que contiene, el cual es consecuencia de su ambiente actual y de su historia pasada.

Gran cantidad de mediciones de conductividad se han efectuado en diversos minerales. Tablas con los valores obtenidos pueden encontrarse en los libros de Orellana (1982) y de Grant y West (1976).

I.2 Ecuaciones electromagnéticas

I.2.1 Nociones de Teoría Electromagnética

La Teoría Electromagnética clásica queda descrita por las ecuaciones de Maxwell, que representan el comportamiento de un campo electromagnético. Por "campo electromagnético" se hace referencia al dominio de las siguientes magnitudes (se usan unidades en el sistema MKSI racionalizado):

$\vec{B}$: vector de inducción magnética, en Webers/metro cuadrado (Wb/m^2)

$\vec{H}$: vector de intensidad de campo magnético, en ampères/metro (A/m)

$\vec{E}$: vector de intensidad de campo eléctrico, en volts/metro (V/m)

$\vec{D}$: vector de desplazamiento eléctrico, en Coulombs/metro cuadrado (C/m^2)

$\vec{J}$: vector de densidad de corriente eléctrica, en ampères/metro cuadrado (A/m^2)

ρ : densidad de carga eléctrica, en Coulombs/metro cúbico (C/m^3)

La situación física que se describe es la siguiente:

El campo electrostático es producido por una propiedad de la materia que se denomina carga eléctrica. El campo magnético, en cambio, tiene un origen dinámico: una densidad de corriente, o sea, un flujo de cargas eléctricas.

Además, es posible encontrar campos electromagnéticos en lugares donde no haya cargas, pues la variación en el tiempo de un campo eléctrico produce uno magnético y viceversa; estos campos podrán ser entonces variables en el tiempo.

Las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, que se establecen sobre la evidencia experimental de Coulomb, Ampère y Faraday son las siguientes:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(I.2i)} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \text{(I.2iii)}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{(I.2ii)} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \text{(I.2iv)}$$

Estas ecuaciones son completamente generales y se aplican a todos los fenómenos electromagnéticos en medios que estén en reposo con respecto al sistema de referencia usado. Son válidas para medios heterogéneos, no lineales y aún anisotrópicos (Lorrain y Corson, 1970); se conocen como ecuaciones de Maxwell porque fue él quien conjuntó estas leyes físicas en forma diferencial y encontró la anomalía que aparecía al incluir el efecto de inducción de Faraday, en que la variación temporal de campo magnético $\partial\vec{B}/\partial t$ crea un campo eléctrico (pero no electrostático).

Con el fin de incluir condiciones variables en el tiempo, Maxwell introdujo, con la ecuación (I.2ii), la densidad de corriente de desplazamiento $\partial\vec{D}/\partial t$ para una representación generalizada de los campos electromagnéticos.

Para entender correctamente el comportamiento del flujo de corriente se debe agregar a las ecuaciones de Maxwell la ecuación de continuidad, que se sigue de la definición de corriente como la razón de flujo de carga indestructible:

$$\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (I.2v)$$

Se añaden además las relaciones empíricas

$$J_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j \quad (I.3) \qquad B_i = \sum_j \mu_{ij} H_j \quad (I.4) \qquad D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (I.5)$$

en que σ_{ij} (conductividad eléctrica), μ_{ij} (permeabilidad magnética) y ε_{ij} (permitividad eléctrica) son tensores que llevan la información sobre los medios, ya que relacionan los campos externos con los efectos que les producen.

Cabe hacer notar que en (I.4) B_i es el campo aplicado y H_j el efecto producido. Maxwell introdujo las cantidades H_j y D_i con el objeto de simplificar las expresiones y a partir de entonces se dice que H_j es el campo magnético y B_i la inducción magnética.

En el caso general, que no cumple necesariamente con el principio lineal de flujo, cada una de las componentes de los tensores σ_{ij}, μ_{ij} y ε_{ij} puede ser considerada función de $\vec{E}(t)$ y de $\vec{H}(t)$.

Ya que en el caso que aquí se trata se hablará principalmente de conductividad en el subsuelo, es conveniente abundar sobre la ley de Ohm generalizada (ec. I.3) y en especial de la naturaleza tensorial de la propiedad mencionada. Dado que el presente trabajo no está centrado en características microscópicas, la descripción que se haga será macroscópica. Para esto habrá que introducirse en los terrenos de la Termodinámica y tratar un fenómeno de transporte: conducción eléctrica.

I.2.2 Tratamiento Termodinámico de la conducción eléctrica: tensor de conductividad

La conducción eléctrica describe el flujo de carga eléctrica a través de medios, en respuesta a campos eléctricos aplicados. Para materiales en que la respuesta a campos aplicados es lineal, la conductividad eléctrica σ establece una relación lineal entre el vector de corriente y el de campo.

Al considerar la anisotropía del material, resulta que la corriente no sigue necesariamente la dirección de las líneas de campo. Para describir matemáticamente este comportamiento, se emplea una representación tensorial de la conductividad, que permite, por ejemplo, que un campo $\vec{E}$ orientado en la dirección x ($\vec{E} = E_x\hat{i}$) produzca un flujo de corriente con componentes en las direcciones x, y, z ($\vec{J}=\sigma_{xx}E_x\hat{i}+\sigma_{yx}E_x\hat{j}+\sigma_{zx}E_x\hat{k}$). Se trata entonces de un tensor de segundo orden (Juretschke, 1974). La conducción eléctrica es, además, un ejemplo de proceso irreversible y se presenta en problemas sujetos a condiciones de frontera, gobernadas por la ley de conservación de carga.

Ya que se trata de un proceso termodinámico irreversible, es conveniente hacer una descripción más general del fenómeno. Desde el punto de vista termodinámico, existen dos cantidades con las cuales se describe el comportamiento de un proceso irreversible: la que provoca el fenómeno y la característica cuantitativa causada; la primera es una fuerza generalizada X_i (el gradiente del potencial eléctrico, o sea el campo eléctrico) y la segunda es un flujo generalizado J_i (flujo de corriente eléctrica). Fenomenológicamente, la ley que gobierna el proceso se expresa como una relación lineal entre causa y efecto; esta ley no se obtiene de una teoría unificada de procesos irreversibles - que tendría un origen estadístico, dada la naturaleza molecular del fenómeno -, que aún no existe, así que dicha ley se trata como un nuevo principio.

De acuerdo con este, la relación entre fuerzas X_i y flujos J_i se establece como sigue:

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k \quad (I.6)$$

donde los coeficientes L_{ik} se llaman "coeficientes fenomenológicos" (o - cinéticos).

En termodinámica de procesos irreversibles se trabaja con - las relaciones de reciprocidad de Onsager, las cuales establecen que, para una elección adecuada de los flujos J_i y las fuerzas X_k, la matriz de los coeficientes cinéticos es simétrica

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (I.7)$$

Esta elección se lleva a cabo procediendo de la ecuación fundamental de la termodinámica de procesos irreversibles, que determina la tasa de incremento de entropía

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i J_i X_i$$

Tanto la ley lineal como las relaciones de reciprocidad de Onsager pueden justificarse estadísticamente (Callen, 1960), pero en la termodinámica de procesos irreversibles se consideran como nuevos principios, que son generalizaciones de datos experimentales.

Con estos fundamentos se pasa a considerar la situación particular de conducción eléctrica anisotrópica.

El transporte eléctrico está descrito por el tensor de conductividad eléctrica σ_{ij} en la forma vectorial de la ley de Ohm

$$J_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j \quad (I.3)$$

o por su inverso, el tensor de resistividad r_{ij}, en

$$E_i = \sum_j r_{ij} J_j \quad (I.8)$$

Tanto σ_{ij} como r_{ij} son tensores de segundo orden, y se sigue de la ecuación (I.7) que, en ausencia de campos magnéticos, son simétricos en sus dos índices.

La elección entre (I.3) y (I.8) en el tratamiento de problemas de conducción es dictada por las condiciones de frontera a satisfacer en el caso específico bajo consideración.

Cuando se trata con campos magnéticos independientes del tiempo, la ley de Faraday (ec. 1.2i) conduce a que

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$$

lo cual a su vez implica que la integral de línea de $\vec{E}$ (es sólo campo electrostático) sobre cualquier trayectoria cerrada es cero y por ende el campo es conservativo. Esta es una condición necesaria y suficiente para la existencia de un potencial escalar ϕ cuyo gradiente es $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r}) \qquad (I.9)$$

Entonces el problema se reduce a encontrar soluciones para el potencial $\phi(\vec{r})$ - donde $\vec{r}$ es la posición con respecto a un sistema de coordenadas cualquiera -, sujeto a las condiciones de frontera del caso que se esté considerando. La ecuación diferencial para el potencial ϕ se sigue de la combinación de las ecuaciones (I.3) y (I.9) y se obtiene como expresión para la densidad de corriente:

$$J_i = \sum_j \sigma_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \qquad (I.10)$$

utilizando la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas rectangulares

$$\sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (I.2va)$$

se obtiene

$$-\sum_{i,j}\left[\sigma_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (I.11)$$

que es la ecuación diferencial para el potencial.

Más general aún es la ecuación

$$\sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = k(\vec{r},t) \qquad (I.12)$$

que, con el término $k(\vec{r},t)$, considera la posible producción o aniquila-- ción de carga en algún punto del espacio. En la situación que se estudia, al inyectar corriente eléctrica en el subsuelo, se están "creando" cargas eléctricas: se tiene en el electrodo una fuente puntual y para todos los otros puntos se respeta la conservación de carga, lo que significa que:

$$k(\vec{r},t) = \frac{\partial \rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(y_f)\,\delta(z_f) \qquad (I.13)$$

donde ρ' es la densidad de carga especificada en un punto del espacio -- cartesiano por la función delta de Dirac (el punto donde se coloque el e lectrodo).

Entonces, trabajando con una corriente estacionaria de forma que $\partial\rho/\partial t = 0$ para todo punto excepto el de la fuente, se llega a la e-- cuación

$$\sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(y_f)\,\delta(z_f) \qquad (I.14a)$$

Empleando la ley de Ohm (ec. I.3) y el hecho de que el campo eléctrico sea conservativo y pueda derivarse de un potencial (ec. I.9) se obtiene

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \sigma_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial \rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(y_f)\,\delta(z_f) \qquad (I.14b)$$

I.3 Tratamiento bidimensional

Algunas veces el subsuelo presenta características homogéneas e isotrópicas; pero en general está formado por materiales que son heterogéneos y anisotrópicos. Reproducir matemáticamente esta condición es una tarea en extremo difícil, dada la complejidad de las ecuaciones diferenciales a resolver. Una forma de estudiar su comportamiento es hacer idealizaciones con las cuales estas ecuaciones asuman una forma que sea más fácil de resolver (Lima, 1979).

La interpretación de datos de georesistividad se hace co--

múnmente con la suposición de una estratificación en capas horizontales. Recientemente se han considerado modelos bidimensionales y tridimensiona_ les, tratándolos con métodos numéricos. Estos últimos ofrecen un mayor- grado de flexibilidad para dar solución a los tipos de problemas que en- la realidad encuentra el explorador geofísico (Aiken et al., 1978; Dey y Morrison, 1979) .

Cuando se trabaja con métodos numéricos debe tomarse en - cuenta, además de la estabilidad de la solución (i. e. garantizar un - error que no crezca rápidamente, sino que al menos se mantenga fijo al - aplicar el algoritmo) , la eficacia del programa de cálculo, es decir, - su facilidad y rapidez, además de la convergencia del método de solución, junto con la capacidad de la computadora de que se disponga para proce - sarlo.

Un panorama realista del subsuelo sería aquél que presente- estructuras tridimensionales irregulares (fig. I-4) .

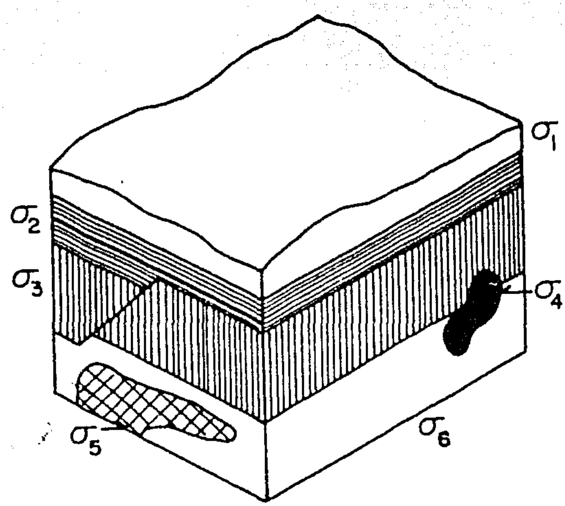


Figura I-4. Estructuras tridimensionales irregulares.

Al pensar en una descripción en coordenadas cartesianas rectangulares, una primera idealización es considerar cubos homogéneos e isotrópicos, con las estructuras irregulares mencionadas (fig. I-5); se trata de un modelo tridimensional.

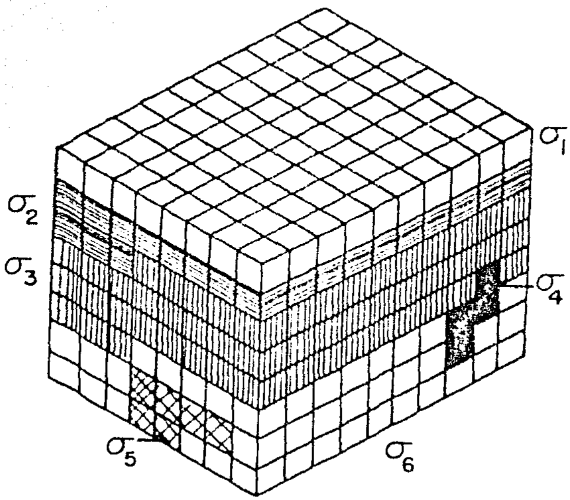


Figura I-5. Modelo tridimensional del subsuelo.

Este tipo de modelos ya ha sido trabajado con métodos numéricos (Dey y Morrison, 1979b), pero se encuentra que el tiempo de procesador y la extensión de memoria requeridos para la solución de las ecuaciones son tan grandes, que no es posible implementar programas para soluciones numéricas en minicomputadoras. Debido a esto se elegirán modelos bidimensionales que permitan introducir, en las interpretaciones de los datos de georesistividad, estructuras geológicas más complejas que aquéllas que suponen estratificación en capas horizontales, dando como resultado un programa de cálculo sencillo que requiere baja capacidad de memoria de computadora y no mucho tiempo de procesador.

El tipo de modelo escogido consiste de prismas rectangulares horizontales infinitos, homogéneos e isotrópicos en los cuales la conductividad es constante; estas simplificaciones permiten considerar al tensor σ_{ij} como una función escalar de "x" y de "z" exclusivamente (fig. I-6), es decir, σ no cambia en la dirección "y": es simétrica con respecto al plano "xz", por lo que es de esperar que el potencial sea par en "y".

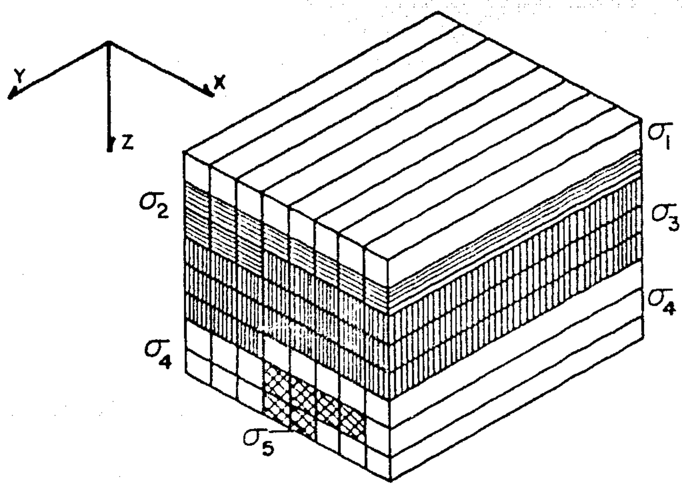


Figura I-6. Modelo de prismas infinitos con diferentes conductividades.

Introduciendo la notación de operadores Nabla, la ecuación (I.14b) queda como sigue:

$$-\nabla\cdot\left[\sigma(x,z)\,\nabla\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial\rho'}{\partial t}\;\delta(x_f)\,\delta(y_f)\,\delta(z_f) \qquad (I.15a)$$

Esta ecuación puede reescribirse de la forma

$$\nabla\sigma(x,z)\cdot\nabla\phi(x,y,z)+\sigma(x,z)\,\nabla^2\phi(x,y,z)=$$
$$-\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\delta(y_f)\delta(z_f) \qquad (I.15b)$$

Usando la relación vectorial

$$\nabla^2(\sigma\phi)=\sigma\nabla^2\phi+2\nabla\sigma\cdot\nabla\phi+\phi\nabla^2\sigma \qquad (I.16)$$

se despeja

$$\nabla\sigma\cdot\nabla\phi=\frac{1}{2}\left[-\sigma\nabla^2\phi+\nabla^2(\sigma\phi)-\phi\nabla^2\sigma\right] \qquad (I.17)$$

y se sustituye esta relación en (I.15b) para obtener

$$\sigma\nabla^2\phi+\nabla^2(\sigma\phi)-\phi\nabla^2\sigma=-2\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\delta(y_f)\delta(z_f) \qquad (I.15c)$$

En las ecuaciones anteriores, el potencial ϕ y el término de la fuente $\partial\rho'/\partial t\ \delta(x_f)\delta(y_f)\delta(z_f)$ son funciones de (x, y, z), y la conductividad σ es únicamente función de (x, z), reduciendo el problema a dos dimensiones. Por facilidad en el cálculo, es preferible resolver estas ecuaciones en el espacio de la transformada de Fourier (x, Ky, z), transformando "y" en el dominio de Ky. Esta transformación se efectúa de un dominio a otro, y viceversa, por las ecuaciones

$$\tilde{f}(x,K_y,z)=\int_0^{\infty} f(x,y,z)\cos(K_y y)\,dy \qquad (I.18a)$$

$$f(x,y,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{f}(x,K_y,z)\cos(K_y y)\,dK_y \qquad (I.18b)$$

donde f(x, y, z) y $\tilde{f}$(x, Ky, z) se suponen funciones pares de "y" y de Ky, respectivamente.

Con la transformación (I.18a) la distribución tridimensional de potencial ϕ(x, y, z) debida a una fuente puntual en (x_f, y_f, z_f) sobre una distribución bidimensional de conductividad σ(x,z) se reduce al potencial transformado bidimensional $\tilde{\phi}$ (x,Ky,z). Este último es una so lución de la ecuación transformada (I.15a)

$$-\nabla\cdot\left[\sigma(x,z)\nabla\tilde{\phi}(x,K_y,z)\right]+K_y^2\,\sigma(x,z)\,\tilde{\phi}(x,K_y,z)=\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad \text{(I.19a)}$$

De forma similar se obtiene de (I.15c)

$$\nabla^2\left[\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,K_y,z)\right]+\sigma(x,z)\nabla^2\tilde{\phi}(x,K_y,z)-\tilde{\phi}(x,K_y,z)\nabla^2\sigma(x,z)$$
$$-2K_y^2\,\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,K_y,z)=-2\,\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad \text{(I.19b)}$$

para un valor fijo de Ky. El parámetro $\tilde{Q}$ definido en las ecuaciones anteriores es la densidad de corriente de estado estacionario constante en el espacio (x, Ky, z), dada por

$$\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad \text{(I.20)}$$

La densidad de corriente $\tilde{Q}$ puede relacionarse con la corriente I inyectada en $(x_f,\ z_f)$ por

$$\tilde{Q}=\frac{I}{2\Delta A} \qquad \text{(I.21)}$$

donde ΔA es un área representativa en el plano "xz" alrededor del punto - de inyección $(x_f,\ z_f)$ (ver apéndice A).

Las ecuaciones (I.19a) y (I.19b) son simplemente formas diferentes de escribir la ecuación de continuidad (I.15b), en el espacio --- transformado (x, Ky, z).

El objetivo de esta tesis es obtener, utilizando el método de diferencias finitas, soluciones numéricas para las ecuaciones (I.19a) y - (I.19b) sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

1) La función de potencial tridimensional ϕ (x, y, z) debe -- ser continua a través de las fronteras de cada elemento de la distribución de conductividad σ (x, z), y

2) La componente del flujo de corriente normal a estas fronteras

$$\vec{J}=\sigma\,\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \qquad ($$

también debe ser continua.

La elección de tales condiciones será explicada en el capítulo II.

La solución del potencial transformado $\tilde{\phi}$ (x, Ky, z) se obtiene derivando las "ecuaciones de diferencias" de (I.19a) y de (I.19b), mediante la apropiada discretización del espacio (x, Ky, z) sobre el cual se resolverá el problema. La ecuación (I.19a) se presta para una discretización volumétrica (equivalente a una discretización por área en el espacio "xz") y la ecuación (I.19b) es adecuada para una formulación de discretización por puntos.

Con el fin de hacer más claros los procedimientos de discretización, en el siguiente capítulo se hará una breve explicación de la esencia del método de diferencias finitas.

CAPITULO II

DISCRETIZACION POR DIFERENCIAS FINITAS

Resumen

En este capítulo se presenta una introducción al método de diferencias finitas. Se obtiene una aproximación en diferencias para el operador Laplaciano bidimensional cartesiano. Se mencionan los errores que pueden aparecer al trabajar con un método numérico. Se presentan las ecuaciones a resolver, con las condiciones de frontera que se imponen aquí; tales ecuaciones son discretizadas para dar origen a sistemas lineales. La matriz de coeficientes de cada sistema se denomina Matriz de Capacitancias. Se mencionan sus propiedades y, finalmente, se establece una prospectiva para llegar a soluciones en el espacio transformado (x, Ky, z).

II.1 Método de Diferencias Finitas

Las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales pueden aproximarse por métodos numéricos, siendo uno de los principales el de diferencias finitas. Este método también se usa para interpolación, derivación numérica, integración numérica, ajustes de curvas.

El establecer una diferencia finita consiste en aproximar el valor de una derivada por el cociente de dos diferencias, sin considerar el límite cuando el denominador tiende a cero; se puede pensar que se usan pendientes de secantes, en vez de pendientes de tangentes, a una curva. Para esclarecer este concepto se usará una función de una variable.

Si se tiene una función $y = f(x)$ en forma tabular para valores de x diferentes:

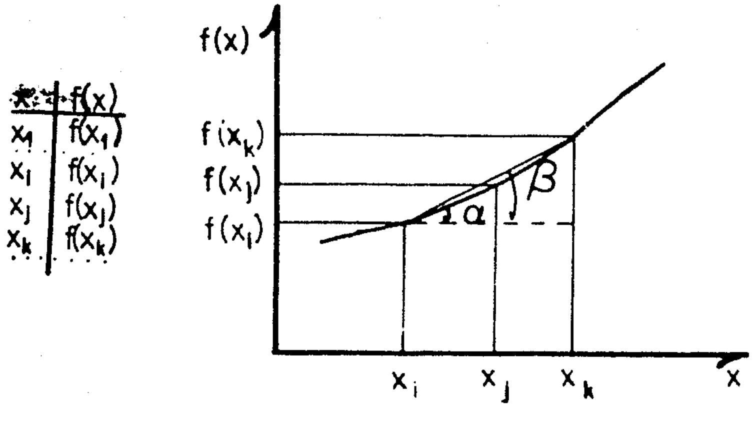


Figura II-1. Tabulación de f(x) para diferentes valores de x.

entonces se da la siguiente definición:

Definición II.1.1: Las "primeras diferencias divididas" de f(x) son:

$$f(x_i,x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (= \tan \alpha)$$

$$f(x_i,x_k) = \frac{f(x_i) - f(x_k)}{x_i - x_k} \quad (= \tan \beta) \qquad \text{(II.1)}$$

en que i, j, k son enteros. Esta definición no se altera si estos enteros no son sucesivos.

Es fácil relacionar esta definición con el método de Fermat para aproximación de tangentes a curvas en un punto dado (Cruse y Granberg, 1971). Se observa que estas primeras diferencias divididas corresponden a una primera derivación; de forma similar se pueden definir diferencias divididas de órdenes superiores:

Definición II.1.2: Si $f(x_i, x_j)$ y $f(x_j, x_k)$ son dos primeras diferencias divididas de $f(x)$ con un argumento - x_j - en común, entonces las "segundas diferencias divididas" de $f(x)$ son

$$f(x_i,x_j,x_k) = \frac{f(x_i,x_j) - f(x_j,x_k)}{x_i - x_k} \quad \left(= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{x_i - x_k}\right) \qquad (II.2)$$

En forma inductiva, una diferencia dividida de cualquier orden se define como la diferencia entre dos diferencias divididas del orden inmediato inferior, superpuestas en todos sus argumentos menos en uno, divididas entre los argumentos extremos.

Utilizando los conceptos anteriores se explicará ahora cómo las derivadas parciales también pueden aproximarse por diferencias finitas. Para esto se considerará un problema bidimensional

$$Lu = f \qquad (II.3)$$

con $u = u(x, z)$ en un dominio D sujeto a ciertas condiciones en su frontera, siendo L un operador diferencial; sean los puntos P_{ij} una aproximación discreta para D con espaciamiento uniforme $h = \Delta x$, $k = \Delta z$:

La aproximación para $(\partial u/\partial x)_{ij}$ se desarrolla con la notación $u = u(ih, jk)$ para el valor exacto y Uij para la aproximación discreta - de la función.

El procedimiento consiste en tomar una expansión en serie de Taylor de la función $u(x, z)$ (lo cual requiere que existan sus derivadas en todos los órdenes)

$$U(x+\Delta x,z) = U(x,z) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x,z) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,z) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x,z) + O\left[(\Delta x)^4\right] \qquad (II.4)$$

donde la notación $O[(\Delta x)^4]$ significa "términos de orden $(\Delta x)^4$ y/o mayor",

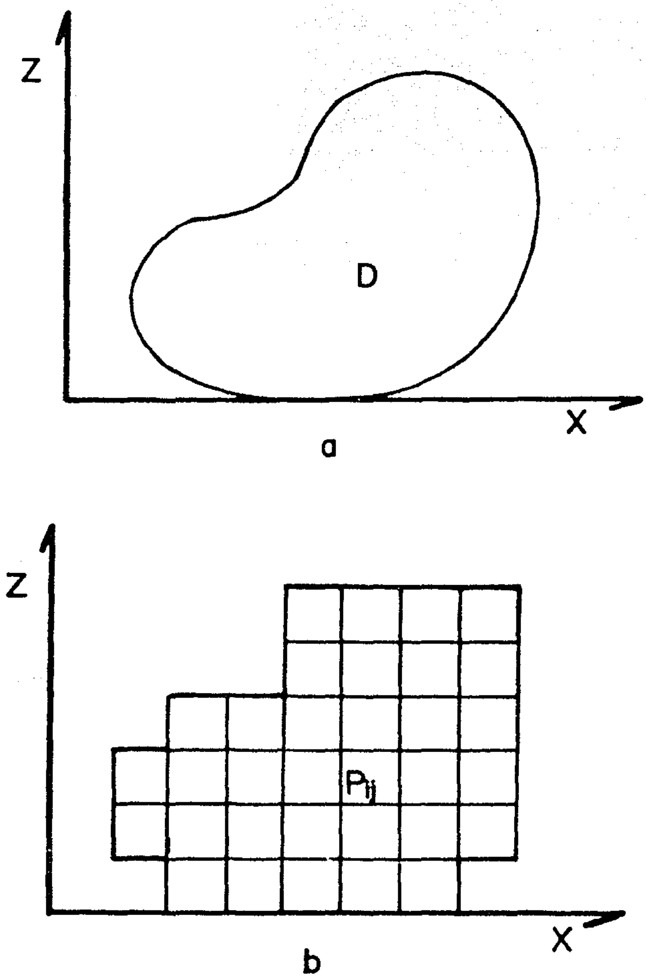


Figura II-2. a) Sea D un dominio continuo, y
b) una aproximación discreta a D.

y dividir la ecuación (II.4) entre Δx, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,z) = \frac{U(x+\Delta x, z) - U(x,z)}{\Delta x} + O\left[(\Delta x)\right] \qquad (II.5)$$

de donde la aproximación a primer orden resulta ser

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,z) \approx \frac{U(x+\Delta x, z) - U(x,z)}{\Delta x} \qquad (II.6a)$$

El valor de la parcial puede escribirse en notación indicial como sigue:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{h}\left[U_{i+1,j} - U_{i,j}\right] + O(h) \qquad (II.6b)$$

La ecuación (II.6b) resultó de considerar la diferencia "hacia adelante" en una aproximación a primer orden, donde O(h) - "términos de orden..." - representa la notación asintótica para el error de truncamiento de esta aproximación (es decir, cortar la serie en términos a partir del primer orden en h).

Como una alternativa para la aproximación por diferencias -- "hacia adelante" de la ecuación (II.6b), una diferencia "hacia atrás" se obtiene de forma similar, comenzando con la expansión en serie de Taylor para $u(x-\Delta x, z)$ alrededor de (x, z):

$$U(x-\Delta x, z) = U(x,z) - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + (\Delta x)^2 \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} -$$

$$(\Delta x)^3 \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + O\left[(\Delta x)^4\right] \qquad (II.7)$$

donde todas las derivadas se evalúan en (x, z). Tras dividir entre Δx se encuentra la relación

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{h}\left[U_{i,j} - U_{i-1,j}\right] + O(h) \qquad (II.8)$$

que da una aproximación a la derivada por diferencia "hacia atrás", también a primer orden en el error de truncamiento.

Si se desea una aproximación a $\partial u/\partial x$ de orden mayor, se puede substraer (II.7) de (II.4). El resultado, con todas las derivadas evaluadas en (x, z), es

$$U(x+\Delta x,z)-U(x-\Delta x,z)=2\Delta x\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+O\left[(\Delta x)^5\right] \qquad (II.9)$$

que, al dividir entre $2\Delta x$, genera la aproximación a segundo orden

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{U_{i+1,j}-U_{i-1,j}}{2\Delta x}+O\left[(\Delta x)^2\right] \qquad (II.10)$$

Es posible obtener aproximaciones elementales para segundas derivadas parciales combinando las expansiones en serie de Taylor en - (II.4) y (II.7). Por ejemplo, sumándolas se encuentra

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U(x+\Delta x,z)-2U(x,z)+U(x-\Delta x,z)\right]=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+O\left[(\Delta x)^2\right] \qquad (II.11a)$$

que en notación indicial se escribe como sigue:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2}+O\left[h^2\right] \qquad (II.11b)$$

Con lo expuesto se adquirió la capacidad de expresar operadores diferenciales más complicados en forma de diferencias finitas. A manera de ejemplo, considérese un operador Laplaciano bidimensional cartesiano

$$\nabla^2 U(x,z)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (II.12)$$

Si se toman en cuenta espaciamientos iguales h = k se tendrá

$$\nabla^2 U\,\big|_{i,j}=U_{xx}\big|_{i,j}+U_{zz}\big|_{i,j} \qquad (II.13)$$

y usando la aproximación (II.11b) para $u_{xx}|_{ij}$ y otra de la misma forma - para $u_{zz}|_{ij}$, se obtiene una expresión en que el valor de $\nabla^2 u|_{ij}$ en un -- punto sólo depende de los valores de u en los puntos adyacentes y en el mismo punto:

$$\nabla^2 U\,\big|_{i,j}=\frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+U_{i,j+1}+U_{i,j-1}-4U_{i,j}\right]+O(h^2) \qquad (II.14)$$

Sin embargo, en algunas ocasiones se requiere una discretización con espaciamientos desiguales; por ejemplo, si se tiene un dominio muy grande y se desa conocer con mayor precisión el comportamiento de la función en una zona específica, se puede refinar la aproximación discreta sólo en esa zona

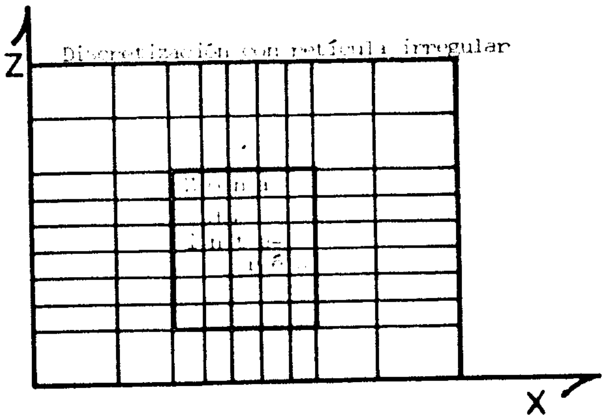


Figura II-3. Discretización de D
con espaciamientos desiguales

En tal caso ocurrirá que $\Delta x_i \neq \Delta x_j$ (en que $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) y entonces habrá que reescribir las expansiones en serie de Taylor de (II.4) y de (II.7) de la siguiente forma

$$U_{i+1,j} \approx U_{i,j} + \Delta x_i \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{(\Delta x_i)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \qquad \text{(II.15)}$$

$$U_{i-1,j} \approx U_{i,j} - \Delta x_{i-1} \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{(\Delta x_{i-1})^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \qquad \text{(II.16)}$$

Con el objetivo de poder cancelar algunos términos, se multiplica (II.16) por $\Delta x_i/\Delta x_{i-1}$

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} U_{i-1,j} \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} U_{i,j} - \Delta x_i \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}{2!} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \qquad (II.17)$$

y al sumar (II.15) con (II.17) se tiene

$$U_{i+1,j} + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} U_{i-1,j} \approx U_{i,j}\left(1 + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}\right) +$$

$$\frac{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \qquad (II.18)$$

de donde se obtienen sucesivamente

$$\frac{\Delta x_{i-1} U_{i+1,j} + \Delta x_i \; U_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i} \approx U_{i,j}\left(\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}\right) +$$

$$\frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \qquad (II.19)$$

$$\left[\frac{\Delta x_{i-1}(U_{i+1,j} - U_{i,j}) + \Delta x_i (U_{i-1,j} - U_{i,j})}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}\right] \frac{2}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \approx \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \qquad (II.20)$$

y, finalmente

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{2}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}\left[\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_i} + \frac{U_{i-1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_{i-1}}\right] \qquad (II.21)$$

Con una aproximación similar para $\partial^2 u/\partial z^2|_{ij}$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right|_{i,j} \approx \frac{2}{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j}\left[\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta z_j} + \frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta z_{j-1}}\right] \qquad (II.22)$$

se tendrá el operador Laplaciano bidimensional cartesiano en aproximación a segundo orden

$$\nabla^2 U|_{i,j} \approx \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}\left[\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_i} + \frac{U_{i-1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_{i-1}}\right] +$$

$$\frac{2}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}}\left[\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta z_j} + \frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta z_{j-1}}\right] \qquad (II.23)$$

que se empleará para la discretización de las ecuaciones a resolver en este trabajo.

II.2 Estimación de error. Estabilidad y convergencia

Las soluciones numéricas de una ecuación diferencial no son exactas ya que: a) comprenden expansiones en series infinitas que son cortadas a partir de cierto valor; b) de un problema en un dominio continuo se pasa al problema en un dominio discreto, y c) la precisión de los cálculos es limitada, pues se trabaja con un número finito de dígitos; es decir, los métodos del análisis numérico son procesos finitos y su resultado es un valor aproximado al exacto (desconocido), excepto en raros casos en que la respuesta exacta es un número racional suficientemente simple como para que el método numérico lo obtenga.

Cada una de las situaciones, (a), (b) y (c), representa un error en la solución y para cada uno existe un nombre:

En la situación (a) se trata de un error de truncamiento de la ecuación de diferencias finitas: ésta no representa exactamente el comportamiento de la analítica y por lo tanto sus soluciones no lo son para la ecuación original.

En la situación (b) se habla de un error de discretización; para estimarlo, se establece que el orden del error de discretización total, es el orden más pequeño de todas aquellas aproximaciones usadas, a menos que se relacionen de alguna manera (Ames, 1977).

Por último, la situación (c) representa un error de redondeo, que se presenta en soluciones iterativas (manuales o por computadora), porque la iteración se continúa sólo hasta que no ocurra ningún cambio en cierto número de dígitos.

Se tienen entonces dos tipos de error que se presentan al escoger un modelo para la ecuación que se desea resolver: no se llega a soluciones de la ecuación original, sino a soluciones de una aproximación a ella; esto es similar al caso en que se propone una ley física expresada matemáticamente, ya que ésta contiene ciertas idealizaciones sobre el fenómeno que se describe, pero predice eficientemente lo que ocurre, dependiendo de las hipótesis que se hayan hecho; de igual manera las solucio--

nes numéricas serán similares a las exactas, dependiendo de los errores - de truncamiento y de discretización. Podría parecer que se tendría una - mejor aproximación cuanto menor fuere el tamaño del intervalo; pero, si - bien tal reducción disminuirá los errores del modelo, aumentará los de sus propias soluciones, con el resultado de que crece el error de redondeo.

El análisis de errores es una de las primeras consideraciones en el desarrollo y aplicación de cualquier método numérico. Aun siendo un campo extensamente cultivado, la herramienta matemática disponible es con frecuencia inadecuada, especialmente en problemas no lineales.

La presencia de cualquier error puede llevar a una inestabilidad numérica, es decir, a un esquema numérico que permita el crecimiento del error, cubriendo eventualmente la solución verdadera. Esta es la definición en uso actualmente (Ames, 1977).

Una definición diferente de inestabilidad considera, en vez de la red de trabajo fija, un intervalo fijo $0<t<T$ con una sucesión de soluciones en diferencias finitas para redes sucesivamente más finas. Si conforme $h\to0$ las soluciones en diferencias finitas en $t = T$ pueden volverse no acotadas, el proceso es llamado "inestable".

Sea $U(x, t)$ la solución de una aproximación por diferencias dada, soluble paso por paso en la dirección t. El efecto de un error de - redondeo en el cálculo por computadora puede reemplazar $U(x_o, t_o)$ por --- $U(x_o, t_o) + \varepsilon$ en el punto de malla (x_o, t_o). Si el procedimiento de solución se continúa con el valor $U(x_o, t_o) + \varepsilon$ sin que se introduzcan nuevos errores y si en puntos subsecuentes se obtiene el valor $U^*(x, t)$, entonces se denota por $U^*(x, t) - U(x, t)$ la "desviación" de la solución, resultante del error ε en (x_o, t_o). Cuando existen errores en más de un punto, resultan desviaciones acumulativas que no son aditivas, excepto en -- problemas lineales. Si δ es el máximo error absoluto - $|\varepsilon(x, t)|<\delta$ - y h el tamaño de intervalo, entonces el procedimiento se llama "puntualmente estable" si la desviación acumulada tiende a cero conforme $\delta\to0$ y no se incrementa más rápido que alguna potencia de h^{-1} conforme $h\to0$.

Cuando la solución analítica correspondiente permanece acotada, un proceso de diferencias finitas dentro de la banda semi-infinita - $0<x<1$, $t>0$ se llama "inestable por pasos" si para una red de trabajo y -- condiciones de frontera homogéneas fijas existen disturbios iniciales para los cuales las soluciones en diferencias finitas u_{ij} se vuelven no acotadas conforme $j\to\infty$.

El concepto de "convergencia" se relaciona con el de estabilidad. Para introducir esta idea se utiliza la ecuación diferencial parcial

$$L_h(U)=0 \quad \text{en } D; \qquad U=g_h \quad \text{en } \Gamma \qquad \text{(II.24)}$$

en un dominio D con frontera Γ.

Se dice que el esquema de diferencias finitas converge si U(P) converge a la solución u(P), con los mismos valores de frontera, conforme $h\to 0$.

II.3 Características formales de la ecuación diferencial a resolver

El problema que aquí se trata es uno de distribución estacionaria de potenciales, que cae en el esquema de problemas de equilibrio, en que la configuración de equilibrio ϕ en un dominio D se determina resolviendo la ecuación diferencial

$$L(\phi) = f \qquad \text{(II.25)}$$

dentro de D, sujeto a ciertas condiciones de frontera; donde L representa un operador diferencial, y f una función definida en D; ϕ es el campo a encontrar, como función de las coordenadas.

Este tipo de problemas se conoce como "problemas con valores de frontera"; la solución debe satisfacer todas las condiciones de frontera y todos los requisitos internos en el dominio D.

En el presente caso, L contiene derivadas parciales de segundo orden; indicando con subíndices derivación parcial, una ecuación como (II.25) puede escribirse de forma cuasi lineal

$$aU_{xx}+bU_{xz}+cU_{zz}=f \qquad \text{(II.26)}$$

donde a, b, c y f son funciones de x, z, u_x y u_z; se considera, además, que se satisface la condición de continuidad bajo la cual $u_{xz}=u_{zx}$.

Para una clasificación de (II,26) se piden las condiciones bajo las cuales el conocimiento de u, u_x y u_z en Γ (frontera de D) sirva para determinar en forma única u_{xx}, u_{xz} y u_{zz}, que satisfagan (II.26). Si estas derivadas existen, debe cumplirse

$$\begin{aligned} d(U_x) &= U_{xx}dx + U_{xz}dz \\ d(U_z) &= U_{xz}dx + U_{zz}dz \end{aligned} \qquad \text{(II.27)}$$

que, junto con (II.26), asumen la forma matricial

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dz & 0 \\ 0 & dx & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xx} \\ U_{xz} \\ U_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d(U_x) \\ d(U_z) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.28)}$$

Luego la solución para u_{xx}, u_{xz} y u_{zz} existe y es única a menos que el determinante de la matriz de coeficientes se haga cero, o sea

$$a(dz)^2 - b\,dz\,dx + c(dx)^2 = 0 \qquad \text{(II.29)}$$

Esta es la ecuación característica para (II.26) y se clasifica como: a) hiperbólica, si $b^2 - 4ac > 0$; b) parabólica, si $b^2 - 4ac = 0$, y elíptica si $b^2 - 4ac < 0$.

La forma generalizada de las ecuaciones (I.19a) y (I.19b) es

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(P(x,z)\,\frac{\partial\tilde{\phi}(x,K_y,z)}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(P(x,z)\,\frac{\partial\tilde{\phi}(x,K_y,z)}{\partial z}\right) +$$

$$\sigma(x,z)\,\tilde{\phi}(x,K_y,z) = f_1(x,z) \qquad \text{(II.30)}$$

las ecuaciones que tienen esta forma se denominan autoadjuntas (Ames, 1977; Dey y Morrison, 1979a).

Los coeficientes que resultan de llevar (II.30) a la forma cuasi lineal (II.26) son

$$a = c = -P(x,z)\,; \qquad b = 0\,;$$

$$f = f_1(x,z) - \sigma(x,z)\tilde{\Phi}(x,Ky,z) + \frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\;\frac{\partial\tilde{\Phi}(x,Ky,z)}{\partial x} +$$

$$\frac{\partial P(x,z)}{\partial z}\;\frac{\partial\tilde{\Phi}(x,Ky,z)}{\partial z} \qquad \text{(II.31)}$$

y por lo tanto $b^2 - 4ac < 0$, ya que $ac > 0$ siempre y $b = 0$. Entonces, las ecuaciones que se van a trabajar son elípticas.

Esta característica obligará a satisfacer ciertas condiciones de frontera para que la solución sea única. Todo problema físico real tiene siempre las condiciones de frontera para una solución única; pero en un modelo matemático no siempre es fácil decidir cuáles condiciones corresponden a la "realidad".

Para un problema bidimensional, la solución $\phi(x,z)$ de una ecuación $L(\phi) = f$ puede representarse por la superficie $\zeta = \psi(x,z)$. La "frontera" es una curva especificada en el plano "xz". Las condiciones de frontera están representadas por la altura de la superficie ζ sobre la curva frontera, y/o por la pendiente de la superficie ζ normal a la curva frontera. El borde de la superficie $\psi(x,z)$ sobre la curva frontera se llama curva de soporte (en general, no es una curva plana).

Parametrizando respecto a la longitud de arco s, las ecuaciones para la curva frontera son $x = \xi(s)$, $z = \eta(s)$, y para la curva de soporte se tiene $\zeta = \psi(\xi,\eta) = \psi(s)$. El vector unitario tangente a la frontera en el punto s es

$$\vec{a}_t = \hat{i}(d\xi/ds) + \hat{k}(d\eta/ds), \qquad \text{(II.32)}$$

y el vector unitario normal a la curva es

$$\vec{a}_n = \vec{a}_t \times \hat{j} = \hat{k}(d\xi/ds) - \hat{i}(d\eta/ds). \qquad \text{(II.33)}$$

Ya que $\vec{a}_n$ es un vector axial, pudiendo elegir direcciones, se escogen ejes y direcciones de forma que $\vec{a}_n$ apunte hacia adentro de D (hacia el lado de la frontera que contiene la solución). En términos de estos vectores y derivadas, el gradiente de ϕ normal a la frontera en s es

$$\overline{a}_n \cdot \operatorname{grad} \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial s} = N(s) \qquad (II.34)$$

donde $\partial\psi/\partial x$ y $\partial\psi/\partial z$ se toman en los puntos $x = \xi(s)$, $z = \eta(s)$.

En términos de estas definiciones, se habla de tres tipos de condiciones de frontera:

1. Condiciones de Cauchy, en que se especifican tanto el valor de la función $\psi(s)$ a lo largo de la frontera como el de su gradiente normal a la frontera, $N(s)$.

2. Condiciones de Dirichlet, que especifican sólo valores de $\psi(s)$ a lo largo de la frontera.

3. Condiciones de Neumann, que precisan sólo el valor de $N(s)$.

Algunas veces puede ser necesario proporcionar el valor de alguna combinación lineal de $\psi(s)$ y $N(s)$, una sola condición de frontera intermedia entre condiciones de Dirichlet y de Neumann.

En ocasiones, estas condiciones son homogéneas, cuando $\alpha\psi(s)+\beta N(s)=0$, para α, β dadas, pero independientes de s, y en otras son heterogéneas, cuando $\alpha\psi(s)+\beta N(s) = F(s)$.

Siempre que se hable de condiciones de frontera, se debe indicar la forma de esta última. Puede ser una curva cerrada, para la ecuación de Laplace en dos dimensiones, o ser una frontera abierta en forma de U, consistente en una línea paralela al eje espacial y dos líneas paralelas al eje temporal, para una cuerda fija en los extremos, u otras. Se dice que la frontera es "cerrada" si rodea por completo a la solución (aun si parte de la frontera está al infinito); es "abierta" si va al infinito y no se imponen condiciones a la parte que va al infinito.

Morse y Feshbach (1953) muestran que para una ecuación elíptica con frontera cerrada, tanto las condiciones de Dirichlet como las de Neumann originan, por lo general, una solución única y estable, mientras que condiciones de Cauchy la sobreespecifican.

El procedimiento que aquí se considera resuelve numéricamente, en una rejilla rectangular no uniforme, el problema

$$L[\tilde{\phi}] = -\nabla\cdot[\sigma\nabla\tilde{\phi}] = f(x,z) \quad \text{en} \quad D \qquad (II.35)$$

sujeto a condiciones de frontera dadas por un modelo primario de estratificación horizontal, que proporciona valores de $\phi(x, Ky, z)$ en las fronteras izquierda, derecha e inferior del modelo bidimensional. Se considera que en la frontera superior, i. e., en la superficie del terreno, la corriente no pasa a través del aire (fig. II-4).

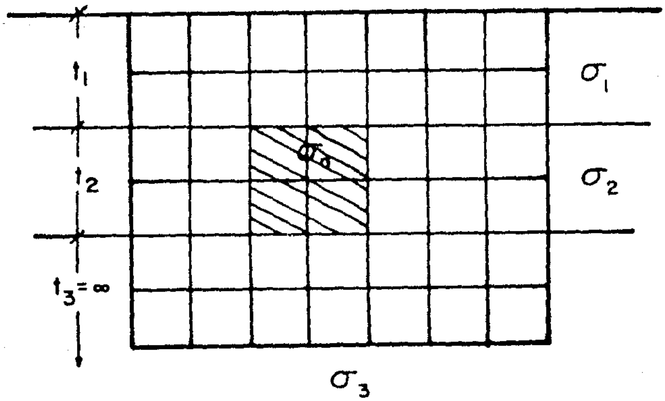


Figura II-4. Malla bidimensional dentro de un semiespacio estratificado.

Otros autores (Dey y Morrison, 1979a) consideran que el modelo bidimensional está inmerso en un semiespacio homogéneo (fig. II-5) y suponen que, lejos del centro del arreglo, el potencial decae como 1/r en el espacio (x, y, z), y como Ko(Kyr) en el espacio transformado (x, Ky, z) (donde Ko es la función Bessel modificada de orden cero y r la distancia radial a la fuente), lo que viene de usar el resultado

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(K_y \cdot y)\, K_o\!\left(K_y \sqrt{(x^2+z^2)}\right) dK_y \qquad \text{(II.36)}$$

que es precisamente la transformada inversa que se está usando (ec. I.18b).

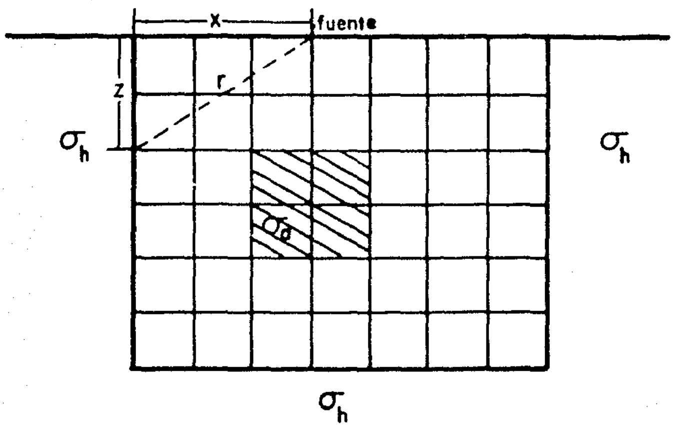


Figura II-5. Malla bidimensional
en un semiespacio homogéneo.

En el caso tratado, para definir el semiespacio infinito inferior con distribución arbitraria de conductividad en dos dimensiones, se diseña el conjunto D con fronteras artificiales simulando planos infinitamente distantes al centro del arreglo, tanto en la extensión horizontal (dirección x) como en la vertical (dirección z). Tal semiespacio inferior está indicado por la malla mostrada en la figura (II-6).

Se escoge una malla rectangular con espaciamientos irregulares arbitrarios de los nodos, tanto en la dirección x como en la z. Los nodos en la dirección x tienen índices i = 1, 2, 3,..., NX, y los nodos en la dirección z tienen índices j = 1, 2, 3,..., NZ. Los bordes al infinito izquierdo y derecho se simulan por las líneas i = 1 e i = NX, respectivamente. El borde al infinito del fondo está representado por la línea j = NZ.

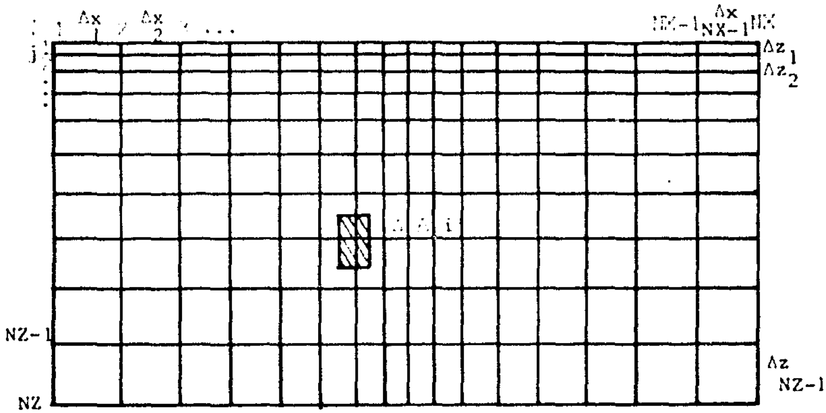


Figura II-6. Malla rectangular de discretización.

Las ecuaciones (I.19a) y (I.19b) se aplican en cualquier nodo (i,j) para representar una aproximación sobre un área $\Delta A_{i,j}$, ilustrada por la porción sombreada en la malla. Para un punto en el interior se tiene que

$$\Delta A = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})}{4} \qquad \text{(II.37)}$$

y en el límite, en la superficie del suelo, con $z \to 0$

$$\Delta A = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})\,\Delta z_j}{4} \qquad \text{(II.38)}$$

Puesto que la simulación del medio está restringida al semiespacio conductivo inferior en D, se requiere precisar las condiciones de frontera en puntos $(x, z) \in \Gamma \cup D$. En la superficie, con $z = 0$, esto se implementa aplicando la condición de tipo Neumann

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \tilde{\Phi}_{ij}}{\partial \eta} = 0 \qquad (II.39)$$

en la que η es la dirección normal hacia afuera de la frontera, condición que significa que no hay flujo de corriente del subsuelo hacia el aire (recordando la ley de Ohm, ec. I.3).

La terminación del medio plano inferior en $x=\pm\infty$ y $z=\infty$ se hace extendiendo la malla suficientemente lejos de las fuentes y de las heterogeneidades en conductividad, de forma que la distribución de potencial total en estos bordes se aproxime a un comportamiento asintótico. Los valores de frontera a lo largo de estos bordes "infinitamente" distantes pueden especificarse a partir de soluciones conocidas de una distribución primaria de conductividad homogénea, o por capas horizontales. Las heterogeneidades son vistas como perturbaciones sobre esta distribución. Las condiciones de frontera a lo largo de los bordes izquierdo, derecho y del fondo, se vuelven entonces de tipo Dirichlet.

Aquí se propone usar condiciones de frontera provenientes de un modelo primario de estratificación por capas, el cual calcula numéricamente valores de $\tilde{\phi}$ en puntos alejados tanto de las fuentes puntuales como de las heterogeneidades en conductividad; es decir, el modelo primario proporciona información sobre el comportamiento asintótico del potencial transformado.

Estas condiciones presentan la ventaja de considerar que fuera del modelo bidimensional se permite la variación vertical de la conductividad, lo que admite una mejor aproximación conceptual a un subsuelo real que pensar en una malla rodeada por un espacio homogéneo.

II.4 Discretización de la ecuación de Poisson

Con la información proporcionada en las secciones anteriores, se ha ubicado el problema, de manera que ahora es posible proceder a la discretización de las ecuaciones (I.19a) y (I.19b).

II.4.1 Discretización por puntos

En el capítulo I se mencionó que la ecuación (I.19b) era adecuada para una discretización por puntos. Ahora se mostrará cómo llevarlo a cabo.

Para todo nodo en el conjunto D, $\tilde{\phi}(x, Ky, z)$ debe satisfacer la ecuación (I.19b)

$$\nabla^2\left[\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,Ky,z)\right] + \sigma(x,z)\nabla^2\tilde{\phi}(x,Ky,z) - \tilde{\phi}(x,Ky,z)\nabla^2\sigma(x,z)$$

$$-2K_y^2\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,Ky,z) = -2\tilde{Q}\delta(x_f)\delta(z_f) \qquad \text{(I.19b)}$$

en que el operador Laplaciano bidimensional se aplica a $\sigma(x, z)$, a $\tilde{\phi}(x,Ky,z)$ y a $\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,Ky,z)$.

La distribución de la propiedad física $\sigma(x,z)$ conocida se discretiza en cada nodo por σ_{ij} (fig. II-7); en la solución numérica se trata de evaluar un conjunto discreto de $\tilde{\phi}_{ij}$. Para ello se usará la ecuación (II.23)

$$\nabla^2 U\big|_{i,j} \approx \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}\left[\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_i} + \frac{U_{i-1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_{i-1}}\right] +$$

$$\frac{2}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}}\left[\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta z_j} + \frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta z_{j-1}}\right] \qquad \text{(II.23)}$$

como aproximación a segundo orden para el operador ∇^2.

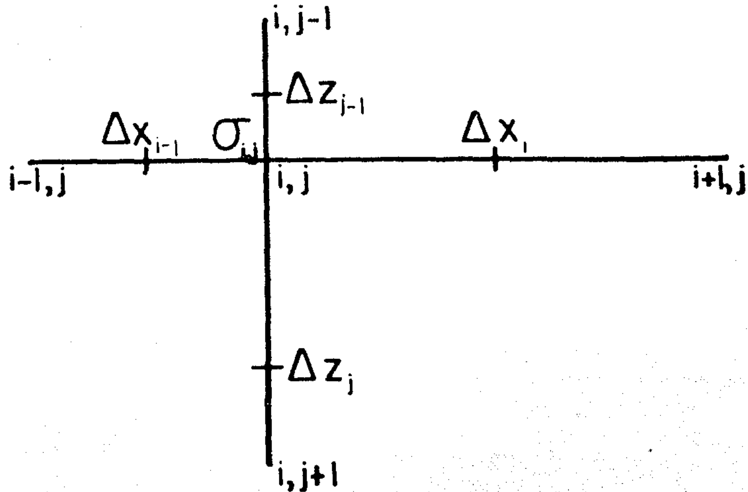


Figura II-7. Discretización
σ_{ij} en cada nodo.

Al aplicar el operador de diferencias (II.23) a la ecuación (I.19b) para cualquier nodo interior de la malla, resulta la forma discretizada que se da a continuación:

$$\tilde{\phi}_{i-1,j}\left[\frac{-2(\sigma_{i-1,j}+\sigma_{i,j})}{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\Delta x_{i-1}}\right]+\tilde{\phi}_{i+1,j}\left[\frac{-2(\sigma_{i+1,j}+\sigma_{i,j})}{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\Delta x_i}\right]+$$

$$\tilde{\phi}_{i,j-1}\left[\frac{-2(\sigma_{i,j-1}+\sigma_{i,j})}{(\Delta z_j+\Delta z_{j-1})\Delta z_{j-1}}\right]+\tilde{\phi}_{i,j+1}\left[\frac{-2(\sigma_{i,j+1}+\sigma_{i,j})}{(\Delta z_j+\Delta z_{j-1})\Delta z_j}\right]+$$

$$\tilde{\phi}_{i,j}\left[\frac{2(\sigma_{i-1,j}+\sigma_{i,j})}{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\Delta x_{i-1}}+\frac{2(\sigma_{i+1,j}+\sigma_{i,j})}{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\Delta x_i}+\frac{2(\sigma_{i,j-1}+\sigma_{i,j})}{(\Delta z_j+\Delta z_{j-1})\Delta z_{j-1}}+\right.$$

$$\left.\frac{2(\sigma_{i,j+1}+\sigma_{i,j})}{(\Delta z_j+\Delta z_{j-1})\Delta z_j}+2K_y^2\sigma_{i,j}\right]=2\tilde{Q}\delta(x_f)\delta(z_f) \qquad (II.40)$$

que, con una nueva notación, puede escribirse de la siguiente manera:

$$C_I^{i,j}\tilde{\phi}_{i-1,j}+C_D^{i,j}\tilde{\phi}_{i+1,j}+C_S^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j-1}+C_F^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j+1}+C_A^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j}=$$

$$2\tilde{Q}\,\delta(x_f)\delta(z_f) \qquad (II.41)$$

donde

$$C_I^{i,j}=-\frac{2(\sigma_{i-1,j}+\sigma_{i,j})}{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\Delta x_{i-1}} \qquad (II.41i)$$

es el coeficiente de acoplamiento entre los nodos (i,j) e (i-1,j),

$$C_D^{i,j}=-\frac{2(\sigma_{i+1,j}+\sigma_{i,j})}{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\Delta x_i} \qquad (II.41ii)$$

es el coeficiente de acoplamiento entre los nodos (i,j) e (i+1,j),

$$C_S^{i,j} = - \frac{2(\sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j})}{(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})\Delta z_{j-1}} \qquad (II.41iii)$$

es el coeficiente de acoplamiento entre los nodos (i,j) e (i,j-1),

$$C_F^{i,j} = - \frac{2(\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j})}{(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})\Delta z_j} \qquad (II.41iv)$$

es el coeficiente de acoplamiento entre los nodos (i,j) e (i,j+1) y

$$C_A^{i,j} = - \left[C_I^{i,j} + C_D^{i,j} + C_S^{i,j} + C_F^{i,j} - 2K_y^2 \sigma_{i,j} \right] \qquad (II.41v)$$

es el coeficiente de autoacoplamiento en el nodo (i,j).

La ecuación de diferencias (II.40) así obtenida indica que la solución de $\bar{\phi}$ en el nodo (i,j) depende sólo de los valores de $\bar{\phi}$ en los nodos adyacentes (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1) e (i,j+1). Los coeficientes de acoplamiento C^{ij} son funciones de la geometría de la malla de discretización y de los valores de la propiedad física σ, y por tanto conocidos en todos los nodos del conjunto D.

Debe notarse que en la aproximación en diferencias finitas al operador ∇^2 se supone implícitamente que las distribuciones funcionales de $\bar{\phi}$, $\sigma\cdot(\partial\bar{\phi}/\partial x)$ y $\sigma\cdot(\partial\bar{\phi}/\partial z)$ son al menos continuas por partes. La ecuación (II.40) es válida para cualquier distribución de σ_{ij} $(0<\sigma<\infty)$ y, para cualquier punto interior en la malla, las condiciones de frontera requeridas sobre la continuidad de $\bar{\phi}$ y de $\sigma\cdot(\partial\bar{\phi}/\partial n)$ se satisfacen a través de cualquier elemento rectangular.

Mientras que los coeficientes y la forma de la ecuación (II.40) son válidos para todo nodo interior, las ecuaciones correspondientes se ven un poco alteradas para los nodos localizados en la superficie superior y en los bordes izquierdo, derecho e inferior de la malla. Las ecuaciones en diferencias para estos nodos, con condiciones de frontera apropiadas, basadas en el comportamiento asintótico de los potenciales, se formulan a continuación:

Para nodos localizados en la línea z = 0.

Para todos los nodos (i,j) con i = 2, 3,..., NX-1, j = 1, la condición de frontera es de tipo Neuman, i. e.

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \tilde{\phi}_{ij}}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{(II.39)}$$

Esto se implementa suponiendo un renglón adicional de nodos en el aire, en j = 0, tal que el potencial $\tilde{\phi}_{i2}$ y la conductividad σ_{i2} en los nodos (i,2) se reflejan en los nodos imaginarios (i,0). Esta suposición lleva a la forma en diferencias de la ecuación (I.19b) dada por

$$C_I^{i,j}\tilde{\phi}_{i-1,j} + C_D^{i,j}\tilde{\phi}_{i+1,j} + C_F^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j+1} + C_A^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j} =$$

$$2\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad \text{(II.42)}$$

donde los coeficientes de acoplamiento están dados por

$$C_F^{i,j} = -\frac{2(\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j})}{(\Delta z_j)^2} \qquad C_I^{i,j} = -\frac{2(\sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})\Delta x_{i-1}}$$

$$C_D^{i,j} = -\frac{2(\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})\Delta x_i}$$

$$C_A^{i,j} = -\left[C_I^{i,j} + C_D^{i,j} + C_F^{i,j} - 2K_y^2\,\sigma_{i,j}\right] \qquad \text{(II.42iv)}$$

Para todos los otros bordes se conoce el valor de $\tilde{\phi}(x, K_y, z)$, como condición de frontera de tipo Dirichlet; entonces se eliminan de la Matriz de Capacitancias los renglones y las columnas correspondientes a estos nodos, agregando al vector de fuentes su contribución al potencial de los nodos que les son adyacentes.

II.4.2 Discretización por áreas

Para todo nodo en el conjunto D, la relación constitutiva para el potencial desconocido $\tilde{\phi}(x,Ky,z)$ está dada por la ecuación (I.19a)

$$-\nabla\cdot\left[\sigma(x,z)\nabla\tilde{\phi}(x,Ky,z)\right]+K_y^2\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,Ky,z)=$$

$$\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad \text{(I.19a)}$$

La distribución de la propiedad física σ en todo nodo (i,j) de la malla rectangular descrita en la sección II.3, puede discretizarse en el sentido de que ahora σ_{ij} indica la conductividad en una región acotada por los nodos (i,j) e (i+1,j), en la dirección x, y por los nodos (i,j+1) e (i+1,j+1), en la dirección z. Se intenta evaluar la solución numérica de (I.19a), que consiste de un conjunto discretizado de $\tilde{\phi}_{ij}$ en cada nodo. Como en el apartado anterior, se supone que el nodo (i,j) representa la región cerrada ΔA_{ij} alrededor del nodo, como se ilustra en la figura (II-6). Se observa que para un punto nodal en el interior

$$\Delta A=\frac{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})(\Delta z_j+\Delta z_{j-1})}{4} \qquad \text{(II.37)}$$

y en el límite cuando $z\to 0$, para un nodo en la superficie del terreno,

$$\Delta A=\frac{(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})\,\Delta z_j}{4} \qquad \text{(II.38)}$$

Para cada nodo (i,j) para el cual $\tilde{\phi}$ es desconocido, se integra ahora la ecuación (I.19a) sobre la región ΔA_{ij} correspondiente, para obtener

$$-\iint_{\Delta A_{i,j}}\nabla\cdot\left\{\sigma(x_i,z_j)\,\nabla\tilde{\phi}(x_i,Ky,z_j)\right\}dx_i\,dz_j+$$

$$\iint_{\Delta A_{i,j}}Ky^2\,\sigma(x_i,z_j)\,\tilde{\phi}(x_i,Ky,z_j)\,dx_i\,dz_j=$$

$$\iint_{\Delta A_{i,j}}\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f)\,dx_i\,dz_j \qquad \text{(II.43)}$$

Usando la relación $\bar{Q} = I/2\Delta A_{ij}$ se tiene que

$$-\iint_{\Delta A_{i,j}} \nabla\cdot\left\{\sigma(x_i,z_j)\,\nabla\tilde{\phi}(x_i,Ky,z_j)\right\} dx_i\,dz_j +$$

$$\iint_{\Delta A_{i,j}} Ky^2\,\sigma(x_i,z_j)\,\tilde{\phi}(x_i,Ky,z_j)\,dx_i\,dz_j = \frac{1}{2}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad \text{(II.44)}$$

Empleando ahora el teorema de Green se llega a

$$\iint_{\Delta A_{i,j}} \nabla\cdot(\sigma\,\nabla\phi)\,da = \oint_{L_{i,j}} \sigma\,\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\,dl \qquad \text{(II.45)}$$

donde η es la normal en la dirección hacia afuera y L_{ij} es la línea de - contorno que encierra a la región ΔA_{ij}.

La descripción de la distribución de σ, del área represen tativa ΔA_{ij} y de la línea de contorno L_{ij} alrededor de un nodo (i,j) en el interior de la malla se ilustran en la figura (II-8).

El primer término del lado izquierdo de la ecuación (II.44) está dado entonces por

$$\iint_{\Delta A_{i,j}} \nabla\cdot(\sigma\,\nabla\tilde{\phi})\,da_{ij} = \oint_{L_{i,j}} \sigma\,\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\eta}\,dl \qquad \text{(II.45)}$$

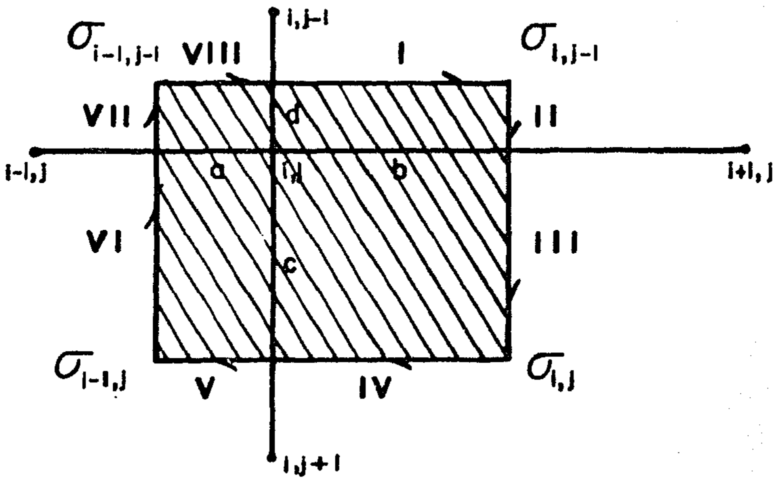


Figura II-8. Elemento de área discretizada ΔA_{ij}.

El contorno de integración a lo largo de la línea L_{ij} se subdivide en ocho subsecciones, como se indica en la figura (II-8). Integrando a lo largo de toda la trayectoria L_{ij} y aproximando $\partial\tilde{\phi}/\partial\eta$ por diferencia central, se obtiene

$$\oint_{L_{i,j}} \sigma_{i,j} \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial \eta} dl =$$

$$\frac{\Delta x_i \sigma_{i,j-1}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i,j-1}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta z_{j-1}}\right)+\frac{\Delta z_{j-1}\sigma_{i,j-1}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i+1,j}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta x_i}\right)+$$

$$\frac{\Delta z_j \sigma_{i,j}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i+1,j}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta x_i}\right)+\frac{\Delta x_i \sigma_{i,j}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i,j+1}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta z_j}\right)+$$

$$\frac{\Delta x_{i-1} \sigma_{i-1,j}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i,j-1}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta z_j}\right)+\frac{\Delta z_j \sigma_{i-1,j}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i-1,j}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta x_{i-1}}\right)+$$

$$\frac{\Delta z_{j-1}\sigma_{i-1,j-1}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i-1,j}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta x_{i-1}}\right)+\frac{\Delta x_{i-1}\sigma_{i-1,j-1}}{2}\left(\frac{\tilde{\phi}_{i,j-1}-\tilde{\phi}_{i,j}}{\Delta z_{j-1}}\right) \qquad (II.46)$$

De forma similar, el segundo término del lado izquierdo de la ecuación (II.44) puede expanderse como

$$\iint_{\Delta A_{i,j}} K_y^2 \sigma_{i,j} \tilde{\phi}_{i,j}\, dx_i\, dz_j =$$

$$K_y^2 \tilde{\phi}_{i,j}\left[\frac{\sigma_{i-1,j-1}\Delta x_{i-1}\Delta z_{j-1}}{4}+\frac{\sigma_{i,j-1}\,\Delta x_i\,\Delta z_{j-1}}{4}+\right.$$

$$\left.\frac{\sigma_{i,j}\Delta x_i \Delta z_j}{4}+\frac{\sigma_{i-1,j}\,\Delta x_{i-1}\Delta z_j}{4}\right] \equiv A(\sigma_{i,j}, A_{i,j})\tilde{\phi}_{i,j} \qquad (II.47)$$

Substituyendo la aproximación en diferencias de (II.46) y de (II.47), se obtiene para un nodo interior (i,j)

$$C_I^{i,j}\tilde{\phi}_{i-1,j}+C_D^{i,j}\tilde{\phi}_{i+1,j}+C_S^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j-1}+C_F^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j+1}+C_A^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j} =$$

$$\frac{I}{2}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad (II.48)$$

donde los coeficientes de acoplamiento están dados por:

$$C_I^{i,j} = -\left[\frac{\Delta z_{j-1}\,\sigma_{i-1,j-1} + \Delta z_j\,\sigma_{i-1,j}}{2\Delta x_{i-1}}\right] \qquad \text{(II.48i)}$$

$$C_D^{i,j} = -\left[\frac{\Delta z_{j-1}\sigma_{i,j-1} + \Delta z_j\,\sigma_{i,j}}{2\,\Delta x_i}\right] \qquad \text{(II.48ii)}$$

$$C_S^{i,j} = -\left[\frac{\Delta x_{i-1}\,\sigma_{i-1,j-1} + \Delta x_i\,\sigma_{i,j-1}}{2\,\Delta z_{j-1}}\right] \qquad \text{(II.48iii)}$$

$$C_F^{i,j} = -\left[\frac{\Delta x_{i-1}\sigma_{i-1,j} + \Delta x_i\,\sigma_{i,j}}{2\,\Delta z_j}\right] \qquad \text{(II.48iv)}$$

$$C_A^{i,j} = -\left[C_I^{i,j} + C_D^{i,j} + C_S^{i,j} + C_F^{i,j} - A(\sigma_{i,j}, A_{i,j})\right] \qquad \text{(II.48v)}$$

La ecuación en diferencias (II.48) indica que la solución de $\tilde{\phi}$ en el nodo (i,j) depende sólo de los valores de $\tilde{\phi}$ en los nodos adyacentes (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1) e (i,j+1). Los coeficientes de acoplamiento son funciones conocidas de la geometría y de la distribución de la propiedad física σ en el conjunto D.

Para la superficie del terreno (z = 0) se aplica la misma condición de frontera tipo Neumann que para la discretización por puntos, es decir,

$$\sigma_{ij}\,\frac{\partial \tilde{\Phi}_{ij}}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{(II.39)}$$

Así, para nodos localizados en la superficie del terreno (i,1), con i = 2, 3,..., NX-1, la región ΔA_{ij} está rodeada por el contorno L_{ij} definido por las subsecciones III, IV, V, VI, a, b, como se muestra en la figura (II-8). Entonces, para estos nodos, la ecuación de dife rencias finitas está dada por

$$C_I^{i,j}\tilde{\phi}_{i-1,j}+C_D^{i,j}\tilde{\phi}_{i+1,j}+C_F^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j+1}+C_A^{i,j}\tilde{\phi}_{i,j}=\frac{1}{2}\delta(x_f)\delta(z_f) \qquad (II.49)$$

donde

$$C_I^{i,j}=-\frac{\Delta z_j\,\sigma_{i-1,j}}{2\Delta x_{i-1}} \quad (II.49i) \qquad C_D^{i,j}=-\frac{\Delta z_j\,\sigma_{i,j}}{2\Delta x_i} \quad (II.49ii)$$

$$C_F^{i,j}=-\left[\frac{\Delta x_{i-1}\sigma_{i-1,j}+\Delta x_i\,\sigma_{i,j}}{2\Delta z_j}\right]$$

$$A(\sigma_{i,j},A_{i,j})=K_y^2\left[\frac{\sigma_{i-1,j}\Delta x_{i-1}\Delta z_j}{4}+\frac{\sigma_{i,j}\,\Delta x_i\,\Delta z_j}{4}\right] \qquad (II.49iv)$$

y

$$C_A^{i,j}=-\left[C_I^{i,j}+C_D^{i,j}+C_F^{i,j}-A(\sigma_{i,j},A_{i,j})\right] \qquad (II.49v)$$

Para los nodos en los otros tres bordes, el valor del potencial transformado $\tilde{\phi}(x,Ky,z)$ será proporcionado por un modelo primario unidimensional; será por tanto un valor conocido y bastará hacer lo mismo que se describe para el caso de discretización por puntos.

II.5 Matrices de Capacitancias

II.5.1 Discretización por puntos

Al tomar la ecuación (II.41) para cada nodo interior de la malla y la ecuación (II.42) para los nodos (i,1), con i = 2, 3,..., NX - 1, además de considerar que en los demás nodos se conoce $\tilde{\phi}$ (x, Ky, z), se obtiene un sistema de (NX-2) ×(NZ-1) ecuaciones lineales a resolver simultáneamente.

En la discretización por puntos, cada coeficiente de acoplamiento depende de la distribución de σ en la malla y de las distancias a los dos puntos adyacentes en cada dirección (fig. II-7), como puede verse en las ecuaciones (II.41i) a (II.41v); así, el coeficiente de acoplamiento del nodo (i,j) con el nodo (i+1,j) es diferente del coeficiente de acoplamiento del nodo (i+1,j) con el nodo (i,j): el primero es C_D^{ij} y el segundo es $C_I^{i+1,j}$, que son:

$$C_D^{i,j} = -\frac{2(\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})\Delta x_i}$$

$$C_I^{i+1,j} = -\frac{2(\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j})}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)\Delta x_{i+1}}$$

y, para mallas de espaciamiento irregular, resultan diferentes.

Para un ejemplo, se considera la malla de NX = 4, NZ = 3, de la figura (II-9)

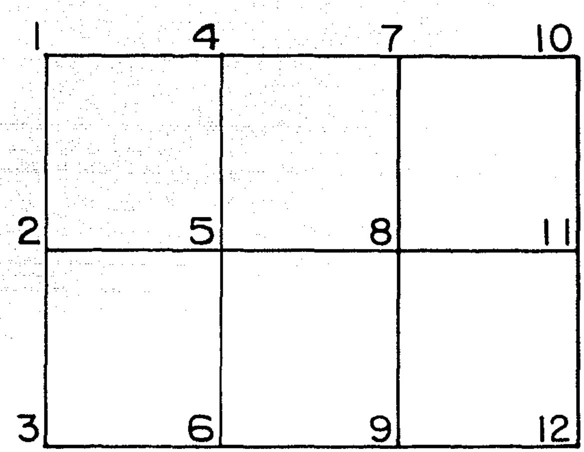


Figura II-9. Ejemplo de convención de numeración para una malla rectangular.

Los nodos individuales se numeran de 1 a 12, comenzando por la esquina superior izquierda e incrementando periódicamente a lo largo de cada columna. El conjunto de ecuaciones simultáneas para todos los nodos en la malla puede escribirse en forma matricial como:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
C_A^4 & C_F^4 & C_D^4 & 0 \\
C_S^5 & C_A^5 & 0 & C_D^5 \\
C_I^7 & 0 & C_A^7 & C_F^7 \\
0 & C_I^8 & C_S^8 & C_A^8
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix}
\tilde{\phi}_4 \\ \tilde{\phi}_5 \\ \tilde{\phi}_7 \\ \tilde{\phi}_8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_4 - C_I^4 \tilde{\phi}_1 \\
- C_I^5 \tilde{\phi}_2 - C_F^5 \tilde{\phi}_6 \\
- C_D^7 \tilde{\phi}_{10} \\
- C_F^8 \tilde{\phi}_9 - C_D^8 \tilde{\phi}_{11}
\end{bmatrix}
$$

(II.50)

o, simbólicamente, como

$$C \tilde{\phi} = S \qquad \text{(II.51)}$$

La matriz C de $\{(NX-2)\cdot(NZ-1)\}\times\{(NX-2)\cdot(NZ-1)\}$ se llama Matriz de Capacitancias y está en función de la geometría y de la distribución - de σ en la malla. Para diferentes posiciones de fuentes, la matriz C permanece inalterada.

La estructura de la matriz es la siguiente:

a. Es tridiagonal por bloques, ya que es posible encontrar -- una partición de C de forma

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & A_{N-1\,N} \\ 0 & & A_{N\,N-1} & A_{NN} \end{bmatrix}$$

en que cada submatriz A_{ii}, $1<i<N$, es cuadrada.

b. Es poco densa, ya que una gran cantidad de elementos son cero; de hecho, sólo hay elementos no nulos en la diagonal principal y en cuatro codiagonales.

c. Es bandeada, puesto que a partir de la codiagonal $c_{i,i-NZ}$ hacia abajo y de la codiagonal $c_{i,i+NZ}$ hacia arriba, todos los elementos son cero. El ancho de banda es NZ en este caso.

La elección de la numeración secuencial a lo largo de columnas o de renglones en la malla determina el ancho de banda de C. En exploración geoeléctrica para grandes superficies, suele requerirse una malla con NX<<NZ. Numerar los nodos a lo largo de los renglones causa que el ancho de banda de C sea NX; si se numeran a lo largo de las columnas, el ancho de banda es NZ, como ocurre en el ejemplo de la figura (II-9).

La Matriz de Capacitancias C tiene las siguientes propiedades:

i) $c_{ii}>0$, $i = 1, 2, \ldots, NX\cdot NZ$, por la forma de definir el coeficiente de autoacoplamiento, que es el que ocupa la diagonal principal; en los nodos en que se conoce el potencial como condición de Dirichlet, $c_{ii} = 1$.

ii) $c_{ii}>\sum_j |c_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, NX\cdot NZ$ (esto también se debe a la forma de coeficiente de autoacoplamiento); es decir, C es diagonalmente dominante.

Cuando la discretización se hace por puntos, la matriz C resulta ser no simétrica, por la forma en que se definieron los coeficientes. Para obtener soluciones habría entonces que recurrir al algoritmo -

de eliminación Gaussiana.

II.5.2 Discretización por áreas

En cuanto a la colocación de coeficientes en la Matriz de Capacitancias, ésta es independiente del tipo de discretización que se efectúe. Entonces, la disertación de la sección anterior sigue siendo válida y se conservan las propiedades de la matriz ya enunciadas.

Sin embargo, en la discretización por áreas, los coeficientes de acoplamiento dependen de la distribución de σ en la malla y de la distancia entre los dos nodos que acoplan, como se ve en las ecuaciones (II.48i) a (II.48iv). En este caso, los coeficientes C_D^{ij} y $C_I^{i+1,j}$ son iguales:

$$C_D^{i,j} = -\left[\frac{\Delta z_{j-1}\sigma_{i,j-1} + \Delta z_j \sigma_{i,j}}{2\Delta x_i}\right]$$

$$C_I^{i+1,j} = -\left[\frac{\Delta z_{j-1}\sigma_{i,j-1} + \Delta z_j \sigma_{i,j}}{2\Delta x_i}\right]$$

Esto hace que la Matriz de Capacitancias sea simétrica y positiva definida, es decir:

$$C = C^T$$

$$x^T C x > 0, \quad \forall x \neq 0$$

(Dey y Morrison, 1979a).

Tales características presentan varias ventajas, como son:

a. En la solución calculada, el error por redondeo durante el proceso es aceptablemente pequeño, si la estrategia de pivoteo que se emplee sea la de no hacer ningún intercambio (Varga, 1962).

b. Existe factorización Choleski (ver apéndice C), el cual es un algoritmo rápido y corto para resolver sistemas de ecuaciones lineales grandes, ya que permite expresar a C como

$$LL^T = C \quad \text{(II.55}$$

donde L es una matriz triangular inferior no singular.

Los elementos de L se obtienen de la siguiente forma:

$$L_{i,i} = \sqrt{(C_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^2)} \quad ; \quad L_{i,j} = (C_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k}) / L_{j,j}$$

(II.54)

En la expresión anterior se aprecia por qué el ancho de banda de L es igual al ancho de banda de C: cada elemento de L depende del correspondiente en C y de los que están a su izquierda en L, así que

$$C_{i,j} = 0 \quad y \quad L_{i,k} = 0 \quad \forall k < j \quad \Rightarrow \quad L_{i,j} = 0$$

En tal caso, la solución de

$$C\tilde{\phi} = S \qquad (II.51)$$

se lleva a cabo en los pasos

$$L\psi = S \; ; \quad L^T\phi = \psi \qquad (II.55)$$

Esta técnica de factorización es especialmente efectiva cuando NZ<<NX·NZ, pues hay aproximadamente NX·NZ(NZ + 1)(NZ + 2)/2 multiplicaciones y NX·NZ raíces cuadradas para encontrar L, y aproximadamente -- 2NX·NZ(NZ + 1) multiplicaciones en la solución por substitución directa. Además, una vez que se conoce L, se pueden procesar diferentes vectores S con la misma factorización.

II.6 Planteamiento del problema

Hasta aquí, ya se ha hecho la discretización de las ecuaciones que se manejan en este trabajo, y se ha mostrado el sistema lineal a resolver para obtener el conjunto discreto de valores de potencial transformado $\tilde{\phi}_{ij}$.

En suma, se tiene, para cada tipo de discretización, un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución proporcionará un conjunto discreto de valores ϕ_{ij} para un número de onda Ky dado y para una posición de fuente puntual dada.

Recurriendo al principio de superposición, la distribución de potencial de corriente directa, debida a un arreglo con dos fuentes - puntuales - que representan a los electrodos de corriente en el campo -, se obtiene sumando los efectos de las soluciones a sendos sistemas de -- ecuaciones para la fuente (+I) y para el electrodo que cierra el circuito (-I):

$$\left.\begin{array}{l} C\tilde{\Phi}^{(1)} = S^{(1)} \\ C\tilde{\Phi}^{(2)} = S^{(2)} \end{array}\right\} \Rightarrow C(\tilde{\Phi}^{(1)} - \tilde{\Phi}^{(2)}) = S^{(1)} - S^{(2)} \qquad \text{(II.56)}$$

La solución de este sistema proporciona valores de potencial en el espacio transformado (x, Ky, z); para regresar al espacio (x, y, z) es necesario resolver el sistema para varios números de onda Ky_i (i=1,2,...), - con la intención de luego integrarlos para obtener la distribución de potencial ϕ(x, y, z) (fig.II-10)

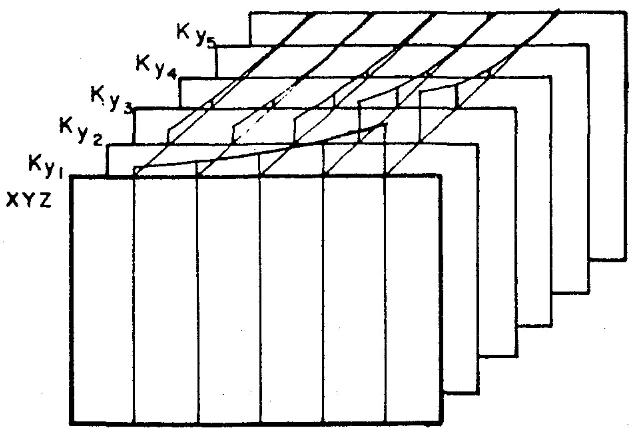


Figura II-10. Soluciones para varios números de onda Ky_i se integran para obtener ϕ(x,y,z)

Se obtendrá un programa de computadora que permita interpretación de datos de campo interactivamente, es decir, que quien la lleve a cabo, proponga una malla y una distribución de conductividades; la computadora obtendrá diferencias de potencial teóricas; el operador habrá de decidir si el modelo que propuso es adecuado, por comparación, en puntos prefijados de acuerdo a la operación de campo, del parámetro "resistividad aparente", mismo que la computadora podrá proporcionar, empleando los valores de potencial calculados, la corriente inyectada y los parámetros del arreglo electródico usado.

En caso de que el modelo propuesto no reproduzca la curva de resistividad aparente, se deberá proponer un nuevo modelo, variando conductividades o espaciamientos en la malla.

Para lograr ese objetivo, es necesario resolver el sistema (II.57) para varios números de onda Ky_i (i = 1, 2,...). Se trata de trabajar con matrices que tengan una gran cantidad de elementos, pues, por ejemplo, una malla de 30 nodos en profundidad por 100 de lado origina una Matriz de Capacitancias de 3000 × 3000, i.e., deberán manejarse 9×10^6 cantidades. Sin embargo, aprovechando las propiedades de las matrices que se usan, se puede hacer disminuir la extensión de memoria y el tiempo de procesado que se requieren.

Las técnicas para solucionar el sistema de ecuaciones (II.57) se presentarán en el siguiente capítulo.

CAPITULO III

ALGORITMOS PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA

Resumen

En este capítulo se dan la técnica y los algoritmos con que se elabora el programa de cálculo buscado. Se presentan los diagramas de flujo del mismo y se muestra cómo hacer la transformación inversa de los valores de potencial en (x, Ky, z), para obtener valores en el espacio (x, y, z).

III.1 Métodos de solución de las matrices

Los métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales de tipo $C\phi = S$, caen dentro de dos clases generales: iterativos y directos. En los primeros se seleccionan una aproximación ϕ^1 a ϕ y la determinación de una sucesión $\phi^1, \phi^2, \ldots,$ tal que $\lim_{i\to\infty} \phi^i = \phi$. Usualmente, en el cálculo de ϕ^{i+1} sólo se requiere emplear C, S y una o dos de las anteriores ϕ^i. En teoría, cuando se usa un método iterativo es necesario efectuar un número infinito de operaciones aritméticas para obtener ϕ, pero en la práctica se detiene la iteración cuando se decide que la aproximación en ese momento está aceptablemente cerca de ϕ. Por otro lado, en ausencia de errores de redondeo, los métodos directos proveen de una solución tras ejecutar un número finito de operaciones aritméticas.

En general es muy difícil decidir qué clase de método debe usarse para un problema determinado.

Para las ecuaciones que se dan en la presente formulación, se encuentra que los métodos directos de solución pueden aplicarse para distribuciones de potencial con múltiples posiciones de fuentes puntuales, con un costo de computación que podrá ser de 10 a 50 veces menor que con las técnicas iterativas (Dey y Morrison, 1979a).

Por tal razón, se elige un método directo de solución; en esta situación, es ventajoso usar una matriz positiva definida, así que, a partir de ahora, sólo se trabajará con la discretización por áreas.

Se usará entonces factorización Choleski para resolver el -- sistema de ecuaciones.

No es necesario resolver $\bar{\phi}_i$ para i = 1, 2,..., NZ; i = (NX-1)·NZ, (NX-1)·NZ + 1,..., NX·NZ, ya que estos valores están dados como condiciones de frontera. En la misma situación se encuentran los potenciales de los nodos en que i = NZ. Esto hace que, además de las propiedades de la matriz enunciadas anteriormente, también sea irreducible y tenga una gráfica dirigida fuertemente conectada (Varga, 1962). Las ecuaciones en diferencias que originan la matriz C con las propiedades descritas son - inherentemente estables para espaciamientos de malla arbitrarios (Varga, 1962; véase apéndice B).

El esquema para obtener la solución es el siguiente:

i) Se calcula la matriz C; debido a su simetría, sólo es necesario trabajar con la parte triangular inferior. Más aún, aprovechando que es tridiagonal por bloques, la matriz puede almacenarse en un arreglo de tres renglones por (NX - 2)·(NZ - 1) columnas (fig. III-1).

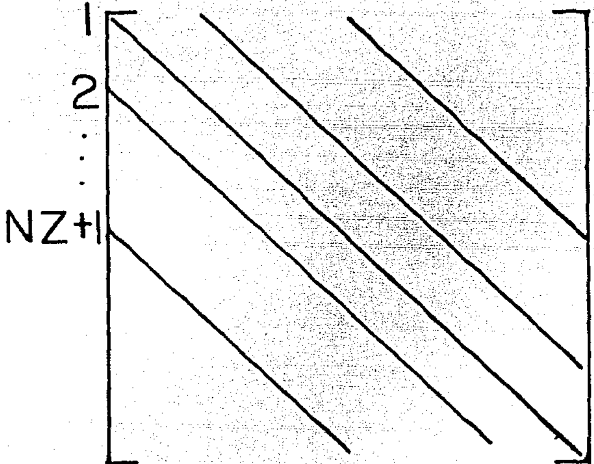
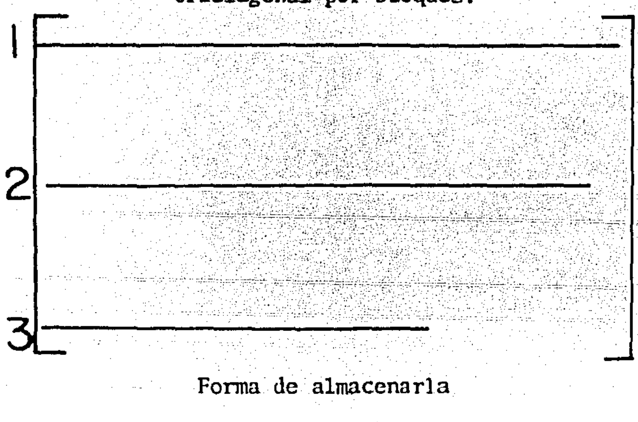


Figura III-1. Matriz C,
tridiagonal por bloques.



Forma de almacenarla

ii) Se calcula el factor triangular inferior L, empleando el hecho de que el ancho de banda de L es igual al de C para almacenar L en un arreglo de $(NZ - 1) \times (NX + 2) \cdot (NZ - 1)$ (fig. III-2)

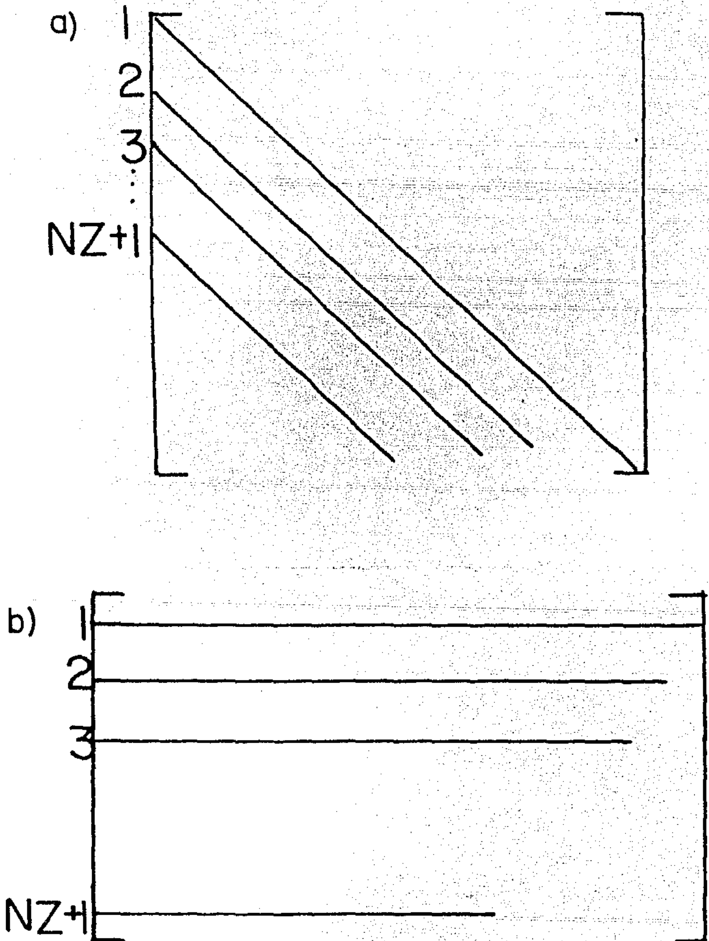


Figura III-2. a) Matriz triangular inferior L y b) Forma de almacenarla

Considerando este arreglo, L se va calculando por columnas. La razón para hacerlo es que aún se tiene un gran número de elementos y, para poder procesarlos en una minicomputadora, es necesario mandar L a un disco, es decir, se requiere aumentar la memoria del sistema de cómputo, ya que no es posible mantener todos los elementos en memoria rápida (o central). Además, habrán de calcularse varias factorizaciones, una para la matriz C correspondiente a cada número de onda Ky_i $(i = 1, 2, \ldots)$, que vaya a utilizarse; es entonces conveniente guardar en disco las matrices L_i que resulten, para poder revisarlas todas.

La forma de lograr los arreglos de las figuras (III-1) y (III-2) es la siguiente:

$$C_{i,i} \rightarrow C_{1,i} \qquad C_{i-1,i} \rightarrow C_{2,i} \qquad C_{i-nz,i} \rightarrow C_{3,i}$$

$$L_{j-k,j} \rightarrow L_{k+1,j} \tag{III.1}$$

El cálculo en memoria central de L se presenta en la figura (III-3).

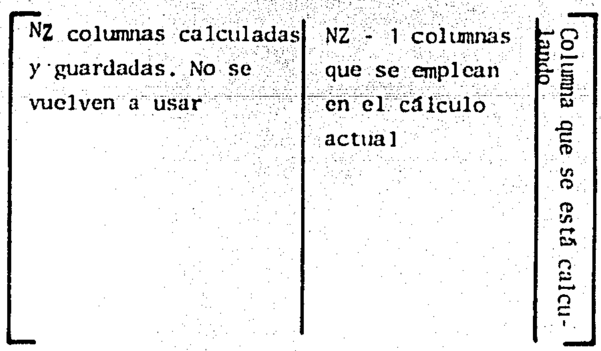


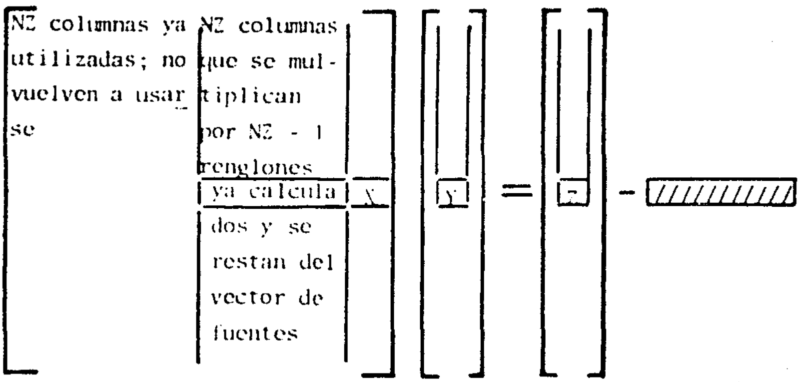
Figura III-3. Forma de acceso y de cálculo de la matriz triangular inferior L.

Llevar datos de disco a memoria central es un proceso que -- consume mucho tiempo, por lo que conviene mantener en memoria central -- tantos datos como sea posible, reduciendo el número de veces que se re-- quiere interactuar con el disco.

En el esquema desarrollado, se utiliza el número de nodos en profundidad (NZ - 1) como parámetro que divide al número total de columnas, pues este último es un múltiplo de aquél. Se define en memoria central una matriz de (NZ - 1) × (NX - 2) · (NZ - 1) debido a que, bajo este esquema, aplicar la factorización Choleski a una columna requiere -- usar las (NZ - 1) columnas anteriores.

El algoritmo procede llamando (NZ - 1) columnas de disco, a ocupar las columnas NZ a 2·(NZ - 1) del arreglo en memoria central; a -- continuación efectúa la factorización y las recorre a los lugares 1 a -- (NZ - 1), llamando entonces a las siguientes (NZ - 1) columnas de disco. Como el número total de columnas es igual al de nodos, o sea (NX - 2) · (NZ - 1), el procedimiento se repite NX - 2 veces.

iii) De la misma forma, llamando los datos de disco, se efectúa la substitución hacia adelante:



X: coeficiente del renglón que se está calculando
Y: incógnita que se calcula. Z: renglón en uso del vector de fuentes. (//////): lo que se resta para el cálculo de Y.

Figura III-4. Substitución hacia adelante

iv) La substitución hacia atrás necesita emplear L^T; puesto que ya se tiene almacenada L, se accesa esta última, trabajándola en sentido inverso, es decir, empezando con la última columna.

III.2 Regreso al dominio del espacio

Una vez calculado el vector $\tilde{\phi}$ para cada número de onda Ky_i (i = 1, 2,...,8), el regreso al dominio del espacio se hace ajustando -- una función exponencial entre los valores de $\tilde{\phi}$ correspondientes a dos valores de Ky_i subsecuentes; esta función se integra analíticamente:

$$\int_{K_{y2}}^{K_{y1}} A e^{bK_y} \cos(y K_y)\, d K_y = \frac{A e^{bK_y}}{b^2+y^2} \left\{ y \operatorname{sen}(y K_y) + b \cos(y K_y) \right\}_{K_{y2}}^{K_{y1}} \qquad \text{(III.2)}$$

Aquí, "y" es la variable que se parametrizó por Ky; cuando se tienen arreglos colineales en una recta perpendicular a esa dirección, el valor es y = 0, con lo que se tiene:

$$\int_{K_{y2}}^{K_{y1}} A e^{bK_y} d K_y = \frac{A e^{bK_y}}{b} \Bigg|_{K_{y2}}^{K_{y1}} \qquad \text{(III.3)}$$

Los parámetros A y b deben encontrarse para cada par de potenciales transformados $\tilde{\phi}$ (Ky_i), $\tilde{\phi}$ (Ky_{i+1}); tal efecto se logra con el - siguiente desarrollo:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\phi}(K_{y1}) &= A e^{bK_{y1}} \\ \tilde{\phi}(K_{y1+1}) &= A e^{bK_{y1+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \ln \tilde{\phi}(K_{y1}) &= \ln A + bK_{y1} \\ \ln \tilde{\phi}(K_{y1+1}) &= \ln A + bK_{y1+1} \end{aligned}\right.$$

$$b = \frac{\ln(\tilde{\phi}(K_{y1})/\tilde{\phi}(K_{y1+1}))}{K_{y1} - K_{y1+1}} \qquad A = \tilde{\phi}(K_{y1})\, e^{bK_{y1}} \qquad \text{(III.4)}$$

La suma de las áreas que se obtienen entre cada dos Ky_i's, da por resultado el potencial total en el punto (x, 0, z). Esto completa el regreso al dominio del espacio.

Una vez que se tienen potenciales totales en los nodos de la superficie, se pueden encontrar diferencias de potencial entre pares de puntos. Conociendo la corriente inyectada y el factor geométrico del arreglo electródico que se haya empleado en el campo, es posible calcular valores de resistividad aparente, usando la fórmula

$$\rho_a = G\frac{\Delta V}{I} \qquad \text{(III.5)}$$

Cada vez que termine un cálculo, el programa desarrollado preguntará si se desea otro con el mismo arreglo de electrodos; en caso contrario, acepta mantener el mismo modelo, cambiando sólo de arreglo.

Cuando ya no se desee otro cálculo de ρ_a, permitirá elegir un nuevo modelo, o salir del programa.

En el siguiente apartado se muestran los diagramas de flujo, con lo que se completa la presentación del método de solución.

III.3 Diagramas de flujo

Se presentan a continuación los diagramas de flujo de los programas diseñados para el modelado bidimensional por diferencias finitas.

En una minicomputadora Eclipse de 32KW de memoria central, se han elaborado varios programas independientes, con el objetivo de no ocupar su memoria con los que ya hayan cumplido su función. La conexión entre todos se lleva a cabo por medio de los archivos de datos que se van creando en disco; los formatos de lectura y de escritura son muy similares en todos los casos. Tales formatos, así como la cantidad de memoria central requerida, están controlados por el parámetro (NZ - 1), que es el número de nodos en profundidad de la malla de discretización y corresponde también al ancho de banda de la Matriz de Capacitancias.

Así, una vez que se ha generado la malla, ésta queda fija, al igual que las conductividades asignadas; los programas que generan -

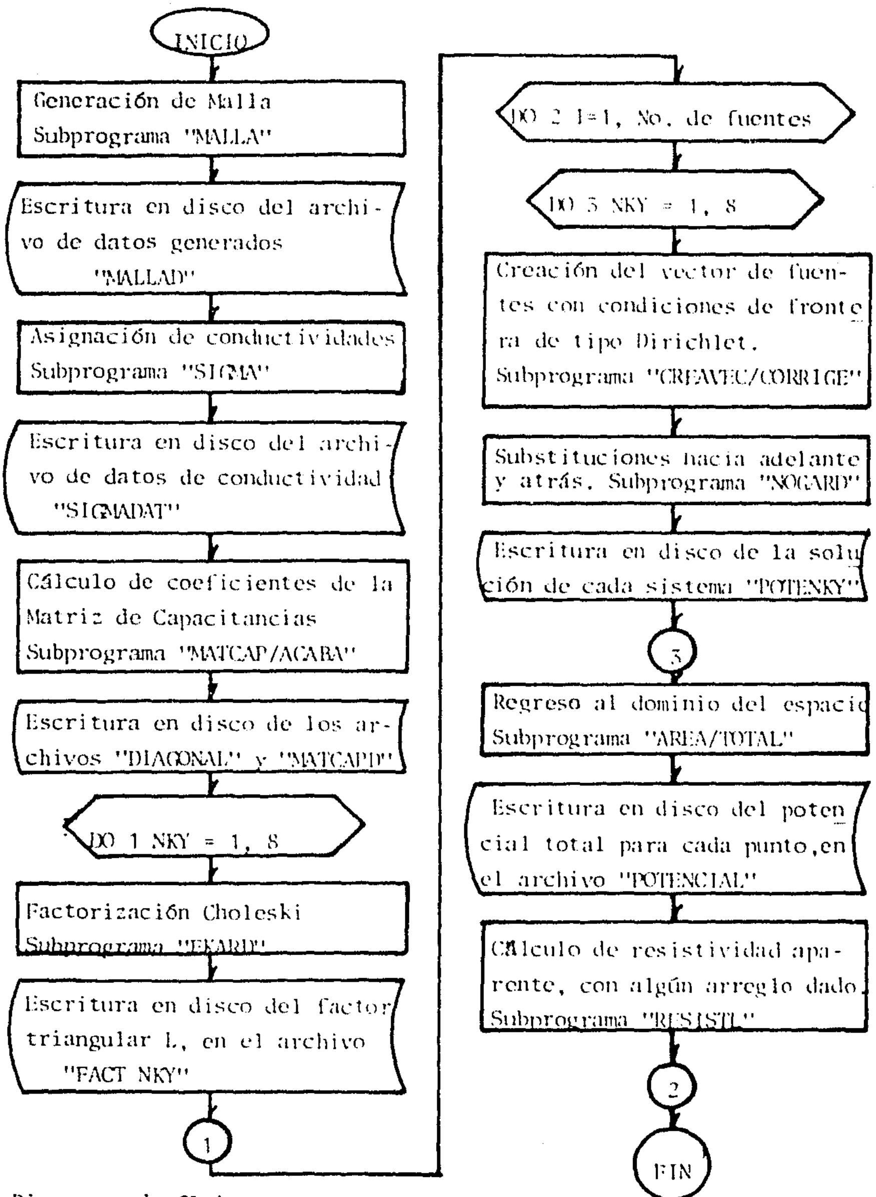
estos valores no volverán a usarse en el desarrollo posterior del algoritmo. De igual manera, cuando ya se formó la Matriz de Capacitancias, se procede a su factorización Choleski, continuando con las substituciones directa e inversa, con las cuales se obtienen vectores de potencial transformado para cada Ky_i. Entonces se lleva a cabo el regreso al dominio del espacio y se tienen valores de potencial calculados para el modelo propuesto. Tras elegir un arreglo de electrodos, con el fin de proporcionar un factor geométrico, se procede a evaluar la resistividad aparente que se leería en la superficie de un terreno correspondiente al modelo dado.

Se repite el cálculo para cada diferente posición de electrodos, a partir de las substituciones; de esta forma se obtienen tantos valores de resistividad aparente calculados teóricamente, como datos del mismo parámetro se hayan medido en el campo.

Así se logra una comparación entre valores teóricos y medidos, con la cual se puede juzgar si el modelo propuesto es adecuado.

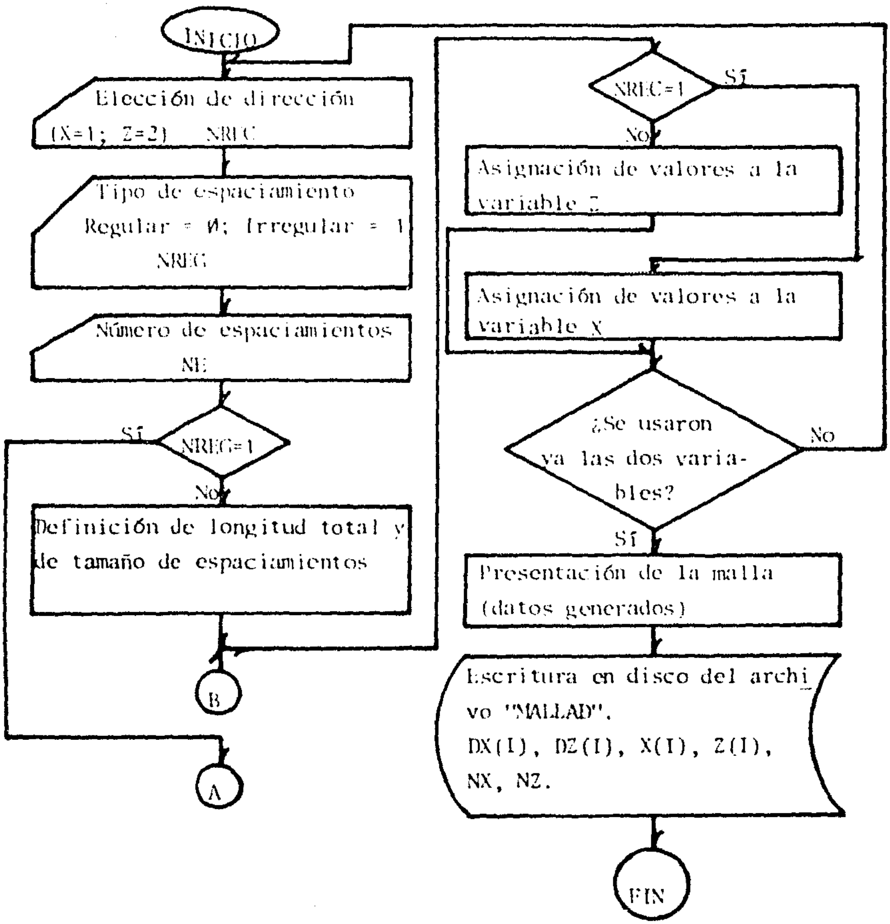
No debe perderse de vista el hecho de que diferentes distribuciones de conductividad pueden producir la misma respuesta; una correcta interpretación de lo que existe en el subsuelo, necesita recurrir a datos obtenidos por otros métodos geofísicos; además, siempre debe tenerse en cuenta la geología de la zona.

En las páginas siguientes se muestran los diagramas de flujo.

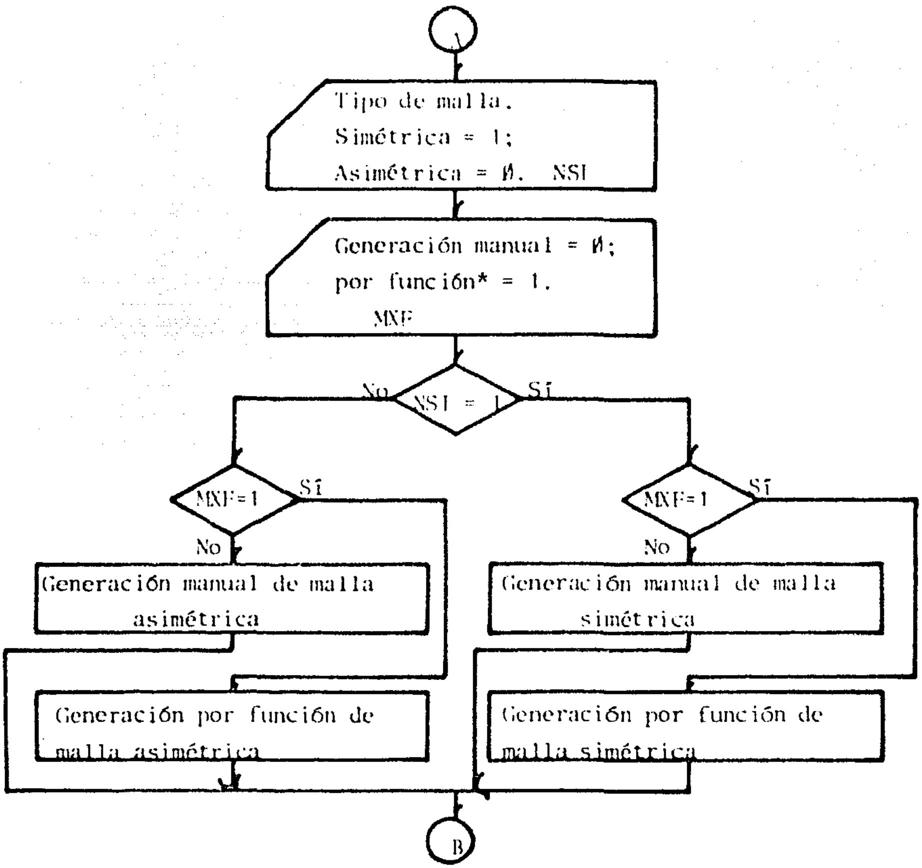


Diagramas de flujo

Nombre del programa: R2DIFIN



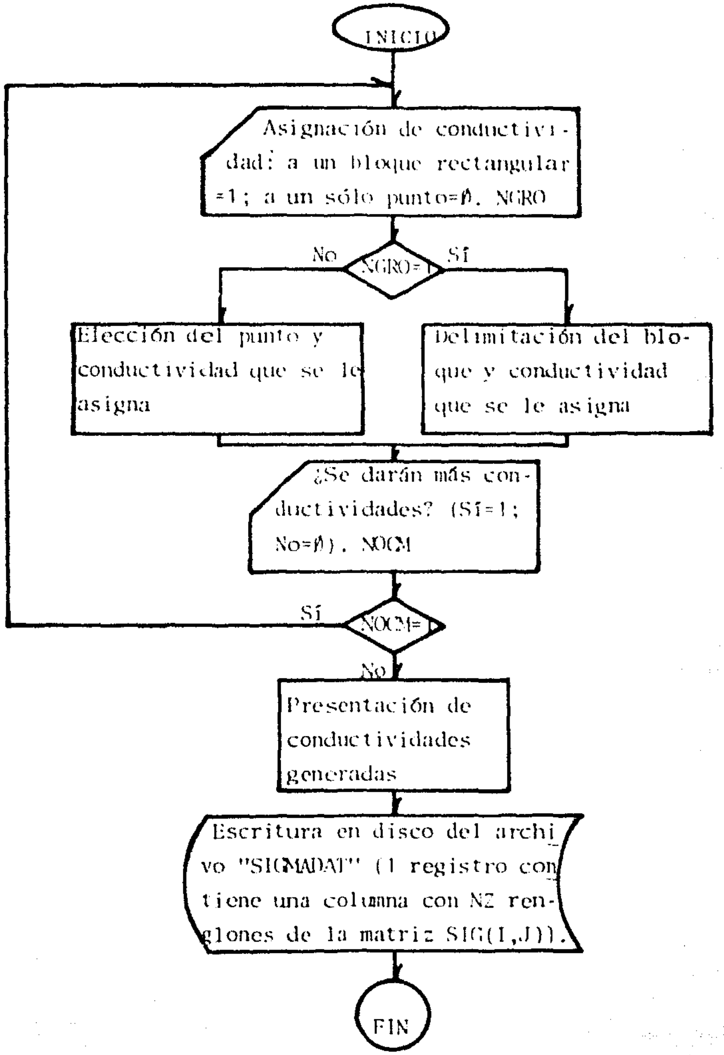
Diagramas de flujo
Nombre del programa: MALLA 1



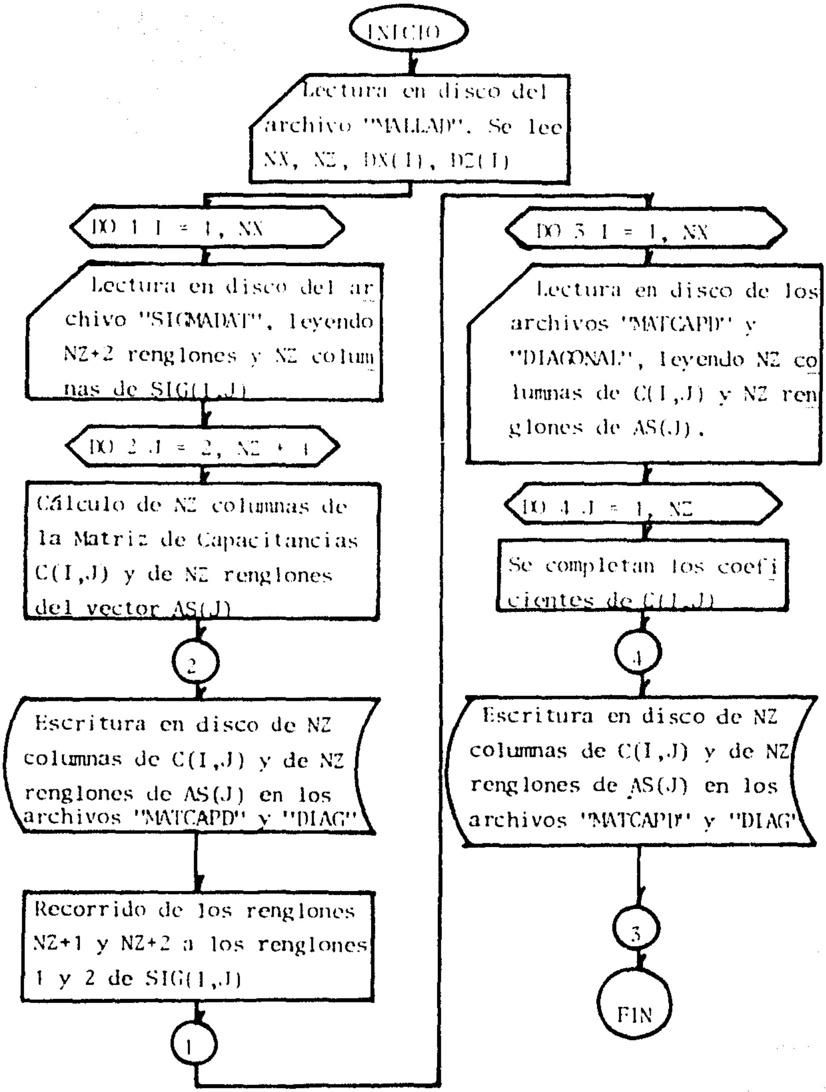
Diagramas de flujo
Nombre del programa: MALLA 2

---

*Nota: la función que genera los espaciamientos es una tangente hiperbólica, produciendo una malla fina en una zona determinada y aumentando los espaciamientos a medida que se acerca a las fronteras.

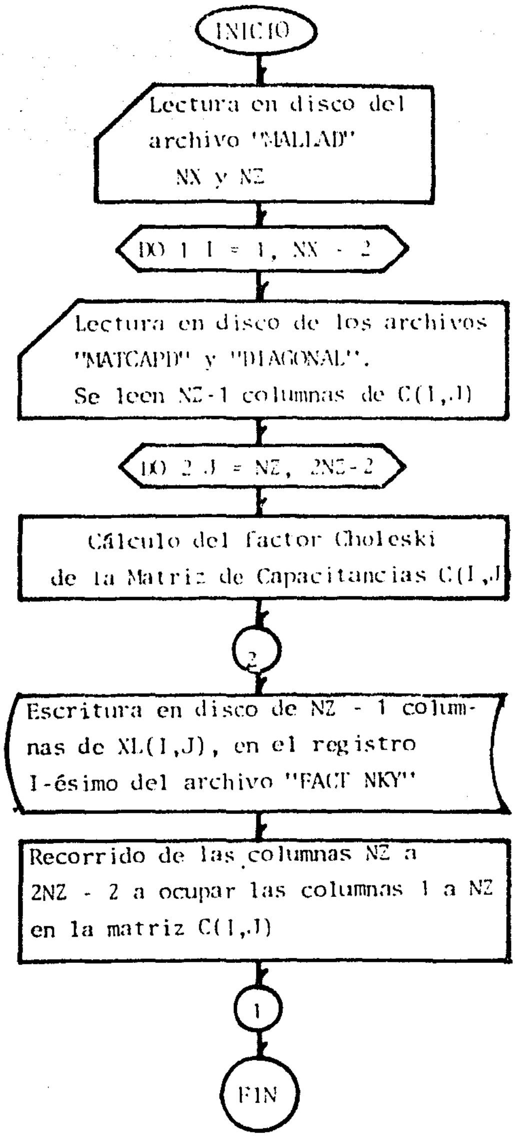


Diagramas de flujo
Nombre del programa: SIGMA



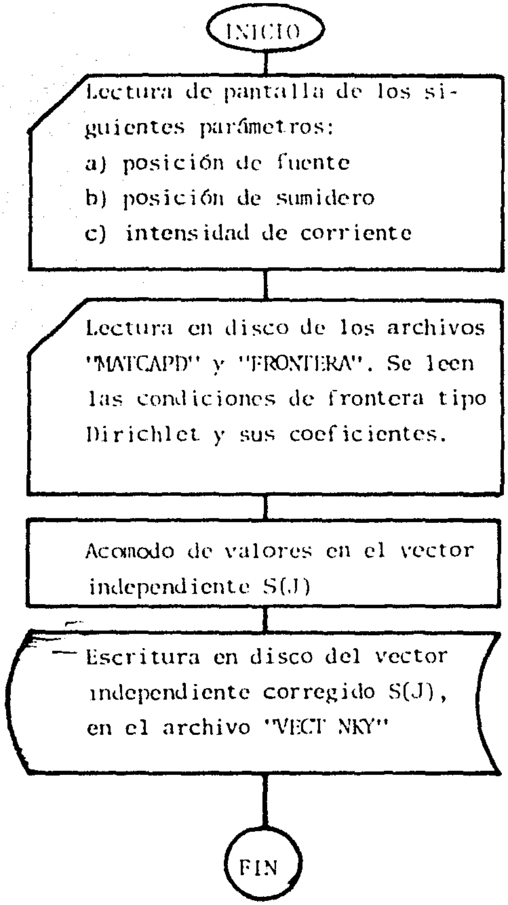
Diagramas de flujo

Nombre del programa: MATCAP/ACABA

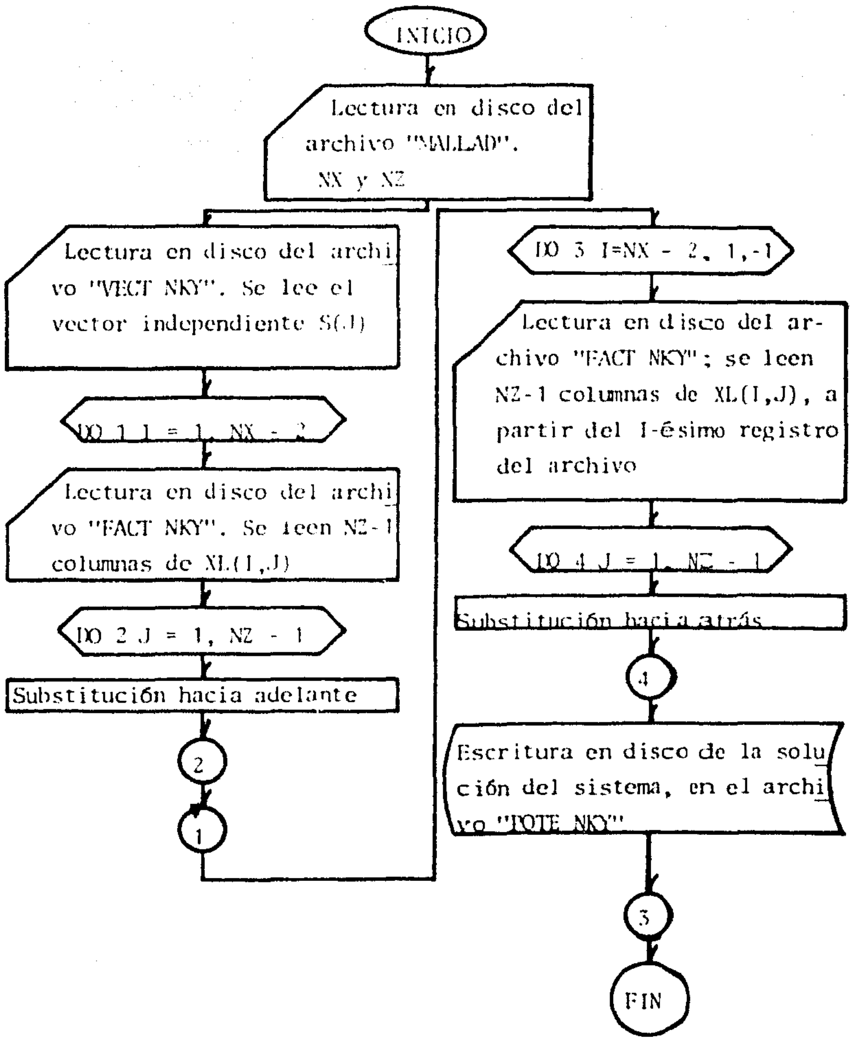


Diagramas de flujo

Nombre del programa: EKARD

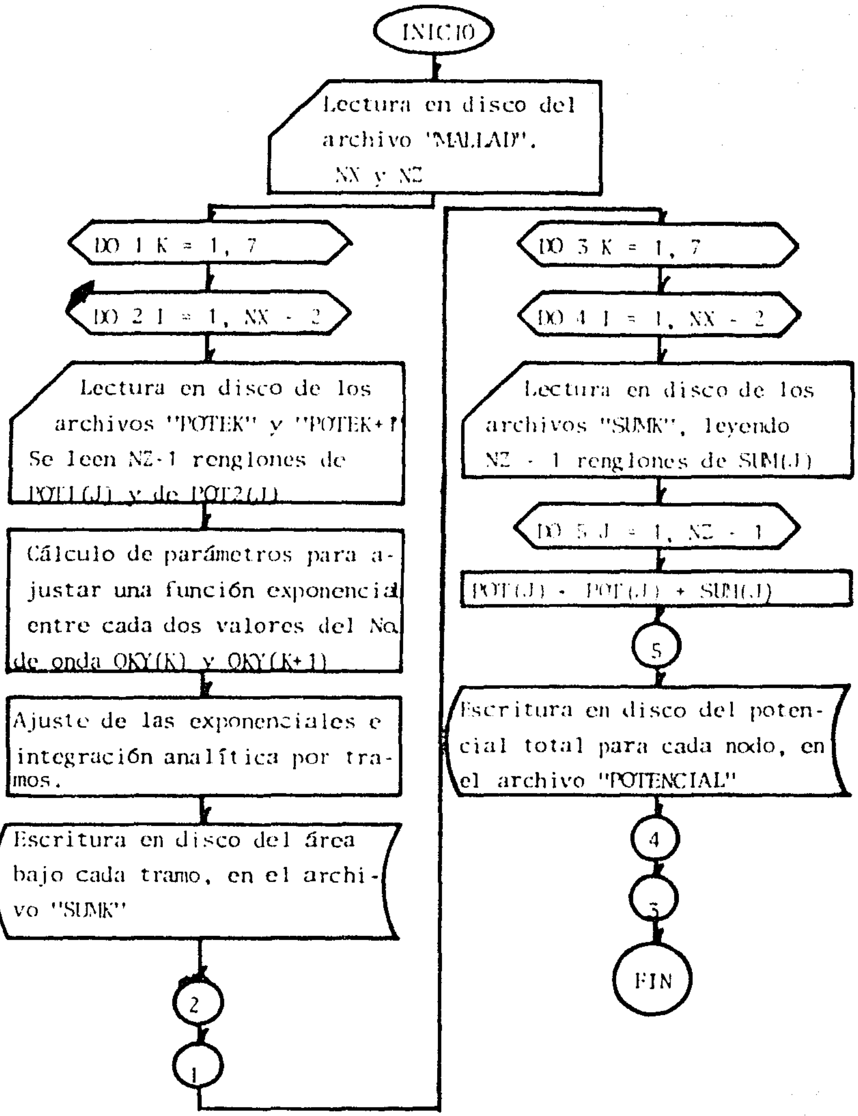


Diagramas de flujo
Nombre del programa: CREAVEC/CORRIGE



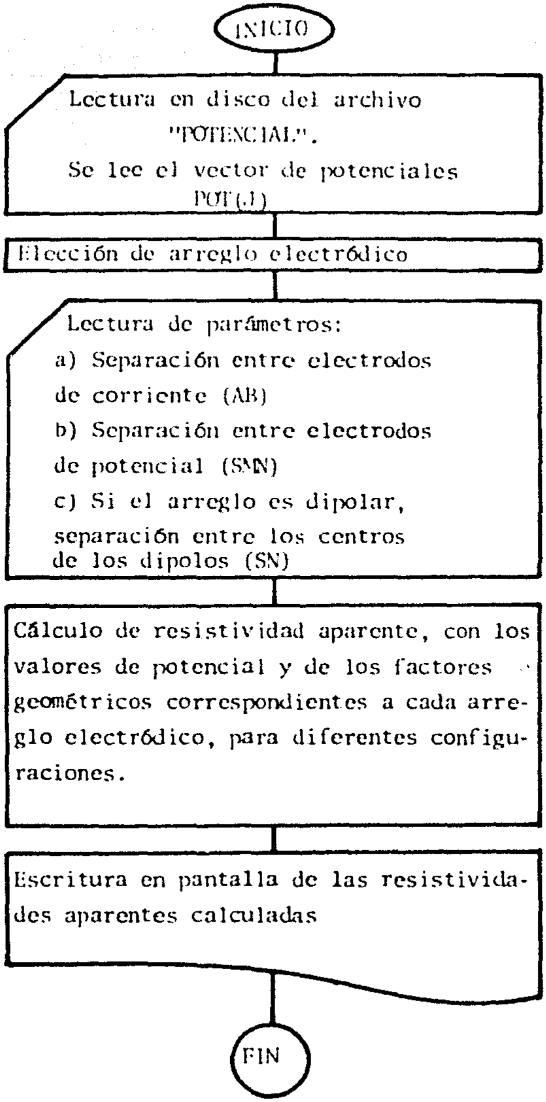
Diagramas de flujo

Nombre del programa: NOGARD



Diagramas de flujo

Nombre del programa: AREA/TOTAL



Diagramas de flujo

Nombre del programa: RESISTE

CAPITULO IV

APLICACIONES

Resumen

Se presentan los resultados obtenidos al aplicar el programa a un modelo homogéneo, para tres diferentes números de onda; se hace un análisis de errores obteniéndose, para el mismo modelo, una comparación de resultados numéricos contra valores obtenidos analíticamente, además del cálculo de resistividad aparente. Otras comparaciones se establecen para modelos de dos capas, con arreglos Schlumberger y dipolar colineal.

IV.1 Resultados obtenidos

Para efectos de verificación de resultados, se diseñó un modelo sintético que se analiza con una malla de 10 nodos en profundidad - por 30 laterales, en un medio homogéneo de resistividad 1.00Ωm, con una separación entre nodos de 0.1 unidades de malla, empleando una corriente de 1.00amp. La fuente y el sumidero están separados 1.0 unidades de malla, colocados sobre los nodos (1,10) y (1,20), respectivamente.

La solución analítica en el espacio transformado (x, Ky, z), está dada por la ecuación

$$\tilde{\phi}(x,K_y,z)=\frac{\rho I}{2\pi}\left\{K_0\left(K_y\sqrt{((x_f-x)^2+(z_f-z)^2)}\right)-K_0\left(K_y\sqrt{((x_s-x)^2+(z_s-z)^2)}\right)\right\} \qquad \text{(IV.1)}$$

La comparación entre resultados del programa contra esta solución analítica se efectúa para los ocho valores de Ky. En la tabla IV.1 se presenta el potencial transformado analítico, en la primera columna; - en la segunda está el calculado por el programa. La tercera columna muestra el error relativo de la solución numérica respecto de la analítica, - que está dado de la siguiente forma:

$$\text{error relativo} = \frac{\text{valor analítico - valor numérico}}{\text{valor analítico}} \qquad \text{(IV.2)}$$

En la cuarta columna está colocado el vector independiente, que ya tiene incluidas las condiciones de frontera de tipo Dirichlet usadas.

Hay una tabla para Ky = 0.006, una para Ky = 0.750 y una para Ky = 5.000, con el propósito de mostrar cómo es afectada la precisión del método por el número de onda.

El análisis de errores se hace recurriendo al cálculo del error cuadrático medio (r.m.s. por sus siglas en inglés), así como del error mínimo y del error máximo, para cada conjunto de datos. En la tabla IV.2 se prrsentan los obtenidos para los diferentes números de onda.

Todos estos resultados, al igual que los siguientes en esta sección, se han obtenido trabajando en precisión simple. (No se muestran todos los resultados para los ocho números de onda, por razones de espacio).

Luego de la integración de las soluciones numéricas, se obtiene un valor de potencial total para cada nodo de la malla, el cual se compara con la solución analítica en el espacio (x, y, z), calculando también el error relativo; éstos se presentan en la tabla IV.3, junto con el e_{rms}, el $er_{mín}$ y el $er_{máx}$.

La solución analítica en el espacio (x, y, z) está dada por

$$\phi(x,y,z) = \frac{\rho I}{2\pi}\left[\left\{(x_f - x)^2 + (y_f - y)^2 + (z_f - z)^2\right\}^{-1/2} - \left\{(x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2\right\}^{-1/2}\right] \qquad \text{(IV.3)}$$

La obtención de la resistividad aparente se hace pensando en un arreglo Schlumberger, con separaciones entre electrodos de potencial de 0.02, 0.06, 0.20, 0.40, 0.60 y 0.80 unidades de malla. Los datos se presentan en la tabla IV.4.

Cuando los electrodos de potencial se colocan cerca de los de corriente en el modelo, el error aumenta ya que el cálculo numérico de potenciales es menos preciso cerca de las fuentes y cerca de las fronteras.

En las ecuaciones (IV.1) y (IV.3), el subíndice f denota la posición de la fuente y el subíndice s la del sumidero.

Con la misma malla de 10×30, se calcula la resistividad aparente para un modelo de dos capas, de resisitividades $r_1 = 1.00\Omega m$ y $r_2 = 0.10\Omega m$, respectivamente.

La solución analítica para el potencial en este caso es

$$\phi(x,y,z) = \frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+ke^{-2\lambda t}}{1-ke^{-2\lambda t}}\left[J_0(\lambda r_f) - J_0(\lambda r_s)\right]d\lambda \tag{IV.4}$$

en que t es el espesor de la primera capa; ρ_1 la resistividad de la primera capa y ρ_2 la de la segunda; k es el coeficiente de reflexión entre ambas capas:

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \tag{IV.5}$$

Jo es la función Bessel de orden cero; λ es el eigenvalor que viene de - hacer la separación de variables para la ecuación de Laplace, en coordenadas cilíndricas, y r_f y r_s son las distancias a la fuente y al sumidero, respectivamente:

$$r_s = \left[(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2\right]^{1/2}$$

$$r_f = \left[(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2 + (z-z_f)^2\right]^{1/2} \tag{IV.6}$$

Con un arreglo Schlumberger se obtuvieron los valores de la tabla IV.5.

El mismo modelo de dos capas se trabajó con un arreglo dipolar colineal, con una malla de discretización de 20 nodos en profundidad por 80 laterales, con separaciones entre nodos que se muestran en la tabla IV.6; la fuente y el sumidero están en los nodos (1,10) y (1,20), respectivamente. Se emplea una corriente de 1.00 amp.

Los valores de resisitividad aparente que se encuentran se -- muestran en la tabla IV.7.

TABLA IV. 1

PARA EL NUMERO DE ONDA KY = .60000E-02

1	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.29161E+00	.29179E+00	-.61661E-03	.13482E+00
2	.28954E+00	.28968E+00	-.48436E-03	.26806E+00
3	.28355E+00	.28360E+00	-.16856E-03	.26341E+00
4	.27421E+00	.27417E+00	.17433E-03	.25610E+00
5	.26234E+00	.26223E+00	.42541E-03	.24663E+00
6	.24878E+00	.24865E+00	.54146E-03	.23561E+00
7	.23430E+00	.23418E+00	.53344E-03	.22361E+00
8	.21953E+00	.21943E+00	.43056E-03	.21112E+00
9	.20492E+00	.20487E+00	.25380E-03	.38934E+00

2	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.31779E+00	.31816E+00	-.11424E-02	0.
2	.31502E+00	.31529E+00	-.85421E-03	0.
3	.30706E+00	.30712E+00	-.20252E-03	0.
4	.29488E+00	.29474E+00	.45412E-03	0.
5	.27972E+00	.27947E+00	.88900E-03	0.
6	.26284E+00	.26256E+00	.10520E-02	0.
7	.24526E+00	.24501E+00	.99171E-03	0.
8	.22773E+00	.22756E+00	.77583E-03	0.
9	.21079E+00	.21069E+00	.44603E-03	.19472E+00

3	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.34965E+00	.35026E+00	-.17273E-02	0.
2	.34578E+00	.34619E+00	-.11739E-02	0.
3	.33484E+00	.33486E+00	-.53457E-04	0.
4	.31850E+00	.31821E+00	.92569E-03	0.
5	.29880E+00	.29837E+00	.14547E-02	0.
6	.27755E+00	.27712E+00	.15579E-02	0.
7	.25611E+00	.25575E+00	.13746E-02	0.
8	.23533E+00	.23509E+00	.10263E-02	0.
9	.21574E+00	.21562E+00	.57181E-03	0.

4	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.38950E+00	.39050E+00	-.25632E-02	0.
2	.38381E+00	.38436E+00	-.14382E-02	0.
3	.36806E+00	.36791E+00	.42016E-03	0.
4	.34544E+00	.34486E+00	.16858E-02	0.
5	.31934E+00	.31866E+00	.21235E-02	0.
6	.29239E+00	.29180E+00	.20014E-02	0.
7	.26622E+00	.26579E+00	.16112E-02	0.
8	.24171E+00	.24144E+00	.11247E-02	0.
9	.21925E+00	.21912E+00	.59878E-03	0.

5	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.44123E+00	.44301E+00	-.40332E-02	0.
2	.43220E+00	.43283E+00	-.14588E-02	0.
3	.40819E+00	.40756E+00	.15215E-02	0.
4	.37570E+00	.37466E+00	.27831E-02	0.
5	.34056E+00	.33963E+00	.27516E-02	0.
6	.30630E+00	.30563E+00	.21961E-02	0.
7	.27459E+00	.27416E+00	.15515E-02	0.
8	.24600E+00	.24576E+00	.97460E-03	0.
9	.22060E+00	.22049E+00	.47886E-03	0.

6	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.51226E+00	.51588E+00	-.70628E-02	0.
2	.49620E+00	.49640E+00	-.40958E-03	0.
3	.45654E+00	.45486E+00	.36944E-02	0.
4	.40819E+00	.40658E+00	.39426E-02	0.
5	.36060E+00	.35956E+00	.28811E-02	0.
6	.31750E+00	.31693E+00	.17949E-02	0.
7	.27974E+00	.27946E+00	.99849E-03	0.
8	.24708E+00	.24696E+00	.48277E-03	0.
9	.21896E+00	.21892E+00	.17560E-03	0.

7	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.61937E+00	.62771E+00	-.13462E-01	0.
2	.58467E+00	.58205E+00	.44824E-02	0.
3	.51227E+00	.50888E+00	.66136E-02	0.
4	.43893E+00	.43725E+00	.38301E-02	0.
5	.37571E+00	.37510E+00	.16165E-02	0.
6	.32319E+00	.32306E+00	.41377E-03	0.
7	.27974E+00	.27978E+00	-.15081E-03	0.
8	.24363E+00	.24371E+00	-.34590E-03	0.
9	.21342E+00	.21349E+00	-.28863E-03	0.

8	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.81642E+00	.83086E+00	-.17688E-01	0.
2	.70704E+00	.69519E+00	.16765E-01	0.
3	.56399E+00	.56137E+00	.46480E-02	0.
4	.45821E+00	.45842E+00	-.46138E-03	0.
5	.37990E+00	.38055E+00	-.17141E-02	0.
6	.31984E+00	.32042E+00	-.18234E-02	0.
7	.27246E+00	.27290E+00	-.16207E-02	0.
8	.23432E+00	.23463E+00	-.12847E-02	0.
9	.20316E+00	.20332E+00	-.78733E-03	0.

9	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.31831E+10	.13054E+01	.10000E+01	0.
2	.79205E+00	.80647E+00	-.18213E-01	0.
3	.57467E+00	.58300E+00	-.14492E-01	0.
4	.45090E+00	.45452E+00	-.80405E-02	0.
5	.36644E+00	.36825E+00	-.49338E-02	0.
6	.30412E+00	.30517E+00	-.34297E-02	0.
7	.25613E+00	.25678E+00	-.25576E-02	0.
8	.21816E+00	.21857E+00	-.18719E-02	0.
9	.18757E+00	.18777E+00	-.11061E-02	0.

10	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.76325E+00	.77764E+00	-.18847E-01	0.
2	.65424E+00	.64234E+00	.18192E-01	0.
3	.51228E+00	.50963E+00	.51726E-02	0.
4	.40820E+00	.40841E+00	-.50924E-03	0.
5	.33210E+00	.33277E+00	-.20171E-02	0.
6	.27460E+00	.27522E+00	-.22439E-02	0.
7	.23001E+00	.23049E+00	-.20816E-02	0.
8	.19475E+00	.19508E+00	-.17094E-02	0.
9	.16645E+00	.16663E+00	-.10734E-02	0.

11	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.51228E+00	.52051E+00	-.16050E-01	0.
2	.47835E+00	.47563E+00	.56857E-02	0.
3	.40821E+00	.40476E+00	.84349E-02	0.
4	.33841E+00	.33673E+00	.49722E-02	0.
5	.27976E+00	.27919E+00	.20105E-02	0.
6	.23251E+00	.23245E+00	.26054E-03	0.
7	.19475E+00	.19488E+00	-.62677E-03	0.
8	.16450E+00	.16465E+00	-.91999E-03	0.
9	.14010E+00	.14020E+00	-.71769E-03	0.

12	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.34969E+00	.35312E+00	-.98119E-02	0.
2	.33487E+00	.33492E+00	-.14139E-03	0.
3	.29883E+00	.29707E+00	.59050E-02	0.
4	.25614E+00	.25454E+00	.62310E-02	0.
5	.21578E+00	.21482E+00	.44102E-02	0.
6	.18096E+00	.18052E+00	.24428E-02	0.
7	.15206E+00	.15192E+00	.96358E-03	0.
8	.12844E+00	.12843E+00	.87208E-04	0.
9	.10921E+00	.10924E+00	-.21194E-03	0.

13	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.22063E+00	.22213E+00	-.68075E-02	0.
2	.21345E+00	.21385E+00	-.19101E-02	0.
3	.19476E+00	.19405E+00	.36563E-02	0.
4	.17054E+00	.16955E+00	.58240E-02	0.
5	.14582E+00	.14504E+00	.53497E-02	0.
6	.12335E+00	.12288E+00	.37987E-02	0.
7	.10407E+00	.10384E+00	.21836E-02	0.
8	.88005E-01	.87920E-01	.96230E-03	0.
9	.74796E-01	.74776E-01	.26148E-03	0.

14	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.10710E+00	.10769E+00	-.55375E-02	0.
2	.10407E+00	.10432E+00	-.23732E-02	0.
3	.95966E-01	.95729E-01	.24619E-02	0.
4	.84998E-01	.84550E-01	.52629E-02	0.
5	.73337E-01	.72927E-01	.55949E-02	0.
6	.62391E-01	.62113E-01	.44640E-02	0.
7	.52800E-01	.52647E-01	.29004E-02	0.
8	.44703E-01	.44635E-01	.15276E-02	0.
9	.37995E-01	.37972E-01	.58400E-03	0.

15	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.48248E-11	-.74574E-06	.15456E+06	0.
2	.46944E-11	-.74757E-06	.15925E+06	0.
3	.43423E-11	-.74942E-06	.17259E+06	0.
4	.38598E-11	-.74148E-06	.19210E+06	0.
5	.33402E-11	-.71079E-06	.21280E+06	0.
6	.28474E-11	-.64522E-06	.22660E+06	0.
7	.24123E-11	-.53740E-06	.22278E+06	0.
8	.20434E-11	-.38733E-06	.18955E+06	0.
9	.17368E-11	-.20317E-06	.11698E+06	0.

16	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.10710E+00	-.10769E+00	-.55514E-02	0.
2	-.10407E+00	-.10432E+00	-.23876E-02	0.
3	-.95966E-01	-.95731E-01	.24462E-02	0.
4	-.84998E-01	-.84552E-01	.52452E-02	0.
5	-.73337E-01	-.72928E-01	.55750E-02	0.
6	-.62391E-01	-.62114E-01	.44426E-02	0.
7	-.52800E-01	-.52648E-01	.28792E-02	0.
8	-.44703E-01	-.44636E-01	.15095E-02	0.
9	-.37995E-01	-.37973E-01	.57280E-03	0.

17	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.22063E+00	-.22213E+00	-.68141E-02	0.
2	-.21345E+00	-.21386E+00	-.19171E-02	0.
3	-.19476E+00	-.19405E+00	.36484E-02	0.
4	-.17054E+00	-.16955E+00	.58148E-02	0.
5	-.14582E+00	-.14505E+00	.53390E-02	0.
6	-.12335E+00	-.12288E+00	.37868E-02	0.
7	-.10407E+00	-.10384E+00	.21716E-02	0.
8	-.88005E-01	-.87921E-01	.95187E-03	0.
9	-.74796E-01	-.74776E-01	.25498E-03	0.

18	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.34969E+00	-.35312E+00	-.98159E-02	0.
2	-.33487E+00	-.33492E+00	-.14574E-03	0.
3	-.29883E+00	-.29707E+00	.58998E-02	0.
4	-.25614E+00	-.25454E+00	.62244E-02	0.
5	-.21578E+00	-.21483E+00	.44020E-02	0.
6	-.18096E+00	-.18052E+00	.24333E-02	0.
7	-.15206E+00	-.15192E+00	.95368E-03	0.
8	-.12844E+00	-.12843E+00	.78453E-04	0.
9	-.10921E+00	-.10924E+00	-.21746E-03	0.

19	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.51228E+00	-.52051E+00	-.16052E-01	0.
2	-.47835E+00	-.47563E+00	.56829E-02	0.
3	-.40821E+00	-.40477E+00	.84310E-02	0.
4	-.33841E+00	-.33673E+00	.49667E-02	0.
5	-.27976E+00	-.27919E+00	.20030E-02	0.
6	-.23251E+00	-.23245E+00	.25138E-03	0.
7	-.19475E+00	-.19488E+00	-.63668E-03	0.
8	-.16450E+00	-.16465E+00	-.92894E-03	0.
9	-.14010E+00	-.14020E+00	-.72338E-03	0.

20	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.76325E+00	-.77764E+00	-.18848E-01	0.
2	-.65424E+00	-.64234E+00	.18190E-01	0.
3	-.51228E+00	-.50963E+00	.51696E-02	0.
4	-.40820E+00	-.40841E+00	-.51439E-03	0.
5	-.33210E+00	-.33277E+00	-.20248E-02	0.
6	-.27460E+00	-.27522E+00	-.22540E-02	0.
7	-.23001E+00	-.23049E+00	-.20930E-02	0.
8	-.19475E+00	-.19509E+00	-.17198E-02	0.
9	-.16645E+00	-.16663E+00	-.10801E-02	0.

21	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.31831E+10	-.13054E+01	.10000E+01	0.
2	-.79205E+00	-.80647E+00	-.18214E-01	0.
3	-.57467E+00	-.58300E+00	-.14494E-01	0.
4	-.45090E+00	-.45452E+00	-.80459E-02	0.
5	-.36644E+00	-.36825E+00	-.49429E-02	0.
6	-.30412E+00	-.30517E+00	-.34423E-02	0.
7	-.25613E+00	-.25679E+00	-.25721E-02	0.
8	-.21816E+00	-.21857E+00	-.18854E-02	0.
9	-.18757E+00	-.18777E+00	-.11148E-02	0.

22	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.81642E+00	-.83086E+00	-.17687E-01	0.
2	-.70704E+00	-.69519E+00	.16766E-01	0.
3	-.56399E+00	-.56137E+00	.46462E-02	0.
4	-.45821E+00	-.45842E+00	-.46756E-03	0.
5	-.37990E+00	-.38055E+00	-.17259E-02	0.
6	-.31984E+00	-.32042E+00	-.18406E-02	0.
7	-.27246E+00	-.27291E+00	-.16408E-02	0.
8	-.23432E+00	-.23463E+00	-.13035E-02	0.
9	-.20316E+00	-.20332E+00	-.79933E-03	0.

23	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.61937E+00	-.62771E+00	-.13457E-01	0.
2	-.58467E+00	-.58204E+00	.44863E-02	0.
3	-.51227E+00	-.50888E+00	.66132E-02	0.
4	-.43893E+00	-.43725E+00	.38223E-02	0.
5	-.37571E+00	-.37511E+00	.15996E-02	0.
6	-.32319E+00	-.32307E+00	.38857E-03	0.
7	-.27974E+00	-.27979E+00	-.18042E-03	0.
8	-.24363E+00	-.24372E+00	-.37341E-03	0.
9	-.21342E+00	-.21349E+00	-.30614E-03	0.

24	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.51226E+00	-.51588E+00	-.70484E-02	0.
2	-.49620E+00	-.49640E+00	-.39805E-03	0.
3	-.45654E+00	-.45486E+00	.36973E-02	0.
4	-.40819E+00	-.40658E+00	.39321E-02	0.
5	-.36060E+00	-.35957E+00	.28552E-02	0.
6	-.31750E+00	-.31694E+00	.17557E-02	0.
7	-.27974E+00	-.27947E+00	.95266E-03	0.
8	-.24708E+00	-.24697E+00	.44064E-03	0.
9	-.21896E+00	-.21893E+00	.14908E-03	0.

25	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.44123E+00	-.44300E+00	-.39996E-02	0.
2	-.43220E+00	-.43282E+00	-.14313E-02	0.
3	-.40819E+00	-.40756E+00	.15316E-02	0.
4	-.37570E+00	-.37466E+00	.27680E-02	0.
5	-.34056E+00	-.33964E+00	.27095E-02	0.
6	-.30630E+00	-.30565E+00	.21324E-02	0.
7	-.27459E+00	-.27418E+00	.14782E-02	0.
8	-.24600E+00	-.24578E+00	.90831E-03	0.
9	-.22060E+00	-.22050E+00	.43771E-03	0.

26	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.38950E+00	-.39047E+00	-.24907E-02	0.
2	-.38381E+00	-.38433E+00	-.13787E-02	0.
3	-.36806E+00	-.36790E+00	.44441E-03	0.
4	-.34544E+00	-.34487E+00	.16622E-02	0.
5	-.31934E+00	-.31869E+00	.20521E-02	0.
6	-.29239E+00	-.29183E+00	.18949E-02	0.
7	-.26622E+00	-.26582E+00	.14915E-02	0.
8	-.24171E+00	-.24147E+00	.10187E-02	0.
9	-.21925E+00	-.21913E+00	.53402E-03	0.

27	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.34965E+00	-.35021E+00	-.15775E-02	0.
2	-.34578E+00	-.34615E+00	-.10515E-02	0.
3	-.33484E+00	-.33484E+00	-.29632E-05	0.
4	-.31850E+00	-.31822E+00	.88442E-03	0.
5	-.29880E+00	-.29840E+00	.13291E-02	0.
6	-.27755E+00	-.27717E+00	.13764E-02	0.
7	-.25611E+00	-.25580E+00	.11771E-02	0.
8	-.23533E+00	-.23513E+00	.85586E-03	0.
9	-.21574E+00	-.21564E+00	.46938E-03	0.

28	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.31779E+00	-.31806E+00	-.83826E-03	0.
2	-.31502E+00	-.31521E+00	-.60920E-03	0.
3	-.30706E+00	-.30709E+00	-.10638E-03	0.
4	-.29488E+00	-.29477E+00	.37340E-03	0.
5	-.27972E+00	-.27954E+00	.66097E-03	0.
6	-.26284E+00	-.26265E+00	.73919E-03	0.
7	-.24526E+00	-.24509E+00	.66557E-03	0.
8	-.22773E+00	-.22762E+00	.50282E-03	0.
9	-.21079E+00	-.21073E+00	.28439E-03	0.

#ET=8:48.7 PT=1.6 IO=1.5

ERMS = .11399E-01 ERMIN= .29632E-05 ERMAX= .10000E+01

TABLA IV. 1

PARA EL NUMERO DE ONDA KY = .75000E+00

1	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.17944E+00	.17959E+00	-.86355E-03	.78526E-01
2	.17768E+00	.17779E+00	-.65838E-03	.15574E+00
3	.17259E+00	.17262E+00	-.16595E-03	.15191E+00
4	.16473E+00	.16467E+00	.37511E-03	.14592E+00
5	.15482E+00	.15470E+00	.77968E-03	.13825E+00
6	.14363E+00	.14349E+00	.97435E-03	.12941E+00
7	.13186E+00	.13174E+00	.96723E-03	.11991E+00
8	.12005E+00	.11995E+00	.79476E-03	.11018E+00
9	.10858E+00	.10853E+00	.47948E-03	.19829E+00

2	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.20643E+00	.20674E+00	-.15142E-02	0.
2	.20400E+00	.20422E+00	-.10882E-02	0.
3	.19706E+00	.19708E+00	-.11942E-03	0.
4	.18651E+00	.18635E+00	.87001E-03	0.
5	.17352E+00	.17325E+00	.15421E-02	0.
6	.15923E+00	.15894E+00	.18090E-02	0.
7	.14457E+00	.14432E+00	.17266E-02	0.
8	.13022E+00	.13004E+00	.13800E-02	0.
9	.11660E+00	.11650E+00	.81459E-03	.10396E+00

3	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.23956E+00	.24009E+00	-.21921E-02	0.
2	.23609E+00	.23642E+00	-.14096E-02	0.
3	.22629E+00	.22625E+00	.18331E-03	0.
4	.21178E+00	.21144E+00	.15979E-02	0.
5	.19447E+00	.19400E+00	.23883E-02	0.
6	.17605E+00	.17560E+00	.25658E-02	0.
7	.15775E+00	.15739E+00	.23068E-02	0.
8	.14035E+00	.14010E+00	.17678E-02	0.
9	.12426E+00	.12414E+00	.10150E-02	0.

4	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.28124E+00	.28213E+00	-.31497E-02	0.
2	.27600E+00	.27645E+00	-.16266E-02	0.
3	.26156E+00	.26133E+00	.90552E-03	0.
4	.24099E+00	.24035E+00	.26668E-02	0.
5	.21753E+00	.21681E+00	.33127E-02	0.
6	.19365E+00	.19304E+00	.31733E-02	0.
7	.17086E+00	.17041E+00	.26252E-02	0.
8	.14992E+00	.14964E+00	.18935E-02	0.
9	.13111E+00	.13098E+00	.10442E-02	0.

5	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.33548E+00	.33711E+00	-.48412E-02	0.
2	.32698E+00	.32747E+00	-.15033E-02	0.
3	.30446E+00	.30373E+00	.23948E-02	0.
4	.27429E+00	.27317E+00	.41030E-02	0.
5	.24207E+00	.24107E+00	.41131E-02	0.
6	.21113E+00	.21042E+00	.33889E-02	0.
7	.18301E+00	.18255E+00	.24941E-02	0.
8	.15815E+00	.15789E+00	.16404E-02	0.
9	.13652E+00	.13641E+00	.84477E-03	0.

6	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.40986E+00	.41326E+00	-.83045E-02	0.
2	.39442E+00	.39444E+00	-.51369E-04	0.
3	.35651E+00	.35468E+00	.51196E-02	0.
4	.31076E+00	.30905E+00	.55147E-02	0.
5	.26637E+00	.26525E+00	.42004E-02	0.
6	.22683E+00	.22620E+00	.27806E-02	0.
7	.19283E+00	.19251E+00	.16792E-02	0.
8	.16402E+00	.16387E+00	.90660E-03	0.
9	.13973E+00	.13968E+00	.38087E-03	0.

7	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.52135E+00	.52938E+00	-.15412E-01	0.
2	.48741E+00	.48455E+00	.58638E-02	0.
3	.41707E+00	.41350E+00	.85494E-02	0.
4	.34666E+00	.34484E+00	.52478E-02	0.
5	.28689E+00	.28617E+00	.24931E-02	0.
6	.23810E+00	.23788E+00	.90877E-03	0.
7	.19851E+00	.19849E+00	.91772E-04	0.
8	.16628E+00	.16632E+00	-.26679E-03	0.
9	.13989E+00	.13993E+00	-.29666E-03	0.

8	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.72416E+00	.73815E+00	-.19324E-01	0.
2	.61577E+00	.60360E+00	.19755E-01	0.
3	.47513E+00	.47227E+00	.60135E-02	0.
4	.37253E+00	.37256E+00	-.81227E-04	0.
5	.29781E+00	.29833E+00	-.17236E-02	0.
6	.24154E+00	.24202E+00	-.19879E-02	0.
7	.19800E+00	.19837E+00	-.18563E-02	0.
8	.16367E+00	.16392E+00	-.15434E-02	0.
9	.13621E+00	.13634E+00	-.99573E-03	0.

9	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.31831E+10	.12202E+01	.10000E+01	0.
2	.70885E+00	.72283E+00	-.19725E-01	0.
3	.49405E+00	.50208E+00	-.16253E-01	0.
4	.37349E+00	.37690E+00	-.91444E-02	0.
5	.29257E+00	.29423E+00	-.56578E-02	0.
6	.23392E+00	.23485E+00	-.39822E-02	0.
7	.18959E+00	.19017E+00	-.30368E-02	0.
8	.15522E+00	.15558E+00	-.22978E-02	0.
9	.12810E+00	.12828E+00	-.14169E-02	0.

10	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.68981E+00	.70376E+00	-.20219E-01	0.
2	.58173E+00	.56953E+00	.20978E-01	0.
3	.44200E+00	.43913E+00	.65102E-02	0.
4	.34084E+00	.34087E+00	-.96465E-04	0.
5	.26796E+00	.26849E+00	-.20011E-02	0.
6	.21380E+00	.21431E+00	-.24116E-02	0.
7	.17254E+00	.17294E+00	-.23527E-02	0.
8	.14052E+00	.14081E+00	-.20267E-02	0.
9	.11534E+00	.11549E+00	-.13380E-02	0.

11	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.45182E+00	.45976E+00	-.17571E-01	0.
2	.41854E+00	.41560E+00	.70198E-02	0.
3	.35011E+00	.34650E+00	.10296E-01	0.
4	.28268E+00	.28087E+00	.63968E-02	0.
5	.22673E+00	.22606E+00	.29193E-02	0.
6	.18232E+00	.18218E+00	.75849E-03	0.
7	.14739E+00	.14746E+00	-.43418E-03	0.
8	.11989E+00	.12001E+00	-.93526E-03	0.
9	.98140E-01	.98220E-01	-.81961E-03	0.

12	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.30343E+00	.30668E+00	-.10704E-01	0.
2	.28905E+00	.28895E+00	.36668E-03	0.
3	.25424E+00	.25236E+00	.73868E-02	0.
4	.21331E+00	.21162E+00	.78825E-02	0.
5	.17501E+00	.17399E+00	.58208E-02	0.
6	.14239E+00	.14190E+00	.34788E-02	0.
7	.11571E+00	.11553E+00	.16193E-02	0.
8	.94256E-01	.94216E-01	.41798E-03	0.
9	.77099E-01	.77107E-01	-.10988E-03	0.

13	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.18937E+00	.19077E+00	-.73429E-02	0.
2	.18247E+00	.18278E+00	-.17004E-02	0.
3	.16457E+00	.16379E+00	.47720E-02	0.
4	.14151E+00	.14046E+00	.73982E-02	0.
5	.11818E+00	.11736E+00	.69482E-02	0.
6	.97198E-01	.96697E-01	.51542E-02	0.
7	.79435E-01	.79183E-01	.31772E-02	0.
8	.64858E-01	.64756E-01	.15776E-02	0.
9	.53072E-01	.53043E-01	.54342E-03	0.

14	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.91352E-01	.91892E-01	-.59080E-02	0.
2	.88461E-01	.88660E-01	-.22532E-02	0.
3	.80739E-01	.80466E-01	.33772E-02	0.
4	.70344E-01	.69870E-01	.67350E-02	0.
5	.59377E-01	.58947E-01	.72429E-02	0.
6	.49185E-01	.48891E-01	.59762E-02	0.
7	.40363E-01	.40198E-01	.40909E-02	0.
8	.33021E-01	.32944E-01	.23245E-02	0.
9	.27037E-01	.27010E-01	.98662E-03	0.

15	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.41070E-11	-.18000E-05	.43828E+06	0.
2	.39827E-11	-.17843E-05	.44802E+06	0.
3	.36479E-11	-.17346E-05	.47551E+06	0.
4	.31914E-11	-.16437E-05	.51503E+06	0.
5	.27033E-11	-.15026E-05	.55583E+06	0.
6	.22448E-11	-.13041E-05	.58091E+06	0.
7	.18449E-11	-.10458E-05	.56687E+06	0.
8	.15105E-11	-.73286E-06	.48518E+06	0.
9	.12371E-11	-.37785E-06	.30544E+06	0.

16	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.91352E-01	-.91895E-01	-.59479E-02	0.
2	-.88461E-01	-.88664E-01	-.22941E-02	0.
3	-.80739E-01	-.80470E-01	.33336E-02	0.
4	-.70344E-01	-.69874E-01	.66874E-02	0.
5	-.59377E-01	-.58950E-01	.71912E-02	0.
6	-.49185E-01	-.48894E-01	.59218E-02	0.
7	-.40363E-01	-.40200E-01	.40376E-02	0.
8	-.33021E-01	-.32946E-01	.22787E-02	0.
9	-.27037E-01	-.27011E-01	.95775E-03	0.

17	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.18937E+00	-.19077E+00	-.73628E-02	0.
2	-.18247E+00	-.18279E+00	-.17209E-02	0.
3	-.16457E+00	-.16379E+00	.47497E-02	0.
4	-.14151E+00	-.14047E+00	.73733E-02	0.
5	-.11818E+00	-.11736E+00	.69204E-02	0.
6	-.97198E-01	-.96700E-01	.51245E-02	0.
7	-.79435E-01	-.79185E-01	.31477E-02	0.
8	-.64858E-01	-.64757E-01	.15520E-02	0.
9	-.53072E-01	-.53044E-01	.52722E-03	0.

18	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.30343E+00	-.30668E+00	-.10717E-01	0.
2	-.28905E+00	-.28895E+00	.35305E-03	0.
3	-.25424E+00	-.25236E+00	.73714E-02	0.
4	-.21331E+00	-.21163E+00	.78645E-02	0.
5	-.17501E+00	-.17400E+00	.58000E-02	0.
6	-.14239E+00	-.14190E+00	.34559E-02	0.
7	-.11571E+00	-.11553E+00	.15960E-02	0.
8	-.94256E-01	-.94218E-01	.39756E-03	0.
9	-.77099E-01	-.77108E-01	-.12292E-03	0.

19	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.45182E+00	-.45977E+00	-.17580E-01	0.
2	-.41854E+00	-.41561E+00	.70098E-02	0.
3	-.35011E+00	-.34651E+00	.10284E-01	0.
4	-.28268E+00	-.28087E+00	.63817E-02	0.
5	-.22673E+00	-.22607E+00	.29009E-02	0.
6	-.18232E+00	-.18218E+00	.73734E-03	0.
7	-.14739E+00	-.14746E+00	-.45621E-03	0.
8	-.11989E+00	-.12001E+00	-.95492E-03	0.
9	-.98140E-01	-.98222E-01	-.83226E-03	0.

20	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.68981E+00	-.70376E+00	-.20226E-01	0.
2	-.58173E+00	-.56953E+00	.20970E-01	0.
3	-.44200E+00	-.43913E+00	.64997E-02	0.
4	-.34084E+00	-.34087E+00	-.11083E-03	0.
5	-.26796E+00	-.26850E+00	-.20197E-02	0.
6	-.21380E+00	-.21432E+00	-.24339E-02	0.
7	-.17254E+00	-.17295E+00	-.23765E-02	0.
8	-.14052E+00	-.14081E+00	-.20482E-02	0.
9	-.11534E+00	-.11549E+00	-.13519E-02	0.

21	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.31831E+10	-.12202E+01	.10000E+01	0.
2	-.70885E+00	-.72283E+00	-.19731E-01	0.
3	-.49405E+00	-.50208E+00	-.16263E-01	0.
4	-.37349E+00	-.37691E+00	-.91596E-02	0.
5	-.29257E+00	-.29424E+00	-.56787E-02	0.
6	-.23392E+00	-.23486E+00	-.40082E-02	0.
7	-.18959E+00	-.19017E+00	-.30653E-02	0.
8	-.15522E+00	-.15558E+00	-.23240E-02	0.
9	-.12810E+00	-.12828E+00	-.14339E-02	0.

22	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.72416E+00	-.73816E+00	-.19329E-01	0.
2	-.61577E+00	-.60361E+00	.19748E-01	0.
3	-.47513E+00	-.47228E+00	.60021E-02	0.
4	-.37253E+00	-.37257E+00	-.99290E-04	0.
5	-.29781E+00	-.29833E+00	-.17497E-02	0.
6	-.24154E+00	-.24203E+00	-.20215E-02	0.
7	-.19800E+00	-.19838E+00	-.18937E-02	0.
8	-.16367E+00	-.16393E+00	-.15780E-02	0.
9	-.13621E+00	-.13635E+00	-.10182E-02	0.

23	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.52135E+00	-.52939E+00	-.15417E-01	0.
2	-.48741E+00	-.48455E+00	.58567E-02	0.
3	-.41707E+00	-.41351E+00	.85362E-02	0.
4	-.34666E+00	-.34484E+00	.52245E-02	0.
5	-.28689E+00	-.28618E+00	.24575E-02	0.
6	-.23810E+00	-.23790E+00	.86183E-03	0.
7	-.19851E+00	-.19850E+00	.38937E-04	0.
8	-.16628E+00	-.16633E+00	-.31567E-03	0.
9	-.13989E+00	-.13994E+00	-.32834E-03	0.

24	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.40986E+00	-.41326E+00	-.83043E-02	0.
2	-.39442E+00	-.39444E+00	-.54863E-04	0.
3	-.35651E+00	-.35469E+00	.51051E-02	0.
4	-.31076E+00	-.30906E+00	.54829E-02	0.
5	-.26637E+00	-.26526E+00	.41481E-02	0.
6	-.22683E+00	-.22621E+00	.27103E-02	0.
7	-.19283E+00	-.19252E+00	.15999E-02	0.
8	-.16402E+00	-.16388E+00	.83355E-03	0.
9	-.13973E+00	-.13968E+00	.33391E-03	0.

25	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.33548E+00	-.33710E+00	-.48243E-02	0.
2	-.32698E+00	-.32747E+00	-.14939E-02	0.
3	-.30446E+00	-.30374E+00	.23821E-02	0.
4	-.27429E+00	-.27318E+00	.40577E-02	0.
5	-.24207E+00	-.24109E+00	.40317E-02	0.
6	-.21113E+00	-.21044E+00	.32775E-02	0.
7	-.18301E+00	-.18257E+00	.23691E-02	0.
8	-.15815E+00	-.15791E+00	.15266E-02	0.
9	-.13652E+00	-.13642E+00	.77246E-03	0.

26	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.28124E+00	-.28211E+00	-.30904E-02	0.
2	-.27600E+00	-.27644E+00	-.15841E-02	0.
3	-.26156E+00	-.26133E+00	.90183E-03	0.
4	-.24099E+00	-.24036E+00	.25990E-02	0.
5	-.21753E+00	-.21684E+00	.31791E-02	0.
6	-.19365E+00	-.19307E+00	.29894E-02	0.
7	-.17086E+00	-.17045E+00	.24214E-02	0.
8	-.14992E+00	-.14966E+00	.17110E-02	0.
9	-.13111E+00	-.13099E+00	.92992E-03	0.

27	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.23956E+00	-.24005E+00	-.20349E-02	0.
2	-.23609E+00	-.23639E+00	-.12899E-02	0.
3	-.22629E+00	-.22624E+00	.20369E-03	0.
4	-.21178E+00	-.21146E+00	.14893E-02	0.
5	-.19447E+00	-.19405E+00	.21580E-02	0.
6	-.17605E+00	-.17565E+00	.22518E-02	0.
7	-.15775E+00	-.15744E+00	.19668E-02	0.
8	-.14035E+00	-.14014E+00	.14701E-02	0.
9	-.12426E+00	-.12416E+00	.83149E-03	0.

28	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.20643E+00	-.20666E+00	-.11381E-02	0.
2	-.20400E+00	-.20416E+00	-.79806E-03	0.
3	-.19706E+00	-.19707E+00	-.47426E-04	0.
4	-.18651E+00	-.18638E+00	.67909E-03	0.
5	-.17352E+00	-.17333E+00	.11269E-02	0.
6	-.15923E+00	-.15903E+00	.12599E-02	0.
7	-.14457E+00	-.14441E+00	.11529E-02	0.
8	-.13022E+00	-.13010E+00	.89168E-03	0.
9	-.11660E+00	-.11654E+00	.51816E-03	0.

#ET=8:38.6 PT=1.5 IO=1.8

ERMS = .12138E-01 ERMIN= .38937E-04 ERMAX= .10000E+01

TABLA IV. 1

PARA EL NUMERO DE ONDA KY = .50000E+01

1	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.35486E-02	.36201E-02	-.20136E-01	.10158E-02
2	.34270E-02	.34852E-02	-.16971E-01	.19700E-02
3	.30919E-02	.31207E-02	-.93025E-02	.17984E-02
4	.26184E-02	.26192E-02	-.28701E-03	.15504E-02
5	.20955E-02	.20787E-02	.80039E-02	.12683E-02
6	.15966E-02	.15709E-02	.16080E-01	.98952E-03
7	.11662E-02	.11302E-02	.30885E-01	.73967E-03
8	.82112E-03	.74987E-03	.86766E-01	.53106E-03
9	.55847E-03	.35284E-03	.36820E+00	0.

2	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.62362E-02	.63835E-02	-.23617E-01	0.
2	.59897E-02	.61013E-02	-.18627E-01	0.
3	.53211E-02	.53601E-02	-.73342E-02	0.
4	.44032E-02	.43817E-02	.48760E-02	0.
5	.34270E-02	.33761E-02	.14852E-01	0.
6	.25347E-02	.24779E-02	.22412E-01	0.
7	.17984E-02	.17430E-02	.30780E-01	0.
8	.12332E-02	.11728E-02	.48912E-01	0.
9	.82112E-03	.74970E-03	.86981E-01	.53106E-03

3	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.11056E-01	.11307E-01	-.22673E-01	0.
2	.10540E-01	.10702E-01	-.15312E-01	0.
3	.91706E-02	.91767E-02	-.67318E-03	0.
4	.73626E-02	.72669E-02	.13003E-01	0.
5	.55329E-02	.54102E-02	.22170E-01	0.
6	.39472E-02	.38410E-02	.26898E-01	0.
7	.27056E-02	.26268E-02	.29120E-01	0.
8	.17984E-02	.17420E-02	.31320E-01	0.
9	.11662E-02	.11295E-02	.31527E-01	0.

4	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.19845E-01	.20268E-01	-.21335E-01	0.
2	.18715E-01	.18897E-01	-.97061E-02	0.
3	.15814E-01	.15672E-01	.89621E-02	0.
4	.12194E-01	.11916E-01	.22800E-01	0.
5	.87662E-02	.85094E-02	.29294E-01	0.
6	.59897E-02	.58093E-02	.30116E-01	0.
7	.39472E-02	.38379E-02	.27693E-01	0.
8	.25347E-02	.24745E-02	.23745E-01	0.
9	.15966E-02	.15689E-02	.17356E-01	0.

5	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.36253E-01	.37039E-01	-.21679E-01	0.
2	.33620E-01	.33670E-01	-.14846E-02	0.
3	.27204E-01	.26619E-01	.21506E-01	0.
4	.19845E-01	.19192E-01	.32872E-01	0.
5	.13492E-01	.13030E-01	.34276E-01	0.
6	.87662E-02	.85013E-02	.30217E-01	0.
7	.55329E-02	.54003E-02	.23968E-01	0.
8	.34270E-02	.33679E-02	.17248E-01	0.
9	.20955E-02	.20742E-02	.10165E-01	0.

6	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.68056E-01	.69807E-01	-.25723E-01	0.
2	.61291E-01	.60543E-01	.12212E-01	0.
3	.46290E-01	.44595E-01	.36618E-01	0.
4	.31258E-01	.30004E-01	.40128E-01	0.
5	.19845E-01	.19174E-01	.33809E-01	0.
6	.12194E-01	.11891E-01	.24804E-01	0.
7	.73626E-02	.72440E-02	.16107E-01	0.
8	.44032E-02	.43647E-02	.87462E-02	0.
9	.26184E-02	.26102E-02	.31508E-02	0.

7	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.13402E+00	.13855E+00	-.33858E-01	0.
2	.11349E+00	.10924E+00	.37490E-01	0.
3	.76121E-01	.72362E-01	.49377E-01	0.
4	.46290E-01	.44555E-01	.37479E-01	0.
5	.27204E-01	.26564E-01	.23511E-01	0.
6	.15814E-01	.15618E-01	.12399E-01	0.
7	.91706E-02	.91311E-02	.43067E-02	0.
8	.53211E-02	.53277E-02	-.12518E-02	0.
9	.30919E-02	.31040E-02	-.39055E-02	0.

8	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.29425E+00	.30057E+00	-.21484E-01	0.
2	.20789E+00	.19279E+00	.72619E-01	0.
3	.11349E+00	.10915E+00	.38211E-01	0.
4	.61291E-01	.60428E-01	.14089E-01	0.
5	.33620E-01	.33551E-01	.20556E-02	0.
6	.18715E-01	.18791E-01	-.40259E-02	0.
7	.10540E-01	.10617E-01	-.72920E-02	0.
8	.59897E-02	.60431E-02	-.89173E-02	0.
9	.34270E-02	.34556E-02	-.83479E-02	0.

9	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.31831E+10	.75329E+00	.10000E+01	0.
2	.29425E+00	.30041E+00	-.20936E-01	0.
3	.13402E+00	.13832E+00	-.32121E-01	0.
4	.68056E-01	.69559E-01	-.22080E-01	0.
5	.36253E-01	.36809E-01	-.15335E-01	0.
6	.19845E-01	.20074E-01	-.11564E-01	0.
7	.11056E-01	.11158E-01	-.91845E-02	0.
8	.62362E-02	.62827E-02	-.74673E-02	0.
9	.35486E-02	.35693E-02	-.58324E-02	0.

10	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.29358E+00	.30011E+00	-.22215E-01	0.
2	.20724E+00	.19234E+00	.71898E-01	0.
3	.11289E+00	.10874E+00	.36763E-01	0.
4	.60760E-01	.60067E-01	.11416E-01	0.
5	.33174E-01	.33253E-01	-.23864E-02	0.
6	.18715E-01	.18558E-01	.83905E-02	0.
7	.10540E-01	.10447E-01	.88473E-02	0.
8	.59897E-02	.59313E-02	.97527E-02	0.
9	.34270E-02	.33997E-02	.79637E-02	0.

11	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.13285E+00	.13748E+00	-.34820E-01	0.
2	.11236E+00	.10819E+00	.37072E-01	0.
3	.75076E-01	.71409E-01	.48846E-01	0.
4	.45377E-01	.43733E-01	.36217E-01	0.
5	.26445E-01	.25893E-01	.20852E-01	0.
6	.15212E-01	.15098E-01	.74640E-02	0.
7	.87135E-02	.87523E-02	-.44513E-02	0.
8	.53211E-02	.50785E-02	.45591E-01	0.
9	.30919E-02	.29782E-02	.36765E-01	0.

12	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.66024E-01	.67782E-01	-.26627E-01	0.
2	.59321E-01	.58587E-01	.12383E-01	0.
3	.44491E-01	.42826E-01	.37442E-01	0.
4	.29708E-01	.28498E-01	.40713E-01	0.
5	.18576E-01	.17961E-01	.33124E-01	0.
6	.11204E-01	.10963E-01	.21474E-01	0.
7	.66230E-02	.65735E-02	.74593E-02	0.
8	.38721E-02	.39217E-02	-.12801E-01	0.
9	.26184E-02	.23809E-02	.90713E-01	0.

13	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.32704E-01	.33426E-01	-.22076E-01	0.
2	.30193E-01	.30195E-01	-.63337E-04	0.
3	.24112E-01	.23515E-01	.24768E-01	0.
4	.17226E-01	.16597E-01	.36539E-01	0.
5	.11397E-01	.10980E-01	.36568E-01	0.
6	.71696E-02	.69619E-02	.28976E-01	0.
7	.43666E-02	.43001E-02	.15231E-01	0.
8	.26059E-02	.26343E-02	-.10886E-01	0.
9	.15370E-02	.16685E-02	-.85538E-01	0.

14	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.13609E-01	.13889E-01	-.20598E-01	0.
2	.12726E-01	.12801E-01	-.59120E-02	0.
3	.10493E-01	.10320E-01	.16509E-01	0.
4	.77904E-02	.75441E-02	.31619E-01	0.
5	.53392E-02	.51455E-02	.36271E-01	0.
6	.34550E-02	.33443E-02	.32045E-01	0.
7	.21488E-02	.21058E-02	.20004E-01	0.
8	.13015E-02	.13053E-02	-.29261E-02	0.
9	.77546E-03	.80760E-03	-.41448E-01	0.

15	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.58132E-12	.56849E-08	-.97782E+04	0.
2	.54571E-12	.51645E-08	-.94628E+04	0.
3	.45447E-12	.37284E-08	-.82028E+04	0.
4	.34164E-12	.17221E-08	-.50396E+04	0.
5	.23696E-12	-.36851E-09	.15561E+04	0.
6	.15486E-12	-.20345E-08	.13139E+05	0.
7	.97038E-13	-.28729E-08	.29607E+05	0.
8	.59093E-13	-.27006E-08	.45702E+05	0.
9	.35339E-13	-.16191E-08	.45818E+05	0.

16	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.13609E-01	-.13889E-01	-.20597E-01	0.
2	-.12726E-01	-.12801E-01	-.59110E-02	0.
3	-.10493E-01	-.10320E-01	.16510E-01	0.
4	-.77904E-02	-.75441E-02	.31620E-01	0.
5	-.53392E-02	-.51455E-02	.36271E-01	0.
6	-.34550E-02	-.33443E-02	.32043E-01	0.
7	-.21488E-02	-.21058E-02	.20001E-01	0.
8	-.13015E-02	-.13053E-02	-.29315E-02	0.
9	-.77546E-03	-.80760E-03	-.41453E-01	0.

17	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.32704E-01	-.33426E-01	-.22075E-01	0.
2	-.30193E-01	-.30195E-01	-.62670E-04	0.
3	-.24112E-01	-.23515E-01	.24769E-01	0.
4	-.17226E-01	-.16597E-01	.36539E-01	0.
5	-.11397E-01	-.10980E-01	.36568E-01	0.
6	-.71696E-02	-.69619E-02	.28974E-01	0.
7	-.43666E-02	-.43001E-02	.15228E-01	0.
8	-.26059E-02	-.26343E-02	-.10891E-01	0.
9	-.15370E-02	-.16685E-02	-.85543E-01	0.

18	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.66024E-01	-.67782E-01	-.26627E-01	0.
2	-.59321E-01	-.58587E-01	.12384E-01	0.
3	-.44491E-01	-.42825E-01	.37443E-01	0.
4	-.29708E-01	-.28498E-01	.40714E-01	0.
5	-.18576E-01	-.17961E-01	.33124E-01	0.
6	-.11204E-01	-.10963E-01	.21472E-01	0.
7	-.66230E-02	-.65736E-02	.74551E-02	0.
8	-.38721E-02	-.39217E-02	-.12807E-01	0.
9	-.26184E-02	-.23809E-02	.90707E-01	0.

19	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.13285E+00	-.13748E+00	-.34819E-01	0.
2	-.11236E+00	-.10819E+00	.37073E-01	0.
3	-.75076E-01	-.71409E-01	.48847E-01	0.
4	-.45377E-01	-.43733E-01	.36218E-01	0.
5	-.26445E-01	-.25893E-01	.20851E-01	0.
6	-.15212E-01	-.15098E-01	.74611E-02	0.
7	-.87135E-02	-.87523E-02	-.44579E-02	0.
8	-.53211E-02	-.50785E-02	.45581E-01	0.
9	-.30919E-02	-.29783E-02	.36754E-01	0.

20	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.29358E+00	-.30011E+00	-.22214E-01	0.
2	-.20724E+00	-.19234E+00	.71899E-01	0.
3	-.11289E+00	-.10874E+00	.36761E-01	0.
4	-.60760E-01	-.60067E-01	.11416E-01	0.
5	-.33174E-01	-.33253E-01	-.23876E-02	0.
6	-.18715E-01	-.18558E-01	.83856E-02	0.
7	-.10540E-01	-.10447E-01	.88361E-02	0.
8	-.59897E-02	-.59314E-02	.97343E-02	0.
9	-.34270E-02	-.33998E-02	.79442E-02	0.

21	P: TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.31831E+10	-.75329E+00	.10000E+01	0.
2	-.29425E+00	-.30041E+00	-.20935E-01	0.
3	-.13402E+00	-.13832E+00	-.32120E-01	0.
4	-.68056E-01	-.69558E-01	-.22079E-01	0.
5	-.36253E-01	-.36809E-01	-.15337E-01	0.
6	-.19845E-01	-.20074E-01	-.11573E-01	0.
7	-.11056E-01	-.11158E-01	-.92067E-02	0.
8	-.62362E-02	-.62830E-02	-.75043E-02	0.
9	-.35486E-02	-.35695E-02	-.58722E-02	0.

22	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.29425E+00	-.30057E+00	-.21483E-01	0.
2	-.20789E+00	-.19279E+00	.72622E-01	0.
3	-.11349E+00	-.10915E+00	.38214E-01	0.
4	-.61291E-01	-.60428E-01	.14090E-01	0.
5	-.33620E-01	-.33551E-01	.20507E-02	0.
6	-.18715E-01	-.18791E-01	-.40463E-02	0.
7	-.10540E-01	-.10618E-01	-.73400E-02	0.
8	-.59897E-02	-.60436E-02	-.89983E-02	0.
9	-.34270E-02	-.34559E-02	-.84360E-02	0.

23	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.13402E+00	-.13855E+00	-.33849E-01	0.
2	-.11349E+00	-.10923E+00	.37498E-01	0.
3	-.76121E-01	-.72362E-01	.49385E-01	0.
4	-.46290E-01	-.44555E-01	.37483E-01	0.
5	-.27204E-01	-.26565E-01	.23499E-01	0.
6	-.15814E-01	-.15619E-01	.12350E-01	0.
7	-.91706E-02	-.91321E-02	.41937E-02	0.
8	-.53211E-02	-.53287E-02	-.14442E-02	0.
9	-.30919E-02	-.31046E-02	-.41178E-02	0.

24	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.68056E-01	-.69804E-01	-.25691E-01	0.
2	-.61291E-01	-.60541E-01	.12244E-01	0.
3	-.46290E-01	-.44593E-01	.36645E-01	0.
4	-.31258E-01	-.30003E-01	.40139E-01	0.
5	-.19845E-01	-.19175E-01	.33776E-01	0.
6	-.12194E-01	-.11893E-01	.24680E-01	0.
7	-.73626E-02	-.72461E-02	.15821E-01	0.
8	-.44032E-02	-.43668E-02	.82524E-02	0.
9	-.26184E-02	-.26116E-02	.25918E-02	0.

25	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.36253E-01	-.37034E-01	-.21560E-01	0.
2	-.33620E-01	-.33666E-01	-.13714E-02	0.
3	-.27204E-01	-.26616E-01	.21596E-01	0.
4	-.19845E-01	-.19192E-01	.32904E-01	0.
5	-.13492E-01	-.13031E-01	.34185E-01	0.
6	-.87662E-02	-.85043E-02	.29883E-01	0.
7	-.55329E-02	-.54045E-02	.23206E-01	0.
8	-.34270E-02	-.33726E-02	.15892E-01	0.
9	-.20955E-02	-.20776E-02	.85473E-02	0.

26	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.19845E-01	-.20260E-01	-.20905E-01	0.
2	-.18715E-01	-.18890E-01	-.93072E-02	0.
3	-.15814E-01	-.15668E-01	.92584E-02	0.
4	-.12194E-01	-.11914E-01	.22895E-01	0.
5	-.87662E-02	-.85117E-02	.29028E-01	0.
6	-.59897E-02	-.58148E-02	.29202E-01	0.
7	-.39472E-02	-.38461E-02	.25606E-01	0.
8	-.25347E-02	-.24845E-02	.19810E-01	0.
9	-.15966E-02	-.15772E-02	.12158E-01	0.

27	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.11056E-01	-.11290E-01	-.21131E-01	0.
2	-.10540E-01	-.10687E-01	-.13918E-01	0.
3	-.91706E-02	-.91679E-02	.29161E-03	0.
4	-.73626E-02	-.72649E-02	.13266E-01	0.
5	-.55329E-02	-.54145E-02	.21387E-01	0.
6	-.39472E-02	-.38508E-02	.24421E-01	0.
7	-.27056E-02	-.26421E-02	.23446E-01	0.
8	-.17984E-02	-.17632E-02	.19535E-01	0.
9	-.11662E-02	-.11514E-02	.12742E-01	0.

28	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.62362E-02	-.63489E-02	-.18082E-01	0.
2	-.59897E-02	-.60722E-02	-.13769E-01	0.
3	-.53211E-02	-.53438E-02	-.42727E-02	0.
4	-.44032E-02	-.43792E-02	.54501E-02	0.
5	-.34270E-02	-.33844E-02	.12451E-01	0.
6	-.25347E-02	-.24943E-02	.15941E-01	0.
7	-.17984E-02	-.17690E-02	.16307E-01	0.
8	-.12332E-02	-.12157E-02	.14169E-01	0.
9	-.82112E-03	-.81332E-03	.95037E-02	0.

#ET=8:44.3 PT=1.5 IO=1.6

ERMS = .32248E-01 ERMIN= .62670E-04 ERMAX= .10000E+01

TABLA IV.2

NO. DE ONDA	ERMS	ERMIN	ERMAX
.50000E-02	.11397E-01	.27632E-05	.10000E+01
.20000E+00	.11480E-01	.94109E-05	.10000E+01
.50000E+00	.11671E-01	.40107E-06	.10000E+01
.75000E+00	.12330E-01	.38937E-04	.10000E+01
.10000E+01	.12579E-01	.24972E-05	.10000E+01
.15000E+01	.13716E-01	.38465E-04	.10000E+01
.20000E+01	.15480E-01	.27770E-04	.10000E+01
.50000E+01	.32240E-01	.62670E-04	.10000E+01

TET=3:55.7 PT=0.2 IO=0.1

Con el número de onda Ky aumenta el error cuadrático medio. Esto se debe a que para mayores números de onda, el argumento de la función Ko (función Bessel modificada de orden cero), es mayor y, por tanto, su valor es más próximo a cero. El cálculo numérico también da números pequeños, pero el error aumenta, pues la aproximación discreta no es capaz de diferenciar cambios de curvatura de la magnitud de los que se encuentran al final de la función Ko. En todo caso, se conserva la tendencia asintótica hacia cero, también en el caso numérico.

TABLA IV.3

1	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.69444E+00	.69175E+00	.38737E-02	.10158E-02
2	.68565E+00	.68262E+00	.44159E-02	.19700E-02
3	.66052E+00	.65673E+00	.57362E-02	.17984E-02
4	.62241E+00	.61789E+00	.72720E-02	.15504E-02
5	.57571E+00	.57074E+00	.86236E-02	.12683E-02
6	.52471E+00	.51962E+00	.97028E-02	.98952E-03
7	.47295E+00	.46786E+00	.10775E-01	.73967E-03
8	.42294E+00	.41748E+00	.12906E-01	.53106E-03
9	.37621E+00	.36818E+00	.21335E-01	0.

2	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.84034E+00	.83891E+00	.16983E-02	0.
2	.82699E+00	.82473E+00	.27410E-02	0.
3	.78940E+00	.78537E+00	.51001E-02	0.
4	.73378E+00	.72823E+00	.75690E-02	0.
5	.66775E+00	.66145E+00	.94391E-02	0.
6	.59814E+00	.59180E+00	.10604E-01	0.
7	.52995E+00	.52395E+00	.11327E-01	0.
8	.46622E+00	.46060E+00	.12056E-01	0.
9	.40847E+00	.40315E+00	.13028E-01	.53106E-03

3	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.10417E+01	.10417E+01	-.47178E-05	0.
2	.10202E+01	.10183E+01	.18590E-02	0.
3	.96097E+00	.95563E+00	.55473E-02	0.
4	.87642E+00	.86870E+00	.88075E-02	0.
5	.78041E+00	.77201E+00	.10770E-01	0.
6	.68382E+00	.67590E+00	.11579E-01	0.
7	.59331E+00	.58637E+00	.11698E-01	0.
8	.51205E+00	.50617E+00	.11497E-01	0.
9	.44098E+00	.43615E+00	.10968E-01	0.

4	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.13333E+01	.13350E+01	-.12863E-02	0.
2	.12960E+01	.12930E+01	.22853E-02	0.
3	.11961E+01	.11868E+01	.78348E-02	0.
4	.10613E+01	.10491E+01	.11461E-01	0.
5	.91758E+00	.90589E+00	.12737E-01	0.
6	.78176E+00	.77192E+00	.12581E-01	0.
7	.66138E+00	.65355E+00	.11850E-01	0.
8	.55835E+00	.55222E+00	.10979E-01	0.
9	.47176E+00	.46705E+00	.99805E-02	0.

5	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.17857E+01	.17889E+01	-.18050E-02	0.
2	.17129E+01	.17029E+01	.58433E-02	0.
3	.15290E+01	.15083E+01	.13535E-01	0.
4	.13016E+01	.12808E+01	.15948E-01	0.
5	.10810E+01	.10647E+01	.15022E-01	0.
6	.88906E+00	.87741E+00	.13104E-01	0.
7	.73022E+00	.72194E+00	.11330E-01	0.
8	.60147E+00	.59547E+00	.99825E-02	0.
9	.49786E+00	.49342E+00	.89267E-02	0.

6	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.25641E+01	.25645E+01	-.15052E-03	0.
2	.23953E+01	.23527E+01	.17797E-01	0.
3	.20132E+01	.19628E+01	.25048E-01	0.
4	.16075E+01	.15725E+01	.21781E-01	0.
5	.12648E+01	.12441E+01	.16342E-01	0.
6	.99703E+00	.98495E+00	.12118E-01	0.
7	.79228E+00	.78474E+00	.95146E-02	0.
8	.63578E+00	.63062E+00	.81096E-02	0.
9	.51529E+00	.51146E+00	.74286E-02	0.

7	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.41667E+01	.41173E+01	.11851E-01	0.
2	.36417E+01	.34520E+01	.52085E-01	0.
3	.27135E+01	.25973E+01	.42830E-01	0.
4	.19650E+01	.19155E+01	.25209E-01	0.
5	.14455E+01	.14253E+01	.13959E-01	0.
6	.10877E+01	.10786E+01	.83850E-02	0.
7	.83578E+00	.83074E+00	.60293E-02	0.
8	.65379E+00	.65032E+00	.53066E-02	0.
9	.51930E+00	.51648E+00	.54448E-02	0.

8	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.90909E+01	.81665E+01	.10169E+00	0.
2	.61657E+01	.53745E+01	.12832E+00	0.
3	.35777E+01	.33946E+01	.51170E-01	0.
4	.22852E+01	.22466E+01	.16917E-01	0.
5	.15710E+01	.15627E+01	.52961E-02	0.
6	.11336E+01	.11313E+01	.19971E-02	0.
7	.84590E+00	.84456E+00	.15920E-02	0.
8	.64725E+00	.64582E+00	.22039E-02	0.
9	.50513E+00	.50348E+00	.32774E-02	0.

9	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.50000E+09	.24552E+02	.10000E+01	0.
2	.90050E+01	.81363E+01	.96465E-01	0.
3	.40194E+01	.39949E+01	.60984E-02	0.
4	.23755E+01	.23856E+01	-.42387E-02	0.
5	.15715E+01	.15783E+01	-.43256E-02	0.
6	.11056E+01	.11087E+01	-.28726E-02	0.
7	.80917E+00	.81021E+00	-.12810E-02	0.
8	.60934E+00	.60923E+00	.17851E-03	0.
9	.46913E+00	.46844E+00	.14821E-02	0.

10	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.88889E+01	.81015E+01	.88582E-01	0.
2	.59668E+01	.52359E+01	.12248E+00	0.
3	.33875E+01	.32269E+01	.47406E-01	0.
4	.21082E+01	.20777E+01	.14438E-01	0.
5	.14100E+01	.14050E+01	.35785E-02	0.
6	.98988E+00	.98929E+00	.58890E-03	0.
7	.71949E+00	.71937E+00	.16700E-03	0.
8	.53716E+00	.53691E+00	.44846E-03	0.
9	.40989E+00	.40970E+00	.46583E-03	0.

11	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.37500E+01	.37773E+01	-.72911E-02	0.
2	.32318E+01	.30905E+01	.43707E-01	0.
3	.23229E+01	.22299E+01	.40001E-01	0.
4	.16031E+01	.15640E+01	.24357E-01	0.
5	.11180E+01	.11030E+01	.13416E-01	0.
6	.79696E+00	.79105E+00	.74108E-02	0.
7	.58114E+00	.57862E+00	.43264E-02	0.
8	.43288E+00	.43176E+00	.25943E-02	0.
9	.32879E+00	.32868E+00	.35225E-03	0.

12	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.19048E+01	.19424E+01	-.19758E-01	0.
2	.17481E+01	.17335E+01	.83204E-02	0.
3	.13999E+01	.13663E+01	.24034E-01	0.
4	.10440E+01	.10188E+01	.24106E-01	0.
5	.75965E+00	.74546E+00	.18680E-01	0.
6	.55251E+00	.54532E+00	.13011E-01	0.
7	.40606E+00	.40254E+00	.86682E-02	0.
8	.30291E+00	.30115E+00	.58266E-02	0.
9	.22969E+00	.22862E+00	.46464E-02	0.

13	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.83333E+00	.85079E+00	-.20943E-01	0.
2	.78137E+00	.78424E+00	-.36790E-02	0.
3	.65493E+00	.64537E+00	.14599E-01	0.
4	.50929E+00	.49825E+00	.21667E-01	0.
5	.38102E+00	.37319E+00	.20544E-01	0.
6	.28137E+00	.27682E+00	.16172E-01	0.
7	.20824E+00	.20583E+00	.11591E-01	0.
8	.15570E+00	.15442E+00	.81697E-02	0.
9	.11803E+00	.11724E+00	.67530E-02	0.

14	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	.43656E-10	.26487E-05	-.60672E+05	0.
2	.29104E-10	.26366E-05	-.90590E+05	0.
3	.29104E-10	.25900E-05	-.88991E+05	0.
4	.14552E-10	.29516E-05	-.20283E+06	0.
5	.14552E-10	.28253E-05	-.19415E+06	0.
6	.14552E-10	.25350E-05	-.17421E+06	0.
7	0.	.20858E-05	-.20858E-05	0.
8	0.	.14885E-05	-.14885E-05	0.
9	0.	.77585E-06	-.77585E-06	0.

15	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.83333E+00	-.85078E+00	-.20936E-01	0.
2	-.78137E+00	-.78423E+00	-.36710E-02	0.
3	-.65493E+00	-.64536E+00	.14609E-01	0.
4	-.50929E+00	-.49825E+00	.21679E-01	0.
5	-.38102E+00	-.37318E+00	.20561E-01	0.
6	-.28137E+00	-.27681E+00	.16192E-01	0.
7	-.20824E+00	-.20582E+00	.11613E-01	0.
8	-.15570E+00	-.15442E+00	.81908E-02	0.
9	-.11803E+00	-.11724E+00	.67675E-02	0.

16	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.19048E+01	-.19424E+01	-.19755E-01	0.
2	-.17481E+01	-.17335E+01	.83239E-02	0.
3	-.13999E+01	-.13662E+01	.24039E-01	0.
4	-.10440E+01	-.10188E+01	.24113E-01	0.
5	-.75965E+00	-.74546E+00	.18689E-01	0.
6	-.55251E+00	-.54531E+00	.13022E-01	0.
7	-.40606E+00	-.40253E+00	.86811E-02	0.
8	-.30291E+00	-.30114E+00	.58391E-02	0.
9	-.22969E+00	-.22862E+00	.46550E-02	0.

17	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.37500E+01	-.37773E+01	-.72902E-02	0.
2	-.32318E+01	-.30905E+01	.43709E-01	0.
3	-.23229E+01	-.22299E+01	.40003E-01	0.
4	-.16031E+01	-.15640E+01	.24361E-01	0.
5	-.11180E+01	-.11030E+01	.13423E-01	0.
6	-.79696E+00	-.79104E+00	.74202E-02	0.
7	-.58114E+00	-.57862E+00	.43374E-02	0.
8	-.43288E+00	-.43176E+00	.26051E-02	0.
9	-.32879E+00	-.32868E+00	.35974E-03	0.

18	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.88889E+01	-.81015E+01	.88581E-01	0.
2	-.59668E+01	-.52359E+01	.12248E+00	0.
3	-.33875E+01	-.32269E+01	.47407E-01	0.
4	-.21082E+01	-.20777E+01	.14442E-01	0.
5	-.14100E+01	-.14050E+01	.35853E-02	0.
6	-.98988E+00	-.98928E+00	.59848E-03	0.
7	-.71949E+00	-.71936E+00	.17859E-03	0.
8	-.53716E+00	-.53691E+00	.46001E-03	0.
9	-.40989E+00	-.40970E+00	.47390E-03	0.

19	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.50000E+10	-.24552E+02	.10000E+01	0.
2	-.90050E+01	-.81363E+01	.96464E-01	0.
3	-.40194E+01	-.39949E+01	.60996E-02	0.
4	-.23755E+01	-.23856E+01	-.42345E-02	0.
5	-.15715E+01	-.15783E+01	-.43178E-02	0.
6	-.11056E+01	-.11087E+01	-.28611E-02	0.
7	-.80917E+00	-.81020E+00	-.12668E-02	0.
8	-.60934E+00	-.60922E+00	.19280E-03	0.
9	-.46913E+00	-.46843E+00	.14921E-02	0.

20	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.90909E+01	-.81665E+01	.10169E+00	0.
2	-.61657E+01	-.53745E+01	.12832E+00	0.
3	-.35777E+01	-.33946E+01	.51172E-01	0.
4	-.22852E+01	-.22465E+01	.16922E-01	0.
5	-.15710E+01	-.15627E+01	.53065E-02	0.
6	-.11336E+01	-.11313E+01	.20128E-02	0.
7	-.84590E+00	-.84454E+00	.16116E-02	0.
8	-.64725E+00	-.64581E+00	.22238E-02	0.
9	-.50513E+00	-.50347E+00	.32912E-02	0.

21	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.41667E+01	-.41173E+01	.11851E-01	0.
2	-.36417E+01	-.34520E+01	.52086E-01	0.
3	-.27135E+01	-.25973E+01	.42833E-01	0.
4	-.19650E+01	-.19155E+01	.25217E-01	0.
5	-.14455E+01	-.14253E+01	.13975E-01	0.
6	-.10877E+01	-.10786E+01	.84090E-02	0.
7	-.83578E+00	-.83072E+00	.60593E-02	0.
8	-.65379E+00	-.65030E+00	.53367E-02	0.
9	-.51930E+00	-.51646E+00	.54656E-02	0.

22	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.25641E+01	-.25645E+01	-.15257E-03	0.
2	-.23953E+01	-.23527E+01	.17796E-01	0.
3	-.20132E+01	-.19628E+01	.25053E-01	0.
4	-.16075E+01	-.15725E+01	.21794E-01	0.
5	-.12648E+01	-.12441E+01	.16368E-01	0.
6	-.99703E+00	-.98491E+00	.12158E-01	0.
7	-.79228E+00	-.78470E+00	.95643E-02	0.
8	-.63578E+00	-.63059E+00	.81589E-02	0.
9	-.51529E+00	-.51144E+00	.74618E-02	0.

23	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.17857E+01	-.17890E+01	-.18155E-02	0.
2	-.17129E+01	-.17029E+01	.58362E-02	0.
3	-.15290E+01	-.15083E+01	.13538E-01	0.
4	-.13016E+01	-.12808E+01	.15970E-01	0.
5	-.10810E+01	-.10647E+01	.15067E-01	0.
6	-.88906E+00	-.87735E+00	.13175E-01	0.
7	-.73022E+00	-.72188E+00	.11418E-01	0.
8	-.60147E+00	-.59541E+00	.10069E-01	0.
9	-.49786E+00	-.49339E+00	.89820E-02	0.

24	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.13333E+01	-.13351E+01	-.13228E-02	0.
2	-.12960E+01	-.12930E+01	.22569E-02	0.
3	-.11961E+01	-.11868E+01	.78306E-02	0.
4	-.10613E+01	-.10491E+01	.11495E-01	0.
5	-.91758E+00	-.90582E+00	.12819E-01	0.
6	-.78176E+00	-.77182E+00	.12714E-01	0.
7	-.66138E+00	-.65344E+00	.12017E-01	0.
8	-.55835E+00	-.55213E+00	.11139E-01	0.
9	-.47176E+00	-.46701E+00	.10071E-01	0.

25	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.10417E+01	-.10418E+01	-.11050E-03	O.
2	-.10202E+01	-.10184E+01	.17729E-02	O.
3	-.96097E+00	-.95566E+00	.55171E-02	O.
4	-.87642E+00	-.86865E+00	.88619E-02	O.
5	-.78041E+00	-.77189E+00	.10925E-01	O.
6	-.68382E+00	-.67572E+00	.11838E-01	O.
7	-.59331E+00	-.58617E+00	.12033E-01	O.
8	-.51205E+00	-.50600E+00	.11818E-01	O.
9	-.44098E+00	-.43609E+00	.11094E-01	O.

26	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.84034E+00	-.83914E+00	.14195E-02	O.
2	-.82699E+00	-.82492E+00	.25095E-02	O.
3	-.78940E+00	-.78545E+00	.49992E-02	O.
4	-.73378E+00	-.72816E+00	.76548E-02	O.
5	-.66775E+00	-.66125E+00	.97385E-02	O.
6	-.59814E+00	-.59149E+00	.11124E-01	O.
7	-.52995E+00	-.52357E+00	.12046E-01	O.
8	-.46622E+00	-.46026E+00	.12790E-01	O.
9	-.40847E+00	-.40315E+00	.13034E-01	O.

27	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.69444E+00	-.69224E+00	.31716E-02	O.
2	-.68565E+00	-.68302E+00	.38304E-02	O.
3	-.66052E+00	-.65691E+00	.54601E-02	O.
4	-.62241E+00	-.61780E+00	.74087E-02	O.
5	-.57571E+00	-.57041E+00	.92017E-02	O.
6	-.52471E+00	-.51907E+00	.10748E-01	O.
7	-.47295E+00	-.46709E+00	.12404E-01	O.
8	-.42294E+00	-.41656E+00	.15096E-01	O.
9	-.37621E+00	-.36878E+00	.19756E-01	O.

28	P. TEO	P. NUM	ERROR	V. IND
1	-.58480E+00	-.58172E+00	.52643E-02	O.
2	-.57873E+00	-.57547E+00	.56281E-02	O.
3	-.56123E+00	-.55754E+00	.65734E-02	O.
4	-.53422E+00	-.53005E+00	.78013E-02	O.
5	-.50032E+00	-.49577E+00	.90893E-02	O.
6	-.46230E+00	-.45745E+00	.10488E-01	O.
7	-.42261E+00	-.41724E+00	.12722E-01	O.
8	-.38319E+00	-.37579E+00	.19311E-01	O.
9	-.34538E+00	-.33689E+00	.24584E-01	O.

#ET=9:20.3 PT=1.5 IO=0.9

ERMS = .23198E-01 ERMIN= .77585E-06 ERMAX= .10000E+01

TABLA IV.4

SMN	R. NUMERICA	R. ANALITICA	ERROR
.20000E-01	.10631E+01	.10000E+01	-.63100E-01
.60000E-01	.10576E+01	.10000E+01	-.57600E-01
.20000E+00	.10209E+01	.10000E+01	-.20700E-01
.40000E+00	.10178E+01	.10000E+01	-.17800E-01
.60000E+00	.10073E+01	.10000E+01	-.73000E-02
.80000E+00	.91142E+00	.10000E+01	.88580E-01

$ET=3:31.2 PT=0.1 IO=0.1

Para las separaciones SMN = 0.2, 0.4 y 0.6 unidades de malla, el error no es mayor que el que hay entre el potencial analítico y el numérico. Tales separaciones hacen que los electrodos de potencial se localicen exactamente sobre nodos de la malla; mientras que para SMN = .02 y .06, hay que hacer una interpolación en los valores de potencial; esta interpolación introduce un error mayor que, sin embargo, queda dentro de límites comparables al error de medición en campo. De cualquier manera, al diseñar una malla, es conveniente tener en cuenta las separaciones entre electrodos que se hayan empleado en el campo, para hacerlas coincidir con nodos de la malla. Esto es posible, ya que el programa permite espaciamientos arbitrarios entre los nodos.

En el caso de SMN = 0.8, la situación es algo diferente: se tiene la diferencia de potencial entre un nodo cercano a la fuente y otro cercano al sumidero. Analíticamente, la diferencia de potencial entre fuente y sumidero es "infinita" (valor inalcanzable por cálculos numéricos), de forma que en estas situaciones, la diferencia de potencial analítica crece más rápido que la numérica, dando por resultado un error mayor.

TABLA IV.5

SMN	R. NUMERICA	R. ANALITICA	ERROR
.20000E-01	.84617E+00	.51466E+00	-.64413E+00
.60000E-01	.84420E+00	.51636E+00	-.635[illegible]E+00
.20000E+00	.82289E+00	.53581E+00	-.53579E+00
.40000E+00	.84562E+00	.60067E+00	-.40779E+00
.60000E+00	.880[illegible]E+00	.70785E+00	-.24460E+00
.80000E+00	.91895E+00	.84774E+00	-.84000E-01

De estos resultados se infiere que la malla pequeña no es adecuada para el caso de dos capas. El error es superior al 50%. Esto puede deberse a la influencia de los valores de frontera.

Para evitar este problema, se ha diseñado la malla de la tabla IV.6, en que los espaciamientos incrementan su tamaño a medida que se acercan a las fronteras. La mejoría en los resultados se observa en la tabla IV.7, en que el e_{rms} es de e_{rms} = 3.88%, con sólo un punto arriba del 4% de error.

La distancia entre los centros de los dipolos fue de 4.5 unidades de malla.

TABLA IV.6

LOS DATOS QUE HAY SON LOS SIGUIENTES:

ESPACIAMIENTOS EN X = 81 LONGITUD = 8.100

INCREMENTOS CALCULADOS

****

NUMERO	DT
******	****************
1	0.479209
2	0.297869
3	0.218757
4	0.174252
5	0.145718
6	0.125883
7	0.111330
8	0.100210
9	0.091458
10	0.084408
11	0.078623
12	0.073807
13	0.069748
14	0.066295
15	0.063334
16	0.060778
17	0.058563
18	0.056637
19	0.054959
20	0.053495
21	0.052220
22	0.051113
23	0.050156
24	0.049335
25	0.048638
26	0.048057
27	0.047582
28	0.047210
29	0.046934
30	0.046752
31	0.046662
32	0.049172
33	0.049208
34	0.049281
35	0.049392
36	0.049540

37	0.049726
38	0.049952
39	0.050217
40	0.050524
41	0.050874
42	0.051268
43	0.051710
44	0.052199
45	0.052741
46	0.053336
47	0.053990
48	0.054704
49	0.055485
50	0.056336
51	0.057263
52	0.058272
53	0.059371
54	0.060567
55	0.061871
56	0.063293
57	0.064844
58	0.066541
59	0.068400
60	0.070441
61	0.072687
62	0.075166
63	0.077912
64	0.080966
65	0.084376
66	0.088204
67	0.092525
68	0.097435
69	0.103056
70	0.109547
71	0.117119
72	0.126056
73	0.136753
74	0.149775
75	0.165959
76	0.186596
77	0.213800
78	0.251272
79	0.306166
80	0.394345
81	0.559770

ESPACIAMIENTOS EN Z = 21 LONGITUD = 2.100

INCREMENTOS CALCULADOS

****

NUMERO	DT
******	***************
1	0.100000
2	0.048239
3	0.048464
4	0.048922
5	0.049624
6	0.050593
7	0.051859
8	0.053464
9	0.055468
10	0.057949
11	0.061021
12	0.064840
13	0.069635
14	0.075748
15	0.083712
16	0.094406
17	0.109391
18	0.131723
19	0.168331
20	0.239119
21	0.437490

TABLA IV.7

SHR	R. NUMERICA	R. ANALITICO	ERROR
.20000E-01	.11666E+00	.10632E+00	-.97254E-01
.60000E-01	.10934E+00	.10628E+00	-.28792E-01
.20000E+00	.10662E+00	.10669E+00	.65611E-03
.40000E+00	.10574E+00	.10875E+00	.27678E-01
.60000E+00	.10779E+00	.11157E+00	.33880E-01

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Durante la elaboración de este trabajo se presentaron varias situaciones que sugieren que, aunque un modelo bidimensional permite introducir en la interpretación estructuras geológicas, que podrían pasar desapercibidas en modelos unidimensionales, el empleo de programas que dan la posibilidad de interpretaciones en dos dimensiones no debe hacerse sin tener conocimiento de ellos; es decir, no es recomendable utilizarlos como "cajas negras". Esto se debe a que la confiabilidad de los resultados depende de varios factores; entre otros:

- Malla que se emplee: cantidad de nodos y espaciamiento entre ellos.
- Contrastes de conductividades con que se trabaje.
- Números de onda que se utilicen.
- Tipo de arreglo electródico con que se trabaje en el campo.

Esto se deduce de comparar los resultados que da el programa para diferentes condiciones, contra soluciones analíticas del mismo modelo. Así, para el caso de dos capas horizontales, una malla de 20×80 nodos proporciona mejores resultados que una de 10×30, empleando las mismas conductividades y los mismos números de onda, aunque los espaciamientos son diferentes. Las condiciones de frontera influyen en los resultados en mayor medida, si las fronteras están cerca del arreglo de electrodos.

Hechas las consideraciones anteriores, se recomienda usar el modelado bidimensional después de tener un modelo unidimensional, a partir del cual las heterogeneidades en dos dimensiones pueden ser vistas como perturbaciones.

Por otra parte, el empleo del programa mostró que, tanto el tiempo de procesador como los requerimientos de memoria, están dominados por el número de nodos en profundidad que tenga la malla; esto se debe a la forma en que está hecho el algoritmo, y es uno de los puntos susceptibles de mejora en un futuro. En este sentido, el presente trabajo abre varios caminos:

- Refinar el algoritmo para modelos bidimensionales, optimizando el empleo de memoria y acelerando el procedimiento de solución.
- Estudiar los límites de aplicación del método, usándolo -

para casos más complicados, pero cuyas soluciones se conozcan, para poder comparar resultados.

- Basándose en el algoritmo aquí desarrollado, intentar encontrar otros más eficientes, que permitan incluso una extensión a tres dimensiones.

- Intentar que la interpretación sea automática; es decir, crear un programa que sea capaz de ajustar los valores de resisitividad aparente que calcule, con la curva de campo que le sea proporcionada, por medio de algún método estadístico, modificando por sí mismo los parámetros del modelo.

En este trabajo se hicieron comparaciones de los resultados del método contra soluciones analíticas, en el caso homogéneo (e_{rms} menor que 3%) y en el caso de dos capas (e_{rms} menor que 4%).

APENDICE A

Obtención de las ecuaciones en el espacio transformado, a partir de las ecuaciones en el espacio (x, y, z).

Para obtener la ecuación (I.19a) se debe aplicar la transformación de Fourier a la ecuación (I.15a)

$$-\nabla\cdot\left[\sigma(x,z)\,\nabla\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(y_f)\,\delta(z_f) \qquad (I.15a)$$

Al aplicar la transformación del lado derecho se tiene que:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\tilde{\delta}(K_{y_f})\,\delta(z_f)=\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f)\int_0^{\infty}\delta(y_f)\cos(yK_y)\,dy$$

y recordando las propiedades de la función delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0)$$

además de que tanto $\cos(y\cdot Ky)$ como $\delta(y_f)$ son funciones pares, lo que da por resultado que

$$\int_0^{\infty}\delta(y_f)\cos(yK_y)\,dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y_f)\cos(yK_y)\,dy=\frac{1}{2}\cos 0=\frac{1}{2}$$

de donde se sigue

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\tilde{\delta}(K_y)\,\delta(z_f)=\frac{1}{2}\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f)$$

Ahora bien, expandiendo el lado izquierdo de (I.15a) queda

$$-\nabla\cdot[\sigma(x,z)\nabla\phi(x,y,z)] = -\frac{\partial\sigma(x,z)}{\partial x}\,\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial\sigma(x,z)}{\partial z}\,\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}$$

$$-\sigma(x,z)\left[\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial z^2}\right]$$

en la cual la transformada de una derivada es una multiplicación por iK_y, con lo que se llega a

$$-\nabla\cdot\widetilde{[\sigma\nabla\phi]} = -\nabla\sigma\nabla\tilde{\phi} - \sigma\nabla^2\tilde{\phi} + \sigma K_y{}^2\tilde{\phi}$$

donde del lado derecho $\nabla\equiv(\partial/\partial x,\ \partial/\partial z)$ y $\nabla^2\equiv(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial z^2)$, por lo cual, finalmente se tiene la ecuación

$$-\nabla\cdot\widetilde{[\sigma\nabla\phi]} + \sigma K_y{}^2\tilde{\phi} = \frac{1}{2}\frac{\partial\rho'}{\partial t}\delta(x_f)\delta(z_f)$$

que, luego de definir

$$\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) = \frac{1}{2}\frac{\partial\rho'}{\partial t}\delta(x_f)\delta(z_f)$$

es la ecuación (I.19a)

$$-\nabla\cdot\left[\sigma(x,z)\nabla\tilde{\phi}(x,K_y,z)\right] + K_y^2\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,K_y,z) =$$

$$\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) \qquad (I.19a)$$

A continuación, para obtener (I.19b) a partir de (I.15c)

$$\sigma\nabla^2\phi + \nabla^2(\sigma\phi) - \phi\nabla^2\sigma = -2\frac{\partial\rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\delta(y_f)\delta(z_f) \qquad (I.15c)$$

el lado derecho es igual al caso anterior:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\tilde{\delta}(K_y)\,\delta(z_f) = \frac{1}{2}\frac{\partial \rho'}{\partial t}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f)$$

Con consideraciones similares,

$$\sigma(x,z)\nabla^2\phi(x,y,z) \rightarrow$$

$$\sigma(x,z)\nabla^2\tilde{\phi}(x,K_y,z) - K_y^2\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,K_y,z)$$

$$\nabla^2\left[\sigma(x,z)\phi(x,y,z)\right] \rightarrow$$

$$\nabla^2\left[\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,K_y,z)\right] - K_y^2\sigma(x,z)\tilde{\phi}(x,K_y,z)$$

se llega a la ecuación (I.19b).

Para justificar el hecho de que

$$\tilde{Q} = \frac{I}{2\Delta A}$$

se considera a la corriente I como la variación temporal de carga

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad\qquad q = \int I\,dt$$

y la densidad de carga se trata en dos dimensiones, dando por resultado

$$\rho = \frac{\partial}{\partial A}\int I\,dt$$

además,

$$\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial A}\int I\,dt\right]\delta(x_f)\,\delta(z_f)$$

Conmutando derivadas espaciales con temporales,

$$\tilde{Q}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{d}{dt}\int I\,dt\right]\delta(x_f)\,\delta(z_f) =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial I}{\partial A}\,\delta(x_f)\,\delta(z_f)$$

y en la aproximación por diferencias finitas se considera que $\partial I/\partial A \approx I/\Delta A$, lo cual da el resultado

APENDICE B

Algunas propiedades de la Matriz de Capacitancias

Las propiedades de la Matriz de Capacitancias generada en la discretización por áreas de la ecuación de Poisson, aseguran la estabilidad del método de solución, para cualesquier espaciamiento de malla y distribución de conductividades.

Con el fin de mostrar este hecho, se recurre a las siguientes definiciones y teoremas:

Definición B.1: Para $n \geq 2$, una matriz compleja A de $n \times n$ es reducible si existe una matriz de permutación[†] P de $n \times n$ tal que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

donde $A_{1,1}$ es una submatriz de $r \times r$ y $A_{2,2}$ es una submatriz de $(n-r) \times (n-r)$, donde $1 \leq r \leq n$. Si no existe tal matriz de permutación, entonces A es irreducible. Si A es una matriz compleja de 1×1, entonces A es irreducible si su único elemento es no nulo, siendo reducible en caso contrario.

La interpretación geométrica del concepto de irreducibilidad por medio de la teoría de gráficas es muy útil, así que a continuación se dan algunas nociones elementales.

Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz compleja de $n \times n$ y considérense n puntos distintos P_1, P_2, ..., P_n en el plano, que se denominan "nodos". Para todo elemento $a_{i,j}$ no nulo de la matriz A, se conecta el nodo P_i con el nodo P_j, por medio de una línea dirigida de P_i a P_j, como se muestra en la figura B-1.

Figura B-1. Línea dirigida $\overrightarrow{P_iP_j}$.

[†]Nota: una matriz de permutación es una matriz cuadrada que en cada renglón y en cada columna tiene un elemento unitario, siendo ceros todos los demás.

De esta forma, a toda matriz A de $n \times n$ puede asociarse una gráfica dirigida finita $G(A)$.

Definición B.2: Una gráfica dirigida es fuertemente conectada si para cualquier par ordenado de nodos P_i y P_j existe una línea dirigida

$$\overrightarrow{P_i P_{l_1}}, \overrightarrow{P_{l_1} P_{l_2}}, \ldots, \overrightarrow{P_{l_{r-1}} P_{l_r=j}}$$

que conecte P_i con P_j. Esta línea tiene longitud r.

Las Matrices de Capacitancias obtenidas en las secciones II.5.1 y II.5.2 tienen gráficas fuertemente conectadas, lo cual es apreciable a partir de la malla de discretización, ya que cada nodo de la malla origina un renglón de la matriz, en que los elementos corresponden a los coeficientes de acoplamiento con los cuatro nodos adyacentes. De esta forma, en la malla siempre es posible conectar dos nodos cualesquiera con una línea continua. La malla representa precisamente al conjunto de nodos P_1, P_2, ..., P_n. Entonces la irreducibilidad de la matriz C es consecuencia de la conexidad del dominio D en que se resuelven las ecuaciones.

Por otra parte, por la forma de definir los coeficientes de autoacoplamiento, las Matrices de Capacitancias son diagonalmente dominantes estrictas, i.e.

$$c_{i,i} > \sum_j |c_{i,j}| = \Lambda_i$$

Para mostrar que C es positiva definida se recurre al hecho de que es simétrica y, al provenir de una ecuación autoadjunta, es también Hermitiana. Entonces se usan los siguientes teoremas:

Teorema B.1: Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz compleja de $n \times n$, y

$$\Lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Entonces todos los eigenvalores λ de A quedan en la unión de los discos

$$|z - a_{i,i}| \leq \Lambda_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Demostración.- Sea λ un eigenvalor cualquiera de la matriz A y $\vec{x}$ el eigenvector correspondiente. Se normaliza $\vec{x}$ de forma que su componente mayor sea unitaria. Por definición,

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}\, x_j$$

En particular, si $|x_r| = 1$, entonces

$$|\lambda - a_{r,r}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} |a_{r,j}||x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} |a_{r,j}| = \Lambda_r$$

Luego el eigenvalor λ está en el disco $|z - a_{r,r}| \leq \Lambda_r$. Pero como λ era un eigenvalor arbitrario de A, se sigue que todos los eigenvalores de la matriz A están en la unión de los discos $|z - a_{i,i}| \leq \Lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, completando así la demostración.

Teorema B.2: Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz compleja de $n \times n$, diagonalmente dominante estricta. Entonces la matriz A es no singular. Si además todos los elementos de la diagonal principal son números reales positivos, entonces los eigenvalores λ_i de A satisfacen

$$\operatorname{Re} \lambda_i > 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

Demostración.- Cuando A es diagonalmente dominante estricta, la unión de los discos $|z - a_{i,i}| \leq \Lambda_i$ no incluye al origen $z = 0$ del plano complejo, y por el teorema anterior (Teo. B.1), $\lambda = 0$ no es eigenvalor de A, lo que prueba que A es no singular. Si la diagonal principal de A contiene sólo números reales positivos, es claro que la unión de los discos $|z - a_{i,i}| \leq \Lambda_i$ en este caso contiene sólo puntos en el plano complejo cuyas partes reales son positivas, lo que completa la demostración.

Puesto que una matriz Hermitiana tiene eigenvalores reales, una consecuencia inmediata del teorema anterior (Teo. B.2) es la siguiente:

Corolario.- Si $A = (a_{i,j})$ es una matriz Hermitiana de $n \times n$, diagonalmente dominante estricta, con elementos en la diagonal principal positivos $a_{i,i} > 0$, entonces A es positiva definida.

Con lo anterior se ha demostrado que la Matriz de Capacitancias C es positiva definida.

Varga (1962) demustra que la aproximación en diferencias finitas a la solución de una ecuación elíptica y autoadjunta, que produzca una matriz con las propiedades mencionadas para la matriz C, es estable para cualquier espaciamiento de malla. Probarlo es algo largo y complejo como para hacerlo aquí, pues requiere de diversos conceptos de álgebra lineal y de análisis matricial; por ello, para una demostración formal, se recomienda acudir a Varga (1962).

APENDICE C

Teorema de factorización Choleski

A continuación se demostrará la existencia de la factorización Choleski para una matriz A simétrica y positiva definida.

Una matriz simétrica A es positiva definida si $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$ para todo vector $\vec{x} \neq 0$. Tales matrices aparecen en muchas aplicaciones; típicamente, $\vec{x}^T A\vec{x}$ representa la energía de algún sistema físico y es positiva para cualquier configuración $\vec{x}$. En una matriz positiva definida A los elementos de la diagonal siempre son positivos ya que

$$e^T A e = a_{ii}$$

donde $\vec{e}$ es el i-ésimo vector característico, las componentes del cual son todas cero excepto por un uno en la i-ésima posición. Esta observación se usará al probar el siguiente teorema de factorización debido a Choleski:

Teorema C.1: Si A es una matriz simétrica positiva definida de $N \times N$, tiene una única factorización triangular LL^T, donde L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos.

Demostración.- La prueba es por inducción en el orden N de la matriz A. El resultado es cierto para N = 1 pues $a_{1,1}$ es positivo.

Supóngase que se cumple para matrices de orden N - 1.

Sea A una matriz simétrica positiva definida de orden N. A puede particionarse de la forma

$$A = \begin{bmatrix} d & \nu^T \\ \nu & \bar{H} \end{bmatrix}$$

donde d es un escalar positivo, ν un vector columna de $(N - 1) \times 1$ y $\bar{H}$ una submatriz de $(N - 1) \times (N - 1)$. La matriz particionada puede escribirse como el producto

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ \nu/\sqrt{d} & I_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d} & \nu^T/\sqrt{d} \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix}$$

donde $H = \bar{H} - (\nu\nu^T/d)$. Es claro que la matriz H es simétrica. También es positiva definida pues para cualquier vector $\vec{x} \neq 0$ de largo N - 1,

$$\left[-x^T\nu/d, x^T\right] \begin{bmatrix} d & \nu^T \\ \nu & \bar{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^T\nu/d \\ x \end{bmatrix} = x^T \left[\bar{H} - \nu\,\nu^T/d\right] x = x^T H x,$$

lo que implica que $\vec{x}^T H \vec{x} > 0$. Por la hipótesis de inducción, H tiene una única factorización triangular $L_H L_H^T$ con diagonales positivas. Entonces A puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ \nu/\sqrt{d} & I_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d} & \nu^T/\sqrt{d} \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ \nu/\sqrt{d} & L_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d} & \nu^T/\sqrt{d} \\ 0 & L_H^T \end{bmatrix} = L L^T .$$

con lo que se demuestra la existencia. La unicidad viene de considerar que tanto d como H y ν son también únicos: d es el elemento $a_{1,1}$ de A y tiene una sola raíz cuadrada positiva; ν está formado por los elementos de la primera columna de A y $\bar{H}$ se obtiene de A, quitando el primer renglón y la primera columna. La matriz H es también única para cada A, por lo que la factorización es única.

REFERENCIAS

1) AIKEN, C. L., HASTINGS, D. A. y STURGUL, J. R., 1973. Physical and Computer Modelling of Induced Polarization. Geophys. Prosp., v. 21, pp. 763 - 782.

2) AMES, W. F., 1977. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 2a. ed.

3) ARFKEN, G., 1970. Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, New York, 2a. ed.

4) BAZAROV, I. P. Thermodynamics. Edición revolucionaria, Instituto del libro, Cuba.

5) BRACEWELL, R., 1965. The Fourier Transform and its Applications. McGraw-Hill, New York.

6) CALLEN, H. B., 1960. Thermodynamics. John Wiley & Sons, Inc., New York.

7) CLEMMOW, P. C., 1973. An Introduction to Electromagnetic Theory. Cambridge University Press, Cambridge.

8) COGGON, J. H., 1971. Electromagnetic and Electrical Modelling by the Finite Element Method. Geophysics, v. 36, p. 132.

9) CONTE, S. D. y DE BOOR, C., 1980. Elementary Numerical Analysis, an Algorithmic Approach. McGraw-Hill, New York.

10) CRUSE, A. B. y GRANBERG, M., 1971. Lectures on Freshman Calculus. Addison-Wesley.

11) DEY, A. y MORRISON, H. F., 1979a. Resistivity Modelling for Arbitrarily Shaped Two-dimensional Structures. Geophys. Prosp., v. 27, pp. 106 - 136.

12) DEY, A. y MORRISON, H. F., 1979b. Resistivity Modelling for Arbitrarily Shaped Three-dimensional Structures. Geophysics, v. 44, pp. 753 - 780.

13) GEORGE, A. y LIU, J. W., 1981. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. Prentice-Hall.

14) GNEDENKO, B. V., 1968. Theory of Probability. Chelsea Publishing Company, New York, 4a. ed.

15) GOOD, R. y NELSON, T. J., 1971. Classical Theory of Electric and Magnetic Fields. Academic Press, New York.

16) GRANT, F. S. y WEST, G. F., 1976. Interpretation Theory in Applied Geophysics. International Series in the Earth Sciences.

17) HALMOS, P. R., 1972. Introduction to Hilbert Space. Chelsea Publishing Company, New York, 2a. ed.

18) HAMMING, R. W., 1973. Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, Kogakusha, ltd., Tokyo, 2a. ed.

19) HERMANCE, J. F., 1982. Refined Finite - Difference Simulations Using Local Integral Forms, Application to Telluric Fields in Two Dimensions. Geophysics, v. 47, pp. 825 - 831.

20) JACKSON, J. D., 1975. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2a. ed.

21) JEPSEN, A. F., 1969. Numerical Modelling in Resistivity Prospecting. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley.

22) JOHNSON, N. L. y LEONE, F. C., 1964. Statistics and Experimental Design. Wiley, New York, v. I.

23) JURETSCHKE, H. J., 1974. Crystal Physics (Macroscopic Physics of Anisotropic Solids). W. A. Benjamin, Inc., Massachusetts.

24) KREYSZIG, E., 1979. Advanced Engineering Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 4a. ed.

25) LIMA LOBATO, E. M., 1979. Deriving Recurrence Formulas for the Eigenfunctions for each Layer of Horizontally Multi-layered Earth Models. Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, v. 39, No. 4.

26) LINDGREN, B. W., 1976. Statistical Theory. Collier MacMillan Publishers, London, 3a. ed.

27) LORRAIN, P. y CORSON, D., 1970. Electromagnetic Fields and Waves. W. H. Freeman, San Francisco, 2a. ed.

28) MORSE, M. P. y FESHBACH, H., 1953. Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, Inc., Kogakusha, Ltd., Tokyo. (Tomos I y II).

29) MUFTI, I. R., 1976. Finite - Difference Resistivity Modelling for Arbitrarily Shaped Two-dimensional Structures. Geophysics, v. 41, pp. 62 - 78.

30) MUFTI, I. R., 1978. A Practical Approach to Finite - Difference Resistivity Modelling. Geophysics, v. 43, pp. 930 - 942.

31) ORELLANA, E., 1982. Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua. Paraninfo, Madrid.

32) PATRA, H. P. y MALLICK, K., 1980. Geosounding Principles 2. Elsevier/North Holland, Inc., New York.

33) SLICHTER, L. B., 1933. Interpretation of Resistivity Prospecting for Horizontal Structures. Physics, v. 4., pp. 307 - 322 (y p. 407).

34) STEFANESCO, S. y SCHLUMBERGER, C. M., 1930. Sur la Distribution Electrique Potentielle Autour d'une Prise de Terre Ponctuelle dans un Terrain à Couches Horizontales, Homogènes et Isotropes. Jour. Phys. Radium, v. 7, pp. 132 - 141.

35) VARGA, R. S., 1962. Matrix Iterative Analysis. Prentice - Hall, New Jersey.

36) WYLIE, C. R., 1960. Advanced Engineering Mathematics. McGraw - Hill, New York, 3a. ed.