

20-43
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MECANICA CUANTICA PARA SISTEMAS NO INERCIALES

TESIS DE LICENCIATURA PRESENTADA POR:

JESUS ANTONIO DEL RIO PORTILLA

NOVIEMBRE/1983.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTRODUCCION

El título de "Mecánica Cuántica desde Sistemas no Inerciales" podría parecer extraño para algunas personas; ya que frecuentemente se define un sistema inercial como aquel donde se cumple la segunda Ley de Newton y como sabemos el concepto de fuerza no es útil en la mecánica cuántica.

En este trabajo al referirnos a un sistema inercial pensamos en aquellos sistemas acelerados con respecto a un sistema inercial y no pensamos en introducir a la mecánica cuántica conceptos propios de la mecánica newtoniana o hamiltoniana. Cuando pasamos de un sistema inercial a otro no inercial en mecánica cuántica lo hacemos mediante una transformación unitaria del Espacio de Hilbert análoga a una transformación canónica clásica asociada al mismo cambio de referencia. Todos estos cambios en el esquema de Schrödinger.

Como es de esperarse, este trabajo tiene sus orígenes en la mecánica newtoniana donde un cambio a un sistema no inercial puede simplificar la descripción del movimiento. No obstante, dicha situación también puede observarse utilizando el formalismo de Hamilton, como por ejemplo, en el caso de una partícula cargada sometida a una pequeña perturbación magnética. Con estos antecedentes surge la pregunta ¿Podríamos simplificar algunos problemas cuánti-

cos situándonos en un sistema no inercial? En este trabajo responderemos a esta pregunta.

En el trabajo, primero se desarrollan las transformaciones canónicas* asociadas a un cambio de sistema de referencia. En esa ocasión se desarrollan tres diferentes transformaciones canónicas, la primera es la transformación donde solamente se ve afectado el subespacio de las coordenadas del espacio fase, es decir, en esta transformación los momentos permanecen invariantes, por lo tanto, la denominamos traslación espacial. Posteriormente se construye la transformación que involucra cambios tanto en las coordenadas como en los momentos y consecuentemente denominada traslación del espacio fase. Por último dentro de la primera sección se desarrolla la transformación canónica llamada traslación momental donde ahora las coordenadas permanecen invariantes.

En la segunda sección se desarrollan las transformaciones unitarias análogas a las tres transformaciones canónicas de la primera sección. En esta sección también se incluye una breve discusión sobre la elección del esquema de Schrödinger como el esquema de trabajo.

En la última sección se desarrollan tres ejemplos del uso de las transformaciones unitarias construidas en la sección II. Estos son: efecto Zeeman normal, una par-

*Para nomenclatura de este trabajo, la transformación canónica es clásica.

tícula en un campo uniforme y por último una partícula -
frente a una barrera infinita con aceleración constante.

TRANSFORMACIONES CANONICAS PARA SISTEMAS NO INERCIALES

Las transformaciones canónicas son utilizadas comunmente para encontrar un sistema de coordenadas del espacio fase con el mayor número de coordenadas cíclicas. En nuestro caso las utilizaremos para encontrar la forma que tendrá el hamiltoniano para transformaciones específicas del espacio fase.

En esta sección, recordaremos la condición para una transformación canónica y encontraremos la forma del hamiltoniano, usando la función generadora de la transformación, para los cambios de coordenadas que deseamos.

TRANSFORMACIONES CANONICAS.

Debido al tipo de transformaciones que utilizaremos (transformaciones de contacto), cuando tenemos la descripción de un sistema en dos espacios fase distintos sabemos que la variación de la acción δA debe ser cero en ambos espacios para que la trayectoria describa realmente al sistema, es decir

$$\delta A = \int (P_i \dot{Q}_i - H) dt \quad \text{y} \quad \delta A = \int (P_i \dot{Q}_i - H) dt$$

(por notación $P_i \dot{Q}_i = \{P_i \dot{Q}_i\}$)

son mínimas donde p_i, q_i son las coordenadas y H el hamiltoniano en el espacio S y P_i, Q_i indican las coordenadas y H el hamiltoniano del segundo espacio S .

Como exigimos que δA sea cero no podemos asegurar que los inte-

grandos sean iguales, sino decir que las integrales difieren a lo más en una constante aditiva y quizás en otra multiplicativa. Esta última tiene que ver con la contracción del espacio fase y como nos restringiremos a cambios de coordenadas que no afectan la escala del espacio fase, el factor será considerado igual a uno. Entonces las integrales difieren a lo más en una constante aditiva y los integrandos en una derivada total, es decir

$$P_i \dot{Q}_i - H = P_i \dot{\tilde{Q}}_i - H + \frac{dF}{dt} \quad (1.1)$$

Donde F puede ser función de $P_i, Q_i, \dot{P}_i, \dot{Q}_i$ y t . Para obtener la forma de un hamiltoniano en términos del otro, podemos suponer que

$$F = F(P_i, Q_i, t) - P_i \dot{Q}_i$$

y al sustituir en (1.1) tenemos

$$P_i \dot{Q}_i - H = P_i \dot{\tilde{Q}}_i - H + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{P}_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t} - P_i \dot{Q}_i - \dot{P}_i Q_i$$

podemos escoger F de manera que

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad (1.2)$$

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{P}_i} \quad (1.3)$$

y entonces la forma del hamiltoniano en el espacio S es

$$H = H [Q_i(Q_i, P_i, t), P_i(Q_i, P_i, t)] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.4)$$

Esta suposición para F no es la única posible y existen otras, pero en todas se procede en forma similar para obtener el hamiltoniano en el otro sistema, y éste no depende del camino seguido para su -

obtención.

TRASLACION ESPACIAL.

A continuación encontraremos la función F para los casos particulares que nos interesan, demostrando que el paso de un sistema inercial S a uno no inercial S' se puede hacer mediante una transformación canónica.

Cuando S' está acelerado uniformemente con respecto a S el cambio de coordenadas está dado por $\vec{x}' = \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$, donde \vec{a} es la aceleración entre ambos sistemas. Si S' estuviera rotando en torno al eje z de S la transformación estaría dada por $\phi' = \phi + \omega t$. Estos dos tipos de transformaciones las podemos englobar en una transformación general para las coordenadas de la forma $Q_i = Q_i - f_i(t)$

(para simplificar la notación $f_i = f_i(t)$.)

Ya hemos obtenido la forma de la transformación para las coordenadas, ahora investiguemos la forma de la transformación para los momentos.

Los momentos canónicos están definidos por $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}$ donde L es el lagrangiano. En esta transformación puntual el tiempo no se ve alterado, entonces el lagrangiano L en el sistema S se ve relacionado con L de la siguiente manera

$$L(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L(Q_i + f_i, \dot{Q}_i + \dot{f}_i, t) = L(Q_i, \dot{Q}_i, t)$$

por lo tanto $\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{\partial L}{\partial Q_i}$, es decir, $P_i = P_i$ el espacio momental no se ve alterado y finalmente la transformación del espacio fase está dada por

$$Q_i = Q_i - f_i \quad (1.5)$$

$$P_i = P_i \quad (1.6)$$

La función $F = P_1(Q_1 - f_1) - \dot{Q}_1 P_1$ cumple con las condiciones (1.2) y (1.3) por lo tanto la transformación dada por (1.5) y (1.6) generada por F es canónica y el hamiltoniano en S se encuentra mediante (1.4) y es de la forma siguiente

$$H = H(Q_1 + f_1, P_1) - P_1 \dot{f}_1 \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondiente a este hamiltoniano son:

$$\dot{P}_1 = - \frac{\partial H}{\partial Q_1} = - \frac{\partial H_1}{\partial Q_1} \quad (1.8)$$

$$\dot{Q}_1 = - \frac{\partial H}{\partial P_1} = \frac{\partial H_1}{\partial P_1} - f_1 \quad (1.9)$$

Al observar (1.8) notamos que no aparecen las llamadas fuerzas-ficticias y que en (1.9) aparece un término cinemático que es el responsable de que la descripción del movimiento sea distinta. El término adicional $P_1 \dot{f}_1$ en (1.7) se puede interpretar como una energía cinética adicional en el sistema no inercial, que dependerá del tiempo si \dot{f}_1 es distinta de cero.

TRASLACION DEL ESPACIO FASE.

Si estuviéramos en un elevador cayendo con una aceleración constante $-g$ y observáramos el movimiento de alguna partícula, al medir el momento cinético mv_1 de ella a lo largo del eje z obtendríamos por resultado $P_z = P_z - mgt$ donde P_z es la componente del momento en la dirección del eje z de la partícula de masa m en un sistema inercial. De aquí notamos que en la transformación canónica correspondiente a la traslación espacial los momentos canónicos y cinéticos no coinciden en el sistema no inercial. La transformación que correspon-

dería al cambio de coordenadas en la mecánica newtoniana es

$$Q_i = Q_i - f_i \quad (1.10)$$

$$P_i = P_i - m\dot{f}_i \quad (1.11)$$

que puede ser generada por la función $F = Q_i(P_i + m\dot{f}_i) - P_i\dot{f}_i - P_i\dot{Q}_i$, por lo tanto también la transformación del espacio fase dada por (1.10) y (1.11) es canónica y el hamiltoniano desde S está dado por

$$H = H(Q_i + f_i, P_i + m\dot{f}_i) + m\ddot{f}_i Q_i - \dot{f}_i P_i + m\dot{f}_i \ddot{f}_i \quad (1.12)$$

que da origen a las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial Q_i} - m\ddot{f}_i \quad (1.13)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} - \dot{f}_i \quad (1.14)$$

En esta ocasión, el hamiltoniano posee términos adicionales de energía cinética y un potencial no inercial. En la ecuación (1.13) aparece el término conocido como "fuerzas ficticias". Si el hamiltoniano inercial H es de la forma $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q_i)$ en la ecuación (1.14) no aparecerá finalmente $-\dot{f}_i$ como término adicional, pues al desarrollar el producto $(P_i + m\dot{f}_i)^2$ aparecerá otro término \dot{f}_i que lo anula.

TRASLACION MOMENTAL.

De lo visto anteriormente surge una pregunta ¿podrá ser una transformación canónica la traslación del espacio momental, dada por (1.15) y (1.16)?

$$Q_i = Q_i \quad (1.15)$$

$$P_i = P_i - m\dot{f}_i \quad (1.16)$$

Si construimos la función $F = Q_i(P_i + m\dot{f}_i) - \dot{Q}_i P_i$, ésta genera a la transformación canónica dada por (1.15) y (1.16) que es precisamente una traslación en el espacio momental. El hamiltoniano en el sistema S se vería en este caso en la forma

$$H = H(Q_i, P_i + m\dot{f}_i) + m\ddot{f}_i Q_i \quad (1.17)$$

dando lugar a las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial Q_i} - m\ddot{f}_i \quad (1.18)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (1.19)$$

En esta ocasión también en el hamiltoniano aparecen términos de energía cinética y potenciales no inerciales. En las ecuaciones de movimiento aparecen términos correspondientes a las fuerzas ficticias en (1.18) y cuando el hamiltoniano en el sistema S es de la forma

$H = \frac{P^2}{2m} + V(Q_i)$ entonces en (1.19) aparece también un término cinemático

$$\dot{Q}_i = \frac{P_i}{2m} + \dot{f}_i ;$$

como vemos en este caso tenemos términos adicionales en ambas ecuaciones de movimiento.

TRANSFORMACIONES UNITARIAS PARA SISTEMAS NO INERCIALES

En mecánica clásica podemos describir el movimiento de un cuerpo desde distintos sistemas de referencia y las distintas descripciones están relacionadas por transformaciones canónicas que dejan invariantes la forma de las ecuaciones de Hamilton.

En mecánica cuántica existen también un conjunto de transformaciones, llamadas unitarias, que dejan invariantes la interpretación física de la teoría. Como en este caso se trabaja sobre un espacio de Hilbert, ahora la transformación es un operador U que actúa sobre los operadores \hat{A} y las funciones ψ en el espacio de Hilbert, transformándolos en operadores y funciones en el espacio S de la siguiente forma

$$A = U A U^{-1} \quad \text{y} \quad \chi = U\psi$$

Este operador unitario es lineal y cumple con $U^{-1} = U^\dagger$.

Como el hamiltoniano es un operador, también sufrirá una modificación en la transformación y para nuestros fines necesitamos saber cuál es la forma que tendrá en el espacio S .

En el esquema de Schrödinger la ecuación de movimiento o de evolución temporal está dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

donde la notación es la convencional, $\psi(\vec{r}, t)$ es la amplitud de probabilidad, \hat{H} es el operador hamiltoniano.

Si aplicamos la transformación unitaria U a (2.1) tenemos

$$i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = U(\hat{H}\psi(\vec{r}, t))$$

$$i\hbar U \left[\frac{\partial}{\partial t} (U^{-1} U \psi(\vec{r}, t)) \right] = U \hat{H} U^{-1} U \psi(\vec{r}, t)$$

Sustituyendo $\chi(\vec{r}, t) = U \psi(\vec{r}, t)$, tenemos

$$i\hbar U \left[\frac{\partial}{\partial t} (U^{-1} \chi(\vec{r}, t)) \right] = \hat{H} \chi(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar U \left(\frac{\partial U^{-1}}{\partial t} \right) \chi(\vec{r}, t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) = \hat{H} \chi(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) = \left(\hat{H} - i\hbar U \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} \right) \chi(\vec{r}, t)$$

por lo tanto la forma que adquiere el generador de traslaciones infinitesimales en el tiempo, el hamiltoniano, es

$$\hat{H} = U \hat{H} U^{-1} - i\hbar U \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} \quad (2.2)$$

De esta forma obtenemos una ecuación de transformación para el hamiltoniano análoga al caso clásico, ver (1.1).

Ahora sólo debemos obtener la forma explícita del operador U para los casos particulares que nos interesan: traslación espacial, traslación momental y la traslación simultánea espacial y momental.

TRASLACION ESPACIAL

Queremos que la transformación unitaria U corresponda a la transformación canónica asociada a una traslación espacial, es decir, que cuando tengamos una función $\Psi(Q_i)$ la función transformada sea de la forma $\Psi(Q_i + f_i)$ donde f_i sólo depende del tiempo.

Podemos desarrollar $\Psi(Q_i + f_i)$ en serie de Taylor y obtener

$$\Psi(Q_i + f_i) = \Psi(Q_i) + f_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \Psi(Q_i) + \frac{1}{2} \left(f_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \right)^2 \Psi(Q_i) + \dots$$

$$= \left[1 + f_i \frac{\partial}{\partial Q_i} + \frac{1}{2} \left(f_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \right)^2 + \dots \right] \Psi(Q_i)$$

$$= \exp \left(f_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \right) \Psi(Q_i)$$

$$\therefore \Psi(Q_i + f_i) = \exp \left(i \frac{f_i P_i}{\hbar} \right) \Psi(Q_i)$$

Notemos que la serie sólo tiene el mismo tipo de convergencia

que la serie para la exponencial, por lo tanto para cualquier f_1 finita a un tiempo dado hemos encontrado el operador $U = \exp(i f_1 \hat{p}_1 / \hbar)$ que pudiera ser el operador unitario correspondiente a la traslación espacial. Veamos como actúa este operador U sobre los operadores \hat{p}_1 y \hat{Q}_1

$$\begin{aligned} U \hat{Q}_1 U^{-1} \psi(Q_1) &= \exp(i f_1 \hat{p}_1 / \hbar) \hat{Q}_1 \exp(-i f_1 \hat{p}_1 / \hbar) \psi(Q_1) \\ &= \exp(i f_1 \hat{p}_1 / \hbar) \hat{Q}_1 \psi(Q_1 - f_1) \\ &= \exp(i f_1 \hat{p}_1 / \hbar) [Q_1 \psi(Q_1 - f_1)] \\ &= (Q_1 + f_1) \psi(Q_1) \end{aligned}$$

entonces $\hat{Q}_1 + \hat{Q}_1 + f_1$ igual que en el análogo clásico.

Ahora para el operador \hat{p}_1 tenemos

$$\begin{aligned} U \hat{p}_1 U^{-1} (Q_1) &= \exp(i f_1 \hat{p}_1 / \hbar) \left[-\hbar \frac{\partial}{\partial Q_1} \right] \exp(-i f_1 \hat{p}_1 / \hbar) \psi(Q_1) \\ &= -\hbar \frac{\partial}{\partial Q_1} \psi(Q_1) \end{aligned}$$

ya que $[U, \hat{p}_1] = 0$, entonces $\hat{p}_1 + \hat{p}_1$ nuevamente tenemos lo esperado.

Por lo anterior la transformación unitaria correspondiente a la traslación espacial es U .

El hamiltoniano que actúa en S lo obtenemos mediante (2.2)

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{Q}_1 + f_1, \hat{p}_1) - \dot{f}_1 \hat{p}_1 \quad (2.3)$$

En esta ocasión, igualmente que en el caso clásico, aparece un término de energía cinética extra.

TRASLACION MOMENTAL

Por simplicidad construiremos primero la transformación que cambia el espacio momental, es decir, buscaremos un operador que cambie \hat{p}_1 por $\hat{p}_1 + m \dot{f}_1$. Por analogía sospechamos que es $V = \exp(-i m \dot{f}_1 \hat{Q}_1 / \hbar)$ veamos que efecto produce este operador sobre \hat{p}_1 .

$$\begin{aligned}
\hat{V}\hat{P}V^{-1}\Psi(Q_1) &= V\hat{P}_1\exp(-i(m\dot{f}_1 Q_1/\hbar))\Psi(Q_1) \\
&= -i\hbar V\left\{\exp(i(m\dot{f}_1 Q_1/\hbar))\frac{\partial}{\partial Q_1}\Psi(Q_1) + \frac{i(m\dot{f}_1}{\hbar}\exp(i(m\dot{f}_1 Q_1/\hbar))\Psi(Q_1)\right\} \\
&= (\hat{P}_1 + m\dot{f}_1)\Psi(Q_1)
\end{aligned}$$

entonces $\hat{P}_1 \rightarrow \hat{P}_1 + m\dot{f}_1$. Además como $[V, \hat{Q}_1] = 0$ tenemos $\hat{Q}_1 \rightarrow \hat{Q}_1$, por lo tanto el operador V causa sobre el espacio S el efecto deseado.

Ahora al sustituir en (2.2) obtenemos el hamiltoniano que actúa sobre el espacio S .

$$\hat{H} = H(\hat{Q}_1, \hat{P}_1 + m\dot{f}_1) + m\dot{f}_1 \hat{Q}_1 \quad (2.4)$$

En esta ocasión también obtenemos un término correspondiente a un potencial ficticio de igual forma que en el caso clásico.

TRASLACION ESPACIAL Y MOMENTAL.

Finalmente, sólo nos resta encontrar la transformación unitaria correspondiente a la transformación canónica asociada a la traslación del espacio fase. Parece lógico pensar que puede ser obtenida al aplicar sucesivamente las transformaciones U y V . Pero primero hay que encontrar el conmutador para ver la importancia que tiene el orden de la aplicación de las transformaciones.

Primeramente calculemos el operador UV

$$\begin{aligned}
UV\Psi(Q_1) &= U \exp(i(m\dot{f}_1 Q_1/\hbar)) \Psi(Q_1) \\
&= \exp(-i(m\dot{f}_1 (Q_1 + f_1)/\hbar)) \Psi(Q_1 + f_1)
\end{aligned}$$

ahora el operador VU

$$\begin{aligned}
VU\Psi(Q_1) &= V\Psi(Q_1 + f_1) \\
&= \exp(-i(m\dot{f}_1 Q_1/\hbar)) \Psi(Q_1 + f_1)
\end{aligned}$$

entonces $[U, V] \neq 0$ de donde vemos que el orden sí es importante y además reconocemos que el efecto esperado lo obtenemos con el orde-

rador $W = VU$, pero debemos mostrar que W es unitario y realiza los cambios deseados en los operadores \hat{P}_1 y \hat{Q}_1 .

$$\text{Como } WW^* = VU U^* V^* = VV^*$$

$$WW^* = 1, \text{ } W \text{ es unitario}$$

Si aplicamos W a \hat{P}_1 obtenemos

$$\begin{aligned} W\hat{P}_1W^* &= VU\hat{P}_1U^*V^* \\ &= V\hat{P}_1V^* \quad , \text{ ya que } [P_1, U] = 0 \text{ tenemos} \\ &= \hat{P}_1 + m\dot{f}_1 \end{aligned}$$

este es el efecto que deseábamos. Ahora para \hat{Q}_1 tenemos

$$\begin{aligned} W\hat{Q}_1W^* &= VU\hat{Q}_1U^*V^* = V(\hat{Q}_1 + f_1)V^* \\ &= \hat{Q}_1 + f_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto W es un operador unitario que transforma las --- coordenadas de manera análoga a la transformación canónica dada -- por (1.10) y (1.11). El hamiltoniano asociado a esta transforma--- ción es

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{P}_1 + m\dot{f}_1, \hat{Q}_1 + f_1) - \dot{f}_1\hat{P}_1 - m\dot{f}_1\hat{Q}_1 \quad (2.5)$$

en donde al igual que en el caso clásico, tenemos términos adicionales relativos a la energía cinética y a un potencial no inercial

Hasta aquí tenemos las tres transformaciones unitarias co--- rrespondientes a las tres transformaciones canónicas asociadas a -- un cambio de sistema de referencia. Las formas de los hamiltonia--- nos dados por (2.3) y (2.4) son idénticas a sus correspondientes clásicas; pero el último hamiltoniano (2.5) difiere de (1.12) en un término, aunque en este caso son equivalentes pues $f_1 = at^2/2$. Esta diferencia se debe a la forma del operador W , escogido como

una sucesión de transformaciones y no como una sola transformación.

PROPAGADOR DE UN PAQUETE DE ONDAS.

En esta parte desarrollaremos la herramienta necesaria para relacionar la descripción de la evaluación temporal de un paquete de ondas desde dos distintos sistemas de referencia S y S' pertenecientes a dos espacios; herramienta que es de gran utilidad, como se verá en los ejemplos.

Cualquier paquete de ondas $\psi(\vec{r}, t)$ lo podemos expresar en términos de un conjunto completo de soluciones $\psi_p(\vec{r}, t)$ de la ecuación de Schrödinger debidamente normalizadas, de la siguiente forma

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(p) \psi_p(\vec{r}, t) dp \quad (2.6)$$

donde p es la magnitud física que etiqueta a las soluciones y los coeficientes están dados por

$$C(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(\vec{\rho}, t) \psi(\vec{\rho}, t) d^3\rho \quad (2.7)$$

que al sustituir en (2.5) obtenemos

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(\vec{\rho}, t) \psi(\vec{r}, t) \psi(\vec{\rho}, t) d^3\rho d^3p$$

Podemos intercambiar el orden de integración y obtener

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{r}, t, \vec{\rho}, t) \psi(\vec{\rho}, t) d^3\rho \quad (2.8)$$

donde

$$K(\vec{r}, t, \vec{\rho}, t) = \Theta(t-t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(\vec{\rho}, t) \psi_p(\vec{r}, t) d^3p \quad (2.9)$$

De (2.8) podemos obtener la función $\psi(\vec{r}, t)$ a partir de su estado a un tiempo inicial t para algún tiempo posterior.

En la ecuación (2.9) se introdujo la función escalón $\{\Theta(t-t)\}$

para garantizar que sólo obtendremos la función

$\psi(\vec{r}, t)$ para instantes posteriores a t . Al operador $K(\vec{r}, t, \vec{p}, t)$ se le conoce con el nombre de propagador.

Como el operador K tiene definido su argumento en dos es pacio debemos aplicarle la transformación unitaria correspon diente a cada espacio, es decir

$$K = U_r K U_p^* \quad (2.10)$$

Esquema de Heisenberg

Toda la herramienta anterior ha sido desarrollada en el esquema de Schrödinger. Una pregunta ingenua sería ¿Podemos desarrollar esta herramienta en el esquema de Heisenberg?

Antes de intentar responder a esta pregunta recordemos que el esquema de Heisenberg está definido como aquel donde los estados no dependen del tiempo. Esto es, el esquema de Heisenberg corresponde a situarse en un sistema de referencia privilegiado, donde los estados no evolucionan, en general este sistema sería no inercial.

De acuerdo con esta observación la pregunta planteada anteriormente carece de sentido, ya que al efectuar un cambio de sistema dependiente del tiempo desde el esquema de Heisenberg implica, de hecho, abandonarlo, es decir, implica dejar el sistema privilegiado donde los estados no dependen del

tiempo.

La pregunta que tendría sentido y sería factible contestar es ¿Cómo podríamos calcular el valor esperado para algún operador en el sistema no inercial desde el esquema de Heisenberg?

Para contestar esta pregunta necesitamos construir el operador A_N correspondiente al operador A en el sistema no inercial. Sabemos como obtener el valor esperado de A en el sistema inercial, al calcular el operador A dado por

$$A = W^* A W \quad (2.11)$$

donde W es el operador unitario de la traslación espacial y momental y así el valor esperado de A calculado en el sistema inercial es

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | W^* A W | \Psi \rangle \quad (2.12)$$

en esta última ecuación hemos usado la notación de Dirac, por ser lo mas conveniente. Ahora es fácil obtener A_N a partir de A usando el operador $T = \exp(-iHt/\hbar)$, es decir

$$A_N = T A T^*$$

y entonces el valor esperado de A lo podemos calcular en el esquema de Heisenberg usando A_N de la siguiente forma

$$\langle A \rangle = \langle \Psi_N | A_N | \Psi_N \rangle \quad (2.13)$$

donde $|\psi\rangle$ es el estado en el esquema de Heisenberg.

En la siguiente sección se desarrollan algunos ejemplos y se utilizará el esquema de Schrödinger que nos permite situarnos en él y efectuar los cambios de sistema de referencia sin abandonarlo.

EFFECTO ZEEMAN NORMAL

En mecánica clásica cuando tenemos una partícula cargada moviéndose en una órbita limitada en una región finita del espacio, en donde actúa un campo central, la adición de un pequeño campo magnético uniforme produce un movimiento adicional de precesión superpuesto al movimiento no perturbado de la partícula cargada. Esta afirmación se conoce como el teorema de Larmor.

En mecánica cuántica se tiene un problema equivalente al anterior cuando se introduce un átomo en una región del espacio donde actúa un pequeño campo magnético.

En este ejemplo analizaremos el cambio en el espectro del electrón en el átomo de hidrógeno, sin considerar su espín, cuando se ve perturbado por un pequeño campo magnético uniforme.

El hamiltoniano para este problema es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left(\hat{p} + \frac{e\hat{A}}{c} \right)^2 - \frac{e^2}{|\vec{r}|} \quad (3.1)$$

donde m_0 y e son la masa y la carga del electrón respectivamente, \hat{A} es el operador asociado al potencial vectorial magnético, \hat{p} el operador momento y $|\vec{r}|$ la distancia relativa entre protón y electrón. Como estamos suponiendo \hat{A} uniforme tenemos que $\vec{A} = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2}$, donde $\vec{B} = B \vec{z}$ es el campo magnético externo. Estas condiciones nos sitúan en la norma de Coulomb donde $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Además como suponemos que el campo magnético es pequeño resulta que $A^2 \ll A$ y es posible desprestigiar el término cuadrático de A .

De esta forma (3.1) se ve simplificada y la podemos escribir como

$$\text{mo: } \hat{H} = \frac{\hat{P}_1^2}{2m_0} + \frac{eB\hat{L}_z}{2m_0c} - \frac{e^2}{r} \quad (3.2)$$

donde \hat{L}_z es el operador correspondiente a la componente z del momento angular. De aquí podemos obtener inmediatamente la ecuación de Schrödinger del problema como:

$$\left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} - i\mu_0 B \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{e^2}{r} \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

$$\text{donde } \mu_0 = \frac{\hbar}{2m_0c}$$

Al observar la estructura de (3.2) y compararla con los distintos hamiltonianos desde sistemas no inerciales anteriormente encontrados, notamos que con una transformación de la forma $\phi' = \phi + f(t)$, $P_3 = P_3 = L_z$ obtendríamos una simplificación de (3.3). Por consiguiente, en este caso podemos utilizar la transformación unitaria dada por el operador $U = \exp\left(\frac{i f L_z}{\hbar}\right)$ donde $f = \frac{\mu_0 B}{\hbar} t$ y obtener de esta forma la ecuación de Schrödinger para un sistema que rota con una velocidad angular constante $\omega = \frac{\mu_0 B}{\hbar}$ alrededor del eje z. De acuerdo con esto y según (2.3) tenemos

$$\left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} - \frac{e^2}{r} \right) \chi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) es precisamente la ecuación para el átomo de hidrógeno sin perturbación alguna, es decir, al pasarnos a un sistema que rota con una velocidad angular ω no percibimos el campo magnético externo. La solución para la ecuación (3.4) es ya conocida y la podemos escribir como

$$\chi_{n\ell m}(\vec{r}, t) = R_n(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \exp\left(-\frac{i E_n t}{\hbar}\right) \quad (3.5)$$

donde $R_n(r)$ es la función radial para el átomo de hidrógeno, $Y_{\ell}^m(\theta; \phi)$ son los armónicos esféricos y E_n es la energía correspondiente al estado enésimo del electrón.

Una vez que ya tenemos la solución χ obtenemos ψ usando U^{-1} como

$$\begin{aligned}\psi_{n\ell m}(\vec{r}, t) &= \exp(-i\mu_0 B t \hat{L}_z / \hbar) \chi_{n\ell m}(\vec{r}, t) \\ &= R_n(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi - \mu_0 B t / \hbar) \exp(-iE_n t / \hbar)\end{aligned}$$

pero $Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\phi}$ donde $P_{\ell}^m(x)$ son los polinomios asociados de Legendre, entonces $Y_{\ell}^m(\theta, \phi - \mu_0 B t / \hbar) = Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \exp(-i\mu_0 B t m / \hbar)$ y finalmente la solución de (3.3) es

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}, t) = R_n(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_n + m\mu_0 B)t\right] \quad (3.6)$$

De aquí podemos calcular la frecuencia de la radiación emitida espontáneamente por un átomo de hidrógeno en un pequeño campo magnético como:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{E_n + m\mu_0 B}{\hbar} - \frac{E_{j+m'}\mu_0 B}{\hbar} \\ \omega &= \omega_0 + \frac{\mu_0 B}{\hbar} \Delta m\end{aligned} \quad (3.7)$$

donde ω_0 es la frecuencia de emisión sin perturbación alguna.

Pero sabemos que para m las reglas de selección imponen $\Delta m = 0, \pm 1$ por lo tanto (3.7) se ve como

$$\omega = \omega_0 + \left(-\frac{1}{1}\right) \mu_0 B / \hbar$$

Este resultado también se puede obtener a partir de las propiedades de conmutación entre \hat{H} y \hat{L}_z . Aunque el camino desarrollado aquí hace una predicción adicional: En el sistema no inercial no se ve el desdoblamiento, esta afirmación puede ser difícil de verificar experimentalmente, pues es complicado poner un sistema a rotar centrado en el núcleo de cada átomo a la vez.

UNA PARTICULA EN UN CAMPO UNIFORME

En la mayoría de los textos de física elemental, al hablar de fuerzas, se resuelve como un ejemplo el problema de una partícula bajo la acción de una fuerza constante, en particular del tipo $F=mg$ siendo m la masa de la partícula y g la constante de gravedad de la región, ya que clásicamente este ejemplo es fácil de resolver.

Este problema se simplifica más si cambiamos de sistema de referencia y describimos el movimiento desde un sistema no inercial que se mueva con una aceleración g con respecto a uno inercial.

De esta forma se observa el tipo de movimiento más sencillo, velocidad constante, para la partícula.

En mecánica cuántica este problema ya no es tan simple de resolver. En esta sección lo trataremos de dos maneras distintas, primero desde un sistema inercial y posteriormente desde un sistema acelerado.

El hamiltoniano cuántico para este problema es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - mgx \quad (c.1)$$

entonces la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo correspondiente a este hamiltoniano es

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E+mgx) \psi(x) = 0 \quad (c.2)$$

donde $\psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$

sería la solución para la ecuación de Schrödinger completa.

Para resolver (c.2) podemos pasar a la representación momental en donde tenemos

$$\frac{-P^2 \Omega(P)}{2m} + i\hbar mg \frac{d}{dP} \Omega(P) + E \Omega(P) = 0 \quad (\text{c.3})$$

e integrando obtenemos como solución a la función

$$\Omega_E(P) = C \exp\left\{-\frac{i}{\hbar mg} \left(\frac{P^3}{6m} - EP\right)\right\} \quad (\text{c.4})$$

normalizamos de acuerdo al parametro E de la siguiente forma

$$\int \Omega_E^*(P) \Omega_{E'}(P) dP = \delta(E-E')$$

El parámetro E es la energía y es continuo, en este problema no existe condición alguna para la cuantización de E. De esta forma la constante de normalización es

$$C = (\sqrt{2\pi\hbar mg})^{-1}$$

Ahora solo falta obtener la transformada de Fourier de Ω_E para tener la solución de (c.2)

$$\psi_E(x) = \frac{1}{2\pi\hbar\sqrt{mg}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar mg} \left(\frac{P^3}{6m} - P(E-mgx)\right)\right\} dP$$

$$\psi_E(x) = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{mg}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(\frac{u^3}{3} - yu\right)\right\} du \quad (\text{c.5})$$

donde $y = \alpha(x + \frac{E}{mg})$, $\alpha = \left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ y $u = -\frac{P}{(2m\hbar k)^{\frac{1}{3}}}$

la función $A(-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\frac{u^3}{3} - uy)\} dy$

es conocida como función de Airy y no puede ser expresada en términos de funciones elementales, aunque existe una expresión para ella en términos de funciones Bessel de orden un tercio $J_{\frac{1}{3}}(x)$ dada por

$$A(z) = \begin{cases} \sqrt{\pi z} \{ J_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) + J_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \} & z > 0 \\ \sqrt{\pi z} \{ I_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) + I_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \} & z < 0 \end{cases} \quad (c.5a)$$

donde $I_{\nu}(x) = (i)^{\nu} J_{\nu}(ix)$

Para describir la evolución temporal de cualquier partícula en este problema nos será de utilidad construir el propagador de paquetes de onda en el tiempo $K(x, t, x', t')$. De la ecuación (2.9) lo obtenemos como

$$\begin{aligned} K(x, t, x', t) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_E(x, t) \psi_E^*(x', t) dE \right\} \Theta(t-t') \\ &= \left\{ \frac{\alpha^2}{(2\pi)^2 mg} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iE)}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\frac{v^3}{3} - vy')] dv \right. \\ &\quad \left. \exp(-iEt) \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(\frac{u^3}{3} - uy) du dE \right\} \Theta(t-t') \end{aligned}$$

con $y = \alpha \left(x + \frac{E}{mg} \right)$

$$\begin{aligned}
 K(x, t, x, t) &= \left\{ \frac{\alpha^2}{(2\pi)^2 mg} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left(\frac{v^3}{3} - vx\alpha - \frac{u^3}{3} + u\alpha x\right)\right] \right. \\
 &\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-iE\alpha\left[\frac{mg}{h\alpha}(t-t') + u - v\right]\right) dv du dv' \right\} \Theta(t-t') \\
 &= \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\left(\frac{v^3}{3} - vx\alpha - \frac{u^3}{3} + u\alpha x\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. \delta\left(u + \frac{mg}{h\alpha}(t-t') - v\right) du dv \right\} \Theta(t-t')
 \end{aligned}$$

utilizando la δ para integrar sobre v tenemos

$$\begin{aligned}
 K(x, t, x, t) &= \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\left[-u\alpha x - \frac{mg}{h}(t-t')x + u\alpha x + \frac{mg}{h\alpha}(t-t')u^2\right]\right) \right. \\
 &\quad \left. \exp\left(-i\left[u\left(\frac{mg}{h\alpha}(t-t')\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{mg}{h\alpha}(t-t')\right)^3\right]\right) du \right\} \Theta(t-t') \\
 &= \frac{\alpha}{2\pi} \Theta(t-t') \exp\left[i\left(\frac{mg}{h}x(t-t') - \frac{1}{3}\left(\frac{mg}{h\alpha}(t-t')\right)^3\right)\right] \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left[\frac{u^2 mg}{h\alpha}(t-t') + u\left(x\alpha - x\alpha + \frac{m^2 g^2}{h^2 \alpha^2}(t-t')^2\right)\right]\right] du
 \end{aligned}$$

si completamos el cuadrado en u podemos integrar y obtenemos

$$\begin{aligned}
 K(x, t, x, t) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi h i(t-t')}} \Theta(t-t') \exp\left[i\frac{m(x-x)^2}{h 2(t-t')}\right] \\
 &\quad \exp\left[i\left(\frac{mg}{h}x(t-t') - \frac{mg^2}{24}(t-t')^3\right)\right] \quad (c.6)
 \end{aligned}$$

Con este último resultado podemos describir el movimiento de cualquier paquete de ondas dentro de este campo uniforme*.

*Una discusión sobre el paquete de mínima dispersión en este campo aparece en el libro "Problems in Quantum Mechanics", F. Constantinescu.

Ahora trataremos de resolver este problema desde un sistema con aceleración $-g$, para ésto utilizaremos la transformación unitaria dada por

$$W = \exp\left(-i\frac{mgt}{\hbar} \hat{x}\right) \exp\left(i\frac{gt^2}{2\hbar} \hat{p}\right) = V U \quad (c.7)$$

que nos sitúa en un sistema con aceleración constante $-g$.

El hamiltoniano en este problema según (2.5) y (c.1) es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{mg^2 t^2}{2} \quad (c.8)$$

entonces la ecuación completa de Schrödinger para el problema en el sistema acelerado es

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{mg^2 t^2}{2}\right) \Psi(x,t) \quad (c.9)$$

Que podemos resolver utilizando el método de separación de variables, obteniendo las ecuaciones

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (c.10)$$

$$\left(i\hbar \frac{d}{dt} + \frac{\sigma}{2} t^2\right) T(t) = E T(t) \quad (c.11)$$

donde $\sigma = mg^2$. Al observar (c.10) vemos que al igual que en el caso clásico también en esta ocasión el problema se reduce al de la partícula libre. En otras palabras, al hacer esta transformación hemos eliminado el potencial lineal obteniendo una partícula libre en el estado estacionario.

La solución del tipo de partícula libre para (c.10) es

$$\Psi(x) = A \exp\left(\frac{i p x}{\hbar}\right) + B \exp\left(-\frac{i p x}{\hbar}\right) \quad (\text{c.12})$$

donde $p = \sqrt{2mE}$ y A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Para (c.11) la solución se obtiene también inmediatamente al separar variables e integrar $T(t)$ esta dada por

$$T(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(Et - \frac{\sigma t^3}{6})\right\} \quad (\text{c.13})$$

Por lo tanto la solución para (c.9) es

$$\Psi(x,t) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p x - Et + \frac{\sigma t^3}{6})\right] + B \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p x + Et - \frac{\sigma t^3}{6})\right] \quad (\text{c.14})$$

De aquí en adelante podemos continuar por dos caminos distintos:

Uno es obtener el propagador en el sistema no inercial para transformarlo posteriormente con ayuda de W y así obtener el propagador dado en (c.6). El otro es obtener la solución a la ecuación completa de Schrödinger en el sistema inercial y con esta nueva base construir el propagador. Esta última manera de resolver el problema es larga y tediosa, por lo tanto no se hará aquí, por el contrario la primera es sencilla, pues ya es conocido el propagador para una partícula libre. De esta forma se observa cómo en algunos casos el cálculo del propagador se puede obtener con base en el propagador de partícula libre.

Obtendremos entonces el propagador a partir de (c.14)

$$G(x, t, x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x, t) \psi_p(x', t') dp$$

$$= \exp\left\{-\frac{i\sigma}{\hbar}(t^3 - t'^3)\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(x-x')p - \frac{iE}{\hbar}(t-t')\right\} dp$$

con $E = \frac{p^2}{2m}$

esta última integral es precisamente el propagador de la partícula libre, entonces

$$G(x, t, x', t') = \frac{m}{\sqrt{2\pi i \hbar (t-t')}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m(x-x')^2}{2(t-t')} - \frac{\sigma}{6}(t^3 - t'^3)\right)\right\}$$

y finalmente el propagador en el sistema inercial es

$$G(x, t, x', t') = W_x^* G W_x$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2\pi i (t-t')}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(mg(xt - x't) - \frac{m}{2}\left|x - \frac{gt}{2} - x + \frac{gt'}{2}\right|^2 + \frac{\sigma}{6}(t^3 - t'^3)\right)\right\}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2\pi i (t-t')}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m(x-x')^2}{2(t-t')} + mg(x+x')(t-t') - \frac{\sigma}{6}(t-t')^3\right)\right\}$$

(c.6)

Como vemos es más sencillo calcular de esta forma el propagador.

BARRERA DE POTENCIAL INFINITA MOVIENDOSE CON ACELERACION CONSTANTE

En esta sección se describirá el movimiento de una partícula sometida a una barrera de potencial infinita que se mueve con una aceleración constante a .

Antes de resolver el problema desde el punto de vista cuántico analicémoslo clásicamente, para familiarizarnos con el problema.

Para atacar el problema consideremos la colisión entre dos partículas, con masas m y M y velocidades v y V respectivamente, supongamos además M muy grande para tener de esta manera un caso análogo al del choque entre una partícula y una pared, donde sólo ésta última esta acelerada y su velocidad obedece a la relación dada por $V = at$

En el choque se conserva el momento, es decir

$$mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

donde v' y V' son las velocidades de las partículas después del choque. Bajo la hipótesis de choque elástico tenemos la relación

$$v - V = V' - v' \quad (2)$$

equivalente a la conservación de la energía cinética; combinando (1) y (2) tenemos

$$v' = \frac{(m-M)v + 2MV}{m+M} \quad (3)$$

Al tomar el límite cuando $M \rightarrow \infty$ tenemos

$$v' = 2V - v \quad (4)$$

En este caso v' va a depender del tiempo, pues V depende del tiempo, entonces, si el choque ocurre al tiempo t_1 la velocidad con que sale rebotada la partícula es

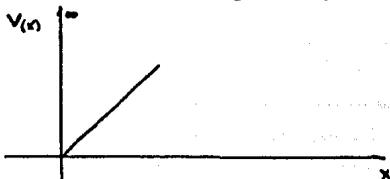
$$v'(t_1) = 2at_1 - v \quad (5)$$

Al calcular la energía de la partícula para un instante posterior al choque vemos que ha aumentado en forma cuadrática en el tiempo t_1 por lo que la energía no se conserva. Construyendo el hamiltoniano para la partícula también es posible darse cuenta que su energía no se conserva.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x,t), \quad \text{con } V(x,t) = \begin{cases} 0 & x > at^2/2 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

En la ecuación (6) tenemos el hamiltoniano H de la partícula con momento p . Una vez que la partícula ha sido rebotada por la pared, después de un intervalo de tiempo la partícula es nuevamente alcanzada por la pared y entonces sus energía vuelve a incrementarse.

Otra forma de visualizar este fenómeno se obtiene situándonos en la pared y observando el movimiento de la partícula.



Desde esta perspectiva se aprecian los sucesivos alcances de forma similar a como se vería el

rebote de una pelota desde el piso, por consiguiente observaríamos trayectorias finitas de la partícula, es decir, estaría inmersa en un campo uniforme interrumpido por la pared, ver fig. 1

Con base en lo anterior en el caso cuántico esperamos una cuantización de algún parámetro en el sistema no inercial, debido al hecho de tener un confinamiento.

Para resolver este problema en mecánica cuántica nos situamos en un sistema que se mueve con la barrera de potencial, utilizando la transformación dada por el operador unitario $W = \exp(-imat\hat{p}/\hbar) \exp(iat^2\hat{p}/2\hbar)$.

Al utilizar esta transformación tendremos una ecuación de Schrodinger dada por

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x+at^2, t) + \max \right\} \Psi(x, t) = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ma^2 t^2}{2} \right\} \Psi(x, t) \quad (7)$$

donde

$$V(x+at^2, t) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto obtenemos una ecuación para la región $x > 0$ dada por

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \max \right\} \Psi(x, t) = \left\{ \frac{\sigma t^2}{2} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi(x, t) \quad (8)$$

y para la región $x > 0$, $\Psi(x, t) = 0$, con $\sigma = ma^2$, en el sistema no inercial.

La ecuación de Schrödinger en el sistema inercial sería difícil de resolver, en cambio la ecuación (8) se puede resolver por métodos usados comunmente. Al utilizar el método de separación de variables obtenemos

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{2m^2 a}{\hbar^2} \left(\frac{E}{ma} - x \right) \Psi(x) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} T(t) + \frac{i}{\hbar} \left(E - \frac{\sigma t^2}{2} \right) T(t) = 0 \quad (10)$$

Estas ecuaciones son familiares para nosotros, aparecieron de forma similar en el ejemplo anterior y la solución puede rápidamente obtenerse a partir de (c.5) y (c.13), dando como resultado

$$T(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(Et - \frac{\sigma t^3}{6} \right)\right] \quad (11)$$

$$\Psi(x) = \phi(y(x)) = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{ma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(u^3 + uy)\} du \quad (12)$$

donde $y = \alpha \left(\frac{E}{ma} - x \right)$ y $\alpha = \left(\frac{2m^2 a}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}}$. Pero a la ecuación (12) le debemos agregar la condición de frontera $\Psi(0) = 0$, condición que obliga a $\phi\left(\frac{\alpha E}{ma}\right) = 0$, es decir, $\frac{\alpha E}{ma}$ debe ser una raíz de la función de Airy. Con esto tenemos una cuantización del parámetro E y los valores permitidos para E son aquellos que cumplan con

$$\sqrt{\pi z} \left\{ J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) + J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \right\} = 0, \quad \text{con } z = \frac{\alpha E}{ma}$$

Entonces existe una autofunción para cada valor en que etiquetaremos por el número de la raíz de la función de Airy que las origina. Una solución a la ecuación (8) está dada por

$$\psi_n(x, t) = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{ma}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n t - \frac{ma^2 t^3}{6})\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(\frac{u^3}{3} - \frac{\alpha u}{ma}(x - E_n)\right)\right\} du \quad (13)$$

A continuación verificaremos que las ψ_n son ortonormales.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m^* dx &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2 ma} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(\frac{u^3}{3} - \frac{\alpha u}{ma}(x - E_n)\right)\right\} du \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left(\frac{v^3}{3} - \frac{\alpha v}{ma}(x - E_m)\right)\right\} dv dx \\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2 ma} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(\frac{u^3}{3} + \frac{\alpha u E_n}{ma}\right)\right\} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left(\frac{v^3}{3} + \frac{\alpha v E_m}{ma}\right)\right\} \int_0^{\infty} \exp(-i\alpha x(u-v)) dx dv du \\ &= \frac{\alpha}{2\pi ma} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(\frac{u^3}{3} + \frac{\alpha u E_n}{ma}\right)\right\} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left(\frac{v^3}{3} + \frac{\alpha v E_m}{ma}\right)\right\} \delta(u-v) dv du \\ &= \frac{\alpha}{2\pi ma} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{\alpha u}{ma}(E_n - E_m)\right\} du \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t\right\} \delta_{E_n E_m} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n \Psi_m^* dx = \delta_{nm}$$

Por lo tanto las Ψ_n son ortonormales y podemos expresar cualquier paquete de ondas como una combinación lineal de estas Ψ_n .

Este problema estaría resuelto si tuvieramos el propagador temporal de paquetes de onda, pero esto es analíticamente complicado como se puede apreciar de (14)

$$K(x, t, x', t') = \frac{\alpha^2}{4\pi^2 ma} \int_0^{\infty} \exp\left\{-i\left(E_n(t-t') - \frac{\alpha}{6}(t^3-t'^3)\right)\right\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(\frac{u^3}{3} - u\alpha\left(x - \frac{E_n}{ma}\right)\right)\right\} du \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left(\frac{v^3}{3} - v\alpha\left(x' - \frac{E_m}{ma}\right)\right)\right\} dv$$

Este problema de cálculo se presenta en el sistema no inercial, donde el fenómeno es más sencillo de describir, en el sistema inercial la dificultad es mayor. Pero existe otro camino equivalente por el cual podemos concluir algún hecho importante para la evolución temporal de los paquetes de onda.

Primero encontraremos la función solución a la ecuación de Schrödinger en el sistema inercial (15)

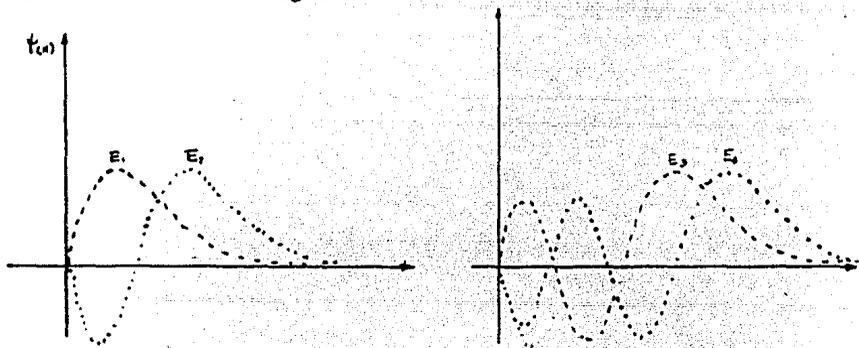
$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t)\right\} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (15)$$

al utilizar la transformación inversa dada por W^* sobre la Ψ_n , obtenemos

$$\psi_n(x, t) = W^* \psi_n(x, t) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} m a t \left(x - \frac{a t^2}{2}\right)\right\} \psi_n\left(x - \frac{a t^2}{2}, t\right); & x > \frac{a t^2}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\psi_n(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{m a}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (E_n t + \sigma t^3 - m a x t)\right\} A \left(\frac{\alpha E_n - x + a t^2}{m a}, \frac{x + a t^2}{2}\right) & x > \frac{a t^2}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para poder visualizar la estructura de estas funciones observece las figuras



Las soluciones de este problema son funciones que se desplazan en el eje x con una aceleración a , es decir, se mueven junto con la barrera de potencial.

Ahora calculemos la energía esperada de una partícula descrita por

$$\langle E \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x, t) \hat{H} \psi_n(x, t) dx$$

por la ecuación de Schrödinger tenemos

$$\langle E \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x, t) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_n(x, t)$$

$$\langle E \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^*(x, t) \Lambda \left(\frac{\alpha E_n}{ma} - x + \frac{at^2}{2} \right) \\ \left\{ \frac{-iE_n}{\hbar} - \frac{i\sigma t^2}{\hbar} + \frac{i\max}{\hbar} \right\} \chi(x, t) A \left(\frac{\alpha E_n}{ma} - x + \frac{at^2}{2} \right) + \\ + iat \chi(x, t) A' \left(\frac{\alpha E_n}{ma} - x + \frac{at^2}{2} \right) dx$$

donde $\chi(x, t) = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{ma}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (E_n t + \frac{\sigma t^3}{6} - \max t)\right\}$

y $A'(z) = \frac{d}{dz} A(z)$

debido a la ortonormalidad de las ψ_n tenemos

$$\langle E \rangle_n = E_n + \frac{\sigma t^2}{2} - ma \int_{-\infty}^{\infty} x \left(A \left(\frac{\alpha E_n}{ma} - x + \frac{at^2}{2} \right) \right)^2 dx + \\ + \hbar at \int_{-\infty}^{\infty} A \left(\frac{\alpha E_n}{ma} - x + \frac{at^2}{2} \right) A' \left(\frac{\alpha E_n}{ma} - x + \frac{at^2}{2} \right) dx$$

pero la primera integral es el valor medio de ψ_n que es un número real dado por $x_n(t) = x_n - \frac{at^2}{2}$ donde x_n es el valor medio de la función de Airy entre su raíz enésima e infinito. La segunda integral es cero pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(z) A'(z) dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dA^2 = \frac{A^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

por lo tanto el valor esperado para la energía es

$$\langle E \rangle_n = E_n + \sigma t^2 - \max_n \quad (16)$$

En términos de esta energía podemos calcular la energía asociada a cualquier paquete de onda dado por

$$\Phi_n(x, t) = \int_0^{\infty} C_n(t) \psi_n(x, t)$$

pues en este caso la energía asociada al paquete es

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) \hat{H} \phi(x, t) dx \\
&= \sum_n |C_n(t)|^2 \langle E_n \rangle \\
&= \frac{\sigma t^2}{2} + \sum_n |C_n(t)|^2 (E_n - \max_n)
\end{aligned}$$

Como vemos la energía de cualquier paquete de ondas aumenta en forma cuadrática con el tiempo. Esto es físicamente equivalente al caso clásico donde la energía de una partícula también aumente en forma cuadrática con el tiempo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se encontraron tres transformaciones canónicas distintas relacionadas con un cambio de un sistema inercial a otro no inercial, que simplifican la solución de algunos problemas. Pero si buscáramos estrictamente la transformación canónica que represente el paso de un sistema inercial a otro con aceleración uniforme, como en el caso newtoniano sólo podríamos aceptar la correspondiente a la traslación del espacio fase; pero la independencia entre las coordenadas y momentos nos permite construir las otras transformaciones canónicas que de alguna forma se pueden atribuir a un cambio a un sistema de referencia no inercial. Esto último amplía las posibilidades de simplificación de las ecuaciones de Hamilton y aún del mismo hamiltoniano. La primera transformación canónica, traslación espacial, también puede ser aplicada, con sentido físico, en el caso de sistemas que rotan respecto a un sistema inercial a diferencia de las siguientes dos transformaciones canónicas que tienen un significado físico solo en el caso de aceleración uniforme, pues el momento cinético de la coordenada ϕ se transforma como

$$P_{\phi} = p_{\phi} - mr^2\dot{\phi} \quad \text{que no tiene la forma utilizada en la traslación momental ni en la traslación del espacio fase.}$$

También se construyeron tres transformaciones unitarias análogas a las transformaciones canónicas con la pro-

piedad de que simplifican algunos problemas en mecánica cuántica no relativista.

Cuando se compararon los hamiltonianos clásicos y cuánticos obtenidos al aplicar estas transformaciones vemos una equivalencia entre ellos a excepción de los hamiltonianos correspondientes a la traslación simultánea de momentos y posiciones (espacio fase completo en mecánica clásica). Esta diferencia radica en el uso del operador unitario $W = \exp\left(\frac{i \text{mat} \hat{Q}}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i \text{at}^2 \hat{P}}{2\hbar}\right)$ en lugar del operador $W = \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\text{mat} \hat{Q} - \frac{\text{at}^2}{2} \hat{P})\right)$, esta última trasladaría simultáneamente las coordenadas y momentos dando un hamiltoniano de igual forma que el dado por (1.12). En cambio el operador usado en el trabajo primero traslada las coordenadas y posteriormente los momentos.

En los ejemplos se muestran algunas simplificaciones en la descripción de los fenómenos obtenidos al escoger apropiadamente el sistema de referencia y el tipo de transformación unitaria. Además de esta forma es posible interpretar físicamente cada paso en la solución del problema.

En el ejemplo del efecto Zeeman se obtuvo una predicción interesante: al situarse en el centro de masa de un átomo hidrogenoide, con espín total cero, inmerso en un campo magnético uniforme y rotar con una velocidad angular $\vec{\omega} = \frac{e}{m \cdot \hbar} \vec{B}$ no se observaría el desdoblamiento en el espectro electrónico, donde \vec{B} es el campo magnético uniforme.

No se observaría el efecto Zeeman normal. No tenemos noticias de la observación de este fenómeno.

Con el ejemplo de una partícula sumergida en un potencial constante se ilustró como el cambio a un sistema no inercial puede proporcionar un método para simplificar el cálculo del propagador de paquetes de ondas para un problema dado, a partir del propagador de partícula libre. Esto se debe a que, en general, en el sistema no inercial es escogido para describir el movimiento de la partícula como partícula libre.

En el último ejemplo de una barrera infinita acelerada se ilustra como al situarse en un sistema no inercial se puede resolver un problema con un hamiltoniano que depende explícitamente del tiempo en forma no separable de la coordenada, transformándolo en otro problema donde la dependencia temporal del hamiltoniano es separable de las variables espaciales. El resultado que se obtiene en este problema, de que la energía de la partícula aumenta se puede comparar con el resultado obtenido por Davis*, al hacer incidir un rayo de luz sobre un reflector perfecto con aceleración constante aumenta la frecuencia de la luz reflejada.

Este trabajo proporciona problemas sencillos de transformaciones unitarias que pueden ser utilizadas como ejemplos en un curso de mecánica cuántica no relativista, en

lugar del ejemplo comúnmente usado de la transformación que liga los esquemas de Schrödinger y de Heisenberg, operador de evolución temporal.

- * *Davies, P.C.W. and Fulling, S.A. Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time; conformal anomaly. Proc. R. Soc. Lond. A.*

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M. y Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions. Dover. 1972
- Constantinescu, F y Magyari, E. Problems in Quantum Mechanics. Pergamon Press. 1972
- Davydov. Quantum Mechanics. 2°Ed. Pergamon Press. 1976
- Feynman, R., Hibbs, A. Quantum Mechanics and Path Integrals. Mc Graw-Hill
- Flinkestein. Non Relativistics Mechanics. Addison Wesley 1950
- Hauser, W. Introducción a los principios de la Mecánica. 1969
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M. Quantum Mechanics Nonrelativistics theory. Pergamon Press. 1959
- Merzbacher, E. Quantum Mechanics . Wiley. 1970
- de la Peña, L. Introducción a la Mecánica Cuántica. Continental. 1979
- Petian, G. La Theorie des Fonctions de Bessel. Paris. CNRS 1955
- Taylor, T.T. Mechanics: Classical and Quantum. Pergamon Press 1976

INDICE

	Pag.
INTRODUCCION.....	I
TRANSFORMACIONES CANONICAS PARA SISTEMAS NO INERCIALES...1	
TRANSFORMACIONES UNITARIAS PARA SISTEMAS NO INERCIALES...7	
EFFECTO ZEEMAN NORMAL.....16	
UNA PARTICULA EN UN CAMPO UNIFORME.....19	
BARRERA DE POTENCIAL INFINITA MOVIENDOSE CON.....26	
ACELERACION CONSTANTE.	
CONCLUSIONES.....	35